Лабораторная 8. ***Метод простых итераций***

Численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Все методы решения СЛАУ обычно разделяют на две большие группы. К первой группе относятся методы, которые принято называть прямыми. Эти методы позволяют найти точные значения неизвестных для сравнительно небольших систем уравнений, но требует выполнения большого числа арифметических операций. Ко второй группе относятся итерационные методы.

Рассмотрим некоторые приближённые методы решения СЛАУ и построим алгоритмы их численной реализации. Приближённое решение СЛАУ будем получать с точностью до ε, где ε некоторое очень маленькое положительное число. Запишем СЛАУ в стандартной форме:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \tag{1}$$

Предполагая, что $a_{ii} \neq 0$ ($i = 1, \ldots, n$), разрешим первое уравнение системы относительно x_1, второе - относительно x_2 и т.д. В результате получим систему удобную для решения итерационным методом:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1} + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Метод простых итераций

Будем считать, что система определена и совместна, т.е. имеет единственное решение. Это решение обозначим

$$X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*).$$

Решим систему методом итерации. Для этого выполним следующие действия. Во-первых. Выберем нулевое приближение к точному решению системы:

$$X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$$

Компонентами нулевого приближения могут быть любые числа. Но удобнее за компоненты нулевого приближения взять либо нули $(x_i^0 = 0, i = 1, 2, \ldots, n)$, либо свободные члены системы $(x_i^0 = b_i, i = 1, 2, \ldots, n)$.

Во-вторых. Компоненты нулевого приближения подставим в правую часть системы и вычислим

$$\begin{cases} x_1^1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^0 - \dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^0 - \ldots - \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^0 + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^1 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^0 - \dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^0 - \ldots - \dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^0 + \dfrac{b_2}{a_{22}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^1 = -\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^0 - \dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^0 - \ldots - \dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^0 + \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Величины, стоящие слева являются компонентами первого приближения $X^1=(x_1^1,\,x_2^1,\,...,\,x_n^1)$. Действия, в результате которых получилось первое приближение, называются итерацией.

В-третьих. Проверим нулевое и первое приближения на ε

$$\left|x_1^1-x_1^0\right|\le\varepsilon$$
$$\left|x_2^1-x_2^0\right|\le\varepsilon$$
$$.................$$
$$\left|x_n^1-x_n^0\right|\le\varepsilon$$

Если все условия выполняются, то за приближённое решение системы выберем, либо $X^0=(x_1^0,\,x_2^0,\,...,\,x_n^0)$, либо $X^1=(x_1^1,\,x_2^1,\,...,\,x_n^1)$.всё равно, т.к. они отличаются друг от друга не больше чем на ε и закончим вычисления. Если хотя бы одно из условий не будет выполнено, то перейдём к следующему действию.

В-четвёртых. Выполним следующую итерацию, т.е. в правую часть системы (1.1) подставим компоненты первого приближения и вычислим компоненты второго приближения $X^2=(x_1^2,\,x_2^2,\,...,\,x_n^2)$, где

$$\begin{cases} x_1^2=-\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2^1-\dfrac{a_{13}}{a_{11}}x_3^1-...-\dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^1+\dfrac{b_1}{a_{11}} \\ x_2^2=-\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1^1-\dfrac{a_{23}}{a_{22}}x_3^1-...-\dfrac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^1+\dfrac{b_2}{a_{22}} \\ .... \\ x_n^2=-\dfrac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^1-\dfrac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^1-...-\dfrac{a_{nn-1}}{a_{nn}}x_{n-1}^1+\dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}. \qquad (2)$$

В-пятых. Проверим $X^1=(x_1^1,\,x_2^1,\,...,\,x_n^1)$ и $X^2=(x_1^2,\,x_2^2,\,...,\,x_n^2)$ на ε, т.е. проверим условие для этих приближений. Если все условия будут выполнены, то за приближённое решение системы выберем, либо $X^1=(x_1^1,\,x_2^1,\,...,\,x_n^1)$, либо $X^2=(x_1^2,\,x_2^2,\,...,\,x_n^2)$ всё равно, т.к. они отличаются друг от друга не больше чем на ε. В противном случае будем строить следующую итерацию, подставив компоненты второго приближения в правую часть системы.

