Лекция 3

Подгруппы и фактор-группы

Содержание лекции:
В данной лекции мы продолжим вводить понятия, связанные с групповой структурой. Также мы сформулируем ряд утверждений, связанных с гомоморфизмами групп. В конце лекции мы докажем теорему об изоморфизме.

Ключевые слова:
Подгруппа, отношение эквивалентности, правый (левый) смежный класс, нормальная подгруппа, фактор-группа, канонический гомоморфизм, теорема об изоморфизме.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М. А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

3.1 Подгруппа и смежные классы

Подгруппой H группы G называется подмножество G, имеющее структуру группы, индуцированной групповым законом G.

Nota bene Подгруппа $\{e\}$ называется *тривиальной подгруппой*, G как подгруппа самой себя называется *несобственной*, остальные подгруппы G называются *собственными подгруппами*.

Пример 3.1. Пусть $\sigma \in \hom(G, G')$, тогда $\ker \sigma \leq G$ и $\operatorname{Im} \sigma \leq G'$.

Nota bene Напомним, что отношением эквивалентности на произвольном множестве называется отношение, удовлетворяющее свойствам:

- рефлексивность: $\forall x \in M \quad x \sim x$;
- симметричность: $\forall x, y \in M \quad x \sim y \quad \Rightarrow \quad y \sim x$;
- транзитивность: $\forall x, y, z \in M \quad x \sim y, \quad y \sim z \quad \Rightarrow \quad x \sim z$.

Отношение эквивалентности разбивает множество M на непересекающиеся подмножества (классы эквивалентности). Множество классов эквивалентности по заданному отнощению, называется фактор-множеством множества M по отношению $\sim$ и обозначается $M/\sim$.

Лемма 3.1. *Пусть G - группа и $H \leq G$. Тогда отношением эквивалентности является*

$$x \sim y \quad \Rightarrow \quad xy^{-1} \in H.$$

►
Проверим свойства:

- $x \sim x : \quad xx^{-1} = e \in H$;
- $x \sim y \quad \Rightarrow \quad xy^{-1} = (yx^{-1})^{-1} \in H \quad \Rightarrow \quad yx^{-1} \in H \quad \Rightarrow \quad y \sim x$.
- $x \sim y, \quad y \sim z \quad \Rightarrow \quad xy^{-1}, yz^{-1} \in H \quad \Rightarrow \quad xy^{-1}yz^{-1} = xz^{-1} \in H \quad \Rightarrow \quad x \sim z$.

◄

Nota bene Из того, что $xy^{-1} \in H$ получаем

$$x \in Hy = \{hy : \quad h \in H\} \quad \Rightarrow \quad \exists\, h_x \in H : \quad h_x y = x.$$

Множество Hy называется **правым смежным классом** G по подгруппе H.

Лемма 3.2. *Смежные классы, Hx и Hy, имеющие хотя бы один общий элемент, совпадают.*

▶

Пусть $z \in Hx$ и $z \in Hy$, тогда существуют $u, v \in H$, такие что $z = ux = vy$ и мы имеем:

$$ux = vy \quad \Rightarrow \quad x = u^{-1} \cdot v \cdot y, \quad u^{-1}v \in H$$

и тогда

$$Hx = Hu^{-1}vy = Hy.$$

◀

Nota bene Смежные классы, соответствующие различным элементам $x \in G$ не пересекаются.

Nota bene Так как существует только один правый смежный класс, которому принадлежит элемент $x \in G$ целесообразно выбрать данный элемент представителем этого класса и записывать $[x]_R$. В зависимости от ситуации мы будем использовать как мальтипликативную, так и аддитивную (для абелевых групп) форму записи для правых смежных классов:

$$[x]_R = Hx, \quad [x]_R = H + x.$$

Nota bene Аналогично правым смежным классам, могут быть определены **левые смежные классы** группы G по подгруппе H:

$$[x]_L = xH, \quad [x]_L = x + H.$$

3.2 Нормальная подгруппа

Подгруппа H группы G называется **нормальной**, если

$$\forall x \in G \quad xH = Hx.$$

Nota bene Если H - нормальная подгруппа в G, то обычно пишут $H \triangleleft G$.

