Ejercicio 9. Sean S y T subespacios de un K-espacio vectorial V. Probar que $S \cup T$ es un subespacio de V si y solo si $S \subseteq T$ o $T \subseteq S$.

Ejercicio 12. Sean $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$. Probar que $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{R}$ si y solo si $\{v_1, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente sobre $\mathbb{C}$.

Ejercicio 13. Sean m, n y $r \in \mathbb{N}$.

(a) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$ satisface que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = 0\ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = 0$. Deducir que si $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in K^{m\times n}$ satisfacen que $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{x}\ \forall\, \boldsymbol{x} \in K^n$, entonces $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

(b) Probar que si $\boldsymbol{A} \in K^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$ con $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ y, para $1 \le j \le r$, $\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{B}$, entonces $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = (\,\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_1 \mid \cdots \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_r)$ (es decir, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}_j$ es la columna j-ésima de $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$).

Ejercicio 16. Sean $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}' \in K^{m\times n}$; $\boldsymbol{B} \in K^{n\times r}$; $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

(a) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}')^t = \boldsymbol{A}^t + (\boldsymbol{A}')^t$

(b) $(\alpha \boldsymbol{A})^t = \alpha \boldsymbol{A}^t$

(c) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^t = \boldsymbol{B}^t\boldsymbol{A}^t$

(d) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^t$ y $\boldsymbol{A}^t\boldsymbol{A}$ son matrices simétricas.

(e) $tr(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}) + tr(\boldsymbol{D}')$

(f) $tr(\alpha \boldsymbol{D}) = \alpha tr(\boldsymbol{D})$

(g) $tr(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}') = tr(\boldsymbol{D}'\boldsymbol{D})$

Ejercicio 20. Sean $A, B, C, D \in K^{n\times n}$ y $M \in K^{2n\times 2n}$ la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si A es inversible, entonces

(a) $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$.

(b) $\det(M) = \det(AD - ACA^{-1}B)$. Concluir que si $AC = CA$, $\det(M) = \det(AD - CB)$.

Normas vectoriales y sucesiones

Ejercicio 10. Si $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que las constantes de equivalencia entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y entre las normas $\|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_\infty$ vienen dadas por:

- Vectorial

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{x}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \|\boldsymbol{x}\|_1$$

- Matricial

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_\infty \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_\infty$$
$$\frac{1}{\sqrt{n}}\|\boldsymbol{A}\|_1 \leq \|\boldsymbol{A}\|_2 \leq \sqrt{n}\|\boldsymbol{A}\|_1$$

- Calcular los coeficientes para la equivalencia vectorial y matricial entre las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$

Ejercicio 16. Probar que para toda $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\text{(a) } ||\boldsymbol{A}||_\infty = \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{(b) } ||\boldsymbol{A}||_1 = \max_{1\leq j\leq n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

Condición de matrices

Ejercicio 18. Se tiene el sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.

a) Sea $\boldsymbol{x}$ la solución exacta y $\tilde{\boldsymbol{x}}$ la solución obtenida numéricamente. Se llama *residuo* al vector $\mathbf{r} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}$. Si notamos $\mathbf{e} = \boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}$, mostrar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

b) En lugar del dato exacto $\boldsymbol{b}$ se conoce una aproximación $\tilde{\boldsymbol{b}}$. $\tilde{\boldsymbol{x}}$ es tal que $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{b}}$. Probar que:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})}\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x}-\tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \operatorname{cond}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{b}-\tilde{\boldsymbol{b}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

¿Cómo se puede interpretar este resultado?

Ejercicio 20. Probar que si $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz inversible y $\|\cdot\|$ es una norma matricial, la condición de $\boldsymbol{A}$ verifica la desigualdad:

$$\frac{1}{\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})} \leq \inf\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Deducir que

$$\operatorname{cond}(\boldsymbol{A}) \geq \sup\left\{\frac{\|\boldsymbol{A}\|}{\|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\|} : \boldsymbol{B} \text{ es singular}\right\}.$$

Nota: En ambos casos, vale la igualdad, pero la otra desigualdad es un poco más complicada de probar. De la igualdad se puede concluir que $\operatorname{cond}(\boldsymbol{A})$ mide la distancia relativa de $\boldsymbol{A}$ a la matriz singular más próxima.

Ejercicio 1. Sean $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B} \in K^{n\times n}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son triangulares superiores, $\boldsymbol{AB}$ es triangular superior.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son diagonales, $\boldsymbol{AB}$ es diagonal.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es estrictamente triangular superior (es decir, $a_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $\boldsymbol{A}^n = 0$.

Ejercicio 3. Escribir funciones de `Python` que calculen la solución de un sistema:

(a) $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$, siendo $\boldsymbol{L}$ triangular inferior.

