Να εκφραστεί η τριγωνική ακολουθία

$x(n)=\{0,2,4,6,4,2\}$

• Ως άθροισμα δέλτα συναρτήσεων

$x(n)=0\delta(n)+2\delta(n-1)+4\delta(n-2)+6\delta(n-3)+4\delta(n-4)+2\delta(n-5)$

• Ως βηματική ακολουθία

$x(n)=0[u(n)-u(n-1)]+2[u(n-1)-u(n-2)]+4[u(n-2)-u(n-3)]+6[u(n-3)-u(n-4)]+4[u(n-4)-u(n-5)]+2[u(n-5)-u(n-6)]$

Ιδιότητες συστημάτων

• Χρονικά μεταβαλλόμενο: Όταν υπάρχει η μπροστά από το $x(n)$

• Γραμμικό: δεν υπάρχει κάποια δύναμη στα x, Y

• Αιτιατό: Όταν μέσα στις παρενθέσεις υπάρχουν −. Αν υπάρχει + δεν είναι αιτιατό.

• Σταθερό: Η νόρμα 1 είναι ένας αριθμός.

Νόρμες

• Νόρμα 1 ($L1$ ή $\|x(n)\|_1$): Η απόλυτη τιμή των συντελεστών της ακολουθίας.

• Νόρμα 2 ($L2$ ή $\|x(n)\|_2$): Η τετραγωνική ρίζα των τετραγώνων των συντελεστών της ακολουθίας.

• Νόρμα ∞ ($L\infty$ ή $\|x(n)\|_\infty$): Η μεγαλύτερη τιμή συντελεστή της ακολουθίας.

π.χ. $h(n)=\delta(n-2)-2\delta(n-3)+\delta(n-4)$

$L1=|1+2+1|=4$

$L2=\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{6}$

$L\infty=2$

Ενέργεια συστήματος: $E=\sum_{-\infty}^{\infty}|h(n)|^2=|1^2+2^2+1^2|=6$

Γραμμική συνέλιξη:

Να υπολογιστεί η έξοδος του αιτιατού συστήματος με κρουστική απόκριση $h(n)=\delta(n)+0{,}5\delta(n-1)+0{,}25\delta(n-2)$ και με είσοδο το σήμα: $x(n)=0{,}5\delta(n-1)+1\delta(n-2)+0{,}5\delta(n-3)$

Λύση

1º ΒΗΜΑ: $h(n)$: 1 0,5 0,25 $\quad Y(0)=1*0{,}5=0{,}5$

$x(n)$: 0,5 1 0,5 ← Αντιστρέφουμε την $x(n)=(0{,}5\ 1\ 0{,}5)$

2º ΒΗΜΑ: 1 0,5 0,25 (προχωράμε δεξιά την $x(n)$)

0,5 1 0,5 $\quad Y(1)=1*1+0{,}5*0{,}5=1{,}25$

⋮

$Y(2)=1*0{,}5+0{,}5*1+0{,}25*0{,}5=1{,}125$ (3º ΒΗΜΑ)

$Y(3)=0{,}5*0{,}5+0{,}25*1=0{,}5$ (4º ΒΗΜΑ)

$Y(4)=0{,}25*0{,}5=0{,}125$ (5º ΒΗΜΑ)

Άρα: $Y(n)=\{0{,}5,\ 1{,}25,\ 1{,}125,\ 0{,}5,\ 0{,}125\}$

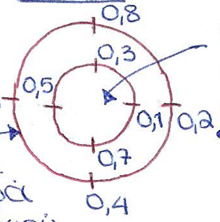
Κυκλική συνέλιξη

$x(n)=\{0{,}2\quad 0{,}4\quad 0{,}6\quad 0{,}8\}$

$h(n)=\{0{,}1\quad 0{,}3\quad 0{,}5\quad 0{,}7\}$

Λύση

1º ΒΗΜΑ



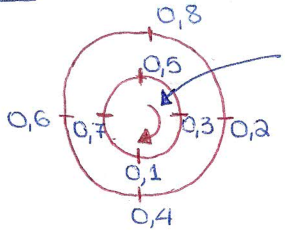
$x(n)$: Τη γράφουμε με τη φορά του ρολογιού.

