ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1 – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Α	Η εκφώνηση δίνει μια **f(x)**, και ζητά να βρούμε την **μονοτονία** της.

ΒΗΜΑΤΑ

1

Βρίσκω το **Πεδίο Ορισμού** της f(x) → **x∈**, δηλαδή τις τιμές του x για τις οποίες **ορίζεται** η **f**.

πχ.: $f(x) = x^2 \rightarrow x \in (-\infty,+\infty)$ (ή x∈ℝ) και $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ (ή x∈ℝ-{0})

2

Βρίσκω που είναι **συνεχής** η **f**, δηλαδή:

- στα **κλειστά διαστήματα** του **πεδίου ορισμού** της, γράφω, ως συνδυασμός βασικών συναρτήσεων (**πολυωνυμική**, **ρητή**, **εκθετική**, **λογαριθμική**, **τριγωνομετρική**, **ριζική**, **απόλυτη**),
- στα **σημεία**, των **ανοιχτών διαστημάτων** που είναι αριθμός (όχι ±∞) (πχ: x∈(**a**,b])
  βρίσκω το όριο της f(x) πριν και μετά το σημείο, δηλαδή τα: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

  και αν: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, γράφω ότι είναι **συνεχής στο** σημείο **a**, αλλιώς ότι δεν είναι.

Γράφω συνολικά τα διαστήματα που βρήκα ότι είναι συνεχής.

πχ.: $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty) \rightarrow$ f **συνεχής** στο **x∈(-∞,0)∪(0,+∞) ως ρητή**

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} [f(x)] = \lim\limits_{x\to 0^+} \left[\frac{1}{x}\right] = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f[(x)] = \lim\limits_{x\to 0^-} \left[\frac{1}{x}\right] = -\infty \end{cases}$$ (πριν 0 ⇒ αρνητικό) ⇒ $\lim\limits_{x\to 0^+} [f(x)] \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f[(x)]$ ⇒ f **μη συνεχής** στο **0**

3

Βρίσκω την f' στα ανοιχτά διαστήματα της f (πχ: f→ **x∈**(a,**b]**, f'→ **x∈**(a,**b)**), παραγωγίζοντας την f (βάζω ').

Στα σημεία ανοιχτών διαστημάτων (πχ: (-∞,x_0)∪(x_0,+∞)) εξετάζω: $\lim\limits_{x\to x_0^+} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)$

Αν είναι ίσα, γράφω ότι είναι **παραγωγίσιμη στο** σημείο X_0, αλλιώς ότι δεν είναι.
Αν το διάστημα είναι ανοιχτό μόνο από τη μια πλευρά, κοιτάζω αν ορίζεται (πχ: [x_0,+∞) → ∃ $\lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$)

Ισχύουν:

$f(x)$		a	x	x^a	a^x	ln(x)	sin(x)	cos(x)
$f'(x)$		0	1	$a*x^{a-1}$	$\ln(a)*a^x$	$\frac{1}{x}$	cos(x)	- sin(x)

$[f(x) \pm g(x)]'$	=	$f'(x) \pm g'(x)$		$[a * f(x)]'$	=	$a * f'(x)$	, a: σταθερά

$[f(x) * g(x)]'$	=	$f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$		$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'$	=	$\frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$	g(x)≠0

$[fog]' = [f(g(x))]'$	=	$f'(g(x)) * g'(x)$		$f(x) = x^x$	⇒	$\ln[f(x)] = \ln[x^x] \Rightarrow (\ln[f(x)])' = (x * \ln x)'$

	πχ.: $f(x) = \frac{1}{x}$ → $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ → f **συνεχής** στο $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ (από πάνω) $f'(x) = [f(x)]' = \left[\frac{1}{x}\right]' = [x^{-1}]' = (-1) * x^{-1-1} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$, $x \in (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ (το 0 σε ανοιχτό)
	πχ.: $f(x) = x^2$, $x \geq 0$ → $x \in [0,+\infty)$ → f **συνεχής** στο $x \in [0,+\infty)$ **ως πολυωνυμική** $\begin{cases} f'(x) = [f(x)]' = [x^2]' = 2 * x^{2-1} = 2x, \ x \in (0,+\infty) \\ \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2-0}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}(x) = 0 \ (\text{ορίζεται}) \end{cases}$ ⇒ f **παραγωγίσιμη** στο $[0,+\infty)$

4	Για να βρω τη μονοτονία της f, δηλαδή σε ποια διαστήματα είναι φθίνουσα και σε ποια αύξουσα: • Υπολογίζω x_o τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = 0$ • Για τα διαστήματα που ορίζεται η f' υπολογίζω την τιμή της για έναν αριθμό του διαστήματος. Το πρόσημο της f' είναι ίδιο για όλες τις τιμές του διαστήματος, δηλαδή έχουν ίδια μονοτονία. • $f'(x) < 0$ → **f φθίνουσα (↓)** • $f'(x) > 0$ → **f αύξουσα (↑)**

