Лабораторная 6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Основные определения алгебры матриц

Матрицей A размерностью n×m называется таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ . & . & \dots & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Выражения a_{ij}, $i=1,n$, $j=1,m$ называют элементами матрицы, первый индекс обозначает строку, а второй столбец матрицы.

Множество всех матриц размерностью n×m образуют векторное пространство обозначаемое $C^{n\times m}$.

Основные операции с матрицами следующие:

- Сложение C=A+B,
  A,B,C-матрицы размерностью n×m
  $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, $i=1,n$, $j=1,m$
- Умножение на скаляр C=αA
  $c_{ij}=\alpha a_{ij}$, $i=1,n$, $j=1,m$
- Перемножение матриц C=A×B
  где $A\in C^{n\times m}$, $B\in C^{m\times p}$, $C\in C^{n\times p}$,

  иногда перемножение матриц записывают в виде: $C_{np}=A_{nm}B_{mp}$, указывая явно размерности матриц. Из этой формулы следует, что перемножение матриц возможно, если число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B.

  $$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\times b_{kj},\quad i=1,\dots n,\quad j=1,\dots p$$

Вводится следующее обозначение для векторов:

Вектор-столбец a_{*j} – это вектор-столбец, составляющий j-ый столбец матрицы A

$$a_{*j}=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ . \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

Подобную запись можно сделать для вектора-строки

$$a_{j*}=\left(a_{j1},\ a_{j2},\ .\ .\ .\ .,\ a_{jn}\right)$$

Тогда матрица А может быть записана в виде

$$A=\left(a_{*1},\ a_{*2},\ .\ .\ .\ .,\ a_{*m}\right)$$

либо

$$A=\begin{pmatrix} a_{1*} \\ a_{2*} \\ . \\ . \\ . \\ a_{n*} \end{pmatrix}$$

Число (скаляр) можно рассматривать как матрицу типа 1x1

Транспонирование матрицы А

Транспонированная матрица $A \in C^{n\times m}$ есть матрица $C \in C^{m\times n}$ элементы которой определяются с.о.

$$c_{ji}=a_{ij},\ \ i=1,n,\ \ j=1,m$$

Транспонированную матрицу обозначают A^T

Сопряженной матрицей называют матрицу, обозначаемую A^H, и определяемую как

$$A^H=\overline{A}^T=\overline{A^T}$$

где черта сверху обозначает комплексное сопряжение каждого элемента.

Говорят, что матрицы связаны линейным отображением между векторными пространствами конечной размерности. Это обусловлено тем, что заданы два базиса: один для начального векторного пространства, а другой базис в пространстве отображений.

Квадратные матрицы и собственные числа

Матрица А является квадратной, если число строк равно числу столбцов. Примером квадратной матрицы является единичная

$$I=\{\delta_{ij}\},\ \ i=1,2,\dots,n$$

— δ_{ij} - символ Кронекера.

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица для любой матрицы А размерностью n удовлетворяет соотношению

$$IA=AI=A$$

Матрица обратная к A обозначается A^{-1}. Матрица C обратная к A, если она существует, удовлетворяет соотношению

$$AC=CA=I$$

Детерминант матрицы может определяться несколькими способами. Для простоты будем использовать следующее рекурсивное определение через миноры:

$$det(A)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\times A_{1j}$$

Минор A_{1j} — это определитель матрицы размерностью (n-1), полученный из исходной матрицы A путем вычеркивания первой строки и j-го столбца.

Говорят, что матрица *сингулярная*, если det(A)=0 и не сингулярная в остальных случаях.

Основные свойства определителей

- $det(AB)=det(BA)$
- $det(A^T)=det(A)$
- $det(\alpha B)=\alpha^n det(A)$
- $det(\overline{A})=\overline{det(A)}$
- $det(I)=1$

Решение систем линейных уравнений

Система m уравнений с n неизвестными вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой линейных уравнений, причем x_i - неизвестные, a_{ij}- коэффициенты при неизвестных, b_i- свободные коэффициенты . Система из m линейных уравнений с n неизвестными может быть описана при помощи матриц:

AX = B,

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . & . & ... & . \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$$

X - вектор неизвестных, A матрица коэффициентов при неизвестных или матрица системы, B - вектор свободных членов системы, или вектор правых частей.