$h(n)$: Την γράφουμε με φορά αντίθετη από αυτή του ρολογιού

Ξεκινάμε από εδώ

$Y(0)=0{,}2\cdot0{,}1+0{,}4\cdot0{,}7+0{,}6\cdot0{,}5+0{,}8\cdot0{,}3=1{,}04$

2º ΒΗΜΑ



Κάνουμε ολίσθηση κατά 1, στην $h(n)$, με τη φορά του ρολογιού. Η $x(n)$ παραμένει σταθερή.

$Y(1)=0{,}2\cdot0{,}3+0{,}4\cdot0{,}1+0{,}6\cdot0{,}7+0{,}8\cdot0{,}5=0{,}92$

⋮

3º ΒΗΜΑ $Y(2)=0{,}2\cdot0{,}5+0{,}4\cdot0{,}3+0{,}6\cdot0{,}1+0{,}8\cdot0{,}7=0{,}84$

4º ΒΗΜΑ $Y(3)=0{,}2\cdot0{,}7+0{,}4\cdot0{,}5+0{,}6\cdot0{,}3+0{,}8\cdot0{,}1=0{,}6$

Άρα: $Y(n)=\{1{,}04,\ 0.92,\ 0.84,\ 0.6\}$

Η γραμμική συνέλιξη έχει έξοδο $\underset{(x(n))}{N}+\underset{h(n)}{M}-1$ σημεία ενώ η κυκλική συνέλιξη N σημεία. Για παράδειγμα $x(n)=4$ σημεία, $h(n)=4$ σημεία στην γραμμική θα είχαμε 7 σημεία ενώ η κυκλική 4 σημεία ως έξοδο. Για να κάναμε την κυκλική - γραμμική προσθέτουμε 4 μηδενικά στην $x(n)$ και $h(n)$

Να βρεθούν δύο διαφορετικά σήματα συνεχούς χρόνου που θα παράγουν την ακολουθία $x(n)=\cos(0.4\pi n)$ όταν υποστούν δειγματοληψία (f_s) 8 kHz.

ΛΥΣΗ

$x_a(t)=\cos(2\pi f_0 t)$

$x_a(nT_s)=\cos\left(2\pi\frac{f_0}{f_s}\cdot n\right)\Rightarrow 2\pi\frac{f_0}{f_s}=0{,}4\pi\Rightarrow$

$\frac{\cancel{2\pi} f_0}{\cancel{2\pi}}=\frac{0{,}4\pi f_s}{2\pi}\Rightarrow$

$f_0=0{,}2\cdot f_s\Rightarrow f_0=0{,}2\cdot8000$

$\Rightarrow f_0=1600Hz$

Άρα δύο σήματα που παράγουν την ίδια ακολουθία είναι:

$x(1)=\cos(2\pi f_0 n\cdot t)=\cos(2\pi(1600\cdot1)\cdot t)$ για $n=1$

$x(3)=\cos(2\pi f_0 n t)=\cos(2\pi(1600\cdot3)\cdot t)$ & $n=3$ (τυχαία)

Σήμα $x_a(t)$ με εύρος ζώνης 6kHz

α) Ρυθμός Nyquist για $x_a(t)\Rightarrow f_s=2\cdot B\Rightarrow f_s=12kHz$

β) Ρυθμός Nyquist για $x_a(t)\cdot\cos(2\pi1000t)$

$f_s+2f_0=12kHz+2\cdot1kHz=14kHz$ ή $14000Hz$

Ψηφιακό φίλτρο.

π.χ. $Y(n)=0{,}5x(n)+0{,}2x(n-1)+0{,}7y(n-1)-0{,}3y(n-2)$

• 2ου βαθμού φίλτρο διότι το 2 είναι μεγαλύτερο στην παρένθεση

• IIR γιατί έχει και Y

Ποιά είναι η κρουστική απόκριση ενός ιδανικού ζωνοφρακτικού φίλτρου με κατώτερη συχνότητα αποκοπής ω1 και ανώτερη συχνότητα αποκοπής ω2.

