21/3/2024

1.1. Repaso de lógica proposicional

Ejercicio 1. Determinar los valores de verdad de las siguientes proposiciones cuando el valor de verdad de a, b y c es *verdadero* y el de x e y es *falso*.

a) $(\neg x \vee b)$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

c) $\neg(c \vee y)$

d) $\neg(y \vee c)$

e) $(\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y))$

f) $((c \vee y) \wedge (a \vee b))$

g) $(((c \vee y) \wedge (a \vee b)) \leftrightarrow (c \vee (y \wedge a) \vee b))$

h) $(\neg c \wedge \neg y)$

a) $(\neg x \vee b)$

$\underbrace{(\neg F) \vee T}$

$\underbrace{(T \vee T)}$

$\boxed{T}$

b) $((c \vee (y \wedge a)) \vee b)$

$T \vee (\underbrace{F \wedge V})) \vee T)$

$(\underbrace{T \vee F} \quad \vee T)$

$(T \quad \vee \quad T)$

$\boxed{T}$

c) $\neg(c \vee y)$

$\neg(\underbrace{T \vee F})$

$\neg T$

$\boxed{F}$

d) $\neg(y \vee c)$

$\neg(F \vee T)$

$\neg T$

$\boxed{F}$

e) $\neg(c \vee y) \leftrightarrow (\neg c \wedge \neg y)$

$\neg(T \vee F) \leftrightarrow (F \wedge V)$

$\neg(T) \leftrightarrow (F)$

$F \leftrightarrow F$

$\boxed{T}$

f) $((c \lor y) \land (a \lor b))$

$((T \lor F) \land (T \lor T))$

$T \land T$

$\boxed{T}$

g) $(((c \lor y) \land (a \lor b)) \leftrightarrow (c \lor (y \land a)))$

$(((T \lor F) \land (T \lor T)) \leftrightarrow (T \lor (F \land T) \lor T))$

$(((T \land T) \leftrightarrow T \lor F \lor T))$

$T \leftrightarrow T$

$\boxed{T}$

h) $(\lnot c \land \lnot y)$

$(\lnot T \land \lnot F)$

$(F \land T)$

$\boxed{F}$

22/3/2024 9 57 hs

Ejercicio 2. Considere la siguiente oración: "Si es mi cumpleaños o hay torta, entonces hay torta".

a) - Escribir usando lógica proposicional y realizar la tabla de verdad
b) - Asumiendo que la oración es verdadera y hay una torta, qué se puede concluir?
c) - Asumiendo que la oración es verdadera y no hay una torta, qué se puede concluir?
d) - Suponiendo que la oración ~~es mentira~~ (es falsa), se puede concluir algo?

a) p = es mi cumpleaños
r = hay torta

$((p \vee r) \rightarrow r)$

p	r	$\overbrace{p \vee r}^{\gamma}$	$\gamma \rightarrow r$
V	V	V	V
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	V

b) Si la oración es verdadera y hay torta se puede concluir que puede o no ser mi cumpleaños

c) Si la oración es verdadera y no hay torta se puede concluir que tampoco es mi cumpleaños

d) Si la oración es falsa se puede concluir que es mi cumpleaños y no hay torta

22/3/2024 10:10hs

Ejercicio 3. ★ Usando reglas de equivalencia (conmutatividad, asociatividad, De Morgan, etc) determinar si los siguientes pares de fórmulas son equivalencias. Indicar en cada paso qué regla se utilizó.

a)
- $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $\neg p \to (q \wedge r)$

b)
- $\neg(\neg p) \to (\neg(\neg p \wedge \neg q))$
- q

c)
- $((True \wedge p) \wedge (\neg p \vee False)) \to \neg(\neg p \vee q)$
- $p \wedge \neg q$

d)
- $(p \vee (\neg p \wedge q))$
- $\neg p \to q$

e)
- $p \to (q \wedge \neg(q \to r))$
- $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))$

(a) - $(p \vee q) \wedge (q \vee r) = [(p \vee q) \wedge q] \vee [(p \vee q) \wedge r]$

- $\neg p \to (q \wedge r)$

$[(p \wedge q) \vee (q \wedge q)] \vee [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

$[(p \wedge q) \vee q] \vee [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$

