Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών

Λογικός Προγραμματισμός

Καθηγητής Μανόλης Μαρακάκης

Ηράκλειο, Ιούλιος 2019

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

Κατάλογος Πινάκων

Κατάλογος Αλγορίθμων

Κατάλογος Προγραμμάτων

1. Εισαγωγή

1.1. Γιατί Λογικός Προγραμματισμός;

Προγραμματιστική Μέθοδος/Προσέγγιση (programming paradigm) είναι ο τρόπος που προγραμματίζουμε. Δηλαδή, ο τρόπος που βλέπουμε ένα πρόβλημα (τον κόσμο) όταν το γράφουμε σε πρόγραμμα.

- Μια μέθοδος/προσέγγιση προγραμματισμού τείνει να επιβάλει κάποια εικόνα/άποψη για το πρόβλημα (τον κόσμο) στους χρήστες της.
- Κάθε μέθοδος/προσέγγιση προγραμματισμού έχει μια σημασιολογία η οποία μας οδηγεί να σκεφτόμαστε και να βλέπουμε το πρόβλημα με βάση αυτή τη σημασιολογία.

Οι κυριότερες προγραμματιστικές μέθοδοι/προσεγγίσεις (programming paradigms) είναι οι εξής:

- ***Προστακτική (Imperative) μέθοδος/προσέγγιση***. Με αυτή την προσέγγιση η ροή ελέγχου είναι μια ακολουθία από εντολές. Το πρόγραμμα λέει στον υπολογιστή πώς να κάνει κάτι και ως συνέπεια της ακολουθίας αυτών των πράξεων τί αποτέλεσμα θα πάρει. Οι γλώσσες που ακολουθούν αυτή την προσέγγιση χαρακτηρίζονται ως ***προστακτικές γλώσσες***.
- ***Δηλωτική (Declarative) μέθοδος/προσέγγιση***. Το πρόγραμμα λέει στον υπολογιστή τί θέλει να κάνει το πρόγραμμα (δηλαδή τί πρόβλημα να λύσει), και ο υπολογιστής καθορίζει πώς θα το κάνει (δηλαδή καθορίζει πώς θα λύσει το πρόβλημα). Οι γλώσσες που ακολουθούν αυτή την προσέγγιση χαρακτηρίζονται ως ***δηλωτικές γλώσσες***.

Τα κύρια χαρακτηριστικά των *προστακτικών (imperative) γλωσσών* προγραμματισμού είναι τα εξής:

- Η σημασιολογία τους βασίζεται σε καταστάσεις.
- Οι υπολογισμοί (computations) θεωρούνται ως μια διαδικασία μετάβασης από μια κατάσταση σε μια άλλη. Η σειρά με την οποία γίνονται οι υπολογισμοί είναι σημαντική. Δηλαδή η σειρά εκτέλεσης των πράξεων και των εντολών είναι σημαντική.
- Κάθε βήμα υπολογισμών (computation) σε αυτές τις γλώσσες περιγράφει τη διαδικασία αλλαγής μιας κατάστασης.

Οι κυριότερες κατηγορίες προστακτικών γλωσσών προγραμματισμού είναι οι εξής.

- Διαδικαστικές γλώσσες.
- Αντικειμενοστραφείς γλώσσες.
  Παραδείγματα: C, Pascal, Java, κτλ .

Τα κύρια χαρακτηριστικά των *δηλωτικών (declarative) γλωσσών* προγραμματισμού είναι τα εξής.

- Η σημασιολογία τους εστιάζεται στη ***λογική*** (δηλαδή στο ***τί κάνει το πρόγραμμα***) και όχι στον ***έλεγχο*** (δηλαδή στο ***πώς θα το κάνει***).

Οι κυριότερες κατηγορίες δηλωτικών γλωσσών είναι οι παρακάτω:

- ***Λογικός (Logic) προγραμματισμός***. Οι υπολογισμοί (computations) είναι μια διαδικασία συλλογισμών, π.χ. Prolog.

- ***Συναρτησιακός (Functional) προγραμματισμός***. Οι υπολογισμοί (computations) είναι υπολογισμοί συναρτήσεων, π.χ. Lisp, Scheme, κτλ. Ο συναρτησιακός προγραμματισμός αντιμετωπίζει/βλέπει την λύση του προβλήματος ως ένα σύνολο από συναρτήσεις που πρέπει να εκτελεστούν για να λυθεί.
- ***Περιοριστικός (Constraint) προγραμματισμός***. Οι υπολογισμοί (computations) θεωρούνται ως ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών, π.χ. Prolog III, CHIP, κτλ . Οι περιορισμοί καθορίζουν τις ιδιότητες της λύσης που πρέπει να βρεθεί.

Ένα άλλο σημαντικό θέμα είναι το επίπεδο προγραμματισμού που υποστηρίζει η γλώσσα. Διακρίνουμε προγραμματισμό σε *χαμηλό επίπεδο* και *σε υψηλό επίπεδο*.

- *Προγραμματισμός σε χαμηλό επίπεδο* βλέπει τον κόσμο (δηλαδή το πρόβλημα) κοντά στον τρόπο με το οποίο ο υπολογιστή κάνει τους υπολογισμούς.
- *Προγραμματισμός σε υψηλό επίπεδο* βλέπει τον κόσμο (δηλαδή το πρόβλημα) κοντά στις προδιαγραφές του προβλήματος. Δηλαδή με αυτό το είδος προγραμματισμού περιγράφεις το πρόβλημα που χρειάζεται να λυθεί και όχι τον τρόπο λύσης του.

1.2. Τι είναι ο Λογικός Προγραμματισμός;

Υπάρχουν πολλές απόψεις με επικαλύψεις, από τις οποίες μπορούμε να δούμε το Λογικό Προγραμματισμό (ΛΠ). Η κάθε άποψη τονίζει άλλα χαρακτηριστικά του ΛΠ που τον διακρίνουν από τα άλλα προγραμματιστικά παραδείγματα όπως ο προστακτικός προγραμματισμός. Αυτά τα χαρακτηριστικά είναι τα παρακάτω.

1. Στο ΛΠ οι *υπολογισμοί (computations)* είναι μια *διαδικασία παραγωγής (deduction).*
2. Στο ΛΠ έχουμε απόδειξη θεωρημάτων.
3. Στο ΛΠ έχουμε δηλωτικό προγραμματισμό σε αντίθεση με τον προστακτικό ή διαδικαστικό προγραμματισμό.
4. Υπάρχει άλλη έννοια για το τι είναι αλγόριθμος/πρόγραμμα στο ΛΠ.
   Αλγόριθμός = Λογική + Έλεγχος.
5. Ο ΛΠ είναι μια πολύ υψηλού επιπέδου γλώσσα προγραμματισμού.
6. Στο ΛΠ έχουμε διαδικαστική ερμηνεία μιας δηλωτικής προδιαγραφής.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε κάθε μια από τις προαναφερθείσες απόψεις με τις οποίες μπορούμε να δούμε το ΛΠ.

1. Οι υπολογισμοί ως διαδικασία παραγωγής (deduction).

- Ο λογικός προγραμματισμός προσφέρει ένα διαφορετικό παράδειγμα για τους υπολογισμούς. Ο ***υπολογισμός (computation)*** είναι μια ***λογική παραγωγή (deduction)***.
- Χρησιμοποιεί τη γλώσσα της λογικής για να εκφράσει δεδομένα και προγράμματα.
  ∀X ∀Y πατέρας(X ,Y) ***<u>εάν</u>*** *γονέας(X ,Y)* ***<u>και</u>*** *άρρεν(X)*.
- Οι γλώσσες του ΛΠ χρησιμοποιούν την Λογική Πρώτης Τάξης (ΛΠΤ) ή γνωστό ως Κατηγορηματικό Λογισμό Πρώτης Τάξης ή απλά Κατηγορηματικό Λογισμό (ΚΛ).
- Η έννοια της πρώτης τάξης αναφέρεται στο ότι μπορούμε να έχουμε ποσοδείκτες πάνω σε αντικείμενα (σταθερές, μεταβλητές) αλλά όχι πάνω σε σχέσεις (κατηγορήματα) ή συναρτήσεις.
  Μπορούμε να πούμε «*Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί*»
  ∀X/Άνθρωπος θνητός(X)

αλλά δεν μπορούμε να πούμε «*Όλες οι ιδιότητες του Γιάννη*, π.χ. ψηλός, εργατικός, επιμελής, κτλ»,

$\forall P\ P(\gamma\iota\alpha\nu\nu\eta\varsigma)$

2. Απόδειξη θεωρημάτων.

- Ο λογικός προγραμματισμός χρησιμοποιεί την έννοια της ***αυτόματης απόδειξης θεωρημάτων*** ως ένα μεταφραστή.
- Η διαδικασία απόδειξης θεωρημάτων (theorem proving or the proof) παράγει μια επιθυμητή λύση από ένα ***αρχικό σύνολο αξιωμάτων***.
- Η λύση πρέπει να είναι «***δημιουργική» (constructive)*** ώστε περισσότερες από μια αληθείς ή ψευδείς απαντήσεις να εξαχθούν.

3. Δηλωτικός προγραμματισμός.

- Οι γλώσσες του ΛΠ είναι δηλωτικές γλώσσες προγραμματισμού.
- Σε μια δηλωτική γλώσσα καθορίζεται ***τί*** *χρειάζεται να υπολογιστεί* αλλά όχι ***πώς*** *θα υπολογιστεί*.
- Ο προγραμματιστής πρέπει να καθορίσει.
  - Το ***σύνολο των αντικειμένων*** που εμπλέκονται στους υπολογισμούς.
  - Τις ***σχέσεις*** που υπάρχουν μεταξύ αυτών των αντικειμένων.
  - Οι ***περιορισμοί*** που πρέπει να ισχύουν στο πρόβλημα για να λυθεί.
- Ο μεταφραστής ή ο μεταγλωττιστής της γλώσσας του λογικού προγραμματισμού αποφασίζει πώς θα ικανοποιηθούν οι περιορισμοί.

4. Άλλη έννοια για το τι είναι αλγόριθμος/πρόγραμμα.

- Ο ***προστακτικός*** ή ***διαδικαστικός*** προγραμματισμός εκφράζεται από την αποφθεγματική εξίσωση του Wirth

  Προγράμματα = Αλγόριθμοι + Δομές Δεδομένων
- Ο ***δηλωτικός*** προγραμματισμός σε γλώσσες Τεχνητής Νοημοσύνης όπως είναι η Prolog εκφράζεται από την αποφθεγματική εξίσωσης του Kowalski

  Αλγόριθμος = Λογική + Έλεγχος.

  ή ισοδύναμα

  Πρόγραμμα = Λογική + Έλεγχος.
- Μπορούμε να δούμε το τμήμα της ***λογικής*** ως «*μια προδιαγραφή των ουσιαστικών περιορισμών του προβλήματος*». Το τμήμα της ***λογικής*** από μόνο του προσδιορίζει τις παραγόμενες λύσεις του προβλήματος.
- Μπορούμε να δούμε το τμήμα του ***ελέγχου*** ως «*ένα σύμβουλο (ένα μηχανισμό) σε μια υπολογιστική μηχανή (μεταφραστή ή μεταγλωττιστή) που την καθοδηγεί πώς πρέπει να προχωρήσει, η υπολογιστική μηχανή, για να ικανοποιηθούν οι περιορισμοί του προβλήματος*». Ουσιαστικά το τμήμα ελέγχου παριστάνει τις διαφορετικές στρατηγικές απόδειξης- θεωρημάτων.

5. Μια πολύ υψηλού επιπέδου γλώσσα προγραμματισμού.

- Μια καλή γλώσσα προγραμματισμού δεν πρέπει να επιβαρύνει το προγραμματιστή με μη ουσιαστικές λεπτομέρειες.
- Η εξέλιξη των γλωσσών προγραμματισμού ήταν προς την κατεύθυνσης της απεμπλοκής του προγραμματιστή από λεπτομέρειες που δεν σχετιζόταν με το πρόβλημα αλλά αφορούσαν τη διαδικασία λύσης του προβλήματος και τον υπολογιστή (συμβολικές /assembly γλώσσες, Fortran, ALGOL, Pascal, C, Java) .

- Οι γλώσσες του ΛΠ είναι μια ομάδα γλωσσών οι οποίες προσπαθούν να απεμπλέξουν τον προγραμματιστής από τον να εισάγει στο πρόγραμμα και τον μηχανισμό ελέγχου των υπολογισμών.

6. Διαδικαστική ερμηνεία μια δηλωτικής προδιαγραφής.

- Ας θεωρήσουμε την λογική έκφραση

  $\forall X \ \ \forall Y$ *πατέρας(X,Y)* ***εάν*** *γονέας(X,Y)* ***και*** *άρρεν(X).*

- Μπορεί να γραφτεί σε Prolog ως εξής:

  πατέρας(X,Y) :- γονέας(X,Y), άρρεν(X).

- Αυτή η έκφραση έχει δύο ερμηνείες, τη ***δηλωτική ερμηνεία*** και τη ***διαδικαστική ερμηνεία.***
- Η ***δηλωτική ερμηνεία*** *είναι η εξής*:

  «*Ο X είναι πατέρας του Y εάν ο X είναι γονέας του Y και ο X είναι άρρεν*».

  Η δηλωτική ερμηνεία εκφράζεται ως μια πρόταση αληθών προϋποθέσεων, «*ο X είναι γονέας του Y και ο X είναι άρρεν*», η οποία πρέπει να είναι αληθής για να ικανοποιείται η σχέση του «*πατέρας*».
- Η ***διαδικαστική ερμηνεία*** *είναι η εξής*:

  «*Για να αποδειχθεί ότι ο X είναι πατέρας του Y πρέπει να αποδειχθεί ότι ο X είναι γονέας του Y και ότι ο X είναι άρρεν*».

  Δηλαδή μια περιγραφή τι πρέπει να αποδειχθεί για να είναι αληθής η σχέση *πατέρας*.

Ορισμός 1.1

Λογικός Προγραμματισμός είναι μια προγραμματιστική μέθοδος/προσέγγιση η οποία βασίζεται στη τυπική λογική. Ένα πρόγραμμα σε μια γλώσσα του λογικού προγραμματισμού είναι ένα σύνολο από προτάσεις σε λογική οι οποίες εκφράζουν γεγονότα και κανόνες για το πεδίο ενός προβλήματος.

1.3. Ασκήσεις

Άσκηση 1

Τι ονομάζεται προγραμματιστική μέθοδος; Ποιες είναι οι κυριότερες προγραμματιστικές μέθοδοι/προσεγγίσεις (programming paradigms);

Άσκηση 2

Ποια είναι τα κύρια χαρακτηριστικά των *προστακτικών (imperative) γλωσσών* προγραμματισμού και των *δηλωτικών (declarative) γλωσσών* προγραμματισμού;

Άσκηση 3

Ποια χαρακτηριστικά διακρίνουν το ΛΠ από τα άλλα προγραμματιστικά παραδείγματα;

Άσκηση 4

Να δώσετε ένα παράδειγμα το οποίο να εξηγεί την πρόταση/έκφραση «οι *υπολογισμοί (computations)* στο ΛΠ είναι μια *διαδικασία παραγωγής (deduction).»*.

Άσκηση 5

Να εκφράσετε με μορφή εξίσωσης την έννοια του αλγορίθμου/προγράμματος στο λογικό προγραμματισμό. Να εξηγήσετε τα στοιχεία που υπάρχουν στο δεξιό μέρος της εξίσωσης. Να κάνετε το ίδιο για το προστακτικό προγραμματισμό.

Άσκηση 6
Θεωρήσετε τη λογική έκφραση

$\forall X \quad \forall Y$ *πατέρας(X ,Y)* ***εάν*** *γονέας(X ,Y)* ***και*** *άρρεν(X).*

Να τη γράψετε σε Prolog και να δώσετε τη δηλωτική και τη διαδικαστική ερμηνεία της έκφρασης.

Άσκηση 7
Τι είναι ο λογικός προγραμματισμός;

2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική σε Προτασιακή Λογική

2.1. Εισαγωγή

Ένας από τους πρώτους τρόπους αναπαράστασης γνώσεων ήταν η λογική. Η πιο θεμελιώδης έννοια στη λογική είναι η αλήθεια. Μία πρόταση μπορεί να έχει δύο πιθανές τιμές είτε αληθής ή ψευδής. Για παράδειγμα, η ακόλουθη πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής ή ψευδής.

Ο Γιάννης είναι τριτοετής σπουδαστής στο Τμήμα Πληροφορικής.

Η εκφραστική δύναμη συστημάτων η αναπαράσταση γνώσεων των οποίων στηρίζεται στην λογική έγκειται στον τρόπο με τον οποίο κτίζεται η γνώση. Αρχικά, έννοιες πάνω στις οποίες απλές ιδέες μπορούν να εκφραστούν είναι η έννοια της αλήθειας και της μη αλήθειας. Με επιπλέον έννοιες και σύμβολα όπως οι λογικοί σύνδεσμοι, τα κατηγορήματα, κτλ. περισσότερο εκφραστικές λογικές μπορούν να δημιουργηθούν, κατά συνέπεια πιο πολύπλοκες και πιο λεπτές ιδέες μπορούν να αναπαρασταθούν.
Η μελέτη της λογικής ως μέθοδος αναπαράστασης γνώσεων και εξαγωγής συμπερασμάτων περιλαμβάνει τα εξής:

1. Την *συντακτική μορφή* των προτάσεων. Δηλαδή ποια μορφή θα έχουν οι απλές προτάσεις και πως θα δημιουργούνται οι σύνθετες προτάσεις.
2. Την *ερμηνεία* και *αλήθεια* των προτάσεων. Μια πρόταση ανάλογα με το πεδίο του προβλήματος μπορεί να έχει διαφορετικές ερμηνείες. Για παράδειγμα, η σύνθετος πρόταση "p *or* q" μπορεί να έχει την εξής ερμηνεία στο χώρο των ακέραιων αριθμών «Ο Ν είναι άρτιος ακέραιος *ή* ο Ν είναι περιττός ακέραιος». Στο χώρο της μετεωρολογίας μπορεί να έχει την εξής ερμηνεία «Ο καιρός είναι βροχερός ή ο καιρός είναι συννεφιασμένος». Η αλήθεια της σύνθετης πρότασης εξαρτάται από την αλήθεια των απλών προτάσεων p και q.
3. Την *απόδειξη* ή *εξαγωγή* νέων προτάσεων από τις υπάρχουσες προτάσεις

Η αναπαράσταση γνώσεων σε λογική είναι δηλωτική. Τα πλεονεκτήματα της είναι τα εξής:
α. Η γνώση μπορεί εύκολα ν‘ αλλάζει.
β. Επέκταση της γνώσης γίνεται με συμπερασματικούς κανόνες οι οποίοι εξάγουν επιπλέον γνώση πέρα απ‘ αυτή που σαφώς έχει οριστεί.
γ. Μπορεί να γίνει επεξεργασία της γνώσης από αναδρομικά προγράμματα. Συνεπώς, ένα σύστημα βασισμένο σε λογική μπορεί να απαντήσει σε ερωτήσεις για το τι γνωρίζει.

Ο προτασιακός λογισμός είναι η πιο απλή μορφή λογικής, ασχολείται με την αναπαράσταση πληροφοριών ως προτάσεις καθώς και με την εξαγωγή συμπερασμάτων από προτάσεις. Ο προτασιακός λογισμός είναι μια συμβολική λογική η οποία ασχολείται με τις λογικές ιδιότητες συνθέτων προτάσεων. Μία πρόταση μπορεί να έχει μια τιμή από τις τιμές αληθείας, *αληθής* και *ψευδής*.

Παράδειγμα

Πρόταση	*Τιμή αληθείας*
Η Κρήτη είναι νησί	αληθής
Η Πελοπόννησος είναι νησί	ψευδής

Ενώ οι εκφράσεις, α) δυο συν τρία και β) ο πατέρας του Κώστα, δεν είναι προτάσεις κατά συνέπεια δεν μπορούμε να τους δώσουμε κάποια τιμή αληθείας.

Ο ισχυρισμός, *η Κρήτη είναι νησί και βρίσκεται νοτίως της Θήρας*, είναι μια σύνθετη πρόταση η οποία αποτελείται από τις εξής δύο προτάσεις: α) Η Κρήτη είναι νησί και β) η Κρήτη βρίσκεται νοτίως της Θήρας.

Αυτές οι δυο προτάσεις συνδέθηκαν με τον σύνδεσμο ***και*** για να σχηματίσουν την παραπάνω σύνθετη πρόταση. Απλές προτάσεις μπορούν να συνδέονται με λογικούς συνδέσμους για σχηματισμό πιο σύνθετων προτάσεων. Οι πιο συνηθισμένοι λογικοί σύνδεσμοι είναι οι εξής:

Σύμβολο λογικού συνδέσμου	**Έννοια**	**Αγγλικά σύμβολα και έννοια**
$\wedge$ (.. και ..)	σύζευξη	and
$\vee$ (.. ή ..)	διάζευξη	or
$\neg$ (όχι ..)	άρνηση	not
$\rightarrow$ (εάν .. τότε..)	συνεπαγωγή	implies, if..then, only if
$\leftarrow$ .. μόνο εάν ..	συνεπαγωγή	only if
$\leftrightarrow$ (.. εάν και μόνο εάν ..)	ισοδυναμία	equivalent, if and only if

Η χρήση λογικών συνδέσμων σε προτάσεις δημιουργεί την πιο απλή μορφή λογικής, τον προτασιακό λογισμό. Με τον προτασιακό λογισμό μπορούμε να εκφράσουμε σύνθετες προτάσεις.

Παραδείγματα

- Ο Γιάννης σπουδάζει Πληροφορική και βρίσκεται στο τρίτο έτος.
- Εάν ο Γιάννης είναι τριτοετής σπουδαστής Πληροφορικής τότε έχει εγγραφεί στο μάθημα Τεχνητή Νοημοσύνη.

2.2. Τύποι και η Αλήθειά τους

2.2.1. Σύνταξη Προτάσεων

Οι απλές προτάσεις ονομάζονται ***ατομικοί τύποι (atomic formula)*** *ή* ***άτομα (atoms).*** Με λογικούς συνδέσμους μπορούμε να συνδέσουμε είτε ατομικούς τύπους ή σύνθετες προτάσεις. Οι ατομικοί τύποι και οι σύνθετες προτάσεις ονομάζονται *καλά-σχηματισμένοι τύποι (well-formed formulas)* ή *τύποι (formulas) ή λογικές παραστάσεις ή εκφράσεις (expressions).* Το αλφάβητο του προτασιακού λογισμού αποτελείται από τα εξής σύμβολα:

1. Τις δύο **προτασιακές σταθερές *Α*** και ***Ψ*** οι οποίες παριστάνουν τις τιμές Αληθής (Α) και Ψευδής (Ψ) αντίστοιχα. Οι αντίστοιχες τιμές στην αγγλική είναι T, F οι οποίες παριστάνουν τις τιμές True (T) και False (F) αντίστοιχα.
2. Τις ***προτασιακές μεταβλητές***, p, q, r, s κ.τ.λ.. Κάθε προτασιακή μεταβλητή μπορεί να πάρει μια από τις τιμές Αληθής και Ψευδής

3. Τους ***προτασιακούς συνδέσμους*** $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ και τις παρενθέσεις ( ). Οι προτασιακοί σύνδεσμοι $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ ονομάζονται ***λογικοί σύνδεσμοι*** του προτασιακού λογισμού.

Οι *προτασιακές μεταβλητές* και οι *προτασιακές σταθερές* είναι *ατομικοί προτασιακοί τύποι* ή *ατομικοί τύποι*, δηλαδή τύποι οι οποίοι δεν μπορούν να χωριστούν σε μικρότερα τμήματα. Συνδέοντας ατομικούς τύπους με συνδέσμους δημιουργούνται οι σύνθετοι ατομικοί τύποι.

Ορισμός 2.1

Μια πρόταση η οποία αποτελείται από μία μόνο *προτασιακή μεταβλητή* ή μία μόνο *προτασιακή σταθερά* ονομάζεται ***ατομική πρόταση*** ή ***ατομικός τύπος***. Όλες οι μη ατομικές προτάσεις ονομάζονται ***σύνθετες προτάσεις*** ή ***σύνθετοι τύποι***. Κάθε σύνθετη πρόταση πρέπει να περιέχει τουλάχιστον ένα λογικό σύνδεσμο.

Ορισμός 2.2

Οι καλά σχηματισμένοι τύποι ή τύποι του προτασιακού λογισμού ορίζονται ως εξής.

1. Κάθε ατομικός τύπος είναι ένας τύπος.
2. Εάν φ είναι ένας τύπος τότε $(\neg\varphi)$ είναι τύπος.
3. Εάν, φ και ψ είναι τύποι τότε $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$, $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ είναι τύποι.
4. Μια έκφραση είναι τύπος εάν και μόνο εάν μπορεί ν' αποδειχθεί με τους προηγούμενους τρεις κανόνες ότι είναι τύπος.

Οι τύποι που παράγονται με τον προηγούμενο ορισμό είναι πλήρεις από παρενθέσεις έτσι ώστε να μη έχουν διφορούμενη ερμηνεία.

Παραδείγματα

1. Η παράσταση $(p \wedge q) \vee ((\neg r) \wedge q)$ είναι ένας τύπος.
2. Η παράσταση $\neg((p \rightarrow q) \vee (q\wedge r))$ είναι ένας τύπος.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός.

- p,q,r,s,t, κτλ με ή χωρίς δείκτες παριστάνουν ***ατομικές (απλές) προτάσεις*** ή ***ατομικούς (απλούς) τύπους***.
- P,Q,R,S,T, κτλ ή φ, ψ, ω (πεζά) ή Φ (κεφαλαίο) με ή χωρίς δείκτες παριστάνουν ***σύνθετες προτάσεις*** ή ***σύνθετους τύπους.***

Ορισμός 2.3

Μια πρόταση ονομάζεται ***στοιχειώδης τύπος (literal)*** εάν έχει την μορφή p ή $\neg$p όπου p είναι μια προτασιακή μεταβλητή.

Συχνά οι παρενθέσεις παραλείπονται από τους τύπους επειδή οι σχηματιζόμενοι τύποι είναι πολύ μεγάλοι, επιπλέον η ανάγνωση τους είναι δύσκολη. Για να γίνει σωστή ερμηνεία ενός τύπου όταν παραλείπονται παρενθέσεις πρέπει να γίνει χρήση της σειράς προτεραιότητας των λογικών συνδέσμων. Η ***προτεραιότητα*** *των λογικών συνδέσμων* ακολουθεί την εξής σειρά, $\neg$(μεγαλύτερη), $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$(μικρότερη). Κάθε δυαδικός τελεστής εφαρμόζεται στον μικρότερο τύπο που τον περιβάλει. Ο τελεστής $\neg$ εφαρμόζεται στον μικρότερο τύπο που τον ακολουθεί. Οι κανόνες προτεραιότητας δεν διασαφηνίζουν για την πρόταση $p \wedge q \wedge r$ ποια από τις επόμενες δύο ερμηνείες είναι η σωστή ερμηνεία της ((p $\wedge$q) $\wedge$ r) ή (p $\wedge$(q $\wedge$ r)). Για τους δυαδικούς λογικούς τελεστές χρειάζεται να καθοριστεί η ***προσεταιριστικότητα*** (***associativity***) τους για να μην υπάρχουν ασάφειες στην ερμηνεία των προτάσεων. Όλοι οι δυαδικοί τελεστές έχουν αριστερή *προσεταιριστικότητα*. Αυτό σημαίνει ότι η σωστή ερμηνεία της πρότασης p $\wedge$q $\wedge$ r είναι ((p $\wedge$q) $\wedge$ r). Εάν θέλουμε να γράψουμε την πρόταση $\neg$(p$\rightarrow$q) θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε παρενθέσεις γιατί η πρόταση χωρίς παρενθέσεις $\neg$p$\rightarrow$q παριστάνει την πρόταση ($\neg$p)$\rightarrow$q.

Παραδείγματα

	Πρόταση χωρίς παρενθέσεις	*Ερμηνεία της πρότασης*
1.	$\neg$ p$\wedge$q	(($\neg$ p) $\wedge$q)
2.	p$\rightarrow$q $\vee$ $\neg$ r	(p$\rightarrow$ (q $\vee$ ($\neg$ r)))
3.	p$\rightarrow$q $\leftrightarrow$ $\neg$ p $\vee$ q	((p$\rightarrow$q) $\leftrightarrow$ (($\neg$ p) $\vee$ q))
4.	p$\rightarrow$q $\rightarrow$ r	(p$\rightarrow$q) $\rightarrow$ r

Η αλήθεια των σύνθετων προτάσεων εξαρτάται από την αλήθεια των ατομικών τύπων από τους οποίους αποτελούνται. Η αλήθεια σύνθετων προτάσεων οι οποίες συνδέονται με τους λογικούς συνδέσμους $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ δίνεται από τον πίνακα ***Πίνακας 2.1*** στον οποίο τα p και q είναι προτάσεις, Α και Ψ σημαίνει αληθές και ψευδές αντίστοιχα.

p	q	p $\wedge$q	p$\vee$ q	$\neg$ p	p $\rightarrow$q	p$\leftrightarrow$q
Α	Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Α

Πίνακας 2.1: Πίνακας Αληθείας των Προτασιακών Συνδέσμων.

2.2.2. Αλήθεια Προτάσεων

Οι τιμές αληθείας των προτάσεων του πίνακα ***Πίνακας 2.1*** μπορούν να εκφραστούν και ως εξής:

1. Η σύνθετη πρόταση p$\wedge$q είναι αληθής όταν και οι δύο προτάσεις p και q είναι αληθείς, διαφορετικά είναι ψευδής.
2. Η σύνθετη πρόταση p$\vee$q είναι αληθής όταν η μια τουλάχιστον από τις προτάσεις p και q είναι αληθής, διαφορετικά είναι ψευδής.
3. Η σύνθετος πρόταση $\neg$p είναι αληθής όταν η πρόταση p είναι ψευδής, διαφορετικά είναι ψευδής.
4. Η αλήθεια του p$\rightarrow$q ορίζεται να είναι αληθής στις εξής περιπτώσεις α) εάν το p και το q είναι αληθή β) εάν το p είναι ψευδές και το q είναι είτε αληθές ή ψευδές. Η αλήθεια του p$\rightarrow$q ορίζεται να είναι ψευδής στην περίπτωση που το p είναι αληθές και το q είναι ψευδές.

Η πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι αληθής εάν τα p και q έχουν την ίδια αλήθεια. Αυτό συμβαίνει, στις εξής δυο περιπτώσεις: α) Εάν το p και το q είναι αληθή β) εάν το p και το q είναι ψευδή. Διαφορετικά, η πρόταση $p \leftrightarrow q$ είναι ψευδής.
Ας υποθέσουμε ότι φ είναι ένας τύπος και $p_1, \ldots, p_\kappa$ είναι ατομικοί τύποι οι οποίοι υπάρχουν στον τύπο της φ. Για όλες τις δυνατές τιμές αληθείας που καταχωρούνται στα $p_1, \ldots, p_\kappa$ αντιστοιχεί από μια τιμή αληθείας της φ. Οι τιμές αληθείας της φ για όλες τις δυνατές τιμές αληθείας των $p_1, \ldots, p_\kappa$ βρίσκονται με πίνακες. Αρχικά, καταχωρούνται τιμές αληθείας στους ατομικούς τύπους. Στη συνέχεια, υπολογίζονται οι εκφράσεις της φ αρχίζοντας από εκείνες των οποίων ο τελεστής έχει την μεγαλύτερη προτεραιότητα και ούτω καθεξής. Σε κάθε περίπτωση ακολουθούμε την προσεταιριστικότητα των τελεστών.

