→ Triangulo de la palma (a linea punteada

→ 27 huesos en la mano; 8 constituyu la muñeca, con mov. rentringido

→ Junturas son llamadas: MCP (Falange del metacarpo)
IP (Interfalangeal)

* Las 9 Junturas IP → 1 grado de libertad (DOF)
(Flexión / Extensión)

* Las 5 Junturas MCP → 2 grados de libertad (DOF)
(Abducción / Aducción) (Flexion / Extension)

* La muñeca puede ser modelada con 6 DOF:
3 DOF's para traslación y 3 DOF's para rotación

→ El modelo completo de la mano supera los 30 DOF's!

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

- RESTRICCIONES DE DISEÑO:

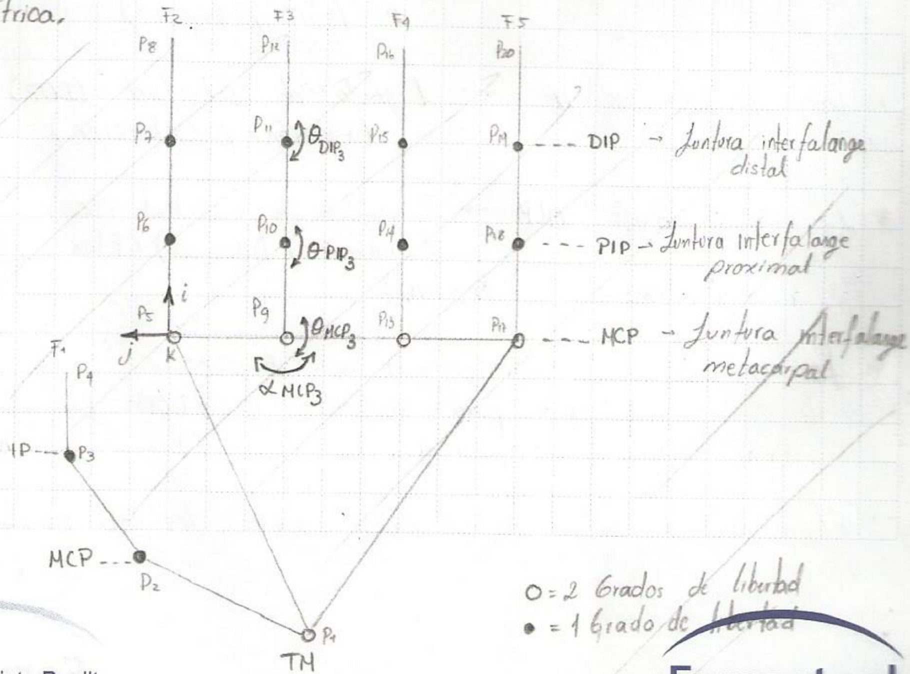
i) La mano es representada como una figura esquelética y cada dedo como una cadena cinemática, cuya base está anclada a la palma y cada dedo es un efector final.

→ "Entiendase cadena cinemática como el resultado de conectar entre sí varios eslabones de tal manera que sea posible el movimiento relativo entre ellos, proporcionandose un movimiento de salida controlado en respuesta a un movimiento de entrada"

ii) La palma es representada como un cuerpo rígido. Significa que las flexiones o arcos de la palma no están permitidas

iii) El modelo de la mano esta asociado a la estructura de la mano, es decir, la presencia de piel y otros tejidos blandos no son influencia significativa en la presición del modelo.

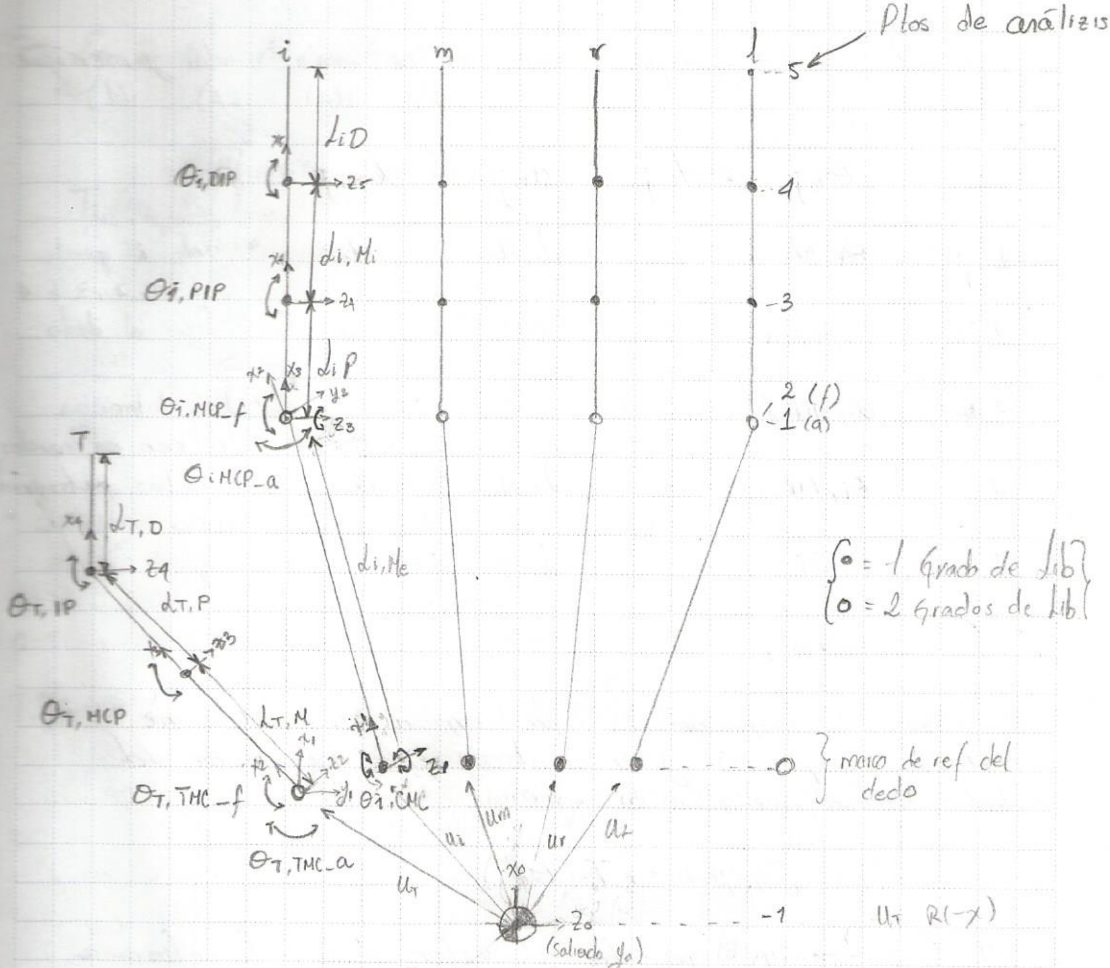
iv) Se desarrolla un modelo con base en una estructura no volumétrica.



