(6/4/21)

① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** **ΔΙΑΛΕΞΗ #7**

ΜΕΡΟΣ Β
ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

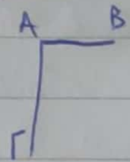
(99% θα ασχοληθούμε με απλά, συνεκτικά γραφήματα)

- **Θεμελιώδης ορισμός γραφήματος G (Graph):**

Αν V ένα σύνολο "σημείων" πεπερασμένο (vertex = κορυφή) και E ένα σύνολο "ευθυγράμμων τμημάτων" που συνδέουν κάποιες ή όλες τις κορυφές, το (V, E) (edge = ακμή) είναι ένα γράφημα με κορυφές $v \in V$ και ακμές $e \in E$.

- **Παραδείγματα:**

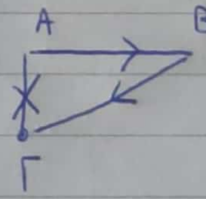
→ 1. G,



χωρίς διάταξη ($\rightleftarrows$) $|V| = 3$, $|E| = 2$

$V = \{A, B, \Gamma\}$, $E = \{AB = BA, A\Gamma = \Gamma A\}$

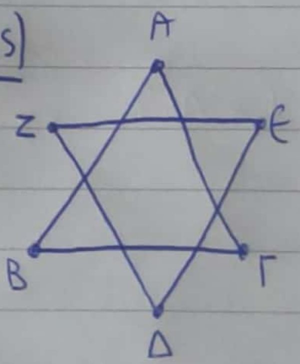
→ 2. G,



με διάταξη $|V| = 3$, $|E| = 4$

$V = \{A, B, \Gamma\}$, $E = \{AB, A\Gamma, \Gamma A, B\Gamma\}$

→ 3.(SOS)



χωρίς διάταξη $|V| = 6$, $|E| = 6$

$V = \{A, B, \Gamma, \Delta, E, Z\}$, $E = \{AB, A\Gamma, B\Gamma, \Delta E, \Delta Z, EZ\}$

© NEXT CO. GREECE

Scanned with CamScanner

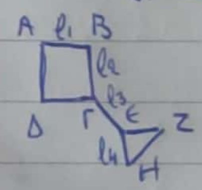
• GLOSSARY:

!!! → ① Συνεκτικό, Μη συνεκτικό G	Connected, Disconnected
② Περίπατος	Walk
③ Μονοπάτι (διαδρομή)	Trail (path)
④ Κύκλωμα	Circuit
⑤ Κύκλος	Circle
!!! → ⑥ Βαθμός Κορυφής	Degree of vertex
⑦ Κόμβος, κομβικό σημείο	Knots, nodes

• Ορισμός συνεκτικού G:

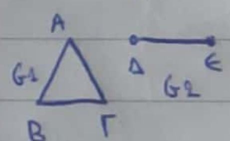
Ένα G καλείται συνεκτικό αν οποιοδήποτε ζεύγος κορυφών του μπορεί να ενωθεί μέσω κάποιου περιπάτου w.

→ Παράδειγμα a) και Αντιπαράδειγμα β)

a) 

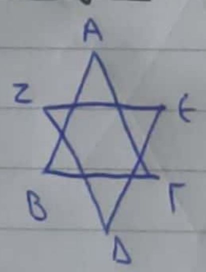
$e_1 = AB$, $e_2 = B\Gamma$, $e_3 = \Gamma E$, $e_4 = EZ$

$w = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

β) 

Προφανώς μη συνεκτικό και $G = G_1 \cup G_2$ λέμε ότι έχει δύο συνεκτικές συνιστώσες (components) τα G_1, G_2 (υπογραφήματα / sub graphs)

• H/W παγίδα: (δες παραδ. 3)



Είναι συνεκτικό;

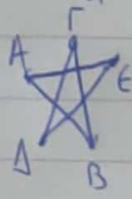
Απάντηση: Όχι (Γιατί;)

© NEXT Co. GREECE

Scanned with CamScanner

③

- <u>Παράδειγμα 4:</u>



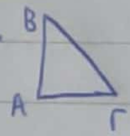
("μονοκονδυλιά") Είναι Συνεκτικότατο!