Παραδείγματα

1. Η τελευταία στήλη του πίνακα **Πίνακας 2.2** μας δίνει την τιμή αληθείας του τύπου $p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$ ο οποίος πλήρης με παρενθέσεις έχει την μορφή $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee (\neg q)))$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Πίνακας 2.2: Πίνακας αληθείας του τύπου $p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$

2. Η τελευταία στήλη του πίνακα **Πίνακας 2.3** μας δίνει την τιμή αληθείας του τύπου $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$ ο οποίος πλήρης με παρενθέσεις έχει την μορφή $((p \leftrightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow r)))$.

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$
Α	Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Α	Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ

Πίνακας 2.3: Πίνακας αληθείας του τύπου $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$

Ορισμός 2.4
Ας υποθέσουμε ότι φ είναι ένας τύπος και $p_1, \ldots, p_\kappa$ είναι οι ατομικοί τύποι που υπάρχουν στον φ. Μια ***ερμηνεία (interpretation)*** του φ είναι μια καταχώριση τιμών αληθείας σε καθένα από τα $p_1, \ldots, p_\kappa$. Κάθε γραμμή του πίνακα αληθείας του τύπου φ αντιστοιχεί σε μια ερμηνεία του τύπου φ.

Ορισμός 2.5
Ένας τύπος φ είναι ***ταυτολογία ή λογικά αληθής (valid)*** εάν η τιμή του φ είναι αληθής για όλες τις δυνατές ερμηνείες της.

Παράδειγμα
1. Η πρόταση $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ είναι ταυτολογία όπως δείχνει ο πίνακας **Πίνακας 2.4**.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
Α	Α	Ψ	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Α

Πίνακας 2.4: Πίνακας αληθείας του τύπου $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

Ορισμός 2.6
Ένας τύπος φ είναι ***αντίφαση ή λογικά ψευδής (unsatisfiable** or **contradictory)*** εάν η τιμή του φ είναι ψευδής για όλες τις δυνατές ερμηνείες του.

Παράδειγμα
1. Η πρόταση $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ είναι αντίφαση όπως δείχνει ο πίνακας **Πίνακας 2.5**.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ
Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ

Πίνακας 2.5: Πίνακας αληθείας του τύπου $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Ορισμός 2.7
Ένας τύπος φ ο οποίος δεν είναι ούτε ταυτολογία ούτε αντίφαση ονομάζεται ***επαληθεύσιμος (satisfiable)***.

Οι τύποι $p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$, $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$ με πίνακες αληθείας τους πίνακες **Πίνακας 2.2** και **Πίνακας 2.3** αντίστοιχα είναι επαληθεύσιμοι.

Οι τύποι που μας ενδιαφέρουν περισσότερο είναι οι ταυτολογίες και οι αντιφάσεις επειδή, όπως θα δούμε στην συνέχεια, μπορούμε ν‘ αντικαταστήσουμε μια προτασιακή μεταβλητή μ’ ένα τύπο. Επιπλέον, επειδή οι ταυτολογίες είναι σημαντικές το σύμβολο $\models$ χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι ένας τύπος είναι ταυτολογία. Εάν φ είναι ένας τύπος αντί να γράψουμε ότι φ είναι ταυτολογία, γράφουμε $\models$ φ.

Ας υποθέσουμε ότι φ είναι μια ταυτολογία η οποία περιέχει την προτασιακή μεταβλητή p. Εάν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της p στην φ μ‘ ένα τύπο ψ και προκύψει ο τύπος φ΄, ο νέος τύπος φ΄ είναι επίσης ταυτολογία. Αυτό συμβαίνει επειδή η τιμή αληθείας ενός τύπου εξαρτάται από τις τιμές αληθείας των άμεσα μικρότερων παραστάσεων που περιέχει. Εάν οι τιμές αληθείας αυτών των μικρότερων παραστάσεων δημιουργήθηκαν με καταχώρηση τιμών αληθείας ή με υπολογισμό άλλων μικρότερων παραστάσεων αυτό δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα. Όλες οι προτασιακές μεταβλητές μιας ταυτολογίας μπορούν ν‘ αντικατασταθούν με τύπους. Έτσι μια ταυτολογία μετατρέπεται σε σχήμα.

Παράδειγμα
Ο τύπος $p \lor \neg p$ είναι ταυτολογία. Εάν αντικαταστήσουμε το p με τον τύπο φ όπου το φ είναι η παράσταση $q \land r$ προκύπτει ο τύπος $(q \land r) \lor \neg(q \land r)$ ο οποίος είναι επίσης ταυτολογία.

Εάν ο τύπος φ είναι *ταυτολογία* τότε ο τύπος $\neg\varphi$ είναι *αντίφαση* και αντιστρόφως. Οι αντιφάσεις, όπως οι ταυτολογίες, λειτουργούν ως σχήματα.

Παράδειγμα
Ο τύπος $p \land \neg p$ είναι αντίφαση. Εάν αντικαταστήσουμε το p με τον τύπο φ όπου το φ είναι η παράσταση $q \land r$, ο τύπος $(q \land r) \land \neg(q \land r)$ είναι επίσης αντίφαση.

Ορισμός 2.8
Εάν φ και ψ είναι τύποι και εάν ο τύπος $\varphi \rightarrow \psi$ είναι ταυτολογία τότε λέμε ότι ο τύπος ψ είναι (***λογική***) ***σημασιολογική συνέπεια*** (***logical consequence ή entailment***) ή απλά ***συνέπεια*** (***consequence***) του τύπου φ, συμβολίζεται $\varphi \Rightarrow \psi$ ή $\varphi \models \psi$.

Ορισμός 2.9
Εάν φ και ψ είναι τύποι και εάν φ και ψ έχουν πάντα την ίδια τιμή αληθείας τότε οι φ και ψ λέγονται ***λογικά ισοδύναμοι***, συμβολίζεται $\varphi \Leftrightarrow \psi$ ή $\varphi \equiv \psi$. Προφανώς, οι τύποι φ και ψ είναι λογικά ισοδύναμοι εάν ο τύπος $\varphi \leftrightarrow \psi$ είναι ταυτολογία.

Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα σύμβολα $\Rightarrow$, $\models$, $\Leftrightarrow$, $\equiv$ δεν είναι σύνδεσμοι του προτασιακού λογισμού. Δηλαδή εάν φ και ψ είναι τύποι τα $\varphi \Rightarrow \psi$ και $\varphi \Leftrightarrow \psi$ δεν είναι τύποι του προτασιακού λογισμού. Τα σύμβολα $\Rightarrow$, $\models$, $\Leftrightarrow$, $\equiv$ ανήκουν σε μια μετα-γλώσσα με την οποία σχολιάζουμε την γλώσσα του προτασιακού λογισμού.
Για παράδειγμα, η έκφραση $p \leftrightarrow \neg p$ είναι τύπος του προτασιακού λογισμού ο οποίος δεν είναι ταυτολογία, είναι αντίφαση. Δεν μπορούμε να πούμε ότι οι τύποι p και $\neg p$ είναι λογικά ισοδύναμοι ούτε μπορούμε να γράψουμε ότι $p \Leftrightarrow \neg p$.

2.3. Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων

2.3.1. Απλοποίηση Τύπων

Ένας τύπος μπορεί να απλοποιηθεί με χρήση *λογικών ισοδυναμιών* οι οποίοι λέγονται *νόμοι του προτασιακού λογισμού*. Οι νόμοι του προτασιακού λογισμού είναι σχήματα τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν εφόσον ταιριάζουν σ’ ένα τύπο. Δίνεται στον πίνακα **Πίνακας 2.6** ένας κατάλογος με νόμους του προτασιακού λογισμού. Στα επόμενα παραδείγματα γίνεται αναφορά σ’ αυτούς τους νόμους. Ο νόμος που αναφέρεται σε κάθε γραμμή εφαρμόζεται στον τύπο που υπάρχει στην ίδια γραμμή για να προκύψει η νέα μορφή του τύπου η οποία φαίνεται στην επόμενη γραμμή..

Παραδείγματα

1. Απλοποίηση του τύπου $\neg(\neg(p \wedge q) \vee p)$ με χρήση των νόμων του προτασιακού λογισμού.

$\neg(\neg(p \wedge q) \vee p)$	$\Leftrightarrow$	De Morgan
$\neg\neg(p \wedge q) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Διπλή άρνηση
$(p \wedge q) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Αντιμεταθετικός
$(q \wedge p) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Προσεταιριστικός
$q \wedge (p \wedge \neg p)$	$\Leftrightarrow$	Αντίφαση
$q \wedge F$	$\Leftrightarrow$	AND-απλοποίηση
F		

2. Απλοποίηση του τύπου $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ με χρήση των νόμων του προτασιακού λογισμού

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντικατάσταση συνεπαγωγής
$(p \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Επιμεριστικός
$((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντίφαση
$(F \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
$(p \wedge q) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντικατάσταση συνεπαγωγής
$\neg(p \wedge q) \vee q$	$\Leftrightarrow$	De Morgan
$(\neg p \vee \neg q) \vee q$	$\Leftrightarrow$	Προσεταιριστικός
$\neg p \vee (\neg q \vee q)$	$\Leftrightarrow$	Αποκλεισμός τρίτου
$\neg p \vee T$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
T		

3. Απλοποίηση του τύπου $(p \wedge (p \vee q)$ με χρήση των νόμων του προτασιακού λογισμού.

$(p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
$(p \vee F) \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	Επιμεριστικός
$p \vee (F \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	AND-απλοποίηση
$p \vee F$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
p		

Στο μετασχηματισμό τύπων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συντομεύσεις χωρίς ν' αλλάξει το τελικό αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, ο τύπος $p \wedge F \wedge q \wedge r$ απλοποιείται με τις εξής τρεις AND-απλοποιήσεις,
$p \wedge F \wedge q \wedge r \Leftrightarrow F \wedge q \wedge r$ (AND-απλοποίηση) $\Leftrightarrow F \wedge r$ (AND-απλοποίηση) $\Leftrightarrow F$ (AND-απλοποίηση)
Θα μπορούσε να εφαρμοστεί η εξής συντόμευση: Σε μια σύζευξη που υπάρχει η σταθερά F απλοποιείται σε F. Οι παρακάτω συντομεύσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε συζεύξεις και διαζεύξεις που περιέχουν μόνο στοιχειώδη τύπους (literals). Πριν την εφαρμογή των συντομεύσεων καλό θα ήταν να ταξινομηθούν λεξικογραφικά οι στοιχειώδης τύποι με βάση τα ονόματα των προτασιακών μεταβλητών.

Συντομεύσεις σύζευξης

1. Εάν η σύζευξη περιέχει συμπληρωματικούς στοιχειώδης τύπους ή εάν περιέχει την σταθερά F, τότε η σύζευξη απλοποιείται σε F. Δηλαδή σ' αυτή την περίπτωση η σύζευξη είναι αντίφαση. Για παράδειγμα, $p \wedge q \wedge r \wedge \neg q \Leftrightarrow F$; $p \wedge F \wedge q \wedge r \Leftrightarrow F$.
2. Όλες οι εμφανίσεις της σταθεράς T και όλες οι διπλές εμφανίσεις κάποιου στοιχειώδη τύπου μπορούν να διαγραφούν.
   Για παράδειγμα, $T \wedge p \wedge q \wedge T \wedge r \Leftrightarrow p \wedge q \wedge r$; $p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg q \wedge p \Leftrightarrow p \wedge \neg q \wedge r$.

Συντομεύσεις διάζευξης

1. Εάν μια διάζευξη περιέχει συμπληρωματικούς στοιχειώδεις τύπους ή εάν περιέχει την σταθερά T, τότε απλοποιείται σε T. Δηλαδή, σ' αυτή την περίπτωση η διάζευξη είναι ταυτολογία. Για παράδειγμα, $p \vee q \vee \neg p \vee r \Leftrightarrow T$; $p \vee q \vee T \Leftrightarrow T$.
2. Όλες οι εμφανίσεις της σταθερής F και όλες οι διπλές εμφανίσεις κάποιου στοιχειώδη τύπου μπορούν να διαγραφούν. Για παράδειγμα, $p \vee F \vee q \Leftrightarrow p \vee q$; $p \vee \neg q \vee r \vee \neg q \Leftrightarrow p \vee \neg q \vee r$.

Νόμοι του Προτασιακού Λογισμού

Στον πίνακα **Πίνακας 2.6** φαίνονται οι σημαντικότεροι νόμοι του προτασιακού λογισμού. Στις ταυτολογίες του πίνακα **Πίνακας 2.6** εάν αντικαταστήσουμε το σύμβολο $\Leftrightarrow$ με $\leftrightarrow$ τότε όλοι οι τύποι που προκύπτουν είναι ταυτολογίες. Στον κατάλογο λογικών ισοδυναμιών του πίνακα **Πίνακας 2.6**, **T** παριστάνει οποιαδήποτε ***ταυτολογία*** και **F** παριστάνει οποιαδήποτε ***αντίφαση***. Επιπλέον **φ, ψ** και **ω** παριστάνουν ***προτάσεις***.

1.	$\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$	Νόμος διπλής άρνησης
2.	$\varphi\wedge\psi \Leftrightarrow \psi\wedge\varphi$	Αντιμεταθετικός (commutative) νόμος $\wedge$
	$\varphi\vee\psi \Leftrightarrow \psi\vee\varphi$	-/- -/- -/- $\vee$
	$\varphi\leftrightarrow\psi \Leftrightarrow \psi\leftrightarrow\varphi$	-/- -/- -/- $\leftrightarrow$
3.	$(\varphi\wedge\psi) \wedge \omega \Leftrightarrow \varphi \wedge (\psi\wedge\omega)$	Προσεταιριστικός (associative) νόμος $\wedge$
	$(\varphi\vee\psi) \vee \omega \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi\vee\omega)$	-/- -/- -/- $\vee$
4.	$\varphi\wedge(\psi\vee\omega) \Leftrightarrow (\varphi\wedge\psi) \vee (\varphi\wedge\omega)$	Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\wedge$
	$\varphi\vee (\psi\wedge\omega) \Leftrightarrow (\varphi\vee\psi) \wedge (\varphi\vee\omega)$	-/- -/- -/- $\vee$
5.	$(\varphi\vee\varphi) \Leftrightarrow \varphi$	Νόμος απορρόφησης (idempotent) $\vee$
	$(\varphi\wedge\varphi) \Leftrightarrow \varphi$	-/- -/- -/- $\wedge$
6.	$(\varphi\vee F) \Leftrightarrow \varphi$	OR-απλοποίηση
	$(\varphi\vee T) \Leftrightarrow T$	
	$\varphi\vee(\varphi\wedge \psi) \Leftrightarrow \varphi$	
7.	$(\varphi\wedge F) \Leftrightarrow F$	AND-απλοποίηση
	$(\varphi\wedge T) \Leftrightarrow \varphi$	-/-
	$\varphi\wedge(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow \varphi$	-/- -/-
8.	$(T\rightarrow\varphi) \Leftrightarrow \varphi$	Απλοποίηση συνεπαγωγής ($\rightarrow$)
	$(F\rightarrow\varphi) \Leftrightarrow T$	-/-
	$(\varphi\rightarrow\psi) \wedge(\varphi\rightarrow\omega) \Leftrightarrow (\varphi\rightarrow(\psi\wedge\omega))$	-/-
	$(\varphi\rightarrow\omega) \wedge(\psi\rightarrow\omega) \Leftrightarrow (\varphi\vee\psi)\rightarrow\omega$	-/-
	$(\varphi\rightarrow\psi) \vee (\varphi\rightarrow\omega) \Leftrightarrow (\varphi\rightarrow(\psi\vee\omega))$	-/-
	$(\varphi\rightarrow\omega) \vee (\psi\rightarrow\omega) \Leftrightarrow (\varphi\wedge\psi)\rightarrow\omega$	
9.	$\varphi\rightarrow\psi \Leftrightarrow \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	Νόμος αντιθετοαντιστροφής (contrapositive)
	$\varphi\leftrightarrow\psi \Leftrightarrow (\neg\varphi\leftrightarrow\neg\psi)$	
10.	$\varphi\vee\neg\varphi \Leftrightarrow T$	Αποκλεισμός τρίτου (excluded middle)
11.	$\varphi\Leftrightarrow\varphi$	Νόμος της ταυτότητας
12.	$\varphi\wedge\neg\varphi\Leftrightarrow F$	Νόμος της αντίφασης
13.	$(\varphi\rightarrow\psi) \Leftrightarrow ((\varphi\wedge\neg\psi) \rightarrow F)$	Απαγωγή σε άτοπο (Reduction ad absurdum)
14.	$(\varphi\leftrightarrow\psi) \Leftrightarrow (\varphi\rightarrow\psi) \wedge (\psi\rightarrow\varphi)$	Νόμος ισοδυναμίας
15.	$((\varphi\wedge\psi) \rightarrow\omega) \Leftrightarrow(\varphi\rightarrow(\psi\rightarrow\omega))$	Νόμος εξαγωγής (exportation law)
16.	$\neg(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi\wedge\neg\psi)$	Νόμος του De Morgan για $\vee$
	$\neg(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi\vee\neg\psi)$	-‘’- για $\wedge$
17.	$\neg(\varphi\rightarrow\psi) \Leftrightarrow \varphi\wedge\neg\psi$	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής
18.	$\neg(\varphi\leftrightarrow\psi) \Leftrightarrow \varphi\leftrightarrow\neg\psi$	Νόμος άρνησης ισοδυναμίας
19.	$(\varphi\rightarrow\psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi\vee\psi)$	Νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής
	$(\varphi\rightarrow\psi) \Leftrightarrow \neg(\varphi\wedge\neg\psi)$	-‘’- -‘’-
	$(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi\vee\neg\psi)$	-‘’- σύζευξης
	$(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow \neg(\neg\varphi\wedge\neg\psi)$	-‘’- διάζευξης
	$(\varphi\leftrightarrow\psi) \Leftrightarrow(\varphi\wedge\psi) \vee (\neg\varphi\wedge\neg\psi)$	-‘’- ισοδυναμίας
	$(\varphi\leftrightarrow\psi) \Leftrightarrow(\neg\varphi\vee\psi) \wedge (\varphi\vee\neg\psi)$	-‘’- -‘’-

Πίνακας 2.6 Νόμοι του προτασιακού λογισμού.

Ακολουθούν παραδείγματα απόδειξης μερικών από τις παραπάνω ισοδυναμίες.

Παράδειγμα 1.
Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία **φ ⇔ φ ∨ ψευδής** με τη μέθοδο των πινάκων αληθείας. Δηλαδή θα πρέπει να αποδειχτεί ότι ο τύπος **φ ↔ φ ∨ ψευδής** είναι ταυτολογία.

φ	φ ∨ ψευδής	φ ↔ φ ∨ ψευδής
Α	Α	**Α**
Ψ	Ψ	**Α**

Πίνακας 2.7: Απόδειξη της ισοδυναμίας **φ ⇔ φ ∨ ψευδής**

Παράδειγμα 2.
Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία **φ ⇔ αληθής ∨ φ** με τη μέθοδο των πινάκων αληθείας. Δηλαδή θα πρέπει να αποδειχτεί ότι ο τύπος **φ ↔ αληθής ∨ φ** είναι ταυτολογία.

φ		αληθής ∨ φ	φ ↔ αληθής ∨ φ
Α		Α	**Α**
Ψ		Ψ	**Α**

Πίνακας 2.8: Απόδειξη της ισοδυναμίας **φ ⇔ αληθής ∨ φ**

Παράδειγμα 3.
Θα αποδείξουμε την ισοδυναμία **φ ∨ (φ ∧ ψ) ⇔ φ** με τη μέθοδο των πινάκων αληθείας. Δηλαδή θα πρέπει να αποδειχτεί ότι ο τύπος **φ ∨ (φ ∧ ψ) ↔ φ** είναι ταυτολογία.

φ	ψ	φ ∧ ψ	φ ∨ (φ ∧ ψ)	φ ∨ (φ ∧ ψ) ↔ φ
Α	Α	Α	**Α**	**Α**
Α	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**
Ψ	Α	Ψ	**Ψ**	**Α**
Ψ	Ψ	Ψ	**Ψ**	**Α**

Πίνακας 2.9: Απόδειξη της ισοδυναμίας **φ ∨ (φ ∧ ψ) ⇔ φ**

2.3.2. Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων

Ορισμός 2.10
Ένα σύνολο λογικών συνδέσμων είναι ***επαρκές*** εάν για κάθε τύπο (πρόταση) του προτασιακού λογισμού υπάρχει ένας λογικά ισοδύναμος τύπος (πρόταση) που δεν περιέχει άλλους συνδέσμους εκτός από τα στοιχεία αυτού του συνόλου.

Τα σύνολα των λογικών συνδέσμων $s_1=\{\neg, \vee\}$ και $s_2=\{\neg, \rightarrow\}$ είναι ***επαρκή***. Οποιαδήποτε πρόταση του προτασιακού λογισμού μπορεί να εκφραστεί μ' ένα από τα δυο σύνολα λογικών συνδέσμων. Κάθε υπερσύνολο των s_1 και s_2 είναι επίσης επαρκές. Υπάρχουν δυο μορφές προτάσεων που περιέχουν μόνο τους λογικούς συνδέσμους $\{\neg, \wedge, \vee\}$ στους οποίους μπορεί να μετασχηματιστεί κάθε πρόταση του λογικού προγραμματισμού. Αυτές είναι η *διαζευκτική κανονική μορφή* και η *συζευκτική κανονική μορφή*.

Ορισμός 2.11
Ένας τύπος Φ είναι σε ***διαζευκτική κανονική μορφή (ΔΚΜ) (disjunctive normal form)*** εάν η μορφή του είναι $\psi_1 \vee .. \vee \psi_\kappa$ όπου κάθε ένα από τα ψ_i $(1 \le i \le \kappa)$ είναι σύζευξη στοιχειωδών τύπων. Δηλαδή, η Φ είναι μία διάζευξη κάθε όρος της οποίας είναι σύζευξη στοιχειωδών τύπων.

Παραδείγματα
1. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
2. $\neg(p \wedge q) \vee r$ δεν είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή.

Ορισμός 2.12
Ένας τύπος Φ είναι σε ***συζευκτική κανονική μορφή (ΣΚΜ) (conjunctive normal form)*** εάν η μορφή του είναι $\psi_1 \wedge .. \wedge \psi_\kappa$ όπου κάθε ένα από τα ψ_i $(1 \le i \le \kappa)$ είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων. Δηλαδή, η Φ είναι μία σύζευξη όρων, κάθε όρος της οποίας είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων.

Παραδείγματα
1. $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p)$
2. $p \wedge (q \vee (r \wedge \neg p))$ δεν είναι σε συζευκτική κανονική μορφή

Τρία βήματα απαιτούνται για να μετατραπεί ένας τύπος σε ΔΚΜ ή σε ΣΚΜ.
1. Εξάλειψε όλους τους συνδέσμους $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους νόμους της αντικατάστασης, α) $(\varphi \rightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$, β) $(\varphi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$.
2. Εάν ο τύπος περιέχει αρνητικούς σύνθετους τύπους, είτε σβήσε την άρνηση χρησιμοποιώντας τον νόμο της *διπλής άρνησης* ή περιόρισε την εμβέλεια της άρνησης σε ατομικούς τύπους χρησιμοποιώντας τους *νόμους του De Morgan*.
3. Εάν η εμβέλεια της άρνησης έχει περιοριστεί σε ατομικούς τύπους, χρησιμοποίησε τους *αντιμεταθετικούς* (*commutative*) και τους *επιμεριστικούς (distributive)* νόμους για να περιορίσεις την εμβέλεια της σύζευξης ($\wedge$) για ΔΚΜ ή την εμβέλεια της διάζευξης ($\vee$) για ΣΚΜ στους στοιχειώδεις τύπους. Εάν θέλουμε ΔΚΜ χρησιμοποιούμε τους επόμενους νόμους για να περιορίσουμε την εμβέλεια του $\wedge$.
α. $(\varphi \wedge (\psi \vee \omega)) \Leftrightarrow ((\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \omega)$ επιμεριστικός νόμος.
β. $((\psi \vee \omega) \wedge \varphi) \Leftrightarrow ((\psi \wedge \varphi) \vee (\omega \wedge \varphi))$ προκύπτει από αντιμεταθετικό και επιμεριστικό νόμο

Εάν θέλουμε ΣΚΜ χρησιμοποιούμε τους επόμενους νόμους για να περιορίσουμε την εμβέλεια του $\vee$.
α. $(\varphi\vee(\psi\wedge\omega)) \Leftrightarrow ((\varphi\vee\psi) \wedge (\varphi\vee\omega))$ επιμεριστικός νόμος.
β. $((\varphi\wedge\psi) \vee \omega)) \Leftrightarrow ((\varphi\vee\omega) \wedge (\psi\vee\omega))$ προκύπτει από αντιμεταθετικό και επιμεριστικό νόμο.

Παραδείγματα

1. Ο τύπος $(\neg p\rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$ θα μετατραπεί σε ΣΚΜ

$(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
$(\neg\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
$\neg(\neg\neg p \vee \neg q) \vee (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$ De Morgan
$(\neg\neg\neg p\wedge \neg\neg q) \vee (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$ Διπλή άρνηση
$(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \vee q) \Leftrightarrow$ Επιμεριστικός $((\varphi\wedge\psi) \vee \omega \Leftrightarrow ((\varphi\vee\omega) \wedge (\psi\vee\omega))$
$(\neg p \vee (\neg p\vee q)) \wedge (q\vee (\neg p\vee q)) \Leftrightarrow$ Προσεταιριστικός
$(\neg p \vee \neg p\vee q) \wedge (q\vee \neg p\vee q) \Leftrightarrow$ Νόμος απορρόφησης
$(\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg p)$

2. Ο τύπος $(\neg p\leftrightarrow q) \rightarrow (p\wedge(q\vee r))$ θα μετατραπεί σε ΔΚΜ

$(\neg p\leftrightarrow q) \rightarrow (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\leftrightarrow$
$((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q\vee\neg p)) \rightarrow (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
$\neg((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q\vee\neg p)) \vee (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ De Morgan
$(\neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q\vee\neg p)) \vee (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ Διπλής άρνησης
$(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg q\vee\neg p)) \vee (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ De Morgan
$((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q\wedge\neg\neg p)) \vee (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ Διπλής άρνησης
$((\neg p \wedge \neg q) \vee (q\wedge p)) \vee (p\wedge(q\vee r)) \Leftrightarrow$ Επιμεριστικός νόμος
$((\neg p \wedge \neg q) \vee (q\wedge p)) \vee ((p\wedge q)\vee (p\wedge r)) \Leftrightarrow$ Προσεταιριστικός νόμος
$(\neg p \wedge \neg q) \vee (q\wedge p) \vee (p\wedge q)\vee (p\wedge r) \Leftrightarrow$ Αντιμεταθετικός νόμος
$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p\wedge q) \vee (p\wedge q)\vee (p\wedge r) \Leftrightarrow$ Νόμος απορρόφησης
$(\neg p \wedge \neg q) \vee (p\wedge q) \vee (p\wedge r)$

2.3.3. Προτασιακή (clausal) Μορφή Τύπων

Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος Φ είναι σε ΣΚΜ $\psi_1 \wedge..\wedge \psi_\kappa$. Εάν χωρίσουμε τις συζεύξεις σε μια λίστα (ή ένα σύνολο) διαζεύξεων, $\{\psi_1,\ldots,\psi_\kappa\}$, κάθε ψ_i $(1\leq i\leq\kappa)$ θα έχει την μορφή $p_1 \vee p_2 .. \vee p_n \vee (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee .. \vee (\neg q_m)$ όπου $p_1,\ldots,p_n$ και $q_1,\ldots, q_m$ είναι προτασιακές μεταβλητές. Αυτή η διάζευξη στοιχειωδών τύπων είναι λογικά ισοδύναμη με τον εξής τύπο

$$q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$$

Τύποι αυτής της μορφής λέγονται ***προτάσεις*** (***clauses***). Κάθε τύπος Φ μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια λίστα (ή ένα σύνολο) προτάσεων $\{\pi_1,\ldots,\pi_\kappa\}$ όπου το π_i προέκυψε από το ψ_i $(1\leq i\leq\kappa)$. Αυτή η λίστα των προτάσεων ονομάζεται ***προτασιακή μορφή*** του τύπου Φ.

Μια πρόταση που έχει το πολύ ένα ατομικό τύπο λέγεται ***πρόταση Horn (Horn clause)***. Δηλαδή, μια πρόταση Horn μπορεί να έχει μια από τις εξής μορφές.

1. $p \vee (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee \ldots \vee (\neg q_m)$ ή ισοδύναμα $q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \rightarrow p$
2. $(\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee \ldots \vee (\neg q_m)$ ή ισοδύναμα $\neg (q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m)$
3. p ή ισοδύναμα p

Οι προτάσεις Horn είναι μια περιορισμένη μορφή των προτάσεων. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν τύποι Φ που ο μετασχηματισμός τους σε προτάσεις Horn είναι αδύνατος.

Παράδειγμα

Να αποδειχθεί με νόμους του προτασιακού λογισμού ότι ο τύπος $p1 \vee p2 \vee \neg q1 \vee \neg q2$ έχει ισοδύναμη μορφή τον τύπο $q1 \wedge q2 \rightarrow p1 \vee p2$. Θα κάνουμε μετατροπές στον αρχικό τύπο με λογικές ισοδυναμίες από τους νόμους του προτασιακού λογισμού.

Τύπος	**Νόμος του ΠΛ που εφαρμόστηκε**
$p1 \vee p2 \vee \neg q1 \vee \neg q2$	Νόμος του De Morgan, «$\neg(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi\vee\neg\psi)$»
$p1 \vee p2 \vee \neg(q1 \wedge q2)$	Προσεταιριστική ιδιότητα του $\vee$, «$(\varphi\vee\psi) \vee \omega \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi\vee\omega) \Leftrightarrow \varphi \vee \psi\vee\omega$»
$(p1 \vee p2) \vee \neg(q1 \wedge q2)$	Μεταθετική ιδιότητα του $\vee$, «$\varphi\vee\psi \Leftrightarrow \psi\vee\varphi$»
$\neg(q1 \wedge q2) \vee p1 \vee p2$	Προσεταιριστική ιδιότητα του $\vee$, «$(\varphi\vee\psi) \vee \omega \Leftrightarrow \varphi \vee (\psi\vee\omega) \Leftrightarrow \varphi \vee \psi\vee\omega$»
$\neg(q1 \wedge q2) \vee p1 \vee p2$	Νόμος αντικατάστασης της συνεπαγωγής ‘$\rightarrow$’, « $(\varphi\rightarrow\psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi\vee\psi)$»
$q1 \wedge q2 \rightarrow p1 \vee p2$	

2.4. Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Η εξαγωγή συμπερασμάτων από κάποιες προτάσεις λέγονται ***συλλογισμοί.*** Ένας συλλογισμός είναι ***ορθός*** όταν αληθείς προτάσεις οδηγούν σε αληθή συμπεράσματα. Το συμπέρασμα σ’ ένα ορθό συλλογισμό είναι συνέπεια της σύζευξης όλων των προτάσεων.

