

Τα Μαθηματικά της Σφαίρας του Bloch

Νικόλαος Αυγούστης

18 Ιανουαρίου 2020

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	2
1.1	Σκοπός	2
1.2	Τα Qubit	2
1.3	Η σφαίρα του Bloch	2
2	Χώροι Hilbert	3
2.1	Παράδειγμα	4
3	Μιγαδικοί Αριθμοί	4
3.1	Το μιγαδικό επίπεδο και το μήκος ενός μιγαδικού	5
3.2	Ο συζυγής ενός μιγαδικού	5
3.3	η Τριγωνομετρική και Εκθετική μορφή ενός μιγαδικού	5
4	Σφαιρικές συντεταγμένες	6
4.1	Ορισμός των σφαιρικών συντεταγμένων και σχέση με τις καρ- τεσιανές συντεταγμένες	6
4.2	Παραγωγή της Σφαιρικής αναπαράστασης των Qubit	6
4.3	Ιδιότητες της σφαίρας	8
4.4	Ορθογωνικότητα των αντίθετων σημείων.	8
4.5	Στροφές στη σφαίρα	8
4.6	Ένα παράδειγμα στροφής	9
5	Μετρικοί χώροι και Πλήρεις Μετρικοί χώροι	9
5.1	Ορισμός της μετρικής και του μετρικού χώρου	9
5.2	Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους	10
5.3	Βασικές ακολουθίες	10
5.4	Ορισμός πλήρη μετρικού χώρου	11
5.5	Παραδείγματα	11

6	Ισομορφισμός	11
6.1	Ορισμός	11
6.2	Παράδειγμα	12
7	Μιγαδική προβολική γραμμή	12
7.1	Ορισμός	12
7.2	Η Στερεογραφική Προβολή	12
8	Qubit στην σφαίρα	14
8.1	Μια αναφορά στο Qiskit	15
8.2	Αναπαράσταση qubit στη σφαίρα	15
8.3	Χρήση απλών πυλών στα qubit	15
8.4	Πύλη Hadamard	16
8.5	Η πύλη μετατόπισης φάσης R_θ	17

1 Εισαγωγή

1.1 Σκοπός

Ο σκοπός της εργασίας είναι να δοθούν οι βασικοί μαθηματικοί ορισμοί των δομικών στοιχείων της σφαίρας του Bloch και μερικά παραδείγματα αυτόν μαζί με μερικά παραδείγματα της χρήσης της σφαίρας στη αναπαράσταση των καταστάσεων των qubit.

1.2 Τα Qubit

Στον κβαντικό υπολογισμό, το κβαντικό bit , ή συνηθέστερα qubit , είναι η στοιχειώδης μονάδα κβαντικής πληροφορίας.

Η διαφορά από το «κλασσικό» bit είναι ότι ενώ το bit μπορεί να πάρει μόνο μια από δύο δυνατές τιμές, το qubit είναι μια υπέρθεση (άθροισμα) και των δύο καταστάσεων ταυτόχρονα. Όταν μετρηθεί, το qubit «προβάλλεται» σε μία από τις δυνατές καταστάσεις: $|0\rangle, |1\rangle$ με μια ορισμένη πιθανότητα να περιέλθει σε μία από αυτές. Το άθροισμα των πιθανοτήτων είναι, βέβαια, ίσο με τη μονάδα. Ο συνήθης τρόπος απεικόνισης των qubit είναι με τη χρήση της σφαίρας του Bloch.

1.3 Η σφαίρα του Bloch

Η σφαίρα του Bloch αποτελεί μια γεωμετρική απεικόνιση των καθαρών καταστάσεων ενός κβαντικού συστήματος δυο καταστάσεων και πήρε το όνομα της

από τον φυσικό Felix Bloch. Η κβαντική μηχανική είναι μαθηματικά διατυπωμένη σε έναν **χώρο Hilbert**. Ο χώρος των καθαρών καταστάσεων ενός κβαντικού συστήματος δίνεται από τις ακτίνες στον χώρο Hilbert. Ο χώρος των ακτίνων σε οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο είναι ένας προβαλλόμενος χώρος, και συγκεκριμένα, ο χώρος των ακτίνων σε ένα δισδιάστατο χώρο Hilbert είναι η **μιγαδική προβολική γραμμή**, η οποία είναι **ισομορφική** προς τη σφαίρα.

Με άλλα λόγια κάθε κατάσταση η οποία αποτελεί συνδυασμό των δυο βασικών qubit $|0\rangle, |1\rangle$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σημείο στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας η οποία έχει στον Βόρειο πόλο την βασική κατάσταση $|0\rangle$ και στον Νότιο πόλο την βασική κατάσταση $|1\rangle$.

Γιατί όμως σφαίρα;

Ας ξεκινήσουμε βλέποντας τα μαθηματικά τα οποία οδηγούν στη χρήση της σφαίρας ως γεωμετρική αναπαράσταση των qubit .

2 Χώροι Hilbert

Ένας χώρος Hilbert (H) είναι ένας πραγματικός ή μιγαδικός διανυσματικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο ο οποίος είναι και **πλήρης μετρικός χώρος** ως προς τη συνάρτηση απόστασης που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο. Το εσωτερικό γινόμενο, στην στην περίπτωση των μιγαδικών, ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

1. Το εσωτερικό γινόμενο ενός ζεύγους στοιχείων είναι ίσο με το μιγαδικό συζυγή του εσωτερικού γινομένου των ανταλλαγμένων στοιχείων.

$$\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$$
2. Το εσωτερικό γινόμενο είναι γραμμικό ως προς το πρώτο στοιχείο του για όλους τους μιγαδικούς αριθμούς a, b .

$$\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = a\langle x_1, y \rangle + b\langle x_2, y \rangle$$
3. Το εσωτερικό γινόμενο ενός στοιχείου με τον εαυτό του είναι θετικά ορισμένο
 - $\langle x, x \rangle > 0, \quad x \neq 0$
 - $\langle x, x \rangle = 0, \quad x = 0$

αντίστοιχα ορίζεται και στην περίπτωση των πραγματικών.

