Ответы и решения к заданиям заключительного этапа

Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по математике

2011/2012 учебный год

Задача о трубах.

На строительство теплоцентрали завезли трубы двух диаметров. Узких труб меньше, чем широких. Если число узких труб увеличить вдвое, то общее количество труб окажется больше 597. Если удвоить число широких, а число узких труб оставить первоначальным, то общее количество труб будет меньше 600. Сколько завезли узких и сколько широких труб? Как изменится ответ, если вместо 597 и 600 будут числа 6 и 9?

Решение.

Пусть x – количество узких, y – количество широких труб, n=199. Тогда числа x и y --- неотрицательные целые. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x < y \\ 2x + y > 3n \\ x + 2y < 3n + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < y \\ x + y > 3n - x \\ x + y < 3n + 3 - y \end{cases}$$

Из них следует, что числа x и y оба ненулевые, кроме того, из двух последних неравенств:

$$\begin{cases} 3n - x < 3n + 3 - y \\ y - x < 3 \end{cases}$$

Из первых двух получаем:

$$3n < 2x + y < 3y \Rightarrow y > n$$

Из неравенств

$$\begin{cases} x < y \\ x + 2y < 3n + 3 \end{cases}$$

получаем:

$$3x < x + 2y < 3n + 3 \Rightarrow x < n + 1$$

Таким образом,

$$\begin{cases} y < 3 + x \\ y > n \\ x < n + 1 \end{cases}$$

Из первых двух:

$$\begin{cases} n < y < 3 + x \\ x > n - 3 \end{cases}$$

Или

$$\begin{cases} n - 3 < x < n + 1 \\ n < y < 3 + x \end{cases}$$

Полученной системе удовлетворяют три пары чисел:

$$\begin{cases} x = n \\ y = n+1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = n \\ y = n+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = n-1 \\ y = n+1 \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет одна из этих пар:

$x = n, \qquad y = n+1.$

Таким образом, было n=199 узких и $n+1$=200 широких труб. Это ответ на большой вопрос.

Малый вопрос – при замене 597 и 600 на 6 и 9. В этом случае можно избежать сложных преобразований неравенств и свести решение к очень ограниченному перебору. По-прежнему , x и y – натуральные, n=2, условия задачи описываются неравенствами 1<=x<y<=3, 2x+y>6, x+2y<9. При этом остаются только три возможности: (x, y)=(1, 2), (1, 3), (2,3). Всем условиям удовлетворяет лишь последняя пара.

Ответ на малый вопрос: 2 узкие и 3 широкие трубы.

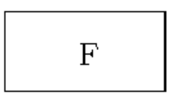
Задача о гидроцикле.
Решение.
Для наблюдателя на плоту гидроцикл (с собственной скоростью V) за интервал времени между двумя встречами дважды прошел отрезок S (со скоростями $V + V_{ТЕЧ}$ и $V - V_{ТЕЧ}$), т.е. находился в движении 2t минут (где t - время до разворота). За это время плот прошел расстояние S со скоростью $V_{ТЕЧ}$.

Таким образом, $V_{ТЕЧ} = \frac{S}{2t} = \frac{500\,м}{10\,мин} = 3\,км/ч$. В другом варианте решение аналогично, ответ тот же, 3 км/ч.

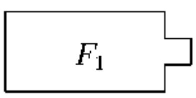
Задача о крепости.

Ответ.
Надо оставить парашют или другой предмет на месте (у стены) и обходить стену, держась за нее одной (напр., левой) рукой. Тогда изнутри правых поворотов будет на 4 больше, чем левых, снаружи – левых будет на 4 больше, чем правых.
Если держаться правой рукой – наоборот.

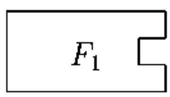
Решение.
Доказать это можно по индукции.
Базис: прямоугольник (фигура F)



Индуктивный переход: переход от фигуры F к фигуре F_1, полученной из F присоединением прямоугольника или выемкой его.



или



Задача о Незнайке (вар. 6011).

В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 5 и 6 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 31 фантик и воздушного шара ценой 654321 фантик? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?

Ответ (вар. 6011).
31 и 654321 можно. Нельзя 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 19.

Решение (вар. 6011).
1. Монетами по 5 и 6 фантиков можно составить любую сумму n ($n \in \text{Ґ}$), кратную 5 или 6, следовательно и 30.
2. Пусть $n \in \text{Ґ}$, $n > 30$ и n не делится на 5. Тогда $n = 5q + r$, где $r = 1,2,3,4$, $q \in \text{Ґ}$, $q \geq 6$. Тогда $n = 5q + r = 5(q - r) + 6r$. Значит, любую сумму $n \geq 30$ можно составить монетами в 5 и 6 фантиков.
3. Осталось проверить все числа n: $1 \leq n \leq 29$. Для этого составим таблицу, в которой $x_1 = 0,1,2,3,4,5$, $x_2 = 0,1,2,3,4$, $1 \leq 5x_1 + 6x_2 \leq 29$.

x_1	x_2	$5x_1 + 6x_2$
0	1	6
0	2	12
0	3	18
0	4	24
1	0	5
1	1	11
1	2	17
1	3	23
1	4	29
2	0	10
2	1	16
2	2	22
2	3	28
3	0	15
3	1	21
3	2	27
4	0	20
4	1	26
5	0	25

Для наглядности изобразим набираемые монетами суммы другой таблицей

1	2	3	4	~~5~~
~~6~~	7	8	9	~~10~~
~~11~~	~~12~~	13	14	~~15~~
~~16~~	~~17~~	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~
~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~

Остается 11 цен, которых больше не должно быть: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 19.

