ΥΛΗ (δική μου σειρά):

Μέρος Α = { Σύνολα, πληθάριθμος και ισχύς συνόλου,
πράξεις με σύνολα, δυναμοσύνολο, Θεμελειώδης αρχή της απαρίθμησης (FTC),
Το αξίωμα του περιστερόνα (Pigeon Hole Principle - PHP),
Διαμέριση αριθμού, Διαμέριση Συνόλων }

Μέρος Β = Θεωρία Γραφημάτων (Graph Theory)

Μέρος Γ = Ειδικά θέματα (αν υπάρξει χρόνος)

Πεπερασμένα και Αριθμήσιμα Σύνολα:

- Πρακτικός ορισμός αριθμήσιμου = $A = \{ a_1 \le a_2 \le a_3 \ldots \le a_\nu \le \ldots \}$

  Το $A = (0,1)$ δεν είναι αριθμήσιμο
- Αυστηρός ορισμός =

  Αν $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων, τότε Α αριθμήσιμο αν κ' μόνο αν υπάρχει μια $f: A \xrightarrow{\text{επί}} \mathbb{Z}$ με f 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) (άρα υπάρχει f^{-1})
- παράδειγμα: Το $\mathbb{Q}$ (ρητοί $= \mu/\nu$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$) είναι αριθμήσιμο αφού $f(\mu/\nu) = (\mu, \nu) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$
- Εύκολη Άσκηση το $A \times B$ δύο αριθμήσιμων συνόλων είναι κ' αυτό αριθμήσιμο.

- Ορισμός συνόλου με την ισχύς του συνεχούς:

  Υπάρχει f, 1-1 και επί $f: A \xrightarrow{\text{επί}} [0,1]$
- Ορισμός πληθάριθμων:

  Όταν το Α είναι πεπερασμένο λέμε το πλήθος των στοιχείων του πληθάριθμο του Α (cardinality) κ' συμβολίζουμε $|A| = n$
- Ορισμός υποσυνόλου $B \subset A$ (υποσύνολο)

  Αν Α,Β δεν είναι ξένα ($A \cap B \neq \emptyset$), τότε $B \subset A \Rightarrow |B| < |A|$

- Στα μέσα της δεκαετίας του '60 αποδείχθει ότι δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει ένα σύνολο Γ που δεν θα είναι αριθμήσιμο αλλά η ισχύς του $|\Gamma| < |\mathbb{R}|$

②

Κατόπιν τούτου παίρνουμε ως αξίωμα ότι η ισχύς είναι είτε του αριθμήσιμου, είτε του $\mathbb{R}$.

- <u>Πράξεις με σύνολα</u>:

Ω = σύνολο αναφοράς και $A \subset \Omega$ τότε $A^c = \Omega \setminus A$ πλήν (−)

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ (= Συμπληρωματικό ένωσης)

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- <u>Κανόνες του De Morgan</u>:

- $\begin{cases} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = \dots \text{ κ.λπ.} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = \dots \text{ κ.λπ.} \end{cases}$
- $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

- <u>FTC (Θεμελιώδης Θεώρημα Αρίθμησης)</u>: (οδηγεί στη Θεωρία της συνδυαστικής ανάλυσης)

Αν τα "γεγονότα" $A_1, A_2, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα με συχνότητα εμφάνισης $k_1, k_2, \dots, k_n$ τότε ο αριθμός όλων των εμφανίσεών τους είναι $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$

<u>π.χ.</u>

Ο Α πάει στη τράπεζα 3 φορές την εβδομάδα. Ο άγνωστός του Β πάει 4 φορές την εβδομάδα. Ο άγνωστος Γ πάει 2 φορές την εβδομάδα.

Πόσες το πολύ επισκέψεις δέχεται απ' αυτούς η τράπεζα την εβδομάδα;

Απάντηση = $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$ επισκέψεις

- <u>PHP (Αρχη Περιστερώνα)</u>:

Αν έχω n περιστέρια, $n > 1$ και m φωλιές, $m < n$ και βάλω τα περιστέρια στη φωλιά τους, τότε τουλάχιστον σε 1 φωλιά υπάρχουν τουλάχιστον 2 περιστ

Απλά Παραδείγματα:

① Αν έχουμε 3 φύλα τράπουλας τότε υπάρχουν τουλάχιστον 2 με το ίδιο χρώμα.
Αν έχουμε 5 φύλα, υπάρχουν τουλάχιστον 2 ίδιας κατηγορίας.

② Αν έχω ένα σύνολο n ανθρώπων, $n>1$ και όλοι έχουν κάποιο φίλο μέσα εκεί, τότε υπάρχουν 2 τουλάχιστον άτομα που έχουν τον ίδιο αριθμό φίλων

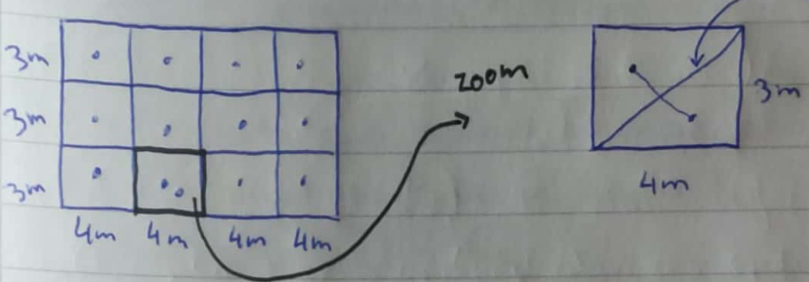
(Υπάρχει στο Internet (PHP) η λύση)

SOS Ιούνιος

• **H/W$_1$**: Αν έχουμε ένα ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 1m και πάρουμε στο εσωτερικό του 10 σημεία, τότε υπάρχουν τουλάχιστον 2 σημεία που να απέχουν $< 1/3$ m

• © **H/W$_2$**: Ένα ορθογώνιο οικόπεδο έχει διαστάσεις 9m x 16m (144 m^2). Δείξτε ότι αν πάρω 13 πασσάλους στο εσωτερικό του, τουλάχιστον οι 2 θα απέχουν κάτω από 5m.

Λύση:



Διαγώνιος $= \sqrt{16+9} = 5$m
Άρα και η απόσταση των σημείων θα είναι μικρότερη από 5m.

• Ορισμός Δυναμοσυνόλου (Power Set):

Ω_A = σύνολο όλων των υποσυνόλων συμπεριλαμβανομένων ενός A των $\emptyset$ και του A.

π.χ. $A = \{1,2,3\}$, $\{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

• Θεώρημα: Αν $|A|=n$ τότε $|\Omega_A| = 2^n$

Απόδειξη (ημιτελής):

Για $n=1$ ελέγχουμε αν ισχύει, $\{a_1\}$ $\Omega_A = \{\emptyset, A\}$, $|\Omega_A| = 2$

Δέχομαι ότι ισχύει για $n=k$ (≥ 1) και αποδεικνύω ότι ισχύει και για $k+1$

(Αρχή της τέλειας επαγωγής)(Induction)

Θεμελιώδης Συνδιαστική Ανάλυση:

Σύμβολα:

- **Παραγοντικό**: Αν $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως (factorial) $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

  Εξ ορισμού $0! = 1$

- **Διωνυμικός Συντελεστής και Τρίγωνο του Pascal**:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(= \binom{n}{n-k}\right)$$

- π.χ. $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\,2!} = \frac{\cancel{4} \cdot 6}{\cancel{4}} = 6$ ($3! = 6$)

- **Παρατήρηση**: $\binom{n}{n} = \frac{n!}{0!\,n!} = 1$, $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!\,0!} = 1$

- **Τύπος του Pascal**: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k = a^n + n \cdot a^{n-1} b + \ldots + b^n$

- **Combinations – Συνδυασμός n πραγμάτων ανά κ ($k \leq n$)**

Οι τρόποι κατά τους οποίους μπορούμε από n αντικείμενα να πάρουμε k από αυτά. (Η σειρά λήψης δεν ενδιαφέρει)

Τύπος: ${}^{n}C_{k}$ ή $\binom{n}{k}$ ή C_k^n

- **Ερώτηση**: Αν έχω 45 αριθμούς, με πόσους τρόπους μπορώ να πάρω 41 απ' αυτούς.

Απάντηση: $45C41 = \frac{45!}{4!\,41!} = \frac{(45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42)\cancel{41!}}{24 \cdot \cancel{41!}} = \ldots\ldots$