Մաթեմատիկական ծրագրավորում 1
Դասախոսություն 3
Ի.Վ.. Հովհաննիսյան

2.3.Գծային ծրագրավորման խնդիրների (ԳԾԽ) տարբեր տեսքերը և դրանց համարժեքությունը

Սահմանենք հետևյալ տեսքերի գծային ծրագրավորման խնդիրները.

1. Սովորական գծային ծրագրավորման մինիմիզացիայի խնդիր (ՍԳԾ min խնդիր) կանվանենք հետևյալ տեսքի խնդիրը՝
$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to min, \\ A\vec{x} \geq \vec{b}, \\ \vec{x} \geq \vec{0}: \end{cases} \tag{2.5}$$
2. Սովորական գծային ծրագրավորման մաքսիմիզացիայի խնդիր (ՍԳԾ max խնդիր) կանվանենք հետևյալ տեսքի խնդիրը՝
$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to max, \\ A\vec{x} \leq \vec{b}, \\ \vec{x} \geq \vec{0}: \end{cases} \tag{2.6}$$
3. Կանոնական գծային ծրագրավորման մինիմիզացիայի խնդիր (ԿԳԾ min խնդիր) կանվանենք հետևյալ տեսքի խնդիրը՝
$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to min, \\ A\vec{x} = \vec{b}, \\ \vec{x} \geq \vec{0}: \end{cases} \tag{2.7}$$
4. Կանոնական գծային ծրագրավորման մաքսիմիզացիայի խնդիր (ԿԳԾ max խնդիր) կանվանենք հետևյալ տեսքի խնդիրը՝
$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to max, \\ A\vec{x} = \vec{b}, \\ \vec{x} \geq \vec{0}: \end{cases} \tag{2.8}$$

Թեորեմ: Գծային ծրագրավորման խնդիրների չորս տեսքերը համարժեք են (մեկը մյուսին բերելու իմաստով):

Ապացույց: Նախ համոզվենք (2.5) և (2.6) տեսքի խնդիրների համարժեքության մեջ: Քանի որ $A\vec{x} \geq \vec{b}$ անհավասարումը համարժեք է $-A\vec{x} \leq -\vec{b}$ -ին, իսկ $\vec{c}\vec{x} \to min$ պահանջը՝ $-\vec{c}\vec{x} \to max$ -ին, կստանանք (2.5) և (2.6) տեսքերի խնդիրների համարժեքությունը:

Նման ձևով կհամոզվենք (2.7) և (2.8) տեսքի խնդիրների համարժեքության մեջ:

Համոզվենք (2.5) և (2.7) տեսքի խնդիրների համարժեքության մեջ: Դրա համար (2.5) -ից անցնենք հետևյալ խնդրին՝
$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to min, \\ A\vec{x} - \vec{z} = \vec{b}, \\ \vec{x} \geq \vec{0} \\ \vec{z} \geq \vec{0}: \end{cases}$$
որտեղ $\vec{z} \in R^m$: Այն կլինի (2.7) տեսքի խնդիր: Իսկ եթե ունենք (2.7) տեսքի խնդիր, ապա այն կարելի է ներկայացնել

$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to min, \\ A\vec{x} \ge \vec{b}, \\ -A\vec{x} \ge -\vec{b}, \\ \vec{x} \ge \vec{0}, \end{cases}$$

որը կլինի (2.5) տեսքի: Թեորեմն ապացուցվեց:

ԳԾԽ-ի բոլոր տեսքերում մասնակցող ֆունկցիան, որի min–ը կամ max–ը անհրաժեշտ է գտնել, կոչվում է նպատակային ֆունկցիա: Փոփոխականի այն արժեքների բազմությունը, որոնք բավարարում են այդ տեսքերում նշված պայմաններին, կանվանենք սահմանափակումների տիրույթ:

Սահմանափակումների տիրույթի կամայական կետ կանվանենք համապատասխան խնդրի լուծում: Իսկ այն լուծումը, որի դեպքում նպատակային ֆունկցիան դառնում է էքստրեմում, կանվանենք լավագույն լուծում:

