Лабораторная 1. Трансцендентные уравнения

Во многих научных и инженерных задачах возникает необходимость решения уравнений вида:

$$f(x,\ p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n) = 0, \tag{1.1}$$

где f - заданная функция, x - неизвестная величина, $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ - параметры задачи.

Как правило, исследователя интересует поведение решений в зависимости от параметров p_k. При каждом фиксированном наборе параметров p_k уравнение (1.1) может иметь либо конечное, либо бесконечное количество решений x, что соответствует определенному физическому смыслу конкретной задачи.

Так, например, в электродинамике при математическом моделировании электромагнитных волновых колебательных процессов в линиях передачи и резонаторах получают так называемое дисперсионное уравнение вида (1.1). В этом случае параметрами p_k являются частота колебаний, геометрические параметры системы и включений, пространственное распределение диэлектрической и магнитной проницаемостей в электродинамической структуре и т.д. В качестве неизвестного x могут быть выбраны коэффициенты распространения и затухания электромагнитных волн в линиях передачи либо собственные частоты и добротности колебательных систем. Бесконечное множество решений дисперсионного уравнения будет соответствовать бесконечному числу потенциально возможных собственных типов волн (колебаний) в исследуемой системе.

Не нарушая общности задачи, можно поменять местами неизвестное x и любой из параметров p_k, т.е. решать уравнение (1.1) относительно другой неизвестной величины.

Решениями или корнями уравнения (1.1) называются такие значения x, которые при подстановке в уравнение обращают его в тождество.

Только для простейших уравнений удается найти решение в аналитическом виде, т.е. записать формулу, выражающую искомую величину x, в явном виде рез параметры p_k. В большинстве же случаев приходится решать уравнения вида (1.1) численными методами. Хотя иногда, даже при наличии аналитического решения, имеющего сложный вид, бывает проще провести численное решение по известному алгоритму, чем программировать громоздкую аналитическую формулу.

В результате численного решения уравнения (1.1) получают таблицы зависимостей искомой величины x от параметров p_k. Данные таблицы можно представить в наглядном виде с помощью средств машинной графики. Чаще всего фиксируют все параметры, за исключением одного, который изменяют в интересующем интервале с выбранным шагом и получают одномерные таблицы и графики на плоскости. Изменяя другие параметры, получают многомерные таблицы, а на графиках - семейства кривых.

Численное решение уравнения (1.1) обычно проводят в два этапа. На первом этапе необходимо отделить корни уравнения, т.е. найти такие интервалы изменения переменной x, где расположен только один корень. По сути дела, на этом этапе находят приближенные значения корней с погрешностью, задаваемой длиной каждого интервала. Нередко отделение корней удается провести, не обращаясь к математическим методам и алгоритмам, на основании физического смысла задачи или из анализа ее упрощенной математической модели. На втором этапе проводят уточнение отделенных корней, т.е. находят корни с заданной точностью.

Рассмотрим графический или табличный способ отделения корней уравнения (1.1), который используется, когда отсутствует информация о расположении корней. В интересующей нас области изменения неизвестного $x \in [x_0, x_n]$ при фиксированных параметрах p_k вычислим ряд значений левой части уравнения (1.1) и результаты поместим в табл. 1.1, по которой можно построить график (рис. 1.1).

Таблица 1.1

x	$f(x)$
x_0	f_0
x_1	f_1
.	.
.	.
.	.
x_n	f_n

С точностью до выбранного шага (расстояния между точками x_i) из графика (таблицы) определяются приближенные значения корней уравнения (1.1). Уменьшая шаг в окрестности каждого корня, можно повысить точность определения корней. Однако такой способ требует большого объема вычислений. Конечно, для сравнительно простых уравнений, у которых отсутствуют параметры, графическим методом удается провести не только отделение, но и уточнение корней. Но при проведении численных экспериментов с вариациями параметров задачи подобный метод не годится для уточнения корней и используется только для отделения корней, т.е. определения начальных приближений к ним. Уточнение корней проводится с помощью других, более экономичных методов.

