

①

ΔΙΑΚΡΙΤΑ• ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΓΙΑ ΤΑ G:

- 1) → Όταν μας δίνουν να σχεδιάσουμε ένα G με συγκεκριμένες προδιαγραφές κοιτάμε αν δίνεται το ότι G = συνεκτικό.

π.χ.

Σχεδιάστε ένα G με 3 κορυφές που να έχουν βαθμό 0, 1, 3.

Πύλη

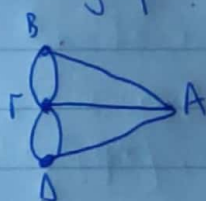


$$\begin{array}{l|l} A & \deg A = 0 \\ \hline B & \deg B = 1 \\ \hline \Gamma & \deg \Gamma = 3 \end{array}$$

- 2) → Κοιτάμε αν το συνεκτικό G είναι multigraph ή όχι.  
(Multigraph θα πει ότι κάποια ακμή είναι διπλή, τριπλή... κλπ)

π.χ.

Το G των 7 γεφυρών του Königsburg είναι συνεκτικό, αλλά είναι multigraph. (Δεν είναι regular)



$$\begin{array}{l} \deg A = 3 \\ \deg \Gamma = 5 \\ \deg B = \deg \Delta = 3 \end{array}$$

- 3) → Επίπεδα (planar) ή όχι G,

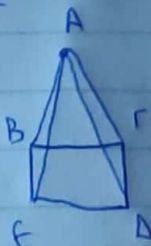
Καμία δυσκολία αφού αν το χώρο πάρει εύκολα στο επίπεδο (για regular connected G)  
(τετραγωνική πυραμίδα)

π.χ.



Έχουμε δώσει ήδη τον ορισμό της ισομορφίας γραφημάτων.

G' (planar)

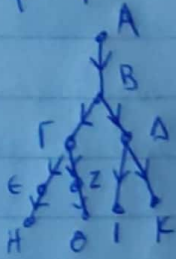


$$G' \cong G \text{ (ισομορφο)}$$

②

4) → Directed (προσανατολισμένα) ή όχι  $G$ .  
(Μας συμφέρει directed)

π.χ.



$\deg B = 2$  (Αν δεν είχε βελόνες = 3)

### ◦ Επαναληπτική Άσκηση - Γεννήτριες Συναρτήσεις

Αν  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  με  $a_0 = a_1 = 1$ ,  $a_2 = -1$ ,  $a_k = k$  ( $k \geq 3$ )

↑ παραγωγή (αν  $a_k$  εξαρτ. από το  $k$ )

Λύση:  
$$f(x) = 1 + x - x^2 + x \sum_{k=3}^{+\infty} (x^{k-1})' =$$

$$= 1 + x - x^2 + x \left[ \left( \sum_{k=0}^{+\infty} x^k - 1 - x + x^2 \right)' \right]$$

$$= 1 + x - x^2 + x \left[ \left( \frac{1}{1-x} \right)' - 0 - 1 + 2x \right]$$

$$= 1 + x - x^2 + \frac{x}{(1-x)^2} - x + 2x^2$$

$$= 1 + x^2 + \frac{x}{(1-x)^2}$$

Συμπέρασμα:  $f(x) \geq 1$  αν  $x \geq 0$

$$f(0) = 1, f(-1) = 1 - 1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$



③

## • Επανάληψη στις Αναδιατάξεις (rearrangement)

Βρείτε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΚΟΚΟΒΙΟΣ.

$$\begin{array}{c|c} 2 & K \\ 3 & O \end{array} \quad \frac{8!}{2!3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 56 \cdot 6 \cdot 10 = 560 \cdot 6 = 3360$$

## • Επαναληπτικό Τυπολόγιο

① Συνδυασμοί  $n$  ανά  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ),  $C_k^n = \frac{n!}{k!(n-k)!}$


② Μεταθέσεις  $n$  πραγμάτων  $P_n = n!$

③ Διαμοιράσματα  $\Omega$  ενός συνόλου  $|\Omega| = 2^{|A|}$

④ Διαμέριση (Partition) ενός φυσικού αριθμού  $n$   $\mu(n) = \text{αριθμός των } n_1, n_2, \dots, n_k \text{ τέτοιων ώστε } n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$

π.χ.  $4 = \begin{cases} 4 \\ 3+1 \\ 2+2 \\ 2+1+1 \\ 1+1+1+1 \end{cases} \rightarrow \mu(4) = 5$

⑤ Διαμέριση Συνόλου  $A$ ,  $B(A) = \left\{ \text{όλα τα υποσύνολα } A_1, \dots, A_k : \bigcup_{i=1}^k A_i = A \right\}$

π.χ.   $\{A, B, C\}, \{A\}$   
ή  $\{A, A\}, \{B, C\}$  κ.α. ...

Bell  $\rightarrow B(A)$  δίδεται από τον τύπο του Bell (εκτός ύλης)

## ⑥ Αρχή Εξαιρέτου - Αποκλεισμού

Για δύο σύνολα:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

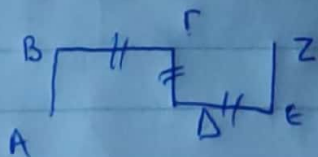
Για  $n=3 \rightarrow |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

## ⑦ Η αρχή του περιττού (PHP)

## ⑧ Η έννοια της γέφυρας (bridge)

π.χ.

Σχεδιάστε ένα συνεκτικό  $G$  με 3 ακριβώς γέφυρες



④

### • Ερωτηματικές Ασκήσεις

1) Σε ένα test 100 ερωτήσεων με πολλαπλή επιλογή 5 ~~απαντήσεις~~ <sup>απαντήσεις</sup> ανά ερώτηση, πόσα διαφορετικά test υπάρχουν.

→ (Υπόδειξη: Αν είχαμε μόνο μία ερώτηση θα ήταν  $5!$ .)

2) Πόσοι θετικοί ακεραίοι  $< 1000$  διαιρούνται με το 7?

•

3) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί περιέχουν διαφορετικά ψηφία?

4) Πόσοι άνθρωποι μπορούν να είναι σε ένα δωμάτιο ώστε στα είσοδα τουλάχιστον 2 τους να γεννήθηκαν Δευτέρα?

5) Σχεδιάστε  $G$  με κορυφές βαθμού 1, 1, 2, 2, 3, 3

6) Το ίδιο <sup>↑</sup> για βαθμούς 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2

7) Υπάρχει συνεκτικό  $G$  με κορυφές βαθμού 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2?

8) Ένα πλέγμα (grid)  $m \times n$ , ( $m \geq 2, n \geq 2$ ) ως  $G$ , πόσες ακμές έχει?  
(μνησθείτε το παράδειγμα με  $m=n=5$ )

9) Αν  $f(n)=1$  για  $n \leq 1$  και  $f(n)=2f(n-1)+3$ , <sup>ακεραίος (όρα και αρνητικός)</sup> υπολογίστε τις τιμές  $f(n)$  για  $n \leq 5$

10) Αν  $|A|=12$ ,  $|B|=7$ ,  $|C|=10$  και  $A$  με  $B$  ξένα προς άλλα και  $A$  με  $C$  ξένα προς άλλα, βρείτε εκτίμηση των  $|A \cup B \cup C|$ ,  $|B \cap C|$ ,  $|A \cap B \cap C|$