Guía 1

Suma directa

$S + T$ es directa si $S \cap T = \{0\}$

y se escribe $S \oplus T$

Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ satisface que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0 \ \forall \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = 0$. Deducir que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ satisfacen que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x} \ \forall \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$ con $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_r)$ (es decir, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_j$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$).

Cambio de Base

$[v]_B \Rightarrow$ escribo v como c.l. de los elem. de B.

me quedo con los α_i

$$v = \alpha_1 . b_1 + \alpha_2 . b_2 + \dots + \alpha_n . b_n$$

$$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{C(B,E)} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = v$$

$C(B,B')$: Tiene como columnas los vectores de B expresados en la base B' :

$$C(B,B') = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ [b_1]_{B'} & [b_2]_{B'} & \cdots & [b_n]_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix}$$

$$= C(B',B)^{-1}$$

$\Rightarrow$ Para cada v_i de B quiero $(v_i)_{B'} = w_i$

$$C(B',E)\underbrace{\begin{bmatrix} | \\ w_i \\ | \end{bmatrix}}_{\text{incógnita}} = \begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}$$

$B = \{\underbrace{(1,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1,1)}_{v_2}, \underbrace{(1,0,1)}_{v_3}\}$

$B' = \{(-1,1,1),(2,0,1),(1,-1,3)\}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}}_{\text{Columnas de } B'} \begin{bmatrix} | \\ w_i \\ | \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Columna } i \text{ de } B}$$

$$\begin{array}{cccccc} & & & v_1 & v_2 & v_3 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & | & | & | \\ 0 & 1 & 0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ 0 & 0 & 1 & | & | & | \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array}}_{C(B,B')}$$

Como $C(B',E)$ es invertible

$$C(B',E)\begin{bmatrix} | \\ w_i \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} | \\ w_i \\ | \end{bmatrix} = C(B',E)^{-1}\begin{bmatrix} | \\ v_i \\ | \end{bmatrix}$$

Pero $C(B,B')$ tiene los w_i como columna

$$C(B,B') = \begin{bmatrix} | & | & | \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ | & | & | \end{bmatrix} = C(B',E)^{-1}\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}$$

Ejercicio 16. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in K^{m\times n}$; $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$; $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')^t = \boldsymbol{A}^t + (\boldsymbol{A}')^t$

(b) $(\alpha \boldsymbol{A})^t = \alpha \boldsymbol{A}^t$

(c) $(\boldsymbol{AB})^t = \boldsymbol{B}^t \boldsymbol{A}^t$

(d) $\boldsymbol{AA}^t$ y $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ son matrices simétricas.

(e) $tr(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}) + tr(\boldsymbol{D}')$

(f) $tr(\alpha\boldsymbol{D}) = \alpha tr(\boldsymbol{D})$

(g) $tr(\boldsymbol{DD}') = tr(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})$

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

TL :

Suma y Prod. por escalar.

Mono : Inyectiva $f(x) = f(y) \iff x = y$

Epi : Sobreyectiva $\exists x \; \forall \; y = f(x)$

Iso : Biyectiva.

Punto flotante

Escribo 12,345 como

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{signo}}}{+}\; 0{,}\underbrace{12345}_{\text{Mantisa}} \cdot 10^{2} \leftarrow \text{exponente}$$

Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 10. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 14. Dada una sucesión de vectores $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$ probar

$$\|\boldsymbol{x}_n\|_1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{x}_n)_i \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ para todo } 1 \leq i \leq k,$$

donde $(\boldsymbol{x}_n)_i$ es la i-ésima coordenada de $\boldsymbol{x}_n$.

Ejercicio 16. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\text{(a) } \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \text{(b) } \|\boldsymbol{A}\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Fila que
más suma
(en mod)

Columna que
más suma
(en mod)

Condición de matrices

Ejercicio 18. Se tiene el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

a) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución exacta y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto $\boldsymbol{b}$ se conoce una aproximación $\tilde{\boldsymbol{b}}$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ es tal que $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{b} - \tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 20. Probar que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de $\boldsymbol{A}$ verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf\left\{\frac{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ mide la distancia relativa de $\boldsymbol{A}$ a la matriz singular más próxima.