ΛΥΣΗ

$h(n) = h_1(n) + h_2(n)$, όπου

$h_1(n) = \frac{\sin\omega_1}{n\omega_1}$ ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο και

$h_2(n) = \delta(n) - \frac{\sin\omega_2}{n\omega_2}$ ιδανικό υψηπερατό φίλτρο

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος που έχει κρουστική απόκριση: $h(n) = \begin{cases} \cos(\pi\omega_0) & 0 \le n < N-1 \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) * e^{-j\omega k}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} \cos(n\omega_0) * e^{-j\omega k}$$

Μετασχηματισμός Ζ

ΑΚΟΛΟΥΘΙΑ	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ Ζ
$\delta(n)$	1
$u(n)$	$1/1-z^{-1}$
$\alpha^n u(n)$	$1/1-\alpha z^{-1}$
$n\alpha^n u(n)$	$\alpha z^{-1}/(1-\alpha z^{-1})^2$

Για το σύστημα: $0.6y(n) - 0,4y(n-1) - 0,3y(n-2) = x(n) - 0,5x(n-2)$.

α) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$0,6Y(z) - 0,4z^{-1}Y(z) - 0,3z^{-2}Y(z) = X(z) - 0,5z^{-2}X(z)$$

$$Y(z)\cdot[0,6 - 0,4z^{-1} - 0,3z^{-2}] = X(z)[1 - 0,5z^{-2}]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1 - 0,5z^{-2}}{0,6 - 0,4z^{-1} - 0,3z^{-2}}$$

β) Η κρουστική απόκριση είναι:

• πολλ/ζουμε τη H(z) με z^2: $H(z) = \frac{z^2 - 0,5}{0,6z^2 - 0,4z - 0,3}$

• Από αριθμητή βρίσκουμε τα zeros.

$z^2 - 0,5 \qquad \Delta = \beta^2 - 4\cdot\alpha\cdot\gamma = 0^2 - 4\cdot1\cdot(-0,5) = 2$

$$z_{1,2} = \frac{-0 \pm \sqrt{2}}{2\cdot1} \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{0,7} \quad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{-0,7}$$

• Από παρανομαστή τα poles.

$0,6z^2 - 0,4z - 0,3 \qquad \Delta = 0,88$

$$P_{1,2} = \frac{0,4 \pm \sqrt{0,88}}{1,2} \quad \boxed{P_1 = 1,11} \quad \boxed{P_2 = -0,44}$$

Έτσι η κρουστική απόκριση γράφεται:

$$H(z) = 0,7 \cdot \frac{1}{1 - 1,11z^{-1}} + (-0,7) \cdot \frac{1}{1 + 0,44z^{-1}}$$

$$h(n) = 0,7 \cdot 1,11^n\, u(n) - 0,7 \cdot 0,44^n \cdot u(n)$$

γ) Η έξοδος στο σήμα $x(n) = u(n) - u(n-5)$ είναι:

$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-5}}{1-z^{-5}}$, $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \Rightarrow Y(z) = H(z) * X(z)$

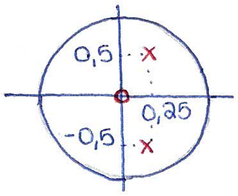
$\Rightarrow Y(z) = \left(0,7 \cdot \frac{1}{1-1,11z^{-1}} - 0,7 \cdot \frac{1}{1+0,44z^{-1}}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{z^{-5}}{1-z^{-5}}\right)$

$p_1 = 0,25 + j0,5$, $p_2 = 0,25 - j0,5$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$

α) συνάρτηση μεταφοράς και σχεδιασμός zeros και poles στο z επίπεδο.

$$H(z) = \frac{(z-z_1)(z-z_2)}{(z-p_1)(z-p_2)} \Rightarrow H(z) = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-(0,25+j0,5))(z-(0,25-j0,5))}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{z^2}{(z-0,25-j0,5)\cdot(z-0,25+j0,5)}$$



Το σύστημα είναι σταθερό γιατί οι πόλοι (x) βρίσκονται μέσα στο μοναδιαίο κύκλο.

