Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
“ Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет) ”
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

Факультет “Фундаментальные науки”
Кафедра “Высшая математика”

Отчёт
по учебной практике
за 3 семестр 2020 — 2021 гг.

Руководитель практики, ст. преп. кафедры ФН1	____________________ (подпись)	Кравченко О.В.
студент группы ФН1–31	____________________ (подпись)	Николенко Д.Н.

Москва,
2020 г.

Содержание

1. Цели и задачи практики

1.1. Цели

— развитие компетенций, способствующих успешному освоению материала бакалавриата и необходимых в будущей профессиональной деятельности.

1.2. Задачи

1) Знакомство с теорией рядов Фурье, и теорией интегральный уравнений.

2) Развитие умения поиска необходимой информации в специальной литературе и других источниках.

3) Развитие навыков составления отчётов и презентации результатов.

1.3. Индивидуальное задание

1) Изучить способы отображения математической информации в системе вёртски LaTeX.

2) Изучить возможности системы контроля версий Git.

3) Научиться верстать математические тексты, содержащие формулы и графики в системе LaTeX. Для этого, выполнить установку свободно распространяемого дистрибутива TeXLive и оболочки TeXStudio.

4) Оформить в системе LaTeXтиповые расчёты по курсу математического анализа согласно своему варианту.

5) Создать аккаунт на онлайн ресурсе GitHub и загрузить исходные tex–файлы и результат компиляции в формате pdf.

6) Решить индивидуальное домашнее задание согласно своему варианту, и оформить решение с учётов пп. 1—4.

2. Отчёт

Интегральные уравнения имеют большое прикладное значение, являясь мощным орудием исследования многих задач естествознания и техники: они широко используются в механике, астрономии, физике, во многих задачах химии и биологии. Теория линейных интегральных уравнений представляет собой важный раздел современной математики, имеющий широкие приложения в теории дифференциальных уравнений, математической физике, в задачах естествознания и техники. Отсюда владение методами теории дифференциальных и интегральных уравнений необходимо приклажному математику, при решении задач механики и физики.

3. Индивидуальное задание

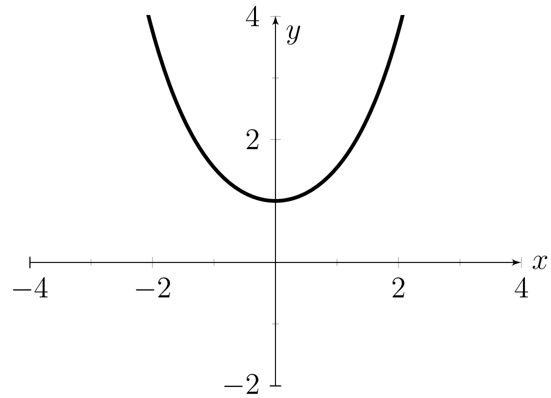
3.1. Ряды Фурье и интегральное уравнение Вольтерры.

Задача № 1.

Условие. Разложить в ряд Фурье заданную функцию $f(x)$, построить графики $f(x)$ и суммы ее ряда Фурье. Если не указывается, какой вид разложения в ряд необходимо представить, то требуется разложить функцию либо в общий тригонометрический ряд Фурье, либо следует выбрать оптимальный вид разложения в зависимости от данной функции.

$$f(x) = ch(ax), -\pi \leqslant x \leqslant \pi \tag{1}$$

Решение.



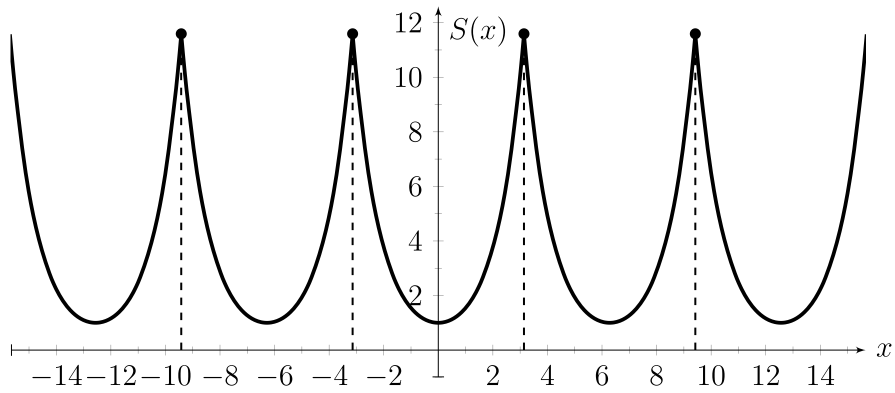
Построим тригонометрический ряд Фурье вида

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(nx\right)\right).$$

Вычислим коэффициенты

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} ch(ax)\,dx\right) = \frac{2sh(a\pi)}{a\pi},\\
a_n &= \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi} \mathrm{ch}(ax)\cdot cos(nx)\,dx\right) =\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{e^{-a\pi}((e^{2a\pi}+1)nsin(n\pi) + (ae^{2a\pi}-a)cos(n\pi))}{2(n^2+a^2)}\right) =\\
&= \frac{e^{-a\pi}(ae^{2a\pi}-a)cos(n\pi)}{2(n^2+a^2)} = \frac{e^{-a\pi}(ae^{2a\pi}-a)(-1)^n}{2(n^2+a^2)}.
\end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом $T = 2\pi$) продолжению исходной функции. Рисунок соответствует случаю, когда $a > 0$. При этом значения функции на концах промежутка $[-\pi, \pi]$ совпадают: $f(-\pi+0) = \dfrac{e^{-a\pi}+e^{a\pi}}{2}$, $f(\pi+0) = \dfrac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{2}$. $S(-\pi) = S(\pi) = \dfrac{1+e^{2a\pi}}{2e^{a\pi}}$. График функции $S(x)$ имеет следующий вид

