به نام خدا

تجزیه‌های تانسوری: تمرین سری دوم — تاریخ تحویل: پنج‌شنبه ۱۶ فروردین ۱۴۰۳

۱- ماتریس $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ را در نظر بگیرید. نرم nuclear ماتریس A با $\|A\|_* = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(A)$ تعریف می‌شود که $\sigma_i(A)$ مقادیر تکین A هستند.

الف) نشان دهید $\|A\|_* = tr\left(\sqrt{A^T A}\right)$.

در اینجا عملگر tr جمع درایه‌های روی قطر ماتریس را حساب می‌کند و جذر برای ماتریس متقارن مثبت نیمه‌معین M به صورت $\sqrt{M} = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}Q^T$ تعریف شده که $M = Q\Lambda Q^T$ تجزیه‌ی Schur ماتریس M است و $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ ماتریس قطری شامل جذر نامنفی مقادیر ویژه M است.

ب) برای $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ثابت کنید: $tr(AB) = tr(BA)$.

پ) برای $A, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ نشان دهید: $\|A\|_* = \max_{C^T C = I} tr(AC)$.

ت) ثابت کنید: $\|A + B\|_* \leq \|A\|_* + \|B\|_*$.

۲- اگر H یک ماتریس Householder باشد، گزاره‌های زیر را اثبات کنید:

الف) H متعامد است.

ب) مقادیر ویژه آن $\lambda = \pm 1$ است.

۳- فرض کنید $\underline{v} \in R^n, \underline{v} \neq 0$. ابر صفحه نرمال نسبت به $\underline{v}$ برابر زیرفضای $n-1$ بعدی است که به ازای تمام بردارهای $\underline{z}$ عبارت $\underline{v}^T \underline{z} = 0$ برقرار است. یک بازتاب کننده (reflector) برابر با یک تبدیل خطی R است به این صورت که:

$$R\underline{x} = -\underline{x} \quad if \ \ \underline{x} = \alpha \underline{v}, \ \ \alpha \neq 0$$

$$R\underline{x} = \underline{x} \quad if \ \ \underline{v}^T \underline{x} = 0$$

بنابراین ابرصفحه به این گونه عمل می‌کند که بردارهای قرار گرفته روی این صفحه را تغییر نمی‌دهد اما بردارهای عمود بر صفحه را بازتاب (قرینه) می‌کند. با توجه به توضیحات، ثابت کنید تبدیل Householder یک بازتاب کننده (reflector) است.

٤- فرض کنید $A \in R^{m*n}$، $Rank(A) = n$ و بردار $\underline{x}$ ($\|x\| = 1$) عبارت $\|Ax\|_2$ را کمینه کرده است. ثابت کنید بردار x برابر بردار تکین راست ماتریس A متناظر با کمترین مقدارتکین است.

۵- فرض کنید $A \in R^{m*n}$ و $A = U\Sigma V^T$ است. ثابت کنید:

الف) اگر ستون‌های ماتریس A مستقل خطی باشند ($Rank(A) = n$) آن‌گاه ماتریس A^TA غیرتکین است.

ب) اگر سطرهای ماتریس A مستقل خطی باشند ($Rank(A) = m$) آن‌گاه ماتریس AA^T غیرتکین است.

ج) ماتریس شبه معکوس ($A^\dagger$) برابر است با:

$$A^\dagger = (A^TA)^{-1}A^T \qquad if\ rank(A) = n$$

$$A^\dagger = A^T(AA^T)^{-1} \qquad if\ rank(A) = m$$

راهنمایی بخش (ج): باید به عبارت $A^\dagger = V\Sigma^\dagger U^T$ برسید.

٦- نشان دهید بزرگ‌ترین مقدار تکین ماتریس مربعی A بزرگ‌تر مساوی قدرمطلق همه مقادیر ویژه آن است:

$$\sigma_1 \geq |\lambda|_{max}$$

راهنمایی: برای بردار دلخواه x حاصل $\|Ax\|_2$ را به دو روش محاسبه کنید.

٧- اگر $rank(A) = r$ باشد، روابط زیر را اثبات کنید:

الف) $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{r} \sigma_i^2}$

ب) $\sigma_{max}(A) \leq \|A\|_F \leq \sqrt{r}\sigma_{max}(A)$

٨- تعیین کنید ماتریس تبدیل Householder در کدام یک از دسته‌های (معین مثبت یا منفی، نیمه‌معین مثبت یا منفی، نامعین) قرار دارد.

٩- ماتریس **G** را به عنوان ماتریس تبدیل Givens مختلط به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta)\, e^{i\phi} \\ -\sin(\theta)\, e^{-i\phi} & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

بردار دو مولفه‌ای مختلط $\boldsymbol{x} = [u, v]^T$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم با استفاده از ماتریس **G** درایه دوم بردار $\boldsymbol{x}$ را صفر کنیم:

$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}(2) = 0$. نشان دهید برای تعیین ماتریس مختلط **G**، می‌توان از حل متوالی ۳ بار مسئله Givens بر روی ماتریس‌های حقیقی استفاده کرد.