Ровно 42 года назад польская путешественница Кристина Хойновская-Лискевич начала первое женское одиночное кругосветное плавание на парусной яхте. Плавание продлилось примерно два года.

1. Рассмотрим задачу линейной регрессии для случая идеально точно известной дисперсии: $y = X\beta + u$, $u \sim \mathcal{N}(0; I_{n\times n})$, где $I_{n\times n}$ — единичная матрица. Обозначим $s(\beta)$ — вектор-столбец, градиент логарифмической функции правдоподобия, а $\hat{\beta}$ — оценку параметров β с помощью максимального правдоподобия.

   а) Найдите $\mathrm{Var}(s(\beta)|X)$ и вспомните $\mathrm{Var}(\hat{\beta}|X)$;

   б) Упростите выражение $\mathrm{Var}(s(\beta)|X) \cdot \mathrm{Var}(\hat{\beta}|X)$;

2. В созвездии Малой Медведицы водится k видов медведепришельцев. Исследователь Миша отлавливает n медведепришельцев и классифицирует их по видам: y_1 — количество медведепришельцев первого вида, y_2 — второго, ..., y_k — k-го. Миша хочет оценить вектор вероятностей $p = (p_1, \ldots, p_{k-1})$. Вероятностей на одну меньше, чем видов, чтобы избежать жёсткой линейной зависимости между ними.

   а) Как распределена в теории величина y_1? Чему равна её дисперсия?

   б) Как распределена в теории величина $y_{12} = (y_1 + y_2)$? Чему равна её дисперсия?

   в) Чему равна ковариация y_1 и y_2?

   г) Выпишите функцию правдоподобия с точностью до домножения на константу;

   д) Найдите $\hat{p}_{ML}$;

   е) Найдите $\mathrm{Var}(s(\theta))$ и $\mathrm{Var}(\hat{p})$;

   ж) Найдите предел $\lim \mathrm{Var}(s(\theta)) \cdot \mathrm{Var}(\hat{p})$?

3. Исследовательница Несмеяна вывела хитрую формулу для $\hat{a}$ — несмещённой оценки неизвестного векторного параметра a. Обозначим $s(a)$ — вектор-столбец градиент логарифмической функции правдоподобия. Докажите, что для оценки Несмеяны выполнено неравенство Крамера-Рао, а именно, матрица $M = \mathrm{Var}(s(a)) \cdot \mathrm{Var}(\hat{a}) - I_{k\times k}$ положительна определена.

   Подсказки:

   а) Вспомните, чему равно $\mathrm{E}(s(a))$. Достаточно просто вспомнить, доказывать не требуется!

   б) Найдите скаляры $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_1}\right)$, $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_2}\right)$ и матрицу $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}, s(a)\right)$.

   в) Рассмотрим два произвольных случайных вектора R и S и два вектора констант подходящей длины α и β. Найдите минимум функции $f(\alpha, \beta) = \mathrm{Var}(\alpha^T R + \beta^T S)$ по β. Выпишите явно $\beta^*(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$.

   г) Докажите, что для произвольных случайных векторов положительно определена матрица

   $$\mathrm{Var}(R) - \mathrm{Cov}(R, S)\,\mathrm{Var}^{-1}(S)\,\mathrm{Cov}(S, R)$$

   д) Завершите доказательство векторного неравенства Крамера-Рао.

   Без угрызений совести можно храбро переставлять интегралы и производные :)

3-лайт! Утешительная версия задачи про Несмеяну. Если не получилось доказать векторную версию неравенства Крамера-Рао, то докажите скалярную :)

Докажите, что для несмещённой скалярной оценки $\mathrm{Var}(s(a)) \cdot \mathrm{Var}(\hat{a}) \geq 1$.

Подсказки:

а) Вспомните, чему равно $\mathrm{E}(\ell'(a))$. Достаточно просто вспомнить, доказывать не требуется!

б) Найдите $\mathrm{Cov}(\hat{a}, \ell'(a))$;

в) Сколько корней может быть у параболы $f(t) = \mathrm{Var}(R+tL)$? Каким может быть дискриминант параболы $f(t)$?

г) Докажите для произвольных случайных величин R и L неравенство Коши-Шварца,

$$\mathrm{Var}(R) \cdot \mathrm{Var}(L) \geq \mathrm{Cov}^2(R, L).$$

д) Завершите доказательство скалярного неравенства Крамера-Рао :)

4. Идея доказательства состоятельности ML оценки :)

Пусть наблюдения $y_1, \ldots, y_n$ независимы и одинаково распределены с функцией плотности, зависящей от параметра a. Истинное значение параметра обозначим буквой a_0. Оценку максимального правдоподобия обозначим $\hat{a}$.

Рассмотрим отмасштабированную логарифмическую функцию правдоподобия $\ell_n(a) = \ell(a)/n$, и ожидаемую логарифмическую функцию правдоподобия[1], $\tilde{\ell}(a) = \mathrm{E}(\ell(a))$.

а) Что больше, $\ln x$ или $x - 1$? Докажите!

б) В какой точке находится максимум функции $\ell_n(a)$?

в) В какой точке находится максимум функции $\tilde{\ell}(a)$?
Подсказка: рассмотрите выражение $\tilde{\ell}(a) - \tilde{\ell}(a_0)$ и примените доказанное неравевство :)

г) К чему сходится $\ell_n(a)$ по вероятности?

5. Известна структура обратимой матрицы M,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_{k\times k} \end{pmatrix}.$$

а) Найдите M^{-1}.

б) Какие условия должны выполняться на блоки A и B, чтобы M была обратимой?

[1]Внимание: ожидание считается с помощью истинного a_0 от функции, в которую входит константа a.