+	Αν ζητά **τοπικά ακρότατα (ελάχιστο, μέγιστο)**, είναι τα x_o, και **πιθανότατα** τα σημεία που **δεν ορίζεται** η **f'** • $f''(x_o) > 0$ → **x_o τοπικό ελάχιστο** [ή $f'(x) < 0$ **πριν** το x_o και $f'(x) > 0$ **μετά** το x_o] • $f''(x_o) < 0$ → **x_o τοπικό μέγιστο** [ή $f'(x) > 0$ **πριν** το x_o και $f'(x) < 0$ **μετά** το x_o]

+	Αν ζητά **κυρτότητα**, ακολουθώ ομοίως την διαδικασία για να βρω την f', για να βρω την f''. • $f''(x) < 0$ → **f κοίλη (∩)** • $f''(x) > 0$ → **f κυρτή (∪)** Τα σημεία x_o τέτοια ώστε: $f''(x_o) = 0$, και όπου δεν ορίζεται η f'' είναι πιθανά σημεία καμπής.

+	Αν ζητά **τομείς με άξονες** υπολογίζω τα σημεία: (0, f(0)) για τον x, και (x_o, f(x_o)=0) για τον y.

+	Αν ζητά ασύμπτωτες (οριζόντιες, κατακόρυφες, πλάγιες), βρίσκω τις: • $x = x_o$ → τα σημεία (όχι ± ∞) που δεν ορίζεται η f (από Π.Ο.) $\xrightarrow{\text{αν}}$ $\lim\limits_{x\to x_o^-}[f(x)] = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_o^+}[f(x)] = \pm\infty$ • $y = y_o$ → για x → ± ∞, αν το όριο έχει τιμή αριθμό (όχι ± ∞) $\xrightarrow{\text{αν}}$ $\lim\limits_{x\to -\infty}[f(x)] = y$ ή $\lim\limits_{x\to +\infty}[f(x)] = y$

B		De L'Hospital		$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	⇒	$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$
πχ.						
a)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[\sin x]'}{[x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = \cos 0 = 1$					
b)	$\lim\limits_{x\to 0}(x^2 * e^{-x}) = (\infty * 0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[x^2]'}{[e^x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[2x]'}{[e^x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 0$					

Γ	<u>Η εκφώνηση δίνει ένα ολοκλήρωμα</u>: $\int[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$ ή $\int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$, και ζητά να το υπολογίσουμε.

ΒΗΜΑΤΑ

1	Υπολογίζω την $\mathbf{F(x)}$ <u>τέτοια ώστε</u>: $[\mathbf{F(x)}]' = \mathbf{f(x)}$ <u>και</u> $\int[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{F(x)}$
	<u>πχ.</u>: $\int[\mathbf{x^2}]\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{x^{2+1}}}{\mathbf{2+1}} = \frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}}$

2	Αν $\int_\mathbf{a}^\mathbf{b}[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$ επιπλέον <u>ισχύει</u>: $\int_\mathbf{a}^\mathbf{b}[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = [\mathbf{F(x)}]_\mathbf{a}^\mathbf{b} = \mathbf{F(b)} - \mathbf{F(a)}$
	<u>πχ.</u>: $\int_1^4[\mathbf{x^2}]\mathbf{dx} = \left[\frac{\mathbf{x^{2+1}}}{\mathbf{2+1}}\right]_1^4 = \left[\frac{\mathbf{x^3}}{\mathbf{3}}\right]_1^4 = \frac{\mathbf{4^3}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1^3}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{3}} - \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{\mathbf{63}}{\mathbf{3}}$

+	$\int_\mathbf{a}^\mathbf{a}[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{0}$		$\int_a^b[\mathbf{k * f(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{k} * \int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^b[\mathbf{f(x) \pm g(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} \pm \int_a^b[\mathbf{g(x)}]\mathbf{dx}$
	$\int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = -\int_b^a[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^c[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} + \int_c^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^b[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \lim_{\mathbf{k}\to\infty}\int_a^k[\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$

+	$\int\left[\mathbf{f(g(x)) * g'(x)}\right]\mathbf{dx}$	=	<u>Θέτω</u>: $\begin{cases}\mathbf{u = g(x)}\\ \mathbf{du = [g'(x)]dx}\end{cases}$	=	$\int[\mathbf{f(u)}]\mathbf{du}$
	$\int[\mathbf{f(x) * g'(x)}]\mathbf{dx}$	=	$[\mathbf{f(x) * g(x)}] - \int[\mathbf{f'(x) * g(x)}]\mathbf{dx}$	→	$\int\mathbf{(u)dv = uv} - \int\mathbf{(v)du}$