Ορισμός 2.13

Έστω $\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa$ ένα σύνολο τύπων του προτασιακού λογισμού, ο τύπος ψ είναι ***σημασιολογική συνέπεια*** (***logical consequence ή entailment***) ή απλώς ***συνέπεια*** των τύπων $\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa$ εάν και μόνο εάν για κάθε ερμηνεία Ε στην οποία ο τύπος $\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_\kappa$ είναι αληθής, ο τύπος ψ είναι επίσης αληθής. Η συνέπεια συμβολίζεται $\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa \models \psi$. Οι τύποι $\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa$ ονομάζονται ***υποθέσεις*** και ο τύπος ψ ονομάζεται ***συμπέρασμα***.

Παράδειγμα

Έστω ο κανόνας της απόσπασης (modus ponens) φ , $\varphi \rightarrow \psi \models \psi$. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα προτάσεων με τις υποθέσεις (φ, $\varphi \rightarrow \psi$) και το συμπέρασμα ψ που να εξηγεί τη σημασιολογική συνέπεια για τον κανόνα της απόσπασης. 1) Πρόταση υπόθεσης φ: «Ο Γιάννης είναι Μηχανικός Λογισμικού», 2) πρόταση υπόθεσης $\varphi \rightarrow \psi$: «Εάν ο Γιάννης είναι Μηχανικός Λογισμικού τότε ο Γιάννης είναι Πτυχιούχος του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής της Κατεύθυνσης Μηχανικών Λογισμικού» και 3) σημασιολογική συνέπεια ή συμπέρασμα (εξαγόμενη πρόταση) ψ: «ο Γιάννης είναι Πτυχιούχος του Τμήματος Μηχανικών Πληροφορικής της Κατεύθυνσης Μηχανικών Λογισμικού».

Εάν ψ είναι ένας τύπος, $\models \psi$ τότε και μόνο τότε όταν το ψ είναι ταυτολογία. Η σχέση μεταξύ των εννοιών συνέπειας και ταυτολογίας έχει ως εξής. Υποθέτουμε ότι φ και ψ είναι τύποι, $\varphi \models \psi$ τότε και μόνο τότε $\models \varphi \rightarrow \psi$. δηλαδή ο τύπος $\varphi\rightarrow\psi$ πρέπει να είναι ταυτολογία.

Εάν φ είναι η σύζευξη όλων των υποθέσεων και ψ το συμπέρασμα, θα πρέπει ν' αποδειχθεί ότι το $\varphi\rightarrow\psi$ είναι ταυτολογία ή ισοδύναμα θα πρέπει να αποδειχθεί ότι $\varphi \models \psi$. Μια ταυτολογία της μορφής $\varphi\rightarrow\psi$ ονομάζεται επίσης (σημασιολογική) συνέπεια. Για παράδειγμα, οι τύποι $p\rightarrow$ Α (ή $p \rightarrow$ αληθής) και $\Psi \rightarrow p$ (ή ψευδής $\rightarrow p$) είναι ταυτολογίες, αληθείς για κάθε τιμή του p, όπως δείχνει και ο πίνακας, **Πίνακας 2.10**.

p	p → A	Ψ → p
A	A	A
Ψ	A	A

Πίνακας 2.10: Οι ταυτολογίες $p\rightarrow$ Α και $\Psi \rightarrow p$

Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε τις ταυτολογίες ως εξής: $p \models T$ ή $F \models p$. Ταυτολογίες αυτής της μορφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως σχήματα. Τα προηγούμενα παραδείγματα σε σχήματα γίνονται $\varphi \rightarrow$ Α και $\Psi \rightarrow\varphi$ όπου φ είναι τύπος ή ισοδύναμα $\varphi \models$ Α και $\Psi \models \varphi$. *Οι συμπερασματικοί κανόνες είναι ουσιαστικά σχήματα ταυτολογιών αυτής της μορφής*. Για παράδειγμα, ο συμπερασματικός κανόνας της απόσπασης (modus ponens) έχει ως εξής φ, $\varphi\rightarrow\psi \models \psi$, ή ισοδύναμα ο τύπος $(\varphi \wedge(\varphi\rightarrow\psi) \rightarrow\psi$ είναι ταυτολογία.

Την συνέπεια $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \models \psi$ όπου φ_i $(1\leq i\leq\kappa)$ είναι τύποι μπορούμε να την αποδείξουμε είτε με την μέθοδο των *πινάκων αληθείας* ή με την *συμπερασματική ή παραγωγική συλλογιστική* (*deductive reasoning*). Με την μέθοδο των πινάκων ελέγχουμε ότι ένας συγκεκριμμένος τύπος είναι ταυτολογία. *Η συμπερασματική μέθοδος* (*deductive reasoning*) *χρησιμοποιεί συμπερασματικούς κανόνες (inference rules) οι οποίοι δημιουργούν νέους τύπους*. Οι νέοι τύποι προστίθενται στη λίστα των υποθέσεων και είναι συμβατοί με τις υποθέσεις.

2.4.1. Η Μέθοδος των Πινάκων

Για να αποδείξουμε την *συνέπεια (logical consequence)* $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \models \psi$ όπου φ_i $(1\leq i\leq\kappa)$ είναι τύποι με την μέθοδο των πινάκων αληθείας θα πρέπει να αποδείξουμε την ταυτολογία $\varphi_1\wedge..\wedge \varphi_\kappa \rightarrow \psi$

Παραδείγματα

1. Ο πίνακας **Πίνακας 2.11** αποδεικνύει την ορθότητα του διαζευκτικού συλλογισμού, $p\vee q, \neg p \models q$. Δηλαδή δείχνει ότι ο τύπος $((p\vee q) \wedge\neg p) \rightarrow q$ είναι ταυτολογία.

p	q	p ∨ q	¬p	(p ∨ q) ∧ ¬ p	((p ∨ q) ∧ ¬p) → q
A	A	A	Ψ	Ψ	A
A	Ψ	A	Ψ	Ψ	A
Ψ	A	A	A	A	A
Ψ	Ψ	Ψ	A	Ψ	A

Πίνακας 2.11: Ορθότητα διαζευκτικού συλλογισμού.

2. Ο πίνακας **Πίνακας 2.12** αποδεικνύει την ορθότητα του κανόνα της απόσπασης (modus ponens), p, p →q ╞ q. Δηλαδή, δείχνει ότι ο τύπος (p ∧ (p→q)) → q είναι ταυτολογία.

p	q	p → q	p ∧ (p→q)	(p ∧ (p→q)) → q
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Πίνακας 2.12: Ορθότητα κανόνα απόσπασης.

2.4.2. Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων

Με την μέθοδο των πινάκων αληθείας ελέγχουμε εάν ένας τύπος είναι ταυτολογία. Το μέγεθος του πίνακα αληθείας μεγαλώνει εκθετικά με το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών. Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται από την *συμπερασματική ή παραγωγική* (*deductive*) μέθοδο αποδείξεων. *Μ' αυτή τη μέθοδο συμπερασματικοί κανόνες (inference rules) εξάγουν τύπους (συμπεράσματα) τους οποίους προσθέτουν στις υποθέσεις μέχρι να εξαχθεί το τελικό συμπέρασμα.* Η μέθοδος στηρίζεται σε συντακτική επεξεργασία των τύπων.

Μερικοί από τους συμπερασματικούς κανόνες του προτασιακού λογισμού φαίνονται στον πίνακα **Πίνακας 2.13**.

1.	φ, φ→ψ ╞ ψ	Κανόνας απόσπασης (modus ponens)
2.	¬ψ, φ→ψ ╞ ¬φ	Κανόνας modus tollens
3.	φ, ψ ╞ φ ∧ ψ	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης
4.	φ ∧ ψ ╞ φ (ή φ∧ψ ╞ ψ)	Κανόνας διαγραφής σύζευξης
5.	φ→ψ, ψ→ω ╞ φ →ω	Υποθετικός συλλογισμός
6.	φ ∨ ψ, ¬φ ╞ ψ	Διαζευκτικός συλλογισμός ή κανόνας επίλυσης μονάδος
7.	φ→ψ, ¬φ→ψ ╞ ψ	Νόμος των περιπτώσεων

Πίνακας 2.13: Μερικοί Συμπερασματικοί Κανόνες του Προτασιακού Λογισμού

Θα δούμε πως εφαρμόζονται οι συμπερασματικοί κανόνες σε προτάσεις με δύο παραδείγματα. Ότι υπάρχει αριστερά του ╞ είναι η υπόθεση του συμπερασματικού κανόνα και δεξιά του ╞ είναι το συμπέρασμα, δηλαδή **Υπόθεση ╞ Συμπέρασμα**.

Παράδειγμα 1.

Έστω ο διαζευκτικός συλλογισμός $\varphi \vee \psi, \neg \varphi \models \psi$. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα ατομικών προτάσεων φ και ψ που εξηγεί τον διαζευκτικό συλλογισμό. Στο παράδειγμα φαίνονται η υπόθεση του προβλήματος και το εξαγόμενο συμπέρασμα.

Ατομικές Προτάσεις
- φ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός είναι ηλιόλουστος».
- $\neg \varphi$ παριστάνει τη «ο καιρός δεν είναι ηλιόλουστος».
- ψ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός είναι συννεφιασμένος».
- $\neg \psi$ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός δεν είναι συννεφιασμένος».

Υπόθεση
- $\varphi \vee \psi$: παριστάνει τη διάζευξη των προτάσεων «ο καιρός είναι ηλιόλουστος ή ο καιρός είναι συννεφιασμένος»
- $\neg \varphi$ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός δεν είναι ηλιόλουστος».

Συμπέρασμα
- ψ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός είναι συννεφιασμένος».

Παράδειγμα 2.
Έστω ο κανόνας απόσπασης (modus ponens) $\varphi, \varphi \rightarrow \psi, \models \psi$.. Στη συνέχεια δίνεται ένα παράδειγμα ατομικών προτάσεων φ και ψ που εξηγεί τον κανόνας της απόσπασης. Στο παράδειγμα φαίνονται η υπόθεση του προβλήματος και το εξαγόμενο συμπέρασμα.

Ατομικές Προτάσεις
- φ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός είναι βροχερός».
- $\neg\varphi$ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός δεν είναι βροχερός».
- ψ παριστάνει τη πρόταση «θα πάρω ομπρέλα μου».
- $\neg \psi$ παριστάνει τη πρόταση «δεν θα πάρω ομπρέλα μου».

Υπόθεση
- $\varphi \rightarrow \psi$: παριστάνει τη πρόταση «***Αν*** ο καιρός είναι βροχερός ***τότε*** θα πάρω ομπρέλα μου»
- φ παριστάνει τη πρόταση «ο καιρός είναι βροχερός».

Συμπέρασμα
- ψ παριστάνει τη πρόταση «θα πάρω ομπρέλα μου».

Ένα σύστημα το οποίο στηριζόμενο στη συντακτική δομή των προτάσεων και χρησιμοποιώντας ένα σύνολο κανόνων παραγωγής νέων προτάσεων όπως είναι ο κανόνας της απόσπασης τότε έχουμε συντακτική συνεπαγωγή. Η συντακτική συνεπαγωγή λέγεται ***συντακτική εξαγωγή συμπεράσματος*** (***derivation***) και παριστάνεται με το σύμβολο $\vdash$. Για παράδειγμα, η παραγωγή με τον *κανόνα της απόσπασης* (*modus ponens*) παριστάνεται με τον εξής συμβολισμό, $P, P \rightarrow Q \vdash Q$.

Υπάρχουν διάφορα συστήματα τα οποία με συμπερασματικούς κανόνες εξάγουν τύπους τα οποία λέγονται ***τυπικά συστήματα***. Όλα τα τυπικά συστήματα έχουν τα εξής κοινά χαρακτηριστικά.

1. Έχουν μία λίστα επιτρεπτών συμπερασματικών κανόνων L.
2. Δημιουργούν μια λίστα T από τύπους. Αρχικά η λίστα T είναι άδεια. Οι υποθέσεις ενός προβλήματος προστίθενται στη λίστα καθώς και οι τύποι που εξάγονται με συμπερασματικούς κανόνες από προηγούμενους τύπους. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να δημιουργηθεί τα τελικό συμπέρασμα.

Ένα σύστημα το οποίο εξάγει τύπους θα πρέπει εκτός από την ορθότητα των παραγόμενων τύπων να είναι ***πλήρες***. Αυτό σημαίνει ότι κάθε τύπος ο οποίος είναι συνέπεια των υποθέσεων θα πρέπει να εξάγεται από το σύστημα.

Υπάρχουν πολλά είδη τυπικών συστημάτων. Τα πιο γνωστά είναι τα ***συστήματα Hilbert*** και τα ***συστήματα φυσικών συμπερασμάτων*** και τα δύο τα συναντάμε σε παραλλαγές. Τα συστήματα Hilbert χρησιμοποιούν ένα σύνολο από σχήματα λογικών αξιωμάτων ενώ τα συστήματα φυσικών συμπερασμάτων δεν χρησιμοποιούν σχήματα λογικών αξιωμάτων.

Μια ***απόδειξη (proof)*** σ' ένα τυπικό σύστημα ορίζεται ως μια ακολουθία τύπων κάθε τύπος της οποίας παράγεται μ' ένα από τους εξής τρόπους.

1. Εάν το σύστημα χρησιμοποιεί σχήματα λογικών αξιωμάτων ένας τύπος μπορεί να δημιουργηθεί ως *στιγμιότυπο (instance)* ενός αξιώματος του συστήματος μ' αντικατάσταση των μεταβλητών του από τύπους.
2. Ένας τύπος μπορεί να παραχθεί από την εφαρμογή ενός *παραγωγικού κανόνα* (*inference rule*) του συστήματος στους προηγούμενους τύπους της ακολουθίας.

Εάν η ακολουθία των τύπων οδηγήσει σε κάποιο συγκεκριμένο τύπο φ τότε λέμε ότι η ακολουθία των τύπων είναι η ***απόδειξη του φ*** από το σύστημα ή ότι το ***φ είναι θεώρημα του συστήματος***.

Ένα τυπικό σύστημα είναι γενικό σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων. Για να κάνει αποδείξεις, το τυπικό σύστημα, σε κάποιο συγκεκριμένο πρόβλημα θα πρέπει να προστεθούν στο σύστημα κάποιες προτάσεις, υποθέσεις (premises), σχετικές με το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Μια ***εξαγωγή συμπεράσματος (deduction)*** σ' ένα τυπικό σύστημα ορίζεται ως μια ακολουθία τύπων κάθε τύπος της οποίας παράγεται μ' ένα από τους εξής τρόπους.

1. Εάν το σύστημα χρησιμοποιεί σχήματα λογικών αξιωμάτων ένας τύπος μπορεί να είναι στιγμιότυπο (instance) των αξιωμάτων.
2. Ένας τύπος μπορεί να είναι μια υπόθεση.
3. Ένας τύπος μπορεί να παραχθεί από την εφαρμογή ενός κανόνα εξαγωγής συμπερασμάτων του συστήματος στους προηγούμενους τύπους της ακολουθίας.

Εάν $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa$ είναι οι υποθέσεις ενός προβλήματος και ψ το συμπέρασμα το οποίο εξάγεται από το τυπικό σύστημα ΤΣ χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό για να δηλώσουμε αυτή την εξαγωγή:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa\} \vdash_{\text{ΤΣ}} \psi \quad \text{ή} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \vdash_{\text{ΤΣ}} \psi$$

Εάν το τυπικό σύστημα ΤΣ είναι γνωστό χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa\} \vdash \psi \quad \text{ή} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \vdash \psi$$

Εάν κ=0 τότε έχουμε ***απόδειξη***, όχι ***εξαγωγή συμπερασμάτων***, γι' αυτό χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\vdash \psi$$

Εάν το ψ είναι ένα θεώρημα του τυπικού συστήματος, μπορεί ν' αποδειχθεί χωρίς επιπλέον υποθέσεις.

Το επόμενο παράδειγμα μας δείχνει την έννοια της τυπικής απόδειξης. Θέλουμε ν' αποδείξουμε τον τύπο (πρόταση) $\neg r$ έχοντας υποθέσεις τους τύπους $p \to q$, $q \to \neg r$, $\neg p \to \neg r$. δηλαδή θέλουμε ν' *αποδείξουμε την συνέπεια (logical consequence),*

$$p \to q,\ q \to \neg r,\ \neg p \to \neg r \models \neg r.$$

ή θέλουμε να κάνουμε την εξής *εξαγωγή συμπεράσματος (deduction)*

$$p \to q,\ q \to \neg r,\ \neg p \to \neg r \vdash \neg r$$

Τους όρους μιας τυπικής απόδειξης τους γράφουμε κάθετα με την δικαιολόγηση δίπλα. Οι συμπερασματικοί κανόνες εξάγουν τύπους οι οποίοι προστίθενται στις υποθέσεις μέχρι να δημιουργηθεί το συμπέρασμα που μας ενδιαφέρει. Οι συμπερασματικοί κανόνες που θα χρησιμοποιήσουμε είναι από την λίστα του πίνακα **Πίνακας 2.13**.

Όροι τυπικής απόδειξης	*Δικαιολόγηση*
1. $p \to q$	υπόθεση
2. $q \to \neg r$	υπόθεση
3. $\neg p \to \neg r$	υπόθεση
4. $p \to \neg r$	υποθετικός συλλογισμός στις 1 και 2
5. $\neg r$	Νόμος των περιπτώσεων στις 3 και 4

			φ_5		φ_1	φ_2	φ_3	φ_4				
p	q	r	$\neg r$	$\neg p$	$p \to q$	$q \to \neg r$	$\neg p \to \neg r$	$p \to \neg r$	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Α	Ψ	**Α**	Ψ	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α	Α	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Ψ	**Α**	Α	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α	Α	Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Ψ	**Α**	Α	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	**Α**	Α

Πίνακας 2.14: Πίνακας αλήθειας του τύπου$((p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg p \to \neg r)) \to \neg r$

$\Psi_1 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3$

$\Psi_2 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$

$\Psi_3 = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4 \wedge \varphi_5$

$\Psi_4 = \psi_1 \to \varphi_5$

Ο πίνακας **Πίνακας 2.14** δείχνει ότι ο τύπος $((p \to q) \wedge (q \to \neg r) \wedge (\neg p \to \neg r)) \to \neg r$ είναι ταυτολογία. Επιπλέον, δείχνει ότι κάθε τύπο που δημιουργούν οι συμπερασματικοί κανόνες είναι συνέπεια των υποθέσεων. Τα υπογραμμισμένα και έντονα στοιχεία του πίνακα δείχνουν ότι όταν η υπόθεση είναι αληθής ο εξαγόμενος τύπος είναι επίσης αληθής.

Σ' ένα σύστημα λογικής, ***θεωρία*** είναι το σύνολο των υποθέσεων μαζί με τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τις υποθέσεις.

Οι *υποθέσεις* της θεωρίας ονομάζονται και ***αξιώματα***.

Τα *συμπεράσματα* που μπορούν να εξαχθούν από τα αξιώματα ονομάζονται ***θεωρήματα.***

2.4.3. Συστήματα Hilbert και Φυσικών Συμπερασμάτων

Α) Συστήματα Hilbert

Τα χαρακτηριστικά των συστημάτων Hilbert είναι τα εξής:

1. Χρησιμοποιούν μόνο τους λογικούς συνδέσμους ¬ και →. Όλοι οι τύποι γράφονται σ' αυτούς τους δυο συνδέσμους.
2. Χρησιμοποιούν ένα μόνο συμπερασματικό κανόνα, τον κανόνα της απόσπασης (modus ponens).
3. Χρησιμοποιούν ένα σύνολο από λογικά αξιώματα τα οποία είναι ταυτολογίες. Τα αξιώματα είναι σχήματα. Αυτό σημαίνει ότι περιέχουν μεταβλητές οι οποίες μπορούν ν' αντικατασταθούν από οποιοδήποτε τύπο. Το πιο δημοφιλές σύνολο αξιωμάτων είναι το εξής.
   α. $(\varphi\to(\psi\to\varphi))$
   β. $(\varphi\to(\psi\to\omega))\to(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to\omega))$
   γ. $(\neg\psi\to\neg\varphi)\to(\neg\psi\to\varphi)\to\psi)$

Κάθε αξίωμα του συστήματος είναι θεώρημα χωρίς άλλη απόδειξη. Εάν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές φ και ψ του σχήματος 3α με τους τύπους ¬p και q αντίστοιχα θα πάρουμε το αξίωμα $(\neg p\to(q\to\neg p))$.

Β) Συστήματα Φυσικών Συμπερασμάτων (Natural Deduction).

Τα χαρακτηριστικά των συστημάτων φυσικών συμπερασμάτων έχουν ως εξής:

1. Χρησιμοποιούν όλους τους λογικούς συνδέσμους (∧, ∨, ¬, →, ↔).
2. Για κάθε σύνδεσμο υπάρχουν δυο συμπερασματικοί κανόνες. Ο ένας συμπερασματικός κανόνας εισάγει τον σύνδεσμο και ο άλλος τον αφαιρεί. Για παράδειγμα, οι συμπερασματικοί κανόνες της σύζευξης είναι $\varphi, \psi, \vdash \varphi \wedge \psi$ (εισαγωγή ∧) και $\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ ή $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$ (διαγραφής ∧).
3. Αυτά τα συστήματα δεν χρησιμοποιούν αξιώματα.
4. Επιτρέπουν την εισαγωγή υποθέσεων (assumptions) στο μέσο μιας απόδειξης.

Θεώρημα του συμπεράσματος

Ας θεωρήσουμε ότι φ και ψ είναι τύποι, $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa$ είναι υποθέσεις.

Εάν $\varphi, \omega_1, \ldots, \omega_\kappa$ έχουν ως λογική συνέπεια το ψ, τότε $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa$ έχουν ως λογική συνέπεια το $\varphi\to\psi$

εάν $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa, \varphi \vdash \psi$
τότε $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi$
$(\omega_1, \ldots, \omega_\kappa\ \varphi \vdash \psi) \models (\omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi)$

Το αντίστροφο του θεωρήματος του συμπεράσματος είναι επίσης συμπερασματικός κανόνας

εάν $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi$
τότε $\omega_1, \ldots, \omega_\kappa, \varphi \vdash \psi$

Παράδειγμα

1. Θέλουμε ν' αποδείξουμε ότι $\{p\to q, \neg q\vee r\} \vdash p \to r$. Αντί αυτού θ' αποδείξουμε ότι $\{p\to q, \neg q\vee r, p\} \vdash r$ και θα εφαρμόσουμε το θεώρημα του συμπεράσματος. Η εφαρμογή του θεωρήματος του συμπεράσματος θα μας δώσει ότι $\{p\to q, \neg q\vee r\} \vdash p \to r$.

		Δικαιολόγηση κανόνα
1.	$p \to q$	Αρχική υπόθεση (Πρ.1)
2.	$\neg q \vee r$	Αρχική υπόθεση (Πρ.2)
3.	p	Εισαχθείσα υπόθεση
4.	q	Κανόνας απόσπασης (modus ponens) 1,3
5.	$q \to r$	Νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής 2
6.	r	Κανόνας απόσπασης 4,5

Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων

	Κανόνας	**όνομα**
1.	$\varphi, \psi \vdash \varphi \wedge \psi$ $\varphi, \psi \vdash \psi \wedge \varphi$	εισαγωγή $\wedge$
2.	$\varphi \vdash \varphi \vee \psi$ $\varphi \vdash \psi \vee \varphi$	εισαγωγή $\vee$
3.	θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\omega \vdash \varphi \to \psi$, αποδεικνύουμε ότι $(\omega,\varphi \vdash \psi \wedge \neg\psi) \vdash \neg\varphi$, ω (αρχική) υπόθεση και φ (εισαχθείσα) υπόθεση, δηλαδή η εισαχθείσα) υπόθεση φ οδηγεί σε αντίφαση $\psi \wedge \neg\psi$ συνεπώς το $\neg\varphi$ είναι αληθές, *θεώρημα του συμπεράσματος (deduction theorem)*	εισαγωγή $\neg$
4.	ω (αρχική) υπόθεση, φ (εισαχθείσα) υπόθεση, $(\omega,\varphi \vdash \psi) \vdash (\omega \vdash \varphi \to \psi)$ *θεώρημα του συμπεράσματος*.	εισαγωγή $\to$
5.	$\varphi \to \psi, \psi \to \varphi \vdash \varphi \leftrightarrow \psi$	εισαγωγή $\leftrightarrow$
6.	$\neg\neg\varphi \vdash \varphi$	Εξάλειψη $\neg$
7.	$\varphi, \varphi \to \psi \vdash \psi$	Εξάλειψη $\to$
8.	$\varphi \wedge \psi \vdash \varphi$ $\varphi \wedge \psi \vdash \psi$	Εξάλειψη $\wedge$
9.	*Θεώρημα του συμπεράσματος*	Εξάλειψη $\vee$
10.	$\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \varphi \to \psi$ $\varphi \leftrightarrow \psi \vdash \psi \to \varphi$	Εξάλειψη $\leftrightarrow$

Πίνακας 2.15: Συμπερασματικοί κανόνες για συστήματα φυσικών συμπερασμάτων

Ακολουθούν παραδείγματα με εξαγωγές συμπερασμάτων στα οποία χρησιμοποιείται η έννοια της υπό-εξαγωγής (ή υπό-απόδειξης). Όλες οι υπό-αποδείξεις εισάγουν κάποια υπόθεση η οποία εκπίπτει όταν τελειώσει η υπό-απόδειξη.

Παραδείγματα

1. Θέλουμε ν' αποδείξουμε $p_1 \to q_1, p_2 \to q_2 \vdash p_1 \wedge p_2 \to q_1 \wedge q_2$

		Δικαιολόγηση κανόνα
1.	$p_1 \to q_1$	Αρχική υπόθεση (Πρ.1)
2.	$p_2 \to q_2$	Αρχική υπόθεση (Πρ.2)
3.	$p_1 \wedge p_2$	Εισαχθείσα υπόθεση
4.	p_1	Εξ. $\wedge$, 3
5.	p_2	Εξ. $\wedge$, 3

6.	q_1	Εξ. →, 1, 4
7.	q_2	Εξ. →, 2, 5
8.	$q_1 \wedge q_2$	Εισ. ∧, 6, 7
9.	$p_1 \wedge p_2 \rightarrow q_1 \wedge q_2$	Εισ. →, 3-8 (Θεώρημα συμπεράσματος)

2. Θέλουμε να αποδείξουμε p, ¬q ├ ¬(p→q)

			Δικαιολόγηση κανόνα
1.	p		Αρχική υπόθεση (Πρ.1)
2.	¬q		Αρχική υπόθεση (Πρ.2)
3.	p→q		Εισαχθείσα υπόθεση
4.	p		Πρ. 1
5.	q		Εξ. → 3, 4
6.	¬q		Πρ. 2
7.	q∧¬q	% αντίφαση	Εισ. ∧, 5, 6
8.	¬(p→q)		Εισ. ¬, 3-7 (Θεώρημα συμπεράσματος)

2.4.4. Απαγωγή σε Άτοπο και Επίλυση (Resolution)

Απαγωγή σε Άτοπο

Έστω $\varphi_1,..,\varphi_\kappa$, ψ τύποι. Θέλουμε ν' αποδείξουμε ότι $\varphi_1,..,\varphi_\kappa \models \psi$. Αντί ν' αποδείξουμε ευθέως ότι το ψ είναι συνέπεια των τύπων $\varphi_1,..,\varphi_\kappa$ αποδεικνύουμε ότι η αλήθεια του ¬ψ (του αντιθέτου του), οδηγεί σε αντίφαση. Δηλαδή, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των τύπων $\{\varphi_1,..,\varphi_\kappa, \neg\psi\}$ είναι ασυνεπές (inconsistent). Αυτή η στρατηγική απόδειξης ονομάζεται ***απαγωγή σε άτοπο***.

Θεωρούμε ότι ισχύει $\varphi_1,..,\varphi_\kappa, \neg\psi \models F$, από το θεώρημα του συμπεράσματος έχουμε ότι $\varphi_1,..,\varphi_\kappa \models \neg\psi \rightarrow F$. Για να είναι ο τύπος $\neg\psi \rightarrow F$ αληθής όταν η σύζευξη των προτάσεων είναι αληθής θα πρέπει το ¬ψ να είναι ψευδές. Αυτό σημαίνει ότι το ψ είναι αληθές.

Η απαγωγή σε άτοπο μπορεί να εκφραστεί ως εξής: «έστω **φ** και **ψ** τύποι, για να αποδείξουμε ότι **φ → ψ (ή φ ⊨ ψ)** μπορούμε να αποδείξουμε ισοδύναμα ότι η σύζευξη του **φ** με την άρνηση του **ψ** οδηγούν σε αντίφαση, δηλαδή τον τύπο **(φ ∧ ¬ ψ) → ψευδής** (**ή (φ ∧ ¬ ψ) ⊨ ψευδής).»** Αυτό σημαίνει ότι οι τύποι **φ → ψ** και **(φ ∧ ¬ ψ) → ψευδής** είναι ισοδύναμοι, ή **φ → ψ ⇔ (φ ∧ ¬ ψ) → ψευδής.** Δηλαδή θα πρέπει να αποδειχτεί με τη μέθοδο των πινάκων αληθείας ότι ο τύπος **φ → ψ ↔ (φ ∧ ¬ ψ) → ψευδής** είναι ταυτολογία, **Πίνακας 2.16**.

φ	**ψ**	**φ→ ψ**	**¬ ψ**	**φ∧¬ψ**	**(φ∧¬ ψ) → ψευδής**	**φ → ψ ↔ (φ ∧ ¬ ψ) → ψευδής**
Α	Α	**Α**	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**
Α	Ψ	**Ψ**	Α	Α	**Ψ**	**Α**
Ψ	Α	**Α**	Ψ	Ψ	**Α**	**Α**
Ψ	Ψ	**Α**	Α	Ψ	**Α**	**Α**

Πίνακας 2.16: Η απαγωγή σε άτοπο ως ισοδυναμία: Απόδειξη της ταυτολογίας $\boldsymbol{\varphi \rightarrow \psi \leftrightarrow (\varphi \wedge \neg \psi) \rightarrow}$ **ψευδής**

Παράδειγμα

Θέλουμε ν' αποδείξουμε με την στρατηγική απόδειξης της απαγωγής σε άτοπο ότι, $r \rightarrow p$, $s \rightarrow q$, $q \rightarrow \neg p \models \neg r \vee \neg s$.

		Δικαιολόγηση κανόνα
1.	$r \rightarrow p$	Αρχική υπόθεση (Πρ.1)
2.	$s \rightarrow q$	Αρχική υπόθεση (Πρ.2)
3.	$q \rightarrow \neg p$	Αρχική υπόθεση (Πρ.3)
4.	$\neg(\neg r \vee \neg s)$	Εισαχθείσα υπόθεση
5.	$\neg\neg r \wedge \neg\neg s$	Νόμος De Morgan για ∨ στην 4
6.	$r \wedge s$	Νόμος διπλής άρνησης
7.	r	Κανόνας διαγραφής σύζευξης στην 6.
8.	s	Κανόνας διαγραφής σύζευξης στην 6.
9.	p	Κανόνας απόσπασης 1,7
10.	q	Κανόνας απόσπασης 2,8
11.	$\neg p$	Κανόνας απόσπασης 3, 10
12.	$p \wedge \neg p$	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης σε 9, 11.
13.	F	Νόμος της αντίφασης.