β) Κρουστική απόκριση με άθροισμα μερικών κλασμάτων.

$$\frac{H(z)}{z^2} = \frac{1}{(z-0,25-j0,5)(z-0,25+j0,5)} = \frac{A}{z-0,25-j0,5} + \frac{B}{z-0,25+j0,5}$$

$$A = \frac{H(z)}{z^2}\cdot(z-0,25-j0,5)\Big|_{z=z-0,25-j0,5}$$

$$A = \frac{1}{\cancel{(z-0,25-j0,5)}(z-0,25+j0,5)}\cancel{(z-0,25-j0,5)}$$

$$A = \frac{1}{(z-0,25+j0,5)}\Big|_{z=0,25+j0,5} \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{j}}$$

$$B = \dots = \frac{1}{z-0,25-j0,5}\Big|_{z=0,25-j0,5} \Rightarrow \boxed{B = -\frac{1}{j}}$$

Άρα

$$H(z) = \frac{1/j}{z-0,25-j0,5} - \frac{-1/j}{z-0,25+j0,5}$$

$h(n) = 1/j \cdot (0,2-j0,5)^n \cdot u(n) + 1/j \cdot (0,25+j0,5)^n \cdot u(n)$

Το ίδιο, με μερικά κλάσματα μπορούμε να βρούμε και τον αντίστροφο μετασχημ. Z

π.χ. $X(z) = \frac{5z^2 + 0,5z + 1}{(z+0,3)(z+0,6)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+0,3} + \frac{\Gamma}{z+0,6} = \dots$

$X(z) = 13.8899 \cdot \frac{1}{1+0,6z^{-1}} - 14,4444 \cdot \frac{1}{1+0,3z^{-1}} + 5,5556$

$x(n) = 13,8899 \cdot (-0,6)^n u(n) - 14,444 + (-0,3)^n \cdot u(n) + 5,5556 \cdot \delta(n)$

Χαμηλοπερατό φίλτρο $\omega p = 0,35\pi$, $\Delta\omega = 0,025\pi$ $\delta s = 0,003$.

① Επιλογή κρουστικής απόκρισης: $h(k) = \frac{\sin(2\pi f_c k)}{\pi k}$

② Επιλογή παραθύρου: $\alpha_s = 20\log(\delta s) = 20\log(0,003) = -50\,dB$

③ Επιλογή της τιμής N: $N \cdot \Delta f = C \Rightarrow N = \frac{C}{\Delta f} = \frac{3,3}{0,0125} = 264$ (265)

π.χ. $\frac{3,3}{N} = C \Rightarrow C = 3,3 \quad \Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \Rightarrow \Delta f = 0,0125$

④ $k = \frac{N-1}{2} = \frac{265-1}{2} = 132$

⑤ $h(k) = \frac{\sin(2\pi f_c k)}{\pi \cdot k} = \frac{\sin(\omega_c \cdot k)}{\pi \cdot k} = \frac{\sin(0,3625\pi \cdot 132)}{\pi \cdot 132}$

$\omega_c = \frac{\omega_s + \omega_p}{2} = \frac{0,375\pi + 0,35\pi}{2} = 0,3625\pi$, $\Delta\omega = \omega_s - \omega_p$

Ορθογ.	-13	0,9/N	-21	Hanning:	-31	3.1/N	-44
Hamming	-41	3.3/N	-53	Blackman:	-57	5.5/N	-74

Χαμηλοπερατό φίλτρο Kaiser

① $\alpha_s = -20\log(\delta s)$

② $\beta = \begin{cases} 0,1102(\alpha_s - 8,7) & \alpha_s > 50 \\ 0,5842(\alpha_s - 21)^{0,4} + 0,7886(\alpha_s - 21) & 21 \le \alpha_s \le 50 \\ 0 & \alpha_s < 21 \end{cases}$

③ $\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ ④ $N = \frac{\alpha_s - 7,95}{14,36 \cdot \Delta f}$ $\alpha_s \ge 21$, $N = \frac{0,9}{\Delta f}$ $\alpha_s < 21$

⑤ $h(n) = h_d(n) \cdot w(n)$

$$h_d(n) = \frac{\sin[n-k]\cdot\omega_c}{(n-k)}, \quad w(n) = \frac{I_0\left[\beta\left(1 - \left[\frac{n-k}{k}\right]^2\right)^{1/2}\right]}{I_0(\beta)}$$