به نام خدا

پاسخ تمرین سری اول

-۱

$$\|AB\|_F^2 = \left\| \begin{pmatrix} \widehat{a}_0^H \\ \widehat{a}_1^H \\ \vdots \\ \widehat{a}_{m-1}^H \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c|c|c} b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} \end{array} \right) \right\|_F^2 = \left\| \left(\begin{array}{c|c|c|c} \widehat{a}_0^H b_0 & \widehat{a}_0^H b_1 & \cdots & \widehat{a}_0^H b_{n-1} \\ \hline \widehat{a}_0^H b_0 & \widehat{a}_0^H b_1 & \cdots & \widehat{a}_0^H b_{n-1} \\ \hline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline \widehat{a}_{m-1}^H b_0 & \widehat{a}_{m-1}^H b_1 & \cdots & \widehat{a}_{m-1}^H b_{n-1} \end{array} \right) \right\|_F^2 = \sum_i \sum_j |\widehat{a}_i^H b_j|^2$$

$$\begin{aligned} &\le \sum_i \sum_j \|\widehat{a}_i^H\|_2^2 \|b_j\|^2 \qquad \text{(Cauchy-Schwartz)} \\ &= \left(\sum_i \|\widehat{a}_i\|_2^2\right) \left(\sum_j \|b_j\|^2\right) = \left(\sum_i \widehat{a}_i^H \widehat{a}_i\right) \left(\sum_j b_j^H b_j\right) \\ &\le \left(\sum_i \sum_j |\widehat{a}_i^H \widehat{a}_j|\right) \left(\sum_i \sum_j |b_i^H b_j|\right) = \|A\|_F^2 \|B\|_F^2. \end{aligned}$$

-۲

Proof: Let $\bar{\jmath}$ be chosen so that $\max_{0 \le j < n} \|a_j\|_1 = \|a_{\bar{\jmath}}\|_1$. Then

$$\begin{aligned} \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 &= \max_{\|x\|_1=1} \left\| \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \chi_0 \\ \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_{n-1} \end{pmatrix} \right\|_1 \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \|\chi_0 a_0 + \chi_1 a_1 + \cdots + \chi_{n-1} a_{n-1}\|_1 \\ &\le \max_{\|x\|_1=1} \left(\|\chi_0 a_0\|_1 + \|\chi_1 a_1\|_1 + \cdots + \|\chi_{n-1} a_{n-1}\|_1\right) \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \left(|\chi_0| \|a_0\|_1 + |\chi_1| \|a_1\|_1 + \cdots + |\chi_{n-1}| \|a_{n-1}\|_1\right) \\ &\le \max_{\|x\|_1=1} \left(|\chi_0| \|a_{\bar{\jmath}}\|_1 + |\chi_1| \|a_{\bar{\jmath}}\|_1 + \cdots + |\chi_{n-1}| \|a_{\bar{\jmath}}\|_1\right) \\ &= \max_{\|x\|_1=1} \left(|\chi_0| + |\chi_1| + \cdots + |\chi_{n-1}|\right) \|a_{\bar{\jmath}}\|_1 \\ &= \|a_{\bar{\jmath}}\|_1. \end{aligned}$$

Also,

$$\|a_{\bar{\jmath}}\|_1 = \|A e_{\bar{\jmath}}\|_1 \le \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1.$$

Hence

$$\|a_{\bar{\jmath}}\|_1 \le \max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \le \|a_{\bar{\jmath}}\|_1$$

which implies that

$$\max_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 = \|a_{\bar{\jmath}}\|_1 = \max_{0 \le j < n} \|a_j\|.$$

Problem 1

Suppose that A is idempotent, that is,

$$A^2 = A.$$

Taking the determinant of both sides of this equation, we find:

$$det(A^2) = det(A). \tag{1}$$

Recall that the determinant of two matrices equals the product of the two determinants (see Theorem 1). Then

$$det(A^2) = det(A \cdot A) = det(A) \cdot det(A) = (det(A))^2. \tag{2}$$

Combining equations (1) and (2), we find that

$$(det(A))^2 = det(A).$$

Hence

$$det(A) \cdot [det(A) - 1] = 0,$$

and $det(A) = 0$ or 1.