Η νόρμα ή μέτρο ενός διανύσματος του χώρου ορίζεται ως:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

και η συνάρτηση απόστασης μεταξύ δυο διανυσμάτων ορίζεται ως:

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

2.1 Παράδειγμα

Ένα απλό παράδειγμα ενός πραγματικού χώρου Hilbert είναι ο χώρος \mathbb{R}^n με εσωτερικό γινόμενο το $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ο οποίος ικανοποιεί όλες τις παραπάνω ιδιότητες:

- Είναι συμμετρικός ως προς x, y αφού $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = \langle y, x \rangle$.
- Είναι γραμμικός ως προς το πρώτο στοιχείο του αφού $\langle ax_1 + bx_2, y \rangle = \sum_{i=1}^n (ax_{1i} + bx_{2i})y_i = \sum_{i=1}^n (ax_{1i}y_i + bx_{2i}y_i) = \sum_{i=1}^n ax_{1i}y_i + \sum_{i=1}^n bx_{2i}y_i = a \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i + b \sum_{i=1}^n x_{2i}y_i = a\langle x_1, y \rangle + b\langle x_2, y \rangle$.
- Και είναι θετικά ορισμένος αφού $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i x_i = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Rightarrow \forall x_i = 0$.

3 Μιγαδικοί Αριθμοί

Ας υποθέσουμε ένα σύστημα που αποτελείτε από δυο βασικές καταστάσεις: $|0\rangle, |1\rangle$ τότε κάθε πιθανή κατάσταση του συστήματος θα είναι ένας συνδυασμός των δυο αυτών βασικών καταστάσεων. $|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ όπου τα a, b είναι μιγαδικοί αριθμοί οπότε είναι φυσιολογικό πριν μιλήσουμε για την σφαίρα να αναφερθούμε σε μερικά βασικά δομικά στοιχεία της. Ένας μιγαδικός αριθμός z , αποτελείτε από δυο μέρη το πραγματικό και το φανταστικό μέρος και γράφεται ως $z = a + bi$.

Μερικές από τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών που μας ενδιαφέρουν είναι:

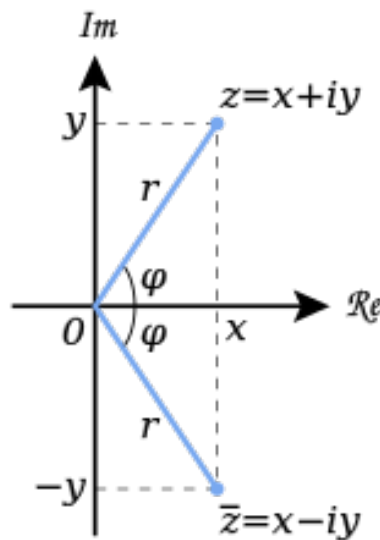
- Το μιγαδικό επίπεδο.
- Ο συζυγής ενός μιγαδικού.
- Το μήκος του.
- Η τριγωνομετρική μορφή.
- Η εκθετική μορφή.

3.1 Το μιγαδικό επίπεδο και το μήκος ενός μιγαδικού

[3] Έστω ο μιγαδικός αριθμός $z = a + bi$ αυτός μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα σημείο (a, b) ενός δισδιάστατου καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων. Κάθε τέτοιο σημείο ονομάζεται εικόνα του μιγαδικού αριθμού z . Άρα κάθε μιγαδικός αυτό το επίπεδο μπορεί να αναπαρασταθεί και ως ένα διάνυσμα με αρχή, την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο (a, b) , έτσι το μήκος του μιγαδικού αριθμού θα είναι $\|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

3.2 Ο συζυγής ενός μιγαδικού

[3] Ως συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + bi$ ορίζεται ο αριθμός $\bar{z} = a - bi$ ο οποίος είναι ουσιαστικά ο κατοπτρισμός του z ως προς τον άξονα των πραγματικών. Η σχέση η οποία μας ενδιαφέρει πιο πολύ μεταξύ του μιγαδικού αριθμού και του συζυγής του είναι η εξής: $\|z\|^2 = z\bar{z}$.



Σχήμα 1: Μιγαδικός αριθμός και ο Συζυγής του

3.3 η Τριγωνομετρική και Εκθετική μορφή ενός μιγαδικού

[3] Η τριγωνομετρική ή πολική μορφή ενός μιγαδικού είναι ένα ζευγάρι (r, ϕ) όπου $r = \|z\|$ και ϕ η γωνιά του με τον άξονα των πραγματικών. Άρα ο μιγαδικός γράφεται ως

$z = a + ib = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, όπου $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \|z\|$.

Η εκθετική μορφή του μιγαδικού προκύπτει από την χρήση της εξίσωσης του Euler στην παραπάνω τριγωνομετρική μορφή, δίνοντας μας την παρακάτω μορφή: $z = \|z\|e^{i\phi} = re^{i\phi}$

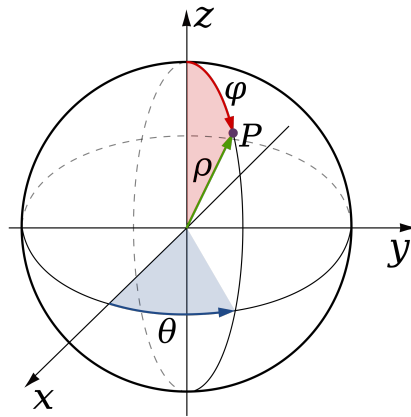
4 Σφαιρικές συντεταγμένες

4.1 Ορισμός των σφαιρικών συντεταγμένων και σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες

[6] Οι σφαιρικές συντεταγμένες αποτελούν ένα σύστημα αναφοράς στον τρισδιάστατο χώρο όπου η θέση ενός σημείου προσδιορίζεται από τρεις αριθμούς: την ακτινική απόσταση του σημείου από ένα σταθερό σημείο αναφοράς (το κέντρο των αξόνων O), την πολική γωνία που μετράται από τη σταθερή κατεύθυνση του ζενίθ (άξονας z), και το αζιμούθιο η γωνία της προβολής του σημείου στο επίπεδο, από κάποια σταθερή κατεύθυνση στο επίπεδο (άξονας x).

Οι καρτεσιανές συντεταγμένες προκύπτουν από τις σφαιρικές με ακτίνα ρ , πολική γωνία θ , αζιμούθιο ϕ με τη σχέση:

$(x, y, z) = (\rho\sin\theta\cos\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\theta)$ με πεδία ορισμού $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi]$



Σχήμα 2: Απεικόνιση σφαιρικών συντεταγμένων.

