



**ΤΕΛΙΚΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

**ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2021 Α' ΠΕΡΙΟΔΟΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο:** Υπολογίστε την ακόλουθη ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} \alpha - \beta - \gamma & 2\alpha & 2\alpha \\ 2\beta & \beta - \gamma - \alpha & 2\beta \\ 2\gamma & 2\gamma & \gamma - \alpha - \beta \end{vmatrix}$$

**ΘΕΜΑ 2ο:** Διερευνήστε το πλήθος των λύσεων του συστήματος ( $\Sigma$ ) σε σχέση με τις τιμές της παραμέτρου  $\alpha$ :

$$\begin{bmatrix} \alpha & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} (\Sigma)$$

**ΘΕΜΑ 3ο:** α) Αν  $u$  είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, δείξτε ότι ο πίνακας  $Q = I - 2uu^T$  είναι ορθογώνιος  
β) Υπολογίστε τον  $Q$  όταν  $u^T = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$ .

**ΘΕΜΑ 4ο:** α) Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας  $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$  και να υπολογιστεί ο  $A^k$  όπου  $k$  το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού μητρώου σας.  
β) Με τη χρήση του θεωρήματος *Caley-Hamilton* υπολογίστε τον αντίστροφο του πίνακα  $A$ .

**ΘΕΜΑ 5ο:** α) Αν το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός πίνακα  $B$  είναι  $p_B(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 25\lambda + 172$  να βρεθεί η ορίζουσα του πίνακα  $B$ .  
β) Να βρείτε ένα  $3 \times 3$  πίνακα  $\Gamma$  ο οποίος να έχει φάσμα  $Sp(\Gamma) = \{-1, 1, 2\}$  και αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα  $v_1 = (-1, 0, 1)$ ,  $v_2 = (1, 2, 1)$ ,  $v_3 = (0, 3, 1)$ .

ΘΕΜΑ 1ο:		2,0
ΘΕΜΑ 2ο:		2,0
ΘΕΜΑ 3ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 4ο:	α)	1,0
	β)	1,0
ΘΕΜΑ 5ο:	α)	0,5
	β)	1,5
ΣΥΝΟΛΟ		10,0