به نام خدا

۱– ماتریس متقارن زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 11 & 15 \\ 6 & 15 & 23 \end{bmatrix}$$

الف) ماتریس‌های پایین‌مثلثی L و بالامثلثی U را به گونه‌ای بیابید که $A = LU$.

ب) با استفاده از پاسخ قسمت (الف) ماتریس را به فرم $A = \mathrm{LDL^T}$ (که در آن ماتریس D قطری است) در آورید.

ج) با استفاده از پاسخ قسمت (ب) تجزیه Cholesky ماتریس A را به فرم $A = R^T R$ (که در آن R یک ماتریس بالامثلثی است) بیابید.

۲– با استفاده از تجزیه LU ، دستگاه معادله زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} 3x + y + 6z &= 0 \\ -6x - 16z &= 4 \\ 8y - 17z &= 17 \end{aligned}$$

۳– با استفاده از الگوریتم Gram-Schmidt ، تجزیه QR ماتریس زیر را به دست آورید:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

٤– یکی از مدل‌های مهم حوزه یادگیری ماشین، مدل رگرسیون خطی(Linear Regression) است. این مدل به صورت $\hat{y} = X\beta$ تعریف می‌شود که ماتریس $X \in R^{n*K}$ ، ماتریس ورودی و بردار $\hat{y} \in R^n$ ، بردار خروجی است. هدف مسئله رگرسیون خطی تخمین بردار $\beta \in R^k$ است. این مسئله با روش تخمین Ordinary least squares به صورت زیر قابل حل است:

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

ولی یکی از مشکلات این جواب، بار محاسباتی محاسبه ماتریس معکوس است. توضیح دهید با استفاده از تجزیه QR، چگونه می‌توان بار محاسباتی این تخمین را کم کرد؟

۵- اگر $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p \ldots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ و $\mathbf{A}_i$ ها مربعی باشند، نشان دهید چگونه می‌توان تجزیه QR ماتریس $\mathbf{A}$ را بدون محاسبه حاصلضرب $\mathbf{A} = \mathbf{A}_p \ldots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1$ به دست آورد.

(راهنمایی: در حالت $P = 3$، بنویسید: $\mathbf{Q}_3^T \mathbf{A} = \mathbf{Q}_3^T \mathbf{A}_3 \mathbf{Q}_2 \mathbf{Q}_2^T \mathbf{A}_2 \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_1^T \mathbf{A}_1$ و $\mathbf{Q}_i$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که $\mathbf{Q}_i^T(\mathbf{A}_i \mathbf{Q}_{i-1})$ بالامثلثی بوده و $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{I}$ باشد.)

٦- با استفاده از تجزیه QR نشان دهید اگر $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $a_i = A(:,i)$ آنگاه:

$$|\det(A)| \leq \| a_1 \|_2 \ldots \| a_n \|_2$$

۷- در این سوال می‌خواهیم از تجزیه ماتریس بلوکی که بلوک‌های روی قطرش مربعی هستند به روابط جالب و پرکاربردی برسیم.

الف) فرض کنید $A = \operatorname{diag}(A_1, \ldots, A_k)$ که $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$.

الف – ۱) تجزیه زیر را برای ماتریس بلوکی قطری A ثابت کنید:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & & & \\ & I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{m_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & I_{m_k} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & \\ & I_{m_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{bmatrix}$$

الف – ۲) با تعریف دترمینان نشان دهید:

$$\det \begin{bmatrix} I_{m_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & A_j & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_{m_k} \end{bmatrix} = \det(A_j)$$

الف – ۳) نشان دهید:

$$\det(A) = \det(A_1)\det(A_2) \ldots \det(A_k)$$

ب) فرض کنید $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ که $A \in \mathbb{R}^{p\times p}, B \in \mathbb{R}^{p\times q}, C \in \mathbb{R}^{q\times p}, D \in \mathbb{R}^{q\times q}$.

ب – ۱) تجزیه‌های شبه LDU زیر را برای ماتریس بلوکی M ثابت کنید. یعنی اگر A معکوس‌پذیر باشد، نشان دهید:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ CA^{-1} & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & A^{-1}B \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$

و اگر D معکوس‌پذیر باشد، نشان دهید:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_p & BD^{-1} \\ 0 & I_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ D^{-1}C & I_q \end{bmatrix}$$

ب – ۲) نشان دهید اگر A و D معکوس‌پذیر باشند داریم:

$$\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B) = \det(D) \det(A - BD^{-1}C)$$

ج) فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, X \in \mathbb{R}^{m\times m}$ که X معکوس‌پذیر است.

ج – ۱) قضیه دترمینان Sylvester را اثبات کنید:

$$\det(I_m + AB) = \det(I_n + BA)$$

ج – ۲) فرم کلی‌تر قضیه‌ی بالا را اثبات کنید:

$$\det(X + AB) = \det(X) \det(I_n + BX^{-1}A)$$

ج – ۳) برای دو بردار $u, v \in \mathbb{R}^m$، با استفاده از قضیه‌ی بالا نشان دهید:

$$\det(X + uv^T) = (1 + v^T X^{-1} u) \det(X)$$