4.2 Παραγωγή της Σφαιρικής αναπαράστασης των Qubit

Έχουμε ορίσει ότι κάθε κατάσταση $|\Psi\rangle$ μπορεί να γράφει ως συνδυασμός των δυο βασικών καταστάσεων με τον εξής τρόπο

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$$

όπου α, β δυο μιγαδικοί αριθμοί με την προϋπόθεση ότι $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

οπότε με τη σειρά του το $\langle\Psi|\Psi\rangle$

$\langle\Psi|\Psi\rangle = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ όπου $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ οι συζυγείς μιγαδικοί των α, β αντίστοιχα. Άρα μπορώ να υποθέσω ότι το $\langle\Psi|\Psi\rangle$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός με μέτρο 1. Εστω $z = x + iy$ αυτός ο μιγαδικός, τότε θα έχω ότι $|z|^2 = 1 \Rightarrow z\bar{z} = 1 \Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Το προηγούμενο είναι η εξίσωση ενός κύκλου με κέντρο το $(0, 0)$ και ακτίνα 1. Με τον μετασχηματισμό των καρτεσιανών συντεταγμένων σε πολικές: $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ όπου r η απόσταση του σημείου από το $(0, 0)$ και θ η γωνιά που σχηματίζει με τους άξονες μπορώ να γράψω τον μιγαδικό

$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ και χρησιμοποιώντας τη ταυτότητα του Euler $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ μπορώ να γράψω πλέον τον μιγαδικό αριθμό $z = re^{i\theta}$.

Επιστρέφοντας τώρα στην αναπαράσταση μιας κατάστασης $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, με α, β μιγαδικούς μπορώ να την γράψω με τον εξής τρόπο:

$$|\Psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha}|0\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta}|1\rangle.$$

Όμως οι μόνες μετρήσιμες ποσότητες είναι οι πιθανότητες $|\alpha|^2, |\beta|^2$ οπότε πολλαπλασιάζοντας την κατάσταση με μια ποσότητα δεν αλλάζει το αποτέλεσμα [5]: $|e^{i\gamma}\alpha|^2 = (e^{-i\gamma}\bar{\alpha})(e^{i\gamma}\alpha) = \bar{\alpha}\alpha = |\alpha|^2$, το ίδιο θα ισχύει και για την άλλη κατάσταση οπότε είμαστε ελεύθερη να πολλαπλασιάσουμε την $|\Psi\rangle$ με $e^{-i\phi_\alpha}$ οπότε τελικά έχω

$|\Psi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i(\phi_\beta - \phi_\alpha)}|1\rangle = r_\alpha|0\rangle + r_\beta e^{i\phi}|1\rangle$ με $\phi = \phi_\beta - \phi_\alpha$. Γυρίζοντας σε καρτεσιανές τον συντελεστή της κατάστασης $|1\rangle$ έχω τελικά

$|\Psi'\rangle = r_\alpha|0\rangle + (x + yi)|1\rangle$ και χωρίς να ξεχνάω ότι οι συντελεστές αποτελούν πιθανότητες οπότε πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη $|r_\alpha|^2 + |x + iy|^2 = 1 \Rightarrow r_\alpha^2 + (x + iy)(x - iy) = 1 \Rightarrow r_\alpha^2 + x^2 + y^2 = 1$ Το οποίο τελικά είναι η εξίσωση της μοναδιαίας σφαίρας.

Οι καρτεσιανές και σφαιρικές συντεταγμένες σχετίζονται με την σχέση

$(x, y, z) = (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ οπότε αφού έχουμε ακτίνα 1 και μετονομάζοντας το r_α σε z έχω τελικά για την κατάσταση

$$|\Psi'\rangle = z|0\rangle + (x + iy)|1\rangle = \cos\theta|0\rangle + \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi)|1\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle.$$

Οπότε τελικά μπορούμε να απεικονίσουμε κάθε κατάσταση στην επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας με τον προηγούμενο τρόπο: $|\Psi\rangle = \cos\theta|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta|1\rangle$.

Ακόμα όμως δεν φτάσαμε στη σφαίρα του Bloch πρέπει να αναφέρουμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες μισών γωνιών.

$$\text{Έστω } |\Psi\rangle = \cos\theta'|0\rangle + e^{i\phi}\sin\theta'|1\rangle.$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta' = 0 \Rightarrow |\Psi\rangle = |0\rangle$ και για $\theta' = \pi/2 \Rightarrow |\Psi\rangle = e^{i\phi}|1\rangle$ το οποίο υπονοεί ότι οι γωνίες μεταξύ 0 και $\frac{\pi}{2}$ μας αρκούν για να παρουσιάσουμε όλα τα σημεία στη σφαίρα.

Ας υποθέσουμε μια κατάσταση $|\Psi'\rangle$ η οποία αντιστοιχεί στο αντίθετο σημείο

ίο στη σφαίρα το οποίο έχει πολικές συντεταγμένες $(1, \pi - \theta', \phi + \pi)$ τότε η κατάσταση θα είναι η εξής $|\Psi'\rangle = \cos(\pi - \theta')|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}\sin(\pi - \theta') = -\cos\theta'|0\rangle + e^{i\phi}e^{i\pi}\sin\theta'|1\rangle = \cos\theta'|0\rangle - e^{i\phi}\sin\theta'|1\rangle \Rightarrow |\Psi'\rangle = -|\Psi\rangle$ οπότε αρκεί να ασχοληθούμε με το πάνω ημισφαίριο $0 < \theta' < \frac{\pi}{2}$ καθώς τα αντίθετα σημεία στο κάτω ημισφαίριο διαφέρουν κατά έναν παράγοντα -1 όποτε είναι ισοδύναμα στην σφαίρα. Οπότε μπορούμε να αντιστοιχίσουμε σημεία στο πάνω ημισφαίριο σε σημεία στη σφαίρα θέτοντας $\theta = 2\theta' \Rightarrow \theta' = \frac{\theta}{2}$ οπότε έχουμε τελικά $|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$, όπου $0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$ είναι οι συντεταγμένες στην σφαίρα του Bloch.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η χρήση σφαίρας για την αναπαράσταση της υπέρθεσης των qubit παράγεται φυσικά μέσα από τις προϋπόθεσης του φαινομένου.

4.3 Ιδιότητες της σφαίρας

Δυο βασικές ιδιότητες της σφαίρας είναι

- Η ορθογωνικότητα των αντίθετων σημείων.
- Οι στροφές πάνω στη σφαίρα.

4.4 Ορθογωνικότητα των αντίθετων σημείων.

Ας υποθέσουμε μια κατάσταση $|\Psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ και $|X\rangle = \cos(\frac{\pi-\theta}{2})|0\rangle + e^{i(\phi+\pi)}\sin(\frac{\pi-\theta}{2})|1\rangle = \cos(\frac{\pi-\theta}{2})|0\rangle - e^{i\phi}\sin(\frac{\pi-\theta}{2})|1\rangle$ το αντίστοιχο αντίθετο σημείο.

