

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

f παραγωγίσιμη	$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$	$\xrightarrow{x=x_0}$	$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$	\Leftrightarrow	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$
-----------------------	----------------------------	-----------------------	---	-------------------	---

<u>ισχύουν:</u>		$[f(x) \pm g(x)]'$	$=$	$f'(x) \pm g'(x)$		$[a * f(x)]'$	$=$	$a * f'(x)$, a: σταθερά
-----------------	--	--------------------	-----	-------------------	--	---------------	-----	-------------	--------------

Εξετάζω (με τη σειρά) σε ποια από τις 5 (πιο συχνές) περιπτώσεις είμαι:

1	Βασικές		f(x)		a	x	x^a	a^x	ln(x)	sin(x)	cos(x)
			f'(x)		0	1	a*x^{a-1}	ln(a)*a^x	$\frac{1}{x}$	cos(x)	- sin(x)

2	$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
----------	--

3	$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2} \quad , \quad g(x) \neq 0$
----------	--

4	$[f \circ g]' = [f(g(x))]' = f'(g(x)) * g'(x)$
----------	--

5	$f(x) = x^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln[x^x] \Rightarrow \ln[f(x)] = x * \ln[x] \Rightarrow (\ln[f(x)])' = (x * \ln x)' \Rightarrow$ $\frac{1}{f(x)} * f'(x) = (x)' * \ln x + x * (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = f(x) * [1 * \ln x + x * \frac{1}{x}] \Rightarrow f'(x) = x^x * [\ln x + 1]$
----------	--

De L'Hospital		$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm \infty}{\pm \infty}$	\Rightarrow	$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
---------------	--	--	---------------	---

f'(x)>0	$, x \in (a,b)$ \Rightarrow	f↑	αύξουσα	$, x \in [a,b]$		f''(x)>0	$, x \in (a,b)$ \Rightarrow	f ∪	κυρτή	$, x \in [a,b]$
f'(x)<0		f↓	φθίνουσα			f''(x)<0		f ∩	κοίλη	

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα (Κρίσιμα Σημεία)	$f'(x_0)=0$	ή	$\nexists f'(x_0)$		Πιθανά Σημεία Καμπής	$f''(x_0)=0$	ή	$\nexists f''(x_0)$
--	-------------	---	--------------------	--	-----------------------------	--------------	---	---------------------

Αν f'(x₀)=0		f''(x₀) < 0	ή	f'(x)	>0	αριστερά	\Rightarrow	x₀ τοπικό μέγιστο
					<0	δεξιά		
		f''(x₀) > 0	ή	f'(x)	<0	δεξιά	\Rightarrow	x₀ τοπικό ελάχιστο
					>0	αριστερά		

Ασύμπτωτες	Κατακόρυφη	$x = x_0$	αν	$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)] = \pm \infty$	ή	$\lim_{x \rightarrow x_0^+} [f(x)] = \pm \infty$
	Οριζόντια	$y = y_0$		$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x)] = y_0$		$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x)] = y_0$
	Πλάγια	$y = bx + a$		$\lim_{x \rightarrow -\infty (+\infty)} \left[\frac{f(x)}{x} \right] = b \neq 0$	και	$\lim_{x \rightarrow -\infty (+\infty)} [f(x) - bx] = a \in \mathbb{R}$

Ολοκληρώματα		$\int [f'(x)]dx = f(x) + c$		$\int [f(x)]dx = F(x) + c$		$\left(\int [f(x)] dx \right)' = f(x)$
--------------	--	-----------------------------	--	----------------------------	--	---

Βασικές		F(x)		0	1	x^a	a^x	$\frac{1}{x}$	sin(x)	cos(x)
		f(x)		a	$x + c$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\ln(x) + c$	$-[\cos(x)] + c$	$\sin(x) + c$

Εμβαδόν	=	$\int_a^b [f(x)]dx$	=	$[F(x)]_{x=a}^{x=b}$	=	F(b) - F(a)
---------	---	---------------------	---	----------------------	---	-------------

Ισχύουν:		$\int_a^a [f(x)]dx = 0$		$\int_a^b [f(x)]dx = - \int_b^a [f(x)]dx$		$\int_a^b [f(x)]dx = \int_a^c [f(x)]dx + \int_c^b [f(x)]dx$
----------	--	-------------------------	--	---	--	---

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b [f(x)]dx \pm \int_a^b [g(x)]dx$		$\int_a^b [k * f(x)]dx = k * \int_a^b [f(x)]dx$		$\int_a^\infty [f(x)]dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^k [f(x)]dx$
--	--	---	--	--

$\int [f(g(x)) * g'(x)]dx$	=	Θέτω: $\begin{cases} u = g(x) \\ du = [g'(x)]dx \end{cases}$	=	$\int [f(u)]du$
----------------------------	---	--	---	-----------------

$\int [f(x) * g'(x)]dx$	=	$[f(x) * g(x)] - \int [f'(x) * g(x)]dx$	→	$\int (u)dv = uv - \int (v)du$
-------------------------	---	---	---	--------------------------------

$\Gamma(x) = \int_0^\infty [t^{x-1} * e^{-t}]dt$	$x > 0$	και	$\Gamma(x + 1) = x! = x * (x - 1) * (x - 2) * ... * 2 * 1$
--	---------	-----	--

Διαφορικές Εξισώσεις	Δίνει συνάρτηση με x, y, y' και μια λύση y, είτε για έλεγχο (0=0), είτε για αρχικές τιμές
----------------------	---