

# Модель GARCH и прогнозирование условной дисперсии временного ряда

Николай Савельев

Московский физико-технический институт

## Определение

Авторегрессионная условная гетероскедастичность (англ. ARCH; AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity) — применяемая в эконометрике модель для анализа временных рядов (в первую очередь финансовых), у которых условная (по прошлым значениям ряда) дисперсия ряда зависит от прошлых значений ряда, прошлых значений этих дисперсий и иных факторов.

## История

Модели ARCH впервые были предложены Энглom в 1982 году. Уже в 1986 году Боллерслев предложил обобщение этих моделей (GARCH). В дальнейшем различные авторы предложили и иные варианты моделей данного типа, учитывающих те или иные особенности.

Пусть временной ряд  $u_t$  представляет собой следующий процесс

$$u_t = \varepsilon_t \sqrt{\alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_t$  - белый шум.

Тогда как условное, так и безусловное математическое ожидание этого процесса будет равно нулю. Условная дисперсия данного процесса будет равна

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2. \quad (2)$$

Такая модель условной дисперсии называется ARCH(q)-моделью. Для недопущения отрицательных значений дисперсии предполагается, что все коэффициенты модели неотрицательны, причём константа строго положительна.

ARCH-модель предполагает зависимость условной дисперсии только от квадратов прошлых значений временного ряда. Обобщить данную модель можно предположив, что условная дисперсия зависит также от прошлых значений самой условной дисперсии. Это так называемый обобщённый ARCH (Generalized ARCH — GARCH). В этом случае GARCH( $p, q$ ) модель (где  $p$  — порядок GARCH-членов  $\sigma^2$  и  $q$  — порядок ARCH-членов  $u^2$ ) описывается следующим образом

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2. \quad (3)$$

При помощи модели GARCH прогнозировались значения дисперсии временного ряда с нулевым средним. Результаты прогноза с горизонтом в 15 точек представлены на графике:

