5. Лабораторная работа №5. ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ТАБЛИЧНО ЗАДАННЫХ ФУНКЦИЙ

5.1. Интерполяция таблично заданных функций

5.1.1. Интерполяционный многочлен Лагранжа

Пусть в точках $x_0, x_1, \dots, x_n$ таких, что $a \le x_0 < \dots < x_n \le b$ известны значения функции $y = f(x)$, то есть на отрезке $[a; b]$ задана табличная (сеточная) функция:

x	x_0	x_1	$\dots$	x_n
y	y_0	y_1	$\dots$	y_n

Определение. Функция $\varphi(x)$ называется интерполирующей (интерполяционной) для $f(x)$ на $[a; b]$, если ее значения $\varphi(x_0)$, $\varphi(x_1)$, ..., $\varphi(x_n)$ в заданных точках $x_0, x_1, \dots, x_n$, называемых узлами интерполяции, совпадают с заданными значениями функции $f(x)$, то есть с $y_0, y_1, \dots, y_n$ соответственно.

Будем строить многочлен n-степени $L_n(x)$ в виде линейной комбинации

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) f(x_i), \qquad (5.1)$$

где базисные многочлены имеют вид

$$p_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})(x_i - x_n)},$$

обладающий свойством: $L_n(x_i) = f(x_i), i = \overline{0,n}$, (5.2)

если известны значения функции $f(x)$ в точках $x_i, i = \overline{0,n}$.

Теорема. Полином n-й степени, обладающий свойством (5.2), единственный.

5.1.2. Полином Ньютона

Пусть интерполируемая функция $y = f(x)$ задана таблично значениями $y_0, y_1, \ldots, y_n$ на системе равностоящих узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$: $\forall x_k$ можно представить в виде $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, $h > 0$, $f_k = f(x_k)$, h – шаг сетки.

Определение. Конечной разностью 1-го порядка называется

$\Delta^1 f_k = f_{k+1} - f_k$ $(\Delta^0 f_k = f_k)$.

Конечная разность n-порядка:

$\Delta^n f_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$.

Свойства:

1. $\Delta^n P_n(x) = const$ (конечная разность n-го порядка от полинома n-й степени равно константе).

$\Delta^{(n+1)} P_n(x) = 0$ (конечная разность $(n+1)$-го порядка от полинома n-го порядка равна нулю).

2. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда $\Delta^n f_k \approx f^{(n)}(x_k)h^n$.

Непосредственно через значения функции конечные разности можно представить рекуррентной формулой $\Delta^n f_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (C_n^i) f_{n+k-i}$.

Пусть $f(x)$ задана таблично и $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0,n}$, $f_k = f(x_k)$.

Определение. Разделенной разностью $f(x_0, \ldots, x_n)$ n-го порядка называется:

$$f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Разделенная разность первого порядка: $f(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$.

Разделенная разность второго порядка:

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}.$$

Свойства разделенной разности.

1. Пусть $f(x)$ имеет все производные, тогда при равномерном разбиении: $f(x_0, x_1, ..., x_n) = f^{(n)}(\xi)$, $f(x_0, x_1, ..., x_n) = \dfrac{\Delta^n f_0}{n!h^n}$.

2. Разделенная разность *n*-го порядка, примененная к полиному *n*-й степени равна константе. Разделенная разность (*n*+1)-го порядка от полинома *n*-й степени равна нулю.

3. Разделенная разность *n*-го порядка $f(x_0, x_1, ..., x_n)$ – симметричная функция своих аргументов.

Для функции $f(x)$, заданной таблично на узлах $x_i, i = \overline{0, n}$, можно записать интерполяционный полином Ньютона:

$$\begin{gathered} N_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + ... + \\ + f(x_0, x_1, ..., x_n)(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1}) \end{gathered} . \quad (5.3)$$

Замечание: Полином Ньютона есть одна из форм представления полинома Лагранжа.

Резюме: Обычно интерполяция проводится не на всех точках разбиения, а только на 5–7 соседних. В этой ситуации при изменении точек интерполирования полином Лагранжа приходится строить заново каждый раз. А полином Ньютона изменяется лишь на несколько слагаемых. При увеличении числа точек интерполяции на одну точку все слагаемые полинома Ньютона сохраняются, добавляются только последующие слагаемые. Для полинома Лагранжа все *n* слагаемых должны быть построены заново.

I интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции $y = f(x)$, заданной таблицей с постоянным шагом составлена таблица конечных разностей.