Δ	<u>Η εκφώνηση δίνει διαφορική εξίσωση</u>: <u>πχ.</u>: $\mathbf{y' - y = x}$, και μια λύση της σε μορφή: $\mathbf{y = x}$ <u>ή</u> $\mathbf{y(x) = a}$

ΒΗΜΑΤΑ

1	<u>Αν δίνει</u>: $\mathbf{y = x}$ βρίσκουμε την $\mathbf{y' = (x)'}$ <u>και</u> τις αντικαθιστούμε στην $\mathbf{y' - y = x}$ για να δούμε αν **0=0.**
	<u>πχ.</u>: $\begin{cases}\mathbf{y' + y = x}\\ \mathbf{y = x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}y' + y = x\\ y = x\\ y' = (x)' = 1\end{cases} \Rightarrow 1 + x = x \Rightarrow \mathbf{1 = 0},$ <u>άρα</u> δεν είναι λύση της

2	<u>Αν δίνει</u>: $\mathbf{y(x) = a}$ αντικαθιστούμε $\mathbf{y' = \frac{dy}{dx}}$ στην $\mathbf{y' - y = x} \Rightarrow \mathbf{\frac{dy}{dx} - y = x}$ <u>και</u> βάζω σε **κάθε πλευρά x,y**
	<u>πχ.</u>: $\begin{cases}\mathbf{y' + \frac{1}{y} = 0}\\ \mathbf{y(0) = 1}\end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1 * \frac{1}{y} \Rightarrow (y)dy = (-1)dx \Rightarrow \int(y)\,dy = \int(-1)\,dx \Rightarrow \mathbf{\frac{y^2}{2} = -x + c}$ $\xRightarrow{\mathbf{y(0)=1}} \frac{1^2}{2} = (-1)*0 + c \Rightarrow \frac{1}{2} = 0 + c \Rightarrow \mathbf{c = \frac{-1}{2}} \rightarrow \mathbf{\frac{y^2}{2} = -x - \frac{1}{2}} \Rightarrow \mathbf{y^2 = -2*x - 1} \Rightarrow \mathbf{y = \sqrt{-2x - 1}}, \mathbf{x} \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

f παραγωγίσιμη	$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$	$\xrightarrow{x=x_o}$	$f'(x_o)=\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)$	$\Leftrightarrow$	$\lim\limits_{x\to x_o^+}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)=\lim\limits_{x\to x_o^-}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)$

Ισχύουν:		$[f(x) \pm g(x)]'$	$=$	$f'(x) \pm g'(x)$		$[a * f(x)]'$	$=$	$a * f'(x)$	, a: σταθερά

Εξετάζω (με τη σειρά) σε ποια από τις 5 (πιο συχνές) περιπτώσεις είμαι:

1	Βασικές		$f(x)$		a	x	x^a	a^x	$\ln(x)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
			$f'(x)$		0	1	$a*x^{a-1}$	$\ln(a)*a^x$	$\frac{1}{x}$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$

2	$[f(x) * g(x)]' = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
3	$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g'(x)}{g(x)^2}$, $g(x)\neq 0$
4	$[fog]' = [f(g(x))]' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$
5	$f(x) = x^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln[x^x] \Rightarrow \ln[f(x)] = x * \ln[x] \Rightarrow (\ln[f(x)])' = (x * \ln x)' \Rightarrow$ $\frac{1}{f(x)} * f'(x) = (x)' * \ln x + x * (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = f(x)*[1 * \ln x + x * \frac{1}{x}] \Rightarrow f'(x) = x^x*[\ln x + 1]$

De L'Hospital		$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ή $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

$f'(x)>0$	,x∈(a,b) ⇒	f↑	αύξουσα	,x∈[a,b]		$f''(x)>0$	,x∈(a,b) ⇒	f ∪	κυρτή	,x∈[a,b]
$f'(x)<0$		f↓	φθίνουσα			$f''(x)<0$		f ∩	κοίλη	

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα (Κρίσιμα Σημεία)		$f'(x_o)=0$	ή	$\nexists f'(x_o)$		Πιθανά Σημεία Καμπής		$f''(x_o)=0$	ή	$\nexists f''(x_o)$

Αν $f'(x_o)=0$		$f''(x_o) < 0$	ή	$f'(x)$	>0	αριστερά	⇒	x_o τοπικό μέγιστο
					<0	δεξιά		
		$f''(x_o) > 0$	ή	$f'(x)$	<0	δεξιά	⇒	x_o τοπικό ελάχιστο
					>0	αριστερά		