(b) $\boldsymbol{Ux} = \boldsymbol{y}$, siendo $\boldsymbol{U}$ triangular superior.

Ejercicio 9. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Probar que $\boldsymbol{A}$ es definida positiva si y sólo si existe un conjunto de vectores linealmente independientes $\{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que $a_{ij} = \boldsymbol{x}_i^t \boldsymbol{x}_j$.

Ejercicio 10. Sean las matrices $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Demostrar que $\boldsymbol{A}$ es simétrica definida positiva y $\boldsymbol{B}$ es no singular si y sólo si $\boldsymbol{BAB}^t$ es simétrica definida positiva.

Ejercicio 12. Sea $B = \{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ una base de K^n ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

(a) Probar que si B es ortogonal, entonces

$$\mathbf{C}_{EB} = \begin{pmatrix} \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_1^*}{\|\boldsymbol{v}_1\|_2^2} & \cdots \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_2^*}{\|\boldsymbol{v}_2\|_2^2} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & \frac{\boldsymbol{v}_n^*}{\|\boldsymbol{v}_n\|_2^2} & \cdots \end{pmatrix}$$

(b) Probar que si B es ortonormal, entonces $\mathbf{C}_{EB} = \mathbf{C}_{BE}^*$.

(c) Concluir que si B es ortonormal, entonces las coordenadas de un vector $\boldsymbol{v}$ en base B son:

$$(\boldsymbol{v})_B = (\boldsymbol{v}_1^*\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_2^*\boldsymbol{v}, \dots, \boldsymbol{v}_n^*\boldsymbol{v}).$$

(d) Calcular $(\boldsymbol{v})_B$ siendo $\boldsymbol{v} = (1, -i, 3)$, $B = \{(\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (-\frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, i)\}$.

Ejercicio 16. Sea $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^n$ un vector columna tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$. Probar que:

(a) La transformación lineal definida por la matriz $\boldsymbol{vv}^*$ es la proyección ortogonal sobre $\langle \boldsymbol{v} \rangle$.

(b) Si $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ es una base ortonormal del subespacio S, entonces: $\boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^m \boldsymbol{v}_i\boldsymbol{v}_i^*$ es la proyección ortogonal sobre S.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es como en el ítem anterior, $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ es la proyección ortogonal sobre $S^\perp$.

(d) Eligiendo $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|\boldsymbol{v}\|_2 = 1$, corroborar gráficamente en Python que $R = \boldsymbol{I} - 2\boldsymbol{vv}^*$ es la reflexión respecto de $\langle \boldsymbol{v} \rangle^\perp$.

Ejercicio 18. Sea $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que son equivalentes:

(a) $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^t$.

(b) Las columnas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(c) Las filas de $\boldsymbol{Q}$ forman un conjunto ortonormal.

(d) $\|\boldsymbol{Qx}\|_2 = \|\boldsymbol{x}\|_2$ para todo $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.

Interpretar (d) geométricamente.
Sugerencia: para demostrar la implicación (d $\Rightarrow$ b) usar que $\boldsymbol{x}^t\boldsymbol{y} = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_2^2 - \|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|_2^2)$.

Ejercicio 5. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Probar que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 6. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y λ un autovalor de $\boldsymbol{A}$. Probar que:

(a) Si $\boldsymbol{A}$ es triangular sus autovalores son los elementos de la diagonal.

(b) λ^k es autovalor de $\boldsymbol{A}^k$, con el mismo autovector.

(c) $\lambda + \mu$ es autovalor de $\boldsymbol{A} + \mu\boldsymbol{I}$, con el mismo autovector.

(d) Si p es un polinomio, $p(\lambda)$ es autovalor de $p(\boldsymbol{A})$.

Ejercicio 8. Sea $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar:

(a) Si los autovalores de $\boldsymbol{A}$ son todos reales, sus autovectores pueden tomarse con coordenadas reales.

(b) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica, entonces sus autovalores son reales.

(c) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y definida positiva (negativa), entonces todos sus autovalores son positivos (negativos)

(d) Si $\boldsymbol{A}$ es simétrica y λ_1 y λ_2 son autovalores distintos, entonces sus correspondientes autovectores son ortogonales entre sí.

Ejercicio 9. Una transformación lineal $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ se llama *proyector* si verifica $f(f(x)) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Probar que los únicos autovalores de un proyector son 1 y 0.

Ejercicio 13. Probar que $\mathbf{P}$ y $\mathbf{Q}$ son matrices estocásticas, entonces:

(a) $\mathbf{PQ}$ es estocástica.

(b) $\mathbf{P}^n$ es estocástica ($n \in \mathbb{N}$).

(c) $\mathbf{P}^n\mathbf{Q}^m$ es estocástica ($n, m \in \mathbb{N}$).