Матрица (A\b) формируется путем приписывания к матрице коэффициентов A столбца свободных членов b, называется расширенной матрицей системы.

Если все b = 0, то речь идет об однородной системе линейных уравнений, иначе говорят о неоднородной системе.

Совокупность всех решений системы называется множеством решений, или просто решением системы. Две системы уравнений называются эквивалентными, если они имеют одинаковое множество решений.

Однородные системы линейных уравнений A • x= 0 всегда разрешимы, так как последовательность ($x_1 = 0$, $x_2 = 0$,..., x_n=0) удовлетворяет всем уравнениям системы. Решение x= 0 называют тривиальным. Вопрос о решении однородных систем сводится к вопросу о том, существуют ли кроме тривиального другие, нетривиальные, решения.

Система линейных уравнений может не иметь ни одного решения, и тогда на называется несовместной. Например, в системе

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Левые части уравнений совпадают, а правые различны, поэтому никакие значения x_1, и x_2 не могут удовлетворить обоим уравнениям сразу.

Если же система линейных уравнений обладает решением, то она называется совместной. Совместная система называется определенной, если она обладает одним единственным решением, и неопределенной, если решений больше, чем одно. Так, система

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 7, \\ x_1 + x_2 = 6 \end{cases}$$

определена и имеет единственное решение: $x_1 = 5$ и $x_2 = 1$, а система уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ 6x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$$

не определена, так как имеет бесконечное множество решений вида $x_1 = k$ и $x_2 = 3k - 1$, где число k произвольно. Совокупность всех решений неопределенной системы уравнений называется ее общим решением, а какое-то одно конкретное решение - частным. Частное решение, полученное из общего при нулевых значениях свободных переменных, называется базисным.

При определении совместности систем уравнений важную роль играет понятие ранга матрицы. Пусть дана матрица A размером n×m. Вычеркиванием некоторых строк или столбцов из нее можно получить квадратные матрицы k-го порядка, определители которых называются минорами порядка к матрицы A.

Наивысший порядок не равных нулю миноров матрицы A называют рангом матрицы и обозначают r(A). Из определения вытекает, что

$$r(A) \le min(n, m) \quad ,$$

r (A) = 0, только если матрица нулевая и r(A) = n для невырожденной матрицы n-го порядка. При элементарных преобразованиях (перестановке строк матрицы, умножении строк на число, отличное от нуля, и сложении строк) ранг матрицы не изменяется.

Исследовании системы на совместность:

система m линейных уравнений с n неизвестными:

■ несовместна, если r(A|b) > r(A)

■ совместна, если r(A|b) = r(A), причем при r(A|b) = r(A) = n имеет единственное решение, а при r(A|b) = r(A)<n имеет бесконечно много решений.

Метод Гаусса

Проблема решения линейной системы *Ax = b* является центральной в научных вычислениях. В этом разделе мы остановимся на методе исключения Гаусса, который используют, когда матрица *A* квадратная, плотная и без специфики. Это точный способ решения систем линейных уравнений. Его также называют методом последовательного исключения неизвестных.

Треугольные системы решаются «легко». Идея исключения Гаусса - это преобразование системы *Ax = b* в эквивалентную треугольную систему. Преобразование осуществляется составлением соответствующих линейных комбинаций уравнений. Например, в системе

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=9, \\ 6x_1+7x_2=4 \end{cases}$$

умножая первую строку на 2 и вычитая ее из второй, мы получим

$$\begin{cases} 3x_1+5x_2=9, \\ \quad -3x_2=-14 \end{cases}$$

Это и есть исключение Гаусса при *n = 2.*

Будем рассматривать только квадратные матрицы. Рассмотрим расширенную матрицу A. Для этого в матрицу A добавим свободный член B:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \quad . \tag{2}$$

<u>Прямой ход</u>

Первый этап решения системы уравнений (1), называемый прямым ходом метода Гаусса, заключается в приведении расширенной матрицы (2) к треугольному виду это означает, что все элементы матрицы (2) ниже главной диагонали должны быть равны нулю:

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} . \qquad (3)$$

Для формирования первого столбца матрицы (3) необходимо из каждой строки (начиная со второй) вычесть первую, умноженную на некоторое число М. В общем виде этот процесс можно записать так:

2-я строка = 2-я строка - М × 1-я строка,

…………………………………….

n-я строка = n-я строка — М × 1-я строка.