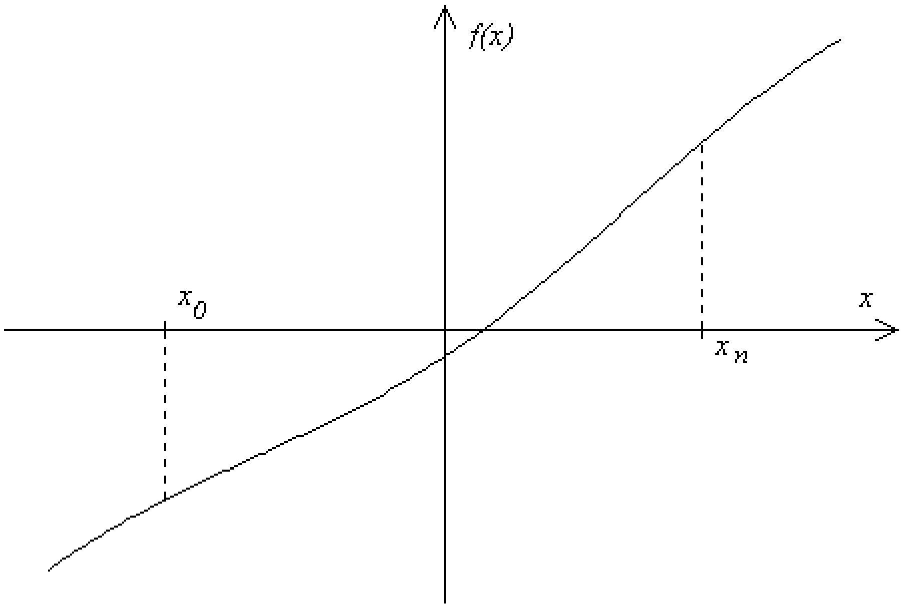

Рис. 1.1. График левой части уравнения (1.1)

Если левая часть уравнения (1.1) является непрерывной функцией аргумента x, то для отделения корней не обязательно строить график этой функции. В этом случае корни уравнения будут расположены между точками таблицы, где изменяется знак функции $f(x)$.

Шаг изменения аргумента x при вычислении табл. 1,1 выбирается так, чтобы он был меньше расстояния между корнями. Только в этом случае удается отделить корни уравнения.

1. Метод дихотомии

Считаем, что отделение корней уравнения (1.1) проведено и на отрезке $[a, b]$ расположен один корень, который необходимо уточнить с погрешностью ε (рис. 1.2).