Ασύμπτωτες	Κατακόρυφη	$x = x_o$	αν	$\lim\limits_{x\to x_o^-}[f(x)] = \pm\infty$	ή	$\lim\limits_{x\to x_o^+}[f(x)] = \pm\infty$
	Οριζόντια	$y = y_o$		$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = y_o$		$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = y_o$
	Πλάγια	$y = bx + a$		$\lim\limits_{x\to-\infty(+\infty)}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = b \neq 0$	και	$\lim\limits_{x\to-\infty(+\infty)}[f(x) - bx] = a \in \mathbb{R}$

Ολοκληρώματα		$\int [f'(x)]dx = f(x) + c$		$\int [f(x)]dx = F(x) + c$		$\left(\int [f(x)]\,dx\right)' = f(x)$

Βασικές		$F(x)$		0	1	x^a	a^x	$\frac{1}{x}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
		$f(x)$		a	$x + c$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + c$	$\frac{a^x}{\ln(a)} + c$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$	$-[\cos(x)] + c$	$\sin(x) + c$

Εμβαδόν	=	$\int_a^b [f(x)]dx$	=	$[F(x)]_{x=a}^{x=b}$	=	$F(b) - F(a)$

<u>Ισχύουν</u>:		$\int_a^a [f(x)]dx = 0$		$\int_a^b [f(x)]dx = -\int_b^a [f(x)]dx$		$\int_a^b [f(x)]dx = \int_a^c [f(x)]dx + \int_c^b [f(x)]dx$

$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b [f(x)]dx \pm \int_a^b [g(x)]dx$		$\int_a^b [k * f(x)]dx = k * \int_a^b [f(x)]dx$		$\int_a^\infty [f(x)]dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_a^k [f(x)]dx$

$\int [f(g(x)) * g'(x)]dx$	=	<u>Θέτω</u>: $\begin{cases} u = g(x) \\ du = [g'(x)]dx \end{cases}$	=	$\int [f(u)]du$

$\int [f(x) * g'(x)]dx$	=	$[f(x) * g(x)] - \int [f'(x) * g(x)]dx$	→	$\int (u)dv = uv - \int (v)du$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty [t^{x-1} * e^{-t}]dt$	$x>0$	<u>και</u>	$\Gamma(x+1) = x! = x * (x-1) * (x-2) * \ldots * 2 * 1$

Διαφορικές Εξισώσεις	Δίνει συνάρτηση με x, y, y’ και μια λύση y, είτε για έλεγχο (0=0), είτε για αρχικές τιμές

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1

f παραγωγίσιμη	$\mathbf{f'(x)=\frac{df(x)}{dx}}$	$\xrightarrow{x=x_o}$	$\mathbf{f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)}$	$\Leftrightarrow$	$\lim_{x\to x_o^+}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)=\lim_{x\to x_o^-}\left(\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right)$

<u>Ισχύουν</u>:		$[\mathbf{f(x)} \pm \mathbf{g(x)}]'$	=	$\mathbf{f'(x)} \pm \mathbf{g'(x)}$		$[\mathbf{a} * \mathbf{f(x)}]'$	=	$\mathbf{a * f'(x)}$	, a: σταθερά

Εξετάζω (με τη σειρά) σε ποια από τις 5 (πιο συχνές) περιπτώσεις είμαι:

1	Βασικές		**f(x)**		**a**	**x**	$\mathbf{x^a}$	$\mathbf{a^x}$	**ln(x)**	**sin(x)**	**cos(x)**
			f′(x)		**0**	**1**	$\mathbf{a*x^{a-1}}$	$\mathbf{ln(a)*a^x}$	$\mathbf{\frac{1}{x}}$	**cos(x)**	**- sin(x)**