Т.е преобразование элементов 2 строки будет происходить по формулам:

$a_{21}=a_{21}-M\,a_{11},\quad a_{22}=a_{22}-M\,a_{12},\dots\dots\dots,a_{2n}=a_{2n}-M\,a_{1n},\quad b_2=b_2-M\,b_1$ - 2 строка

Так как целью данных преобразований является обнуление первого элемента строки, то М выбирается из условия:

$a_{21}-M\,a_{11}=0$

Следовательно,

$$M=\frac{a_{21}}{a_{11}}$$

Элементы всех остальных строк и коэффициент М можно рассчитать аналогично:

$a_{j1}=a_{j1}-M\,a_{11},\quad a_{j2}=a_{j2}-M\,a_{12},\dots\dots\dots,a_{jn}=a_{jn}-M\,a_{1n},\quad b_j=b_j-M\,b_1$ - j строка.

$$M=\frac{a_{j1}}{a_{11}}$$

В итоге будет получена матрица (3) в которой в первом столбце все нули кроме первого элемента. Далее подобная процедура будет продолжена для второго столбца начиная с третьей строки. В итоге матрица будет приведена к треугольному виду

$$\hat{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix}$$

<u>Замечание:</u> если в матрице (2) на главной диагонали встретится элемент a_{kk}, равный нулю, то расчет коэффициента M будет невозможен и обнулить столбец таким образом невозможно. Избежать деления на ноль можно, избавившись от нулевых элементов на главной диагонали. Для этого перед обнулением элементов в k-м столбце необходимо найти в нем максимальный по модулю элемент(начиная со строки k), запомнить номер строки, в которой он находится, и поменять ее местами с k-ой.

В результате выполнения прямого метода Гаусса система уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

<u>Обратный ход</u>

Решение примет вид:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1 - (a_{12}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ \qquad x_2 = \dfrac{b_2 - (a_{23}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad x_n = \dfrac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

Алгоритм, реализующий метод Гаусса представлен ниже в виде программы для SkiLab

Метод Гаусса

```
n=4
A0=[1,3,3,1;0,1,0,3;2,2,2,0;0,4,1,3];
B=[1;0;2;4];
A=[A0 B] // - конкатенации матрицы и вектора столбца
//Прямой ход
//1) Выбор ведущего элемента в k-ом столбце
for k=1:n    //Цикл по столбцам
    Max=abs(A(k,k))
     kmax=k
    for i=k+1:n              //цикл по строкам
       if abs(A(i,k))>Max then
           Max=(A(i,k))    // ведущий элемент в k-ом столбце
           kmax=i          // строка с максимальным элементом
       end
    end
// Перестановка строк
   if(kmax>k) then
         for j=k:n+1    //Цикл по столбцу
              x=A(k,j)
             A(k,j)=A(kmax,j)
```

```
            A(kmax,j)=x
        end
    end
// Обнуление столбца с номером k
    for i=k+1:n                     //цикл по строкам
       M=A(i,k)/A(k,k)
       for j=k:n+1                    // цикл по столбцам
           A(i,j)=A(i,j)-M*A(k,j)
       end
    end
end
disp(A)
//Обратный ход
X=[0;0;0;0]
for i=n:-1:1
   sumA=0
   for j=i:n
      sumA=sumA+A(i,j)*X(j)
   end
   B1=A(i,n+1)
   X(i)=(B1-sumA)/A(i,i)
end
```

Решить систему уравнений методом Гаусса и осуществить проверку решения методом подстановки (AX=B)