(A)

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal



Ref en Muñeca.

* Configuración de la cadena cinemática con 24 Grados de libertad DOF.

→ Pulgar (Thumb): 3 Junturas → $L_{T,M}$; $L_{T,P}$; L_{TD}
4 DOF → θ_{T,TMC_a}; θ_{T,TMC_f}; $\theta_{T,MCP}$; $\theta_{T,IP}$

→ Indice (index)
Medio (Middle) : 4 Junturas → L_{iMe}, L_{iP}, L_{iMi}, L_{iD}
Anillo (Ring) 5 DOF → θ_{iCMC}; θ_{iMCP_a}; θ_{iMCP_f}; θ_{iPIP}; θ_{iDIP}
Meñique (Little)

Turning Ideas into Reality.
Ferrostaal

→ Denavit - Hartenberg para dedos índice, medio, anular y meñique.
(1) (2) (3) (4)

Juntura	$\theta_{i,j}$ {Variable de articulación}	$d_{i,j}$	$a_{i,j}$	$\alpha_{i,j}$
1	$\theta_{i,CMC}$	0	$l_{i,Me}$	$-\pi/2$
2	θ_{i,MCP_a}	0	0	$\pi/2$
3	θ_{i,MCP_f}	0	$l_{i,P}$	0
4	$\theta_{i,PIP}$	0	$l_{i,M}$	0
5	$\theta_{i,DIP}$	0	$l_{i,D}$	0
	Visto en z		Visto en x	

* donde i puede ser 1, 2, 3 ó 4 según el dedo.

* Las distancias l_i son extraídas de cartas antropométricas

Se obtiene la expresión P_i que expresa una matriz que contiene la posición y la orientación de la punta del dedo índice, medio, anular y meñique.

$$P_i = {}^{-1}_{0}T_i(u_i) \cdot {}^{0}_{5}T_i(\theta_{i,j})$$

- ${}^{-1}_{0}T_i(u_i)$ → u_i representa el vector desde la referencia (−1) de la muñeca hasta el marco de referencia del dedo (0)

- ${}^{0}_{5}T_i(\theta_{i,j})$ → Es la matriz que contiene las matrices homogéneas entre el marco de referencia del dedo (0) y la respectiva punta del dedo (5)

Por tanto ${}^{0}_{5}T_i(\theta_{i,j})$ se puede expresar como:

$${}^{0}_{5}T_i = {}^{0}_{1}T_i(\theta_{i,CMC}) \cdot {}^{1}_{2}T_i(\theta_{i,MCP\_a}) \cdot {}^{2}_{3}T_i(\theta_{i,MCP\_f}) \cdot {}^{3}_{4}T_i(\theta_{i,PIP}) \, {}^{4}_{5}T_i(\theta_{i,DIP})$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

→ En D-H la matriz de transformación homogenea general es:

$$T_i(\theta_{i,j}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{i,j}) & -Sen(\theta_{i,j})\cdot Cos(\alpha_{i,j}) & Sen(\theta_{ij})\cdot Sen(\alpha_{ij}) & a_{ij}\cdot Cos(\theta_{ij}) \\ Sen(\theta_{ij}) & Cos(\theta_{ij})\cdot Cos(\alpha_{ij}) & -Cos(\theta_{ij})\cdot Sen(\alpha_{ij}) & a_{ij}\cdot Sen(\theta_i) \\ 0 & Sen(\alpha_{ij}) & \cos(\alpha_{ij}) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

• Sustituyendo cada una de las junturas en la matriz de tranf. general.