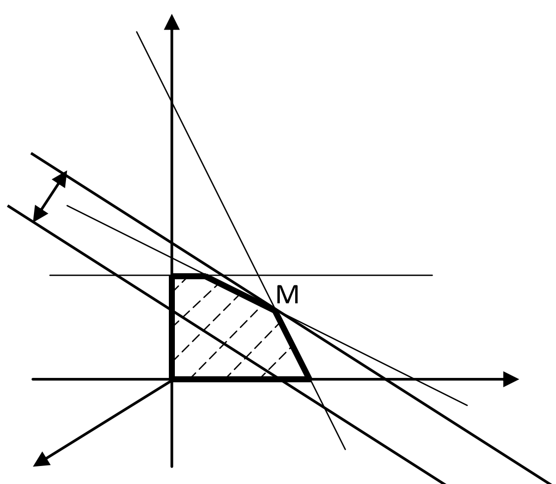
2.4.Գծային ծրագրավորման խնդիրների լուծման գրաֆիկական եղանակ

Նախ նկատենք, որ, եթե ՍԳԾ տեսքով տրված խնդրում փոփոխականների թիվը երկուսն է՝ n=2, ապա այն կարելի է լուծել գրաֆիկական եղանակով:

Օրինակ1: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = -3x_1 - 2x_2 \to min, \\ x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 2x_1 + x_2 \le 8, \\ x_2 \le 3, \\ \vec{x} \ge \vec{0}: \end{cases}$$

(x_1, x_2) հարթության մեջ կառուցենք բոլոր անհավասարումներին բավարարող կիսահարթությունները և նպատակային ֆունկցիայի որևէ մակարդակի գիծ՝ օրինակ $3x_1 - 2x_2 = -6$:



Նկատենք, որ այդ գիծը $-\overrightarrow{gradf} = \{3; 2\}$ վեկտորի ուղղությամբ տեղաշարժելիս նպատակային ֆունկցիան կփոքրանա, ինչը թույլ կտա գրաֆիկորեն տեսնել տիրույթի այն կետը, որտեղ նպատակային ֆունկցիան կլինի փոքրագույն: Այս օրինակում լավագույն լուծումն եղավ սահմանափակումների հնգանկյան M(3,2) գագաթը, որի կոորդինատները գտել ենք, որպես համակարգ լուծելով $x_1 + 2x_2 = 7$ և $2x_1 + x_2 = 8$ ուղիղների հավասարումները: Այսպիսով, խնդրի լավագույն լուծումն է $x^* = (3{,}2)$, նպատակային ֆունկցիայի $f(x^*) = -13$ արժեքով:

Այժմ դիտարկենք ԿԳԾ տեսքով տրված խնդիր, որտեղ փոփոխականների թիվը կարող է լինել կամայական, բայց այն կարելի է բերել երկու փոփոխականով ՍԳԾ տեսքի և հետևաբար լուծել գրաֆիկական եղանակով: Եթե խնդիրը տրված է (3) կամ (4) տեսքով, ապա բավական է նրանց սահմանափակումների $A\vec{x} = \vec{b}$ համակարգում ենթադրել

$$rangA = rang\left(A \vdots \vec{b}\right) = n - 2,$$

քանի որ այս դեպքում, գտնելով համակարգի ընդհանուր լուծումը և գրելով արտահայտված փոփոխականների ոչ բացասական լինելու պայմանը, կհանգենք երկու փոփոխականով անհավասարումների համակարգի, որը կարելի է լուծել գրաֆիկական եղանակով:

Օրինակ 2: Դիտարկենք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 4x_5 + 14x_6 \to min, \\ x_1 + x_4 = 20, \\ x_2 + x_5 = 50, \\ x_3 + x_6 = 30, \\ x_4 + x_5 + x_6 = 60, \\ x_j \geq 0, J = 1, \cdots, 6: \end{cases}$$

Այս օրինակում սահմանափակումների մատրիցն է

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

որի ռանգը հավասար է չորսի, հետևաբար նրա ընդհանուր լուծումը գրելիս որոշակի չորս փոփոխականներ կարելի է արտահայտել մնացած երկուսով: Ընտրենք որպես անկախ փոփոխականներ x_5 և x_6-ը ու մնացածն արտահայտենք դրանցով՝

$$\begin{cases} x_1 = x_5 + x_6 - 40 \geq 0, \\ x_2 = 50 - x_5 \geq 0, \\ x_3 = 30 - x_6 \geq 0, \\ x_4 = 60 - x_5 - x_6 \geq 0, \\ x_5 \geq 0, \qquad x_6 \geq 0: \end{cases}$$

