Álgebra Lineal Computacional

Primer Parcial – 27 de Mayo de 2022

Para aprobar el parcial deberá obtenerse un puntaje mayor o igual que 4 y al menos un ejercicio debe estar completamente correcto.

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la proyección ortogonal sobre $S = \langle(1,1,1,1),(1,2,1,0)\rangle$ y sean $T = \{x \in \mathbb{R}^4 \colon\ x_1 - x_2 + x_3 = 0,\ -x_2 + x_4 = 0\}$ y $W = \langle(2,0,-2,0),(-2,1,0,1),(2,1,-4,1)\rangle$.

a) (2 pts.) Decidir si existe alguna transformación lineal g que cumpla simultáneamente:

$$g(W) = \langle(2,0,1,1),(0,-1,2,2)\rangle \qquad g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

En caso afirmativo, exhibir un ejemplo. En caso negativo, explicar por qué.

b) (1 pt.) Sea $h \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de $\mathrm{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

a) Veo $W \cap T$

- Si $W \cap T = \{0\} \Rightarrow$ Caso fácil
- Si $W \cap T \neq \{0\} \Rightarrow$ Caso con más restricciones.

Armo base de W.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \times 2$$

$$W = \langle(2,0,-2,0),(-2,1,0,1)\rangle$$

reescribo

$$W = \langle(1,0,-1,0),(-2,1,0,1)\rangle$$

Armo base de T (no hace falta, puedo usar ecuaciones directamente)

$$\begin{cases} x_1 = x_2 - x_3 \\ x_4 = x_2 \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2 - x_3,\ x_2,\ x_3,\ x_2)$$
$$= x_2(1,1,0,1) + x_3(-1,0,1,0)$$

$$T = \langle (1,1,0,1), (-1,0,1,0) \rangle$$

$$W = \langle (1,0,-1,0), (-2,1,0,1) \rangle$$

Quiero $W \cap T$

$$\langle (1,0,-1,0), (-2,1,0,1) \rangle = \langle (1,1,0,1), (-1,0,1,0) \rangle$$

$$a.(1,0,-1,0) + b.(-2,1,0,1) = c.(1,1,0,1) + d(-1,0,1,0)$$

$$(a-2b, b, -a, b) = (c-d, c, d, c)$$

$$\begin{cases} a - 2b = c - d \\ b = c \\ -a = d \\ b = c \end{cases} \rightarrow \quad -d - 2c = c - d$$

$$-2c = c$$
$$\Rightarrow c = 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow a = -d$$

$$W \cap T = \langle (1,0,-1,0) \rangle$$

$$T = \langle (1,1,0,1), (-1,0,1,0) \rangle$$

$$W = \langle (1,0,-1,0), (-2,1,0,1) \rangle$$

Quiero armar f

$\Rightarrow$ Debo armar BON de S

Para luego definir $f(v) = [P_S]_{EE} = [P_S]_E$

$$= \sum_{i=1}^{n} P_{v_i}(v) \quad \text{con } v_i \in \text{BON de } S$$

$$= \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot v_i^t$$

a) 1°: $\tilde{a} = a = (1,1,1,1)$

$$\Rightarrow q_1 = \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right) \leftarrow \|q_1\|_2 = 1$$

$$\langle \tilde{a}, b \rangle \cdot \tilde{a}$$

2°: $\tilde{b} = b - \dfrac{\tilde{a}^t \cdot b}{\|\tilde{a}\|^2} \cdot \tilde{a}$

$$= (1,2,1,0) - \frac{(1,1,1,1)^t \cdot (1,2,1,0)}{2^2} \cdot (1,1,1,1)$$

$$= (1,2,1,0) - \frac{1}{4}(1+2+1) \cdot (1,1,1,1)$$

$$= (1,2,1,0) - (1,1,1,1)$$

$$\tilde{b} = 0, 1, 0, -1$$

$$\|\tilde{b}\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$q_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$B_s = \{ \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)}_{v_1}, \underbrace{\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)}_{v_2} \}$$

es BON

Calculo matriz de f:

$$[P_S]_E = v_1 \cdot v_1^t + v_2 \cdot v_2^t$$

o lo que es lo mismo

$$[P_S]_E = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} — & v_1^t & — \\ — & v_2^t & — \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & -1/4 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Obtuve $f(v) = [P_S]_E \cdot v$