0-1

$$T_1^0(\theta_{i,CMC}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iCMC}) & -\cancel{S(\theta_{iCMC})\cdot C(\pi/2)}^{0} & S(\theta_{iCMC})\cdot \cancel{S(-\pi/2)}^{-1} & d_{iMe}\cdot C(\theta_{iCMC}) \\ S(\theta_{iCMC}) & \cancel{C(\theta_{iCMC})\cdot C(-\pi/2)}^{0} & -C(\theta_{iCMC})\cdot \cancel{S(-\pi/2)}^{-1} & d_{iMe}\cdot S(\theta_{iCMC}) \\ 0 & \cancel{S(-\pi/2)}^{-1} & \cancel{C(-\pi/2)}^{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_1^0(\theta_{iCMC}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iCMC}) & 0 & -S(\theta_{iCMC}) & d_{iMe}\cdot C(\theta_{iCMC}) \\ S(\theta_{iCMC}) & 0 & C(\theta_{iCMC}) & d_{iMe}\cdot S(\theta_{iCMC}) \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2^1(\theta_{iMCP\_a}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iMCP\_a}) & -S(\theta_{iMCP\_a})\cdot\cancelto{0}{C(\pi/2)} & S(\theta_{iMCP\_a})\cdot\cancelto{1}{S(\pi/2)} & 0 \\ S(\theta_{iMCP\_a}) & C(\theta_{iMCP\_a})\cdot\cancelto{0}{C(\pi/2)} & -C(\theta_{iMCP\_a})\cdot\cancelto{1}{S(\pi/2)} & 0 \\ 0 & \cancelto{1}{S(\pi/2)} & \cancelto{0}{C(\pi/2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_2^1(\theta_{iMCP\_a}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iMCP\_a}) & 0 & S(\theta_{iMCP\_a}) & 0 \\ S(\theta_{iMCP\_a}) & 0 & -C(\theta_{iMCP\_a}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2(\theta_{iMCP\_f}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iMCP\_f}) & -S(\theta_{iMCP\_f})\cdot\cancelto{1}{C(0)} & \cancelto{0}{S(\theta_{iMCP\_f})\cdot S(0)} & L_{ip}\cdot C(\theta_{iMCP\_f}) \\ S(\theta_{iMCP\_f}) & C(\theta_{iMCP\_f})\cdot\cancelto{1}{C(0)} & \cancelto{0}{-C(\theta_{iMCP\_f})\cdot S(0)} & L_{ip}\cdot S(\theta_{iMCP\_f}) \\ 0 & \cancelto{0}{S(0)} & \cancelto{1}{C(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_3^2(\theta_{iMCP\_f}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iMCP\_f}) & -S(\theta_{iMCP\_f}) & 0 & L_{ip}\cdot C(\theta_{iMCP\_f}) \\ S(\theta_{iMCP\_f}) & C(\theta_{iMCP\_f}) & 0 & L_{ip}\cdot S(\theta_{iMCP\_f}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$$T_4^3(\theta_{iPIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iPIP}) & -S(\theta_{iPIP})\cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{S(\theta_{iPIP})\cdot S(0)}^{0} & L_{iMi}\cdot C(\theta_{iPIP}) \\ S(\theta_{iPIP}) & C(\theta_{iPIP})\cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{-C(\theta_{iPIP})\cdot S(0)}^{0} & L_{iMi}\cdot S(\theta_{iPIP}) \\ 0 & \cancel{S(0)}^{0} & \cancel{C(0)}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_4^3(\theta_{iPIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iPIP}) & -S(\theta_{iPIP}) & 0 & L_{iMi}\cdot C(\theta_{iPIP}) \\ S(\theta_{iPIP} & C(\theta_{iPIP}) & 0 & L_{iMi}\, S(\theta_{iPIP}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$T_5^4(\theta_{iDIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iDIP}) & -S(\theta_{iDIP})\cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{S(\theta_{iDIP})\cdot S(0)}^{0} & L_{iD}\cdot C(\theta_{iDIP}) \\ S(\theta_{iDIP}) & C(\theta_{iDIP})\cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{-C(\theta_{iDIP})\cdot S(0)}^{0} & L_{iD}\cdot S(\theta_{iDIP}) \\ 0 & \cancel{S(0)}^{0} & \cancel{C(0)}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_5^4(\theta_{iDIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{iDIP} & -S(\theta_{iDIP}) & 0 & L_{iD}\cdot C(\theta_{iDIP}) \\ S(\theta_{iDIP} & C(\theta_{iDIP}) & 0 & L_{iD}\cdot C(\theta_{iDIP}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

La Matriz de transformación para el vector $T_i(U_i)$ se representa:

$$T_0^{-1}(U_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U_{ix} \\ 0 & 1 & 0 & U_{iy} \\ 0 & 0 & 1 & U_{iz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se tienen todos los elementos para determinar la matriz de transformación homogenea de los dedos indice, medio, anular, y meñique. (Hacer producto de matrices con Matlab)

– Denavit-Hartenberg para dedo pulgar.

Juntura	$\theta_{T,j}$	d_{Tj}	a_{Tj}	α_{Tj}
1	θ_{T,TCM_a}	0	0	$\pi/2$
2	θ_{T,TCM_f}	0	L_{TM}	0
3	θ_{T,MCP_f}	0	L_{TP}	0
4	$\theta_{T,IP}$	0	L_{TD}	0

* Hacer un ajuste en U_T haciendo una rotación en x para ajustar sistema de coordenadas.

La matriz de trasformación para el dedo pulgar se representa

$$P_T = {}^{-1}_{0}T_T(u_T)\cdot {}^{0}_{4}T_T(\theta_{Tj}) = {}^{-1}_{0}T_T(u_T)\cdot {}^{0}_{1}T_T(\theta_{T\,TMC\text{-}a})\cdot {}^{1}_{2}T_T(\theta_{TMC\text{-}f})\; {}^{2}_{3}T(\theta_{TMCP\text{-}f})\cdot {}^{3}_{4}T_T(\theta_{TIP})$$