Տեղադրենք այս արժեքները $f(\vec{x})$ -ի արտահայտության մեջ՝

$$f(\vec{x}) = 740 - 7x_5 + 7x_6:$$

Արդյունքում կստանանք հետևյալ խնդիրը՝

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = 740 - 7x_5 + 7x_6 \to min, \\ x_5 + x_6 \geq 40, \\ x_5 \leq 50, \\ x_6 \leq 30, \\ x_5 + x_6 \leq 60, \\ x_j \geq 0, j = 5{,}6, \end{cases}$$

որը կարող ենք լուծել գրաֆիկական եղանակով:

Դիտողություն: Նկատենք, որ գրաֆիկական եղանակով կարելի է լուծել նաև այն գծային ծրագրավորման խնդիրները, որոնք ունեն ինչպես հավասարումներով, այնպես էլ անհավասարումներով տրված սահմանափակումներ: Այս դեպքում ևս հավասարումների համակարգից պետք է պահանջել $rangA = rang\left(A \vdots \vec{b}\right) = n - 2$ պայմանը և լուծել նախորդ ձևով:

Բերենք ևս մեկ օրինակ՝ ներառելով նաև խնդրի մաթեմատիկական մոդելը կազմելու մասը:

Օրինակ 3: Արտադրամասում երկու տիպի համաձուլվածք պատրաստելու համար օգտագործվում է երեք տեսակի հումք՝ պղինձ, անագ և ցինկ, որոնց տոկոսային պարունակությունը և յուրաքանչյուր տեսակի մեկ կիլոգրամի արժեքը բերված է հետևյալ աղյուսակում՝

	1-ին տեսակ	2-րդ տեսակ
պղինձ	10 %	10 %
անագ	10 %	30 %
ցինկ	80 %	60 %
1 կգ-ի արժեքը	4	6

Հայտնի են նաև հումքային պաշարների հետևյալ տվյալները.
պղինձը 2 կգ-ից ոչ ավելի, անագը 3կգ-ից ոչ պակաս, իսկ ցինկը՝ 12,8 կգ-ից ոչ ավելի և 7.2կգ-ից ոչ պակաս:

Պահանջվում է գտնել յուրաքանչյուր տեսակի արտադրության այն օպտիմալ քանակները, որոնց դեպքում գումարային ծախսը կլինի մինիմալ:

Խնդիրը լուծելու համար պահանջվող արտադրատեսակների քանակները նշանակենք համապատասխանաբար՝ x_1, x_2: Կհանգենք հետևյալ գծային ծրագրավորման խնդրին՝

$$\begin{cases} f(\vec{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to min, \\ 0.1x_1 + 0.1x_2 \le 2, \\ 0.1x_1 + 0.3x_2 \ge 3, \\ 0.8x_1 + 0.6x_2 \ge 7{,}2, \\ 0.8x_1 + 0.6x_2 \le 12.8, \\ x_j \ge 0, j = 1{,}2: \end{cases}$$

Կամ որ նույնն է՝

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \to min, \\ x_1 + x_2 \le 20, \\ x_1 + 3x_2 \ge 30, \\ 8x_1 + 6x_2 \ge 72, \\ 8x_1 + 6x_2 \le 128, \\ x_j \ge 0, j = 1{,}2, \end{cases}$$

որը կարող ենք լուծել գրաֆիկական եղանակով:

Դիտողություն: Լուծման գրաֆիկական եղանակից եզրակացնում ենք, որ դիտարկվող դեպքերում հնարավոր են հետևյալ պատասխանները՝

- Խնդրի սահմանափակումների տիրույթը դատարկ է՝ այսինքն՝ այն լուծում չունի:
- Խնդիրն ունի միակ լուծում՝ այն սահմանափակումների տիրույթի գագաթ է:
- Խնդիրն ունի անթիվ բազմության լուծումներ՝ դրանք սահմանափակումների տիրույթի կողն է:
- Խնդիրն ունի լուծում, բայց չունի լավագույն լուծում՝ նպատակային ֆունկցիան անսահմանափակ է:

Հետագայում ցույց կտանք, որ ընդհանուր դեպքում ևս ԳՕԽ –ն կարող է ունենալ նշված չորս տիպի պատասխան: