

Πρόβλημα

Έστω πίνακας A μεγέθους n με στοιχεία τα $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Θέλουμε να απαντήσουμε σε q ερωτήματα της μορφής $\text{sum}(i, j)$, δηλαδή το άθροισμα όλων των στοιχείων από τη θέση i έως τη θέση j .

$$\text{sum}(i, j) = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_j$$

Περιορισμοί:

$$2 \leq n \leq 1000000$$

$$1 \leq q \leq 1000000$$

$$0 \leq i \leq j \leq n$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
X	1	3	8	4	6	1	3	4

Παράδειγμα $\text{sum}(4, 7) = 14$

Λύση:

Μπορούμε να υπολογίζουμε τα $\text{sum}(i, j)$ σε $O(1)$ χρόνο αν πρώτα κατασκευάσουμε τον prefix sum array σε $O(n)$ χρόνο. Ορίζουμε τον πίνακα prefix με την εξής ιδιότητα:

$$\text{prefix}[i] = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i = \text{prefix}[i-1] + \alpha_i$$

Με τον πίνακα αυτό, τα ερωτήματα $\text{sum}(i, j)$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\text{sum}(i, j) = \text{prefix}[j] - \text{prefix}[i-1]$$

διότι,

$$\begin{aligned} \text{prefix}[j] - \text{prefix}[i-1] &= \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + \dots + \alpha_j - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{i-1}) \\ &= \alpha_i + \dots + \alpha_j \\ &= \text{sum}(i, j) \end{aligned}$$

Πίνακας prefix:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	
0	1	4	12	16	22	23	26	30	//Given array A of size n prefix[0] = 0; for(int i=1; i<=n; i++) prefix[i] = prefix[i-1] + A[i];

$$\text{sum}(4,7) = \text{prefix}[7] - \text{prefix}[3] = 14$$

Σημείωση: Προτιμούμε την αρίθμηση από 1 αντί του 0, γιατί αν μας ζητηθεί το άθροισμα $\text{sum}(0, j)$, τότε ο τύπος $\text{prefix}[j] - \text{prefix}[i-1]$ βγαίνει εκτός ορίων του πίνακα ($\text{prefix}[-1]$).

Τελικά, η κατασκευή του πίνακα prefix κοστίζει $O(n)$ και η απάντηση όλων των ερωτημάτων $O(q)$. Άρα η λύση μας έχει πολυπλοκότητα $O(n+q)$.