Obteniendo la matriz homogenea de cada juntura, se tiene:

$$T^{0}_{1}(\theta_{T,TMC\text{-}a}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMC\text{-}a}) & \cancelto{0}{-S(\theta_{TMC\text{-}a})\cdot C(\pi/2)} & S(\theta_{TMC\text{-}a})\cdot \cancelto{1}{S(\pi/2)} & 0 \\ S(\theta_{TMC\text{-}a}) & \cancelto{0}{C(\theta_{TMC\text{-}a})\cdot C(\pi/2)} & -C(\theta_{TMC\text{-}a})\cdot \cancelto{1}{S(\pi/2)} & 0 \\ 0 & \cancelto{1}{S(\pi/2)} & \cancelto{0}{C(\pi/2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T^{0}_{1}(\theta_{TMC\text{-}a}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMC\text{-}a} & 0 & S(\theta_{TMC\text{-}a}) & 0 \\ S(\theta_{TMC\text{-}a}) & 0 & -C(\theta_{TMC\text{-}a}) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T^{1}_{2}(\theta_{TMC\text{-}f}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMC\text{-}f}) & -S(\theta_{TMC\text{-}f})\cdot \cancelto{1}{C(0)} & \cancelto{0}{S(\theta_{TMC\text{-}f})\cdot S(0)} & L_{TM}\cdot C(\theta_{TMC\text{-}f}) \\ S(\theta_{TMC\text{-}f}) & C(\theta_{TMC\text{-}f})\cdot \cancelto{1}{C(0)} & \cancelto{0}{-C(\theta_{TMC\text{-}f})\cdot S(0)} & L_{TM}\cdot S(\theta_{TMC\text{-}f}) \\ 0 & \cancelto{0}{S(0)} & \cancelto{1}{C(0)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$$\rightarrow T_2^1(\theta_{TMC-f}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMC-f}) & -S(\theta_{TMC-f}) & 0 & L_{TM} \cdot C(\theta_{TMC-f}) \\ S(\theta_{TMC-f}) & C(\theta_{TMC-f}) & 0 & L_{TM} \cdot S(\theta_{TMC-f}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^2(\theta_{TMCP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMCP}) & -S(\theta_{TMCP}) \cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{S(\theta_{TMCP}) \cdot S(0)}^{0} & L_{TP} \cdot C(\theta_{TMCP}) \\ S(\theta_{TMCP}) & C(\theta_{TMCP}) \cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{-C(\theta_{TMCP}) \cdot S(0)}^{0} & L_{TP} \cdot S(\theta_{TMCP}) \\ 0 & \cancel{S(0)}^{0} & \cancel{C(0)}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_3^2(\theta_{T,MCP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TMCP}) & -S(\theta_{TMCP}) & 0 & L_{TP} \cdot C(\theta_{TMCP}) \\ S(\theta_{TMCP}) & C(\theta_{TMCP}) & 0 & L_{TP} \cdot S(\theta_{TMCP}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_4^3(\theta_{TIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TIP}) & -S(\theta_{TIP}) \cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{S(\theta_{TIP}) \cdot S(0)}^{0} & L_{TD} \cdot C(\theta_{TIP}) \\ S(\theta_{TIP} & C(\theta_{TIP}) \cdot \cancel{C(0)}^{1} & \cancel{-C(\theta_{TIP}) \cdot S(0)}^{0} & L_{TD} \cdot S(\theta_{TIP}) \\ 0 & \cancel{S(0)}^{0} & \cancel{C(0)}^{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$$\rightarrow T_4^3(\theta_{TIP}) = \begin{bmatrix} C(\theta_{TIP}) & -S(\theta_{TIP}) & 0 & L_{TD} \cdot C(\theta_{TIP}) \\ S(\theta_{TIP}) & C(\theta_{TIP}) & 0 & L_{TD} \cdot S(\theta_{TIP}) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_0^{-1}(U_T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U_{T,x} \\ 0 & C(-\pi/2) & -S(-\pi/2) & U_{T,y} \\ 0 & S(-\pi/2) & C(-\pi/2) & U_{T,z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow T_0^{-1}(U_T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & U_{Tx} \\ 0 & 0 & 1 & U_{Ty} \\ 0 & -1 & 0 & U_{Tz} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Se tienen todos los elementos para la determinación de la matriz de transformación homogenea del dedo pulgar.

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

Lista Variables del modelo a Matlab.

θ_{iCMC}	-	q_{ic}	$\theta_{T,TCM\text{-}f}$	-	q_{ptf}
L_{iMe}	-	L_{ime}	$\theta_{T,TCM\text{-}a}$	-	q_{pta}
θ_{iMCP_a}	-	q_{ima}	L_{TM}	-	L_{tm}
$\theta_{iMCP\text{-}f}$	-	q_{imf}	$\theta_{T,MCP\text{-}f}$	-	q_{pm}
$L_{i,P}$	-	L_{ip}	L_{TP}	-	L_{tp}
θ_{iPIP}	-	q_{iP}	$\theta_{T,IP}$	-	q_{pi}
$L_{i,mi}$	-	L_{imi}	L_{TD}	-	L_{td}
θ_{iDIP}	-	q_{id}			
$L_{i,D}$	-	L_{id}			

→ * Hemero ⟶ SW → CD
↳ Manipuladores y Robots móviles →

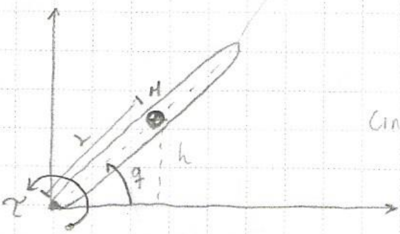
→ Modelo Dinámico: $\begin{cases} \nearrow \text{Newton-Euler} \\ \rightarrow \text{Lagrangiano (+)} \end{cases}$

· Formulación Lagrangiana:

$$\tau = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \quad ; \quad \mathcal{L} = \underbrace{K}_{\text{Cinética}} - \underbrace{U}_{\text{Potencial}}$$

q_i: Coordenadas generalizadas
τ: Vector de fuerzas y pares aplicados en q_i
$\mathcal{L}$: Función lagrangiana.
K: Energía cinética.
U: energía potencial

Ejemplo monoarticular



Cinética $\begin{cases} K = \frac{1}{2} I \cdot \dot{\theta}^2 \\ I = M \cdot l^2 \end{cases}$

Inercia
Velocidad ∡ al ²

Potencial → $U: m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen}(\theta)$.