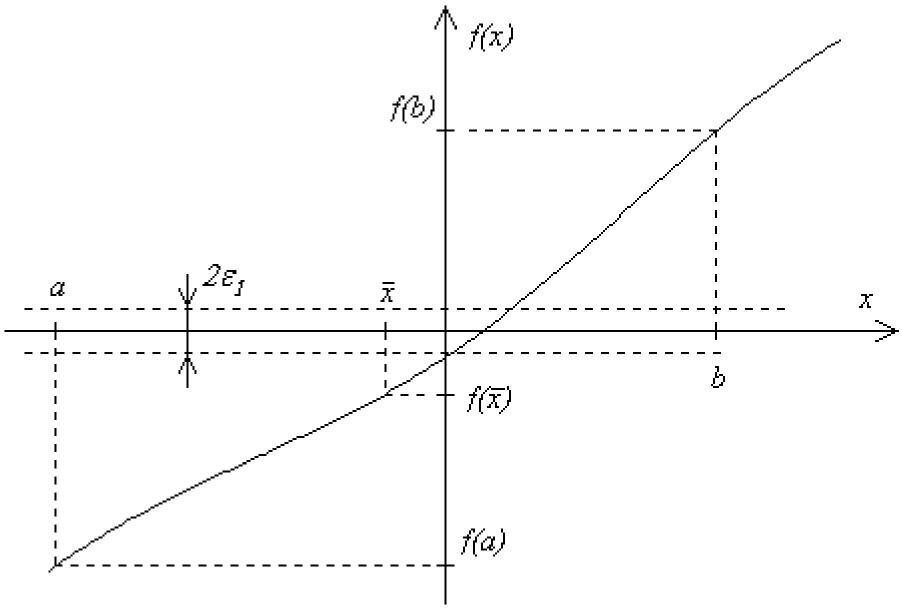

Рис. 1.2. Метод дихотомии

Метод дихотомии, или половинного деления заключается в следующем. Определяем середину отрезка $[a, b]$:

$$\bar{x} = \frac{a+b}{2}$$

и вычисляем функцию $f(\bar{x})$. Далее делаем выбор, какую из двух частей отрезка взять для дальнейшего уточнения корня. Если левая часть уравнения $f(x)$ есть непрерывная функция аргумента x, то корень будет находиться в той половине отрезка, на концах которой $f(x)$ имеет разные знаки. На рис. 1.2 это будет отрезок $[\bar{x}, b]$, т.е. для очередного шага уточнения точку a перемещаем в середину отрезка и продолжаем процесс деления как с первоначальным отрезком $[a, b]$.

Итерационный (повторяющийся) процесс будем продолжать до тех пор, пока интервал $[a, b]$ не станет меньше заданной погрешности ε.

Так как за каждую итерацию, интервал, где расположен корень ξ, уменьшается в два раза, то через n итераций интервал будет равен:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a)$$

при этом $a_n \le \xi \le b_n$:

$$|\xi - a_n| \le \frac{1}{2^n}(b-a),$$

$$|\xi - b_n| \le \frac{1}{2^n}(b-a).$$

В качестве корня ξ возьмем $(a_n + b_n)/2$. Тогда погрешность определения корня будет равна $(b_n - a_n)/2$. Если выполняется условие $(b_n - a_n)/2 < \varepsilon$, то процесс поиска заканчивается и корень равен $\xi = (a_n + b_n)/2$.

Теорема 2: Итерационный процесс половинного деления сходится к искомому корню ξ с любой наперед заданной точностью ε.

Доказательство: Рассмотрим последовательность чисел ξ_i являющихся приближением корня на *i*-ом шаге.

$$\xi_i = (a_i + b_i)/2, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где $a_0 = a$, $b_0 = b$, a_i, b_i - границы подинтервалов, в которых $f(a_i)f(b_i) < 0$. Рассмотрим разности: $|\xi_1 - \xi_0|$, $|\xi_2 - \xi_1|$, ..., $|\xi_n - \xi_{n-1}|$. Имеем

$$\left|\xi_1-\xi_0\right|=\frac{1}{2}\left(b_1+a_1-b_0-a_0\right).$$

Так как всегда имеем либо

$$b_1=b_0,\quad a_1=\frac{1}{2}\left(b_0+a_0\right),$$

либо

$$a_1=a_0,\quad b_1=\frac{1}{2}\left(b_0+a_0\right).$$

Поэтому

$$\left|\xi_1-\xi_0\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\left(a_0+b_0\right)-a_0\right|=\frac{1}{4}\left|b_0-a_0\right|,$$

если $b_1=b_0$ либо

$$\left|\xi_1-\xi_0\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{1}{2}\left(a_0+b_0\right)-b_0\right|=\frac{1}{4}\left|a_0-b_0\right|,$$