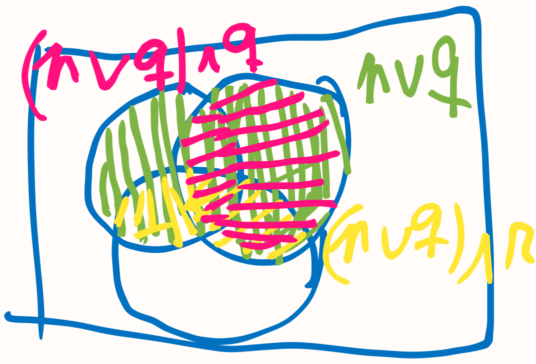
$q \vee (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

$q \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

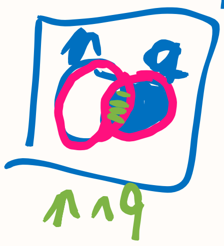
$[(q \vee q) \wedge (q \vee r)] \vee (p \wedge r)$

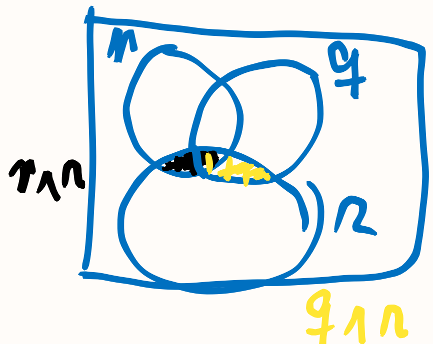
$[q \wedge (q \vee r)] \vee (p \wedge r)$

$q \vee (p \wedge r)$



$q \cup (p \cap r)$

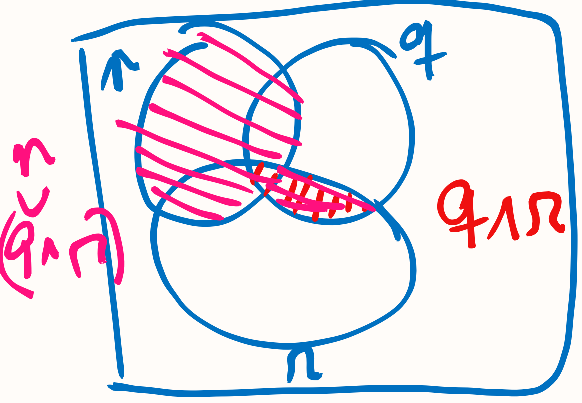


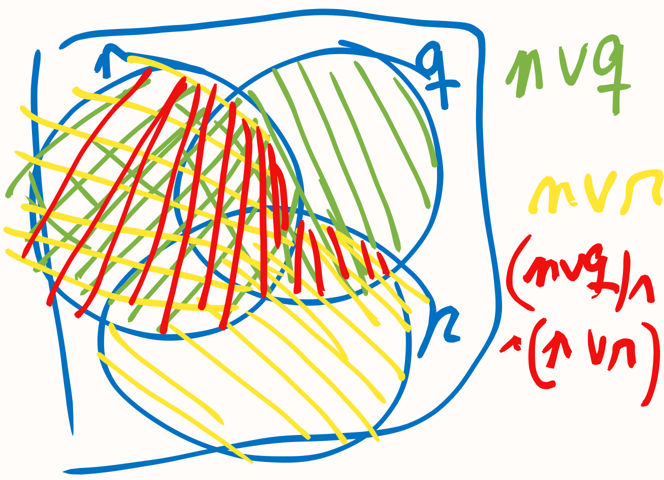


$\neg p \to (q \wedge r)$

$p \vee (q \wedge r)$

$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$





22/3/2024 10 58hs

Ejercicio 4. Determinar si las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o contingencias.

a) $(p \vee \neg p)$

b) $(p \wedge \neg p)$

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$

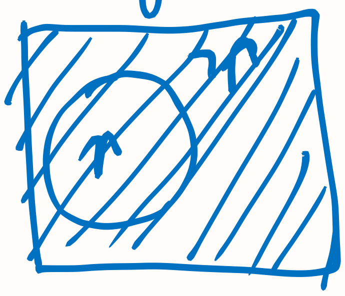
d) $((p \wedge q) \to p)$

e) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

f) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

a) $(p \vee \neg p)$ Es tautologia

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V



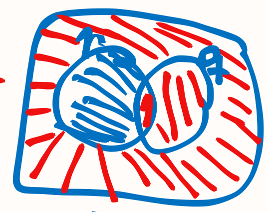
b) $(p \wedge \neg p)$ Es contradicción

c) $((\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \to q))$

$\neg(\neg(\neg p \vee q))$

$\neg(p \wedge \neg q)$

$\neg p \vee q$



¿como trabajo con $p \to q$?