πχ.	
a)	$\mathbf{f(x) = 4x^{\frac{5}{2}} + 2x} \;\Rightarrow\; \mathbf{f'(x)} = \left[4x^{\frac{5}{2}} + 2x\right]' = (4x^{\frac{5}{2}})' + (2x)' = 4*\left(\frac{5}{2} * x^{\frac{5}{2}-1}\right) + 2*(1) = 10*x^{\frac{3}{2}} + 2 = 10*\sqrt{x^3}+2$
b)	$\mathbf{f(x)} = \begin{cases}\mathbf{x} & , \mathbf{x \le 1} \\ \mathbf{2-x} & , \mathbf{x > 1}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{f(1)} = 1 \\ \mathbf{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = \lim_{x\to 1^-} x = 1 \\ \mathbf{\lim_{x\to 1^+} f(x)} = \lim_{x\to 1^+}(2-x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\lim_{x\to 1^-} f(x)} = \mathbf{\lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)} \rightarrow$ f συνεχής στο ℝ $\mathbf{f'(x)}=\begin{cases}(x)' = 1 & , x < \mathbf{1} \\ (2-x)' = -1 & , x > \mathbf{1}\end{cases} \rightarrow \begin{cases} \mathbf{\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}\mathbf{\frac{x-1}{x-1}} = 1 \\ \mathbf{\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}} = \lim_{x\to 1^+}\mathbf{\frac{2-x-1}{x-1}} = -1 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \neq \mathbf{\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}} \rightarrow \mathbf{\nexists f'(1)}$ <u>Άρα</u> f παραγωγίσιμη στο x∈(-∞,1)∪(1,+∞) [<u>ή</u> f παραγωγίσιμη στο ℝ-{1}]
c)	$\mathbf{f(x) = \lvert x-3 \rvert} \;\Rightarrow\; f(x) = \begin{cases}-(x-3) = 3-x, & x \in (-\infty, 3] \\ x-3 & , x \in [3, +\infty)\end{cases}$ (και συνεχίζω όμοια με το (b))

2	$[\mathbf{f(x) * g(x)}]' = \mathbf{f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)}$

πχ.
$\mathbf{f(x) = x^2*e^x}$, x∈ℝ $\Rightarrow \mathbf{f'(x)} = [x^2 * e^x]' = (x^2)' * e^x + x^2 * (e^x)' = (2x) * e^x + x^2 * (\ln e * e^x) = x * e^x * (2+x)$

3	$\left[\mathbf{\frac{f(x)}{g(x)}}\right]' = \mathbf{\frac{f'(x)*g(x) - f(x)*g'(x)}{g(x)^2}}$, g(x)≠0

πχ.
$\mathbf{f(x)} = \mathbf{\frac{x^2}{x+1}} \Rightarrow \mathbf{f'(x)} = \frac{(x^2)'*(x+1)+x^2*(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x*(1+x)-x^2*(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x+2x^2-x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2-1}{(x+1)^2} = 1-\frac{1}{(x+1)^2}$

4	$[fog]' = [f(g(x))]' = f'\big(g(x)\big) * g'(x)$

πχ.	
a)	$f(x) = (x^2+2)^5 \Rightarrow f'(x) = [(x^2+2)^5]' = 5*(x^2+2)^{5-1} * (x^2+2)' = 5*(x^2+2)^4 * (2x) = 10*x*(x^2+2)^4$
b)	$f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(e^{-x^2}\right)' = \ln(e)* e^{-x^2} * (-x^2)' = 1*e^{-x^2} * (\text{-}2x) = \text{-}2x*e^{-x^2}$
c)	$f(x) = x^2*e^{x^2} \Rightarrow f'(x) = \left(x^2 * e^{x^2}\right)' = (x^2)' * e^{x^2} + x^2 * \left(e^{x^2}\right)' = 2x*e^{x^2} + x^2 * [\ln(e) * e^{x^2} * (x^2)'] =$ $= 2x*e^{x^2} + x^2 * [1 * e^{x^2} * (2x)] = 2x * e^{x^2} * (1+x^2)$

5	$f(x) = x^x \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln[x^x] \Rightarrow \ln[f(x)] = x * \ln[x] \Rightarrow (\ln[f(x)])' = (x * \ln x)' \Rightarrow$ $\frac{1}{f(x)} * f'(x) = (x)' * \ln x + x * (\ln x)' \Rightarrow f'(x) = f(x)*[1 * \ln x + x * \frac{1}{x}] \Rightarrow f'(x) = x^x*[\ln x + 1]$

πχ.
$f(x) = 5x^{2x} \Rightarrow \ln[f(x)] = \ln[5x^{2x}] \Rightarrow \ln[f(x)] = 2x * \ln[5x] \Rightarrow (\ln[f(x)])' = [2x * \ln(5x)]' \Rightarrow$ $\frac{1}{f(x)} * f'(x) = (2x)' * \ln(5x) + 2x * [\ln(5x)]' \Rightarrow f'(x) = f(x)*[2 * \ln(5x) + 2x * \frac{1}{5x} * (5x)'] \Rightarrow$ $f'(x) = 5x^{2x} * [2 * \ln(5x) + \frac{2}{5} * (5)] \Rightarrow f'(x) = 5x^{2x} * [2 * \ln(5x) + 2] \Rightarrow f'(x) = 10x^{2x} * [\ln(5x) + 1]$

De L'Hospital		$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ή $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$	$\Rightarrow$	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