- <u>Βαθμός μίας κορυφής ενός G</u>

deg v για $v \in V$ είναι ο αριθμός των ακμών που εκπορεύονται εκ της v.

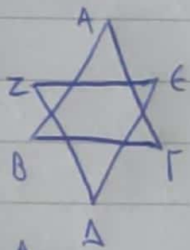
<u>π.χ.</u>

→ 1.



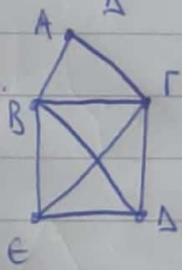
$\deg A = 2$, $\deg B = 2$, $\deg \Gamma = 2$

→ 2.



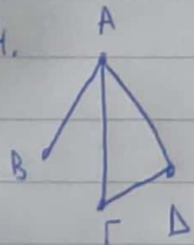
$\deg v = 2$ για κάθε $v \in V$

→ 3.



$\deg A = 2$, $\deg B = 4$, ...

→ 4.



$\deg A = \deg B = 1$

$\deg \Gamma = 2 = \deg \Delta$

$\deg A = 3$

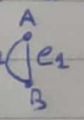
© NEXT Co. GREECE

Scanned with CamScanner

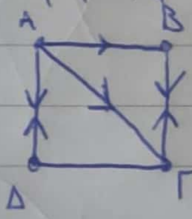
• Προτεινόμενες H/W:

(1) Δώστε ένα παράδειγμα μη συνεκτικού G με n κορυφές $n \geq 3$ και με πλήθος ακμών $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ (12:15)

(2) (Δύσκολο, θέλει θεωρία Euler). Αν σε ένα απλό (όχι e με πολλαπλότητα) συνεκτικό G καμία κορυφή ή ένα ζεύγος κορυφών έχει βαθμό περιττό τότε υπάρχει κλειστός περίπατος ανάμεσα σε κορυφές του G που δεν περνά 2 φορές από την ίδια ακμή.



(3) Ένας πίνακας λέγεται τύπου Markov αν είναι τετραγωνικός και αποτελείται από 0 και 1. Παίρνουμε 4 κορυφές για τις πόλεις Α, Β, Γ, Δ με τις e διαδρομές (μονόδρομοι ή όχι) ως εξής:



Στον πίνακα

	A	B	Γ	Δ
A	0	1		
B	0	0		
Γ			0	
Δ				0

Συμπληρώστε τις 16 συντεταγμένες και μετά αυτόν τον πίνακα (πίνακας των γειτνιαζόντων), βρείτε τον P^2. Τι παρατηρείτε (ποιοτικά?)

• Επαναληπτική άσκηση (Γεννήτριες Συναρτήσεις):

Θεωρούμε την τυπική δυναμοσειρά $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, όπου η (a_n) ορίζεται ως εξής: $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$, $a_n = a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-4}$, $n \geq 4$

Βρείτε την $f(x)$ ως ρητή συνάρτηση του x.

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = a_0 + x + x^2 + \sum_{n \geq 0} \left(a_{n-1} - a_{n-3} + a_{n-4}\right) x^n)$$

$$= a_0 + x + x^2 + \sum_{n \geq 4} a_{\overset{k}{n-1}} x^n - \sum_{n \geq 4} a_{\overset{k}{n-3}} x^n + \sum_{n \geq 4} a_{\overset{k}{n-4}} x^n$$

$$f(x) = a_0 + x + x^2 + \sum_{k \geq 3} a_k x^{k+1} - \sum_{k \geq 1} a_k x^{k+3} + \sum_{k \geq 0} a_k x^{k+4} = \text{(πίσω...)}$$

5

$$= a_0 + x + x^2 + x\left[f(x) - a_0 - x - x^2\right] - x^3\left[f(x) - a_0\right] + x^4 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = a_0 + x + x^2 + x f(x) - a_0 x - x^2 - x^3 - x^3 f(x) + a_0 x^3 + x^4 f(x)$$

$$\Rightarrow f(x)\left[1 - x + x^3 - x^4\right] = a_0 + x + \cancel{x^2} - a_0 x - \cancel{x^2} - x^3 + a_0 x^3$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{(a_0-1)x^3 - (a_0-1)x + a_0}{1 - x - x^3(1-x)} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

→ Υπάρχει x έτσι ώστε $a_0 = 1$?