Οπότε $\langle x|\psi\rangle = \cos(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\pi-\theta}{2}) - \sin(\frac{\theta}{2})\sin(\frac{\pi-\theta}{2})$.

Γνωρίζουμε όμως ότι $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ οπότε τελικά έχω $\langle x|\psi\rangle = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ άρα τελικά τα αντίθετα σημεία στη σφαίρα παριστούν κάθετες καταστάσεις των qubit.

4.5 Στροφές στη σφαίρα

Οι στροφές των qubit πάνω στη σφαίρα γίνονται με τη χρήση των πινάκων του Pauli οι οποίοι όταν ενεργήσουν σε μια κατάσταση την περιστρέφουν γύρω από έναν από τους άξονες.

Οι πίνακες αυτοί συμβολίζονται ανάλογα γύρω από ποιον άξονα περιστρέφουν ως

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ όποτε ανάλογα τη γωνιά και τον

άξονα που θέλω να περιστρέψω την κατάσταση μου χρησιμοποιώ έναν από του παρακάτω πίνακες

$$R_x(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X}, R_y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Y}, R_z(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Z}.$$

Πιο αναλυτικά με τη μορφή πινάκων οι παραπάνω πίνακες είναι οι εξής

$$R_x(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}X} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}X = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Y} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Y = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = e^{-i\frac{\theta}{2}Z} = \cos\frac{\theta}{2}I - i\sin\frac{\theta}{2}Z = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

4.6 Ένα παράδειγμα στροφής

Ας υποθέσουμε το $R_x(\pi) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -i\sin\frac{\pi}{2} \\ -i\sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = -iX$ Από αυτό μπορούμε να δούμε ότι ο πίνακας X είναι ισοδύναμος με στροφή 180 μοιρών ως προς τον άξονα X .

5 Μετρικοί χώροι και Πλήρεις Μετρικοί χώροι

Από τον ορισμό της σφαίρας του Bloch είδαμε ότι αυτή είναι ορισμένη σε ένα χώρο Hilbert ο οποίος είναι πλήρης μετρικός χώρος, το οποίο σημαίνει ότι όλα τα σημεία του χώρου ανήκουν σε αυτόν. Παρακάτω θα αναφερθούν μερικά βασικά στοιχεία για αυτούς τους χώρους.

5.1 Ορισμός της μετρικής και του μετρικού χώρου

Ας ξεκινήσουμε ορίζοντας τι είναι μια μετρική και ένας μετρικός χώρος.

Η έννοια της μετρικής είναι μια γενίκευση της γνωστής απόστασης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} σε ένα τυχαίο σύνολο E .

[1] Αν υποθέσουμε ένα μη κενό σύνολο E και $\rho: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, αυτή θα ονομάζεται μετρική στο E αν για τυχαία στοιχεία $x, y, z \in E$ ικανοποιούνται οι επόμενες ιδιότητες:

1. $\rho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$

2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

$$3. \rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

Τα παραπάνω με τη σειρά όπου ορίστηκαν μας λένε πρώτον ότι σε αυτό το σύνολο αν δυο στοιχεία απέχουν απόσταση 0 αυτά συμπίπτουν, δεύτερον ότι η απόσταση του x από το y είναι ίδια με την απόσταση του y από το x και τέλος ότι η απόσταση του x από το y είναι μικρότερη ή ίση από το άθροισμα των αποστάσεων των x, z και z, y .

Ένας μετρικός χώρος λοιπόν δεν είναι τίποτα παραπάνω από ένα σύνολο E , με μια συνάρτηση απόστασης ρ και συμβολίζεται (E, ρ) .

5.2 Ακολουθίες σε μετρικούς χώρους

Μια συλλογή $a_n, n \in \mathbb{N}$, στοιχείων του μετρικού χώρου E , με σύνολο δεικτών ένα απέραντο και κάτω φραγμένο υποσύνολο N του συνόλου των ακεραίων αριθμών, ονομάζεται ακολουθία στον μετρικό χώρο E και συνήθως συμβολίζεται $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

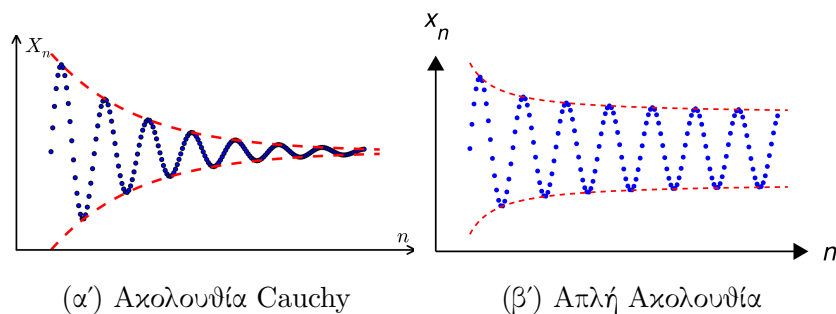
Θα λέμε ότι η ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχει όριο το στοιχείο ℓ ή ότι συγκλίνει στο ℓ και θα συμβολίζουμε $a_n \rightarrow \ell$ αν η ακολουθία $(\rho(a_n, \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μηδενική.

5.3 Βασικές ακολουθίες

[2] Μια ακολουθία $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ σε ένα μετρικό χώρο (E, ρ) λέγεται βασική ακολουθία ή ακολουθία του Cauchy αν:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall \mu, \lambda \in N) \mu > n \wedge \lambda > n \Rightarrow \rho(a_\mu, a_\lambda) < \epsilon$$

Με απλά λογία μια ακολουθία είναι βασική όταν για οσοδήποτε μικρο θετικό αριθμό ϵ , υπάρχει ένα n για το οποίο για όλους τους δείκτες μ, λ μεγαλύτερους από το n , η απόσταση των στοιχείων των ακολουθιών a_μ, a_λ τείνει στο μηδέν.



Σχήμα 3: Οπτικά η διαφορά μια απλής ακολουθίας και μιας ακολουθίας Cauchy

5.4 Ορισμός πλήρη μετρικού χώρου

Ένας μετρικός χώρος (E, ρ) λέγεται πλήρης μετρικός χώρος αν κάθε **βασική ακολουθία** του E είναι **συγκλίνουσα** στον E .

Δηλαδή ένας χώρος είναι πλήρης αν δεν υπάρχουν στοιχεία του που να λείπουν από αυτόν ή κάθε στοιχείο του να είναι όριο μιας βασικής ακολουθίας του.