Problem 2

Suppose that A is idempotent, that is, $A^2 = A$.
To prove that the matrix $B = I - A$ is also idempotent, we must show that $B^2 = B$. Hence, we compute B^2, and we verify that B^2 is equal to B.

$$B^2 = (I - A)^2 = (I - A)(I - A) =$$

$$= \underbrace{I^2}_{=I} - \underbrace{IA}_{=A} - \underbrace{AI}_{=A} + \underbrace{A^2}_{=A} =$$

$$= I - A - A + A =$$

$$= I - A = B.$$

-۴

سوال ۴

فرض: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ $\quad \vec{x},\vec{y} \neq \vec{0}$

$B\vec{y} = \mu\vec{y}$

$$(A \otimes B)(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (A\vec{x}) \otimes (B\vec{y}) = (\lambda\vec{x}) \otimes (\mu\vec{y}) = \lambda\mu(x \otimes y)$$

بنابراین $\lambda\mu$ مقدار ویژه متناظر با بردار $(x \otimes y)$ می‌باشد

توجه: اگر یکی از دانشجویان ترکیب دیگری به عنوان بردار ویژه (برحسب $\vec{x}$ و $\vec{y}$) و مقدار ویژه (برحسب λ و μ) نوشت، در صورت منطقی بودن راه حل به جواب درست دیگری رسیده است.

Theorem 2.4 *For arbitrary $X \in M_{m,n}$, there is a unique matrix $P(m,n) \in M_{mn}$ such that*

$$P(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{ij} \otimes E_{ij}^{\top},$$

where each $E_{ij} \in M_{m,n}$ has entry 1 in position i, j and 0 everywhere else. It turns out that $P(m,n)$ is a permutation matrix (such that $P(m,n) = P(n,m)^{\top} = P(n,m)^{-1}$).

Proof: Observe that we can write $x_{ij}E_{ij}^{\top} = E_{ij}^{\top} X E_{ij}^{\top}$ Therefore,

$$X^{\top} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} E_{ij}^{\top} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} E_{ij}^{\top} X E_{ij}^{\top}.$$

Now we can write out $\mathrm{vec}(X^{\top})$:

$$\begin{aligned} \mathrm{vec}(X^{\top}) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{vec}(E_{ij}^{\top} X E_{ij}^{\top}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (E_{ij} \otimes E_{ij}^{\top}) \mathrm{vec}(X). \end{aligned}$$

Now we have to verify that $P(m,n) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (E_{ij} \otimes E_{ij}^{\top})$ is indeed a permutation matrix. Let E'_{ij} be the unit matrices of the transposed matrix space M_{nm} such that $E'_{ij} = E_{ji}^{\top}$. Observe that

$$\begin{aligned} P(n,m) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (E'_{ij} \otimes E'^{\top}_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (E_{ji}^{\top} \otimes E_{ji}) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (E_{ij} \otimes E_{ij})^{\top} = P(m,n)^{\top}. \end{aligned}$$

To see that $P(m,n) = P(n,m)^{-1}$, observe that $X = (X^{\top})^{\top}$, so $\mathrm{vec}(X) = P(n,m)\mathrm{vec}(X^{\top}) = P(n,m)P(m,n)\mathrm{vec}(X) \implies P(m,n) = P(n,m)^{-1}$. This completes the proof.

۶-

سوال ④ :

فرض $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$q,p \in [1,\infty]$

$\vec{u},\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

جواب: $\begin{cases} p=\infty,\ q=1 & ① \\ p=1,\ q=\infty & ② \\ p=2,\ q=2 & ③ \end{cases}$

باید برای 3 حالت بالا ثابت کنیم:

① حالت: $|u^Tv| \leq \|u\|_\infty \|v\|_1$

$$|u_1v_1+u_2v_2+\cdots u_nv_n| \leq |u_1v_1|+|u_2v_2|+\cdots+|u_nv_n|$$
$$\leq |\max_i(u_i)v_1|+\cdots+|\max_i(u_i)v_n|$$
$$=\|u_\infty\|\|v_1\|$$

اثبات حالت ② مانند حالت ① است

③ حالت: $|u^Tv| \leq \|u\|_2\|v_2\| \rightarrow |u^Tv|^2 \leq \|u\|_2^2\|v\|_2^2$

نامساوی بالا را نامساوی Cauchy-Schwarz می‌نامند که اثبات‌های متفاوتی دارد. هر کدام از اثبات‌های مربوط برای نامساوی مورد قبول می‌باشد.