Lagrangiano → $\mathcal{L} = K - U$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} M \cdot l^2 \cdot \dot{\theta}^2 - m \cdot g \cdot l \cdot \operatorname{sen}(\theta) ;$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta) ,$$

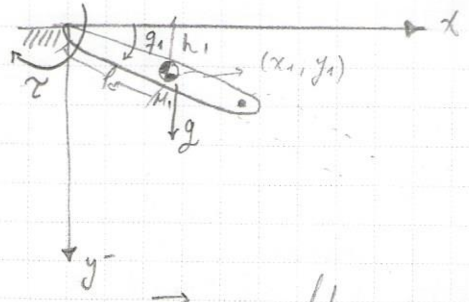
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{(2)} \cdot m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} = m \cdot l^2 \cdot \dot{\theta} \rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}}\right) = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} ;$$

Turning Ideas into Reality. Ferrostaal

$$\tau = m \cdot l^2 \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l \cdot \cos(\theta)$$

El modelo dinámico se restringe a los movimientos relacionados con el impulso de flexion de los 3 últimos grados de libertar de las cadenas cinemáticas abiertas que corresponden, a los dedos indice - Medio - Anular y meñique y a los 2 últimos grados de libertad de la cadena cinemática que corresponde al dedo gordo. Restringiendose el modelo dinámico a movimientos de cierre de mano básicos.

1^{er} GDL (indice - Medio - Anular - Meñique)



$$x_1 = l_{c1} \cdot Sen(q_1)$$
$$y_1 = l_{c1} \cdot Cos(q_1)$$

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot \vec{v}_1 \xrightarrow{\text{revoluta}} K_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{q}_1$$
$$I_1 = m_1 \cdot l_{c1}^2$$

$$U_1 = m \cdot g \cdot h \longrightarrow U_1 = m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot Sen(q_1)$$

- $\mathcal{L}_1 = K_1 - U_1 = \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{q}_1^2 - m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot Sen(q_1)$

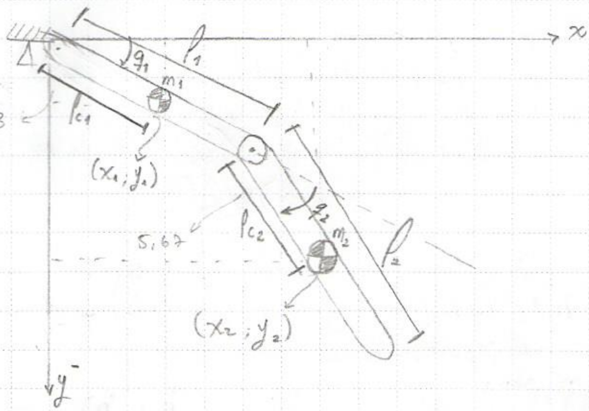
- $\dfrac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial q_1} = - m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot \cos(q_1)$

$$\cdot\ \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{q}_1} = I_1 \cdot \dot{q}_1 = m_1 \cdot l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1$$

$$\cdot\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \dot{q}_1}\right) = m_1 \cdot l_{c1}^2 \cdot \ddot{q}_1$$

$$\rightarrow \tau_1 = m_1 \cdot l_{c1}^2 \cdot \ddot{q}_1 + m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot \cos(q_1)$$

2^{do} GDL (indice - Medio - Anular - Meñique)



Vector de Velocidad

$V_1 = (\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1)^T$ Traspuesta

$V_2 = (\dot{x}_2 \quad \dot{y}_2)^T$

$$K = K_1 + K_2 \qquad , \qquad U = U_1 + U_2$$

$$K = \left[\frac{1}{2} m_1 \cdot V_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{q}_1^2\right] + \left[\frac{1}{2} m_2 \cdot V_2^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2\right]$$

→ Coordenadas del centro de masa Eslabón 1.

$$x_1 = l_{c1} \operatorname{sen}(q_1)$$
$$y_1 = -l_{c1} \cos(q_1)$$

Turning Ideas into Reality.

Coordenadas centro de masa eslabón 2:

$$x_2 = l_1 \cdot \operatorname{Sen}(q_1) + l_{c2} \cdot \operatorname{Sen}(q_1 + q_2)$$

$$y_2 = -l_1 \cdot \operatorname{Cos}(q_1) - l_{c2} \cdot \operatorname{Cos}(q_1 + q_2)$$

→ Vector de Velocidad según la posición del centro de masa de cada eslabón.

$$\begin{cases} V_1 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{c1} \cdot \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 \\ l_{c1} \cdot \operatorname{Sen}(q_1) \cdot \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\ \\ V_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(q_1) \cdot \dot{q}_1 + l_{c2} \cdot \cos(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \\ l_1 \cdot \operatorname{sen}(q_1) \cdot \dot{q}_1 + l_{c2} \cdot \operatorname{Sen}(q_1 + q_2) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_1^2 = l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2 \\ V_2^2 = l_1^2 \cdot \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 \cdot (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + 2 l_1 \cdot l_{c2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cdot \operatorname{Cos}(q_2) \end{cases}$$

Energia Cinética

$$K \begin{cases} K_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{q}_1^2 \\ + \\ K_2 = \frac{1}{2} m_2 \cdot l_1^2 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot l_{c2}^2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) + m_2 l_1 \cdot l_{c2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \cdot \cos(q_2) \\ \quad + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \end{cases}$$

Energia Potencial:

$$U = U_1 + U_2 = \overbrace{[-m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot \cos(q_1)]}^{U_1} + \overbrace{[-m_2 \cdot g \cdot l_1 \cdot \cos(q_1) - m_2 \cdot g \cdot l_{c2} \cos(q_1 + q_2)]}^{U_2}$$

Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left[m_1 \cdot l_{c1}^2 + m_2 \cdot l_1^2\right] \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot l_{c2}^2 \cdot \left[\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2\right]$$

$$+ m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2\right] + \left[m_1 \cdot l_{c1} + m_2 l_1\right] \cdot g \cdot \cos(q_1)$$

$$+ m_2 \cdot g\, l_{c2} \cdot \cos(q_1 + q_2) + \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \left[\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right]^2$$

$$\tau_1 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} \qquad \Bigg| \qquad \tau_2 = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2}$$

(Eslabón 1) (Eslabón 2)

Eslabón 1:

- $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = \left[m_1 \cdot l_{c1}^2 + m_2 l_1^2\right] \cdot \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \cdot \dot{q}_1 + m_2 l_{c2}^2 \dot{q}_2 + 2 m_2 l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \dot{q}_1$$

$$+ m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \dot{q}_2 + I_1 \cdot \dot{q}_1 + I_2\left[\dot{q}_1 + \dot{q}_2\right]$$

- $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1}\right) = \left[m_1 \cdot l_{c1}^2 + m_2 \cdot l_1^2 + m_2 \cdot l_{c2}^2 + 2 m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2)\right] \cdot \ddot{q}_1$$

$$+ \left[m_2 \cdot l_{c2}^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2)\right] \cdot \ddot{q}_2$$

$$- 2 m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \operatorname{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 - m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \operatorname{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_2^2$$

$$+ I_1 \cdot \ddot{q}_1 + I_2\left[\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2\right].$$

$$\cancel{= \left[m_1 l_{c1}^2 + I_1 + I_2 + m_2 \cdot l_1^2 + 2 m_2 \cdot l_{c2}^2 + 2 m_2 l_1 l_{c2} \cos(q_2)\right] \ddot{q}_1}$$

$$\cancel{+ \left[2 m_2 \cdot l_{c2}^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cos(q_2) + I_2\right] \cdot \ddot{q}_2 - 2 m_2 l_1 l_{c2} \operatorname{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2}$$

$$\cancel{- m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \operatorname{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_2^2}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = -[m_1 \cdot l_{c1} + m_2 l_1] \cdot g \cdot sen(q_1) - m_2 \cdot g \cdot l_{c2} \cdot sen(q_1 + q_2)$$

$$* \quad \tau_1 = [m_1 \cdot l_{c1}^2 + m_2 l_1^2 + m_2 l_{c2}^2 + I_1 + I_2 + 2 m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cos(q_2)] \ddot{q}_1$$
$$+ [m_2 l_{c2}^2 + m_2 l_1 l_{c2} \cdot \cos(q_2) + I_2] \cdot \ddot{q}_2 - 2 m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2$$
$$- m_2 l_1 \cdot l_{c2} \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_2^2 - [m_1 \cdot l_{c1} + m_2 \cdot l_1] \cdot g \cdot sen(q_1)$$
$$- m_2 \cdot g \cdot l_{c2} \cdot sen(q_1 + q_2).$$

Eslabon 2:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \cdot l_{c2}^2 \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \dot{q}_1 + I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2).$$

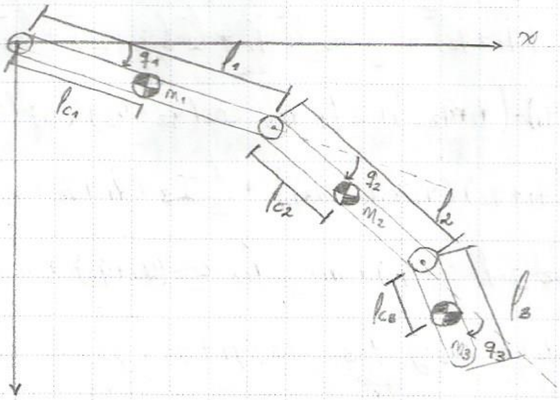
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2 \cdot l_{c2}^2 \cdot \ddot{q}_1 + m_2 \cdot l_{c2}^2 \cdot \ddot{q}_2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \ddot{q}_1$$
$$- m_2 l_1 \cdot l_{c2} \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2 + I_2 \cdot \ddot{q}_1 + I_2 \cdot \ddot{q}_2.$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = - m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot sen(q_2) (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \cdot \dot{q}_2) - m_2 \cdot l_{c2} \cdot g \cdot sen(q_1 + q_2).$$

$$* \quad \tau_2 = [m_2 l_{c2}^2 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) + I_2] \ddot{q}_1 + [m_2 l_{c2}^2 + I_2] \cdot \ddot{q}_2$$
$$+ m_2 \cdot l_1 l_{c2} \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_1^2 + m_2 \cdot l_{c2} \cdot g \cdot sen(q_1 + q_2)$$

- Control de movimiento (Kelly)

→ 3 Grados de libertad (Falange distal, Media, Proximal)



l_i = longitud eslabón
l_{ci} = longitud al centro de masa.

- Energía cinética.

$$K_T(q,\dot{q}) = K_1(q,\dot{q}) + K_2(q,\dot{q}) + K_3(q,\dot{q})$$

$$\cdot\ K_i(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m_i \cdot v_i(q,\dot{q})^2 + \frac{1}{2} I_i \cdot \dot{q}_i^2 \quad ; \quad (i = 1, 2, 3)$$

- Energía Potencial:

$$U_T(q) = U_1(q) + U_2(q) + U_3(q)$$

$$\cdot\ U_i(q) = m_i \cdot g \cdot h \quad ; \quad (i = 1, 2, 3)$$

- Lagrangiano:

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = K_T(q,\dot{q}) - U_T(q,\dot{q})$$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = K_1(q,\dot{q}) + K_2(q,\dot{q}) + K_3(q,\dot{q}) - \left[U_1(q) + U_2(q) + U_3(q) \right]$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$\circ$ $\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} m_1 \cdot l_{c1}^2 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_1 \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left[l_1^2 \cdot \dot{q}_1^2 + l_{c2}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + 2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) \cdot \right.$

$\left. (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2) \right] + \frac{1}{2} I_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + \frac{1}{2} m_3 \left[l_1^2 \cdot \dot{q}_1^2 + l_2^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 + l_{c3}^2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 \right.$

$+ 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(q_2) (\dot{q}_1) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2) + 2 l_1 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_2 + q_3) \cdot (\dot{q}_1) \cdot (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)$

$\left. + 2 l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)(\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3) \right] + \frac{1}{2} I_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2 + \dot{q}_3)^2 +$

$m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \cdot \cos(q_1) + m_2 \cdot g \cdot l_1 \cos(q_1) + m_2 \cdot g \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_1 + q_2) + m_3 \cdot g \cdot l_1 \cos(q_1)$

$+ m_3 \cdot g \cdot l_2 \cdot \cos(q_1 + q_2) + m_3 \cdot g \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_1 + q_2 + q_3)$.