Вариант	**СЛАУ**
1.	$\begin{pmatrix} 2,15 & 0,84 & 0,31 & 0,16 & \mid & 3,18 \\ 0,84 & 3,14 & 0,62 & 0,21 & \mid & 4,61 \\ 0,32 & 0,62 & 4,82 & 0,82 & \mid & 5,96 \\ 0,16 & 0,21 & 0,82 & 6,41 & \mid & 8,14 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & \mid & 1,55 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & \mid & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & \mid & 1,75 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & \mid & 1,85 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0.78 & -0.02 & -0.12 & -0.14 & \mid & 0.76 \\ -0.02 & 0.86 & -0.04 & 0,06 & \mid & 0.08 \\ -0.12 & -0.04 & 0.72 & -0.08 & \mid & 1.12 \\ -0.14 & 0.06 & -0.08 & 0.74 & \mid & 0.68 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 0,42 & 0,54 & 0,66 & \mid & 0{,}3 \\ 0,42 & 1 & 0,32 & 0,44 & \mid & 0{,}5 \\ 0,54 & 0,32 & 1 & 0,22 & \mid & 0{,}7 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1 & \mid & 0{,}9 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2,37 & 0,93 & 0,35 & 0,18 & \mid & 3,50 \\ 0,93 & 3,46 & 0,69 & 0,23 & \mid & 5,07 \\ 0,35 & 0,69 & 5,30 & 0,91 & \mid & 6,56 \\ 0,18 & 0,23 & 0,91 & 7,05 & \mid & 8,96 \end{pmatrix}$

6.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & 1,70 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & 1,92 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & 2,03 \end{array}\right)$
7.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,86 & -0,02 & -0,13 & -0,15 & 0,84 \\ -0,02 & 0,95 & -0,04 & 0,48 & 0,09 \\ -0,13 & -0,04 & 0,79 & -0,09 & 1,23 \\ -0,15 & 0,48 & -0,09 & 0,81 & 0,75 \end{array}\right)$
8.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1,1 & 0,46 & 0,59 & 0,73 & 0,33 \\ 0,46 & 1,1 & 0,35 & 0,48 & 0,55 \\ 0,59 & 0,35 & 1,1 & 0,24 & 0,77 \\ 0,73 & 0,48 & 0,24 & 1,1 & 0,99 \end{array}\right)$
9.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,84 & 3,14 & 0,62 & 0,21 & 4,61 \\ 2,15 & 0,84 & 0,31 & 0,16 & 3,18 \\ 0,32 & 0,62 & 4,82 & 0,82 & 5,96 \\ 0,16 & 0,21 & 0,82 & 6,41 & 8,14 \end{array}\right)$
10.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & 1,75 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & 1,65 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & 1,55 \\ 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & 1,85 \end{array}\right)$
11.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & 2,03 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & 1,81 \\ 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & 1,92 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & 1,70 \end{array}\right)$
12.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} -0,77 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,16 & -0,09 & 1,12 \\ -0,21 & 0,16 & 0,80 & -0,13 & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & 1,12 & -0,77 \end{array}\right)$
13.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,24 & 0,25 & 0,26 & 1,27 & 1,85 \\ 0,16 & 1,17 & 0,18 & 0,19 & 1,65 \\ 0,20 & 0,21 & 1,22 & 0,23 & 1,75 \\ 1,12 & 0,13 & 0,14 & 0,14 & 1,55 \end{array}\right)$
14.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,93 & -0,04 & 0,21 & -0,18 & -1,24 \\ 0,25 & -1,23 & 0,07 & -0,09 & -0,84 \\ -0,21 & 0,07 & 0,80 & -0,13 & 2,56 \\ 0,15 & -0,31 & 0,06 & -0,84 & 0,93 \end{array}\right)$
15.	$\left(\begin{array}{cccc\|c} 0,22 & 0,23 & 1,34 & 0,25 & 1,92 \\ 0,17 & 1,28 & 0,19 & 0,21 & 1,81 \\ 1,23 & 0,14 & 0,15 & 0,16 & 1,70 \\ 0,26 & 0,27 & 0,28 & 1,39 & 2,03 \end{array}\right)$