Debo ver que

$$g(v) = f(v) \quad \forall v \in T$$

$$T = \langle (1,1,0,1), (-1,0,1,0) \rangle$$

$$W \cap T = \langle (1,0,-1,0) \rangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(1,1,0,1) = f(1,1,0,1) & \mathrm{I} \\ g(-1,0,1,0) = f(-1,0,1,0) & \mathrm{II} \end{cases}$$

y además $\longrightarrow$ $g(-1,0,1,0) \in \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle$

$$\mathrm{I} \quad f(1,1,0,1) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(1,1,0,1) = \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \\ 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{II} \quad f(-1,0,1,0) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow g(-1,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y además $g(-1,0,1,0) \in \langle (2,0,1,1), (0,-1,2,2) \rangle$

Pero si $g(-1,0,1,0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow g(W) = g\Big(\langle \underbrace{(1,0,-1,0)}_{\in Nu}, (-2,1,0,1) \rangle\Big)$$

$$= g\big(a \cdot (1,0,-1,0) + b(-2,1,0,1)\big)$$

$$\overset{gTL}{=} a \cdot \underbrace{g(1,0,-1,0)}_{=0} + b \cdot g(-2,1,0,1)$$

$$g(W) = b \cdot g(-2,1,0,1)$$

$$g(W) = g\big(\langle (-2,1,0,1) \rangle\big)$$

Pero debe valer que

$$g\Big(\underbrace{\langle(-2,1,0,1)\rangle}_{\text{Dim} = 1}\Big) \overset{\substack{\text{enunciado}\\ \downarrow}}{=} \underbrace{\langle(2,0,1,1),(0,-1,2,2)\rangle}_{\text{Dim} = 2}$$

$\underline{\text{Abs}}$

$\therefore$ g <u>no</u> puede cumplir lo pedido.

b) (1 pt.) Sea $h\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2 + 2x_3, -2x_1 + 4x_2 + 2x_3, 4x_4)$$

hallar una base de $\mathrm{Im}(h \circ f)$ y decidir si $h \circ f$ es epimorfismo. ¿Puede ser monomorfismo?

Mono : Inyectiva

Epi : Sobreyectiva

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow h(v) = Hv$$

Tenía :

$$[P_S]_{EE} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$f(v) = [P_S]_{EE} \cdot v$$

$$\Rightarrow h \circ f(v) = h(f(v))$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot v$$

wolfram

$$h \circ f(v) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} v$$

Input

$$\left(\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Result

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$hof(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad hof(e_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad hof(e) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$hof(e_4) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow B_{Im\,hof} = \underbrace{\{(2,1,1), (0,-1,3)\}}_{Dim = 2}$$

$\therefore$ no es epi (sobreyectiva) porque no puedo generar cualquier vector de $\mathbb{R}^3$

Notar que como $hof : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$

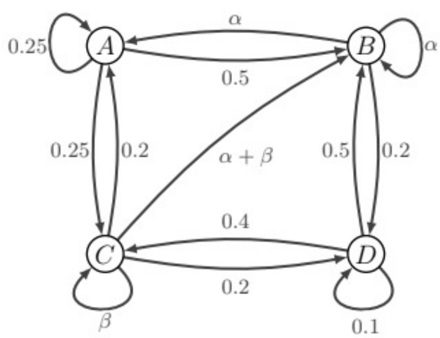
$$\Rightarrow \underbrace{\dim Im\,hof}_{2} + \dim Nu\,hof = 4$$

$$2 + \dim Nu\,hof = 4$$

$$\Rightarrow \dim Nu\,hof = 2$$

No puede ser mono (Inyectiva) pues dim del Nucleo es distinta de cero (muchos $v \in \mathbb{R}^4$ van a parar al cero)