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x - x_0) + ... + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x - x_0)...(x - x_{n-1}) . \quad (5.4)$$

Пусть $k = \dfrac{x - x_0}{h}$, $x = x_0 + kh$, тогда

$$P_n(x) = P_n(x_0 + kh) = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{k(k-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \\ + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!}\Delta^n y_0 \qquad (5.5)$$

Формулы (5.4) и (5.5) применяются для интерполирования в начале отрезка для значения k из интервала $(0,1)$.

Путем переобозначений за начальное значение x_0 можно принять любое табличное значение аргумента x, отбросив лишние узлы сетки.

II интерполяционная формула Ньютона

Когда значения аргумента находятся ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае строят полином в виде:

$$P_n(x) = P_n(x_n + kh) = y_n + k\Delta y_{n-1} + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k+n-1)}{n!}\Delta^n y_0 . \qquad (5.6)$$

5.1.3. Кусочно-линейная и кусочно-квадратичная аппроксимация

Пусть задана функция $y = f(x)$ таблично x_i, y_i $(i = \overline{0,n})$ $a \le x_0 \le x_1 \le \ldots \le x_n \le b$.

Требуется аппроксимировать функцию $f(x)$ кусочно-линейной функции $\varphi(x)$, исходя из условий интерполяций, т. е.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, x_0 \le x \le x_1 \\ a_2 x + b_2, x_1 \le x \le x_2 \\ \ldots \\ a_n x + b_n, x_{n-1} \le x \le x_n \end{cases} .$$

Для нахождения неизвестных параметров a_k, b_k $(k = \overline{1,n})$, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \begin{cases} a_1 x_0 + b_1 = y_0 \\ a_1 x_1 + b_1 = y_1 \end{cases} \\ \dots \\ \begin{cases} a_n x_{n-1} + b_n = y_{n-1} \\ a_n x_n + b_n = y_n \end{cases} \end{cases}.$$

Каждая из n подсистем решается отдельно.

Кусочно-квадратичная аппроксимация осуществляется аналогично кусочно-линейной аппроксимации. Каждое звено кусочно-квадратичной функции при $n = 2m$

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x^2 + b_1 x + c_1, x \in [x_0, x_2] \\ a_2 x^2 + b_2 x + c_2, x \in [x_2, x_4] \\ \dots \\ a_n x^2 + b_n x + c_n, x \in [x_{2m-2}, x_{2m}] \end{cases}.$$

Тройка коэффициентов $a_k, b_k, c_k \; (k = \overline{1,m})$ может быть найдена последовательным решением трехмерных линейных систем, соответствующим выставленным интерполяционным условиям.

$$\begin{cases} a_k x_{2k-2}^2 + b_k x_{2k-2} + c_k = y_{2k-2} \\ a_k x_{2k-1}^2 + b_k x_{2k-1} + c_k = y_{2k-1} \\ a_k x_{2k}^2 + b_k x_{2k} + c_k = y_{2k} \end{cases}.$$

5.2. Пример выполнения лабораторной работы

5.2.1. Задание к лабораторной работе

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

$x_0 \;\; x_1 \;\; x_2 \; x_3 \;\; x_4$

$y_0 \;\; y_1 \;\; y_2 \; y_3 \; y_4$.

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа. Вычислить $L_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Лагранжа.

2. Построить таблицы конечных и разделенных разностей.

3. Построить полином Ньютона и вычислить значение $N_4(x_1+x_2)$. Построить график многочлена Ньютона.

4. Построить интерполяционные сплайны линейный и квадратичный. Построить графики сплайнов.

5. На одном чертеже с графиком полиномов построить графики сплайнов.

5.2.2. Решение типового примера

Функция $y = f(x)$ задана таблично в узлах

x	0,351	0,867	3,315	5,013	6,432
y	–0,572	–2,015	–3,342	–5,752	–6,911

1. Построим интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени $L_4(x)$ в виде линейной комбинации $L_4(x) = \sum_{i=0}^{4} p_i(x) f(x_i)$.

