δ

Лекция 5

Идеал, фактор-кольцо, поле

Содержание лекции:
В настоящей лекции мы продолжаем изучать структуру кольца и вводим центральные понятия его подструктуры - идеала и классов вычетов по модулю. Мы также определим некоторые свойства элементов кольца и, в конце, обсудим важнейший класс колец - поля.

Ключевые слова:
Идеал кольца, фактор-кольцо, канонический кольцевой гомоморфизм, класс вычетов, делитель нуля, область целостности, нильпотент, обратимый элемент, главный идеал, поле.

Авторы курса:

Трифанов А.И. Москаленко М.А.

Ссылка на ресурсы:
mathdep.ifmo.ru/geolin

5.1 Идеалы и фактор-кольца

Иделалом J в кольце R называется аддитивная подгруппа со свойством

$$RJ \subset J \quad (\forall x \in R, \quad \forall y \in J \quad xy \in J).$$

Пример 5.1. Найдем идеалы в кольце $\mathbb{Z}$. Пусть m - наименьшее положительное число, лежащее в идеале $J \lhd \mathbb{Z}$. Тогда $(m) = m \cdot \mathbb{Z}$. Других идеалов в кольце $\mathbb{Z}$ содержащих элемент m нет. Действительно, пусть

$$z \in J = m \cdot \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad z = m \cdot u + r, \quad r \in J, \quad r < m \quad \Rightarrow \quad r = \min(J).$$

Лемма 5.1. *Пусть $J \lhd R$, тогда следующее отношение является отношением эквивалентности на R:*

$$x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in J.$$

▶
Утверждение следует из прямой проверки свойств:

R. $x - x = 0 \in J \quad \Rightarrow \quad x \sim x;$

S. $x \sim y \quad \Rightarrow \quad x - y \in J \quad \Rightarrow \quad y - x = -(x - y) \in J \quad \Rightarrow \quad x \sim y;$

T. $x \sim y, \quad y \sim z \quad \Rightarrow \quad x - z = (x - y) + (y - z) \in J \quad \Rightarrow \quad x \sim z.$

◀

Nota bene Фактор-множество R/J состоит из классов эквивалентности вида

$$\bar{x} = x + J.$$

Лемма 5.2. *Фактор-множество R/J, наделенное операциями, индуцированными из R имеет структуру кольца:*

$$\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}, \quad \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}, \quad \bar{0} = J.$$

▶
Проверяем непосредственно свойства операций:

1. $\bar{x} + \bar{y} = (x + J) + (y + J) = (x + y) + J = \overline{x + y},$
2. $\bar{x} \cdot \bar{y} = (x + J) \cdot (y + J) = xy + J = \overline{xy},$
3. $\bar{0} \cdot \bar{x} = J \cdot (x + J) = J = \bar{0}.$

◀

Множество R/J называется **фактор-кольцом** кольца R по идеалу J. Отображение $\varphi : R \to R/J$, действующее как

$$x \mapsto \bar{x} = x + J,$$

является гомоморфизмом, который называется **каноническим**.

Пример 5.2. Элементами фактор-кольца $\mathbb{Z}/(m) \triangleq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ являются *классы вычетов по модулю* m:

$$\begin{aligned}\bar{0} &= \{x \in \mathbb{Z} : \quad x = 0 \operatorname{mod}(m)\}\,, \\ \bar{1} &= \{x \in \mathbb{Z} : \quad x = 1 \operatorname{mod}(m)\}\,, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \overline{m-1} &= \{x \in \mathbb{Z} : \quad x = (m-1) \operatorname{mod}(m)\}\,.\end{aligned}$$

Лемма 5.3. *Пусть* $f : R \to R'$ *- гомоморфизм колец, тогда*

$$A/\ker f \simeq \operatorname{Im} f.$$

►
Утверждение следует из биективности и линейности отображения:

$$(x + \ker f) \mapsto f(x).$$

◄

5.2 Делители нуля. Нильпотенты

Делителем нуля в кольце R называется всякий элемент $x \neq 0$, такой что

$$\exists\, y \neq 0 : \quad xy = 0.$$

Пример 5.3. В кольце $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ делителями нуля являются элементы $\bar{2}$ и $\bar{3}$.

Областью целостности называется кольцо, в котором нет делителей нуля.

Пример 5.4. Областями целостности являются кольца $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, где p - простое.

Элемент $z \neq 0$ называется **нильпотентом**, если

$$\exists n \in \mathbb{N} : \quad z^n = 0.$$

Nota bene Всякий нильпотент является делителем нуля. Обратное верно не всегда.

5.3 Обратимые элементы. Поле

Обратимым элементом кольца называется всякий элемент $u \in R$ такой что

$$\exists\, v \in R \quad u \cdot v = 1$$

Nota bene В паре u, v оба элемента являются обратимыми.

Лемма 5.4. *Множество обратимых элементов кольца R образует мультипликативную группу, обозначаемую R^*.*

Идеал вида $(x) = x \cdot R, x \in R$ называется **главным идеалом** кольца R.

Лемма 5.5. *Имеет место эквивалентность:*

$$x \in R^* \quad \Leftrightarrow \quad (x) = (1) \triangleq R.$$

Полем называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

Лемма 5.6. *Всякое поле K является областью целостности.*

▶
Пусть $x, y \in K$ такие что $xy = 0$. По определению K имеем

$$\exists\, u, v : ux = 1, \quad yv = 1.$$

Откуда сразу получаем:

$$1 = (ux) \cdot (yv) = u \cdot (xy) \cdot v = 0.$$

◀

Nota bene Обратное, вообще говоря не верно: $\mathbb{Z}$ - область целостности, но не поле.

Теорема 5.1. *Пусть R - ненулевое кольцо, тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) *R - поле;*

(2) *в R нет идеалов, кроме (0) и (1);*

(3) *любой гомоморфизм R в ненулевое кольцо инъективен.*

▶
Докажем соответствующие импликации:

- $(1) \Rightarrow (2)$:
  Пусть $J \trianglelefteq R$ и $x \in J$, тогда $(1) = (x) \subseteq J \quad \Rightarrow \quad J = (1)$.

- $(2) \Rightarrow (3)$:
  Пусть $f : R \to B$ - кольцевой гомоморфизм. Тогда
  $$\ker f \trianglelefteq R, \quad \ker R \neq R \quad \Rightarrow \quad \ker f = 0,$$
  откуда следует инъективность.
- $(3) \Rightarrow (1)$
  Пусть $x \notin R^*$, тогда
  $$(x) \neq (1) \quad \Rightarrow \quad B = R/(x) \neq 0, \quad \varphi : R \to R/(x)$$
  Из инъективности канонического отображения φ следует, что $(x) = 0$ и $x = 0$.

◄