Επίλυση (Resolution)

Η ***επίλυση*** (***resolution***) είναι μια μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων με τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Οι τύποι πρέπει να είναι σε προτασιακή (clausal) μορφή.
2. Η μέθοδος της επίλυσης ακολουθεί ως στρατηγική απόδειξης την ***απαγωγή σε άτοπο***. Αποδεικνύει ότι η άρνηση του συμπεράσματος και οι υποθέσεις συνιστούν ένα ασυνεπές σύνολο.
3. Χρησιμοποιεί ένα μόνο συμπερασματικό κανόνα, αυτόν της επίλυσης (resolution).

Ορισμός 2.14

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις προτάσεις $\varphi_1 \vee p$ και $\varphi_2 \vee \neg p$ όπου φ_1 και φ_2 είναι προτάσεις και p είναι προτασιακή μεταβλητή. Ο ***συμπερασματικός κανόνας της επίλυσης*** ορίζεται ως εξής.

$$\varphi_1 \vee p,\ \varphi_2 \vee \neg p \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$$

Δυο προτάσεις επιλύονται εάν και μόνο εάν περιέχουν δυο στοιχειώδεις τύπους οι οποίοι είναι συμπληρωματικοί. Η εξαγόμενη νέα πρόταση ονομάζεται ***λύση*** (***resolvent***). Οι αρχικές προτάσεις ονομάζονται *πατρικές προτάσεις*. Η μέθοδος της επίλυσης είναι ουσιαστικά μια γενίκευση του συμπερασματικού κανόνα της απόσπασης (modus ponens).

Παραδείγματα

1. Θέλουμε να βρούμε την λύση για τις προτάσεις $p \vee \neg q \vee \neg r$ και $\neg p \vee s$. Η επίλυση θα γίνει πάνω στο p επειδή οι συμπληρωματικοί στοιχειώδεις τύποι είναι οι p και ¬p. Συνεπώς, η εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης έχει ως εξής.

$$p \vee \neg q \vee \neg r,\ \neg p \vee s \vdash \neg q \vee \neg r \vee s$$

2. Θέλουμε να βρούμε την λύση για τις προτάσεις $\neg p \vee q$ και p. Η επίλυση θα γίνει ως προς p. Συνεπώς, η εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης έχει ως εξής.

$$\neg p \vee q,\ p \vdash q$$

Ένας τύπος $\neg p \vee q \vee \neg r$ *μπορεί ισοδύναμα να γραφεί σε μορφή συνόλου* $\{\neg p, q, \neg r\}$. *Αυτό μπορεί να γίνει επειδή η σειρά και η πολλαπλότητα των στοιχειωδών τύπων σε μια πρόταση δεν έχει σημασία. Έτσι συχνά οι προτάσεις αντιμετωπίζονται ως σύνολα.*

Η στρατηγική με την οποία επιτυγχάνεται το συμπέρασμα (deduction) είναι η απαγωγή σε άτοπο. Αυτή η στρατηγική προσθέτει στις υποθέσεις την άρνηση του συμπεράσματος και προσπαθεί με διαδοχικά βήματα επίλυσης (resolution) να φθάσει στην άδεια πρόταση, δηλαδή σε αντίφαση.

Διάζευξη χωρίς προτάσεις λέγεται ***άδεια πρόταση*** και είναι πάντα ψευδής. Η άδεια πρόταση συμβολίζεται με το □. Ένα σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων που εξάγει την άδεια πρόταση είναι σαν να εξάγει αντίφαση.

Η άδεια πρόταση είναι πάντα ψευδής για τον εξής λόγο. Έστω η πρόταση p όπου p προτασιακή μεταβλητή. Η πρόταση p είναι ισοδύναμη με την πρόταση $p \vee F$, παρομοίως η πρόταση $\neg p$ είναι ισοδύναμη με την πρόταση $\neg p \vee F$. Εάν εφαρμόσουμε τον συμπερασματικό κανόνα της επίλυσης σ' αυτές τις δύο προτάσεις θα έχουμε ως συμπέρασμα την αντίφαση.

$$p \vee F,\ \neg p \vee F \vdash F \vee F$$

ή ισοδύναμα

$$p \vee F,\ \neg p \vee F \vdash F$$

Ορισμός 2.15

Έστω οι δύο προτάσεις $\varphi_1 \vee p$ και $\varphi_2 \vee \neg p$ όπου φ_1 και φ_2 είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων. Προτάσεις αυτής της μορφής ονομάζονται ***συγκρουόμενες προτάσεις*** οι οποίες συγκρούονται στους συμπληρωματικούς στοιχειώδεις τύπους p και $\neg p$.

Μια γενική διαδικασία απαγωγής σε άτοπο η οποία στηρίζεται στον κανόνα της επίλυσης δίνεται στον αλγόριθμο, **Αλγόριθμος 2.1**. Θεωρούμε ότι Π είναι ένα σύνολο προτάσεων το οποίο ονομάζεται προτάσεις εισόδου.

1. $\Pi_0 = \Pi$
2. Διάλεξε δύο συγκρουόμενες προτάσεις $\varphi_1 \vee p \in \Pi_{i-1}$ και $\varphi_2 \vee \neg p \in \Pi_{i-1}$, i={1,..,ν}.
3. $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ % Εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης
4. $\Pi_i = \Pi_{i-1} \cup \{\varphi\}$
5. **Εάν** φ = □ **τότε**
   Τερμάτισε την διαδικασία;
   Το σύνολο των προτάσεων Π είναι μη-επαληθεύσιμο (unsatisfiable);
6. **Εάν** $\Pi_{i+1} = \Pi_i$ για όλα τα ζεύγη συγκρουόμενων προτάσεων **τότε**
   Τερμάτισε την διαδικασία;
   Το σύνολο των προτάσεων Π είναι επαληθεύσιμο (satisfiable);
7. Πήγαινε στο βήμα (2).

Αλγόριθμος 2.1: Διαδικασία απαγωγής σε άτοπο στον προτασιακό λογισμό.

Ορισμός 2.16
Έστω Π ένα σύνολο προτάσεων το οποίο ονομάζεται προτάσεις εισόδου. Μια ***εξαγωγή συμπεράσματος*** (***deduction***) είναι μια ακολουθία προτάσεων $\varphi_1, \varphi_2,..,\varphi_\nu$ έτσι ώστε κάθε φ_i ($1 \le i \le \nu$) είτε ανήκει στις προτάσεις εισόδου ή είναι μία πρόταση εξαγόμενη από τις προτάσεις φ_j και φ_κ όπου $1 \le j < i$ και $1 \le \kappa < i$. Η πρόταση φ_i ονομάζεται ***εξαγόμενη (derived)*** πρόταση.

Ορισμός 2.17
Μια ***απόρριψη*** (***refutation***) των προτάσεων εισόδου Π είναι μια πεπερασμένη εξαγωγή συμπεράσματος $\varphi_1,..,\varphi_\nu$ τέτοια ώστε $\varphi_\nu = \Box$.

Ακολουθούν παραδείγματα απόδειξης με συμπερασματικό κανόνα την επίλυση και στρατηγική απόδειξης την απαγωγή σε άτοπο.

Παράδειγμα 1
Θέλουμε ν' αποδείξουμε τον κανόνα της απόσπασης, $p, \neg p \vee q \vdash q$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της επίλυσης και στρατηγική απόδειξης την απαγωγή σε άτοπο.

1.	p	Υπόθεση
2.	$\neg p \vee q$	Υπόθεση
3.	$\neg q$	Άρνηση συμπεράσματος
4.	q	Επίλυση στο 1 και 2
5.	$\Box$	Επίλυση στο 3 και 4

Παράδειγμα 2
Θέλουμε ν' αποδείξουμε $\neg p \vee q \vee r, p, \neg q \vdash r$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της επίλυσης και στρατηγική απόδειξης την απαγωγή σε άτοπο.

1.	$\neg p \vee q \vee r$	Υπόθεση
2.	p	Υπόθεση
3.	$\neg q$	Υπόθεση
4.	$\neg r$	Άρνηση συμπεράσματος
5.	$q \vee r$	Επίλυση στο 1 και 2
6.	r	Επίλυση στο 3 και 5
7.	$\Box$	Επίλυση στο 4 και 6

Παράδειγμα 3
Θέλουμε ν' αποδείξουμε $q \vee r, q \vee \neg r, \neg q \vee r \vdash q \wedge r$ εφαρμόζοντας τον κανόνα της επίλυσης και στρατηγική απόδειξης την απαγωγή σε άτοπο.

8.	$q \vee r$	Υπόθεση
9.	$q \vee \neg r$	Υπόθεση
10.	$\neg q \vee r$	Υπόθεση
11.	$\neg(q \wedge r)$	Άρνηση συμπεράσματος

12.	$\neg q \vee \neg r$	De Morgan στη 4
13.	$\neg r$	Επίλυση στη 2 και 5 και απλοποίηση
7.	q	Επίλυση στη 1 και 6
8.	r	Επίλυση στη 3 και 7
9.	$\square$	Επίλυση στη 6 και 8

2.5. Ασκήσεις

Άσκηση 1
Να φτιάξετε τον πίνακα αληθείας για όλους τους προτασιακούς συνδέσμους $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$.

Άσκηση 2
Δείξετε με την μέθοδο των πινάκων αληθείας ότι η πρόταση $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ είναι ταυτολογία.

Άσκηση 3
Δείξετε με την μέθοδο των πινάκων αληθείας ότι η πρόταση $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ είναι ταυτολογία.

Άσκηση 4
Δείξετε με την μέθοδο των πινάκων αληθείας ότι η πρόταση $\neg (((p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow (q \vee r))$ είναι αντίφαση.

Άσκηση 5
Αποδείξετε χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας ότι η πρόταση $(\neg p \rightarrow \neg q) \vee q$ είναι ταυτολογία και η πρόταση $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$ είναι αντίφαση.

Άσκηση 6
Αποδείξετε χρησιμοποιώντας πίνακες αληθείας ότι η πρόταση $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ είναι ταυτολογία και η πρόταση $(p \vee q)\ ) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ είναι αντίφαση.

Άσκηση 7
Πότε ένας τύπος Φ του προτασιακού λογισμού είναι σε διαζευκτική κανονική μορφή και πότε σε συζευκτική κανονική μορφή; Δώστε από ένα παράδειγμα για κάθε περίπτωση.

Άσκηση 8
Πότε ένας τύπος Φ είναι σε συζευκτική κανονική μορφή (ΣΚΜ); Μετατρέψετε τον επόμενο τύπο σε ΣΚΜ , $(\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

Άσκηση 9
Τι είναι η εξαγωγή συμπεράσματος (deduction) και τι η απόρριψη (refutation);

Άσκηση 10
Να ορίσετε την στρατηγική απόδειξης *απαγωγή σε άτοπο*.

Άσκηση 11
Ν' αποδείξετε το εξής $p \rightarrow q,\ q \rightarrow \neg r,\ \neg p \rightarrow \neg r \vdash \neg r$ χρησιμοποιώντας συμπερασματικούς κανόνες από τον ακόλουθο πίνακα.

Συμπερασματικοί κανόνες

Α)	$\varphi \rightarrow \psi,\ \neg\varphi \rightarrow \psi \models \psi$	Νόμος των περιπτώσεων
Β)	$\varphi \rightarrow \psi,\ \psi \rightarrow \omega \models \psi \models \varphi \rightarrow \omega$	Υποθετικός συλλογισμός
Γ)	$\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi \models \psi$	Κανόνας απόσπασης (modus ponens)
Δ)	$\varphi,\ \psi \models \varphi \wedge \psi$	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης

Άσκηση 12
Ν' αποδείξετε με την στρατηγική απαγωγής σε άτοπο το εξής $r \rightarrow p,\ s \rightarrow q,\ q \rightarrow \neg p \vdash \neg r \vee \neg s$. Να χρησιμοποιήσετε νόμους του προτασιακού λογισμού καθώς και συμπερασματικούς κανόνες από τους ακόλουθους πίνακες.

Συμπερασματικοί κανόνες

Α)	$\varphi,\ \varphi \rightarrow \psi \models \psi$	Κανόνας απόσπασης (modus ponens)
Γ)	$\varphi,\ \psi \models \varphi \wedge \psi$	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης
Δ)	$\varphi,\ \psi \models \varphi$ (ή $\varphi \wedge \psi \models \psi$)	Κανόνας διαγραφής σύζευξης

Νόμοι του προτασιακού λογισμού

Α)	$\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi)$	Νόμος του De Morgan για $\vee$
	$\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \neg\psi)$	-‘’- για $\wedge$
Β)	$\varphi \wedge \neg\varphi \Leftrightarrow F$	Νόμος της αντίφασης

Άσκηση 13
α) Ποιές μορφές μπορεί να έχει μια πρόταση Horn (Horn clause) στον προτασιακό λογισμό; β) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι προτάσεις Horn, όπου τα p, p_1, p_2 και q_1, q_2, q_3 είναι προτασιακές μεταβλητές.

$p_1 \vee p_2 \vee (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee (\neg q_3)$ (ή ισοδύναμα $q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \rightarrow p_1 \vee p_2$)
$p \vee (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee (\neg q_3)$ (ή ισοδύναμα $q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \rightarrow p$)
$(\neg q_1) \vee (\neg q_2)$ (ή ισοδύναμα $\neg(q_1 \wedge q_2)$)
p

Άσκηση 14
Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις είναι προτάσεις Horn;

1. $\neg p \vee \neg q \vee r \vee s$
2. $q \vee r \vee \neg s$
3. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee s$
4. $\neg p \vee \neg q \vee \neg r \vee \neg s$
5. $q \vee r$

6. $\neg p \vee \neg q$
7. r
8. $\neg p$

Άσκηση 15

Ποιά είναι τα χαρακτηριστικά (μορφή τύπων, στρατηγική απόδειξης και κανόνας/ες εξαγωγής συμπερασμάτων) της μεθόδου εξαγωγής συμπερασμάτων «επίλυσης (resolution)»;

Άσκηση 16

Να εφαρμόσετε τον συμπερασματικό κανόνα της «επίλυσης» στις εξής προτάσεις (τύπους) 1) $\neg p \vee q \vee r$, $r \vee \neg s \vee \neg q$, 2) $\neg p \vee \neg q \vee r$, $q \vee r \vee \neg s$, 3) $\neg p \vee q \vee r$, $q \vee \neg r \vee \neg s$.

Ποια θα είναι η νέα πρόταση που θα δημιουργηθεί σε κάθε μία από τις περιπτώσεις;

1) $\neg p \vee q \vee r,\ r \vee \neg s \vee \neg q \vdash$;
2) $\neg p \vee \neg q \vee r,\ q \vee r \vee \neg s \vdash$;
3) $\neg p \vee q \vee r,\ q \vee \neg r \vee \neg s \vdash$;

Άσκηση 17

Να ορίσετε τον συμπερασματικό κανόνα της επίλυσης (resolution) στον προτασιακό λογισμό και μετά να τον εφαρμόσετε στις παρακάτω προτάσεις του προτασιακού λογισμού.

1. winter $\vee$ summer
2. $\neg$winter $\vee$ cold

Άσκηση 18

Να χρησιμοποιήσετε τον συμπερασματικό κανόνα της «επίλυσης» και την στρατηγική απόδειξης «απαγωγή σε άτοπο» για ν' αποδείξετε τα εξής:

a) $\neg p \vee q,\ p \vdash q$
b) $\neg p \vee q \vee r,\ p,\ \neg q \vdash r$
c) $\neg p \vee \neg q \vee r,\ \neg w \vee r,\ \neg s \vee w,\ p,\ s \vdash r$

Άσκηση 19

Έστω Π ένα σύνολο προτάσεων του προτασιακού λογισμού το οποίο ονομάζεται *προτάσεις εισόδου*. Γράψετε μια γενική διαδικασία *απαγωγής σε άτοπο* η οποία να στηρίζεται στον *κανόνα της επίλυσης (resolution)*.

Άσκηση 20

Έστω Π ένα σύνολο από προτάσεις του προτασιακού λογισμού και Σ μια πρόταση την οποία θέλουμε να αποδείξουμε από τις προτάσεις Π. Να γράψετε μια γενική διαδικασία *απαγωγής σε άτοπο* η οποία να στηρίζεται στον *κανόνα της επίλυσης (resolution)* η οποία θα δημιουργεί μια απόδειξη της πρότασης Σ από τις προτάσεις Π. *Σημείωση*: $\Pi_0 = \Pi \cup \{\neg \Sigma\}$

Άσκηση 21

Να αποδείξετε με τον κανόνα της επίλυσης και στρατηγική απόδειξης την απαγωγή σε άτοπο το εξής: $\neg p \vee q \vee r,\ \neg q \vee r,\ \neg s \vee q,\ p,\ s \vdash r$

3. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική σε Κατηγορηματική Λογική

3.1. Εισαγωγή

Το κύριο πρόβλημα του προτασιακού λογισμού είναι ότι μελετά μόνο πλήρεις προτάσεις και δεν μπορεί να εξετάσει την εσωτερική δομή μιας πρότασης. Για παράδειγμα ο προτασιακός λογισμός δεν μπορεί να αποδείξει την ορθότητα του εξής συλλογισμού

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί
Όλοι οι Έλληνες είναι άνθρωποι
Συνεπώς, όλοι οι Έλληνες είναι θνητοί

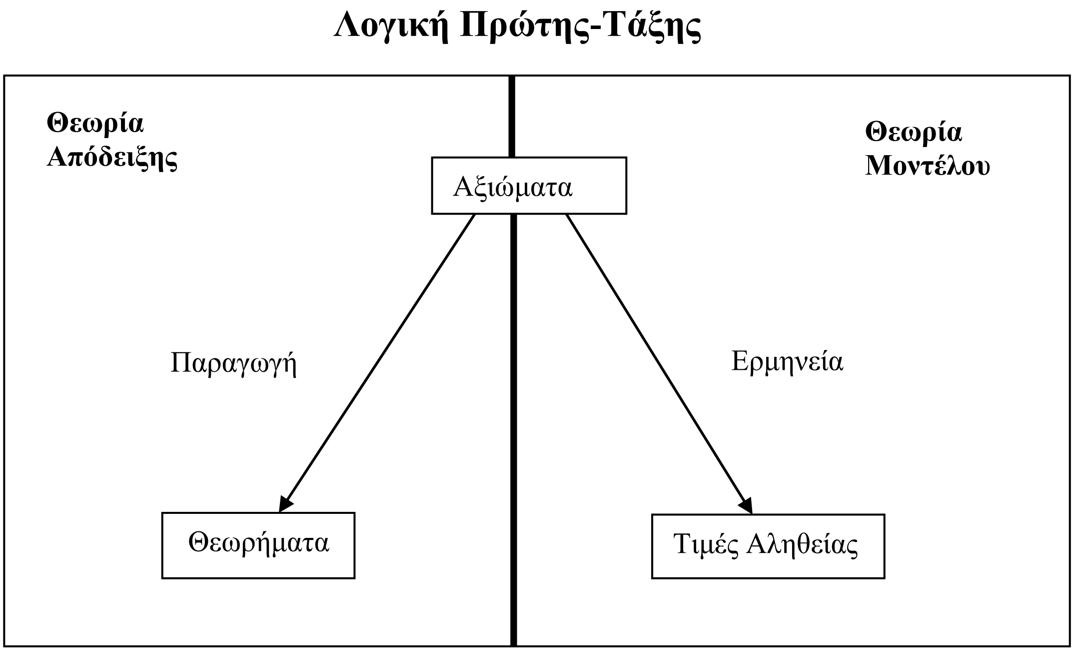
Για να μπορεί ένας φορμαλισμός να εκφράσει επαρκώς την γνώση του χώρου δεν αρκεί μόνο να μπορεί να εκφράζει την αλήθεια ή μη προτάσεων αλλά θα πρέπει επιπλέον, α) να μιλάει για τα αντικείμενα ή τις οντότητες του χώρου, β) να εκφράζει τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αντικειμένων και γ) να γενικεύει αυτές τις σχέσεις σε κλάσεις αντικειμένων.

Ο *κατηγορηματικός λογισμός* ή *κατηγορηματική λογική πρώτης-τάξεως* ή *λογική πρώτης-τάξεως* (**ΛΠΤ**) περιέχει, όλα τα συστατικά του προτασιακού λογισμού (προτασιακές μεταβλητές, σταθερές, λογικούς συνδέσμους), και επιπλέον όρους (terms), κατηγορήματα (predicates) και ποσοδείκτες (quantifiers).

Υπάρχουν δύο όψεις της *λογική πρώτης-τάξεως* τις οποίες θα μελετήσουμε, *η **θεωρία των μοντέλων*** και ***η θεωρία των αποδείξεων***.

1. Η **θεωρία του μοντέλου** μελετά τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων της λογικής οι οποίες αφού ερμηνευτούν καταχωρεί τιμές αληθείας σ’ αυτές. Η ***ερμηνεία των προτάσεων*** περιλαμβάνει **μια απεικόνιση** στοιχείων των προτάσεων σε αντικείμενα του πεδίου του προβλήματος.
   Το λεξιλόγιο της βασικής θεωρίας του μοντέλου περιλαμβάνει όρους όπως *αληθές (true), ψευδές (false), ερμηνεία (interpretation), ικανοποίηση ή επαλήθευση (satisfaction), μοντέλο (model), συνεπαγωγή (implication), λογική συνέπεια (semantic consequence) και έγκυρος/εγκυρότητα (valid/validity).*
2. Η **θεωρία της απόδειξης** εξετάζει τις σχέσεις των προτάσεων με βάση τη παραγωγή τους από άλλες προτάσεις χρησιμοποιώντας κανόνες παραγωγής οι οποίοι λειτουργούν πάνω στη δομή (στο δομικό περιεχόμενο) των προτάσεων.
   Το λεξιλόγιο της βασικής θεωρίας της απόδειξης περιλαμβάνει όρους όπως *αξίωμα (axiom), κανόνας συμπερασμού/παραγωγής (inference/derivation rule), θεώρημα (theorem), απόδειξη (proof), συνέπεια (consistency), παραγωγή ή συντακτική συνεπαγωγή (derivation or syntactic consequence).*

Αμφότερες οι όψεις είναι σημαντικές για την κατανόηση της **αναπαράστασης γνώσης και της συλλογιστικής στο κατηγορηματικό λογισμό**. Το σχήμα Σχήμα 3.1 απεικονίζει τις δύο όψεις της λογικής πρώτης-τάξης τις οποίες θα μελετήσουμε.



Σχήμα 3.1: Οι δύο όψεις της Λογικής Πρώτης Τάξης.

3.2. Συντακτικά Συστατικά του Κατηγορηματικού Λογισμού

Ορισμός 3.1
Πεδίο *(domain ή domain of discourse ή universe of discourse)* είναι η συλλογή όλων των αντικειμένων, οντοτήτων, του προβλήματος όπως άνθρωποι (π.χ. Γιάννης), ιδέες (π.χ. πέντε), σύμβολα(π.χ. 8), κτλ, τα οποία επηρεάζουν την λογική επιχειρηματολογία που εξετάζεται. Τα στοιχεία της συλλογής, δηλαδή του πεδίου, ονομάζονται άτομα (individuals) ή οντότητες ή αντικείμενα. Εάν το *πεδίο* ενός προβλήματος είναι $Π=\{α_1, …, α_κ\}$ τότε κάθε $α_i$ $1≤i≤κ$ είναι μια οντότητα ή αντικείμενο και ονομάζεται ***σταθερά***. Κάθε *σταθερά* είναι ένας *όρος*. Για παράδειγμα, α) Το σύνολο Π={γιάννης, μαρία, ελένη, κώστας} παριστάνει το πεδίο ενός προβλήματος σχέσεων οικογένειας: β) Το σύνολο των ακέραιων αριθμών Z={..,-1,0,1,..} μπορεί να παριστάνει το πεδίο σ' ένα αριθμητικό πρόβλημα.

Σημείωση: Ο όρος *πεδίο (domain)* ή *πεδίο του λόγου* (*domain of discourse*) ή *σύμπαν του λόγου* (*universe of discourse*) αναφέρεται γενικά στη συλλογή των οντοτήτων ή αντικειμένων (objects) που συζητούνται σε ένα συγκεκριμένο λόγο (discourse). Στο μοντέλο-θεωρητική σημασιολογία (model-theoretical semantics), ένα πεδίο ή σύμπαν του λόγου είναι το σύνολο των οντοτήτων στο οποίο βασίζεται το μοντέλο. Στα επόμενα το πεδίο θα το συμβολίζουμε είτε με το Ελληνικό **Π**(εδίο) ή με το Αγγλικό **D**(omain) εκτός εάν υπάρχει συγκεκριμένο σύμβολο για κάποιο γνωστό πεδίο όπως π.χ. **N** δια τους φυσικούς αριθμούς, **Z** για του ακέραιους και ούτω καθεξής.

Κατηγορήματα είναι ισχυρισμοί για αντικείμενα (σταθερές). Κάθε κατηγόρημα εκφράζεται ως μια διατεταγμένη N-άδα αντικειμένων τα οποία λέγονται *ορίσματα*. Η τιμή του κατηγορήματος είναι είτε αληθής ή ψευδής. Το πλήθος των ορισμάτων ενός κατηγορήματος λέγεται *πληθυκότητα* ή *βαθμός*. Κατηγορήματα με πληθυκότητα 1 ονομάζονται *ιδιότητες*. Ένα κατηγόρημα p με πληθυκότητα ν συμβολίζεται με p/ν.

Παραδείγματα

1. Ο ισχυρισμός, «ο Γιάννης είναι πατέρας της Μαρίας» παριστάνεται από το εξής κατηγόρημα:

   πατέρας(γιάννης, μαρία)

   Όπου *πατέρας* είναι το όνομα του κατηγορήματος με πληθυκότητα 2, *γιάννης* και *μαρία* είναι σταθερές ή αντικείμενα από το πεδίο του προβλήματος.

2. Ο ισχυρισμός «το γινόμενο 3 επί 5 είναι 15» παριστάνεται από το εξής κατηγόρημα

   γινόμενο (3,5,15)

   Όπου *γινόμενο* είναι το όνομα του κατηγορήματος με πληθυκότητα 3 επιπλέον 3,5,15 είναι σταθερές από το πεδίο του προβλήματος που είναι οι ακέραιοι αριθμοί (το σύνολο Ζ).
3. Ο ισχυρισμός «η γάτα είναι ζώο» παριστάνεται από το εξής κατηγόρημα:

   ζώο(γάτα)

   Όπου *ζώο* είναι το όνομα του κατηγορήματος με πληθυκότητα 1, *γάτα* είναι σταθερά.

Μια ***μεταβλητή*** Χ είναι ένας *όρος* ο οποίος μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το πεδίο του προβλήματος. Εάν το πεδίο Π ενός προβλήματος είναι το σύνολο των ανθρώπων Π={γιάννης, νίκος, άννα, μαρία} τότε η μεταβλητή Χ μπορεί να πάρει ως τιμή οποιοδήποτε στοιχείο του Π. Στο κατηγόρημα πατέρας(Χ, Υ) οι μεταβλητές Χ και Υ μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο Π.

Οι συναρτήσεις, όπως τα κατηγορήματα, εφαρμόζονται σε διατεταγμένες Ν-άδες αντικειμένων τα οποία λέγονται ορίσματα. Επιπλέον, οι συναρτήσεις επιστρέφουν μια τιμή από το πεδίο ορισμού τους. Το πλήθος των ορισμάτων μιας συνάρτησης ονομάζεται *πληθυκότητα ή βαθμός*. Εάν f είναι μια συνάρτηση με πληθυκότητα ν συμβολίζεται f/ν.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση *σπουδάζει_στο(μαρία)* θα επιστρέψει την τιμή *τειΚρήτης*. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης σπουδάζει_στο/1 είναι το σύνολο φοιτητέςΕλληνικώνΑΕΙ (φοιτητές σε Ελληνικά Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα) και το πεδίο τιμών της είναι το σύνολο ελληνικάΑΕΙ (Ελληνικά Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα),

   σπουδάζει_στο: φοιτητέςΕλληνικώνΑΕΙ → ελληνικάΑΕΙ.

2. Η συνάρτηση *πατέρας(μαρία)* θα επιστρέψει την τιμή *γιάννης*. Το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης πατέρας/1 είναι το σύνολο *άνθρωποι* (όλα τα ονόματα ανθρώπων),

   πατέρας: άνθρωποι → άνθρωποι.

3. Η συνάρτηση *συν(4,8)* θα επιστρέψει την τιμή 12. Το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης συν/2 είναι το σύνολο των ακεραίων Ζ,

   συν: $Z \times Z \rightarrow Z$.

4. Η συνάρτηση *επί(συν(4,8),5)* θα επιστρέψει την τιμή 60. Το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης επί/2 είναι το σύνολο των ακεραίων αριθμών Ζ,

   επί: $Z \times Z \rightarrow Z$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα εξής σύμβολα για σταθερές, μεταβλητές, συναρτήσεις και ονόματα κατηγορημάτων.

1. Οι *σταθερές* θ' αρχίζουν με πεζό γράμμα του Ελληνικού ή του Αγγλικού αλφαβήτου και ακολουθεί είτε ψηφίο ή υπογράμμιση ή πεζό ή κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου. Επιπλέον σταθερές είναι και οι αριθμοί. Για παράδειγμα, γιάννης, κόκκινο, 4, 5.46 κτλ.
2. Οι *μεταβλητές* θ' αρχίζουν με κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Αγγλικού αλφαβήτου και ακολουθεί είτε ψηφίο ή υπογράμμιση ή πεζό ή κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου. Για παράδειγμα, X, Y, Ηλικία, Αριθμός κτλ.
3. *Σύμβολα συναρτήσεων*. Σύμβολα συναρτήσεων αρχίζουν με πεζό γράμμα του Ελληνικού ή του Αγγλικού αλφαβήτου και ακολουθεί είτε ψηφίο ή υπογράμμιση ή πεζό ή κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου. Για παράδειγμα, f, g, συν, επί, πατέρας κτλ.
4. *Σύμβολα κατηγορημάτων*. Σύμβολα κατηγορημάτων αρχίζουν με πεζό γράμμα του Ελληνικού ή του Αγγλικού αλφαβήτου και ακολουθεί είτε ψηφίο ή υπογράμμιση ή πεζό ή κεφαλαίο γράμμα του Ελληνικού ή του Λατινικού αλφάβητου. Για παράδειγμα, p, q, r, μεγαλύτερο, αδέλφια, είναι_σπουδαστής κτλ.

Ορισμός 3.2

Ένας ***όρος (term)*** ορίζεται αναδρομικά ως εξής.

1. Μία σταθερά είναι ένας όρος.
2. Μία μεταβλητή είναι ένας όρος.
3. Εάν f είναι ένα σύμβολο συνάρτησης με ν-ορίσματα, και $t_1, \ldots, t_\nu$ είναι όροι τότε $f(t_1, \ldots, t_\nu)$ είναι ένας όρος.

Ορισμός 3.3

Εάν p είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος ν-ορισμάτων και $t_1, \ldots, t_\nu$ είναι όροι, τότε $p(t_1, \ldots, t_\nu)$ είναι ένας ***ατομικός τύπος (atomic formula)***.

Για παράδειγμα, αδέλφια(γιάννης, μαρία) και μεγαλύτερο(επί(3,7),12) είναι ατομικοί τύποι ή άτομα.