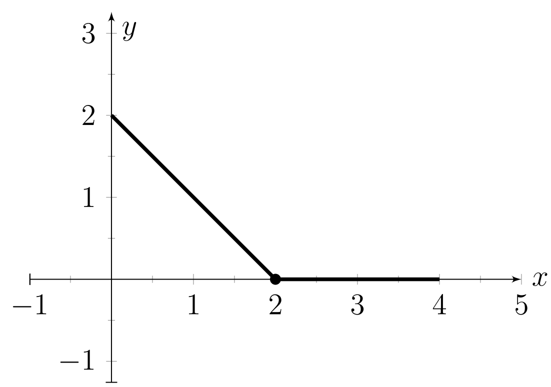


Ответ:

$$f(x) = \frac{2sh(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(e^{-a\pi}(ae^{2a\pi} - a)(-1)^n}{2(n^2 + a^2)} cos(nx)\right];$$
$$S(n) = \frac{1 + e^{2a\pi}}{2e^{a\pi}}, \text{ при } n \in \mathbb{Z}.$$

Задача № 2.

Условие. Для заданной графически функции $y(x)$ построить ряд Фурье в комплексной форме, изобразить график суммы построенного ряда



Решение.

Ряд Фурье в комплексной форме имеет следующий вид

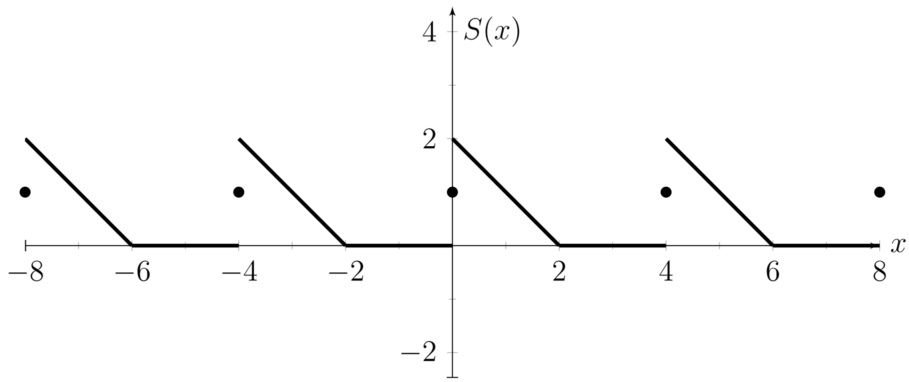
$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega n x}, \quad c_n = \frac{1}{T}\int\limits_a^b f(x)e^{-i\omega n x}dx, \, \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

В нашем примере $a = 0, b = 4, T = 4, \omega = \pi/2$, найдем коэффицинеты c_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

где $\omega = 2\pi/T$, $T = 4$.

$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{4}\int\limits_0^4 f(x)dx = \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^2(-x+2)dx\right) = -\frac{1}{2},\\
c_n &= \frac{1}{4}\left(\int\limits_0^2(-x+2)e^{-i\frac{\pi}{2}nx}dx\right) =\\
&= \frac{isin(n\pi) - cos(n\pi) - in\pi + 1}{\pi^2 n^2} =\\
&= \frac{1 - cos(n\pi) - in\pi}{\pi^2 n^2} = \frac{1 - (-1)^n - in\pi}{\pi^2 n^2}.
\end{aligned}$$

Применив теорему Дирихле о поточечной сходимости ряда Фурье, видим, что построенный ряд Фурье сходится к периодическому (с периодом $T = 4$) продолжению исходной функции. График функции $S(x)$ имеет вид



Ответ:

$$\begin{aligned}
&f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n - in\pi}{\pi^2 n^2}\right]e^{\frac{i\pi nx}{2}},\ x \neq 2n;\\
&S(2n) = 1, \quad \text{при } n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Задача № 3.

Условие.

Найти резольвенту для интегрального уравнения Вольтерры со следующим ядром

$$K(x,t) = (t-x)e^{x^4 - t^4}.$$

Решение.

Запишем интегральное уравнение Вольтерры

$$y(x) = f(x) + \int\limits_0^x (t-x)e^{x^4-t^4}y(t)dt.$$

Из рекурентных соотношений получаем

$$\begin{aligned}
K_1(x,t) &= (t-x)e^{x^4-t^4},\\
K_2(x,t) &= \int\limits_t^x K(x,s)K_1(s,t)ds = \int\limits_t^x (s-x)e^{x^4-s^4}(t-s)e^{s^4-t^4}ds = -\frac{(t-x)^3}{6}\cdot e^{x^4-t^4},\\
K_3(x,t) &= \int\limits_t^x K(x,s)K_2(s,t)ds = -\int\limits_t^x (s-x)e^{x^4-s^4}\cdot\frac{(t-s)^3}{6}e^{s^4-t^4}ds = \frac{(t-x)^5\cdot e^{x^4-t^4}}{120}.\\
K_j(x,t) &= \frac{(-1)^{j-1}\cdot e^{x^4-t^4}\cdot(t-x)^{2j-1}}{(2j-1)!}\quad,\quad j=\mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Подставляя это выражение для итерированных ядер, найдем резольвенту

$$R(x,t,\lambda) = -e^{x^4-t^4}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}\cdot(t-x)^{2j-1}}{(2j-1)!}\ ,\quad j=1,2,\ldots,\lambda=1,$$

Список литературы

[1] Львовский С.М. Набор и вёрстка в системе LaTeX, 2003.

[2] Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. М.: Наука, 1976.

[3] Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. — 2-е изд., стереотип. — М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.