θ

Лекция 9

Системы линейных уравнений

Содержание лекции:
Системы линейных алгебраических уравнений возникают в огромном количестве приложений. Здесь мы рассмотрим простейший случай существования единственного решения. Однако обсуждаемые здесь методы будут развиты в дальнейшем для более общих случаев и задач.

Ключевые слова:
Линейное алгебраическое уравнение, система уравнений, кожффициенты системы, решение системы, совместность системы, элементарные преобразования СЛАУ, матрица СЛАУ, расширенная матрица, ведущий элемент строки, ступенчатая матрица, метод Гаусса, элементарная матрица,

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:
`mathdep.ifmo.ru/geolin`

9.1 Основные определения

Линейным алгебраическим уравнением с неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем $\Bbbk$ называется уравнение вида

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{9.1}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Bbbk$ называются **коэффициентами**, а $b \in \Bbbk$ **свободным членом** линейного уравнения.

Решением линейного алгебраического уравнения называется упорядоченный набор чисел $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \Bbbk$, который будучи подставленным в линейное уравнение (9.1) превращает его в тождество.

Системой линейных алгебраических уравнений с m уравнениями и n неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots a_{1,n}x_n = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots a_{2,n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots, \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots a_{m,n}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9.2}$$

Решением системы линейных алгебраических уравнений (9.2) называется упорядоченный набор чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n$, который является решением *каждого* линейного алгебраического уравнения системы

Nota bene Далее для удобства и общности линейные уравнения также будем считать системами, состоящими из одного уравнения.

Система (9.2) называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение и **несовместной** в противном случае.

Nota bene Будем обозначать через $\mathcal{S}_n^m$ множество всех систем линейных алгебраических уравнений, содержащих m уравнений и n неизвестных.

Nota bene Пусть $S_1, S_2 \in \mathcal{S}_n^m$ - две системы, будем писать $S_1 \sim S_2$ если множества решений этих систем совпадают.

Лемма 9.1. *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на $\mathcal{S}_n^m$.*

Nota bene Договоримся класс с представителем $S \in \mathcal{S}_n^m$ обозначать через $[S]$.

9.2 Элементарные преобразования СЛАУ

Элементарными преобразованиями системы линейных алгебраических уравнений называются преобразования следующих трех типов:

L1. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число;

L2. Перестановка двух уравнений;

L3. Умножение одного уравнения на число, отличное от нуля.

Лемма 9.2. *В результате элементарных преобразований любая система S переходит в эквивалентную ей систему S'.*

Матрицей системы алгебраических уравнений называется матрица S системы (9.2), соствленная из коэффициентов этой системы. **Расширенной матрицей** матрицей называется матрица $\tilde{S}$ системы, полученная приписыванием к матрице системы S столбца свободных членов:

$$S = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \quad \tilde{S} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,1} & \dots & a_{2,n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}.$$

Лемма 9.3. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений - это в точности элементарные преобразования ее расширенной матрицы:*

$$L_1 \leftrightarrow E_1, \quad L_2 \leftrightarrow E_2, \quad L_3 \leftrightarrow E_3.$$

Ведущим элементом строки матрицы S с номером k называется ее первый ненулевой элемент.

Матрица S называется **ступенчатой**, если

1. номера ведущих элементов ее ненулевых строк образуют строго возрастающую последовательность;

2. нулевые строки, если они есть, стоят в конце.

Теорема 9.1. *Всякую матрицу с помощью элементарных преобразований можно привести к ступенчатому виду.*

►

Алгоритм Гаусса.

◄

Система линейных алгебраических уравнений называется **ступенчатой**, если ее расширенная матрица ступенчатая.

Nota bene Пусть $r(\tilde{r})$ - число ненулевых строк в матрице S $(\tilde{S})$, приведенной к ступенчатому виду, тогда возможны только три варианта:

1. $\tilde{r} = r + 1$ - система несовместна;

2. $\tilde{r} = r = n$ - система имеет единственное решение;

3. $\tilde{r} = r < n$ - система имеет множество решений.

9.3 Метод Гаусса. Элементарные матрицы

Nota bene Любую систему линейных алгебраических уравнений можно записать в матричной форме. Именно, пусть X - столбик неизвестных и B - столбик свободных членов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда систему (9.2) можно записать в виде

$$A \cdot X = B. \tag{9.3}$$

Nota bene Пусть U - произвольная квадратная $m \times m$ матрица, тогда

$$U \cdot A \cdot X = U \cdot X, \tag{9.4}$$

и всякое решение (9.3) является также решением (9.4).

Рассмотрим следующие виды матриц, которые назовем **элементарными**:

$$e_{i,j}(\lambda) = E + \lambda E_{i,j}, \quad p_{i,j} = E + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j}, \quad q_{i,j}(\lambda) = E + (\lambda - 1)E_{i,i},$$

причем $i \neq j$ и $\lambda \neq 0$.

Лемма 9.4. *Элементарные матрицы обратимы, причем:*

$$e_{i,j}(\lambda)^{-1} = e_{i,j}(-\lambda), \quad p_{i,j}^{-1} = p_{i,j}, \quad q_{i,j}(\lambda)^{-1} = q_{i,j}(\lambda^{-1}).$$

Лемма 9.5. *Имеет место следующее свойство:*

$$E1(S) = e \cdot S, \quad E2(S) = p \cdot S, \quad E3(S) = q \cdot S.$$

Nota bene Таким образом, метод Гаусса в матричной интерпретации состоит в последовательном умножении уравнения (9.3) слева на элементарные матрицы с целью приведения матрицы S к ступенчатому виду.