если $a_1=a_0$. Повторяя аналогичные рассуждения и учитывая, что всегда выполняется соотношение либо

$$b_i=b_{i-1},\quad a_1=\frac{1}{2}\left(b_{i-1}+a_{i-1}\right),$$

либо

$$a_i=a_{i-1},\quad b_i=\frac{1}{2}\left(b_{i-1}+a_{i-1}\right).$$

Получим

$$\left|\xi_2-\xi_1\right|=\frac{1}{4}\left|b_1-a_1\right|=\frac{1}{8}\left|b_0-a_0\right|,$$

$$\left|\xi_3-\xi_2\right|=\frac{1}{4}\left|b_2-a_2\right|=\frac{1}{8}\left|b_1-a_1\right|=\frac{1}{16}\left|b_0-a_0\right|,$$

$$\left|\xi_n-\xi_{n-1}\right|=\frac{1}{2^{n+1}}\left|b_0-a_0\right|, \tag{1.2}$$

где $a_0=a$, $b_0=b$. Отсюда видно, что какое бы малое число $\varepsilon>0$ мы ни задали, всегда можно найти такое n, что

$$\left|\xi_n-\xi_{n-1}\right|=\frac{1}{2^{n+1}}\left|b_0-a_0\right|\le\varepsilon.$$

Сходимость метода дихотомии линейная с коэффициентом $\alpha=0{,}5$. Покажем это. Если в качестве x_n брать a_n, то из формулы (1.2) мы можем записать:

$$\left|\xi-x_n\right|=\frac{1}{2^n}\left|b-a\right|,$$

$$\left|\xi - x_{n-1}\right| = \frac{1}{2^{n-1}}\left|b-a\right|.$$

Отсюда следует:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\xi - x_n\right|}{\left|\xi - x_{n-1}\right|} = 0{,}5.$$

Отметим, что за 10 итераций ($n = 10$) интервал уменьшается в $2^{10} = 1024 \approx 10^3$ раз. За 20 итераций ($n = 20$) уменьшается в $2^{20} \approx 10^6$.

Для оценки числа итераций k выберем знак «=», тогда:

$$k = \left[\frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2}\right] + 1,$$

где $[y]$ означает целую часть y. Например, если $b - a = 1$ и $\varepsilon = 10^{-5}$, количество итераций будет равно $k = 17$.

Следует учитывать, что функция $f(x)$ вычисляется с некоторой абсолютной погрешностью ε_1. Вблизи корня значения функции $f(x)$ малы по абсолютной величине и могут оказаться сравнимыми с погрешностью ее вычисления. Другими словами, при подходе к корню мы можем попасть в полосу шумов $2\varepsilon_1$ (рис. 1.2) и дальнейшее уточнение корня окажется невозможным. Поэтому надо задать ширину полосы шумов и прекратить итерационный процесс при попадании в нее. Также необходимо иметь в виду, что при уменьшении интервала $[a, b]$ увеличивается погрешность вычисления его длины $|b-a|$ за счет вычитания близких чисел.

Задание.

№	Уравнение
1.	$x - \cos\left(\dfrac{x}{3}\right) = 0$
2.	$x + \ln(4x) - 1 = 0$
3.	$e^x - 4e^{-x} - 1 = 0$
4.	$xe^x - 2 = 0$
5.	$4(x^2 + 1)\ln(x) - 1 = 0$
6.	$2 - x - \sin\left(\dfrac{x}{4}\right) = 0$
7.	$x^2 - \ln(x) - 2 = 0$

8. $\cos(x)-(x+2)^{\frac{1}{2}}+1=0$

9. $4\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x)-1=0$

10. $5\ln(x)-x^{\frac{1}{2}}=0$

11. $e^x+x^3-2=0$

12. $3\sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right)+x-3=0$

13. $0{,}1x^2-x\ln(x)=0$

14. $\cos(1+0{,}2x^2)-x=0$

15. $3x-4\ln(x)-5=0$

16. $\sin(1-0{,}2x^2)-x=0$

17. $e^x-e^{-x}-2=0$

Содержание отчета

1. Индивидуальное задание (уравнение, методы решения).
2. Результат отделения корней (интервалы, где находятся корни уравнения).
3. Схема алгоритма, программа решения задачи выбранным методом уточнения корня для «расчета на ПК» и результаты контрольного тестирования.
4. Результаты «расчета на ПК», представленные в таблице.