5.5 Παραδείγματα

Παρακάτω θα δώσουμε παραδείγματα για έναν πλήρη και έναν μη-πλήρη μετρικό χώρο.

Παράδειγμα 1:

[1] Το σύνολο \mathbb{Z} των ακεραιών αριθμών είναι πλήρης μετρικός χώρος με τη συνήθη μετρική. Αρκεί να υποθέσουμε a_n μια βασική ακολουθία στο \mathbb{Z} τότε για $\epsilon = \frac{1}{2}$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε μ, ν με $\mu > n, \nu > n$ να ισχύει $|a_\nu - a_\mu| < \frac{1}{2}$ επειδή όμως $a_\nu \in \mathbb{Z}$ η τελευταία σχέση μας δίνει $a_\nu = a_\mu \forall \mu, \nu > n$, δηλαδή η ακολουθία είναι σταθερή και επομένως συγκλίνουσα στην σταθερή τιμή, που προφανώς ανήκει στο \mathbb{Z} .

Παράδειγμα 2:

[1] το σύνολο $(0, 1]$ με τη συνήθη μετρική δεν είναι πλήρης μετρικός χώρος διότι η ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$ είναι ακολουθία Cauchy αλλά δεν συγκλίνει στο $(0, 1]$.

6 Ισομορφισμός

Όπως είδαμε στον ορισμό η σφαίρα του Bloch είναι ισομορφική προς την μιγαδική προβολική γραμμή. Οπότε πριν δούμε την προβολική γραμμή θα δώσουμε τον ορισμό του ισομορφισμού.

6.1 Ορισμός

[4] Ας είναι V, U δυο διανυσματικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα και μια απεικόνιση $f : V \rightarrow U$ θα λέμε ότι η f είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός αν ικανοποιεί την ιδιότητα:

$f(\lambda v_1 + v_2) = \lambda f(v_1) + f(v_2), v_1, v_2 \in V, \lambda$ στοιχείο του σώματος. Μια τέτοια απεικόνιση η οποία διατηρεί τις πράξεις μεταξύ δυο διανυσματικών χώρων καλείτε ομομορφισμός και αν επίσης αυτή είναι 1-1 και επί καλείτε ισομορφισμός. Οπότε από τα παραπάνω βλέπουμε ότι υπάρχει μια αντιστοιχία των στοιχείων της μιγαδικής προβολικής γραμμής προς τα στοιχεία της σφαίρας του Bloch (qubit) και αντίστροφα η οποία διατηρεί και τις πράξεις μεταξύ τους.

6.2 Παράδειγμα

Ένα απλό παράδειγμα ισομορφισμού είναι η συνάρτηση Λογάριθμος. Έστω ότι \mathbb{R}^+ είναι η πολλαπλασιαστική ομάδα των θετικών πραγματικών αριθμών και έστω \mathbb{R} είναι η προσθετική ομάδα των πραγματικών.

Η λογαριθμική συνάρτηση $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη σχέση $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^+$, έτσι ώστε να είναι ένας ομομορφισμός ομάδας.

Η εκθετική συνάρτηση $e^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ικανοποιεί τη σχέση $e^{x+y} = e^x e^y$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, γι' αυτό είναι και αυτή ένας ομομορφισμός. Οι ταυτότητες $\log e^x = x$ και $e^{\log y} = y$ δείχνουν ότι οι \log και e είναι αντίστροφες συναρτήσεις. Δεδομένου ότι οι συνάρτηση \log είναι ένας ομομορφισμός που έχει μια αντίστροφη, που είναι επίσης ένας ομομορφισμός η συνάρτηση \log είναι ένας ισομορφισμός ομάδων.

7 Μιγαδική προβολική γραμμή

7.1 Ορισμός

Η μιγαδική προβολική γραμμή ή Σφαίρα του Riemann αποτελεί την συμπαγώπιση του μιγαδικού επιπέδου, δηλαδή είναι ένα συμπαγές υπερσύνολο του μιγαδικού επιπέδου το οποίο συνδέεται με αυτό με μια απεικόνιση Π την οποία καλούμε στερεογραφική προβολή. Από τον ορισμό της σφαίρας του Bloch έχουμε ότι είναι ισόμορφη με την Μιγαδική προβολική γραμμή.

7.2 Η Στερεογραφική Προβολή

[3] Η στερεογραφική προβολή είναι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση Π τέτοια ώστε κάθε σημείο της Z της σφαίρας εκτός του βόρειου πόλου η εικόνα $\Pi(Z) = z$ ένας μιγαδικός και για κάθε σημείο z του μιγαδικού επιπέδου η εικόνα $\Pi^{-1}(z) = Z$ είναι ένα σημείο στη σφαίρα. Τον βόρειο πόλο τον απεικονίζουμε σε ένα στοιχείο εκτός του μιγαδικού επιπέδου που το λέμε **άπειρο**.



Σχήμα 4: Η βασική ιδέα της μιγαδικής προβολικής γραμμής

Η διαδικασία που ακολουθείτε για να επιτύχουμε τον σκοπό αυτόν είναι η εξής.

Έστω \mathbb{R}^3 ο 3-διαστατός ευκλείδειος χώρος, εφοδιασμένος με την ευκλείδεια απόσταση.

Η σφαίρα του Riemann είναι η μοναδιαία σφαίρα S στον χώρο \mathbb{R}^3 , δηλαδή το σύνολο $S := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$.

Ταυτίζουμε τον άξονα Ox_1 με τον πραγματικό άξονα και τον Ox_2 με τον φανταστικό άξονα. Έτσι το οριζόντιο επίπεδο x_1Ox_2 ταυτίζεται με το μιγαδικό επίπεδο \mathbb{C} .

Έστω B ο βόρειος πόλος της σφαίρας και $z = x + iy$ ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Η ευθεία γραμμή του χώρου \mathbb{R}^3 , που ορίζεται από τον βόρειο πόλο B και το σημείο z τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας σε ένα ακριβώς σημείο Z .