Ejercicio 1. En un país existen cuatro destinos turísticos importantes: A, B, C y D. El siguiente esquema muestra la dinámica de viaje diario de los turistas. El valor en cada flecha representa qué proporción de turistas viajan diariamente. Por ejemplo, por día el 50% de los turistas que se encuentran en A viajan a B, mientras que el 25% decide permanecer en A.



a) (1 pt.) Escribir la matriz de transición P.

b) (0.5 pts.) Si inicialmente hay 400 turistas en A, 500 en B, 500 en C y 600 en D. Luego de 3 días, ¿aproximadamente cuántos turistas habrá en A? ¿Cuántos habrá en D luego de 5 días?

c) (0.5 pts.) Decidir si para el estado inicial correspondiente a la situación del ítem b) existe estado límite. En caso afirmativo, calcularlo.

d) (1 pt.) Decidir si existe P^∞. En caso afirmativo, calcularla.

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & \alpha & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & \alpha & \alpha+\beta & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}2 & \beta & 0{,}4 \\ 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

$\alpha = 0{,}4 \quad \beta = 0{,}1$

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}25 & 0 & 0{,}1 & 0{,}4 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 2. Considerar las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \quad \text{y } b = \begin{pmatrix} \frac{2n}{3} \\ \frac{2n}{3} \\ \frac{n}{3} \end{pmatrix},$$

con $n \in \mathbb{N}$.

a) (1.5 pts.) Probar que existe una constante $c > 0$ tal que $\text{cond}_\infty(A) \geq cn$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y deducir que $\text{cond}_\infty(A) \to \infty$ cuando $n \to \infty$.

b) (1 pt.) Para $n = 10^4$, hallar la descomposición LU de A.

c) (1 pt.) Para $n = 10^4$, utilizar la descomposición LU hallada para resolver el sistema $Ax = b$ utilizando aritmética de 4 dígitos (en base 10).

d) (0.5 pt.) Verificar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, la solución exacta del sistema es $x = (0, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ y calcular, para $n = 10^4$, el error relativo

$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

donde $\tilde{x}$ es la solución aproximada hallada en el ítem anterior.

a) $\text{Cond}_\infty A \geq \dfrac{\|A\|_\infty}{\|A-B\|_\infty}$ $\quad \forall B$ no inversible (singular)

Si $B = \begin{bmatrix} 0 & n & 5n \\ 0 & 3n & 3n \\ 0 & n & 2n \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \|A-B\|_\infty = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 1$

$\Rightarrow \text{Cond}_\infty A \geq \dfrac{1+6n}{1} > 6n$

$\text{Cond}_\infty A > 6n$

no puede ser igual, pero no encontré forma de que quede $\geq cn$

b) $n = 10^4$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{bmatrix}$$

Hago caso general:

$$\begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 1 & 3n & 3n \\ 1 & n & 2n \end{pmatrix} \; F_2 - F_1 \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 0 & 2n & -2n \\ 1 & n & -3n \end{pmatrix}$$

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -a & 1 & \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad a = 1$$

$$F_3 - F_1 \begin{pmatrix} 1 & n & 5n \\ 0 & 2n & -2n \\ 0 & 0 & -3n \end{pmatrix} \quad \text{Paso 3:} \begin{pmatrix} & & \\ & a & \\ & b & \end{pmatrix}$$

no debe ser cero

$$E_{31} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ -b & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b = 1 \qquad E_{32} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ 0 & -\frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{32} E_{31} E_{21} A = U$$

$$A = (E_{32} E_{31} E_{21})^{-1} U$$

$$A = \underbrace{E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}}_{L} U$$

Inversa de matriz elemental $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix} U$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a & \frac{b}{a} & 1 \end{bmatrix}}_{L} U$$