ε	n	x	$f(x)$
0,01			
0,001			
0,0001			

5. Зависимость числа итераций от заданной точности в логарифмическом масштабе – таблице.
6. Сравнить полученное число итераций с рассчитанным значением.
7. Определить скорость сходимости и сравнить с теоретическим значением.

ε	0,01	0,001	0,0001
n			

Лабораторная 2. Метод хорд

Рассматриваемый метод так же, как и метод так же, как и метод дихотомии, предназначен для уточнения корня на интервале $[a,b]$, на концах которого левая часть решаемого уравнения $f(x)$ принимает разные знаки. Интервал $[a,b]$ по-прежнему определяем графическим методом. Очередное приближение теперь в отличие от метода дихотомии берем не в середине отрезка, а в точке x_1, где пересекает ось абсцисс прямая линия, проходящая через точки $[a,\ f(a)]$ и $[b,\ f(b)]$ (рис. 1.3).

В качестве нового интервала для продолжения итерационного процесса выбираем тот из двух $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$,на концах которого функция $f(x)$ принимает значения с разными знаками.

Заканчиваем процесс уточнения корня, когда расстояние между очередными приближениями станет меньше заданной погрешности ε

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

или когда значения функции $f(x)$ попадут в область шума, т.е.

$$|f(x_n)| < \varepsilon_1 .$$

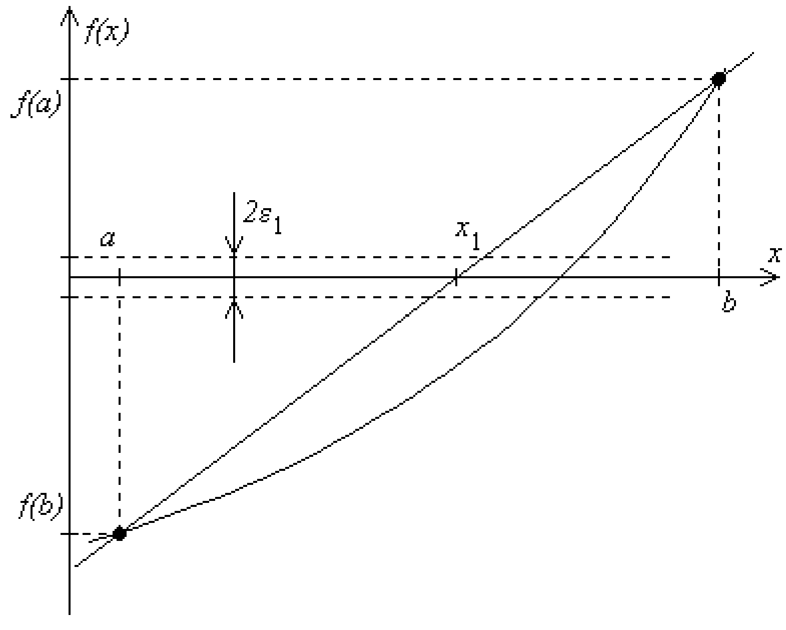

Рис. 1.3. Метод хорд

Уравнение прямой линии, проходящей через точки $f_1 = f(a)$ и $f_2 = f(b)$, запишем в общем виде:

$$y(x)=kx+c$$

Коэффициенты k и c уравнения этой прямой определим из условий:

$$f_1 = ka + c ,$$

$$f_2 = kb + c\,.$$

Вычитая левые и правые части последних соотношений, получим:

$$k = \frac{f_2 - f_1}{b - a}\,,$$

$$b = f_1 - ka\,.$$

Точку пересечения прямой $y(x)$ с осью абсцисс получим, приравнивая $y(x)$ нулю:

$$x_1 = a - \frac{b - a}{f_2 - f_1} f_1$$

или

$$x_1 = b - \frac{b - a}{f_2 - f_1} f_2\,.$$

Задание.

