به نام خدا

تجزیه‌های تانسوری: تمرین سری اول — تاریخ تحویل: چهارشنبه ۱٦ اسفند ۱٤۰۲

۱– نشان دهید برای نرم فروبنیوس ماتریس‌ها نامساوی زیر برقرار است:

$$\|AB\|_F^2 \leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2$$

۲– فرض کنید $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ باشد و آن را به صورت $A = [a_1|a_2|\dots|a_n]$ در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \|a\|_1$$

۳– فرض کنید ماتریس A بی‌توان است. یعنی $A^2 = A$. نشان دهید:

الف) مقدار دترمینان ماتریس A صفر یا یک است.

ب) اگر $B = I - A$ باشد، ماتریس B نیز بی‌توان است.

٤– فرض کنید $A \in R^{n\times n}$ و $B \in R^{m\times m}$ باشد. اگر λ یک مقدار ویژه ماتریس A متناظر با بردار ویژه $x \in R^n$ و μ یک مقدار ویژه ماتریس B متناظر با بردار ویژه $y \in R^m$ باشد، آن‌گاه مقدار ویژه و بردار ویژه ماتریس $(A \otimes B)$ را بر حسب مقادیر μ و λ و بردارهای x و y به دست آورید.

۵– برای ماتریس دلخواه $X \in R^{m\times n}$ ، ماتریس منحصر به فرد $P(m,n) \in R^{mn\times mn}$ به صورت $P(m,n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(E_{ij} \otimes E_{ij}^T)$ تعریف می‌شود که $E_{ij} \in R^{m\times n}$ در المان (i,j) برابر یک و در بقیه المان ها صفر است. ثابت کنید:

$$P(m,n) = P(n,m)^T = P(n,m)^{-1}$$

آیا می‌توان ماتریس $P(m,n)$ را یک ماتریس جایگشت در نظر گرفت؟ چرا؟

٦– اگر $p,q \in [1,\infty]$ به طوری که $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ باشد ، برای هر $u,v \in R^n$ و برای همه ی مقادیر p,q، ثابت کنید:

$$|u^T v| \leq \|u\|_p \|v\|_q$$

۷– ثابت کنید:

الف) اگر ماتریس $A \in R^{n\times n}$ مثبت معین و متقارن باشد، آن گاه تمام مقادیر ویژه آن مثبت خواهند بود.

ب) ثابت کنید اگر A و B ماتریس‌های مثبت معین باشند، آن گاه $(A \otimes B)$ مثبت معین خواهد بود.

۸- روابط زیر را اثبات کنید:

الف) برای ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ و $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ داریم:

$$\det(A \otimes B) = \det(A)^n \det(B)^m$$

ب) برای ماتریس جایگشت $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ داریم:

$$\det(P \otimes P) = 1$$

ج) $tr(A \otimes B) = tr(A).tr(B)$

د) $tr(A^T H) = \left(vec(A)\right)^T vec(H)$

۹- الف) ماتریس مربعی A را *nilpotent* می‌نامیم اگر به‌ازای یک عدد طبیعی k، $A^k = 0$. نشان دهید اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و *nilpotent* باشند، آن‌گاه $A \otimes B$ نیز *nilpotent* است.

ب) ماتریس مربعی A را *idempotent* می‌نامیم اگر به‌ازای یک عدد طبیعی k، $A^k = A$. نشان دهید اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ و *idempotent* باشند، آن‌گاه $A \otimes B$ نیز *idempotent* است.

۱۰- اگر $A \in \mathbb{R}^{(m\times n)}$ و $B \in \mathbb{R}^{(p\times n)}$ ماتریس‌های رتبه کامل باشند، روابط زیر را اثبات کید:

a. $(A \odot B)^T(A \odot B) = A^T A.* B^T B$
b. $(A \odot B)^{\dagger} = [(A^T A).* (B^T B)]^{-1}(A \odot B)^T$

۱۱- ماتریس بلوکی قطری $A = diag(A_1, A_2, \dots, A_n)$ را که در آن A_k به ازای $k = 1, \dots, n$ ماتریس مربعی است، در نظر بگیرید.

الف) رابطه $\det(A)$ و $tr(A)$ را برحسب بلوک‌ها به دست آورید.

ب) نشان دهید که ماتریس A معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر همه ماتریس‌های A_k معکوس‌پذیر باشند. معکوس ماتریس A را برحسب بلوک‌ها به دست آورید.

۱۲- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید $\dim\left(\text{null}(A)\right) + \text{rank}(A) = n$.

راهنمایی: ابتدا نشان دهید $\text{null}(A) = \text{ran}(A^T)^{\perp}$ و سپس از گزاره تساوی رتبه ستونی و سطری یک ماتریس استفاده کنید.