Θεωρούμε το κατηγόρημα πατέρας(X,Y) και πεδίο το σύνολο Π={γιάννης, μαρία, ελένη, κώστας}, για να βρούμε την αλήθεια του κατηγορήματος πατέρας/2 θα πρέπει να ξέρουμε για κάθε διατεταγμένη δυάδα σταθερών του Π εάν το κατηγόρημα είναι αληθές ή όχι. Αυτό γίνεται με τον πίνακα, **Πίνακας 3.1.**

X \ Y	γιάννης	μαρία	ελένη	κώστας
γιάννης	Ψ	Α	Ψ	Α
μαρία	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
ελένη	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ
κώστας	Ψ	Ψ	Ψ	Ψ

Πίνακας 3.1: Καταχώρηση τιμών αληθείας στο κατηγόρημα πατέρας/2.

Οποιαδήποτε μέθοδος η οποία καταχωρεί τιμές αληθείας σ' ένα κατηγόρημα για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των σταθερών του πεδίου του ονομάζεται *καταχώρηση* κατηγορήματος. Η αλήθεια του κατηγορήματος πατέρας(X,Y) δίνεται στην γραμμή X, και στην στήλη Y του πίνακα **Πίνακας 3.1**, Για παράδειγμα, οι ατομικοί τύποι πατέρας(γιάννης, μαρία) και πατέρας(γιάννης, κώστας) είναι αληθείς. Για κατηγόρημα με πληθυκότητα ν η καταχώρηση του απαιτεί ένα ν-διάστατο πίνακα.

Ποσοδείκτες (quantifiers)
Θεωρήσετε τις εξής προτάσεις, «όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί» και «μερικοί άνθρωποι είναι σπουδαστές». Για να εκφραστούν προτάσεις αυτής της μορφής έχουν εισαχθεί στον κατηγορηματικό λογισμό ο καθολικός $\forall$ και ο υπαρξιακός $\exists$ ποσοδείκτης. *Ένας ποσοδείκτης δεικνύει πόσο συχνά κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής.*

Ο *καθολικός ποσοδείκτης* δεικνύει ότι μια πρόταση είναι αληθής για όλα τα αντικείμενα στα οποία εφαρμόζεται. Για παράδειγμα, $\forall$X θνητός(X) σημαίνει ότι για όλες τις τιμές του X ο ισχυρισμός θνητός(X) είναι αληθής.
Ο *υπαρξιακός ποσοδείκτης* δεικνύει ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής για τουλάχιστον ένα αντικείμενο στο οποίο εφαρμόζεται. Για παράδειγμα, $\exists$X είναι_σπουδαστής(X) σημαίνει ότι για μία τουλάχιστον τιμή του X ο ισχυρισμός είναι_σπουδαστής(X) είναι αληθής.

Έτσι με τα κατηγορήματα και τους ποσοδείκτες μπορούμε να εκφράσουμε σε λογική περισσότερο πολύπλοκες προτάσεις. Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός «όλοι οι σπουδαστές είναι μεγαλύτεροι των 18 χρονών» παριστάνεται σε λογική ως εξής:

$\forall$X(είναι_σπουδαστής(X)$\rightarrow$ μεγαλύτερος_από(X,18))

Καλά διαμορφωμένοι τύποι

Εφόσον έχουν οριστεί οι ατομικοί τύποι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους λογικούς τελεστές $\wedge,\vee,\neg,\rightarrow$, $\leftrightarrow$ και τους ποσοδείκτες $\forall,\exists$ για να κατασκευάσουμε πιο σύνθετους τύπους.

Ορισμός 3.4
Ένας καλά διαμορφωμένος τύπος ή τύπος (well-formed formula) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
1. Ένας ατομικός τύπος είναι ένας καλά διαμορφωμένος τύπος ή τύπος.
2. Εάν φ και ψ είναι τύποι, τότε $(\neg\varphi)$, $(\varphi\wedge\psi)$, $(\varphi\vee\psi)$, $(\varphi\rightarrow\psi)$ και $(\varphi\leftrightarrow\psi)$ είναι τύποι.
3. Εάν φ είναι ένας τύπος και X μια μεταβλητή, τότε $(\forall X\varphi)$ και $(\exists X\varphi)$ είναι τύποι.

Στους τύπους $(\forall X\varphi)$ και $(\exists X\varphi)$ η μεταβλητή X ονομάζεται *δεσμευμένη μεταβλητή*, η εμβέλεια της είναι ο τύπος φ. Ένας ποσοδείκτης μαζί με την μεταβλητή του θεωρείται ως ένας τελεστής μ' ένα όρισμα και *προτεραιότητα ίδια μ' αυτή της άρνησης*. Η προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων είναι, όπως στον προτασιακό λογισμό, $\neg$(μεγαλύτερη), $\wedge,\vee,\rightarrow$, $\leftrightarrow$(μικρότερη). Για παράδειγμα, ο τύπος $\forall$X p(X) $\wedge$ q(X) σημαίνει $\forall$X (p(X)) $\wedge$ q(X).

Η μεταβλητή X ενός ποσοδείκτη σ' ένα τύπο μπορεί να αντικατασταθεί από κάποια άλλη μεταβλητή η οποία δεν υπάρχει στον τύπο. Για παράδειγμα $\forall$X p(X) είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall$Y p(Y). Ο τύπος $\forall$Y p(Y) είναι *παραλλαγή* του τύπου $\forall$X p(X). Μια μεταβλητή η οποία δεν είναι δεσμευμένη ονομάζεται *ελεύθερη*. Η μεταβλητή Y στον τύπο $\forall$X p(X) $\wedge$ q(Y) είναι ελεύθερη. Τύποι των οποίων όλες οι μεταβλητές είναι δεσμευμένες λέγονται *κλειστοί* τύποι. Τύποι οι οποίοι έχουν ελεύθερες μεταβλητές λέγονται *ανοικτοί* τύποι.

Ορισμός 3.5
Θεωρούμε ότι φ είναι ένας τύπος, X μια μεταβλητή και t είναι όρος. φ[X/t] ή φ{X/t} παριστάνει το τύπο που προκύπτει εάν όλες οι εμφανίσεις του X στον τύπο φ αντικατασταθούν από τον όρο t. Ο τύπος φ{X/t} ονομάζεται ***στιγμιότυπο*** (***instance***) του τύπου φ και ο όρος t είναι *στιγμιότυπο* (*instance*) του X.

Παραδείγματα
1. Από την αντικατάσταση $p(X) \wedge q(b)\{X/a\}$ προκύπτει ο τύπος $p(a) \wedge q(b)$.
2. Από την αντικατάσταση $p(X) \wedge q(X)\{X/t(a)\}$ προκύπτει ο τύπος $p(t(a)) \wedge q(t(a))$.

Μερικές φορές χρειάζεται η έκταση (το πεδίο τιμών) ενός ποσοδείκτη να είναι ένα υποσύνολο του πεδίου του προβλήματος. Για να γίνει αυτό στην περίπτωση του καθολικού ποσοδείκτη θα πρέπει να παραφράσουμε την αρχική πρόταση ώστε να πάρει τη μορφή $\forall X(p(X) \rightarrow r(X))$.

Αυτός ο τύπος μεταφράζεται ότι, «όλες οι οντότητες (σταθερές) με την ιδιότητα p έχουν επίσης την ιδιότητα r». Για παράδειγμα, θέλουμε να εκφράσουμε την πρόταση «όλες οι γάτες είναι θηλαστικά». Για να περιοριστεί η έκταση (οι τιμές) του ποσοδείκτη ∀ στις γάτες και όχι στα θηλαστικά πρέπει να παραφράσουμε την πρόταση ως εξής, «**εάν** X είναι γάτα, **τότε** X είναι θηλαστικό». Οπότε στον τύπο ∀X(γάτα(X) → θηλαστικό(X)) το X κυμαίνεται στις οντότητες γάτες και όχι στις οντότητες θηλαστικά. Στην περίπτωση του υπαρξιακού ποσοδείκτη θα πρέπει να παραφράσουμε την αρχική πρόταση ώστε να λάβει την εξής μορφή.

$$\exists X(p(X) \wedge r(X))$$

Αυτός ο τύπος μεταφράζεται «μερικές οντότητες με την ιδιότητα p έχουν επίσης την ιδιότητα r».
Για παράδειγμα, θέλουμε να εκφράσουμε την πρόταση, «μερικές γάτες είναι μαύρες», εάν την παραφράσουμε, «X είναι γάτα και X είναι μαύρη» θα έχουμε τον εξής τύπο.

∃X(γάτα(X) ∧ μαύρη(X))

3.3. Ερμηνείες

Στον κατηγορηματικό λογισμό πρώτης-τάξεως οι τύποι περιέχουν μεταβλητές γι’ αυτό για να ορίσουμε την ερμηνεία (interpretation) ενός τύπου πρέπει να ορίσουμε το πεδίο του προβλήματος, και μια αντιστοιχία του πεδίου του προβλήματος με τις σταθερές, τις μεταβλητές, τα σύμβολα συναρτήσεων και τα σύμβολα κατηγορημάτων του τύπου.

Θα ορίσουμε την ερμηνεία για κλειστούς και για ανοικτούς τύπους.

Κλειστοί τύποι
Ας υποθέσουμε ότι Φ είναι ένα σύνολο κλειστών τύπων τέτοιο ώστε $\{p_1,\ldots,p_\kappa\}$ είναι όλα τα κατηγορήματα του Φ, $\{f_1,\ldots,f_m\}$ είναι όλες οι συναρτήσεις του Φ, $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ όλες οι σταθερές του Φ. Μια ερμηνεία I του Φ είναι μια τετράδα της εξής μορφής.

$$I=(D, \{R_1,\ldots,R_k\}, \{F_1,\ldots,F_m\}, \{d_1,\ldots,d_n\})$$

Η τετράδα I αποτελείται από τα εξής στοιχεία:
1. D είναι ένα μη κενό πεδίο.

2. Σε κάθε σταθερά $\alpha \in \{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ του Φ καταχωρείται μια τιμή $d \in \{d_1,\ldots,d_n\}$ από το D.
3. Σε κάθε σύμβολο συνάρτησης $f \in \{f_1,\ldots,f_m\}$ του Φ με πληθυκότητα ν καταχωρείται μια συνάρτηση $F \in \{F_1,\ldots,F_m\}$ πληθυκότητας ν από το D^{ν} στο D.
4. Σε κάθε κατηγόρημα $p \in \{p_1,\ldots,p_\kappa\}$ του Φ με πληθυκότητα ν καταχωρείται μια σχέση $R \in \{R_1,\ldots,R_\kappa\}$ πληθυκότητας ν στο D^{ν}.

Ένας κλειστός τύπος Φ με μια ερμηνεία στο D γίνεται αληθής ή ψευδής. Η τιμή αληθείας του κλειστού τύπου λαμβάνεται ως εξής.

1. **Εάν** R είναι η σχέση που καταχωρήθηκε στο κατηγόρημα p πληθυκότητας ν, **τότε** $p(d_1,\ldots,d_\nu)$ είναι αληθές εάν η σχέση $<d_1,\ldots,d_\nu> \in R$, διαφορετικά είναι ψευδές.
2. Θεωρούμε ότι φ_1 και φ_2 είναι κλειστοί τύποι.
   α. Ο τύπος $\neg\varphi_1$ είναι αληθής εάν ο τύπος φ_1 είναι ψευδής, διαφορετικά είναι ψευδής.
   β. Ο τύπος $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ είναι αληθής εάν και οι δύο τύποι φ_1 και φ_2 είναι αληθείς, διαφορετικά είναι ψευδής.
   γ. Ο τύπος $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ είναι αληθής εάν ο τύπος φ_1 είναι ψευδής ή ο τύπος φ_2 είναι αληθής, διαφορετικά είναι ψευδής.
   δ. Ο τύπος $\varphi_1 \vee \varphi_2$ είναι αληθής εκτός εάν οι τύποι φ_1 και φ_2 είναι ψευδείς οπότε είναι ψευδής.
   ε. Ο τύπος $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ είναι αληθής εάν οι τύποι φ_1 και φ_2 έχουν την ίδια τιμή αληθείας διαφορετικά είναι ψευδής.
   στ. Ο τύπος $\forall X\varphi(X)$ είναι αληθής εάν για κάθε στοιχείο d_i $(1 \le i \le \kappa)$ του D το $\varphi(d_i)$ είναι αληθές, διαφορετικά είναι ψευδές.
   ζ. Ο τύπος $\exists X\varphi(X)$ είναι αληθής εάν υπάρχει ένα τουλάχιστον στοιχείο $d \in D$ τέτοιο ώστε $\varphi(d)$ να είναι αληθής, διαφορετικά είναι ψευδής.

Ορισμός 3.6

Θεωρούμε ότι Φ είναι ένα σύνολο τύπων. Μια ερμηνεία I του Φ είναι ένα *μοντέλο* του Φ (ή η Φ είναι αληθής στο I) εάν όλοι οι τύποι του Φ είναι αληθείς στο I.

Ορισμός 3.7

Ένας τύπος φ είναι ***λογική συνέπεια*** (*logical consequence*) ενός συνόλου τύπων Φ τότε και μόνον τότε εάν ο τύπος φ είναι αληθής σε όλα τα μοντέλα του Φ. Αυτό συμβολίζεται $\Phi \models \varphi$.

Ορισμός 3.8

Ένας τύπος φ είναι ***ικανοποιήσιμος*** ή ***επαληθεύσιμος*** (*satisfiable*) εάν υπάρχει μια ερμηνεία I στην οποία είναι αληθής, συμβολίζεται $I \models \varphi$. Σε αντίθετη περίπτωση ο τύπος φ είναι ***μη ικανοποιήσιμος*** ή ***μη επαληθεύσιμος***, συμβολίζεται $I \not\models \varphi$.

Ορισμός 3.9

Ένας τύπος φ είναι ***έγκυρος*** (***valid***) εάν είναι αληθής σε όλες τις ερμηνείες.

Παραδείγματα

1. Θεωρούμε τον τύπο $\forall X p(a,X)$ όπου p είναι κατηγόρημα πληθυκότητας 2, και a είναι σταθερά. Θεωρούμε τις εξής ερμηνείες.
   α. I_1 = (N, {μικρότερο_ίσο}, { }, {0}) όπου μικρότερο_ίσο είναι η γνωστή σχέση $\le$ του συνόλου των φυσικών N. Δηλαδή η ερμηνεία του τύπου είναι ∀X μικρότερο_ίσο (0,X). Ο τύπος είναι αληθής επειδή για κάθε $d \in N$ ο τύπος μικρότερο_ίσο (0, d) είναι αληθής.

β. I_2 = (N, {μικρότερο_ίσο}, { }, {1}).
Ο τύπος ∀X μικρότερο_ίσο (1, X) δεν είναι αληθής σε αυτήν την ερμηνεία επειδή υπάρχει ένα d∈N για το οποίο η σχέση μικρότερο_ίσο (1, d) είναι ψευδής. Για d = 0, μικρότερο_ίσο (1, 0) είναι ψευδής.

2. Θεωρούμε τον τύπο ∀X ∀Y (p(X, Y)) → p(f(X, a), f(Y, b)) όπου p είναι ένα κατηγόρημα πληθυκότητας 2, a και b είναι σταθερές. Θεωρούμε την εξής ερμηνεία:
I_1 = (Z, {μικρότερο_ίσο}, {συν }, {1})
Το πεδίο Z είναι το σύνολο των ακέραιων αριθμών, *μικρότερο_ίσο* είναι η σχέση ≤, *συν* είναι ο τελεστής της πρόσθεσης (το γνωστό +). Οι σταθερές a και b καταχωρούνται την ίδια τιμή 1 από το πεδίο Z.
Η ερμηνεία του τύπου έχει ως εξής:
∀X∀Y(μικρότερο_ίσο (X,Y)→ μικρότερο_ίσο (συν(X,1),συν(Y,1)))
η οποία είναι αληθής για κάθε ζεύγος ακεραίων d_1 και d_2.
μικρότερο_ίσο (d_1, d_2) → μικρότερο_ίσο (συν(d_1, 1), συν(d_2, 2))
ή πιο απλά χχρησιμοποιώντας τα γνωστά μαθηματικά σύμβολα ≤ και + για μικρότερο_ίσο και συν αντίστοιχα έχουμε τον εξής τύπο.
$$(d_1 \leq d_2) \rightarrow (d_1 + 1) \leq (d_2 + 1)$$

Ανοικτός τύπος
Η ερμηνεία σε πεδίο D ενός ανοικτού τύπου φ με ν (ν ≥ 1) ελεύθερες μεταβλητές προσδιορίζει ένα σύνολο S από διατεταγμένες ν–άδες στο $D^ν$. Εάν τα στοιχεία κάποιας διατεταγμένης ν–άδας αντικαταστήσουν τις αντίστοιχες ελεύθερες μεταβλητές του ανοικτού τύπου, τότε σε αυτή την ερμηνεία ο κλειστός τύπος που παίρνουμε είναι αληθής. Εάν το σύνολο S των διατεταγμένων ν–άδων είναι άδειο, τότε ο ανοικτός τύπος φ είναι ψευδής. Εάν το σύνολο S συμπίπτει με το $D^ν$, τότε ο ανοικτός τύπος φ είναι αληθής.

3.4. Λογική Ισοδυναμία και Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων

Ο ορισμοί της *λογικής ισοδυναμίας* και της *σημασιολογικής συνέπειας (logical consequence ή entailment)* στο κατηγορηματικό λογισμό είναι ίδιοι όπως στο προτασιακό λογισμό απλά οι προτάσεις είναι προτάσεις του κατηγορηματικού λογισμού.

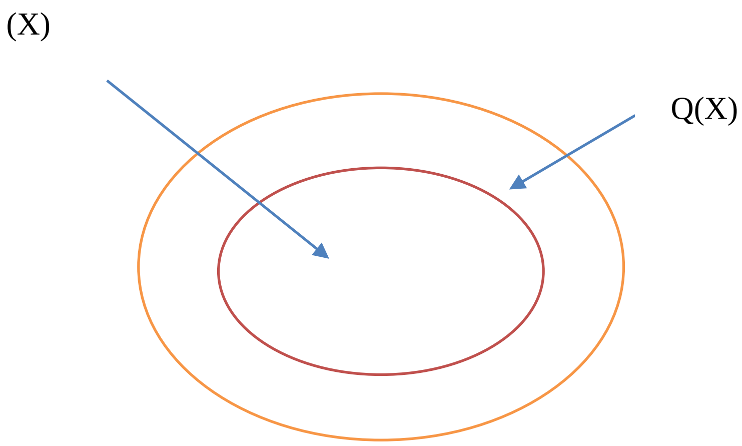
Ορισμός 3.10
Δύο τύποι φ και ψ οι οποίοι έχουν την ίδια τιμή αληθείας σε όλες τις ερμηνείες λέγονται ***λογικά ισοδύναμοι***, συμβολίζεται φ ⇔ ψ ή φ≡ψ.

Ορισμός 3.11
Έστω $φ_1,\ldots,φ_κ$ ένα σύνολο τύπων του κατηγορηματικού λογισμού, ο τύπος ψ είναι ***σημασιολογική συνέπεια*** (**logical consequence ή entailment**) ή απλώς ***συνέπεια*** των τύπων $φ_1,\ldots,φ_κ$ εάν και μόνο εάν για κάθε ερμηνεία E στην οποία ο τύπος $φ_1 \wedge \ldots \wedge φ_κ$ είναι αληθής, ο τύπος ψ είναι επίσης αληθής. Η συνέπεια συμβολίζεται $φ_1,\ldots,φ_κ \models ψ$. Οι τύποι $φ_1,\ldots,φ_κ$ ονομάζονται ***υποθέσεις*** και ο τύπος ψ ονομάζεται ***συμπέρασμα***.

Έστω P(X) και Q(X) δύο τύποι του κατηγορηματικού λογισμού. Η (***λογική***) ***σημασιολογική συνέπεια*** (**logical consequence ή entailment**) και η ***λογική ισοδυναμία*** μπορούν να παρασταθούν γραφικά ως σχέσεις μεταξύ συνόλων. Αυτά τα σύνολα είναι τα στοιχεία του πεδίου στα οποία οι τύποι P(X) και Q(X) είναι αληθείς. Το Σχήματα ***Σχήμα 3.2***, ***Σχήμα 3.3*** και ***Σχήμα 3.4*** δείχνουν παραστατικά τις σχέσεις σημασιολογικής συνέπειας και ισοδυναμίας των τύπων P(X) και Q(X).

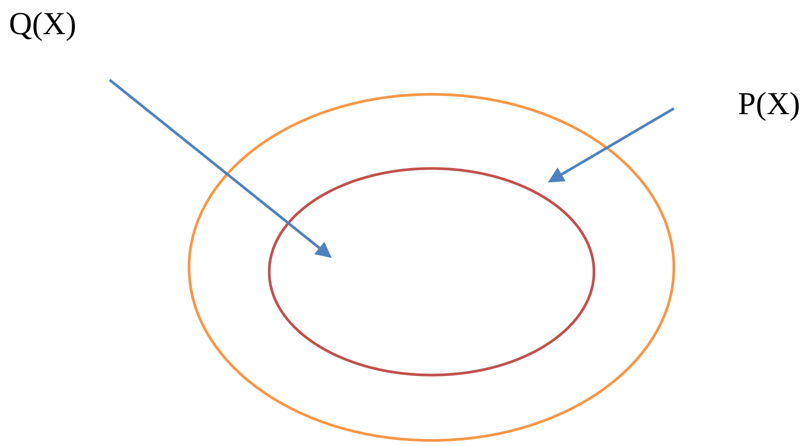
Σημασιολογική Συνεπαγωγή ή Σημασιολογική Συνέπεια (Entailment)

$$\forall X\ P(X) \Rightarrow Q(X)$$



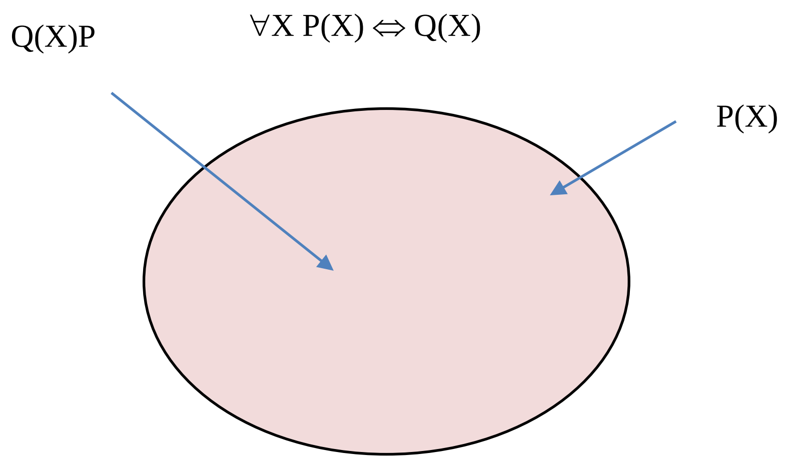
Σχήμα 3.2 Το Q(X) είναι αναγκαία συνθήκη του P(X).

$$\forall X\ P(X) \Leftarrow Q(X)$$



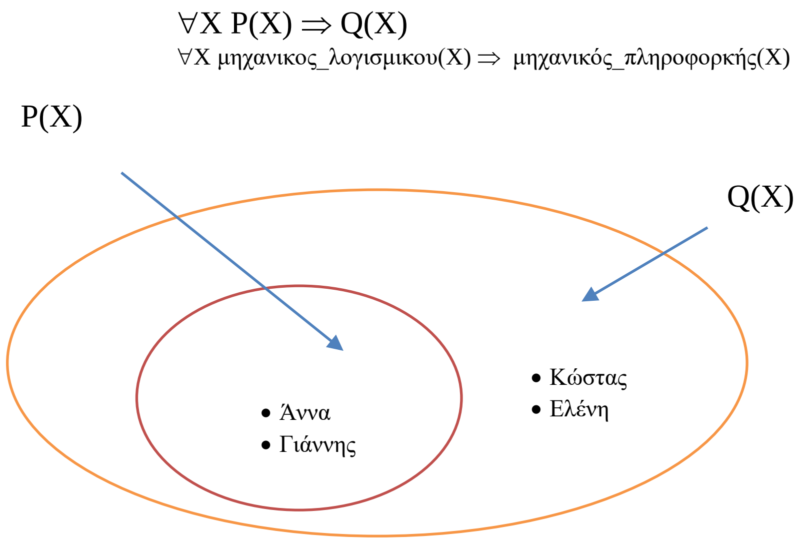
Σχήμα 3.3: Το Q(X) είναι ικανή συνθήκη του P(X).

Ισοδυναμία (Equivalence)



Σχήμα 3.4: Το Q(X) είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη του P(X).

Για παράδειγμα, έστω ότι P(X) είναι ένας τύπος ο οποίος αποτελείται από ένα κατηγόρημα, τη σχέση «μηχανικός_λογισμικού(X)» με X=Αννα και X= Γιάννης και Q(X) είναι ένας τύπος ο οποίος επίσης αποτελείται από ένα κατηγόρημα, τη σχέση «μηχανικός_πληροφορικής(X)» με X= Αννα, X= Γιάννης, X=Κώστας και X = Ελένη. Ο τύπος Q(X) είναι σημασιολογική συνέπεια του τύπου P(X), $\forall X\ P(X) \Rightarrow Q(X)$. Αυτή η σχέση παριστάνεται σχηματικά από το ***Σχήμα 3.5***.

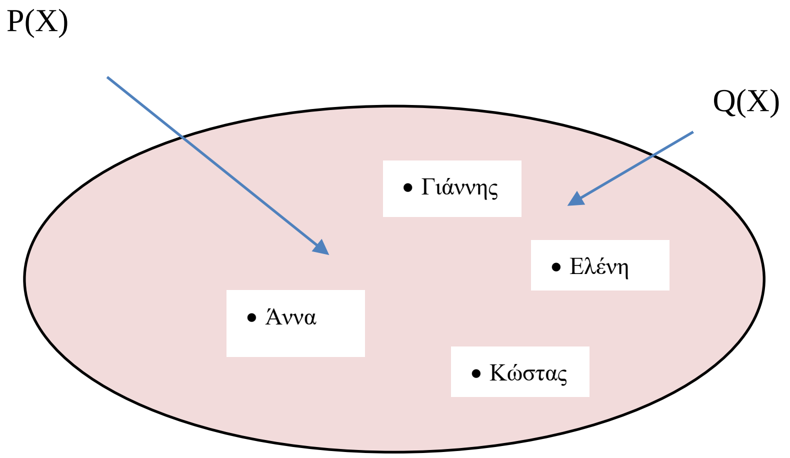


Σχήμα 3.5: Σημασιολογική συνέπεια προτάσεων.

Για παράδειγμα, έστω ότι P(X) είναι ένας τύπος ο οποίος αποτελείται από ένα κατηγόρημα, τη σχέση «πτυχιούχος_μηχανικός_πληροφορικής(X)» με X= Αννα, X= Γιάννης, X=Κώστας και X = Ελένη και Q(X) είναι ένας τύπος ο οποίος επίσης αποτελείται από ένα κατηγόρημα, τη σχέση «μηχανικός_πληροφορικής(X)» με X= Αννα, X= Γιάννης, X=Κώστας και X = Ελένη. Ο τύπος Q(X) είναι ισοδύναμος με το τύπο P(X), $\forall X\ P(X) \Leftrightarrow Q(X)$. Αυτή η σχέση παριστάνεται σχηματικά από το ***Σχήμα 3.6***.

$\forall X\ P(X) \Leftrightarrow Q(X)$

$\forall$X πτυχιούχος_μηχανικος_πληροφορικής(X) $\Leftrightarrow$ μηχανικός_πληροφορκής(X)



Σχήμα 3.6: Σημασιολογικά ισοδύναμες προτάσεις.

Λογικές ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον μετασχηματισμό λογικών τύπων όπως στον προτασιακό λογισμό. Εάν ψ είναι ένας τύπος που περιέχει τον τύπο φ και $\varphi \Leftrightarrow \varphi'$ τότε $\psi \Leftrightarrow \psi\ \{\varphi/\varphi'\}$. Δηλαδή εάν στον τύπο ψ αντικαταστήσουμε τον τύπο φ με τον λογικά ισοδύναμό του φ΄ τότε θα πάρουμε ένα τύπο ισοδύναμο με τον τύπο ψ.

Νόμοι του Κατηγορηματικού Λογισμού

Ο πίνακας ***Πίνακας 3.2*** περιέχει τους νόμους του κατηγορηματικού λογισμού οι οποίοι εκφράζουν σχέσεις είτε λογικής ισοδυναμίας ή σημασιολογικής συνέπειας μεταξύ τύπων . Σ' αυτό τον πίνακα διακρίνουμε τύπους οι οποίοι είναι λογικά ισοδύναμοι και τύπους οι οποίοι είναι σημασιολογική συνέπεια άλλων τύπων. Εάν τα σύμβολα $\Leftrightarrow$, $\Rightarrow$ αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους λογικούς συνδέσμους $\leftrightarrow$ και $\rightarrow$οι τύποι που προκύπτουν θα είναι λογικά αληθείς (valid).

Στους νόμους του κατηγορηματικού λογισμού που ακολουθούν ο συμβολισμός $\varphi(X,Y)$ σημαίνει ότι ο τύπος φ περιέχει τις μεταβλητές X και Y. Ο τύπος $\varphi(X,Y)$ μπορεί φυσικά να περιέχει κάποιες σταθερές τις οποίες δεν αναφέρουμε γιατί δεν ενδιαφέρουν την συζήτηση μας. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον συμβολισμό $\psi(X,Y)$.

1. $\neg\forall X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \exists X\ \neg\varphi(X)$ Νόμος De Morgan για $\forall$
2. $\neg\exists X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \forall X\ \neg\varphi(X)$ Νόμος De Morgan για $\exists$
3. $\forall X\ \varphi(X) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X)$

4. $\forall X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \forall Y\ \forall X\ \varphi(X, Y)$ μεταθετικότητα $\forall$
5. $\exists X\ \exists Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \exists Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$ μεταθετικότητα $\exists$
6. $\exists X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Rightarrow \forall Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$

7. $\forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \wedge \forall X\ \psi(X)$ Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\forall$
8. $\exists X\ (\varphi(X) \vee \psi(X)) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \vee \exists X\ \psi(X)$ Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\exists$
9. $\exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X) \wedge \exists X\ \psi(X)$
10. $\forall X\ \varphi(X) \vee \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi(X))$

11. $\forall X\ (\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \forall X\ \varphi(X) \leftrightarrow \forall X\ \psi(X)$
12. $\exists X\ (\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X) \leftrightarrow \exists X\ \psi(X)$

13. $\exists X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
14. $\forall X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
15. $\exists X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi)$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
16. $\forall X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi)$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ

17. $\forall X\ (\varphi \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \forall X\ \psi(X)$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο φ
18. $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \rightarrow \psi$ Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ

19. $\exists X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X)$
20. $\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X))$

21. $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\forall X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X))$
22. $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X))$
23. $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\forall X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X))$

Πίνακας 3.2: Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού

Παραδείγματα

1. Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος $\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall X\ \forall Y\ (\exists Z\ (p(X, Y) \wedge p(Y, Z)) \rightarrow p(X, Z))$ χρησιμοποιώντας τους νόμους του κατηγορηματικού λογισμού.
   $\forall X\ \forall Y\ \forall Z\ (p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z)) \Leftrightarrow$
   $\forall X\ \forall Z\ \forall Y\ (p(X, Y) \wedge p(Y, Z) \rightarrow p(X, Z)) \Leftrightarrow$ Μεταθετικότητα $\forall$, νόμος 4
   $\forall X\ \forall Z\ (\exists Y\ (p(X, Y) \wedge p(Y, Z)) \rightarrow p(X, Z))$ Νόμος 18

2. Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος $\exists X\ (p(X) \rightarrow q(X))$ είναι λογικά ισοδύναμος με τον τύπο $\forall X\ p(X) \rightarrow \exists X\ q(X)$, δηλαδή τον νόμο 19.
   $\exists X\ (p(X) \rightarrow q(X)) \Leftrightarrow$
   $\exists X\ (\neg p(X) \vee q(X)) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής
   $\exists X\ \neg p(X) \vee \exists X\ q(X) \Leftrightarrow$ Νόμος 8
   $\neg \forall X\ p(X) \vee \exists X\ q(X) \Leftrightarrow$ Νόμος De Morgan για $\forall$, (νόμος 1)
   $\forall X\ p(X) \rightarrow \exists X\ q(X)$ Νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής

3.5. Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Οι μέθοδοι εξαγωγής συμπερασμάτων στο κατηγορηματικό λογισμικό αντιστοιχούν σε αυτές του προτασιακού λογισμικού. Επιπλέον, έχουν επεκταθεί με συμπερασματικούς κανόνες που αφορούν τους ποσοδείκτες.