№	**Уравнение**
1.	$x - \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$
2.	$x + \ln(4x) - 1 = 0$
3.	$e^x - 4e^{-x} - 1 = 0$
4.	$xe^x - 2 = 0$
5.	$4(x^2 + 1)\ln(x) - 1 = 0$
6.	$2 - x - \sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0$
7.	$x^2 - \ln(x) - 2 = 0$
8.	$\cos(x) - (x + 2)^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$
9.	$4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 1 = 0$
10.	$5\ln(x) - x^{\frac{1}{2}} = 0$
11.	$e^x + x^3 - 2 = 0$
12.	$3\sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + x - 3 = 0$
13.	$0{,}1x^2 - x\ln(x) = 0$
14.	$\cos(1 + 0{,}2x^2) - x = 0$

15. $3x - 4\ln(x) - 5 = 0$

16. $\sin(1 - 0{,}2x^2) - x = 0$

17. $e^x - e^{-x} - 2 = 0$

Содержание отчета

1. Индивидуальное задание (уравнение, методы решения).
2. Результат отделения корней (интервалы, где находятся корни уравнения).
3. Схема алгоритма, программа решения задачи выбранным методом уточнения корня для «расчета на ПК» и результаты контрольного тестирования.
4. Результаты «расчета на ПК», представленные в таблице.

ε	n	x	$f(x)$
0,01			
0,001			
0,0001			

5. Сравнить полученный результат с полученным при выполнении предыдущей работы.

ε	0,01	0,001	0,0001
n			

Лабораторная 3. Метод Ньютона

Предположим, что графическим методом определено начальное приближение x_0 к корню. В точке x_0 вычислим левую часть решаемого уравнения $f_0 = f(x_0)$, а также производную в этой точке $f'(x_0) = tg(\alpha)$. Следующее приближение к корню найдем в точке x_1, где касательная. к функции $f(x)$, проведенная из точки $(x_0,\ f_0)$, пересекает ось абсцисс. Затем считаем точку x_1 в качестве начальной и продолжаем итерационный процесс. Из рис. 1.4 видно, что таким способом можно приближаться к корню x^*. При этом с каждой итерацией расстояние между очередным x_{k+1} и предыдущим x_k приближениями к корню будет уменьшаться. Процесс уточнения корня закончим, когда выполнится условие:

$$|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon ,$$

где ε - допустимая погрешность определения корня.