Вычислим базисные многочлены.

$$p_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)(x_0 - x_4)} =$$

$$= \frac{(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432)}{(0{,}351 - 0{,}867)(0.351 - 3{,}315)(0{,}351 - 5{,}013)(0{,}351 - 6{,}432)} =$$

$$= 0{,}0231 \cdot (x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_1(x) = -0{,}0343 \cdot (x - 0{,}351)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_2(x) = 0{,}0260 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432),$$

$$p_3(x) = -0{,}0215 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 6{,}432),$$

$$p_4(x) = 0{,}0067 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013).$$

Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа 4-й степени будет иметь вид

$$L_4(x) = -0{,}0132 \cdot (x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) +$$
$$+ 0{,}0691 \cdot (x - 0{,}351)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) -$$
$$- 0{,}0870 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 5{,}013)(x - 6{,}432) +$$
$$+ 0{,}1235 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 6{,}432) -$$
$$- 0{,}0462 \cdot (x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013).$$

Вычислим значение полинома в точке

$L_4(x_1 + x_2) = L_4(x_1 + x_2) = L_4(0{,}867 + 3{,}315) = -4{,}3453.$

Построим график многочлена Лагранжа (рис. 5.1).

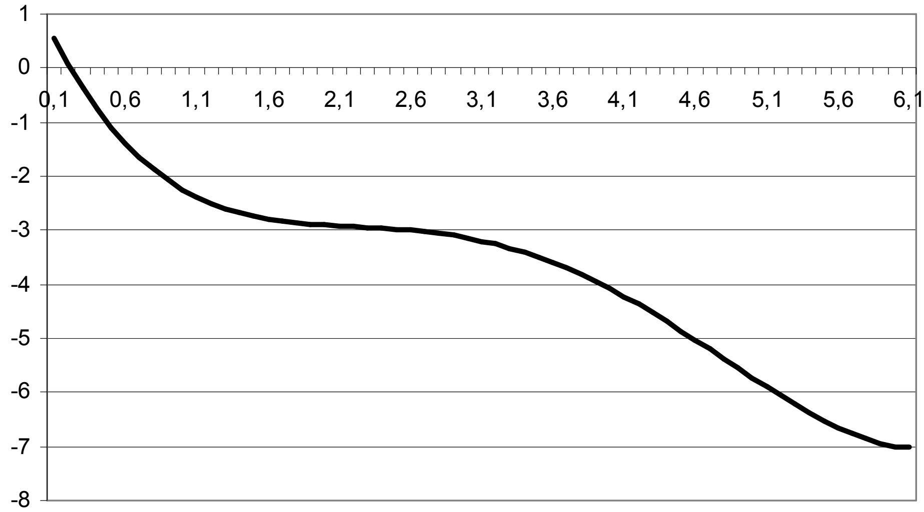

Рис. 5.1. График полинома Лагранжа

2. Построим таблицы конечных и разделенных разностей.

Таблица 5.1

Таблица конечных разностей

x_k	y_k	Δy_k	$\Delta^2 y_k$	$\Delta^3 y_k$	$\Delta^4 y_k$
0,351	–0,572	–1,4430	0,1160	–1,1990	3,5330
0,867	–2,015	–1,3270	–1,0830	2,3340	
3,315	–3,342	–2,4100	1,2510		
5,013	–5,752	–1,1590			
6,432	–6,911				

Таблица 5.2

Таблица разделенных разностей

x_k	y_k	1-го порядка	2-го порядка	3-го порядка	4-го порядка
0,351	–0,572	–2,7965	0,7606	–0,2085	0,0463
0,867	–2,015	–0,5421	–0,2116	0,0728	
3,315	–3,342	–1,4193	0,1933		
5,013	–5,752	–0,8168			
6,432	–6,911				

3. Построим полином Ньютона, используя таблицу разделенных разностей

$$N_4(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, x_3)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) +$$
$$+ f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

Получим

$$N_4(x) = -0{,}572 - 2{,}7965(x - 0{,}351) + 0{,}7606(x - 0{,}351)(x - 0{,}867) -$$
$$- 0{,}2085(x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315) +$$
$$+ 0{,}0463(x - 0{,}351)(x - 0{,}867)(x - 3{,}315)(x - 5{,}013).$$

Вычислим значение полинома Ньютона в точке

$$N_4(x_1 + x_2) = N_4(x_1 + x_2) = L_4(0{,}867 + 3{,}315) = -4{,}3453.$$

Построим график многочлена Ньютона (рис. 5.2).