3.5.1. Αξιωματικά Συστήματα ή Συστήματα Hilbert

Ένα αξιωματικό σύστημα ή σύστημα Hilbert αποτελείται από τα εξής τμήματα:
1. Μια τυπική γλώσσα.
2. Ένα σύνολο από σχήματα λογικών αξιωμάτων.
3. Ένα σύνολο από συμπερασματικούς κανόνες.

Τα λογικά αξιώματα είναι έγκυροι (valid) τύποι. Επιπλέον, τα λογικά αξιώματα είναι σχήματα. Αυτό σημαίνει ότι αξιώματα μπορούν να δημιουργηθούν με αντικατάσταση τύπων σε μεταβλητές τύπων. Οι συμπερασματικοί κανόνες δημιουργούν νέους τύπους από τους υπάρχοντες τύπους σχήματα.

Ο κατηγορηματικός λογισμός πρώτης τάξεως μπορεί να εκφραστεί ως αξιωματικό σύστημα με διάφορους τρόπους. Η μορφή που θα έχει ως αξιωματικό σύστημα εξαρτάται από τα σχήματα λογικών αξιωμάτων και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων που θα χρησιμοποιηθούν. Ένα αξιωματικό σύστημα του κατηγορηματικού λογισμού πρώτης τάξεως είναι και το εξής:

1. Η τυπική γλώσσα είναι η γλώσσα όπως περιγράφηκε στα προηγούμενα. Προτάσεις της γλώσσας είναι κάθε καλά διαμορφωμένος τύπος.

2. Τα σχήματα λογικών αξιωμάτων είναι τα εξής:
   - α. $\varphi \vee \psi \rightarrow \varphi$
   - β. $\varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$
   - γ. $\varphi \vee \psi \rightarrow \psi \vee \varphi$
   - δ. $(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\omega \vee \varphi) \rightarrow (\omega \vee \psi))$
   - ε. $\forall X_1\ \varphi(X_1) \rightarrow \varphi(X_2)$
   - στ. $\varphi(X_1) \rightarrow \exists X_2\ \varphi(X_2)$

   φ, ψ και ω είναι μεταβλητές τύπων, δηλαδή αναπαριστούν τύπους.
   X_1 και X_2 είναι σχήματα μεταβλητών, δηλαδή αναπαριστούν πλειάδες (tuples) μεταβλητών της τυπικής γλώσσας.

3. Οι κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων είναι οι εξής:
   - α. φ , $\varphi \rightarrow \psi \models \psi$ Κανόνας απόσπασης (modus ponens)
   - β. $\varphi \rightarrow \psi \models \neg\varphi \vee \psi$ Κανόνας αντικατάστασης $\rightarrow$
     $\neg\varphi \vee \psi \models \varphi \rightarrow \psi$ Κανόνας αντικατάστασης $\vee$
     $\varphi \wedge \psi \models \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)$ Κανόνας αντικατάστασης $\wedge$
     $\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \models \varphi \wedge \psi$ Κανόνας αντικατάστασης $\vee$
   - γ. $\varphi \rightarrow \psi(X) \models \varphi \rightarrow \forall X\ \psi(X)$ Κανόνας εισαγωγής $\forall$
     $\psi(X)$ είναι ένας τύπος στον οποίο η μεταβλητή X είναι ελεύθερη.
   - δ. $\varphi(X) \rightarrow \psi \models \exists X\ \varphi(X) \rightarrow \psi$ Κανόνας εισαγωγής $\exists$

Τα σχήματα λογικών αξιωμάτων και οι συμπερασματικοί κανόνες χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν τα θεωρήματα της λογικής πρώτης τάξεως. Για να είναι ένα αξιωματικό σύστημα ***πλήρες*** θα πρέπει όλα τα θεωρήματα της λογικής πρώτης τάξεως να είναι εξαγώγιμα.

Μια θεωρία Τ αποτελείται από ένα τυπικό σύστημα και ένα σύνολο από αξιώματα τα οποία ονομάζονται ***μη–λογικά*** *ή* ***"κατάλληλα" αξιώματα***.

Παράδειγμα μη–λογικών αξιωμάτων

> ∀X ∀Y (πατέρας (X, Y) → γονέας (X, Y))
> ∀X ∀Y (μητέρα (X, Y) → γονέας (X, Y))
> πατέρας (γιάννης, μάνος)
> μητέρα (ελένη, μάνος)

Η εξαγωγή ή απόδειξη ενός τύπου φ από μια θεωρία Τ η οποία αποτελείται από το τυπικό σύστημα ΤΣ και τα μη–λογικά αξιώματα Α συμβολίζεται $T \vdash_{ΤΣ} \varphi$ ή $T \vdash \varphi$ εάν το τυπικό σύστημα είναι γνωστό.

Ορισμός 3.12
Μια θεωρία Τ είναι ***ασυνεπής*** (***inconsistent***) εάν για κάποιο τύπο φ, οι τύποι φ και ¬φ είναι θεωρήματα της Τ.

Ορισμός 3.13
Ένα τυπικό σύστημα ΤΣ είναι *αποφασιστικό* (*decidable*) εάν πάντα μπορεί να αποφασίσει εάν μια θεωρία είναι ***συνεπής*** (***consistent***) ή όχι.

Ένα τυπικό σύστημα είναι **ημι-*αποφασιστικό*** (***semi–decidable***) εάν μπορεί πάντα να προσδιορίσει ασυνέπεια αλλά μόνο μερικές φορές μπορεί να προσδιορίσει συνέπεια. Η πλήρης λογική πρώτης τάξεως είναι ημι-αποφασιστική. Κατηγορηματικός λογισμός χωρίς συναρτήσεις είναι αποφασιστικός.

Ορισμός 3.14
Ένα τυπικό σύστημα ΤΣ είναι ***ορθό*** (***valid***) εάν και μόνο εάν όλα τα θεωρήματα τα οποία μπορούν να αποδειχθούν από ένα σύνολο αξιωμάτων S σε μια θεωρία του ΤΣ είναι επίσης λογική συνέπεια του S.

$$S \vdash_{ΤΣ} \varphi \text{ συνεπάγεται } \quad S \models \varphi$$

Ορισμός 3.15
Ένα τυπικό σύστημα είναι ***πλήρες*** εάν και μόνο εάν για όλους τους τύπους που είναι λογική συνέπεια ενός συνόλου αξιωμάτων S υπάρχει απόδειξη από το S στο ΤΣ.

3.5.2. Συστήματα φυσικών συμπερασμάτων

Τα συστήματα φυσικών συμπερασμάτων του προτασιακού λογισμού επεκτείνονται με συμπερασματικούς κανόνες οι οποίοι εισάγουν και εξαλείφουν τους ποσοδείκτες. Επειδή αυτοί οι κανόνες αντικαθιστούν μεταβλητές με σταθερές και αντίστροφα χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή ώστε να μη δεσμεύσουν κάποια ελεύθερη μεταβλητή ή να κάνουν ελεύθερη κάποια δεσμευμένη μεταβλητή.

Συμπερασματικοί Κανόνες Ποσοδεικτών

1. Εξειδίκευση ή στιγμιοποίηση (instantiation) καθολικού ποσοδείκτη.

$$\forall X\ \varphi(X) \models \varphi(X)\ \}X/c\}$$

Αυτός ο συμπερασματικός κανόνας επιτρέπει σε ένα τύπο της μορφής $\forall X\ \varphi(X)$ την αντικατάσταση της μεταβλητής X με μια οντότητα (σταθερά) c. Ο τύπος που προκύπτει είναι στιγμιότυπο (instance) του αρχικού τύπου. Αυτός ο κανόνας ονομάζεται *καθολική εξειδίκευση (universal instantiation)* ή *εξάλειψη* ∀.

Παραδείγματα

α. $\forall X\ \varphi(X)$: $\forall X$ (άνθρωπος (X) → θνητός (X))

$\varphi(X)\ \}X/c\}$: άνθρωπος (X) → θνητός (X) }X/σωκράτης} ⇔

άνθρωπος (σωκράτης) → θνητός (σωκράτης)

β. θέλουμε να αποδείξουμε ότι

∀X(άνθρωπος(X)→ θνητός(X)), άνθρωπος (σωκράτης) ⊢ θνητός (σωκράτης)

Τυπική εξαγωγή	**Συμπερασματικός κανόνας**
i. ∀X (άνθρωπος (X) → θνητός (X))	υπόθεση
ii. άνθρωπος (σωκράτης)	υπόθεση
iii. άνθρωπος (σωκράτης) → θνητός (σωκράτης)	καθολική εξειδίκευση στο i.
iv. θνητός (σωκράτης)	κανόνας απόσπασης (modus ponens) ii και iii

2. Γενίκευση καθολικού ποσοδείκτη.

$$\varphi \models \forall\ X\ \varphi$$

Η γενίκευση από μια οντότητα προς όλο το πεδίο δεν είναι *ορθή*. Εάν η μεταβλητή X δεν υπάρχει στις υποθέσεις ή η X είναι δεσμευμένη σε όλες τις υποθέσεις τότε το X λαμβάνεται ότι παριστάνει όλες τις οντότητες του πεδίου. Αυτός ο κανόνας ονομάζεται *καθολική γενίκευση (universal generalization)* ή *εισαγωγή* ∀.

3. Γενίκευση υπαρξιακού ποσοδείκτη.

$$\varphi(c) \models \exists\ X\ \varphi(X)$$

όπου c είναι ένας όρος. Εάν υπάρχει μια οντότητα c για την οποία ο τύπος $\varphi(c)$ είναι αληθής μπορούμε να κάνουμε υπαρξιακή γενίκευση $\exists X\ \varphi(X)$. Αυτός ο κανόνας ονομάζεται *υπαρξιακή γενίκευση* ή *εισαγωγή* ∃.

4. Εξειδίκευση ή στιγμιοποίηση (instantiation) υπαρξιακού ποσοδείκτη.

$$\exists\, X\, \varphi(X) \models \varphi(X)\,\}X/c\}$$

Εάν $\exists X\ \varphi(X)$ είναι αληθές τότε υπάρχει κάποια οντότητα c η οποία ικανοποιεί το $\varphi(X)$, δηλαδή ο $\varphi(X)\,\}X/c\}$.

Αυτός ο κανόνας ονομάζεται *υπαρξιακή εξειδίκευση (existential instantiation)* ή *εξάλειψη* $\exists$.

Παράδειγμα

Θέλουμε να αποδείξουμε από την υπόθεση $\forall X\ \neg p(X)$ ότι $\neg\ \exists X\ p(X)$.

		Δικαιολόγηση κανόνα
1.	$\forall X\ \neg p(X)$	αρχική υπόθεση (πρ. 1)
2.	$\exists X\ p(X)$	εισαχθείσα υπόθεση
3.	$p(\alpha)$	Εξ. $\exists$, 2
4.	$\neg p(\alpha)$	Εξ. $\forall$, 1
5.	$p(\alpha) \wedge \neg p(\alpha)$	Εισ. $\wedge$, 3, 4
6.	$\neg\exists X\ p(X)$	Εισ. $\neg$, 2, -5

3.6. Κανονικές Μορφές Τύπων

Ο συντακτικός μετασχηματισμός των προτάσεων σε κανονική μορφή βοηθάει στον χειρισμό τους. Όλες οι κανονικές μορφές δίνουν στους τύπους περισσότερο ομαλή μορφή.

3.6.1. Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή

Ένας τύπος είναι σε ***δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή*** (**prenex normal form**) εάν έχει την μορφή

$$(Q_1X_1)\ ..\ (Q_KX_K)\ \varphi$$

όπου $Q_1,..,Q_K$ παριστάνουν τους ποσοδείκτες $\exists$ και $\forall$, $X_1,..,X_K$ είναι μεταβλητές του τύπου φ και φ είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες. Το $(Q_1X_1)\ ..\ (Q_KX_K)$ ονομάζεται πρόθεμα (prefix) και το φ πίνακας.

Παράδειγμα

1. Οι ακόλουθοι τύποι είναι σε *δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή*.

α. $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (\ (p(X) \rightarrow \neg q(X)\ ) \wedge r(Y,Z)\ )$

β. $\forall X\ \exists Y\ \ (p(X, Y) \wedge q(X,Z)\ )$

Κάθε τύπος είναι λογικά ισοδύναμος με ένα τύπο σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή.

Ορισμός 3.16
Η ***κανονικοποίηση*** *ή* ***σταθεροποίηση μεταβλητών*** (***standardizng the variables apart***) περιλαμβάνει την μετονομασία των μεταβλητών σε ένα τύπο ώστε διαφορετικές μεταβλητές να έχουν διαφορετικό όνομα.

Παραδείγματα
1. Η κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών στον τύπο $\forall X\ p(X) \wedge \exists Y\ q(X,Y)$ θα δώσει τον τύπο $\forall X\ p(X) \wedge \exists Y\ q(Z,Y)$
2. Η κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών στον τύπο $\forall X\ p(X) \vee \forall X\ \forall Y\ r(X,Y) \vee \forall X\ \exists Y\ q(X,Y)$ θα δώσει τον τύπο $\forall X\ p(X) \vee \forall Z\ \forall Y\ r(Z,Y) \vee \forall W\ \exists V\ q(W,V)$

Ένας τύπος μπορεί να μετατραπεί σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή με τους εξής μετασχηματισμούς [Hogger 1990], [Russell, Norvig 1995].

1. Εξάλειψη των λογικών συνδέσμων $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ από τον τύπο. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των νόμων της αντικατάστασης των $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
   α. $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$
   β. $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$

2. Μετακίνηση της άρνησης $(\neg)$ προς το εσωτερικό του πίνακα έτσι ώστε να βρίσκεται μπροστά μόνο από ατομικούς τύπους. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των νόμων του De Morgan για $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ και τον νόμο της διπλής άρνησης.

   α. $\neg(\varphi\wedge\psi) \Leftrightarrow \neg\varphi\vee\neg\psi$
   β. $\neg(\varphi\vee\psi) \Leftrightarrow \neg\varphi\wedge\neg\psi$
   γ. $\neg\forall X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \exists X\ \neg\varphi(X)$
   δ. $\neg\exists X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \forall X\ \neg\varphi(X)$
   ε. $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

3. Κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών

4. Μετακίνηση όλων των ποσοδεικτών στην αρχή του τύπου. Αυτό μπορεί να γίνει με τους εξής νόμους.
   α. $\forall X\ \varphi(X) \wedge \forall X\ \psi(X) \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X))$
   β. $\exists X\ \varphi(X) \vee \exists X\ \psi(X) \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi(X))$
   γ. $\exists X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$ Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
   δ. $\forall X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$ Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
   ε. $\exists X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi)$ Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
   στ. $\forall X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi)$ Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.

Παράδειγμα
1. Μετατροπή του τύπου $\exists X\ p(X) \rightarrow (q(X) \wedge \neg \forall Y\ r(Y))$ σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή.
   Βήμα 1: $\exists X\ p(X) \rightarrow (q(X) \wedge \neg \forall Y\ r(Y)) \Leftrightarrow$
   $\neg\exists X\ p(X) \vee (q(X) \wedge \neg\forall Y\ r(Y)) \Leftrightarrow$ Εξάλειψη →
   Βήμα 2: $\forall X\ \neg p(X) \vee (q(X) \wedge \exists Y\ \neg r(Y)) \Leftrightarrow$ Μετακίνηση της άρνησης (¬) στο εσωτερικό του πίνακα.
   Βήμα 3: $\forall X\ \neg p(X) \vee (q(Z)\ \wedge \exists Y\ \neg r(Y)) \Leftrightarrow$ Κανονικοποίηση διαφορετικών μεταβλητών.

Βήμα 4: $\forall X\ \neg p(X) \vee \exists Y\ (q(Z) \wedge \neg r(Y)) \Leftrightarrow$ Μετακίνηση $\exists$ ώστε να συμπεριλάβει και το $q(Z)$.
Βήμα 5: $\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X) \vee (q(Z) \wedge \neg r(Y)))$ Μετακίνηση $\forall$ και $\exists$ στην αρχή του τύπου.

3.6.2. Τύποι σε Μορφή Skolem

Θεωρούμε τον τύπο $\forall X\ \exists Y\ p(Y,X)$, για κάθε X υπάρχει μια διαφορετική τιμή (σταθερά) του Y. Το Y μπορεί να αντικατασταθεί από μια συνάρτηση $f(X)$ η οποία για κάθε X δημιουργεί την τιμή του Y. Συνεπώς $\exists Y\ p(Y,X)$ μπορεί να αντικατασταθεί από $p(f(X),X)$, ο αρχικός τύπος γίνεται $\forall X\ p(f(X),X)$. Η συνάρτηση f ονομάζεται Skolem συνάρτηση. Οι Skolem συναρτήσεις επιτρέπουν την εξάλειψη των υπαρξιακών ποσοδεικτών. Θεωρούμε ότι ένας τύπος φ είναι σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή. *Για να μετασχηματιστεί ο φ σε μορφή Skolem θα πρέπει να εξαλειφθούν οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες.* Θεωρούμε ότι έχουμε ένα τύπο φ σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή χωρίς ελεύθερες μεταβλητές. Επιπλέον $\exists Y$ είναι ο πρώτος από τα αριστερά υπαρξιακός ποσοδείκτης, και $X_1, \ldots, X_\kappa$ είναι οι καθολικά δεσμευμένες μεταβλητές αριστερά του $\exists Y$. Ο τύπος φ μετασχηματίζεται σε μορφή Skolem ως εξής:

1. Εάν $\kappa = 0$ (ο υπαρξιακός ποσοδείκτης δεν είναι στην εμβέλεια κάποιου καθολικού ποσοδείκτη), τότε ο υπαρξιακός ποσοδείκτης εξαλείφεται και κάθε εμφάνισή του αντικαθίσταται από μια σταθερά διακριτή από τις άλλες.
2. Εάν $\kappa > 0$ (ο υπαρξιακός ποσοδείκτης είναι στην εμβέλεια $\kappa < 0$ καθολικών ποσοδεικτών), τότε εξάλειψε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη και αντικατέστησε το Y με ένα νέο όνομα συνάρτησης πληθυκότητας κ. Ορίσματα της νέας συνάρτησης είναι οι καθολικές μεταβλητές μέσα στο πεδίο των οποίων βρίσκεται ο υπαρξιακός ποσοδείκτης.

Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται για κάθε υπαρξιακό ποσοδείκτη της φ.

Παράδειγμα

1. Θέλουμε να μετατρέψουμε τον τύπο $\forall X\ \exists Y\ \forall W\ \exists Z\ p(X, Y, W, Z)$ σε μορφή Skolem.
    α. Η τιμή του Y εξαρτάται μόνο από το X. Εισάγουμε την Skolem συνάρτηση $f(X)$ και ο τύπος γίνεται $\forall X\ \forall W\ \exists Z\ p(X, f(X), W, Z)$.
    β. Η τιμή του Z εξαρτάται από τα X και W. Εισάγουμε την Skolem συνάρτηση $g(X, W)$ και ο τύπος γίνεται $\forall X\ \forall W\ p(X,f(X),W,g(X, W))$.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι εάν φ είναι ο αρχικός τύπος, ο τύπος σε μορφή Skolem φ΄ δεν είναι λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό φ αλλά διατηρεί την εξής ιδιότητα. Ο τύπος φ είναι επαληθεύσιμος τότε και μόνο τότε ο φ΄ είναι επαληθεύσιμος.

3.6.3. Προτάσεις

Ορισμός 3.17
Ένας ***στοιχειώδης τύπος*** (***literal***) είναι είτε ένας (θετικός) ατομικός τύπος (atomic formula) ή ένας αρνητικός ατομικός τύπος. Για παράδειγμα, $p(X,Y)$, $\neg p(X,Z)$, $q(a,Z)$, $\neg q(a,b)$ είναι στοιχειώδεις τύποι, α, b είναι σταθερές.

Ορισμός 3.18
Μια *πρόταση* είναι ένας τύπος της μορφής

$$\forall X_1 \ldots \forall X_K (L_1 \vee \ldots . \vee L_K)$$

κάθε L_i ($1 \le i \le \kappa$) είναι ένας στοιχειώδης τύπος, $X_1, \ldots, X_K$ είναι όλες οι μεταβλητές οι οποίες υπάρχουν στον τύπο $L_1 \vee \ldots \vee L_K$.

Όλες οι μεταβλητές μιας πρότασης πρέπει να έχουν καθολική δέσμευση. Συνήθως παραλείπουμε τους ποσοδείκτες και θυμόμαστε ότι όλες οι μεταβλητές έχουν καθολική δέσμευση.

Ορισμός 3.19
Ένας τύπος φ είναι σε Skolem *συζευκτική κανονική μορφή* ή *προτασιακή μορφή* (clause form) εάν έχει την μορφή

$$\forall X_1 \ldots \forall X_m (\varphi_1 \wedge \ldots . \wedge \varphi_m)$$

όπου κάθε φ_i ($1 \le i \le m$) είναι διάζευξη βασικών τύπων, δηλαδή μια πρόταση.

Τα βήματα για να μετατρέψουμε ένα κλειστό τύπο σε *προτασιακή μορφή* είναι τα εξής:
1. Μετατροπή του τύπου σε *δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή*.
   α. Εξάλειψη των λογικών συνδέσμων → και ↔.
   β. Μετακίνηση της άρνησης (¬) ώστε να βρίσκεται μπροστά μόνο από ατομικούς τύπους.
   γ. Κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών.
   δ. Μετακίνηση όλων των ποσοδεικτών στην αρχή του τύπου.
2. Μετατροπή του τύπου σε Skolem μορφή.
3. Παρέλειψε όλους τους καθολικούς ποσοδείκτες.
4. Περιόρισε την εμβέλεια της διάζευξης στους στοιχειώδεις τύπους. Χρησιμοποίησε τους εξής αντιμεταθετικούς και τους επιμεριστικούς νόμους για να επιτύχεις αυτό.
   α. $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ επιμεριστικός νόμος.
   β. $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ προκύπτει από αντιμεταθετικό και επιμεριστικό νόμο.

Παραδείγματα
1. Θεωρούμε ένα παράδειγμα το οποίο είναι ήδη σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή.

	Δικαιολόγηση μετατροπής
$\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X) \vee (q(Y) \wedge \neg r(Y)))$	
$\forall X\ (\neg p(X) \vee (q(f(X)) \wedge \neg r(f(X))))$	Skolem μορφή
$\neg p(X) \vee (q(f(X)) \wedge \neg r(f(X)))$	Παράληψη καθολικών ποσοδεικτών
$(\neg p(X) \vee q(f(X))) \wedge (\neg p(X) \vee \neg r(f(X)))$	Επιμεριστικός νόμος

3.6.4. Προτάσεις Horn

Είδαμε στα προηγούμενα ότι κάθε κλειστή πρόταση μπορεί να μετασχηματιστεί σε προτασιακή μορφή. Η προτασιακή μορφή ενός τύπου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα σύνολο από προτάσεις οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με σύζευξη.

Ορισμός 3.20
Μια πρόταση είναι μια ***πρόταση Horn (Horn clause)*** εάν περιέχει το πολύ ένα ατομικό τύπο. Μια πρόταση Horn μπορεί να έχει μια από τις εξής μορφές.

1. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg\varphi_1\vee\ldots.\vee\neg\varphi_m \vee \psi)$ ή
2. $\forall X_1,\ldots,X_K\,\psi$
3. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg\varphi_1\vee\ldots.\vee\neg\varphi_m)$

όπου $\varphi_1,\ldots.,\varphi_m$, ψ είναι ατομικοί τύποι και $X_1,\ldots,X_K$ είναι μεταβλητές οι οποίες υπάρχουν στους τύπους $\varphi_1,\ldots.,\varphi_m$, ψ.

Ο *λογικός προγραμματισμός* χρησιμοποιεί ***προτάσεις* Horn (Horn Clauses)**. Προτάσεις της μορφής 1 και 2 ονομάζονται ***προγραμματικές προτάσεις* (program clauses).** Ένα *λογικό πρόγραμμα* αποτελείται από ένα σύνολο προγραμματικών προτάσεων. Προτάσεις της μορφής 3 ονομάζονται ***προτάσεις στόχοι (goal clauses)***.

Οι προτάσεις Horn μπορούν να γραφούν σε ισοδύναμες μορφές τις οποίες συναντάμε στις γλώσσες του λογικού προγραμματισμού.

1. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg\varphi_1\vee\ldots.\vee\neg\varphi_m \vee\psi) \Leftrightarrow$
   $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m) \vee\psi) \Leftrightarrow$
   $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\psi \leftarrow(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)\,)$
2. $\forall X_1,\ldots,X_K\,\psi \Leftrightarrow \forall X_1,\ldots,X_K\,(\psi \leftarrow \mathrm{true})$
3. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg\varphi_1\vee\ldots.\vee\neg\varphi_m) \Leftrightarrow$
   $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)\,) \Leftrightarrow$
   $\neg\exists X_1,\ldots,X_K\,(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)$

Η πρόταση στόχος $\neg\exists X_1,\ldots,X_K(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)$ είναι μια υπαρξιακή ερώτηση. Το σύστημα προσπαθεί να δημιουργήσει ένα παράδειγμα που να διαψεύδει την αλήθεια της. Δηλαδή, προσπαθεί να βρει κάποιους όρους $t_1,\ldots,t_K$ έτσι ώστε όταν αντικαταστήσουν τις μεταβλητές $X_1,\ldots,X_K$ στον τύπο $\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m$ ο τύπος που δημιουργείται να είναι αληθής.

Η πρόταση στόχος μπορεί να μετασχηματιστεί ισοδύναμα στην εξής μορφή:

$\forall X_1,\ldots,X_K\,(\neg(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)\,) \Leftrightarrow$
$\forall X_1,\ldots,X_K\,(\mathrm{false} \vee\neg(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m \wedge\mathrm{true})\,) \Leftrightarrow$
$\forall X_1,\ldots,X_K\,(\mathrm{false} \leftarrow(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m \wedge\mathrm{true})\,) \Leftrightarrow$
εάν $M = 0$ τότε η ισοδύναμή της μορφή είναι false $\leftarrow$true $\Leftrightarrow$ false

Παραδείγματα

<u>*Προγραμματικές προτάσεις*</u>

∀X ∀Y (γονέας (X, Y) ←πατέρας (X, Y))
∀X ∀Y (γονέας (X, Y) ←μητέρα (X, Y))
πατέρας (γιάννης, μάνος) ←true
πατέρας (γιάννης, άννα) ←true
μητέρα (ελένη, νίκος) ←true

<u>*Προτάσεις στόχοι*</u>

¬∃X πατέρας (γιάννης, X)
¬∃X μητέρα (X, νίκος)

Τις προγραμματικές προτάσεις θα τις συναντάμε στην εξής μορφή:

1. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\psi \leftarrow(\varphi_1\wedge\ldots.\wedge\varphi_m)\,)$ ή ισοδύναμα

$\psi \leftarrow \varphi_1 \wedge \ldots . \wedge \varphi_m$

2. $\forall X_1,\ldots,X_K\,(\psi \leftarrow true)$ ή ισοδύναμα $\psi \leftarrow true$ ή ψ.

Ο θετικός στοιχειώδης τύπος ψ ονομάζεται ***κεφαλή*** και οι αρνητικοί στοιχειώδεις τύποι $\varphi_1,\ldots.,\varphi_m$ ονομάζονται ***σώμα*** της προγραμματικής πρότασης. Προγραμματικοί τύποι της μορφής $\psi \leftarrow true$ ονομάζονται ***γεγονότα***. Στα γεγονότα το σώμα της προγραμματικής πρότασης είναι άδειο.

3.7. Αντικατάσταση

Ορισμός 3.21
Αντικατάσταση (substitution) μεταβλητών από όρους είναι ένα σύνολο της μορφής

$$\{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$$

όπου κάθε X_i $(1 \le i \le K)$ είναι μια μεταβλητή διαφορετική από τις υπόλοιπες και κάθε t_i είναι ένας όρος διαφορετικός από τη μεταβλητή X_i. Κάθε στοιχείο X_i/t_i ονομάζεται *δέσμευση* του X_i.

Ορισμός 3.22
Βασικός όρος (ground term) είναι ένας όρος ο οποίος δεν περιέχει μεταβλητές. ***Βασικός ατομικός τύπος (ground atomic formula)*** είναι ένας ατομικός τύπος του οποίου όλα τα ορίσματα είναι βασικοί όροι.

Παραδείγματα
Έστω a, b σταθερές, X, Y μεταβλητές, f/1, g/2 συναρτήσεις και p/1, q/2 κατηγορήματα. Οι όροι a, b, f(a), f(b), g(a,b), g(a,a), g(f(b),a), f(f(b)) κτλ. είναι βασικοί όροι. Οι όροι X, Y, f(X), f(f(X)), g(Y,b), g(X,f(Y)), g(a,f(f(X))) κτλ. δεν είναι βασικοί όροι. Οι ατομικοί τύποι p(a), p(f(b)), p(f(f(a))), q(a,f(b)), q(f(a),g(a,b)), κτλ. είναι βασικοί ατομικοί τύποι ενώ οι ατομικοί τύποι p(X), p(f(X)), q(a,f(X)), q(X,g(a,Y)) δεν είναι βασικοί ατομικοί τύποι.

Ορισμός 3.23
Έστω η αντικατάσταση $\theta = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$. Η αντικατάσταση θ ονομάζεται ***βασική αντικατάσταση (ground substitution)*** εάν όλα τα t_i $(1 \le i \le K)$ είναι βασικοί όροι. Η αντικατάσταση θ ονομάζεται ***αντικατάσταση μετονομασίας (renaming substitution)*** εάν όλα τα t_i $(1 \le i \le K)$ είναι μεταβλητές. Η αντικατάσταση $\theta = \}\ \{$ ονομάζεται ***κενή** ή **ταυτοτική αντικατάσταση***, συμβολίζεται με $\in$.

