08-02-20

Απειροστικός Λογισμός

Μελάτης Νικόλαος
tp4726

1)

$f(x) = \cot^{-1}[\log(\sin x)]$, $\cot^{-1} = \operatorname{arccot}$

$$\left([\operatorname{arccot}(u(x))]' = -\frac{1}{u(x^2)+1} \cdot u'(x) \right)$$

$$f'(x) = \cot^{-1}[\log(\sin(x))]'$$

$$= \left(-\frac{1}{\log^2(\sin x)+1}\right) \cdot (\log(\sin(x)))'$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot (\sin(x))'}{\log^2(\sin(x))+1}$$

$$= \frac{\cos(x)}{\sin(x) \cdot (\log^2(\sin(x))+1)}$$

2)

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} & , x > 0 \\ 2x^3 & , x \leq 0 \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 \cdot \cos\frac{1}{x})$

Δεδομένου του ότι η οποιαδήποτε τιμή του cos δεν είναι μεγαλύτερη από 1

τότε: $-1 < \cos\frac{1}{x} < 1 \Rightarrow -x^2 < x^2 \cdot \cos\frac{1}{x} \leq x^2$.

Επομένως $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$, ακολούθως από το κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \cos\frac{1}{x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x^3 = 0$

Επομένως $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

B) $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{2x^3-4x-6} =$

$f(x) = \frac{|x-3|}{2x^3-4x-6}$

$\lim_{x \to 3^-} c f(x) = c \lim_{x \to 3^-} f(x)$ ise $c = \frac{1}{2}$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{2x^2-4x-6} = \left(\frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{x^2-2x-3}}{3} \right)$

$\frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{x^2-2x-3}}{2}$ $\quad$ $\frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{(x-3(x+1)}}{2}$

$\frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{x^2-2x-3}}{2} = \frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{(x-3)(x+1)}}{2}$

$\frac{\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{(x-3)(x+1)}}{2} = \lim_{x \to 3^-} \left(-\frac{1}{x+1} \right)$

$\frac{\lim_{x \to 3^-} \left(-\frac{1}{x+1} \right)}{2} = \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)}{2}$

$\lim_{x \to 3^-} \frac{3-x}{2x^2-4x-6} = -\frac{1}{8}$

$$\lim_{x\to 3^+} cf(x) = c\lim_{x\to 3^+} f(x) \quad \mu\varepsilon \quad c=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{2x^2-4x-6} = \frac{\left(\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x^2-2x-3}\right)}{2}$$

$$\frac{\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+1)}}{2} = \frac{\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x+1}}{2}$$

$$\frac{\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x+1}}{2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{2}$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{2x^2-4x-6} = \frac{1}{8}$$

— Επομένως το όριο $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{2x^2-4x-6}$ δεν υπάρχει !

3) $F(x) = \cos(x^4 \pi)$ σημείο $(1,-1)$

Έστω $A(x_0, y_0)$ το σημείο επαφής

$F'(x) = (\cos(x^4\pi))'$

$= (-\sin(x^4\pi)) \cdot (x^4 \cdot \pi)'$

$= -\pi \cdot (x^4)' \cdot \sin(x^4\pi)$

$= -\pi \cdot 4x^3 \cdot \sin(x^4\pi)$

$= -4\pi x^3 \sin(x^4\pi)$

$F'(x_0) = -4\pi x_0^3 \sin(x_0^4\pi)$

Η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y - F(x_0) = F'(x_0)(x - x_0)$

$y - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(x - x_0)$

Η εφαπτομένη διέρχεται από το $M(1,-1)$, επομένως

$-1 - (x_0^2 - x_0 + 1) = (2x_0 - 1)(1 - x_0)$

$-1 - x_0^2 + x_0 - 1 = 2x_0 - 2x_0^2 - 1 + x_0$

$x_0^2 - 2x_0 - 1 = 1$

$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

$x_1, x_2 = \dfrac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$

$\dfrac{2 + \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} + 1$

$\dfrac{2 - \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} + 1$

$x_1 = \sqrt{2} + 1$

$x_2 = -\sqrt{2} + 1$

5) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

Πεδίο ορισμού $x^2 - 1 \neq 0 \to x^2 \neq 1 \to |x| \neq 1 \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$x \in \mathbb{R} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{x'(x^2-1) - x(x((x^2+1))'}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 1}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-x^2 - 1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$\left.\begin{array}{l} \text{Το } (x^2-1)^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \text{το } x^2 > 0 \Rightarrow -x^2 < 0 \Rightarrow -x^2 - 1 < -1 < 0 \end{array}\right\}$ Άρα $f'(x) < 0$