Задача (о Незнайке вар. 6991).

В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 6 и 7 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 43 фантика и воздушного шара ценой 1 000 000 фантиков? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?

Ответ (вар. 6991).
43 и 1 000 000 можно. Нельзя 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29.

Решение (вар. 6991).
1. Монетами по 6 и 7 фантиков можно составить любую сумму n ($n \in \mathbb{N}$), кратную 6 или 7, следовательно и 42.
2. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n > 42$ и n не делится на 6. Тогда $n = 6q + r$, где $r = 1, 2, 3, 4, 5$, $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 7$. Тогда $n = 6q + r = 6(q - r) + 7r$. Значит, любую сумму $n \geq 42$ можно составить монетами в 6 и 7 фантиков.
3. Осталось проверить все числа n: $1 \leq n \leq 41$. Для этого составим таблицу, в которой $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $1 \leq 6x_1 + 7x_2 \leq 41$.

x_1	x_2	$6x_1 + 7x_2$
0	1	7
0	2	14
0	3	21
0	4	28
0	5	35
1	0	6
1	1	13
1	2	20
1	3	27
1	4	34
1	5	41
2	0	12
2	1	19
2	2	26
2	3	33
2	4	40
3	0	18
3	1	25
3	2	32
3	3	39
4	0	24
4	1	31
4	2	38
5	0	30
5	1	37
6	0	36

Для наглядности изобразим набираемые монетами суммы другой таблицей

1	2	3	4	5	~~6~~
~~7~~	8	9	10	11	~~12~~
~~13~~	~~14~~	15	16	17	~~18~~
~~19~~	~~20~~	~~21~~	22	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~	~~41~~	~~42~~

Остается 15 цен, которых больше не должно быть: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29.

Задача о Кате.

На электростанции залы, занимаемые турбинами, имеют вид квадратов, длина стороны каждого квадрата – целое число метров. Потолки трех залов решили отремонтировать, покрыв их специальной краской по цене 1000 рублей за 1 м^2 покрытия. Кассир ремонтного предприятия Катя, принимая плату, заметила, что все банкноты оказались достоинством 5000 рублей, сдача не потребовалась. Катя хорошо умеет считать и быстро поняла, что по крайней мере один из квадратных залов имеет длину стороны, кратную 5 метрам. Почему Катя сделала такой вывод? Если бы существовали банкноты по 6000 рублей и ими была собрана сумма за ремонт 2011 или 2012 квадратных залов с целыми размерами, то остался бы верен вывод Кати?

Решение.

Если n_1, n_2, n_3 - длины сторон квадратных залов, то плата за их ремонт составляет $1000(n_1^2+n_2^2+n_3^2)$ рублей. Эта сумма кратна 5000, поэтому сумма $n_1^2+n_2^2+n_3^2$ кратна 5. Катя поняла, что по крайней мере одно из натуральных чисел n_1, n_2, n_3 кратно 5. Квадрат натурального числа при делении на 5 имеет остаток 0 (число кратно 5) или 1 (число имеет остаток 1 или 4) или 4 (число имеет остаток 2 или 3) – это легко проверить. Если бы ни одно из трех чисел n_1, n_2, n_3 не делилось на 5, то сумма могла бы давать остатки только 1+1+1 или 1+1+4 или 1+4+4 или 4+4+4, то есть не могла быть кратна 5. Квадрат натурального числа при делении на 6 имеет остаток 0 или 1 или 4 или 3. Если бы было 2011 квадратных залов со сторонами то n_1, n_2, …, n_{2011}, то при $n_1=\ldots=n_{2009}=1$, $n_{2010}=2$, $n_{2011}=3$ сумма $n_1^2+\ldots+n_{2011}^2$ имела бы при делении на 6 такой же остаток, как 2009+4+3=2016, сумма таких квадратов кратна 6. Если все 2012 чисел равны 3, то сумма их квадратов кратна 6. В этих случаях вывод Кати неверен.

Рекомендации по оценке

1. Не снижать оценку за недостаточно рациональный ход решения. Это надо учесть творческими баллами.
2. Если нет ответа на второй и третий вопрос, то решено не более половины задачи. Оценка m, не более 6 баллов.
3. В остальных случаях поступайте по усмотрению, но с полной благожелательностью к участнику.

Задача о корне.

Ответ.

Алгоритм представлен ниже. Количество действий $n = \lceil \sqrt{N} \rceil$ (ближайшее целое сверху).

Решение.

