λ

Лекция 10

Модуль над кольцом

Содержание лекции:
Настоящей лекцией мы вплотную приближаемся к центральному разделу нашего курса - линейным пространствам. Здесь мы обсудим понятие внешнего закона, дадим определение алгебраической структуры, а также сформулируем самые основные определения, связанные с линенми пространствами и их отображениями.

Ключевые слова:
Внешний закон композиции, оператор закона, согласованность закона со структурой, действие на структуре, алгебраическая структура, модуль над кольцом, левый (правый) R-модуль, линейное отображение, мономорфизм, эпиморфизм, ядро и образ линейного отображения, подмодуль, фактор модуль, коядро.

Авторы курса:

Трифанов А. И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

10.1 Согласованное действие

Nota bene Напомним, что внешний закон композиции называется согласованным с внутренним законом, если

$$\forall x, y \in M, \quad \alpha \in \Omega, \quad \alpha\,(x \circ y) = \alpha(x) \circ \alpha(y).$$

Говорят, что алгебраическая структура Ω **действует на** алгебраической структуре M, если каждый элемент $\alpha \in \Omega$ является оператором внешнего закона на M и для любой пары элементов из $\alpha, \beta \in \Omega$ имеет место согласованное действие:

$$(\alpha * \beta)(x) = \alpha(\beta(x)), \quad \forall x \in M.$$

Говорят, что имеет место **согласованное действие** Ω на M, если

$$(\alpha * \beta)\,(x \circ y) = \alpha\,(\beta\,(x \circ y)) = \alpha\,(\beta x \circ \beta y) = \alpha\,(\beta x) \circ \alpha\,(\beta y)\,.$$

Пример 10.1. Внешний закон композиции, описанный в предыдущем примере согласован со структурой коммутативной группы $(\mathbb{Z},' +')$:

$$n(z_1 + z_2) = nz_1 + nz_2.$$

Если при этом множество $\mathbb{N}$ обладает алгебраической структурой мультипликативного моноида $(\mathbb{N},' \cdot')$, Тогда

$$(n \cdot m)(z_1 + z_2) = nmz_1 + nmz_2.$$

Алгебраической структурой на множестве M называется всякая структура, определяемая в M одним или несколькими внутренними законами композиции элементов из M и одним или несколькими внешними законами композиции из областей операторов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_k$, согласованных с внутренними законами.

Пример 10.2. Рассмотрим алфавит $A = \{p, q\}$ и множество L всех формальных сумм элементов A с коммутативной операцией "+". Тогда произвольный элемент L имеет вид

$$p + p + \ldots + p + q + \ldots + q$$

Пусть $\mathbb{Z}$ множество операторов внешнего закона на L, согласованных с внутренним законом L:

$$n(p + q) = np + nq, n \in Z,$$
$$(n + m)(p + q) = n(p + q) + m(p + q),$$
$$(nm)p = n(mp).$$

Множество комбинаций L, наделенное алгебраической структурой коммутативного внутреннего закона и внешнего закона с множеством операторов из кольца $\mathbb{Z}$ называется **модулем над кольцом**.

10.2 Модуль над кольцом

Левым R-модулем (или левым модулем над кольцом R) называется абелева группа $(G, +)$ с заданной бинарной операцией $R \times G \to G$, записываемой как $(\alpha, x) \to \alpha x$ и согласованной действующей на групповой структуре на G:

L1. Действие кольца группе:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \quad \forall x \in G$$
$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x).$$

L2. Согласованное действие:

$$\forall \alpha \in R, \quad \forall x_1, x_2 \in G \quad \alpha(x_1 + x_2) = \alpha x_1 + \alpha x_2$$

Nota bene Аналогично можно определить структуру **правого** R-модуля, если определена бинарная операция

$$G \times R \to G, \quad (x, \alpha) \mapsto x\alpha.$$

Если определены оба отображения, то говорят о **двустороннем** R-модуле.

Пример 10.3. Примеры R-модулей:

- Всякий $J \trianglelefteq R$ - идеал кольца R есть R-модуль.
- Любая абелева группа $(G, +)$ представляет собой $\mathbb{Z}$ - модуль, ибо

$$\forall x \in G \quad x + x + x + \ldots + x = zx, \quad z \in \mathbb{Z}.$$

- Пусть $\Bbbk$-поле, тогда структру модуля имеет $\Bbbk^n$ - множество столбиков вида

$$\xi = \left(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n\right)', \quad \xi^i \in \Bbbk.$$

Гомоморфизмом R-модулей X и Y (или R-линейным отображением) называется отображение $\sigma : X \to Y$, такое что:

$$\forall x, x_1, x_2 \in X, \quad \forall \alpha \in R$$
$$\sigma(x_1 + x_2) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2), \quad \sigma(\alpha x) = \sigma(x)\alpha.$$

Nota bene Для множества R-линейных отображений между X и Y используют следующее обозначение $\mathrm{Hom}_R(X, Y)$.

Ядром линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ называется подмножество X, такое что:

$$\ker \sigma = \{x \in X : \quad \sigma(x) = 0\}$$

Лемма 10.1. *Ядро* $\ker \sigma$ *- модуль над кольцом.*

Образом линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ называется подмножество Y, такое что:

$$\mathrm{Im} = \{y \in Y : \quad \exists x \in X \quad \sigma(x) = y\} = \sigma(X).$$

Лемма 10.2. *Образ* $\mathrm{Im}\, \sigma$ *- модуль над кольцом.*

10.3 Подмодуль. Фактор-модуль

(1) Подмножество $L \subseteq X$ называется **подмодулем** R-модуля X, если L замкнуто относительно операций, индуцированных из X.

(2) Подмножество $L \subseteq X$ называется **подмодулем** R-модуля X, если L само является R-модулем относительно операций, индуцированных из X.

Лемма 10.3. *Определения (1) и (2) равносильны.*

Пример 10.4. Примеры подмодулей:

- Ядро линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ является подмодулем в X;
- Образ линейного отображения $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ является подмодулем в Y;
- Идеал $J \trianglelefteq R$ являеется подмодулем R-модуля R;
- Подмножество $\Bbbk^n$ столбиков ξ, у которых первый элемент $\xi^1 = 0$.

Nota bene На фактор группу X/L переносится структура R-модуля, если умножение определить формулой:

$$\alpha(x + L) = \alpha x + L, \quad \forall x \in X.$$

R-модуль X/L называется **фактор-модулем** X по L.

Коядром гомоморфизма $\sigma \in \mathrm{Hom}_R(X, Y)$ называется множество

$$\mathrm{Coker}\, \sigma = Y / \mathrm{Im}\, \sigma.$$

Лемма 10.4. *Коядро является фактор-модулем* Y.

Теорема 10.1. *Имеет место изоморфизм* R*-модулей:*

$$X / \ker \sigma \simeq \mathrm{Im}\, \sigma.$$