Έτσι ορίζεται μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\Pi : S \setminus (0, 0, 1) \longleftrightarrow \mathbb{C} \text{ όπου } \Pi(Z) := z = x + iy.$$

Στη συνέχεια συγκρίνοντας όμοια τρίγωνα του χώρου, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι οι συντεταγμένες του σημείου $Z := (x_1, x_2, x_3) \in S \setminus (0, 0, 1)$ και ο μιγαδικός αριθμός $\Pi(Z) = z = x + iy$ συνδέονται με τις σχέσεις:

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{x_2} = \frac{1}{1-x_3}$$

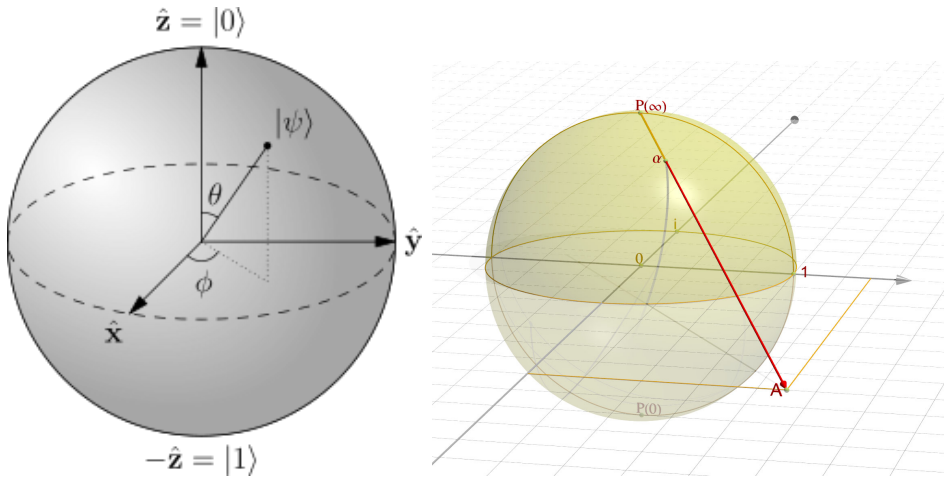
από αυτές προκύπτει τελικά

$$x_1 = x(1-x_3), x_2 = y(1-x_3), \text{ και επίσης έχουμε } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Τελικά οι συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) του σημείου Z και ο μιγαδικός αριθμός z συνδέονται με τις σχέσεις

$$x_1 = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}, x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(|z|^2 + 1)}, x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

Με την απεικόνιση Π , το νότιο ημισφαίριο απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου και το βόρειο ημισφαίριο πλην του βόρειου πόλου απεικονίζεται στο εξωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.



(α') Η σφαίρα του Bloch

(β') Η μιγαδική προβολική γραμμή

Σχήμα 5: Η μιγαδική προβολική γραμμή και η σφαίρα του Bloch

8 Qubit στην σφαίρα

Τέλος θα δοθούν μερικά παραδείγματα με τη χρήση του [7] **Qiskit** μιας βιβλιοθήκης της python σχεδιασμένης να προσομοιώνει ένα τέλειο κβαντικό υπολογιστή.

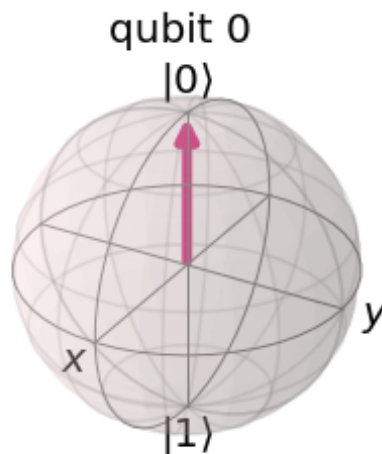
Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει να δείξουμε με τα παραδείγματα είναι η χρήση της σφαίρας του Bloch για την απεικόνιση της υπέρθεσης των κβαντικών καταστάσεων των qubit και πως αυτές αλλάζουν με την εφαρμογή διάφορων κβαντικών πυλών.

8.1 Μια αναφορά στο Qiskit

Το Qiskit είναι μια βιβλιοθήκη της python η οποία μας επιτρέπει να τρέξουμε κβαντικά κυκλώματα σε προσομοίωση στον υπολογιστή μας. Παρακάτω αυτό που θα χρησιμοποιήσουμε από αυτή τη βιβλιοθήκη είναι η δυνατότητα αναπαράστασης των κβαντικών καταστάσεων των qubit μας και επίσης την δυνατότητα να προσομοιώσουμε την εκτέλεση του κυκλώματος και να δούμε στατιστικά αποτελέσματα.

8.2 Αναπαράσταση qubit στη σφαίρα

Με τη χρήση του Qiskit δημιουργούμε ένα σύστημα από 1 qubit σε 1 κλασικό bit με την απλή δημιουργία του συστήματος αν απεικονίσουμε(σχήμα 9).



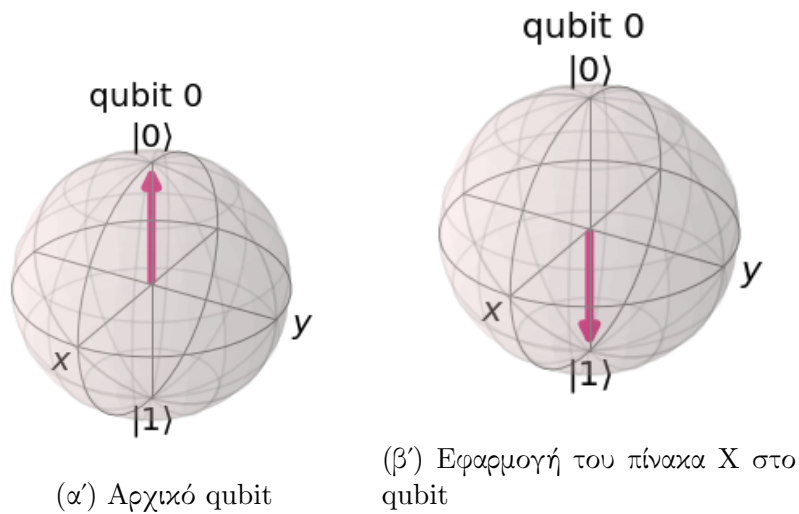
Σχήμα 6: Αρχικό qubit

8.3 Χρήση απλών πυλών στα qubit

Οι πιο απλές πύλες που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είναι οι πίνακες του Pauli που το μόνο που κάνουν είναι να περιστρέφουν τα qubit μας ως προς έναν άξονα και είναι οι παρακάτω.

$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ οι οποίες περιστρέφουν το qubit στους άξονες x, y, z κατά 180 μοίρες.

Εφαρμόζοντας τώρα στο qubit 0 τον πίνακα X θα στραφεί κατά 180 μοίρες στον άξονα X .