$u \rightarrow a$

$v \rightarrow b$

حکم: $\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n (a_ib_j-a_jb_i)^2 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{j=1}^n a_j^2$$
$$-2\sum_{i=1}^n a_ib_i \sum_{j=1}^n b_ja_j \Leftrightarrow 2\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_i^2\right)-2\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \quad ★$$

$\Rightarrow$ (★) عبارت $\geq 0 \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$

سؤال ⑦ : به ازای بردار x_i فرض کنیم :　　　$Ax_i = \lambda_i x_i$

الف)

x_i : بردار ویژه

λ_i : مقدار ویژه

$A \rightarrow$ مثبت معین (متقارن) $\rightarrow Ax_i = \lambda_i x_i \rightarrow x_i^T A x_i = \lambda_i$

$$x_i^T A x_i > 0 \longrightarrow \lambda_i > 0$$

ب)

$$\begin{cases} z^T A z > 0 \\ y^T B y > 0 \end{cases}$$

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & & & \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow x^T (A \otimes B) x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i (a_{ij} B) x_j$$

فرض کنیم : $z = (x_i)_{i=1}^{m}$ ， $y = (x_j)_{j=1}^{n}$

چون B ماتریس positive definite می‌باشد پس $x_i(a_{ij}B)x_j$ نیز مثبت است همچنین چون $x^T(A \otimes B)x$ از مجموع چند مقدار مثبت به دست آمده پس مثبت می‌باشد در نتیجه $A \otimes B$ ماتریس مثبت معین خواهد بود.

-۸

۸ - الف)

$$\det(A\otimes B) = \det[(A\otimes I_m)(I_n\otimes B)] = \det(A\otimes I_m)\det(I_n\otimes B)$$

$$= \det(P(I_m\otimes A)P^T)\det(I_n\otimes B) = (\det(P))^2\det(A)^m\det(B)^n$$

$$= \det(A)^m\det(B)^n$$

P ماتریس جایگشت است

ب) از آنجا که ماتریس P از جابجایی سطرهای ماتریس I بدست می‌آید دترمینان آن ± 1 است.

$$\det(P\otimes P) = \det(P)^n\det(P)^n = (\det(P))^{2n} = (\pm 1)^{2n} = 1$$

ج)

$$\mathrm{diag}(a_{jj}B) = (a_{jj}b_{11}, a_{jj}b_{22}, \dots, a_{jj}b_{mm})$$

$$\Rightarrow tr(A\otimes B) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} a_{jj}b_{kk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj}\,trace(B) = trace(A)\,trace(B)$$

د)

$$tr(A^T H) = \sum_{i=1}^{n}(A^T H)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A^T)_{ij}H_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ji}H_{ji}$$

$$= (vec(A))^T vec(H)$$

۹- الف)

$$A^{k_1}=0,\ B^{k_2}=0 \Rightarrow A^{\max(k_1,k_2)}=0,\ B^{\max(k_1,k_2)}=0$$

$$\Rightarrow (A\otimes B)^{\max(k_1,k_2)} = A^{\max(k_1,k_2)}\otimes B^{\max(k_1,k_2)} = 0\otimes 0 = 0$$

ب)

$$A^{k_1}=A \Rightarrow (A^{k_1-1})A = (A^{k_1-1})(A^{k_1-1})A = (A^{k_1-1})^m A = A$$

$$\Rightarrow A^{m(k_1-1)+1} = A,\ m\in \mathbb{N}$$

$$B^{k_2}=B \Rightarrow B^{l(k_2-1)+1} = B,\ l\in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow A^{(k_2-1)(k_1-1)+1} = A,\ B^{(k_1-1)(k_2-1)+1} = B$$

$$\Rightarrow (A\otimes B)^{(k_2-1)(k_1-1)+1} = A^{(k_2-1)(k_1-1)+1}\otimes B^{(k_2-1)(k_1-1)+1}$$

$$= A\otimes B$$

a. $(A\odot B)^T(A\odot B) = A^TA .* B^TB$

$$A\odot B = \begin{bmatrix} a_{11}\underline{b}_1 & \cdots & a_{1n}\underline{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\underline{b}_1 & \cdots & a_{mn}\underline{b}_n \end{bmatrix}_{mp\times n} \qquad \underset{mn\times p}{C} = (A\odot B)^T(A\odot B) = \begin{bmatrix} a_{11}\underline{b}_1^T & \cdots & a_{m1}\underline{b}_1^T \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n}\underline{b}_n^T & \cdots & a_{mn}\underline{b}_n^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}\underline{b}_1 & \cdots & a_{1n}\underline{b}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\underline{b}_1 & \cdots & a_{mn}\underline{b}_n \end{bmatrix}$$