Det de matriz diagonal: $\prod d_{ii}$

Ejercicios de nro de Condición

$$\text{Cond } A_n \geq \frac{\|A_n\|}{\|A_n - B\|}$$

Busco B singular tal que

$$\frac{\|A_n\|}{\|A_n - B\|} \longrightarrow \infty$$

$$\Rightarrow \text{Cond } A_n \longrightarrow \infty$$

$$\text{Cond}_2 A \geq \frac{1}{n} \text{Cond}_\infty A$$

Guía 3

Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\boldsymbol{A}^n = 0$.

LU:

$A = LU$

$Ax = b$

$LUx = b \Rightarrow L(Ux) = b$

$Ly = b$

$Ux = y$

Ejercicio 3. Escribir funciones de **Python** que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

(b) $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

Cholesky: Simétrico y $\begin{cases} \text{dp: Menores} > 0 \\ \text{dp: } x^t A x > 0 \end{cases}$

Calculo LU: $\tilde{L} \cdot A = U$

$\tilde{L} \cdot A \cdot \tilde{L}^t = D$

$A = L D L^t$

Ejercicio 9. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$.

Si A es sdp $\Rightarrow A = LL^t$

Ejercicio 10. Sean las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva y $\boldsymbol{B}$ es no singular si y sólo si $\boldsymbol{BAB}^t$ es simétrica definida positiva.

Ejercicio 12. Sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_2^*}{\|\boldsymbol{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_n^*}{\|\boldsymbol{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en base B son:

$$(\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}).$$

(d) Calcular $(\boldsymbol{v})_B$ siendo $\boldsymbol{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Gram-Smi

1°) $a = v_1 \qquad q_1 = \dfrac{a}{\|a\|_2}$

2°) $b = v_2 - \dfrac{\langle a, v_2 \rangle}{\|a\|_2^2} \cdot a$

3°) $c = v_3 - \dfrac{\langle a, v_3 \rangle}{\|a\|_2^2} a - \dfrac{\langle b, v_3 \rangle}{\|b\|_2^2} \cdot b$

$$\underbrace{\qquad}_{P_a(v_3)} \qquad \underbrace{\qquad}_{P_b(v_3)}$$

Proyectores: $f: \mathbb{V} \to \mathbb{V}$

$$\text{Im } f \oplus \text{Nu } f = \mathbb{V}$$

$$f(f(v)) = f(v)$$

$$[f]_B^2 = [f]_B$$

Proy. Ortogonal

$$\text{Nu } f = \text{Im} f^{\perp}$$ (Complemento ortogonal

Si B es BON

$$\Rightarrow \quad C(E,B) = C(B,E)^t$$

Householder

$$u = \frac{v - w}{\| v - w \|_2} \qquad \|v\| = \|w\|$$

$$H = I - 2uu^t \quad \Rightarrow \quad Hv = w$$

$$Hw = v$$

$$[f]_{BB'} (v)_B = (f(v))_{B'}$$

elem de la base B

$$[f]_{BB'} = \left[(f(v_1))_{B'} \,\middle|\, (f(v_2))_{B'} \,\middle|\, \cdots \,\middle|\, (f(v_n))_{B'} \right]$$

Ejercicio 16. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

Matrices ortogonales.

Ejercicio 18. Sea $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^t$.

(b) Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: para demostrar la implicación (d $\Rightarrow$ b) usar que $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)$.

Guía 4

Diagonalización

$$[f]_{EE} = C_{EB} \cdot \underbrace{D}_{[f]_{BB}} \cdot C_{BE}$$

Ejercicio 5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

$$\operatorname{tr} A = \sum \lambda_i$$

$$\det A = \prod \lambda_i$$

Ejercicio 8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

Ejercicio 13. Probar que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son matrices estocásticas, entonces:

(a) $\mathbf{PQ}$ es estocástica.

(b) $\mathbf{P}^n$ es estocástica ($n \in \mathbb{N}$).

(c) $\mathbf{P}^n\mathbf{Q}^m$ es estocástica ($n, m \in \mathbb{N}$).