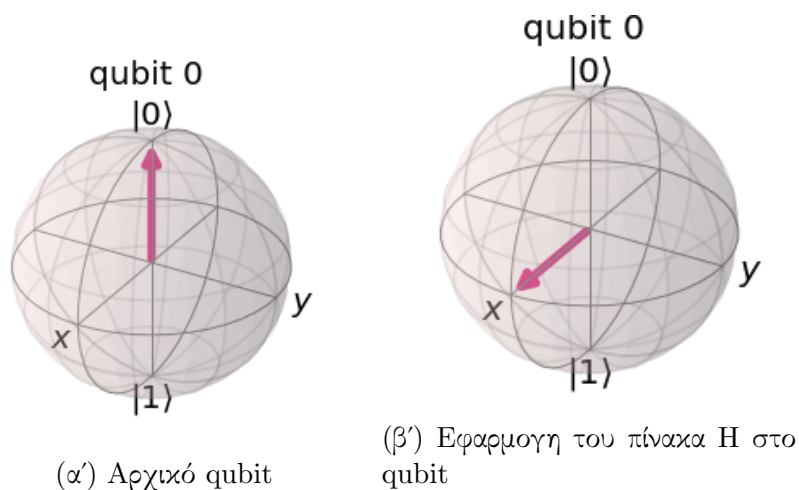


Όμοια θα περιστραφεί και με την εφαρμογή των άλλων δυο πινάκων.

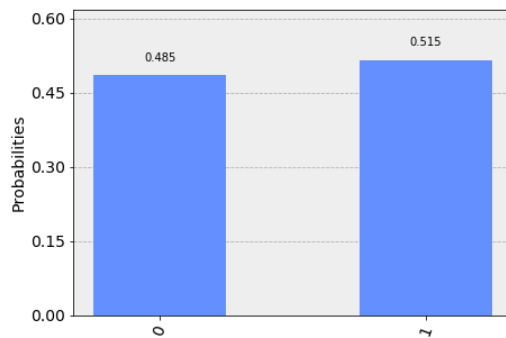
8.4 Πύλη Hadamard

Η πύλη Hadamard φέρνει το σύστημα μας σε μια 'δίκαιη' κβαντική κατάσταση, εννοώντας ότι μετά τη εφαρμογή της πύλης, αν γίνει μέτρηση έχω ίση πιθανότητα να πάρω όλες μου τις δυνατές καταστάσεις.

Ο πίνακας της πύλης είναι ο εξής $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$



Παρακάτω παρατηθείτε το διάγραμμα πιθανοτήτων που προκύπτει από την μέτρηση μετά την εφαρμογή της πύλης H .



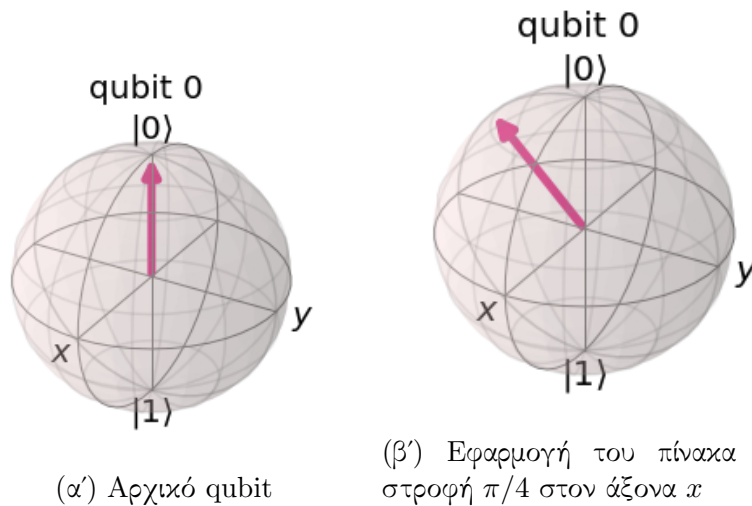
Σχήμα 9: Πιθανότητες μετά 1024 μετρήσεις των qubit μετά την εφαρμογή της H

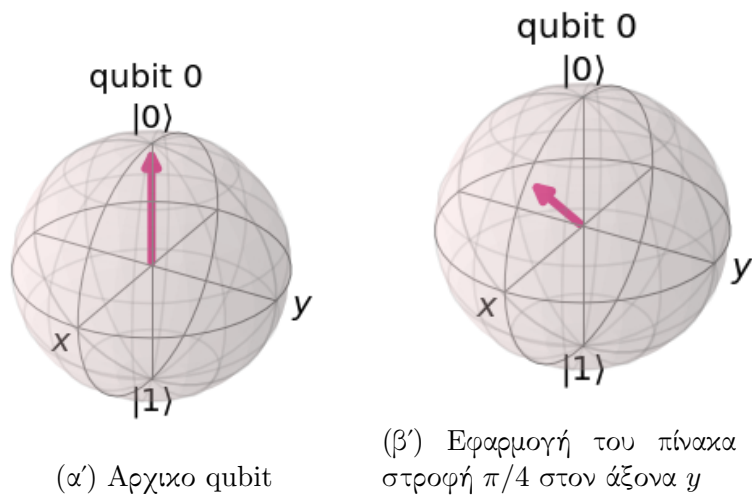
Όπως φαίνεται και απο τις μετρήσεις η πιθανότητα εμφάνισης μιας από τις δυο καταστάσεις είναι περίπου ίσες, κάτι που το περιμέναμε μετά την εφαρμογή της πύλης H .

8.5 Η πύλη μετατόπισης φάσης R_θ

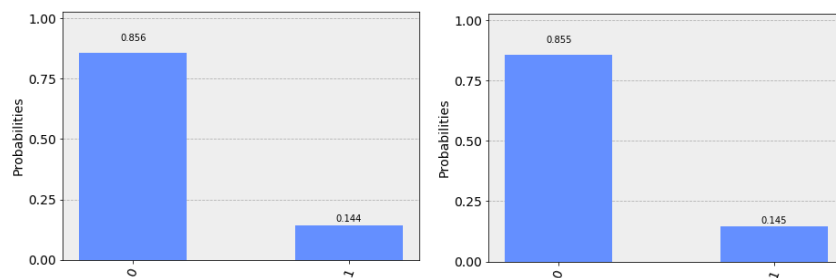
Η κβαντική πύλη μετατόπισης φάσης δρα σε ένα qubit και αλλάζει τι γωνιά φάσης του ως προς κάποιον από του άξονες.

Η πύλη περιγράφεται από τον πίνακα $R_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$.





Παρακάτω παρατηθείτε το διάγραμμα πιθανοτήτων που προκύπτει από την μέτρηση μετά την εφαρμογή της πύλης πρώτα για στροφή $\pi/4$ πρώτα στον x και μετά στον y .