با ضرب کردن سطر r ام و ستون s ام ماتریس C خواهیم داشت:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & \cdots & a_{11}b_{p1} & \cdots & a_{m1}b_{11} & \cdots & a_{m1}b_{p1} \\ a_{12}b_{12} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{12}b_{p2} & \cdots & a_{m2}b_{12} & \cdots & a_{m2}b_{p2} \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ a_{1n}b_{1n} & a_{1n}b_{2n} & \cdots & a_{1n}b_{pn} & \cdots & a_{mn}b_{1n} & \cdots & a_{mn}b_{pn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} & \cdots & a_{1n}b_{1n} \\ a_{11}b_{21} & a_{12}b_{22} & \cdots & a_{1n}b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11}b_{p1} & a_{12}b_{p2} & \cdots & a_{1n}b_{pn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{11} & a_{m2}b_{12} & & a_{mn}b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}b_{p1} & a_{m2}b_{p2} & & a_{mn}b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$C_{rs} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} a_{ir}\, a_{is}\, b_{jr}\, b_{js} \quad ① = (A\odot B)_{rs}$$

حال این رابطه را برای $A^TA .* B^TB$ بدست می آوریم

$$A^TA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{i1}^2 & \sum_{i=1}^{m} a_{i1}a_{i2} & \cdots \\ \vdots & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$(A^TA)_{rs} = \sum_{i=1}^{m} a_{ir}\, a_{is}$$

به همین ترتیب برای سطر r ام و ستون s ام ماتریس B^TB نیز می توان نوشت:

$$(B^TB)_{rs} = \sum_{j=1}^{p} b_{jr}\, b_{js}$$

$$(A^TA .* B^TB)_{rs} = (A^TA)_{rs} \times (B^TB)_{rs} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p} b_{jr}\, b_{js}\, a_{ir}\, a_{is} \quad ②$$

با مقایسه روابط ① و ② می بینیم که با یکدیگر برابر هستند یعنی:

$$(A\odot B)^T(A\odot B) = A^TA .* B^TB \checkmark$$

b. $(A\odot B)^{+} = \big(\underbrace{\underset{n\times n}{(A^TA)} .* \underset{n\times n}{(B^TB)}}_{n\times n}\big)^{-1}\underbrace{(A\odot B)^T}_{n\times mp}$

میدانیم Pseudo inverse چپ left ماتریس حقیقی X برابر است با:

$$X^{+} = (X^TX)^{-1}X^T \quad ①$$

از روی a $\longrightarrow$ $A^TA .* B^TB = (A\odot B)^T A\odot B$

با جایگذاری در رابطه فوق

$$\big((A^TA) .* (B^TB)\big)^{-1}(A\odot B)^T = \big((A\odot B)^T(A\odot B)\big)^{-1}(A\odot B)^T$$

اگر در رابطه ① به جای X مقدار $A\odot B$ قرار دهیم داریم:

$$\big((A\odot B)^T(A\odot B)\big)^{-1}(A\odot B)^T = (A\odot B)^{+} \checkmark$$

که این همان چیزی است که می خواستیم اثبات کنیم.

Block diagonal matrices [edit]

A **block diagonal matrix** is a block matrix that is a square matrix such that the main-diagonal blocks are square matrices and all off-diagonal blocks are zero matrices. That is, a block diagonal matrix **A** has the form

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

where $\mathbf{A}_k$ is a square matrix for all $k = 1, \ldots, n$. In other words, matrix **A** is the direct sum of $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$. It can also be indicated as $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_n$ or $\operatorname{diag}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_n)$ (the latter being the same formalism used for a diagonal matrix). Any square matrix can trivially be considered a block diagonal matrix with only one block.

For the determinant and trace, the following properties hold

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \det \mathbf{A}_n,$$
$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = \operatorname{tr} \mathbf{A}_1 + \cdots + \operatorname{tr} \mathbf{A}_n.$$

A block diagonal matrix is invertible if and only if each of its main-diagonal blocks are invertible, and in this case its inverse is another block diagonal matrix given by

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{A}_n^{-1} \end{bmatrix}.$$

The eigenvalues and eigenvectors of A are simply those of A_1 and A_2 and ... and A_n combined.

