Лабораторная 5. Численное интегрирование

Численное интегрирование функции целесообразно использовать в тех случаях, когда: 1) первообразная *F(x)* не может быть найдена с помощью элементарных функций; 2) *F(x)* является слишком сложной; 3) подынтегральная функция *f*(*x*) задана таблично или неявно. Будем рассматривать формулы приближенного вычисления интегралов

$$\int_a^b p(x)f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} c_k f(x_k),$$

где *p(x)* >0 - заданная интегрируемая функция (весовая) и *f(x)* - достаточно гладкая функция, $x \in [a,b]$ и c_k - числа, *k=0,1,…,n..*

Для составления квадратурных формул данную функцию *f*(*x*) заменяют интерполирующей функцией *φ(x)* и приближенно полагают

$$\int_a^b p(x)f(x)dx \approx \int_a^b p(x)\varphi(x)dx$$

и затем вычисляют интеграл непосредственно, а оценку погрешности формулы определяют исходя из вида функции *f*(*x*).

Квадратурные формулы

Пусть для функции *y=f*(*x*) требуется вычислить интеграл $J(f) = \int_a^b p(x)f(x)dx$. Выбрав шаг $h = \dfrac{b-a}{n}$, разобьем отрезок [*a, b*] на *n* равных частей: $x_0=a$, $x_i=x_0+ih$ (*i=1, 2,…, n-1*), $x_n=b$ и пусть $y_i=f(x_i)$ (*i=0, 1, 2, …, n*), *p(x) =1*. Построим, например, полином Лагранжа:

$$f(x) \approx L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} + R_n(x).$$

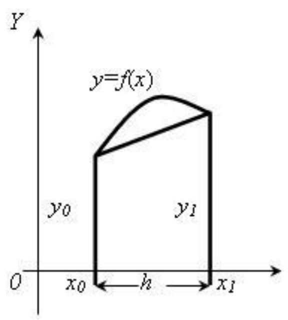

Рис. 1.

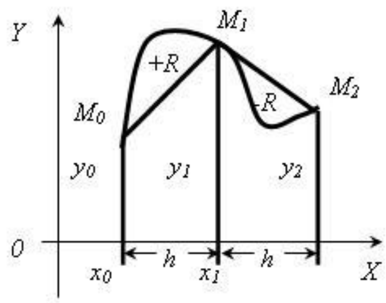

Рис. 2.

Заменяя функцию *f(x)* соответствующим интерполяционным полиномом, получим квадратурную формулу

$$\int_{x_0}^{x_n} p(x) f(x) dx = \sum_{i=0}^{n} A_i y_i \ ,$$

где A_i - некоторые постоянные коэффициенты, не зависящие от функции $f(x)$, а зависящие лишь от расположения узлов сетки x_i.

Для формулы трапеции (n=1) $p(x)=1, A_0=A_1=1/2.$

$$\int_{x_0}^{x_1} y dx = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_1\right).$$

Остаточный член формулы трапеции равен:

$$R = \int_{x_0}^{x_1} y dx - \frac{h}{2}\left(y_0 - y_1\right) = -\frac{h^3}{12} y''(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_0+h)$.

Обобщенная формула трапеции для вычисления определенного интеграла на равномерной сетке, запишется так:

$$\int_a^b y dx = h(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + ... + y_{n-1}) + R(h),$$

где $R(h) = -\frac{(b-a)}{12} M_2 h^2$, $M_2 = \max\limits_{[a,b]} \left| f''(x) \right|$.

Формула Симпсона при n=2 и $p(x)=1$. Интерполирование функции выполняется по трем ее значениям. $A_0=1/6, A_1=2/3, A_2=1/6$ или, так как x_2-x_0=$2h$,

$$\int_{x_0}^{x_2} y dx = \frac{x_2 - x_0}{6}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right).$$

Остаточный член формулы Симпсона равен

$$R = \int_{x_0}^{x_2} y dx - \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) = -\frac{h^5}{90} y^{(IV)}(\xi),$$

где $\xi \in (x_0, x_2)$.

Обобщенная формула Симпсона для вычисления определенного интеграла на равномерной сетке и четного числа шагов, имеет вид:

$$\int_a^b y dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + ... + y_n) + R(h),$$

где $R(h) = -\frac{(b-a)}{180} M_4 h^4$, $M_4 = \max\limits_{[a,b]} \left| f^{IV}(x) \right|$.