Σχήμα 12: Μετρήσεις μετά την εφαρμογή του πίνακα

Όπως φαίνεται από τις μετρήσεις η στροφή κατά γωνιά $\pi/4$ είτε στο άξονα x είτε στον y δεν αλλάζει την πιθανότητα εμφάνισης της κατάστασης 0 η οποία είναι και αρκετά μεγαλύτερη από την πιθανότητα εμφάνισης της 1, κάτι το οποίο φαίνεται κοιτώντας απλά την αναπαράσταση της υπέρθεσης στη σφαίρα.

Αναφορές

- [1] Παναγιώτης Χρ. Τσαμάτος, ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ, 2014, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΤΖΙΟΛΑ, 978-960-418-172-8.
- [2] Σωτήρης Κ. Ντούγιας, ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ 1, 2007, Leader Books , 978-960-7901-66-8.

- [3] Γεώργιος Α. Καραώστας, ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ, 2014, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΩΣΤΑΡΑΚΗ, 978-618-80913-6-8.
- [4] Θανάσης Χρύσακης, ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, 2013, 978-960-91006-1-8.
- [5] Ian Glendinning, The Bloch Sphere, 2005.
- [6] Jerold E. Marsden - Antony J. Tromba, Διανυσματικός Λογισμός, 2013, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης, 978-960-7309-45-7.
- [7] Héctor Abraham and Ismail Yunus Akhalwaya and Gadi Aleksandrowicz and Thomas Alexander and Gadi Alexandrowics and Eli Arbel and Abraham Asfaw and Carlos Azaustre and AzizNgoueya and Panagiotis Barkoutsos and George Barron and Luciano Bello and Yael Ben-Haim and Daniel Bevenius and Lev S. Bishop and Samuel Bosch and David Bucher and CZ and Fran Cabrera and Padraic Calpin and Lauren Capelluto and Jorge Carballo and Ginés Carrascal and Adrian Chen and Chun-Fu Chen and Richard Chen and Jerry M. Chow and Christian Claus and Christian Clauss and Abigail J. Cross and Andrew W. Cross and Simon Cross and Juan Cruz-Benito and Cryoris and Chris Culver and Antonio D. Córcoles-Gonzales and Sean Dague and Matthieu Dartiaill and DavideFrr and Abdón Rodríguez Davila and Delton Ding and Eric Drechsler and Drew and Eugene Dumitrescu and Karel Dumon and Ivan Duran and Eric Eastman and Pieter Eendebak and Daniel Egger and Mark Everitt and Paco Martín Fernández and Paco Martín Fernández and Axel Hernández Ferrera and Albert Frisch and Andreas Fuhrer and MELVIN GEORGE and IAN GOULD and Julien Gacon and Gadi and Borja Godoy Gago and Jay M. Gambetta and Luis Garcia and Shelly Garion and Gawel-Kus and Juan Gomez-Mosquera and Salvador de la Puente González and Donny Greenberg and Dmitry Grinko and Wen Guan and John A. Gunnels and Isabel Haide and Ikko Hamamura and Vojtech Havlicek and Joe Hellmers and Łukasz Herok and Stefan Hillmich and Hiroshi Horii and Connor Howington and Shaohan Hu and Wei Hu and Haruki Imai and Takashi Imamichi and Kazuaki Ishizaki and Raban Iten and Toshinari Itoko and Ali Javadi-Abhari and Jessica and Kiran Johns and Naoki Kanazawa and Kang-Bae and Anton Karazeev and Paul Kassebaum and Knabberjoe and Arseny Kovyrshin and Vivek Krishnan and Kevin Krsulich and Gawel Kus and Ryan LaRose and Raphaël Lambert and Joe Latone and Scott Lawrence and Dennis Liu and Peng Liu and Panagiotis Barkoutsos ZRL Mac and Yunho Maeng and Aleksei Malyshev and Jakub Marecek and Manoel Marques and Dolph Mathews

and Atsushi Matsuo and Douglas T. McClure and Cameron McGarry and David McKay and Srujan Meesala and Antonio Mezzacapo and Rohit Midha and Zlatko Minev and Michael Duane Mooring and Renier Morales and Niall Moran and Prakash Murali and Jan Müggenburg and David Nadlinger and Giacomo Nannicini and Paul Nation and Yehuda Naveh and Nick-Singstock and Pradeep Niroula and Hassi Norlen and Lee James O’Riordan and Oluwatobi Ogunbayo and Pauline Ollitrault and Steven Oud and Dan Padilha and Hanhee Paik and Simone Perriello and Anna Phan and Marco Pistoia and Alejandro Pozas-iKerstjens and Viktor Prutyanov and Daniel Puzzuoli and Jesús Pérez and Quintiii and Rudy Raymond and Rafael Martín-Cuevas Redondo and Max Reuter and Diego M. Rodríguez and Mingi Ryu and Tharrmashastha SAPV and SamFerracin and Martin Sandberg and Ninad Sathaye and Bruno Schmitt and Chris Schnabel and Travis L. Scholten and Eddie Schoute and Ismael Faro Sertage and Nathan Shammah and Yunong Shi and Adenilton Silva and Yukio Siraichi and Iskandar Sitdikov and Seyon Sivarajah and John A. Smolin and Mathias Soeken and Dominik Steenken and Matt Stypulkoski and Hitomi Takahashi and Charles Taylor and Pete Taylour and Soolu Thomas and Mathieu Tillet and Maddy Tod and Enrique de la Torre and Kenso Trabing and Matthew Treinish and TrishaPe and Wes Turner and Yotam Vaknin and Carmen Recio Valcarce and Francois Varchon and Desiree Vogt-Lee and Christophe Vuillot and James Weaver and Rafal Wieczorek and Jonathan A. Wildstrom and Robert Wille and Erick Winston and Jack J. Woehr and Stefan Woerner and Ryan Woo and Christopher J. Wood and Ryan Wood and Stephen Wood and James Wootton and Daniyar Yeralin and Jessie Yu and Christopher Zachow and Laura Zdanski and Zoufalc and anedumla and azulehner and bcamorison and brandhsn and chlorophyll-zz and dime10 and drholmie and elfrocampeador and faisaldebouni and fanizzamarco and gruu and kanejess and klinvill and kurarr and lerongil and ma5x and merav-aharoni and mrossinek and neupat and ordmoj and sethmerkel and strickroman and sumitpuri and tigerjack and toural and willhbang and yang.luh and yotamvakninibm, Qiskit: An Open-source Framework for Quantum Computing, 2019, 10.5281/zenodo.2562110.