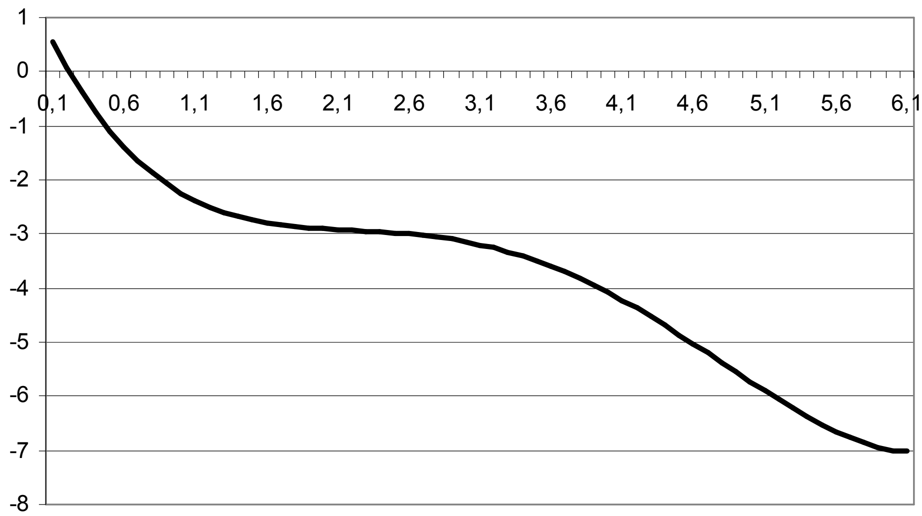

Рис. 5.2. График полинома Ньютона

4. Построим интерполяционные сплайны линейный и квадратичный.

Кусочно-линейная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1 x + b_1, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ a_2 x + b_2, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ a_3 x + b_3, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ a_4 x + b_4, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов строим систему:

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}351a_1 + b_1 = -0{,}572, \\ 0{,}867a_1 + b_1 = -2{,}015; \end{cases} \\ \begin{cases} 0{,}867a_2 + b_2 = -2{,}015, \\ 3{,}315a_2 + b_2 = -3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 3{,}315a_3 + b_3 = -3{,}342, \\ 5{,}013a_3 + b_3 = -5{,}752; \end{cases} \\ \begin{cases} 5{,}013a_4 + b_4 = -5{,}752, \\ 6{,}432a_4 + b_4 = -6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$$a_1 = -2{,}797 \quad a_2 = -0{,}542 \quad a_3 = -1{,}419 \quad a_4 = -0{,}817$$
$$b_1 = 0{,}490 \ , \ b_2 = -1{,}545 \ , \ b_3 = 1{,}362 \ , \ b_4 = -1{,}656 \ .$$

Тогда линейный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} -2{,}797x + 0{,}490, & 0{,}351 \le x \le 0{,}867, \\ -0{,}542x - 1{,}545, & 0{,}867 \le x \le 3{,}315, \\ -1{,}419x + 1{,}362, & 3{,}315 \le x \le 5{,}013, \\ -0{,}817x - 1{,}656, & 5{,}013 \le x \le 6{,}432. \end{cases}$$

Построим график линейного сплайна (рис. 5.3).

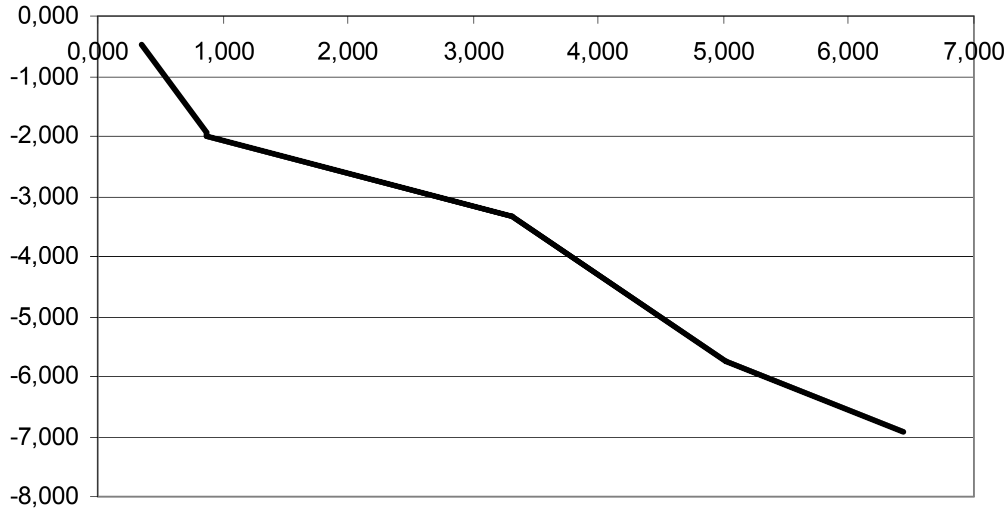

Рис. 5.3. График линейного сплайна

Кусочно-квадратичная аппроксимация.