Παραδείγματα
Εάν α, b είναι σταθερές X, Y, Z, W είναι μεταβλητές και f/1, g/2 είναι συναρτήσεις τότε η αντικατάσταση $\theta_1 = \{X/f(\alpha), Y/g(\alpha, f(b))\}$ είναι βασική αντικατάσταση ενώ η αντικατάσταση $\theta_2 = \{X/Z, Y/W\}$ είναι αντικατάσταση μετονομασίας.

Ορισμός 3.24
Μια ***απλή έκφραση (expression) ή παράσταση*** είναι είτε ένας όρος ή ένας ατομικός τύπος. Μια ***έκφραση (expression)*** ή ***παράσταση*** είναι είτε ένας όρος, ή ένας στοιχειώδης τύπος, ή μια σύζευξη ή διάζευξη στοιχειωδών τύπων.

Ορισμός 3.25

Έστω Ε και F δύο παραστάσεις. Οι Ε και F ***παραλλαγές (variants)*** εάν υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ τέτοιες ώστε Ε = F θ και F = E σ. Η Ε είναι παραλλαγή (variant) της F και η F είναι παραλλαγή (variant) της Ε.

Παραδείγματα

1. Οι παραστάσεις p(f(a,X), g(Y), b) και p(f(a,V), g(W), b) είναι παραλλαγές διότι υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ τέτοιες ώστε Ε = F σ και F = E θ. Έστω θ = {X/V, Y/W} και σ = {V/X, W/Y}.

   Eθ = p(f(a,X),g(Y),b)θ = p(f(a,V),g(W),b) = F και

   Fσ = p(f(a,V),g(W),B)σ = p(f(a,X),g(Y),b) = E

   Συνεπώς οι προτάσεις Ε και F είναι παραλλαγές η μια της άλλης.
2. Ενώ οι παραστάσεις Ε = p(a, f(X,Y)) και F =p(a, f(X,X)) δεν είναι παραλλαγές διότι δεν υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ τέτοιες ώστε Ε = F σ και F = E θ. Έστω θ = {Y/X} και σ = {X/Y}.

   Eθ = p(a,f(X,Y)) { Y/X } = p(a,f(X,X)) = F

   Fσ = p(a,f(X,X)) { X/Y } = p(a,f(Y,Y)) ≠ E

   Συνεπώς οι προτάσεις Ε και F δεν είναι παραλλαγές.

Ορισμός 3.26

Έστω Ε μια παράσταση και θ = $\{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ μια αντικατάσταση. Ένα ***στιγμιότυπο*** (***instance***) *Eθ* του Ε λαμβάνεται εάν ταυτόχρονα αντικατασταθεί κάθε εμφάνιση του X_i στην Ε με t_i όπου ($1 \le i \le k$).

Παραδείγματα

1. Έστω η παράσταση Ε = p(X, f(a,Y), b) ∨ ¬q(X, Z, g(X)) και η αντικατάσταση θ = {X/h(a), Y/X, Z/b}. Το στιγμιότυπο Εθ υπολογίζεται ως εξής:

   Eθ = p(X, f(a,Y), b) ∨ ¬q(X, Z, g(X)) {X/h(a), Y/X, Z/b} =

   p(h(a), f(a,X), b) ∨ ¬q(h(a), b, g(h(a)))
2. Έστω η παράσταση Ε = p(X) ∨¬q(g(X, Y)) και θ = {X/a, Y/f(b)}

   Eθ = p(a) ∨¬q(g(a, f(b)))
3. Έστω η παράσταση Ε = p(X) ∨¬q(g(X, Y)) και θ = {X/Y, Y/f(b)}

   Eθ = p(Y) ∨ ¬q(g(Y, f(b)))
4. Έστω η παράσταση Ε = p(Y, f(a), X) ∨ ¬q(g(X, Y), Z) και η αντικατάσταση θ = {X/Z, Y/f(b)}.

   Eθ = p(f(b), f(a), Z) ∨ ¬q(g(Z, f(b)), Z)

Ορισμός 3.27

Έστω ότι θ = $\{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ και σ = $\{Y_1/s_1,\ldots,Y_v/s_v\}$ είναι δύο αντικαταστάσεις. Η **σύνθεση θ∘σ (ή θσ)** *των* θ και σ είναι η αντικατάσταση η οποία λαμβάνεται ως εξής:

$\{X_1/t_1\sigma,\ldots,X_K/t_K\sigma, Y_1/s_1,\ldots,Y_v/s_v\}$

όπου διαγράφονται δεσμεύσεις X_i/t_i σ για τις οποίες ισχύει $X_i = t_i$ σ ($1 \le i \le k$). Επίσης, διαγράφονται δεσμεύσεις Y_j/s_j ($1 \le j \le v$) για τις οποίες ισχύει Y_j ε$\{X_1,\ldots,X_K\}$.

Παραδείγματα

1. Έστω θ = {X/a, Y/g(b,Z){ και σ = }Z/b, W/f(a)},

   θ∘σ = {X/a, Y/g(b,b), Z/b, W/f(a)}
2. Έστω θ = {X/f(Y), Y/a, Z/W} και σ = {Y/f(a), W/Z, V/g(a,f(b))}

$\theta\circ\sigma = \{X/f(f(a)), Y/a, W/Z, V/g(a,f(b))\}$

Μια αντικατάσταση θ είναι ***αυτοαπορροφητική*** (***idempotent***) εάν $\theta = \theta\circ\theta$. αυτό σημαίνει ότι για την αντικατάσταση $\theta = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ καμιά μεταβλητή X_i $(1\leq i\leq k)$ δεν θα πρέπει να υπάρχει σε κάποιο από τους όρους $\{t_1,\ldots,t_K\}$. *Κάθε νόμιμη αντικατάσταση πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα της αυτοαπορρόφησης*. Για παράδειγμα, η αντικατάσταση $\theta = \{X/Y, Y/a\}$ δεν είναι αυτοαπορροφητική.

$$\theta\circ\theta = \{X/a, Y/a\} \neq \theta$$

Δεν είναι όλες οι αντικαταστάσεις νόμιμες επειδή δεν ικανοποιούν όλες την ιδιότητα της αυτοαπορρόφησης. Όλες οι αντικαταστάσεις ικανοποιούν τις ακόλουθες ιδιότητες. Έστω οι αντικαταστάσεις θ_1, θ_2 και θ_3, η έκφραση Ε και η κενή αντικατάσταση ε.

1. $\theta_1\,\varepsilon = \varepsilon\,\theta_1 = \theta_1$
2. $(E\,\theta_1)\theta_2 = E\,(\theta_1\circ\theta_2)$
3. $(\theta_1\circ\theta_2)\circ\theta_3 = \theta_1\circ(\theta_2\circ\theta_3)$ Προσεταιριστική ιδιότητα της $\circ$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η σύνθεση αντικαταστάσεων δεν ικανοποιεί την μεταθετική ιδιότητα.

Παράδειγμα 1.

Έστω η παράσταση $E = p(X,Y,Z)$ και οι αντικαταστάσεις $\theta_1 = \{X/f(Y), Z/c\}$ και $\theta_2 = \{X/a, Y/b\}$

$E\,\theta_1 = p(f(Y), Y, c)$ και $E\,\theta_1\theta_2 = p(f(b), b, c)$

$E\,\theta_2 = p(a, b, Z)$ και $E\,\theta_2\theta_1 = p(a, b, c)$

δηλαδή $E\,\theta_1\theta_2 \neq E\,\theta_2\theta_1$

Παράδειγμα 2.

Έστω οι αντικαταστάσεις $\theta_1 = \{ X/f(a), Y/f(b,Z,g(W)) \}$ και $\theta_2 = \{ Z/g(a,b), W/g(a) \}$ και η έκφραση $E = p(f(X), g(Y,W), Z)$. Θα αποδείξουμε ότι ισχύει η ιδιότητα των αντικαταστάσεων $(E\theta_1)\theta_2 = E\,(\theta_1 \text{ o } \theta_2)$ για την έκφραση Ε και τις αντικαταστάσεις θ_1 και θ_2 .

$E\theta_1 = p(f(X), g(Y,W), Z)\ \{ X/f(a), Y/f(b,Z,g(W)) \} = p(f(f(a)), g(f(b,Z,g(W)),W), Z)$

$(E\theta_1)\theta_2 = p(f(f(a)), g(f(b,Z,g(W)),W), Z)\ \theta_2 =$

$= p(f(f(a)), g(f(b,Z,g(W)),W), Z)\ \{ Z/g(a,b), W/g(a) \} =$

$= p(f(f(a)), g(f(b, g(a,b),g(g(a))), g(a)), g(a,b))$

$\theta_1 \text{ o } \theta_2 = \{ X/f(a), Y/f(b,Z,g(W)) \} \text{ o } \{ Z/g(a,b), W/g(a) \}$ –

$= \{ X/f(a), Y/f(b, g(a,b), g(g(a))), Z/g(a,b), W/g(a) \}$

$E(\theta_1 \text{ o } \theta_2) = p(f(X), g(Y,W), Z)\ \{ X/f(a), Y/f(b, g(a,b), g(g(a))), Z/g(a,b), W/g(a) \} =$

$= p(f(f(a)), g(f(b, g(a,b),g(g(a))), g(a)), g(a,b))$

Ορισμός 3.28

Μια αντικατάσταση θ_1 είναι ***περισσότερο γενική*** από μια αντικατάσταση θ_2, συμβολίζεται $\theta_2\leq\theta_1$, εάν υπάρχει αντικατάσταση θ_3 ώστε να ισχύει $\theta_2 = \theta_1\circ\theta_3$.

Παράδειγμα

Η αντικατάσταση $\theta_1 = \{X/f(Z), Y/b\}$ είναι περισσότερο γενική από την αντικατάσταση $\theta_2 = \{X/f(a), Y/b, Z/a\}$ γιατί εάν $\theta_3 = \{Z/a\}$ τότε $\theta_2 = \theta_1\circ\theta_3$.

3.8. Ενοποίηση

Ορισμός 3.29

Έστω E_1 και E_2 δύο απλές παραστάσεις. Ένας ***ενοποιητής (unifier)*** των E_1 και E_2 είναι μια αντικατάσταση θ τέτοια ώστε $E_1\theta = E_2\theta$.

Παράδειγμα

1. Εάν $E_1 = p(X,Y)$ και $E_2 = p(Z,a)$ είναι δύο παραστάσεις τότε ένας ενοποιητής θ_1 των E_1 και E_2 είναι ο $\theta_1 = \{X/b, Y/a, Z/b\}$

   $E_1\theta_1 = E_2\theta_1 = p(b,a)$

   Ένας άλλος ενοποιητής $\theta_2 = \{X/a, Y/a, Z/a\}$

   $E_1\theta_2 = E_2\theta_2 = p(a,a)$

   Ένας άλλος ενοποιητής $\theta_3 = \{X/Z, Y/a\}$

   $E_1\theta_3 = E_2\theta_3 = p(Z,a)$

   Ένας άλλος ενοποιητής $\theta_4 = \{X/f(W), Y/a, Z/f(W)\}$

   $E_1\theta_4 = E_2\theta_4 = p(f(W),a)$

Ορισμός 3.30

Ένας ενοποιητής θ_1 των απλών παραστάσεων E_1 και E_2 ονομάζεται ο ***πλέον γενικός ενοποιητής (πγε)*** «***most general unifier*** (***mgu***)» εάν για κάθε άλλο ενοποιητή θ_2 των E_1 και E_2 υπάρχει μια αντικατάσταση θ_3 έτσι ώστε να ισχύει $\theta_2 = \theta_1 \circ \theta_3$.

Παράδειγμα

1. Έστω οι απλές παραστάσεις E_1 και E_2 και οι ενοποιητές θ_1, θ_2, θ_3 και θ_4 του προηγούμενου παραδείγματος. Ο ενοποιητής $\theta_3 = \{X/Z, Y/a\}$ είναι ο πλέον γενικός ενοποιητής των E_1 και E_2.

   α) $\theta_3 \circ \{Z/b\} = \{X/b, Y/a, Z/b\} = \theta_1$

   β) $\theta_3 \circ \{Z/a\} = \{X/a, Y/a, Z/a\} = \theta_2$

   γ) $\theta_3 \circ \{Z/f(W)\} = \{X/f(W), Y/a, Z/f(W)\} = \theta_4$

Έχουν κατασκευαστεί πολλοί αλγόριθμοι ενοποίησης οι οποίοι βρίσκουν τον πλέον γενικό ενοποιητή έχουν δημιουργηθεί. Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος ενοποίησης είναι ο ονομαζόμενος αλγόριθμος, **Αλγόριθμος 3.1** του Robinson ο οποίος και τον κατασκεύασε. Εάν δοθούν ως είσοδος δύο ατομικοί τύποι $A_1 = P(t_1,\ldots,t_v)$ και $A_2 = P(r_1,\ldots,r_v)$, ο αλγόριθμος βρίσκει εάν είναι ταυποποιήσιμοι ή όχι. Εάν ναι επιστρέφει τον πγτ, διαφορετικά επιστρέφει αποτυχία [Hogger 1990], [Sterling, Shapiro 1997]. Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια στοίβα S στην οποία καταχωρούνται τα ζεύγη των αντίστοιχων όρων των A_1 και A_2, δηλαδή S: = [$(t_1, r_1),\ldots,(t_v, r_v)$ [.

Όταν σε ένα ζεύγος όρων (t, r) είτε ο όρος t είναι μεταβλητή και ο όρος r σύνθετος όρος ή αντίστροφα τότε ο αλγόριθμος κάνει τον ***έλεγχο–ύπαρξης*** γνωστό ως ***occur–check***. Αυτός ο έλεγχος σκοπό έχει να μην επιτρέψει αυτοαναφερόμενες δεσμεύσεις όπως για παράδειγμα X/f(X). Μία τέτοια δέσμευση καταχωρεί στην μεταβλητή X ένα μη-πεπερασμένο όρο f(f(f(…))) ενώ όλες οι εκφράσεις πρέπει να είναι πεπερασμένες. Ο *έλεγχος–ύπαρξης* έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος, γι' αυτό πολλές γλώσσες λογικού προγραμματισμού παραλείπουν τον *έλεγχο–ύπαρξης* από τον αλγόριθμο ενοποίησης που χρησιμοποιούν. Αυτή η παράλειψη έχει ως συνέπεια ο αλγόριθμος ενοποίησης να χάσει την ορθότητά του.

Είσοδος

- Οι δύο ατομικοί τύποι $A_1 = P(t_1,\ldots,t_\nu)$ και $A_2 = P(r_1,\ldots,r_\nu)$ οι οποίοι θα ενοποιηθούν. P είναι το όνομα του κατηγορήματος.

Έξοδος

- Η αντικατάσταση θ, ο πλέον γενικός ενοποιητής των A_1 και A_2, ή αποτυχία.

Αλγόριθμος

- Αρχική τιμή στην αντικατάσταση θ το κενό σύνολο, θ := { }.
- Αρχική τιμή στη στοίβα S τα ζεύγη των όρων $(t_1, r_1),\ldots,(t_\nu,r_\nu)$, S := [$(t_1, r_1),\ldots,(t_\nu, r_\nu)$].
- Αρχική τιμή ψευδές στην μεταβλητή Αποτυχία, Αποτυχία := ψευδής.

repeat
Πάρε την κορυφή (t, r) της στοίβας S;
if t και r είναι διαφορετικές μεταβλητές
then
θ΄ := θ ◦ {t/r};
αντικατέστησε την μεταβλητή t με τον όρο r στην στοίβας S;
else if t μεταβλητή *και* r όρος (σύνθετος ή μη) στον οποίο δεν υπάρχει η μεταβλητή t
then
θ΄ := θ ◦ {t/r};
αντικατέστησε την μεταβλητή t με τον όρο r στην στοίβα S;
else if r μεταβλητή *και* t όρος (σύνθετος ή μη) στον οποίο δεν υπάρχει η μεταβλητή r.
then
θ΄ := θ ◦ {r/t};
αντικατέστησε την μεταβλητή r με τον όρο t στην στοίβα S;
else if t και r είναι ίδιες σταθερές ή ίδιες μεταβλητές
then
συνέχισε;
else if t και r είναι σύνθετοι όροι με ίδιο όνομα συνάρτησης και ίδια πληθυκότητα κ, $t = F(s_1,\ldots,s_K)$ και $r = F(u_1,\ldots,u_K)$
then
καταχώρησε τα ζεύγη των όρων $(s_1,u_1),\ldots,(s_K, u_K)$ στην στοίβα S;
else
Αποτυχία : = αληθής
until (S = { }) **or** Αποτυχία;
if Αποτυχία **then**
έξοδος αποτυχία
else
έξοδος θ;

Αλγόριθμος 3.1: Αλγόριθμος ενοποίησης του Robinson.

Παράδειγμα

Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο για τους ατομικούς τύπους $A_1 = p(X, f(Y,a), a)$ και $A_2 = p(g(Y), f(Z,Y), Z)$. Κάθε βήμα αντιστοιχεί σε μια επανάληψη του βρόχου repeat….until. Η στοίβα S είναι μια λίστα από ζεύγη όρων. Σε κάθε βήμα φαίνονται οι νέες τιμές των θ, S και Αποτυχία.

Αρχικές τιμές

θ := { };
S := [(X,g(Y)), (f(Y,a), f(Z,Y)), (a,Z) [.
Αποτυχία := ψευδής;

βήμα 1

θ := { } ∘ {X/g(Y){ = }X/g(Y){
S := [(f(Y,a), f(Z,Y)), (a,Z) [.
Αποτυχία := ψευδής;

βήμα 2

θ := {X/g(Y){;
S := [(Y,Z), (a,Y), (a,Z) [;
Αποτυχία := ψευδής;

βήμα 3

θ := {X/g(Y){ ∘ {Y/Z} = {X/g(Z), Y/Z}
S := [(a,Z), (a,Z) [;
Αποτυχία := ψευδής

βήμα 4

θ := {X/g(Z), Y/Z} ∘ {Z/a} = {X/g(a), Y/a, Z/a}
S := [(a,a)];
Αποτυχία := ψευδής;

βήμα 5

θ := {X/g(a), Y/a, Z/a}
S := [ ];
Αποτυχία := ψευδής;

Έξοδος θ := {X/g(a), Y/a, Z/a}

$A_1\theta$ = p(X, f(Y, a), a) {X/g(a), Y/a, Z/a} = p(g(a), f(a, a), a)
$A_2\theta$ = p(g(Y), f(Z, Y), Z) {X/g(a), Y/a, Z/a} = p(g(a), f(a, a), a)

Ένας πολύ δημοφιλής αλγόριθμος ενοποίησης, **Αλγόριθμος 3.2**, ορίζεται με βάση το σύνολο ασυμφωνίας (disagreement sets).

Ορισμός 3.31

Έστω ότι E είναι ένα πεπερασμένο σύνολο απλών παραστάσεων. Το ***σύνολο ασυμφωνίας*** (***disagreement set***) ορίζεται ως εξής. Προσδιόρισε την θέση του πλέον αριστερού συμβόλου στην οποία δεν έχουν ίδιο σύμβολο όλες οι παραστάσεις του E. Απόσπασε από κάθε παράσταση την υποπαράσταση η οποία αρχίζει από αυτή την θέση. Το σύνολο όλων αυτών των υποπαραστάσεων είναι το σύνολο ασυμφωνίας της E.

Παράδειγμα

Έστω η παράσταση E = {p(f(X),h(Y),a), p(f(X),Z,a), p(f(X),h(Y),b)). Το σύνολο ασυμφωνίας της παράστασης E είναι το σύνολο {h(Y),Z}.

Έστω E ένα σύνολο απλών παραστάσεων. Ο αλγόριθμος ενοποίησης **Αλγόριθμος 3.2** βασίζεται στο σύνολο ασυμφωνίας [Lloyd 1987].

1. Βάλε κ=0 και θ_0 = { }.

2. ***Εάν*** $E\theta_\kappa$ είναι μονοσύνολο ***τότε*** σταμάτησε, θ_κ είναι ο πλέον γενικός ενοποιητής, ***διαφορετικά*** βρες το σύνολο ασυμφωνίας Δ_κ του $E\theta_\kappa$;
3. ***Εάν*** υπάρχει μεταβλητή X και όρος T στο Δ_κ τέτοιοι ώστε η μεταβλητή X να μην υπάρχει στον όρο T, ***τότε*** βάλε $\theta_{\kappa+1} = \theta_\kappa \circ \{X/T\}$, αύξησε το κ και πήγαινε στο βήμα 2, ***διαφορετικά*** σταμάτησε, η E δεν είναι ενοποιήσιμη.

Αλγόριθμος 3.2: ***Αλγόριθμος ενοποίησης με βάση το σύνολο ασυμφωνίας.***

Παράδειγμα 1

Έστω E={f(g(a),g(X)), f(Y,Y)}

$\theta_0 = \{\ \}$

<u>*Πρώτη επανάληψη*</u>

1. $\Delta_1 = \{g(a), Y\}$
2. $\theta_1 = \{Y/g(a)\}$,
3. $E\theta_1 = \{f(g(a),g(X)), f(g(a),g(a))\}$ (*δεν είναι μονοσύνολο*)

<u>*Δεύτερη επανάληψη*</u>

1. $\Delta_2 = \{X,a\}$
2. $\theta_2 = \{Y/g(a), X/a\}$,
3. $E\theta_2 = \{f(g(a),g(a))\}$ (*μονοσύνολο*)

Συνεπώς, η αντικατάσταση θ_2 είναι ο πλέον γενικός ενοποιητής της E.

Παράδειγμα 2

Έστω E={f(X,X), f(Y,g(Y))}

$\theta_0 = \{\ \}$

<u>*Πρώτη επανάληψη*</u>

1. $\Delta_1 = \{X, Y\}$
2. $\theta_1 = \{X/Y\}$,
3. $E\theta_1 = \{f(Y, Y), f(Y, g(Y))\}$ (*δεν είναι μονοσύνολο*)

<u>*Δεύτερη επανάληψη*</u>

1. $\Delta_2 = \{Y,g(Y)\}$
2. Η μεταβλητή Y υπάρχει στον όρο g(Y) (*έλεγχος ύπαρξης/occur check*), αυτές οι υποπαραστάσεις δεν είναι ενοποιήσιμες.
3. Συνεπώς, οι απλές παραστάσεις της E δεν είναι ενοποιήσιμες.

3.9. Η Μέθοδος της (Δυαδικής) Επίλυσης

Ορισμός 3.32

Δύο στοιχειώδεις τύποι ονομάζονται ***συμπληρωματικά ζεύγη στοιχειωδών τύπων*** όταν ο ένας είναι η άρνηση του άλλου. Για παράδειγμα, οι στοιχειώδεις τύποι p(a,X) και ¬p(a,X) είναι συμπληρωματικοί, καθώς και οι τύποι p(X,Y) και ¬p(X,Y).

Η μέθοδος της επίλυσης εφαρμόζεται σε συμπληρωματικούς, στοιχειώδεις τύπους (literals). Η ιδέα είναι να δημιουργηθούν συμπληρωματικοί στοιχειώδεις τύποι με ενοποίηση σε δύο προτάσεις. Στη συνέχεια εφαρμόζεται ο συμπερασματικός κανόνας της επίλυσης όπως στον προτασιακό λογισμό.

Ορισμός 3.33

Έστω οι προτάσεις $\varphi_1 \vee P(t_1,\dots,t_K)$ και $\varphi_2 \vee \neg P(s_1,\dots,s_K)$ οι οποίες δεν έχουν μεταβλητές με ίδιο όνομα και θ ο πγτ των ατομικών τύπων $P(t_1,\dots,t_K)$ και $P(s_1,\dots,s_K)$ όπου P είναι το όνομα κάποιου κατηγορήματος. Ο συμπερασματικός κανόνας της (***δυαδικής***) ***επίλυσης*** (***resolution***) στον κατηγορηματικό λογισμό έχει ως εξής:

$$\varphi_1 \vee P(t_1,\dots,t_K),\ \varphi_2 \vee \neg P(s_1,\dots,s_K) \vdash (\varphi_1 \vee \varphi_2)\theta$$

Η πρόταση $(\varphi_1 \vee \varphi_2)\theta$ ονομάζεται ***επιλύουσα*** (***resolvent***) των $\varphi_1 \vee P(t_1,\dots,t_K)$ και $\varphi_2 \vee \neg P(s_1,\dots,s_K)$.

Οι προϋποθέσεις για την εφαρμογή του κανόνα της επίλυσης είναι οι εξής:

1. Οι προτάσεις δεν πρέπει να έχουν μεταβλητές με το ίδιο όνομα για να αποφευχθούν ασυνεπείς αντικαταστάσεις. Μετονομασία όλων των μεταβλητών με νέα ονόματα πριν την εφαρμογή της μεθόδου της επίλυσης είναι αναγκαία. Οι μεταβλητές στις προτάσεις έχουν καθολική δέσμευση συνεπώς μπορούν να μετονομαστούν.
2. Οι δύο προτάσεις πρέπει να έχουν στοιχειώδεις τύπους οι οποίοι είναι συμπληρωματικοί και οι οποίοι μπορούν να ενοποιηθούν. Για παράδειγμα, εάν στη μια πρόταση υπάρχει ο τύπος $P(a)$ και στην άλλη πρόταση πρέπει να υπάρχει ο τύπος $\neg P(X)$ ή ο τύπος $\neg P(a)$ τότε ο κανόνα της επίλυσης μπορεί να εφαρμοστεί. Ενώ, εάν στη μια πρόταση είναι ο τύπος $P(a)$ και στην άλλη πρόταση υπάρχει ο τύπος $\neg P(b)$ τότε δεν μπορεί να εφαρμοστεί ο κανόνας της επίλυσης διότι οι τύποι είναι μεν συμπληρωματικοί αλλά δεν ενοποιούνται.

Εφόσον οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται, η διαδικασία εφαρμογής του κανόνα της επίλυσης έχει ως εξής.

1. Βρίσκουμε τον **πγε** των 2 συμπληρωματικών και ενοποιήσιμων τύπων.
2. Εφαρμόζουμε τον συμπερασματικό κανόνα της επίλυσης όπως έχει οριστεί παραπάνω.

Παράδειγμα 1

Έστω οι προτάσεις $\neg p(X,Y) \vee q(a,Y)$, $r(a,Z) \vee \neg q(Z,b)$. Για να εφαρμοστεί η μέθοδος της επίλυσης θα πρέπει να υπάρχουν δύο συμπληρωματικοί στοιχειώδεις τύποι. Αυτό θα επιτευχθεί με ενοποίηση των $q(a,Y)$ και $q(Z,b)$. Ο πγτ των $q(a,Y)$ και $q(Z,b)$ είναι $\theta = \{Z/a, Y/b\}$.

$$(\neg p(X, Y) \vee q(a,Y))\theta = \neg p(X,b) \vee q(a,b)$$

$$(r(a,Z) \vee \neg q(Z,b))\theta = r(a,a) \vee \neg q(a,b)$$

Οι προτάσεις $\neg p(X,b) \vee q(a,b)$ και $r(a,a) \vee \neg q(a,b)$ μπορούν να επιλυθούν γιατί περιέχουν τους συμπληρωματικούς στοιχειώδεις τύπους $q(a,b)$ και $\neg q(a,b)$. Η επίλυση των προτάσεων θα δώσει την νέα πρόταση $\neg p(X,b) \vee r(a,a)$.

Παράδειγμα 2

Έστω οι προτάσεις $\Pi_1 = p(X,a) \vee \neg q(X,Y)$ και $\Pi_2 = p(f(Z),b) \vee q(f(a), Z)$. Θα εφαρμόσουμε τον κανόνα της επίλυσης στις προτάσεις Π_1 και Π_2. Δηλαδή να βρούμε την επιλύουσα των Π_1 και Π_2. Η επιλύουσα των Π_1 και Π_2 υπολογίζεται ως εξής:

$\theta = \{X/f(a), Y/Z/\}$

$\Pi_1' = p(X,a) \vee \neg q(X,Y)\ \theta = p(f(a),a) \vee \neg q(f(a),Z)$

$\Pi_2' = p(f(Z),b) \vee q(f(a), Z)\ \theta = p(f(Z),b) \vee q(f(a), Z)$

$p(f(a),a) \vee \neg q(f(a),Z),\ p(f(Z),b) \vee q(f(a), Z) \vdash p(f(a),a) \vee p(f(Z),b)$

Η επιλύουσα των Π_1 και Π_2 είναι η πρόταση $p(f(a),a) \vee p(f(Z),b)$.

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι υπάρχουν και άλλοι συμπερασματικοί κανόνες επίλυσης όπως η *UR–επίλυση* (*Unit Resolution*). Ο κανόνας της *UR–επίλυσης* εφαρμόζεται σε ένα σύνολο προτάσεων μια από τις οποίες είναι μη–μοναδιαία (περιέχει περισσότερους του ενός στοιχειώδεις τύπους) και οι υπόλοιπες είναι μοναδιαίες. Η μη-μοναδιαία πρόταση πρέπει να περιέχει ένα τουλάχιστον περισσότερο στοιχειώδη τύπο (literal) από τις μοναδιαίες προτάσεις του συνόλου στο οποίο θα εφαρμοστεί ο κανόνας της UR–επίλυσης. Επιπλέον, εκτός από ένα στοιχειώδη τύπο, οι υπόλοιποι στοιχειώδεις τύποι της μη-μοναδιαίας πρότασης πρέπει να ζευγαρωθούν με τις μοναδιαίες προτάσεις έτσι ώστε τα δύο μέλη κάθε ζεύγους πρέπει να είναι συμπληρωματικοί τύποι και να ενοποιούνται. Μια ταυτόχρονη αντικατάσταση όλων των μεταβλητών σε όλες τις προτάσεις του συνόλου πρέπει να υπάρχει και να ενοποιεί τα μέλη κάθε ζεύγους. *Το αποτέλεσμα από την επιτυχή εφαρμογή αυτού του κανόνα πρέπει να είναι μια νέα μοναδιαία πρόταση.*

Παράδειγμα

Έστω το πρόγραμμα **Πρόγραμμα 3.1**. Εαν εφαρμόσουμε *UR–επίλυση* στις προτάσεις π2 και π3 θα παραχθεί ή πρόταση «π4: ¬ female(anna)». Η πρόταση π4 και π1 οδηγούν σε άτοπο. Συνεπώς, απεδείχθει με *UR–επίλυση* ότι «η Άννα δεν είναι γένους αρσενικού».

π1: female(anna)	Η Άννα είναι γένους θηλυκού.
π2: ¬ female (X) ∨ ¬male(X)	Οποιοσδήποτε X είτε δεν είναι γένους θηλυκού ή δεν είναι γένους αρσενικού.
π3: male(anna)	Η Άννα είναι γένους αρσενικού.

Πρόγραμμα 3.1: Πρόγραμμα επίδειξη *UR–επίλυσης*

Ορισμός 3.34

Έστω οι δύο προτάσεις $\varphi_1 \vee P(t_1,\ldots,t_v)$ και $\varphi_2 \vee \neg P(s_1,\ldots,s_v)$ όπου φ_1 και φ_2 είναι διάζευξη στοιχειωδών τύπων. Προτάσεις αυτής της μορφής ονομάζονται *συγκρουόμενες προτάσεις* οι οποίες συγκρούονται στους στοιχειώδεις τύπους $P(t_1,\ldots,t_v)$ και $\neg P(s_1,\ldots,s_v)$ όπου P είναι το όνομα κατηγορήματος.