$A = \mathrm{diag}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ A_k مربعی ، $k=1..n$

الف)

فرض : $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, $A_k \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$, $\sum_{k=1}^{n} N_k = N$

$$* \ tr(A) = \sum_{i=1}^{N} a_{ii} = \sum_{i=1}^{N_1} a_{ii} + \sum_{i=N_1+1}^{N_1+N_2} a_{ii} + \dots + \sum_{i=N_1+\dots+N_{n-1}+1}^{N} a_{ii} = tr(A_1) + \dots + tr(A_n)$$

$$* \ \det(A) = \det(A_1) \dots \det(A_n)$$

اثبات با استفاده از استقراء :

اگر $\tilde{A}$ یک ماتریس بلوکی قطری باشد و A را به صورت زیر از روی آن بسازیم :

$A = \mathrm{diag}(a, \tilde{A})$ $a \in \mathbb{R}$ اسکالر

$$A = \begin{bmatrix} a & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \tilde{A} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = a \times \det(\tilde{A})$$

در تعریف بسط لاپلاس برای قاعده det

اگر A را به صورت زیر بسازیم :

$A = \mathrm{diag}(B, \tilde{A})$

فرض : اگر $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ مربعی $\longrightarrow \det(A) = \det(B) . \det(\tilde{A})$

$$B \in \mathbb{R}^{m+1 \times m+1} \text{ مربعی} \rightarrow A = \begin{bmatrix} B & \underline{0}^T \\ \underline{0} & \tilde{A} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & \tilde{A} \end{array}\right]$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{1j} . \det(A_{1j}) = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} b_{1j} . \det(B_{1j}) . \det(\tilde{A}) = \left(\sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j+1} b_{1j} \det(B_{1j})\right) . \det(\tilde{A})$$

با تعریف بسط لاپلاس

طبق فرض استقرا

$$= \det(B) . \det(\tilde{A})$$

ب)

اگر A_k ها عکس‌پذیر باشند $\rightarrow$
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{-1} & & 0 \\ & A_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \ A_n^{-1} \end{bmatrix} \qquad A^{-1}A = \begin{bmatrix} A_1^{-1}A_1 & & 0 \\ & A_2^{-1}A_2 & \\ 0 & & \ddots \ A_n^{-1}A_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{N_1} & & 0 \\ & I_{N_2} & \\ 0 & & \ddots \ I_{N_n} \end{bmatrix}$$

ضرب دو ماتریس بلوکی $= I$

اگر A معکوس‌پذیر باشد $\rightarrow A^{-1}A = I$
$$A^{-1} \triangleq \begin{bmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & \cdots & B_{nn} \end{bmatrix} \qquad B_{ij} \in \mathbb{R}^{N_i \times N_j}$$

$$\rightarrow B_{ii} A_{ii} = I \ , i=1\dots n \qquad \longrightarrow B_{ii} = A_{ii}^{-1} \quad i=1,\dots,n$$
$$B_{ij} A_{jk} = 0 \ , i,j,k = 1\dots n \qquad B_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

ابتدا نشان می‌دهیم $\mathrm{null}(A) = \mathrm{ran}(A^T)^{\perp}$:

طبق تعریف $\mathrm{null}(A)$ برابر زیرفضای حاصل از تمام بردارهایی است که $A\underline{x} = \underline{0}$ است. یعنی مجموعه تمام بردارهایی که بر m سطر A عمود هستند. این مجموعه هم از زیرفضایی است که بر span تمام سطرهای A عمود باشد. span سطرهای A برابر $\mathrm{ran}(A^T)$ است. پس این مجموعه هم از مکمل متعامد $\mathrm{ran}(A^T)$ است. پس $\mathrm{null}(A) = \mathrm{ran}(A^T)^{\perp}$

قسمت قبل

اثبات صورت سؤال :

$$\dim(\mathrm{null}(A)) + \mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{ran}(A^T)^{\perp}) + \dim(\mathrm{ran}(A)) = n - \dim(\mathrm{ran}(A^T)) + \dim(\mathrm{ran}(A))$$

$$= n - \dim(\mathrm{ran}(A)) + \dim(\mathrm{ran}(A)) = n \quad \square$$

تساوی رتبه سطری و ستونی: $\dim(\mathrm{ran}(A^T)) = \dim(\mathrm{ran}(A))$