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_1x^2 + b_1x + c_1, & x \in [0{,}351;3{,}315] \\ a_2x^2 + b_2x + c_2, & x \in [3{,}315;3{,}6.432] \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \begin{cases} 0{,}123a_1 + 0{,}351b_1 + c_1 = -0{,}572, \\ 0{,}752a_1 + 0{,}867b_1 + c_1 = -2{,}015, \\ 10{,}989a_1 + 3{,}315b_1 + c_1 = -3{,}342; \end{cases} \\ \begin{cases} 10{,}989a_2 + 3{,}315b_2 + c_2 = -3{,}342, \\ 25{,}130a_2 + 5{,}013b_2 + c_2 = -5{,}752, \\ 41{,}370a_2 + 6{,}432b_2 + c_2 = -6{,}911. \end{cases} \end{cases}$$

Решая каждую подсистему отдельно, получим:

$a_1 = 0{,}761 \quad a_2 = 0{,}193$

$b_1 = -3{,}724$, $b_2 = -3{,}029$.

$c_1 = 0{,}642 \quad c_2 = 4{,}576$

Тогда квадратичный сплайн имеет вид

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0{,}761x^2 - 3{,}724x + 0{,}642, & x \in [0{,}351;3{,}315] \\ 0{,}193x^2 - 3{,}029x + 4{,}576, & x \in [3{,}315;3.6{,}432] \end{cases}.$$

Построим график квадратичного сплайна (рис. 5.4).

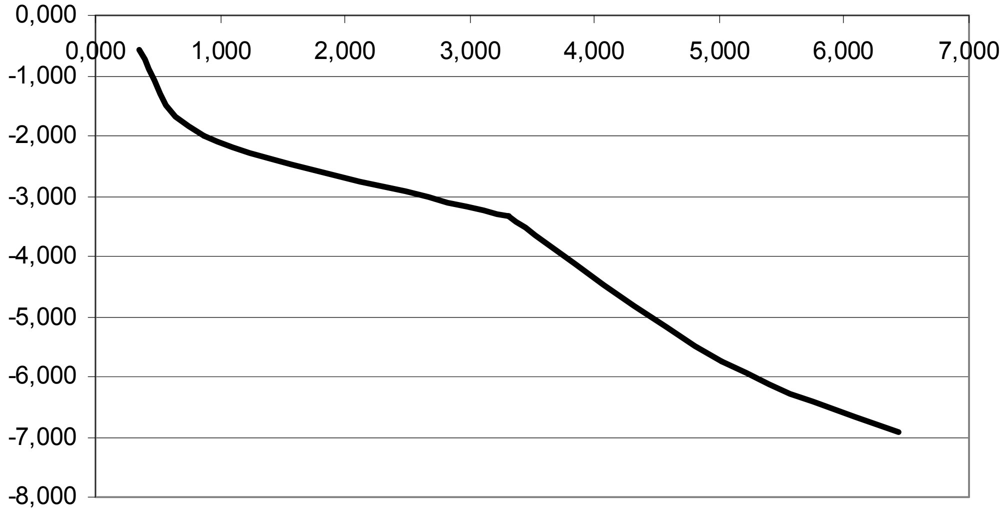

Рис. 5.4. График квадратичного сплайна

5. На одном чертеже с графиком полиномов построим графики сплайнов.