Итерации нужно строить до тех пор, пока два соседних приближения $X^k=(x_1^k,\,x_2^k,\,...,\,x_n^k)$ и $X^{k+1}=(x_1^{k+1},\,x_2^{k+1},\,...,\,x_n^{k+1})$ будут отличаться друг от друга не больше, чем на ε.

Рабочую формулу метода итерации решения системы (2) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x_i^{k+1}&=\frac{a_{i1}}{a_{ii}}x_1^k+\frac{a_{i2}}{a_{ii}}x_2^k+...+\frac{a_{ii-1}}{a_{ii}}x_{i-1}^k+\frac{a_{ii+2}}{a_{ii}}x_{i+2}^k+...+\frac{a_{in}}{a_{ii}}x_n^k+\frac{b_i}{a_{ii}}= \\ &=\sum_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n}\alpha_{ij}x_j^k+\beta_i,\ i=1,2,...,n;\ k=0,1,2,... \end{aligned}. \qquad (3)$$

Более удобно эту формулу представить в матричном виде. Для этого введем матричный элемент $\alpha_{ii}=0$, i=1,2,…, n.

Тогда уравнение (3) преобразуется к виду:

$$X^{k+1}=\beta+\alpha X^k, \qquad (4)$$

где

$$\beta = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1/a_{11} \\ b_2/a_{22} \\ \dots \\ b_n/a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ . & . & \dots & . \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}/a_{11} & \dots & a_{1n}/a_{11} \\ a_{21}/a_{22} & 0 & \dots & a_{2n}/a_{22} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1}/a_{nn} & a_{n2}/a_{nn} & \dots & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Достаточные условия сходимости метода итерации для системы имеют вид

$$\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1,\ i = 1, 2, ..., n,$$

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1,\ \ j = 1, 2, ..., n, \tag{7}$$

$$\sum_{i,\, j=1, i\neq j}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1.$$

Это означает, что на диагонали матрицы находятся наибольшие значения. В этом случае говорят, что матрица с диагональным преобладанием. Формулы (7) могут быть более компактно записаны через α (с учетом того что $\alpha_{ii} = 0$)

$$\sum_{j=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1,\ \ i = 1, 2, ..., n, \tag{8A}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1,\ \ j = 1, 2, ..., n, \tag{8B}$$

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{n} \left| \alpha_{ij} \right| < 1 \tag{8C}$$

Алгоритм численной реализации может быть следующим:

1. Формируем матрицы α и вектор столбец β, проверяем условие (8C). Если оно не выполняется, то работа алгоритма завершена. Необходимо применять другой метод решения систем линейных уравнений. Если условие (8C) выполняется, то переходим ко 2 пункту
2. Выберем $X^0 = \beta$, где $x_i^0 = b_i / a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$.
3. Положим $k = 0$.
4. Вычислим для всех $i = 1,2,..n$, $\ x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$,

   или в матричном виде: $X^{k+1} = \beta + \alpha X^k$
5. Проверим условия $\left| x_i^{k+1} - x_i^k \right| \le \varepsilon$, $i = \overline{1, n}$.

6. Если все условия в п.5 будут выполнены, то за приближённое решение системы выберем либо $X^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$, либо $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдём к п.7.
7. Положим $k = k+1$ и перейдём к п.4.

Лабораторная 9. Метод Зейделя

Метод Зейделя решения СЛАУ отличается от метода итерации тем, что найдя какое-то приближение для i-той компоненты, мы сразу же используем его для отыскания следующих $(i+1)$, $(i+2)$, …, n-ой компонент. Такой подход позволяет обеспечить более высокую скорость сходимости метода Зейделя по сравнению с методом итерации.