→ Dado la extención del lagrangiano se determinan los torques por medio de una forma general para robots de n-grados de libertad.

- Energia cinética:

$$K(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot M(q) \cdot \dot{q} \quad ; \qquad U(q)$$

$M(q)$ = Matriz de inercia $(n \times n)$

$$\mathcal{L}(q,\dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T \cdot M(q) \cdot \dot{q} - U(q)$$

→ Ecuación de movimiento.

$$\tau = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \cdot M(q) \cdot \dot{q}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T M(q) \cdot \dot{q}\right) + \frac{\partial}{\partial q}(U(q)) \quad ; \quad (A)$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

→ Se puede decir que:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \cdot M(q) \cdot \dot{q}\right) = M(q) \cdot \dot{q} \quad ;$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T \cdot M(q) \cdot \dot{q}\right)\right] = M(q) \cdot \ddot{q} + \dot{M}(q) \cdot \dot{q} \quad ;$$

Sustituyendo lo anterior en la Ecuacion (A) se tiene.

$$\tau = M(q) \cdot \ddot{q} + \dot{M}(q) \cdot \dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(\dot{q}^T M(q) \cdot \dot{q}\right) + \frac{\partial U(q)}{\partial q}$$

De forma compacta:

$$\tau = M(q) \cdot \ddot{q} + C(q,\dot{q}) \cdot \dot{q} + g(q)$$

$$\rightarrow C(q,\dot{q}) \cdot \dot{q} = \dot{M}(q) \cdot \dot{q} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q}\left(\dot{q}^T M(q) \cdot \dot{q}\right)$$

└→ Fuerzas centrifugas y de Coriolis

$$\rightarrow g(q) = \frac{\partial U(q)}{\partial q} \longrightarrow \text{Fuerzas gravitacionales.}$$

→ τ = Pares aplicados.

→ Ecuación de movimiento para sistema 3 GDL

$$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} M_{11}(q) & M_{12}(q) & M_{13}(q) \\ M_{21}(q) & M_{22}(q) & M_{23}(q) \\ M_{31}(q) & M_{32}(q) & M_{33}(q) \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de Inercia}} \cdot \ddot{q} + \begin{bmatrix} C_{11}(q) & C_{12}(q) & C_{13}(q) \\ C_{21}(q) & C_{22}(q) & C_{23}(q) \\ C_{31}(q) & C_{32}(q) & C_{33}(q) \end{bmatrix} \cdot \dot{q} + \begin{bmatrix} g_1(q) \\ g_2(q) \\ g_3(q) \end{bmatrix}$$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

Donde:

$\cdot M_{11} = m_1 l_{c1}^2 + m_2 \cdot l_1^2 + m_3 \cdot l_1^2 + I_1 + m_2 l_{c2}^2 + m_3 \cdot l_2^2 + I_2 + m_3 \cdot l_{c3}^2 + I_3 +$

$2m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) + 2m_3 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(q_2) + 2 \cdot m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) +$

$2m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_2 + q_3).$

$\cdot M_{12} = m_2 \cdot l_{c2}^2 + m_3 l_2^2 + I_2 + m_3 \cdot l_{c3}^2 + I_3 + m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \cos(q_2) + m_3 l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(q_2) +$

$2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) + m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_2 + q_3)$

$\cdot M_{13} = m_3 \cdot l_{c3}^2 + I_3 + m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) + m_3 l_1 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_2 + q_3).$

$\cdot M_{21} = M_{12}$

$\cdot M_{22} = m_2 \cdot l_{c2}^2 + I_2 + m_3 \cdot l_2^2 + m_3 \cdot l_{c3}^2 + 2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) + I_3$

$\cdot M_{23} = m_3 \cdot l_{c3}^2 + m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \cos(q_3) + I_3$

$\cdot M_{31} = M_{13}$

$\cdot M_{32} = M_{23}$

$\cdot M_{33} = m_3 \cdot l_{c3}^2 + I_3$

$\cdot C_{11} = -2m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \mathrm{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_2 - 2m_3 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \mathrm{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_2 - 2m_3 \, l_1 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_2 + q_3) \cdot \dot{q}_2$

$-2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_3) \cdot \dot{q}_3$

$\cdot C_{12} = -m_2 \cdot l_1 \cdot l_{c2} \cdot \mathrm{sen}(q_2) \dot{q}_2 - m_3 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \mathrm{sen}(q_2) \cdot \dot{q}_2 - m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \, \mathrm{sen}(q_2 + q_3) \cdot \dot{q}_2$

$-2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_3) \cdot \dot{q}_3$

$\cdot C_{13} = -2m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_2 + q_3) \cdot \dot{q}_1 - 2m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_2 + q_3) \dot{q}_2$

$- m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_2 + q_3) \cdot \dot{q}_3 - m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot \mathrm{sen}(q_3) \cdot \dot{q}_3$

Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

$$\cdot C_{21} = -2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_3) \cdot \dot{q}_3 + m_2 l_1 \cdot l_{c2} \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_1 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot sen(q_2) \cdot \dot{q}_1 + m_3 \cdot l_1 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_2 + q_3) \cdot \dot{q}_1$$

$$\cdot C_{22} = -2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_3) \cdot \dot{q}_3$$

$$\cdot C_{23} = -m_3 \, l_2 \, l_{c3} \cdot sen(q_3 \cdot) \, \dot{q}_3$$

$$\cdot C_{31} = m_3 \, l_2 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_3) \cdot \dot{q}_1 + m_3 \, l_1 \, l_{c3} \cdot sen(q_2 + q_3) \, \dot{q}_1 + 2m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_3) \cdot \dot{q}_2$$

$$\cdot C_{32} = 0$$

$$\cdot C_{33} = m_3 \cdot l_2 \cdot l_{c3} \cdot sen(q_3) \, \dot{q}_3$$

$$\cdot g_1 = m_1 \cdot g \cdot l_{c1} \, sen(q_1) + m_2 \cdot g \cdot l_1 \, sen(q_1) + m_2 g \cdot l_{c2} \, sen(q_1 + q_2) + m_3 \, g \cdot l_1 \cdot sen(q_1) + m_3 \cdot g \cdot l_2 \cdot sen(q_1 + q_3) + m_3 \cdot g \cdot l_{c3} \cdot sen(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$\cdot g_2 = m_2 \cdot g \cdot l_{c2} \, sen(q_1 + q_2) + m_3 \, g \, l_2 \cdot sen(q_1 + q_3) + m_3 \cdot g \, l_{c3} \cdot Sen(q_1 + q_2 + q_3)$$

$$\cdot g_3 = m_3 \cdot g \cdot l_{c3} \cdot sen(q_1 + q_2 + q_3)$$

– Variables de la Matriz de Inercia.

- $m_1 =$
- $l_{c1} =$
- $m_2 =$
- $l_1 =$
- $m_3 =$
- $I_1 =$
- $l_{c2} =$
- $l_2 =$
- $I_2 =$
- $l_{c3} =$
- $I_3 =$
- $q_2 =$
- $q_3 =$

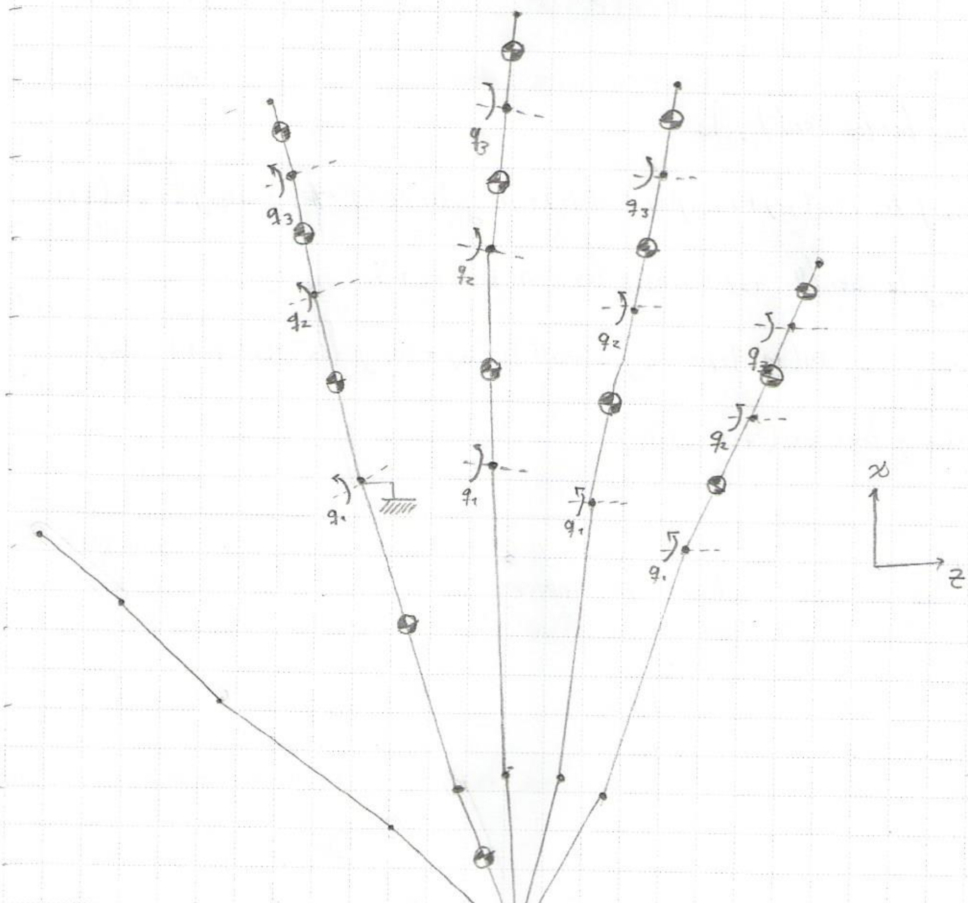
Turning Ideas into Reality.

Ferrostaal

· $m_{di} = 0,005$ Kg · $l_{di} = 0,1133$ m

· $m_{mi} = 0,008$ Kg · $l_{mi} = 0,1767$ m

· $m_{pi} = 0,010$ Kg · $l_{pi} = 0,2751$ m



$\pi \longrightarrow 180°$
$? \longrightarrow \_\_$

$I =$

- → Referenciar todo a World.
- → Definir centros de masa.
- → Todo en metros.
- → Ubicar CM y puntos de unión antes y despues.
- → Inercia → de barra delgada $\begin{bmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}$ → Visto en el centro de masa $\frac{1}{12} M \cdot l^2$
- → Ojo los ejes positivos y negativos
- → Masa del dedo ?