es decir creo que es una

d) $((p \wedge q) \to p)$

tautología

e) $((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)))$

ley distributiva

$((p \wedge (q \vee r)) \leftrightarrow p \wedge (q \vee r))$ es tautología

f) $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$

$\cancel{\neg(p \to q) \vee (p \to r)}$

$\cancel{\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)}$

$\cancel{(p \wedge \neg q) \vee \neg p \wedge r)}$

22/3/2024 11:18hs

Ejercicio 5. Dadas las proposiciones lógicas α y β, se dice que α es más fuerte que β si y sólo si $\alpha \to \beta$ es una tautología. En este caso, también decimos que β es más débil que α. Determinar la relación de fuerza de los siguientes pares de fórmulas:

a) $True$, $False$

b) $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$

c) p, $(p \wedge q)$

d) p, $(p \vee q)$

e) p, q

f) p, $(p \to q)$

¿Cuál es la proposición más fuerte y cuál la más débil de las que aparecen en este ejercicio?

En este ejercicio permite el enunciado la relación de fuerza relativa o parcial sin que haga qué preocuparse por la total o recíproca es decir sea α sea más fuerte que β pero no que o no exige verificar si β también es tanto más fuerte que α o si no hay relación o si β es más débil que $\alpha \Leftrightarrow \alpha$ si ¿ yo no sé acaso lo verifico

ⓐ $False \to True$ es siempre verdadero (así que es tautología)

$True \to False$ es siempre falso (así que es contradicción)

p	q	(p ∧ q)	(p ∨ q)	(p → q)
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

22/3/2024 4.28

Para resolver los ejercicios más fácilmente y rápidamente solo haré estas tablas de verdad y teniendo en cuenta la naturaleza de la tabla de verdad de la implicación en cada caso de comparaciones miraré los casos en los que el término a evaluar si es más fuerte que el otro es verdadero y ver si en el otro ocurre algún caso en que se vuelve falso cuando este es verdadero o si no ocurre alguno (la implicación) es una contingencia si no hay relación de fuerza si no ocurre ninguno es más fuerte en ese sentido y bueno no es todo pero me enrosqué mucho y voy a resolverlo en lugar de seguir escribiendo más

b) $(p \wedge q), (p \vee q)$

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \vee q)$	$(p \to q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

$(p \wedge q)$ es más fuerte que $(p \vee q)$
(no hay contraejemplo)

$(p \vee q)$ no es más fuerte que $(p \wedge q)$
(contraejemplo la 2ª fila)

c) $p, (p \wedge q)$

p no es más fuerte que $(p \wedge q)$
(contraejemplo la 2ª fila)

$(p \wedge q)$ es más fuerte que p
(no hay contraejemplo)

en este caso y en varios más fuerte equivale a más restrictivo

d) $p, (p \vee q)$

p es más fuerte que $p \vee q$
(no hay contraejemplo)

$p \vee q$ no es más fuerte que p
(contraejemplo la 3ª fila)

(e) p, q son proposiciones distintas y equitativas las posibilidades así que no hay relación de fuerza sólo si quieren p no es más fuerte que q por ejemplo se aprecia en la 2º fila y que q no es más fuerte que p se aprecia en la 3º

(g) $p, (p \to q)$ ninguno es más fuerte que el otro en la 2º fila se ve un contraejemplo de la relación de fuerza de p a $(p \to q)$ y en la 3º fila un contraejemplo de la relación recíproca

22/3/2024 14 25 hs

El Ej 6 al igual que el 5 lo habíamos hecho en clase el miércoles y ya no tengo ganas de hacerlo de vuelta el 6 a pesar de que hice de vuelta el 5 pero pasaré al 7 directamente

22/3/2024 14.27 hs

Ejercicio 7. Sean p, q y r tres variables de las que se sabe que:

- p y q nunca están indefinidas,
- r se indefine sii q es *verdadera*

Proponer una fórmula que nunca se indefina, utilizando siempre las tres variables y que sea verdadera si y solo si se cumple que:

a) Al menos una es verdadera.