Nota bene Нормальной является любая подгруппа абелевой группы.

Nota bene В случае нормальной подгруппы имеем

$$\forall x \in G \quad [x]_R = [x]_L = \bar{x}.$$

Лемма 3.3. *Пусть $\sigma \in \hom(G, G')$, тогда $\ker\sigma \triangleleft G$.*

▶

Пусть $H = \ker\sigma$, тогда

$$e' = \sigma(x \cdot x^{-1}) = \sigma(x)\sigma(H)\sigma(x^{-1}) = \sigma(x \cdot H \cdot x^{-1}) \quad \Rightarrow \quad x \cdot H \cdot x^{-1} \subset H.$$

Замена $x \leftrightarrow x^{-1}$ дает

$$H \subset x \cdot H \cdot x^{-1} \quad \Rightarrow \quad H = x \cdot H \cdot x^{-1}$$

◀

Лемма 3.4. *Пусть $H \triangleleft G$, тогда G/H имеет структуру группы.*

▶

Для доказательства достаточно проверить групповые аксиомы:

1. Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \in G/H$, тогда $(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = \bar{x}(\bar{y}\bar{z})$:

$$(\bar{x}\bar{y})\bar{z} = (xH \cdot yH) \cdot zH = (xy)H \cdot zH = (xy)zH = x(yz)H = \bar{x}(\bar{y}\bar{z}).$$

2. H - нейтральный элемент G/H:

$$xH \cdot H = xH.$$

3. $x^{-1}H$ - обратный элемент к xH:

$$x^{-1}H \cdot xH = x^{-1}xH = eH = H.$$

◀

‖ Группа G/H называется **фактор-группой** группы G по нормальной подгруппе H

3.3 Теорема об изоморфизме

Лемма 3.5. *Пусть $H \triangleleft G$, тогда существует такой гомоморфизм φ (называемый каноническим), что $\ker\varphi = H$.*

▶

Рассмотрим отображение

$$\varphi : G \to G/H, \quad \varphi(x) = xH,$$

и прямой проверкой убеждаемся, что

$$\varphi \in \hom(G, G/H), \quad \ker\varphi = H.$$

◀

Теорема 3.1. *(Об изоморфизме) Пусть $\sigma : G \to G'$ - гомоморфизм групп, тогда*

$$G/\ker\sigma \simeq \operatorname{Im}\sigma.$$

▶

Зададим отображение $\bar{\sigma} : G/\ker\sigma \to \operatorname{Im}\sigma$

$$\bar{\sigma}(\bar{x}) = \sigma(x),$$

и покажем, что оно определено корректно. Именно, пусть $\bar{x} = \bar{y}$, тогда

$$\bar{\sigma}(\bar{y}) = \sigma(y) = \sigma(xx^{-1}y) = \sigma(x)\sigma(x^{-1}y) = \sigma(x)e = \sigma(x) = \bar{\sigma}(\bar{x}).$$

Далее, $\bar{\sigma}$ - гомоморфизм:

$$\bar{\sigma}(\bar{x}\bar{y}) = \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) = \bar{\sigma}(\bar{x})\bar{\sigma}(\bar{y}).$$

Тривиально проверяется, что $\operatorname{Im}\bar{\sigma} = \operatorname{Im}\sigma$, и остается прямой проверкой убедиться, что ядро $\bar{\sigma}$ тривиально:

$$\bar{z} \in \ker\bar{\sigma} \quad \Rightarrow \quad \sigma(z) = \bar{\sigma}(\bar{z}) = e \quad \Rightarrow \quad z \in \ker\sigma \quad \Rightarrow \quad \bar{z} = \bar{e}.$$

Таким образом, мы показали, что $\bar{\sigma}$ - изоморфизм.

◀