$f \downarrow$

Για να τέμνει το $y'y$ $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x = 0$

Για να τέμνει το $x'x$ $f(0) = 0$

Στο 1^+ $= \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1}$

$\left.\begin{array}{l} x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \\ x > 0 \end{array}\right\}$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

Άρα η $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη

Στο 1^- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1}$

$\left.\begin{array}{l} x < 1 \to x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \\ x > 0 \end{array}\right\}$ $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

Στο -1^+ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1}$

$\left.\begin{array}{l} x > -1 \to x^2 < 1 \Rightarrow x^2 - 1 < 0 \\ x < 0 \end{array}\right\}$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

Στο -1^- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim \frac{x}{x^2-1}$ όμως $x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$

$x < 0$ Άρα $\lim_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$		$\swarrow$	$\Vert$	$\swarrow$	$\Vert$	$\swarrow$	

για $x<-1$

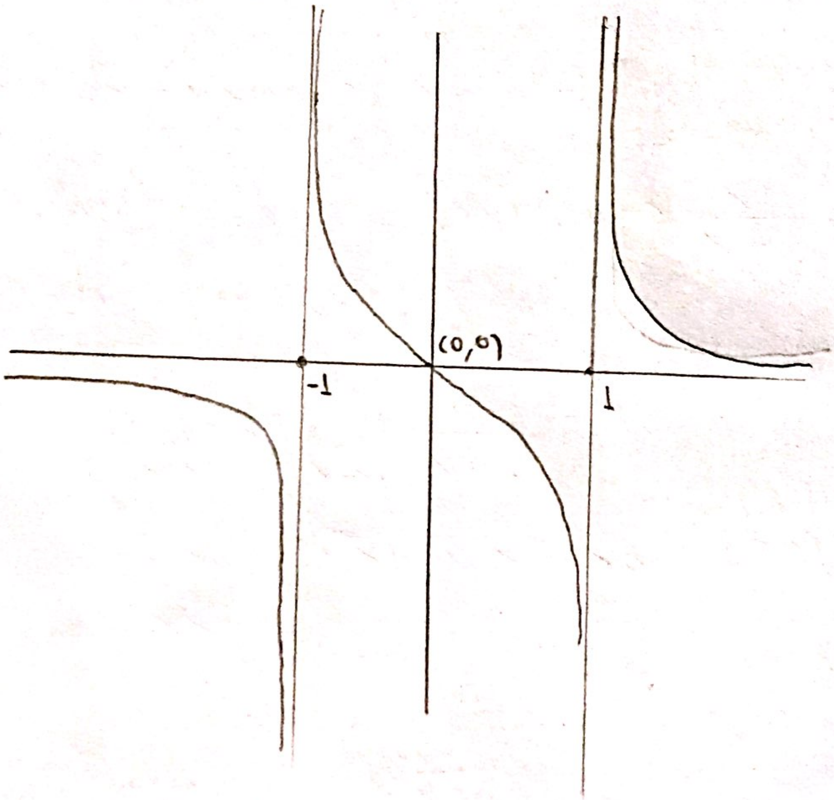
$\Rightarrow x^2>1$

$x^2-1>0$

$f(x)<0$

για $x>1$

$x^2-1>0$



6) $\frac{dy}{dx}\cos x = y\cdot(y-1)$ (1)

Αν $y\neq 0$ και $y\neq 1$ και $\cos x\neq 0$

$(1) \to \frac{1}{y\cdot(y-1)}dy = \frac{1}{\cos x}dx \Rightarrow \int \frac{1}{y^{9}(y-1)}dy = \int \frac{1}{\cos}dx$

$\int \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y-1}dy = \int \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)\tan x + \frac{1}{\cos x}}{\tan x + \frac{1}{\cos x}}dx$

$B = \frac{1}{y\cdot(y-1)} = \frac{A_1}{y} + \frac{A_2}{y-1} = \frac{A_1(y-1)+A_2}{y(y-1)}$

$= \frac{A_1y - A_1 + A_2y}{y(y-1)} = \frac{(A_1+A_2)y - A_1}{y(y-1)}$

Οπότε θα πρέπει $A_1 + A_2 = 0 \to A_2 = -A_1 = 1$

και $-A_1 = 1 \Rightarrow A_1 = -1$

$B = \frac{-1}{y} + \frac{1}{y-1}$ Άρα το ολοκλήρωμα γίνεται

$\int -\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1}dy = \int \frac{\sec x\tan(x) + \sec^2(x)}{\tan(x)+\sec(x)}dx$ (skip κάποια βήματα λόγω χρόνου)

$\Rightarrow \ln|y-1| - \ln|y| + c = \ln(|\tan(x)+\sec(x)|) + c.$