Приведем формулу «трех восьмых» для вычисления определенного интеграла на равномерной сетке и числа шагов, кратного трем:

$$\int_a^b y dx = \frac{3h}{8}[(y_0 + y_n) + 3(y_1 + y_2 + y_4 + y_5 + y_7 + ...) + 2(y_3 + y_6 + y_9 + ...)] + R(h),$$

где $R(h) = -\frac{(b-a)}{80} M_4 h^4$, $M_4 = \max_{[a,b]} |f^{IV}(x)|$ ..

Выбор шага интегрирования

Для вычисления интеграла по выбранной формуле численного интегрирования с заданной точностью ε можно выбрать шаг *h*, обеспечивающий эту точность вычисления интеграла, используя формулу остаточного члена:

$$|R(h)| \le \frac{\varepsilon}{2},$$

при этом вычисления следует производить с таким числом знаков, чтобы погрешность округления не превышала ε/2.

Другой способ заключается в последовательном удвоении количества шагов. Сначала вычисляется интеграл по выбранной квадратурной формуле при числе шага *n*, а затем при 2*n*. Погрешность приближенного значения интеграла определяется по правилу Рунге:

$$\Delta_n = \theta |I_n - I_{2n}|,$$

где $\theta = \frac{1}{3}$ для формулы трапеции и $\theta = \frac{1}{16}$ для формулы Симпсона.

Процесс вычислений заканчивается, если для очередного значения *n* будет получена погрешность $\Delta_n = \varepsilon$.

Следует учесть, что при удвоении числа шагов нет необходимости вычислять значения подынтегральной функции заново во всех узлах сетки, т. к. все они являются узлами сетки и при числе шагов 2*n*. Данный алгоритм может быть полезен при вычислении интеграла с разрывом.

Замечание: Может оказаться, что производная неограничена

Задания

1. Вычислить приближенное значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$, используя формулы трапеции, Симпсона, прямоугольников (*n=4, 5* или *7*). Оценить остаточный член формул.
2. Вычислить значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью ε, используя формулу трапеции или Симпсона, двумя способами:

2.1. выбрать шаг интегрирования из оценки остаточного члена,

2.2. использовать метод последовательного удвоения числа шагов.

Варианты lля заданий:

1. $f(x)=x^3\,e^{2x}$; $a = 0$; $b = 1$.

2. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$; $a = 0$; $b = 4$.

3. $f\left(x\right)=\dfrac{2^x}{1-4^x}$; $a = -2$; $b = -1$.

4. $f\left(x\right)=\dfrac{\lg(1+x^2)}{2x-1}$; $a = 0$; $b = 1$.

5. $f\left(x\right)=\dfrac{tg\,(x^2)}{x+1}$; $a = 0$; $b = 1$.

6. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2}\lg\dfrac{x^2}{2}$; $a = 1$; $b=3$.

7. $f\left(x\right)=\left(\dfrac{x}{2}+1\right)\sin\dfrac{x}{2}$; $a = 1$; $b = 2$.

8. $f\left(x\right)=\sin\dfrac{2x}{x^2}$; $a = 0{,}5$; $b = 2{,}5$.

9. $f\left(x\right)=\cos(x^2\cos x)$; $a = 5$; $b = 7$.

10. $f(x)=$ $f\left(x\right)=\cos(5x^2)$; $a = 0$; $b = 5$.

11. $f(x) = \cos(x)/(x+2)$; $a = 0{,}4$; $b = 1{,}2$.

12. $f\left(x\right)=\cos(x^2)\cdot\sqrt{x}$; $a = 0{,}4$; $b = 1{,}2$.

13. $f(x) = (x + 1)\sin(x)$; $a = 1{,}6$; $b = 2{,}4$.

14. $f(x) = (x + 1)\cos(x^2)$; $a = 0{,}2$; $b = 1$.

15. $f(x) = \sin(x^2 - 0{,}4)/(x + 2)$; $a = 0{,}8$; $b = 1{,}2$.

16. $f(x) = \ln(1 + x^2)/(1 + x^2)$; $a = 0$; $b = 1$.

17. $f(x) = \ln(5 + 4\cos(x))$; $a = 0$; $b = 3{,}1416$.

18. $f(x) = x\cdot\ln(1 + x)$; $a = 0$; $b = 1$.