



# Лекция 2

## Группы и гомоморфизмы

### Содержание лекции:

В настоящей лекции мы введем одно из центральных структур алгебры - группу. Рассматривая группу как иллюстративный пример множества с внутренним законом композиции, мы введем основные определения, связанные с этой структурой, а также подготовимся к формулировке одного из самых известных утверждений о группах - теоремы об изоморфизме.

### Ключевые слова:

Магма, полугруппа, моноид, группа, коммутативная группа, гомоморфизм групп, изоморфизм, автоморфизм, ядро гомоморфизма, образ гомоморфизма, вложение.

### Авторы курса:

Трифанов А.И.

Москаленко М. А.

### Ссылка на ресурсы:

[mathdep.ifmo.ru/geolin](http://mathdep.ifmo.ru/geolin)

## 2.1 Основные структуры

|| Множество, наделенное внутренним законом композиции, называется **магмой**.

**Пример 2.1.** Пусть множество  $M$  содержит только три элемента  $\{-1, 0, 1\}$ . Алгебраическую структуру магмы на  $S$  задает следующий закон композиции:

$$x \circ y = x \Leftrightarrow y = \begin{cases} 1, & x < y, \\ 0, & x = y, \\ -1, & x > y. \end{cases}$$

|| Множество  $M$ , наделенное **ассоциативным** всюду определенным законом композиции называется **полугруппой**.

**Пример 2.2.** Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  с операцией  $\circ = "+"$  является полугруппой  $(\mathbb{N}, "+")$ .

|| Полугруппа  $S$ , содержащая **нейтральный элемент**, называется **моноидом**.

**Пример 2.3.** Множество натуральных чисел  $\mathbb{N}$  с операцией  $\circ = "\cdot"$  является моноидом  $(\mathbb{N}, 1, "\cdot")$ .

## 2.2 Определение группы

Непустое множество  $G$  называется **группой**, если на нем задан закон композиции  $G \times G \rightarrow G$ , так что  $(x, y) \mapsto xy$  и имеют место следующие три свойства:

G1. Ассоциативность закона:

$$\forall x, y, z \in G \quad (xy)z = x(yz).$$

G2. Существует нейтральный элемент:

$$\exists e \in G : \quad \forall x \in G \quad xe = x = ex.$$

G3. Существует обратный элемент:

$$\forall x \in G \quad \exists x^{-1} : \quad xx^{-1} = e = x^{-1}x.$$

**Пример 2.4.** На практике группы чаще всего встречаются в виде *групп преобразований* каких-то объектов:

- группа  $D_3$  симметрий правильного треугольника;
- симметрическая группа  $S_n$  перестановок;
- группа Рубика - группа внутренних вращений кубика Рубика;

---

**Коммутативной** или **абелевой** называется такая группа, любые два элемента которой *коммутируют*:

$$\forall x, y \in G \quad xy = yx.$$

---

**Пример 2.5.** Примеры коммутативных групп:

1. Аддитивная группа целых чисел  $\mathbb{Z}^+$ ;
2. Мультипликативная группа вещественных чисел  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;
3. Группа углов (точек единичной окружности) - группа вещественных чисел  $\mathbb{R}^+$  по модулю  $2\pi\mathbb{Z}$ . Групповая операция  $\oplus$  определяется следующим образом:

$$\begin{cases} x \oplus y = x + y, & x + y < 2\pi \\ x \oplus y = x + y - 2\pi, & x + y \geq 2\pi \end{cases}$$

4. Булева группа множества  $X$  - множество  $2^X$  всех подмножеств множества  $X$  вместе с операцией симметрической разности  $\Delta$ ;
5. Группа размерностей физических величин;

---

## 2.3 Гомоморфизмы групп

**Гомоморфизмом** групп  $G$  и  $G'$  называется отображение  $\sigma : G \rightarrow G'$ , обладающее следующими свойствами:

$$\forall x, y \in G \quad \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y), \quad \sigma(e) = e'.$$

**Nota bene** Множество гомоморфизмов из группы  $G$  в группу  $G'$  принято обозначать  $\text{Hom}(G, G')$ . Гомоморфизмы из  $G$  в  $G$  называются эндоморфизмами и их множество обозначается  $\text{End}(G) \triangleq \text{Hom}(G, G)$ .

**Nota bene** Напомним некоторые свойства отображений. Пусть  $M$  и  $N$  - два множества и  $f : M \rightarrow N$ . Отображение  $f$  называется *инъективным* (или *инъекцией*), если имеет место свойство:

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Далее, отображение  $f$  называется *сюръективным* (или *сюръекцией*), если

$$\forall y \in N \quad \exists x \in M : f(x) = y.$$

И, наконец,  $f$ , будучи сюръекцией и инъекцией называется *биекцией* (или *взаимно-однозначным отображением*). В этом случае

$$\exists g : N \rightarrow M \quad : \quad g \circ f = \text{id}_M, \quad f \circ g = \text{id}_N.$$

Рассмотрим ситуацию, когда соответствующие множества имеют структуру группы.

**Лемма 2.1.** Пусть  $\sigma \in \text{Hom}(G, G')$ , тогда

$$\forall x \in G \quad \sigma(x^{-1}) = \sigma(x)^{-1}.$$

Гомоморфизм  $\sigma$  называется **изоморфизмом**, если

$$\exists \chi \in \text{Hom}(G', G) : \quad \chi \circ \sigma = \text{id}_G, \quad \sigma \circ \chi = \text{id}_{G'}.$$

Соответствующие группы при этом называются *изоморфными* (пишут  $G \simeq G'$ ).

**Nota bene** Подмножество отображений в  $\text{Hom}(G, G')$ , являющихся изоморфизмами, принято обозначать  $\text{Iso}(G, G')$ . В случае  $\text{Iso}(G, G)$  обычно пишут  $\text{Aut}(G)$  и соответствующие отображения называют **автоморфизмами**.

**Пример 2.6.** Множество  $\text{Aut}(G)$  вместе с операцией композиции и тождественным отображением  $\text{id}_G$  является группой (автоморфизмов группы  $G$ ).

**Ядром** гомоморфизма  $\sigma \in \text{Hom}(G, G')$  называется множество

$$\ker \sigma = \{g \in G : \sigma(g) = e'\}.$$

**Лемма 2.2.** Ядро  $\ker \sigma$  является группой.

**Лемма 2.3.** Гомоморфизм  $\sigma \in \text{Hom}(G, G')$  ядро которого тривиально инъективен.

**Образом** гомоморфизма  $\sigma \in \text{Hom}(G, G')$  называется подмножество  $G'$ , такое что

$$\text{Im } \sigma = \{g' \in G' : \exists g \in G, \quad \sigma(g) = g'\}.$$

**Лемма 2.4.** Образ  $\text{Im } \sigma$  является группой.

**Вложением** называется гомоморфизм  $\sigma \in \text{Hom}(G, G')$ , обладающий следующим свойством

$$G \simeq \text{Im } \sigma \subset G'.$$