Εφαρμοσμένα Μαθηματικά – Πρόοδος 23-01-22

Μελάκης Νικόλαος ΤΠ4772

ΘΕΜΑ 1

$$y = L\{y(t)\} \overset{LT}{\Rightarrow} \{s^2Y - sy(0) - y'(0)\} + \{sY - y(0)\} - 2Y = F(s)$$

$$\Rightarrow (s^2+s-2)Y = (s+1)y(0) + y'(0) + F(s)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{(s+2)y(0) + y'(0)}{(s^2+s-2)} + \frac{F(s)}{(s^2+s-2)}$$

Για το ολοκλήρωμα

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{-t}\, dt = \frac{1}{s+1}$$

Άρα $Y = \frac{(s+1)\cdot 7 + 8}{s^2+s-2} + \frac{\frac{1}{s+1}}{(s^2+s-2)} \Rightarrow$

$$Y = \frac{7s+15}{(s^2+s-2)} + \frac{1}{(s^2+s-2)(s+1)}$$

(1)

ΘΕΜΑ 2

α) $Z(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, F(x-k)\, dk = \int_0^7 F(x) \cdot F(x-k)\, dk +$

$\cancel{\int_7^{+\infty} F(x) \cdot F(x-k)\, dk} \to 0 = \int_0^7 (x-1)(x-k-2)\, dk =$

$\int_0^7 (x^2 - kx - 2x + k + 1)\, dk = \left[kx^2 - \frac{k^2}{2} x + 2kx + \frac{k^2}{2} + k \right]_0^7 =$

$7x^2 - \frac{49}{2} x + 14x + \frac{49}{2} + 7 = 7x^2 - \frac{77}{2} x + \frac{52}{2} = 7x^2 - \frac{77}{2} x$

$+ 28$

Επομένως, η συνάρτηση μας είναι πολυωνυμική άρα δεν έχει σημείο ασυνέχειας.

β) $L\{z(t)^2\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} (7t^2 - \frac{77}{2} t + 28) dt \Rightarrow$

$L\{z(t)\}(s) = \frac{9s^2 + 28}{2s^3}$

Το ολοκλήρωμα είναι:

$\int (7t^2 - \frac{21}{2}) e^{-st} dt = \frac{7}{2} \int (2t^2 - 3) e^{-3t} dt$

$\int (2 + 2 - 3) e^{-3t} dt \overset{x \cdot x}{=} - \frac{(2t^2 - 3) e^{-st}}{s} - \int \frac{-4te^{-st}}{s} dt$

$\int - \frac{4te^{-3t}}{s} dt = -\frac{4}{s} \int t e^{-st} dt$

$\int -\frac{e^{-st}}{s}dt$, θέτω $u=st \to \frac{du}{dt}=-s \to dt=-\frac{1}{s}du$

$= \frac{1}{s^2}\cdot e^{-st}$

$-\frac{te^{-st}}{s} - \int -\frac{e^{-st}}{s}dt = -\frac{te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2}$

$-\frac{4}{s}\int te^{-st}dt = \frac{4te^{-st}}{s^2} + \frac{4e^{-st}}{s^3}$

$-\frac{(2+2-3)e^{-st}}{s} - \int -\frac{4te^{-st}}{s}dt$

$= -\frac{(2t^2-3)e^{-st}}{s} - \frac{4te^{-st}}{s^2} - \frac{4e^{-st}}{s^3}$

$\frac{7}{2}\int (2t^3-3)e^{-st}dt = \frac{-7(2t^3-3)e^{-st}}{2s} - \frac{14te^{-st}}{s^2} - \frac{14e^{-st}}{s^2}$

και με τα άκρα έχουμε το αποτέλεσμα.