Алгоритм вычисления $\sqrt{x}$, $x \in Г$ основан на простом факте:

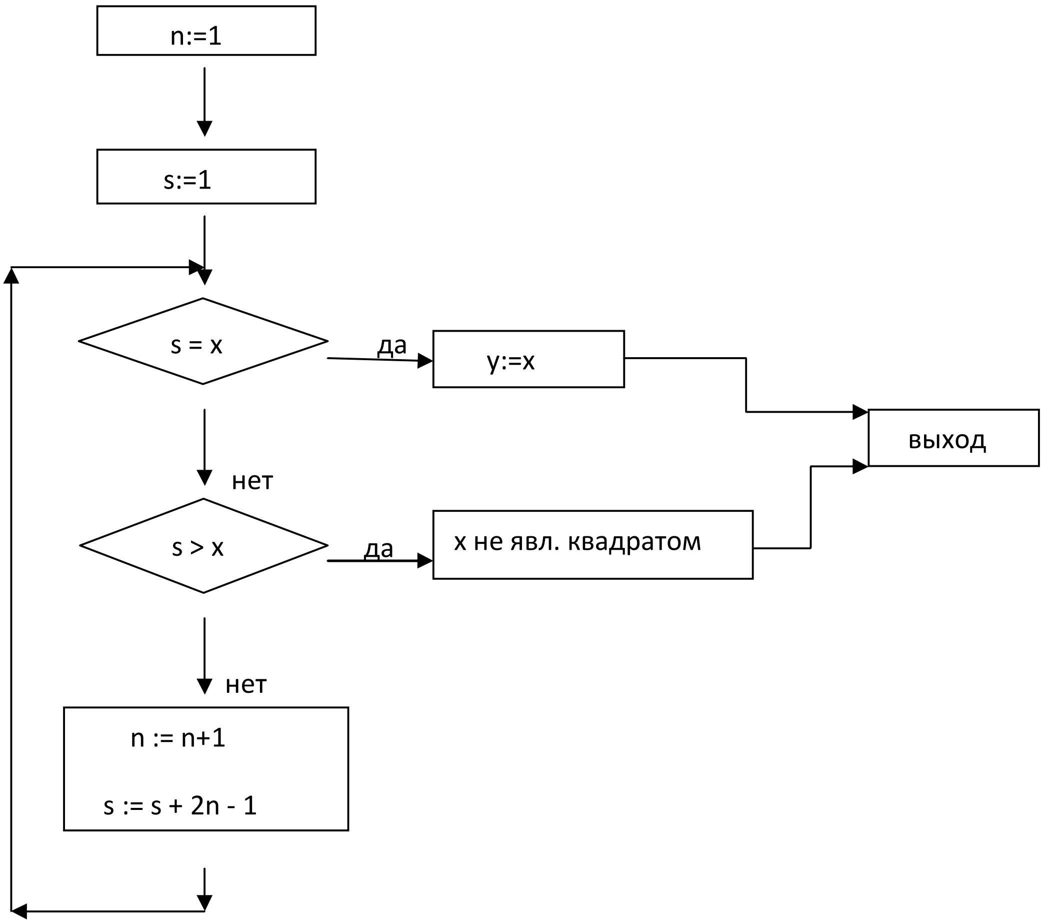
$$N = n^2 = 1+3+5+K+(2n-1)$$

Представим алгоритм в виде блок-схемы.

Вход: число $x \in Г$.

Выход: 1) $y = \sqrt{x}$, если x является квадратом или сообщение "x не является квадратом",

2) n, равное числу повторов цикла, т.е. число сложений.



Замечание. Тот же самый алгоритм можно переписать, используя только вычитания. Количество действий, очевидно, не изменится.

Задача об игре математиков.

Математик А, находясь на отдыхе, предложил математику В следующую игру: «Найдите какое-либо решение квадратного уравнения с тремя неизвестными $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$. Если Вы этого сделать не сможете, то заплатите мне 1000 рублей. Если я, зная Ваше решение (x_1,y_1,z_1), смогу найти другое решение (x_2,y_2,z_2) такое, что $x_2+y_2+z_2-(x_1+y_1+z_1)=\Delta>0$, то Вы заплатите мне N рублей, где N – целая часть числа Δ. Если я этого сделать не смогу, я заплачу Вам 100M рублей, где M – целая часть числа $|x_1|+|y_1|+|z_1|+1000$.» Математик В, подумав, отказался играть, поняв, что он всегда окажется в проигрыше.

1) Почему В сделал такой вывод?

2) Как можно изменить уравнение, чтобы оно оставалось квадратным с тремя неизвестными, но при тех же условиях игры математик В выиграл?

Решение и ответ

Общее решение уравнения x=y=z=c, где c - любое число. В этом можно убедиться множеством способов. Для любого решения, предложенного игроком В, игрок А найдет решение, дающее ему сколь угодно большой выигрыш. Изменить уравнение можно бесконечным числом способов, например, $x^2+2y^2+3z^2=0$.

Для **задачи об «инопланетянине» ответ** таков: площадь в обоих случаях одинакова. Это устанавливается без применения формул площади треугольника, достаточно увидеть равные треугольники, парами образующие прямоугольник.