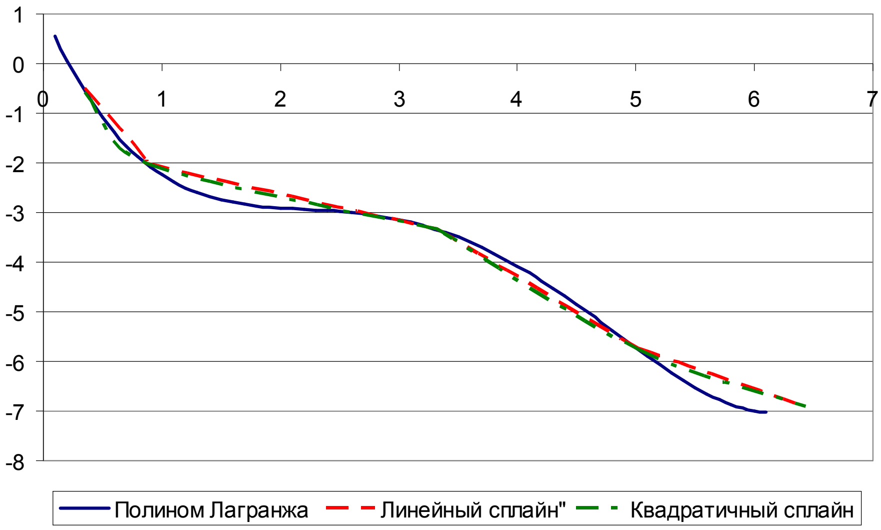

Рис. 5.5. Графики полиномов и сплайнов

5.2.3. Варианты заданий

№	Таблица значений функции
1	*x*: 0,847 1,546 1,834 2,647 2,910 *y*:–1,104 1,042 0,029 –0,344 –0,449
2	*x*: 0,284 0,883 1,384 1,856 2,644 *y*:–3,856 –3,953 –5,112 –7,632 –8,011
3	*x*: 0,259 0,841 1,562 2,304 2,856 *y*: 0,018 –1,259 –1,748 –0,532 0,911
4	*x*: 0,172 0,567 1,113 2,119 2,769 *y*:–7,057 –5,703 –0,132 1,423 2,832
5	*x*: 0,092 0,772 1,385 2,108 2,938 *y*: 3,161 1,357 –0,158 –0,129 –4,438
6	*x*: 0.357 0.871 1,567 2,032 2,628 *y*: 0,548 1,012 1,159 0,694 –0,503
7	*x*: 0,235 0,672 1,385 2,051 2,908 *y*: 1,082 1,805 4,280 5,011 7,082
8	*x*: 0,015 0,681 1,342 2,118 2,671 *y*:–2,417 –3,819 –0,642 0,848 2,815
9	*x*: 0,231 0,848 1,322 2,224 2,892 *y*:–2,748 –3,225 –3,898 –5,908 –6,506
10	*x*: 0,083 0,472 1,347 2,117 2,947 *y*:–2,132 –2,013 –1,613 –0,842 2,973
11	*x*: 0,119 0,718 1,342 2,859 3,948 *y*:–0,572 –2,015 –3,342 –6,752 –6,742

Окончание

12	*x*: 0,184 0,865 1,213 2,019 2,862 *y*:–1,687 –2,542 –5,082 –7,042 –8,538
13	*x*: 0,351 0,867 1,315 2,013 2,859 *y*: 0,605 0,218 0,205 1,157 5,092
14	*x*: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,642 *y*:–2,132 –2,113 –1,613 –0,842 1,204
15	*x*: 0,135 0,876 1,336 2,301 2,851 *y*: 2,382 –0,212 –1,305 –3,184 –4,365
16	*x*: 0,079 0,637 1,345 2,095 2,782 *y*:–4,308 –0,739 1,697 4,208 6,203
17	*x*: 2,119 3,618 5,342 7,859 8,934 *y*: 0,605 0,718 0,105 2,157 3,431
18	*x*: 0,345 0,761 1,257 2,109 2,943 *y*:–1,221 –0,525 2,314 5,106 9,818
19	*x*: 0,234 0,649 1,382 2,672 2,849 *y*: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,184
20	*x*: 0,238 0,647 1,316 2,108 4,892 *y*: 0,092 0,672 2,385 3,108 2,938
21	*x*: 0,248 0,663 1,238 2,092 2,939 *y*:–3,642 0,802 0,841 0,513 0,328
22	*x*: 0,282 0,872 1,513 2,022 2,672 *y*: 6,324 –0,405 –1,114 –1,315 –1,469
23	*x*: 0,324 0,718 1,315 2,035 2,893 *y*:–2,052 –1,597 –0,231 2,808 8,011
24	*x*: 0,218 0,562 1,492 2,119 2,948 *y*: 0,511 0,982 2,411 3,115 4,561
25	*x*: 0,132 0,567 1,153 2,414 3,939 *y*: 69,531 1,112 –1,672 –1,922 –1,925
26	*x*: 0,234 0,649 1,382 3,672 5,911 *y*: 3,902 2,675 0,611 –3,256 –3,615
27	*x*: 0,134 0,561 1,341 2,291 6,913 *y*: 2,156 3,348 3,611 4,112 4,171
28	*x*: 0,452 0,967 2,255 4,013 5,432 *y*: 1,252 2,015 4,342 5,752 6,911
29	*x*: 0,151 0,862 1,282 2,139 2,739 *y*:–4,528 –0,345 0,638 1,342 3,645
30	*x*: 0,219 0,811 1,341 2,111 2,874 *y*:–2,151 –0,452 1,214 2,891 4,617