Пусть система линейных уравнений задана в виде (1). По аналогии с методом простых итераций оно записывается в виде (2). Перепишем (2) с учетом введенных ранее обозначений $\alpha_{ij} = \dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}$ и $\beta_i = \dfrac{b_i}{a_{ii}}$

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \ldots - \alpha_{1n}x_n + \beta_1 \\ x_2 = -\alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \ldots - \alpha_{2n}x_n + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = -\alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \ldots - \alpha_{nn-1}x_{n-1} + \beta_n \end{cases}$$

Пусть $X^0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ - нулевое приближение к точному решению $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ системы. И пусть найдено k-ое приближение $X^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$. Определим компоненты $(k+1)$-ого приближения $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, \ldots, x_n^{k+1})$ по формулам

$$\begin{cases} x_1^{k+1} = \qquad - \alpha_{12}x_2^k - \alpha_{13}x_3^k - \ldots - \alpha_{1n}x_n^k + \beta_1 \\ x_2^{k+1} = -\alpha_{21}x_1^{k+1} \qquad - \alpha_{23}x_3^k - \ldots - \alpha_{2n}x_n^k + \beta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^{k+1} = -\alpha_{n1}x_1^{k+1} - \alpha_{n2}x_2^{k+1} - \alpha_{n3}x_3^{k+1} \ldots - \alpha_{nn-1}x_{n-1}^{k+1} + \beta_n \end{cases} \tag{9}$$

Формулы можно записать в компактном виде

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij}x_j^k + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij}x_j^k + \beta_i,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots \tag{10}$$

Сходимость метода Зейделя. Условия сходимости (8A)-(8C) применимы и для метода Зейделя. Причем, если система (1) нормальная, то процесс Зейделя сходится всегда.

Система называется нормальной, если матрица коэффициентов $A = \{a_{ij}\}$ симметрическая, то есть $a_{ij} = a_{ji}$ и соответствующая квадратичная форма

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j > 0$$

положительно определена.

Пусть для системы (1) условие сходимости не выполняется. Возникает проблема как от системы (1) перейти к эквивалентной системе, чтобы условия сходимости выполнялись. Можно выполнить следующее преобразование:

$$A^T Ax = A^T b. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$F = A^T A, \qquad H = A^T b$$

Тогда система

$$Fx = H \tag{12}$$

эквивалентна системе $Ax = b$ и обладает следующими свойствами:

- матрица F симметрична, т.е. $f_{ij} = f_{ji}$
- все элементы главной диагонали положительны $f_{ii} > 0$
- соответствующая квадратичная форма является положительно определенной. Теперь, если (12) привести к специальному виду (10), т.е.

$$x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$$

где $\beta_i = \dfrac{h_i}{f_{ii}}, \quad \alpha_{ij} = -\dfrac{f_{ij}}{f_{ii}}, \; i \neq j, \; \alpha_{ij} = 0, \; i = j$

Алгоритм численной реализации метода Зейделя решения системы (1) по формулам (10) может быть таким.

1. Формируем матрицы α и вектор столбец β, проверяем условие (8С). Если оно не выполняется, то следует использовать эквивалентную систему (11) Если условие (8С) выполняется, то переходим ко 2 пункту
2. Выберем $X^0 = \beta$, где $x_i^0 = b_i / a_{ii}, i = 1, 2, ..., n$.
3. Положим $k = 0$.
4. Для всех $i = \overline{1, n}$ вычислим $x_i^{k+1} = \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{k+1} + \sum_{j=i+1}^{n} \alpha_{ij} x_j^k + \beta_i$.
5. Для всех $i = \overline{1, n}$ проверим условия $\left| x_i^k - x_i^{k+1} \right| \le \varepsilon$.
6. Если все условия в п.5 будут выполнены, то за приближенное решение системы выберем либо $X^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$, либо $X^{k+1} = (x_1^{k+1}, x_2^{k+1}, ..., x_n^{k+1})$ и закончим вычисления. Если хотя бы одно условие в п.4 не будет выполнено, перейдем к п.7.
7. Положим $k = k + 1$ и перейдем к п.4.

Задания.