b) Ninguna es verdadera.

c) Exactamente una de las tres es verdadera.

d) Sólo p y q son verdaderas.

e) No todas al mismo tiempo son verdaderas.

f) r es verdadera.

a) $(p \vee r) \veebar q$

$[(p \vee r) \wedge \neg q] \vee [q \wedge \neg(p \vee r)]$

$(p \wedge \neg q) \vee (r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)$

$p \vee (r \veebar q)$

$p \vee \{(r \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg r)\}$

b) $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r$

c) $p \veebar q \veebar r$

$\{[\underbrace{(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)}_{\alpha}] \wedge \neg r\} \vee (r \wedge \neg \alpha)$

$\neg \alpha = \neg[(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)]$

$\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg(q \wedge \neg p)$

$(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

d) $(p \vee q) \wedge \neg r$

e) ¿?

f) $(r \vee p) \wedge \neg q$

El Ej 8 lo hicimos en clase y no quiero volver a hacer ahora y el nueve también pero no completo en detalle así que hare los ultimos 2

22/3/2024 14 53 hs

Ejercicio 9. ★ Sea $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualquiera. Explicar cuál es el error de traducción a fórmulas de los siguientes enunciados. Dar un ejemplo en el cuál sucede el problema y luego corregirlo.

a) *"Todos los naturales menores a 10 cumple P"*
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \wedge P(i))$

b) *"Algún natural menor a 10 cumple P"*
$(\exists i : \mathbb{Z})((0 \leq i < 10) \rightarrow P(i))$

c) *"Todos los naturales menores a 10 que cumplen P, cumplen Q":*
$(\forall x : \mathbb{Z})((0 \leq x < 10) \rightarrow (P(x) \wedge Q(x)))$

d) *"No hay ningún natural menor a 10 que cumpla P y Q":*
$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x))) \wedge \neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge Q(x)))$

c) corregida quedaría así:
$(\forall x \ \mathbb{Z})(((0 \leq x < 10) \wedge (P(x)) \rightarrow Q(x)))$
porque la version traducida original estaba mal traducida y decía algo como "todos los numeros naturales menores a 10 cumplen tanto P como Q

d) no estoy seguro pero
$\neg((\exists x : \mathbb{Z})(0 \leq x < 10 \wedge P(x) \wedge Q(x)))$ parece ser una posible corrección

22/3/2024 15 03 hs

Ejercicio 10. ★ Sean $P(x:\mathbb{Z})$ y $Q(x:\mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

- (a) *"Existe un único número natural menor a 10 que cumple P"*
- (b) *"Existen al menos dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- (c) *"Existen exactamente dos números naturales menores a 10 que cumplen P"*
- (d) *"Todos los enteros pares que cumplen P, no cumplen Q"*
- (e) *"Si un entero cumple P y es impar, no cumple Q"*
- (f) *"Todos los enteros pares cumplen P, y todos los enteros impares que no cumplen P cumplen Q"*
- (g) *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

(a) $(\exists!\, x:\mathbb{Z})((0<x<10)\wedge P(x))$

(a') $(\exists x:\mathbb{Z})((0<x<10)\wedge P(x)\wedge$

$\wedge\ (\forall x':\mathbb{Z})(0<x'<10\wedge P(x)\longrightarrow x=x'))$

(b) 2/4/2024 22 44

$\underbrace{(\exists x:\mathbb{Z})(\exists y:\mathbb{Z})}_{\text{¿esta notación está permitida?}}((0<x<10)\wedge(0<y<10)\wedge P(x)\wedge P(y))$

(c) $(\exists x:\mathbb{Z})((0<x<10)\wedge P(x)\wedge((\exists y:\mathbb{Z})(((0<y<10)\wedge P(y)\wedge((\forall j:\mathbb{Z})((j\neq y)\wedge(j\neq x)\wedge(0<j<10)\longrightarrow_L(\neg P(j))))))))$

(d) $(\forall x:\mathbb{Z})((esPar(x)\wedge_L P(x))\longrightarrow_L(\neg Q(x)))$

(e) $(\forall n:\mathbb{Z})((P(n)\wedge_L\neg(esPar(n))\longrightarrow_L(\neg Q(x)))$