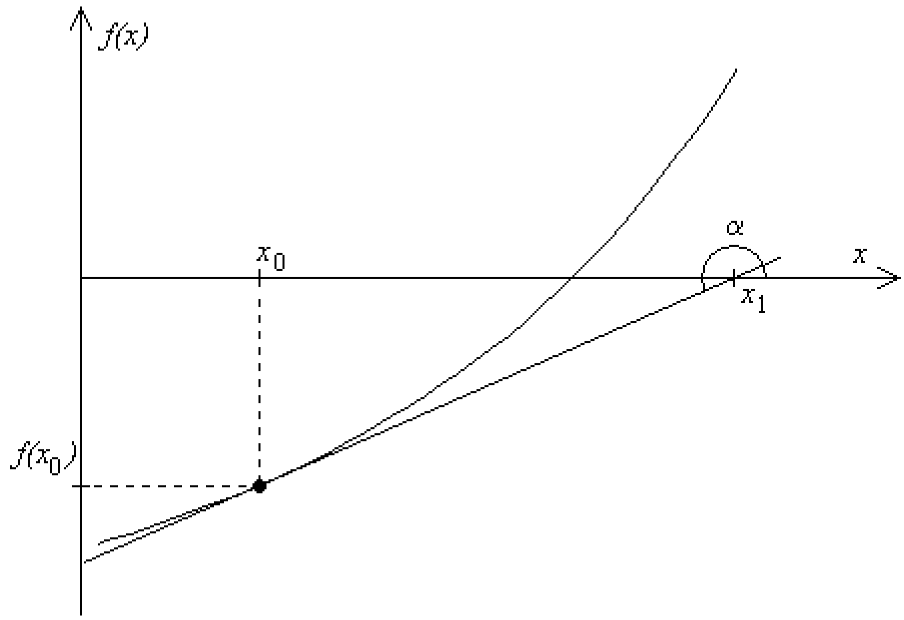

Рис. 1.4. Метод Ньютона

Из геометрических соотношений рис.1.4, получим основную формулу метода Ньютона. По определению производной (тангенс угла наклона касательной):

$$\mathrm{tg}(\alpha)=f'(x_0)=f(x_0)/[x_0-x_1].$$

Отсюда следует:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

В общем виде для k-го шага итерационного процесса последнее соотношение принимает вид:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Алгоритм Ньютона можно получить другим способом с помощью разложения в ряд Тейлора левой части уравнения $f(x)$ вблизи корня x^*. Итак, пусть $x_{k+1} = x_k + \delta$, тогда

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + \delta f'(x_k) + \ldots$$

и

$$\delta \approx -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

так как $f(x_{k+1}) \to 0$.

Метод Ньютона обладает высокой скоростью сходимости. Обычно абсолютная точность решения 10^{-5} - 10^{-6} достигается через 5-6 итераций.

Недостатком метода является необходимость вычисления на каждой итерации не только левой части уравнения, но и ее производной.

Можно, несколько уменьшив скорость сходимости, ограничиться вычислением производной $f'(x)$ только на первой итерации, а затем вычислять лишь значения $f(x)$, не изменяя производной $f'(x)$. Это алгоритм так называемого модифицированного метода Ньютона.

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_0)}.$$

Метод Ньютона можно использовать для уточнения корней в области комплексных значений x, что необходимо при решении многих прикладных задач, в частности при численном моделировании электромагнитных колебательных и волновых процессов с учетом временной и пространственной диссипации энергии. В этом случае начальное приближение к корню x_0 необходимо выбирать комплексным.

Задание.

№	Уравнение
1.	$x - \cos\left(\frac{x}{3}\right) = 0$
2.	$x + \ln(4x) - 1 = 0$
3.	$e^x - 4e^{-x} - 1 = 0$
4.	$xe^x - 2 = 0$
5.	$4(x^2 + 1)\ln(x) - 1 = 0$
6.	$2 - x - \sin\left(\frac{x}{4}\right) = 0$

7. $x^2 - \ln(x) - 2 = 0$

8. $\cos(x) - (x+2)^{\frac{1}{2}} + 1 = 0$

9. $4\left(1 + x^{\frac{1}{2}}\right)\ln(x) - 1 = 0$

10. $5\ln(x) - x^{\frac{1}{2}} = 0$

11. $e^x + x^3 - 2 = 0$

12. $3\sin\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + x - 3 = 0$

13. $0{,}1x^2 - x\ln(x) = 0$

14. $\cos(1 + 0{,}2x^2) - x = 0$

15. $3x - 4\ln(x) - 5 = 0$

16. $\sin(1 - 0{,}2x^2) - x = 0$

17. $e^x - e^{-x} - 2 = 0$

Содержание отчета

1. Индивидуальное задание (уравнение, методы решения).
2. Результат отделения корней (интервалы, где находятся корни уравнения).
3. Схема алгоритма, программа решения задачи выбранным методом уточнения корня для «расчета на ПК» и результаты контрольного тестирования.
4. Результаты «расчета на ПК», представленные в таблице.

ε	n	x	$f(x)$
0,01			
0,001			
0,0001			

5. Зависимость числа итераций от заданной точности в логарифмическом масштабе – таблице.
6. Сравнить полученный результат с полученным при выполнении предыдущей работы.

ε	0,01	0,001	0,0001
n			