

Отчёт по лабораторной работе №6

Разложение чисел на множители

Николай Мартынов

Содержание

1 Цель работы	4
2 Теоретические сведения	5
2.1 р-алгоритм Поллрада	6
3 Выполнение работы	7
3.1 Реализация алгоритма на языке Python	7
3.2 Контрольный пример	9
4 Выводы	10
Список литературы	11

List of Figures

3.1 Работа алгоритма	9
--------------------------------	---

1 Цель работы

Изучение задачи разложения на множители, изучение р-алгоритма Поллрада.

2 Теоретические сведения

Разложение на множители — предмет непрерывного исследования в прошлом; и такие же исследования, вероятно, продолжатся в будущем. Разложение на множители играет очень важную роль в безопасности некоторых криптосистем с открытым ключом.

Согласно Основной теореме арифметики любое положительное целое число больше единицы может быть уникально записано в следующей главной форме разложения на множители, где p_1, p_2, \dots, p_k — простые числа и e_1, e_2, \dots, e_k — положительные целые числа.

$$n = p_1^{e_1} * p_2^{e_2} * \dots * p_k^{e_k}$$

Поиск эффективных алгоритмов для разложения на множители больших составных чисел ведется давно. К сожалению, совершенный алгоритм для этого пока не найден. Хотя есть несколько алгоритмов, которые могут разложить число на множители, ни один не способен провести разложение достаточно больших чисел в разумное время. Позже мы увидим, что это хорошо для криптографии, потому что современные криптографические системы полагаются на этот факт. В этой секции мы даем несколько простых алгоритмов, которые проводят разложение составного числа. Цель состоит в том, чтобы сделать процесс разложения на множители менее трудоёмким.

В 1974 г. Джон Поллард разработал метод, который находит разложение числа p на простые числа. Метод основан на условии, что $p-1$ не имеет сомножителя, большего, чем заранее определенное значение B , называемое границей. Алго-

ритм Полларда показывает, что в этом случае

$$p = \text{GCD}(2^{B!} - 1, n)$$

Сложность. Заметим, что этот метод требует сделать $B-1$ операций возведения в степень $a = a^e \text{mod } n$. Есть быстрый алгоритм возведения в степень, который выполняет это за $2 * \log_2 B$ операций. Метод также использует вычисления НОД, который требует n^3 операций. Мы можем сказать, что сложность — так или иначе больше, чем $O(B)$ или $O(2^n)$, где n_b — число битов в B . Другая проблема — этот алгоритм может заканчиваться сигналом об ошибке. Вероятность успеха очень мала, если B имеет значение, не очень близкое к величине \sqrt{n} .

2.1 p-алгоритм Поллрада

- Вход. Число n , начальное значение c , функция f , обладающая сжимающими свойствами.
 - Выход. Нетривиальный делитель числа n .
1. Положить $a = c, b = c$
 2. Вычислить $a = f(a) \text{mod } n, b = f(b) \text{mod } n$
 3. Найти $d = \text{GCD}(a - b, n)$
 4. Если $1 < d < n$, то положить $p = d$ и результат: p . При $d = n$ результат: ДЕЛИТЕЛЬ НЕ НАЙДЕН. При $d = 1$ вернуться на шаг 2.

3 Выполнение работы

3.1 Реализация алгоритма на языке Python

```
from math import gcd
```

```
def f(x, n):  
    return (x*x+5)%n
```

```
def fu(n, a, b, d):  
    a = f(a, n)  
    b = f(f(b, n), n)  
    d = gcd(a-b, n)  
    if 1<d<n:  
        print(d)  
        exit()  
    if d == n:  
        print("not found")  
    if d == 1:  
        fu(n, a, b, d)
```

```
def main():  
    n = 1359331  
    c = 1
```

```
a = f(c, n)
b = f(a, n)
d = gcd(a-b, n)
if 1< d < n:
    print(d)
    exit()
if d == n:
    pass
if d == 1:
    fu(n, a, b, d)
```

3.2 Контрольный пример

```
In [1]: 1 from math import gcd
2
3 def f(x, n):
4     return (x*x+5)%n
5
6 def fu(n, a, b, d):
7     a = f(a, n)
8     b = f(f(b, n), n)
9     d = gcd(a-b, n)
10    if 1<d<n:
11        print(d)
12        exit()
13    if d == n:
14        print("not found")
15    if d == 1:
16        fu(n, a, b, d)
17
18 def main():
19     n = 1359331
20     c = 1
21     a = f(c, n)
22     b = f(a, n)
23     d = gcd(a-b, n)
24     if 1< d < n:
25         print(d)
26         exit()
27     if d == n:
28         pass
29     if d == 1:
30         fu(n, a, b, d)|
```

```
In [2]: 1 main()
```

1181

Figure 3.1: Работа алгоритма

4 Выводы

Изучили задачу разложения на множители и р-алгоритм Поллрада.

Список литературы

1. Алгоритмы тестирования на простоту и факторизации
2. Р-метод Полларда