πχ.	
a)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[\sin x]'}{[x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{1}\right) = \lim\limits_{x\to 0}(\cos x) = \cos 0 = 1$
b)	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+3}{5x-2}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[2x+3]'}{[5x-2]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}$
c)	$\lim\limits_{x\to 0}(x^2 * e^{-x}) = (\infty*0) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{e^x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[x^2]'}{[e^x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x}{e^x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[2x]'}{[e^x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2}{e^x}\right) = 0$
d)	$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = (0^\infty) = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}} \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{[\ln x]'}{[x]'}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{(1)}{1}}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x^{\frac{1}{x}}\right) = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$

$f'(x)>0$	$,x\in(a,b)$ $\Rightarrow$	$f\uparrow$	αύξουσα	$,x\in[a,b]$		$f''(x)>0$	$,x\in(a,b)$ $\Rightarrow$	$f\cup$	κυρτή	$,x\in[a,b]$
$f'(x)<0$		$f\downarrow$	φθίνουσα			$f''(x)<0$		$f\cap$	κοίλη	

Πιθανά Τοπικά Ακρότατα (Κρίσιμα Σημεία)		$f'(x_0)=0$	ή	$\nexists\, f'(x_0)$		**Πιθανά Σημεία Καμπής**		$f''(x_0)=0$	ή	$\nexists\, f''(x_0)$

<u>Αν</u> $f'(x_0)=0$		$f''(x_0)<0$	ή	$f'(x)$	>0 <0	αριστερά δεξιά	$\Rightarrow$	x_0 **τοπικό μέγιστο**
		$f''(x_0)>0$	ή	$f'(x)$	<0 >0	δεξιά αριστερά	$\Rightarrow$	x_0 **τοπικό ελάχιστο**

Ασύμπτωτες	Κατακόρυφη	$x=x_0$	αν	$\lim\limits_{x\to x_0^-}[f(x)]=\pm\infty$	ή	$\lim\limits_{x\to x_0^+}[f(x)]=\pm\infty$
	Οριζόντια	$y=y_0$		$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=y_0$		$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=y_0$
	Πλάγια	$y=bx+a$		$\lim\limits_{x\to-\infty(+\infty)}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=b \quad \neq 0$	<u>και</u>	$\lim\limits_{x\to-\infty(+\infty)}[f(x)-bx]=a \ \in\mathbb{R}$

πχ.

<u>Μελετήστε την</u>: $f(x)=x*e^{-x}$, $x\in\mathbb{R}$

- <u>**Πεδίο Ορισμού**</u>: $x\in(-\infty,+\infty)$
- <u>**Τομές με Άξονες**</u>: $\begin{cases}\text{Στον } y: & f(0)=0*e^0=0 \Rightarrow f(0)=0\\ \text{Στον } x: & f(x_0)=0 \Rightarrow x_0*e^0=0 \Rightarrow x_0=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(0,0)\\(0,0)\end{cases} \Rightarrow$ (0,0) σημείο τομής
- <u>**Ασύμπτωτες**</u>: $\begin{cases}\textbf{Κατακόρυφες}:\\ \textbf{Οριζόντιες}:\\ \textbf{Πλάγιες}:\end{cases}$ $\begin{cases}\textbf{f συνεχής} \text{ στο } \mathbb{R}, \text{ άρα δεν υπάρχουν}\\ \lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}[x*e^{-x}]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(x)'}{(e^x)'}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right]=\mathbf{0}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[x*e^{-x}]=(-\infty*+\infty)=-\infty, \text{ άρα δεν υπάρχει}\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right]=+\infty, \text{ άρα δεν υπάρχει}\end{cases}$
- <u>**Μονοτονία**</u>: $\begin{cases}\mathbf{f'(x)}=(x*e^{-x})'=(x)'*e^{-x}+x*(e^{-x})'=1*e^{-x}+x*e^{-x}*(-x)'=\mathbf{e^{-x}*(1-x)}\\ \mathbf{f'(x)=0} \Rightarrow e^{-x}*(1-x)=0 \Rightarrow e^{-x}=0 \text{ ή } (1-x)=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow \mathbf{x=1}\end{cases}$

  Για: $\begin{cases}x\in(-\infty,\mathbf{1}]: & f(x)\uparrow\\ x\in[\mathbf{1},+\infty): & f(x)\downarrow\end{cases}$ $\Rightarrow$ τοπικό **μέγιστο** στο **x=1** <u>και</u> **f(1)=e^{-1}**

  <u>άρα</u> **ολικό μέγιστο** το σημείο **(1, e^{-1})**, <u>αφού</u>: $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)]=\mathbf{0}$ <u>και</u> $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$

- <u>**Κυρτότητα**</u>: $\begin{cases}\mathbf{f''(x)}=[\mathbf{f'(x)}]'=[e^{-x}*(1-x)]'=(e^{-x})'*(1-x)+e^{-x}*(1-x)'=e^{-x}*(x-2)\\ \mathbf{f''(x)=0} \Rightarrow e^{-x}*(x-2)=0 \Rightarrow e^{-x}=0 \text{ ή } (x-2)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow \mathbf{x=2}\end{cases}$

  Για: $\begin{cases}x\in(-\infty,\mathbf{2}]: & f(x)\cup\\ x\in[\mathbf{2},+\infty): & f(x)\cap\end{cases}$ $\Rightarrow$ σημείο καμπής στο **x=2** <u>και</u> **f(2)=2∗e^{-2}** , <u>άρα</u> το σημείο **(2, 2∗e^{-2})**

Ολοκληρώματα		$\int [\mathbf{f'(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{f(x) + c}$		$\int [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{F(x) + c}$		$\left(\int [\mathbf{f(x)}]\,\mathbf{dx}\right)' = \mathbf{f(x)}$

Βασικές		$\mathbf{F(x)}$		$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{x^a}$	$\mathbf{a^x}$	$\mathbf{\frac{1}{x}}$	**sin(x)**	**cos(x)**
		$\mathbf{f(x)}$		$\mathbf{a}$	$\mathbf{x + c}$	$\mathbf{\frac{x^{a+1}}{a+1} + c}$	$\mathbf{\frac{a^x}{\ln(a)} + c}$	**ln(|x|) + c**	**-[cos(x)] + c**	**sin(x) + c**

πχ.

a)

$$\begin{cases} \int[\mathbf{x} * (\mathbf{x^2 - 3})^4]\mathbf{dx} \qquad (\text{ομοίως για: } \sqrt{x^2-3} = (x^2-3)^{\frac{1}{2}}) \\ \text{Θέτω: } \mathbf{u = x^2 - 3} \Rightarrow \frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(x^2-3) \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = (2x)dx \Rightarrow \mathbf{dx} = \left(\frac{1}{2x}\right)\mathbf{du} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int[\mathbf{x} * (\mathbf{x^2 - 3})^4]\mathbf{dx} = \int[x * (u)^4] * \left(\frac{1}{2x}\right) du = \frac{1}{2} * \int[u^4]du = \frac{1}{2} * \left(\frac{u^5}{5}\right) + c = \mathbf{\frac{(x^2-3)^5}{10} + c}$$

b)

$$\begin{cases} \int\left[\mathbf{\frac{x+2}{x^2+2x-8}}\right]\mathbf{dx} \\ \mathbf{x^2 + 2x - 8 = x^2 + 4x - 2x - 8 = x(x+4) - 2(x+4) = (x-2)(x+4)} \end{cases} \Rightarrow \int\left[\mathbf{\frac{x+2}{(x-2)(x+4)}}\right]\mathbf{dx}$$

$$\mathbf{\frac{(x+2)}{(x-2)(x+4)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x+4)}} \Rightarrow (x+2) = A(x+4) + B(x-2) \Rightarrow 1*(x)+(2) = (A+B)x + 2(2A-B) \Rightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ 2(2A - B) = 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A = \frac{2}{3} \\ B = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \int\left[\frac{2}{3} * \frac{1}{(x-2)} + \frac{1}{3} * \frac{1}{(x+4)}\right]dx \Rightarrow \int\left[\frac{2}{3} * \frac{1}{(x-2)}\right]dx + \int\left[\frac{1}{3} * \frac{1}{(x+4)}\right]dx \Rightarrow \mathbf{\frac{2}{3} * \ln|x-2| + \frac{1}{3} * \ln|x+4| + c}$$

Εμβαδόν	=	$\int_a^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$	=	$[\mathbf{F(x)}]_{\mathbf{x=a}}^{\mathbf{x=b}}$	=	**F(b) – F(a)**

Ισχύουν:		$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}} [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx = 0}$		$\int_a^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = -\int_b^a [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^c [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} + \int_c^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$

$\int_a^b [\mathbf{f(x) \pm g(x)}]\mathbf{dx} = \int_a^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} \pm \int_a^b [\mathbf{g(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^b [\mathbf{k * f(x)}]\mathbf{dx} = \mathbf{k} * \int_a^b [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$		$\int_a^\infty [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx} = \lim_{\mathbf{k \to \infty}} \int_a^k [\mathbf{f(x)}]\mathbf{dx}$

πχ.

a)

$$\int_1^2 [3x^3 - x^{-3} + 3]dx = \left[3\frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + 3x\right]_1^2 = \left(\frac{3*2^4}{4} - \frac{2^{-2}}{-2} + 3*2\right) - \left(\frac{3*1^4}{4} - \frac{1^{-2}}{-2} + 3*1\right) = \mathbf{\frac{117}{8}}$$

b)