2/4/2024 23'08 hs

f) $(\forall c : \mathbb{Z})((esPar(c) \rightarrow (P(c))) \wedge ((\forall b : \mathbb{Z})((\neg P(b) \wedge_L \wedge_L (\neg(esPar(b)))) \rightarrow_L (Q(b))))$

g) *"Si hay un número natural menor a 10 que no cumple P entonces ninguno natural menor a 10 cumple Q; y si todos los naturales menores a 10 cumplen P entonces hay al menos dos naturales menores a 10 que cumplen Q"*

$(((\exists m : \mathbb{Z})((0 < m < 10) \wedge_L \neg P(m))) \rightarrow_L$
$((\forall r : \mathbb{Z})((0 < r < 10) \rightarrow_L (\neg Q(r)))))) \wedge_L$
$\wedge_L (((\forall s : \mathbb{Z})((0 < s < 10) \rightarrow_L P(s))) \rightarrow_L$
$\rightarrow_L ((\exists x : \mathbb{Z})(\exists y : \mathbb{Z})((0 < x < 10) \wedge (0 < y < 10) \wedge Q(x) \wedge$
$\wedge Q(y))))$

4/4/2024 16'49

Ejercicio 11. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z}, y : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen. Escribir el predicado asociado a cada uno de los siguientes enunciados:

a) ▪ *"Si un entero cumple P, entonces existe un entero distinto tal que juntos cumplen Q"*
b) ▪ *"Existe un par de enteros tal que cumplen Q y ninguno de ambos cumple P"*
c) ▪ *"Si un par de enteros cumplen Q, entonces al menos uno de ellos cumple P"*
d) ▪ *"Si un entero cumple P, no existe ningún entero tal que juntos cumplan Q"*

a) $((\exists n : \mathbb{Z})(P(n) \wedge ((\exists m : \mathbb{Z})((m \neq n) \wedge Q(n, m)))))$

b) $(\exists x, y : \mathbb{Z})((Q(x, y)) \wedge (\neg P(x)) \wedge (\neg P(y)))$

asumiendo que "un par de enteros" significa dos enteros y no un par ordenado ni otra cosa

c) *"Si un par de enteros cumplen Q, entonces al menos uno de ellos cumple P"*

d) *"Si un entero cumple P, no existe ningún entero tal que juntos cumplan Q"*

c) $(\forall x, y : \mathbb{Z})((Q(x,y)) \longrightarrow_L (P(x) \vee P(y)))$

d) $(\exists z : \mathbb{Z})((P(z)) \wedge (\neg(\exists w : \mathbb{Z})(Q(w, z))))$

4/4/2024 17 02

Ejercicio 12. ★ Sean $P(x : \mathbb{Z})$ y $Q(x : \mathbb{Z})$ dos predicados cualesquiera que nunca se indefinen y sean a, b y k enteros. Decidir en cada caso la relación de fuerza entre las dos fórmulas:

a) $P(3)$
$k > 5 \wedge (\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow P(n))$

b) $P(3)$
$k > 5 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < k \wedge P(n))$

c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$
$k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n)))$

- $k > 5$ verdadera

I) $P(3)$

II) $\underbrace{k > 5}_{} \wedge (\forall n : \mathbb{Z})(0 \leq n < k \rightarrow P(n))$

verdadera y para que la conjunción sea verdadera el para todo debe ser verdadero así que

$V \wedge V \wedge \quad \wedge V \wedge \underbrace{P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge \ldots \wedge P(5) \wedge P(6) \wedge \ldots}_{} V \wedge V$

Si alguno de estos resulta falso el para todo resulta falso y así toda la conjunción y en ese caso $\underbrace{\text{Falso} \longrightarrow \text{* cualquier cosa}}_{\text{Verdadero}}$ sin importar el valor de $P(3)$

¿ II $\Rightarrow_T$ I ?

$k > 3$

V: $(\forall n \ldots)$

- V: II $\to$ I porque si P(3) fuera falso el resto todo sería falso automáticamente y asumí que era verdadero así que P(3) debería ser verdadero
- F: II Implica I

F: II $\to$ I porque F $\to$ (*) cualquier cosa

¿ I $\Rightarrow_T$ II ?

