1. На основании наблюдений получена МНК оценка уравнения регрессии $\hat{Y}_i = 0.2Z_i + 0.3W_i$ и оценка дисперсии ошибок $\hat{\sigma}^2 = 0.04$. Матрица наблюдений регрессоров имеет вид

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   Ошибки имеют нормальное распределение. Постройте 95% предиктивный интервал (доверительный интервал для индивидуального прогноза) в точке $Z = -2$, $W = 5$.

2. В модели множественной регрессии $Y = X\beta + \varepsilon$ выполнены все предпосылки классической линейной модели кроме предпосылки о гомоскедастичности. Вектор ошибок имеет нормальное распределение, а возможная гетероскедастичность имеет вид

$$\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \begin{cases} \sigma_1^2, \text{ при } i \leqslant m; \\ \sigma_2^2, \text{ при } i > m. \end{cases}$$

   Матрица X имеет размер n на $k+1$. Выведите формулу статистики LM-теста для проверки гипотезы о гомоскедастичности.

3. Рассмотрим модель $Y_i = \beta X_i + \varepsilon_i$, где ε_i — независимые случайные величины с $\mathbb{E}(\varepsilon_i) = 0$ и $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \alpha X_i$.

   Найдите наиболее эффективную оценку для параметра β в классе всех линейных по Y несмещённых оценок.

4. По 1000 наблюдений Винни-Пух оценил логистическую модель $\mathbb{P}(Y_i = 1) = F(\beta_0 + \beta_1 X_i)$, где X_i — количество времени в часах, проведённое в гостях, а Y_i — факт застревания при выходе.

   Оценки параметров равны $\hat{\beta}_0 = 2$, $\hat{\beta}_1 = 2$, с оценкой ковариационной матрицы

$$\begin{pmatrix} 0.25 & 0.1 \\ 0.1 & 0.16 \end{pmatrix}.$$

   а) Проверьте значимость отдельных коэффициентов при уровне значимости 5%;
   б) Найдите предельный эффект времени, проведённого в гостях, на вероятность застрять при выходе для получасового визита;

5. **Дополнительная задача для ИП**. Исследовательница Несмеяна вывела хитрую формулу для $\hat{a}$ — несмещённой оценки неизвестного векторного параметра a. Обозначим $s(a)$ — вектор-столбец градиент логарифмической функции правдоподобия.

   а) Вспомните, чему равно $\mathbb{E}(s(a))$. Достаточно просто вспомнить, доказывать не требуется!
   б) Найдите скаляры $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_1}\right)$, $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}_1, \frac{\partial \ell}{\partial a_2}\right)$ и матрицу $\mathrm{Cov}\left(\hat{a}, s(a)\right)$.
   в) Рассмотрим два произвольных случайных вектора R и S и два вектора констант подходящей длины α и β. Найдите минимум функции $f(\alpha, \beta) = \mathrm{Var}(\alpha^T R + \beta^T S)$ по β. Выпишите явно $\beta^*(\alpha)$ и $f^*(\alpha)$.
   г) Докажите, что для произвольных случайных векторов положительно определена матрица
$$\mathrm{Var}(R) - \mathrm{Cov}(R, S)\,\mathrm{Var}^{-1}(S)\,\mathrm{Cov}(S, R)$$
   д) Завершите доказательство векторного неравенства Крамера-Рао.