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{x}\right]dx = \lim_{k \to 0^+} \int_k^1 \left[\frac{1}{k}\right]dk = \lim_{k \to 0^+} [\ln|k|]_k^1 = \lim_{k \to 0^+} (\ln 1 - \ln k) = \lim_{k \to 0^+} (-\ln k) = -(-\infty) = \mathbf{+\infty}$$

$\int [f(g(x)) * g'(x)]dx$	=	<u>Θέτω</u>: $\begin{cases} u = g(x) \\ du = [g'(x)]dx \end{cases}$	=	$\int [f(u)]du$

πχ.	
a)	$\begin{cases} \int[(1-2x)^6]\,dx \\ \text{Θέτω: } u = 1-2x \Rightarrow \frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(1-2x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = -2 \Rightarrow du = (-2)dx \Rightarrow dx = \left(\frac{-1}{2}\right)du \end{cases} \Rightarrow$ $\int[(1-2x)^6]dx = \int[(u)^6] * \left(\frac{-1}{2}\right)du = \frac{-1}{2} * \left(\frac{u^7}{7}\right) + c = \frac{-1}{2} * \frac{(1-2x)^7}{7} + c = \frac{-(1-2x)^7}{14} + c$
b)	$\begin{cases} \int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]dx \\ \text{Θέτω: } u = e^x + 1 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dx}(u) = \frac{d}{dx}(e^x+1) \Rightarrow \frac{du}{dx} = e^x \Rightarrow du = (e^x)dx \Rightarrow dx = \left(\frac{1}{e^x}\right)du \\ x \to -\infty \Rightarrow u \to 1 \quad \text{και} \quad x = 0 \Rightarrow u = 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$ $\int_{-\infty}^{0}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]dx = \int_1^2\left[\frac{e^x}{u}\right] * \left(\frac{1}{e^x}\right)du = \int_1^2\left[\frac{1}{u}\right]du = [\ln(u)]_1^2 = \ln(2) - \ln(1) = \ln\left(\frac{2}{1}\right) = \ln(2)$

$\int [f(x) * g'(x)]dx$	=	$[f(x) * g(x)] - \int [f'(x) * g(x)]dx$	$\rightarrow$	$\int (u)dv = uv - \int (v)du$

πχ.
$\int[x^4 * \ln x]dx = \int[\ln x * x^4]dx = \int\left[\ln x * \left(\frac{x^5}{5}\right)'\right]dx = \ln x * \left(\frac{x^5}{5}\right) - \int\left[(\ln x)' * \frac{x^5}{5}\right]dx =$ $= \frac{\ln x * x^5}{5} - \int\left[\left(\frac{1}{x}\right) * \frac{x^5}{5}\right]dx = \frac{\ln x * x^5}{5} - \int\left[\frac{x^4}{5}\right]dx = \frac{\ln x * x^5}{5} - \frac{x^{4+1}}{(4+1)*5} + c = \frac{\ln x * x^5}{5} - \frac{x^5}{5*5} + c = \frac{x^5}{5} * \left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

$\Gamma(x) = \int_0^\infty [t^{x-1} * e^{-t}]dt$	x>0	<u>και</u>	$\Gamma(x+1) = x! = x * (x-1) * (x-2) * \ldots * 2 * 1$

πχ.				
a)	$\frac{\Gamma(6)}{2*\Gamma(3)} = \frac{\Gamma(5+1)}{2*\Gamma(2+1)} = \frac{5!}{2*2!} = \frac{5*4*3*2!}{2*2!} = \frac{5*4*3}{2} = 30$		b)	$\int_0^\infty [t^3 * e^{-t}]dt = \Gamma(3+1) = \Gamma(4) = 4! = 4*3*2*1 = 24$

Διαφορικές Εξισώσεις	Δίνει συνάρτηση με x, y, y' και μια λύση y, είτε για έλεγχο (0=0), είτε για αρχικές τιμές

πχ.	
a)	$\begin{cases} y' - y = e^x \\ y = x * e^x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' - y = e^x \\ y = x * e^x \\ y' = 1 * e^x + x * \ln e * e^x = (x+1) * e^x \end{cases} \Rightarrow (x+1) * e^x - x * e^x = e^x \Rightarrow x+1-x=1 \Rightarrow 0=0$
b)	$\begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -ay \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)dy = (-a)dx \Rightarrow \int \frac{1}{y}dy = \int(-a)\,dx \Rightarrow \ln\lvert y\rvert = (-a)x + c \xRightarrow{y(0)=1} c=0 \rightarrow y = e^{-ax}$