Коэффициенты при переменных x_i и свободные члены b_i в системе уравнений даны в виде расширенной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & .... \\ a_{n1} & a_{n2} & .... & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

Во всех заданиях необходимо:

1. составить программы численной реализации методов простых итераций и Зейделя.
2. получить результаты вычислений.
3. проверить полученные результаты.
4. отчет должен содержать: краткие теоретические сведения, блок схема программы, текст программы, найденные корни и их точность, результаты проверки результатов.

Вариант	**СЛАУ**
1.	$\begin{pmatrix} 2{,}15 & 0{,}84 & 0{,}31 & 0{,}16 & \vert & 3{,}18 \\ 0{,}84 & 3{,}14 & 0{,}62 & 0{,}21 & \vert & 4{,}61 \\ 0{,}32 & 0{,}62 & 4{,}82 & 0{,}82 & \vert & 5{,}96 \\ 0{,}16 & 0{,}21 & 0{,}82 & 6{,}41 & \vert & 8{,}14 \end{pmatrix}$

2.	$\begin{pmatrix} 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & \vert & 1,55 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & \vert & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & \vert & 1,75 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & \vert & 1,85 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0.78 & -0.02 & -0.12 & -0.14 & \vert & 0.76 \\ -0.02 & 0.86 & -0.04 & 0,06 & \vert & 0.08 \\ -0.12 & -0.04 & 0.72 & -0.08 & \vert & 1.12 \\ -0.14 & 0.06 & -0.08 & 0.74 & \vert & 0.68 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 0,42 & 0,54 & 0,66 & \vert & 0,3 \\ 0,42 & 1 & 0,32 & 0,44 & \vert & 0,5 \\ 0,54 & 0,32 & 1 & 0,22 & \vert & 0,7 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1 & \vert & 0,9 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2,37 & 0,93 & 0,35 & 0,18 & \vert & 3,50 \\ 0,93 & 3,46 & 0,69 & 0,23 & \vert & 5,07 \\ 0,35 & 0,69 & 5,30 & 0,91 & \vert & 6,56 \\ 0,18 & 0,23 & 0,91 & 7,05 & \vert & 8,96 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & \vert & 1,70 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & \vert & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & \vert & 1,92 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & \vert & 2,03 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0,86 & -0,02 & -0,13 & -0,15 & \vert & 0,84 \\ -0,02 & 0,95 & -0,04 & 0,48 & \vert & 0,09 \\ -0,13 & -0,04 & 0,79 & -0,09 & \vert & 1,23 \\ -0,15 & 0,48 & -0,09 & 0,81 & \vert & 0,75 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 1,1 & 0,46 & 0,59 & 0,73 & \vert & 0,33 \\ 0,46 & 1,1 & 0,35 & 0,48 & \vert & 0,55 \\ 0,59 & 0,35 & 1,1 & 0,24 & \vert & 0,77 \\ 0,73 & 0,48 & 0,24 & 1,1 & \vert & 0,99 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 0,84 & 3,14 & 0,62 & 0,21 & \vert & 4,61 \\ 2,15 & 0,84 & 0,31 & 0,16 & \vert & 3,18 \\ 0,32 & 0,62 & 4,82 & 0,82 & \vert & 5,96 \\ 0,16 & 0,21 & 0,82 & 6,41 & \vert & 8,14 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & \vert & 1,75 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & \vert & 1,65 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & \vert & 1,55 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & \vert & 1,85 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & \vert & 2,03 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & \vert & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & \vert & 1,92 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & \vert & 1,70 \end{pmatrix}$

12.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} -0,77 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,16 & -0,09 & 1,12 \\ -0,21 & 0,16 & 0,80 & -0,13 & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & 1,12 & -0,77 \end{array}\right)$
13.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & 1,85 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & 1,75 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & 1,55 \end{array}\right)$
14.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,93 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,07 & -0,09 & -0,84 \\ -0,21 & 0,07 & 0,80 & -0,13 & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & -0,84 & 0,93 \end{array}\right)$
15.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & 1,92 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & 1,81 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & 1,70 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & 2,03 \end{array}\right)$