P(3)

- V: $k > 5$
  - F: ×
  - V: $(\forall n \ldots)$
    - ×
    - V: I $\to$ II
- F: I $\to$ II ✓

entonces II es más fuerte que I

b) $P(3)$ III

$k > 5 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < k \wedge P(n))$ IV

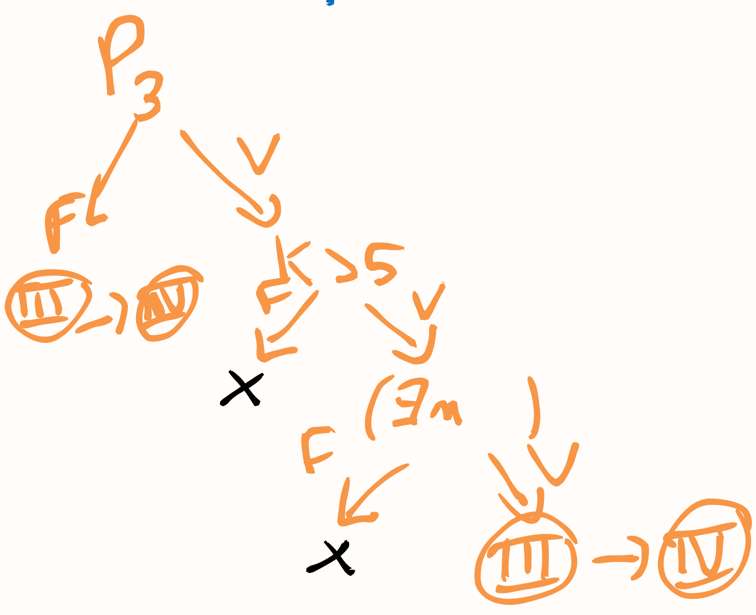
IV $\Rightarrow_T$ III

$k > 5$

- V: $(\exists n \ldots)$
  - V: P(3)
    - V: IV $\to$ III
    - F: ×
  - F: ~~IV $\to$ III~~
- F: ~~IV $\to$ III~~

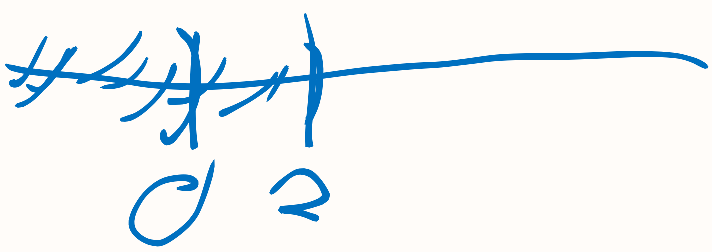
IV no es más fuerte que III

¿ III → IV ?
Tautologicamente
$\equiv$
→
T



V c) $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10 \wedge P(n)) \rightarrow Q(n))$
VI $(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$

$$(0 \leq n < 10) \supseteq (0 \leq n < 10 \wedge P(n))$$



d) $(\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$ VII
$(\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n))$ VIII

$$(\forall n \ \mathbb{Z})((0 \leq n < 10) \rightarrow Q(n)) \longrightarrow (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$$

VIII $\not\Rightarrow$ VII porque en muchos P(n) P(n) podría ser falso y entonces la implicación no sería tautología,
y la recíproca no se da porque relación de fuerzas

esta claro que el hecho de que exista al menos un natural menor a 10 que cumpla Q (y a su vez P) no garantiza que necesariamente todos los demás también lo cumplirán

e) $k = 0 \wedge (\exists n : \mathbb{Z})(0 \leq n < 10 \wedge P(n) \wedge Q(n))$ IX

$k = 0 \wedge ((\forall n : \mathbb{Z})((0 \leq n < k) \rightarrow Q(n)))$ X

esto es lo que explica porque IX es más fuerte que X

¿X $\xrightarrow{T}$ IX?

k = 0

F: X → IX ✓

V: X siempre será verdadera y como k=0 hay que ver que pasa con la cláusula existencial

(∃n ...)

V: X → IX ✓

F: X

Entonces X no es más fuerte que IX

¿IX $\xrightarrow{T}$ X?

k = 0

F: IX → X ✓

V: (∃n ...)

F: IX → X ✓

V: asumimos que k=0

(∀n ...)

F: no hay chance de que sea falsa

V: IX → X ✓

entonces IX es más fuerte que X