Ο αλγόριθμος ***Αλγόριθμος 3.3*** περιγράφει μια διαδικασία απαγωγής σε άτοπο η οποία στηρίζεται στον κανόνα της επίλυσης για τον κατηγορηματικό λογισμό. Στον αλγόριθμο ***Αλγόριθμος 3.3*** Π ένα σύνολο προτάσεων τις οποίες θα ονομάζουμε ***προτάσεις εισόδου***.

1. $\Pi_0 = \Pi$
2. Διάλεξε δύο συγκρουόμενες προτάσεις $\varphi_1 \vee P(t_1,\ldots,t_K)$ ε Π_i και $\varphi_2 \vee \neg P(s_1,\ldots,s_K)$ ε Π_i $i = \{0,\ldots,\nu\}$
3. Έστω θ ο πγτ των $P(t_1,\ldots,t_K)$ και $P(s_1,\ldots,s_K)$;
4. $\varphi = \varphi_1\theta \vee \varphi_2\theta$;
5. $\Pi_{i+1} = \Pi_i \cup \{\varphi\}$;
6. **Εάν** φ = □(κενή πρόταση) **τότε**
   Τερμάτισε την διαδικασία απαγωγής σε άτοπο;
   Το σύνολο των προτάσεων Π είναι μη επαληθεύσιμο (unsatisfiable);
7. **Εάν** $\Pi_{i+1} = \Pi_i$ για όλα τα ζεύγη των συγκρουόμενων προτάσεων **τότε**

Το σύνολο των προτάσεων Π είναι επαληθεύσιμο ;
Τερμάτισε την διαδικασία απαγωγής σε άτοπο (satisfiable);

8. Πήγαινε στο βήμα 2.

Αλγόριθμος 3.3: Διαδικασία απαγωγής σε άτοπο στον κατηγορηματικό λογισμό.

Στρατηγική σε ένα σύστημα αυτόματων συλλογισμών είναι η μέθοδος προσέγγισης του προβλήματος από το σύστημα ώστε να φθάσει γρηγορότερα στο τελικό αποτέλεσμα, στη λύση. Ουσιαστικά, η στρατηγική είναι ένα σύνολο κανόνων οι οποίοι καθορίζουν την εφαρμογή των συμπερασματικών κανόνων (inferenfe rules) όπως για παράδειγμα τον κανόνα *επίλυσης (resolution)*. Διακρίνουμε ***στρατηγικές κατεύθυνσης*** οι οποίες κατευθύνουν το σύστημα στο ποιές προτάσεις πρέπει να επιλέξει για επίλυση. Άλλες, στρατηγικές είναι οι ***περιοριστικές στρατηγικές*** οι οποίες περιορίζουν το σύστημα έτσι ώστε κάποιους συνδυασμούς προτάσεων να τις παρακάμψει.

Ο τρόπος με τον οποίο επιλέγονται οι συγκρουόμενες προτάσεις είναι πολύ σημαντικός για την αποτελεσματικότητα του αλγορίθμου. Αυτό ουσιαστικά καθορίζει την στρατηγική του συστήματος. Οι διάφορες βελτιώσεις της μεθόδου επίλυσης στηρίζονται στον τρόπο με τον οποίο επιλέγονται οι συγκρουόμενες προτάσεις. Διακρίνουμε μεταξύ άλλων τις εξής στρατηγικές [Genesereth, Nilsson 1987]: 1) *Απλοϊκή Στρατηγική (Simple Strategy). 2) Στρατηγική της Μονάδος (Unit Strategy) 3) Στρατηγική της Γραμμικής Επίλυσης (Linear Resolution). 4) Στρατηγική του συνόλου υποστήριξης* (Set of Support Strategy) και 5(η *στρατηγική βάρους* (Weighting Strategy).

1. Απλοϊκή Στρατηγική.

Ορισμός 3.35
Έστω Π είναι ένα σύνολο προτάσεων. Η *επίλυση του Π* η οποία συμβολίζεται ΕΠΙΛ(Π) είναι το σύνολο όλων των προτάσεων οι οποίες αποτελούνται από τις προτάσεις Π και από τις επιλύουσες για όλα τα ζεύγη των στοιχείων του Π.

Ορισμός 3.36
Εάν Π είναι ένα σύνολο προτάσεων τότε η ν–οστή επιλύουσα του Π η οποία συμβολίζεται $ΕΠΙΛ^{ν}(Π)$, ορίζεται ως εξής:

$ΕΠΙΛ^{0}(Π) = Π$

$ΕΠΙΛ^{ν}(Π) = ΕΠΙΛ(ΕΠΙΛ^{ν-1}(Π)),$ $\quad ν = 0, 1,\ldots.$

Η ***απλοϊκή στρατηγική*** δημιουργεί τις επιλύουσες των προτάσεων εισόδου μέχρι να φθάσει σε απόρριψη (κενή πρόταση) ή μέχρι δύο συνεχόμενες επιλύουσες να είναι ίδιες, δηλαδή $ΕΠΙΛ^{K}(Π) = ΕΠΙΛ^{K+1}(Π)$.

Παράδειγμα
Έστω το σύνολο προτάσεων $Π = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ όπου:

C_1 : $\neg p(a)$
C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$
C_3 : $p(X) \vee \neg r(f(X))$
C_4 : $q(a) \vee r(f(a))$
$ΕΠΙΛ^{0}(Π) = Π$
$Π_0 = Π$

Παραγόμενες Προτάσεις	**Νέο Σύνολο Προτάσεων**	**Αντικατάσταση**	**Συγκρουόμενες Προτάσεις**
C_5: $\neg q(a)$	$\Pi_1 = \Pi_0 \cup \{C_5\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_1, C_2
C_6: $\neg r(f(a))$	$\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{C_6\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_1, C_3
C_7: $p(a) \vee r(f(a))$	$\Pi_3 = \Pi_2 \cup \{C_7\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_2, C_4
C_8: $p(a) \vee q(a)$	$\Pi_4 = \Pi_3 \cup \{C_8\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_3, C_4

$\text{ΕΠΙΛ}^1(\Pi) = \Pi \cup \{C_5, C_6, C_7, C_8\}$

Παραγόμενες Προτάσεις	**Νέο Σύνολο Προτάσεων**	**Αντικατάσταση**	**Συγκρουόμενες Προτάσεις**
$C_9 : r(f(a))$	$\Pi_5 = \Pi_4 \cup \{C_9\}$	$\theta = \{\ \}$	C_1, C_7
$C_{10} : q(a)$	$\Pi_6 = \Pi_5 \cup \{C_{10}\}$	$\theta = \{\ \}$	C_1, C_8
$C_{11} : p(a)$	$\Pi_7 = \Pi_6 \cup \{C_{11}\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_2, C_8
$C_{12} : p(a)$	$\Pi_8 = \Pi_7 \cup \{C_{12}\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_3, C_7
$C_{13} : r(f(a))$	$\Pi_9 = \Pi_8 \cup \{C_{13}\}$	$\theta = \{\ \}$	C_4, C_5
$C_{14} : q(a)$	$\Pi_{10} = \Pi_9 \cup \{C_{14}\}$	$\theta = \{\ \}$	C_4, C_6
$C_{15} : p(a)$	$\Pi_{11} = \Pi_{10} \cup \{C_{15}\}$	$\theta = \{\ \}$	C_5, C_8
$C_{16} : p(a)$	$\Pi_{12} = \Pi_{11} \cup \{C_{16}\}$	$\theta = \{\ \}$	C_6, C_7

$\text{ΕΠΙΛ}^2(\Pi) = \text{ΕΠΙΛ}^1(\Pi) \cup \{C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}\}$

Παραγόμενες Προτάσεις	**Νέο Σύνολο Προτάσεων**	**Αντικατάσταση**	**Συγκρουόμενες Προτάσεις**
$\square$		$\theta = \{\ \}$	C_1, C_{11}

Αυτή η στρατηγική δημιουργεί πολλές προτάσεις οι οποίες δεν χρειάζονται. Επιπλέον, κάποιες προτάσεις δημιουργούνται πολλές φορές όπως η πρόταση p(α) στο προηγούμενο παράδειγμα. Άλλα προβλήματα τα οποία εμφανίζονται είναι τα εξής: 1) Η δημιουργία ταυτολογιών οι οποίες πρέπει να διαγράφονται από το σύνολο των προτάσεων το οποίο θέλουμε να δείξουμε ότι είναι μη ικανοποιήσιμο (unsatisfiable). 2) Η δημιουργία προτάσεων οι οποίες περικλείονται από άλλες πιο γενικές και οι οποίες πρέπει να αφαιρούνται. Γι' αυτό οι αλγόριθμοι απόρριψης περιέχουν χαρακτηριστικά ώστε να διορθώνουν αυτά τα προβλήματα τα οποία συνεισφέρουν σε μη αποτελεσματικότητα.

2. Στρατηγική της Μονάδος (Unit Strategy).

Μια πρόταση λέγεται *πρόταση μονάδα* εάν αποτελείται από ένα μόνο στοιχειώδη τύπο. Αυτή η στρατηγική κατευθύνει το σύστημα συλλογισμών ώστε να προτιμά την εφαρμογή του κανόνα της δυαδικής επίλυσης σε συγκρουόμενες προτάσεις από τις οποίες η μια τουλάχιστον είναι πρόταση μονάδα. Επιλύνοντας δύο προτάσεις φ_1 και φ_2 από τις οποίες η πρόταση φ_2 είναι πρόταση μονάδα, η επιλύουσα πρόταση φ θα έχει ένα λιγότερο στοιχειώδη τύπο από την φ_1. Αυτή η προσέγγιση έχει στόχο την αύξηση των προτάσεων μονάδα. Αυτό, *επειδή όλες οι αποδείξεις με απαγωγή σε άτοπο τελειώνουν με δύο συγκρουόμενες προτάσεις μονάδες*.

Παράδειγμα

Έστω το σύνολο των προτάσεων $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ όπου:

C_1 : $\neg p(a)$
C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$
C_3 : $p(X) \vee \neg r(f(X))$
C_4 : $q(a) \vee r(f(a))$

$\Pi_0 = \Pi$

Παραγόμενες Προτάσεων	**Νέο Σύνολο**	**Αντικατάσταση**	**Συγκρουόμενες Προτάσεις**	**Προτάσεις**
$C_5 : \neg q(a)$	$\Pi_1 = \Pi_0 \cup \{C_5\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_1, C_2	
$C_6 : \neg r(f(a))$	$\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{C_6\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_1, C_3	
$C_7 : r(f(a))$	$\Pi_3 = \Pi_2 \cup \{C_7\}$	$\theta = \{\ \}$	C_5, C_4	
$C_8 : q(a)$	$\Pi_4 = \Pi_3 \cup \{C_8\}$	$\theta = \{\ \}$	C_6, C_4	
$C_9 : \square$		$\theta = \{\ \}$	C_6, C_7	

3. Στρατηγική της Γραμμικής Επίλυσης (Linear Resolution).

Κεντρική πρόταση, (**center clause**) είναι ο στόχος τον οποίο θέλουμε να αποδείξουμε με την απαγωγή σε άτοπο. Η στρατηγική της *γραμμικής επίλυσης* απαιτεί η μία από τις συγκρουόμενες προτάσεις να είναι η κεντρική πρόταση και η επιλύουσα να είναι η νέα κεντρική πρόταση. Η άλλη συγκρουόμενη πρόταση η οποία ονομάζεται ***πλευρική πρόταση*** (**side clause**) μπορεί να προέρχεται είτε από τις προτάσεις εισόδου ή από τις εξαγόμενες προτάσεις (πρόγονοι της επιλύουσας).

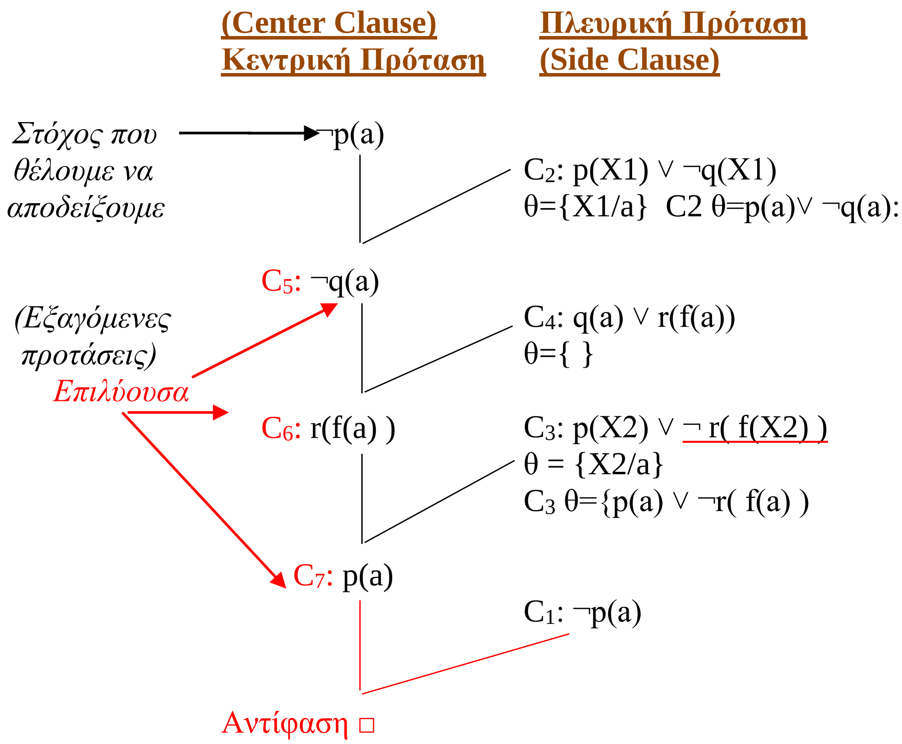
Παράδειγμα

Έστω το σύνολο των προτάσεων $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ με κεντρική πρόταση την C_1.

C_1 : $\neg p(a)$
C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$
C_3 : $p(X) \vee \neg r(f(X))$
C_4 : $q(a) \vee r(f(a))$
$\Pi_0 = \Pi$

Παραγόμενες Προτάσεις	**Νέο Σύνολο Προτάσεων**	**Αντικατάσταση**	**Συγκρουόμενες Προτάσεις**
$C_5 : \neg q(a)$	$\Pi_1 = \Pi_0 \cup \{C_5\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_1, C_2
$C_6 : r(f(a))$	$\Pi_2 = \Pi_1 \cup \{C_6\}$	$\theta = \{\ \}$	C_5, C_4
$C_7 : p(a)$	$\Pi_3 = \Pi_2 \cup \{C_7\}$	$\theta = \{X/a\}$	C_6, C_3
$\square$		$\theta = \{\ \}$	C_7, C_1

Η παραπάνω εξαγωγή μπορεί να παρασταθεί γραφικά ως εξής:



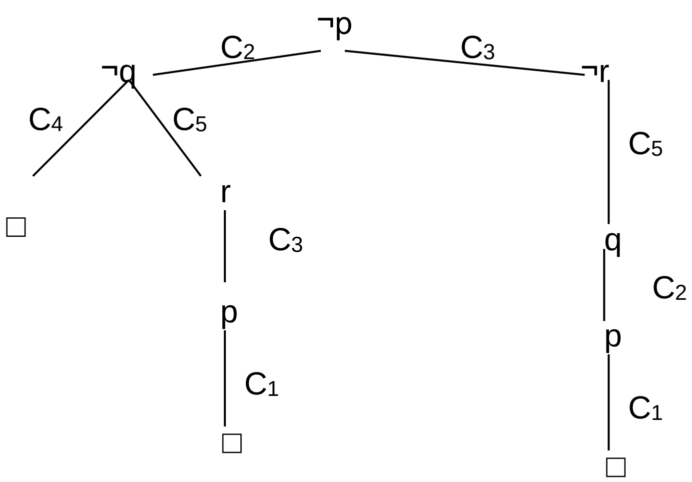
Σχήμα 3.7: Απόδειξη στόχου με γραμμική επίλυση.

Ο χώρος αναζήτησης για όλες τις δυνατές εξαγωγές (συμπερασμάτων) από ένα σύνολο προτάσεων εισόδου Π με κεντρική πρόταση φ και με στρατηγική τη γραμμική επίλυση παριστάνεται ως ένα δέντρο το οποίο ονομάζεται *δέντρο αναζήτησης (search tree).*

Παράδειγμα

Έστω το σύνολο προτάσεων $\Pi = \{\neg p, p \vee \neg q, p \vee \neg r, q, q \vee r\}$ με κεντρική πρόταση $\neg p$ και C_1: $\neg p$, C_2: $p \vee \neg q$, C_3: $p \vee \neg r$, C_4: q, C_5: $q \vee r$. Εφαρμόζοντας την στρατηγική της γραμικής επίλυσης, το δέντρο αναζήτησης φαίνεται στο σχήμα,

Σχήμα 3.8.



Σχήμα 3.8: Δέντρο αναζήτησης για το σύνολο των προτάσεων Π με κεντρική πρόταση ¬p.

Δύο άλλες στρατηγικές τις οποίες αξίζει να αναφέρουμε είναι η *στρατηγική του συνόλου υποστήριξης* (set of support strategy) και η *στρατηγική βάρους* (weighting strategy).

4. Στρατηγική του συνόλου υποστήριξης.

Αυτή η στρατηγική δεν επιτρέπει στο σύστημα συλλογισμών να εφαρμόσει ένα συμπερασματικό κανόνα, στην προκειμένη περίπτωση αυτόν της επίλυσης, εκτός εάν η μία τουλάχιστον από τις συγκρουόμενες προτάσεις είτε έχει εξαχθεί από ένα καθορισμένο υποσύνολο των προτάσεων εισόδου ή είναι μέλος αυτού του υποσυνόλου των προτάσεων εισόδου. Εάν Π είναι ένα σύνολο προτάσεων, για να εφαρμοστεί η στρατηγική του συνόλου υποστήριξης πρέπει πρώτα να γίνει επιλογή του υποσυνόλου Τ του Π. Το υποσύνολο Τ ονομάζεται *σύνολο υποστήριξης*. Τα μέλη του Τ έχουν την υποστήριξη. Η στρατηγική του συνόλου υποστήριξης δεν επιτρέπει την εφαρμογή του κανόνα της επίλυσης όταν οι συγκρουόμενες προτάσεις ανήκουν στο σύνολο των προτάσεων Π–Τ. Το υποσύνολο των προτάσεων Τ το οποίο επιλέγει ο χρήστης παριστάνει είτε το θεώρημα το οποίο θέλει να αποδεχθεί ή το πρόβλημα το οποίο θέλει να λυθεί. Κάθε πρόταση παραγόμενη με τον κανόνα της επίλυσης, αντιμετωπίζεται ως πρόταση του συνόλου Τ.

5. Στρατηγική βάρους.

Η στρατηγική βάρους δίνει την δυνατότητα στον χρήστη να κατευθύνει τους συλλογισμούς του συστήματος. Ο χρήστης καταχωρεί τιμές στις διάφορες ιδέες και σύμβολα του προβλήματος και το σύστημα επιλέγει σύμφωνα με τις καταχωρηθείσες προτεραιότητες τις προτάσεις στις οποίες θα εστιάσει τους συλλογισμούς του.

3.10. Η Επίλυση στον Λογικό Προγραμματισμό

Ορισμός 3.37
Έστω ότι P είναι ***προγραμματικές προτάσεις*** (***program clauses***) ή προτάσεις ή *πρόγραμμα* και G είναι μια ***πρόταση στόχος*** ή ***στόχος (goal)***. Μια ***αντικατάσταση απάντηση*** (***answer substitution***) θ για το P U {G} είναι μια αντικατάσταση για τις μεταβλητές του G. Δεν είναι αναγκαίο η αντικατάσταση θ να περιέχει δέσμευση για κάθε μεταβλητή του G. Εάν το G δεν έχει μεταβλητές τότε το θ είναι η άδεια αντικατάσταση.

Ορισμός 3.38
Έστω ότι, P είναι ένα πρόγραμμα, G είναι ο στόχος $\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_n$ όπου P_i $(1 \geq i \leq n)$ είναι ατομικοί τύποι και θ είναι μια αντικατάσταση απάντηση. Το θ είναι μια ***ορθή αντικατάσταση απάντησης (sound answer substitution)*** εάν ο κλειστός τύπος $\forall(\neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_n))\theta$ μπορεί να παραχθεί από το P με τη μέθοδο της επίλυσης.

Ορισμός 3.39
Ένα σύνολο προγραμματικών προτάσεων των οποίων οι κεφαλές έχουν το ίδιο όνομα κατηγορήματος και ίδια πληθυκότητα ονομάζεται *διαδικασία*. Ένα σύνολο διαδικασιών ονομάζεται ***λογικό πρόγραμμα*** ή ***πρόγραμμα***.

Ορισμός 3.40
Ένας ***κανόνας υπολογισμών*** (***computation rule***) είναι ένας κανόνας επιλογής στοιχειωδών τύπων από μια πρόταση στόχο.

SLD – Επίλυση

Η στρατηγική η οποία εφαρμόζεται στον κανόνα της δυαδικής επίλυσης στον λογικό προγραμματισμό ονομάζεται *SLD – επίλυση*.

Το ***L*** από το ***L****inear* σημαίνει ότι έχουμε γραμμική επίλυση. Δηλαδή, κάθε βήμα επίλυσης χρησιμοποιεί ως μια συγκρουόμενη πρόταση (η κεντρική πρόταση) την πιο πρόσφατη επιλύουσα. Η άλλη συγκρουόμενη πρόταση (η πλευρική πρόταση) μπορεί να είναι είτε μια από τις προτάσεις εισόδου ή μια εξαγόμενη πρόταση πρόγονος της επιλύουσας. Η εξαγωγή συμπερασμάτων αρχίζει με πρώτη κεντρική πρόταση την πρόταση στόχο. Αυτό αποκλείει εξαγόμενες προτάσεις να χρησιμοποιηθούν ως πλευρικές προτάσεις. Δηλαδή δεν είναι δυνατόν δύο συγκρουόμενες προτάσεις να είναι και οι δύο προτάσεις στόχοι. Συνεπώς η πλευρική πρόταση μπορεί να προέρχεται μόνο από τις προτάσεις εισόδου.

Το ***D*** από το ***D****efinite* σημαίνει ότι οι προτάσεις του προγράμματος είναι μόνο προγραμματικές προτάσεις. Το ***S*** από το ***S****election* σημαίνει ότι κάποιος σταθερός κανόνας επιλογής στοιχειωδών τύπων, ο ***κανόνας υπολογισμών***, εφαρμόζεται σε κάθε βήμα επίλυσης για να επιλέξει ένα στοιχειώδη τύπο από την κεντρική πρόταση πάνω στον οποίο θα γίνει η επίλυση. Ο κανόνας υπολογισμών ονομάζεται και ***συνάρτηση επιλογής***.

Η SLD – επίλυση εξάγει όλες τις διαφορετικές απαντήσεις για την πρόταση στόχο όποιος και αν είναι ο κανόνας υπολογισμών. Αυτή η ιδιότητα αναφέρεται ως *ανεξαρτησία του κανόνα υπολογισμών*.

Δύο κανόνες υπολογισμών μεταξύ άλλων μπορεί να είναι και οι εξής:
1. Επιλογή πάντα του πρώτου στοιχειώδη τύπου, δηλαδή του πλέον αριστερού στοιχειώδη τύπου.
2. Επιλογή πάντα του τελευταίου στοιχειώδη τύπου, δηλαδή του πλέον δεξιού στοιχειώδη τύπου.

Η Prolog εφαρμόζει τον πρώτο κανόνα υπολογισμών.

Ορισμός 3.41
Έστω Ε μια παράσταση και θ μια αντικατάσταση μετονομασίας (renaming substitution) όπου var(E) = dom(θ). ***Μετονομασία μεταβλητών*** (***variable renaming***) της Ε είναι η παράσταση που θα προκύψει από την εφαρμογή του Θ στην Ε, δηλαδή η παράσταση Εθ.

Παραδείγματα
1. $E = p(X,Y, f(X), a)$ $\theta=\{X/W, Y/V\}$ $E\theta = p(W,V,f(W),a)$
2. $E = p(X, f(X,a)) \lor \neg q(X, Y, b)$ $\theta=\{X/W, Y/V\}$ $E\theta = p(W, f(W,a)) \lor \neg q(W, V, b)$

Ορισμός 3.42
Έστω ένα πρόγραμμα P, ένας κανόνας υπολογισμών R και ένας στόχος G: $\neg(P_1 \land \ldots \land P_{i-1} \land P_i \land P_{i+1} \land \ldots \land Pn)$ όπου P_i $(1 \geq i \leq n)$ είναι ατομικοί τύποι. Ο G ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως εξής. G: $\neg P_1 \lor \ldots \lor \neg P_{i-1} \lor \neg P_i \lor \neg P_{i+1} \lor \ldots \lor \neg Pn$ ή $\leftarrow P_1 \land \ldots \land P_{i-1} \land P_i \land P_{i+1} \land \ldots \land Pn$. Ένας στοιχειώδης τύπος P_i επιλέγεται σύμφωνα με τον κανόνα υπολογισμών R. Από το πρόγραμμα P επιλέγεται μια πρόταση C οι μεταβλητές της οποίας μετονομάζονται, C: $Q \leftarrow Q_1 \land \ldots \land Q_K$ (ή

ισοδύναμα $Q \vee \neg(Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_K)$ ή ισοδύναμα $Q \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_K)$ της οποίας η κεφαλή Q ενοποιείται με το P_i με πγτ θ δηλαδή $Q\theta = P_i\theta$. Η ***επιλύουσα***, ή ***η εξαγόμενη πρόταση στόχος*** ή ***ο στόχος G΄*** ορίζεται ως εξής.

$G' : \neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_{i-1} \wedge Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_K \wedge P_{i+1} \wedge \ldots \wedge P_n)\theta$ ή ισοδύναμα

$G' : (\neg P_1 \vee \ldots \vee \neg P_{i-1} \vee \neg Q_1 \vee \ldots \vee \neg Q_K \vee \neg P_{i+1} \vee \ldots \vee \neg P_n)\theta$

Με ένα πιο τυπικό συμβολισμό αυτό εκφράζεται ως εξής:

$$\neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_{i-1} \wedge P_i \wedge P_{i+1} \wedge \ldots \wedge P_n),\ Q \vee \neg(Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_K) \vdash$$
$$\neg(P_1 \wedge \ldots \wedge P_{i-1} \wedge Q_1 \wedge \ldots \wedge Q_K \wedge P_{i+1} \wedge \ldots \wedge P_n)\theta$$

όπου θ = πγτ (P_i, Q).

Ορισμός 3.43

Έστω P ένα πρόγραμμα, R ένας κανόνας υπολογισμών και G_0 ένας στόχος. Μια ***SLD–εξαγωγή*** του G_0, χρησιμοποιώντας το P και τον R, είναι μια πεπερασμένη ή μη πεπερασμένη ακολουθία στόχων $G_0, G_1, \ldots, G_i, G_{i+1}$ όπου το G_{i+1} εξάγεται από το G_i και μια μετονομασμένη πρόταση C_i του P χρησιμοποιώντας τον R.

Ορισμός 3.44

Μια ***SLD–απόρριψη*** είναι μια πεπερασμένη SLD–εξαγωγή $G_0, \ldots, G_n$ όπου το G_n είναι η άδεια πρόταση (□).

Ορισμός 3.45

Εάν P είναι ένα πρόγραμμα και G είναι ένας στόχος. Η ***υπολογισθείσα απάντηση αντικατάστασης*** (***computed answer substitution***) θ για μια SLD–απόρριψη του G χρησιμοποιώντας το P είναι η αντικατάσταση την οποία παίρνουμε εάν περιορίσουμε την σύνθεση των $\theta_1, \ldots, \theta_n$ στις μεταβλητές του G. $\theta_1, \ldots, \theta_n$ είναι η ακολουθία των πγτ οι οποίοι χρησιμοποιήθηκαν στην SLD-απόρριψη.

Παραδείγματα

Έστω το πρόγραμμα Π, ***Πρόγραμμα 3.2*** με τις προτάσεις $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7\}$. Οι προτάσεις $\{\pi_1\}$, $\{\pi_2, \pi_3\}$, $\{\pi_4, \pi_5\}$, και $\{\pi_6\}$ αποτελούν διαφορετικές διαδικασίες.

$\pi_1 :\ p(X, Y) \leftarrow q(X, Z) \wedge q(Z, Y)$
$\pi_2 :\ q(X, Y) \leftarrow r(X, Y)$
$\pi_3 :\ q(X, Y) \leftarrow s(X, Y)$
$\pi_4 :\ r(a,b)$
$\pi_5 :\ r(b,c)$
$\pi_6 :\ s(b,d)$

Πρόγραμμα 3.2 Λογικό πρόγραμμα με 4 διαδικασίες.

Στην εφαρμογή των δύο κανόνων υπολογισμών θα θεωρήσουμε ότι πλευρική πρόταση θα είναι η πρώτη πρόταση του προγράμματος, ***Πρόγραμμα 3.2***, της οποίας η κεφαλή ενοποιείται με τον επιλεχθέντα στοιχειώδη τύπο από την κεντρική πρόταση. Οι μεταβλητές της πλευρικής πρότασης θα μετονομάζονται ώστε να μην υπάρξει σύγχυση με τα ονόματα των μεταβλητών.

Κανόνας υπολογισμών Α: Επιλογή του πλέον αριστερού στοιχειώδους τύπου.

Έστω ότι ο αρχικός στόχος G_0 είναι $\neg p(a,X)$. Η SLD–εξαγωγή φαίνεται στο σχήμα ***Σχήμα 3.9*** η οποία είναι SLD–απόρριψη. Η υπολογισθείσα απάντηση αντικατάστασης προκύπτει από την σύνθεση όλων των αντικαταστάσεων, $\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_3 \circ \theta_4 \circ \theta_5 = \{X_1/a, Y_1/c, X_2/a, Y_2/b, Z_1/b, X_3/b, Y_3/c, X/c\}$, περιοριζόμενη στις μεταβλητές του $\neg p(a, X)$ δηλαδή $\}X/c\}$.

	Κεντρική πρόταση	Πλευρική πρόταση	Αντικατάσταση
G_1:	$\neg p(a,X)$	π_1: $p(X_1,Y_1) \leftarrow q(X_1,Z_1) \wedge q(Z_1,Y_1)$	$\theta_1 = \{X_1/a,\ Y_1/X\}$
G_2:	$\neg(q(a,Z_1) \wedge q(Z_1,X))$	π_2: $q(X_2,Y_2) \leftarrow r(X_2,Y_2)$	$\theta_2 = \{X_2/a,\ Y_2/Z_1\}$
G_3:	$\neg(r(a,Z_1) \wedge q(Z_1,X))$	π_4: $r(a,b)$	$\theta_3 = \{Z_1/b\}$
G_4:	$\neg q(b,X)$	π_2: $q(X_3,Y_3) \leftarrow r(X_3,Y_3)$	$\theta_4 = \{X_3/b,\ Y_3/X\}$
G_5:	$\neg r(b,X)$	π_5: $r(b,c)$	$\theta_5 = \{X/c\}$
G_6:	$\square$ επιτυχία		

SLD–εξαγωγή με επιλογή του πλέον αριστερού στοιχειώδους τύπου.

Κανόνας υπολογισμών Β: Επιλογή του πλέον δεξιού στοιχειώδους τύπου.
Ο αρχικός στόχος G_0 είναι $\neg p(a, X)$. Δεν υπάρχει καμία πρόταση από το πρόγραμμα με την οποία να ενοποιείται ο επιλεχθείς στοιχειώδης τύπος $\neg r(a, a)$. Η SLD–εξαγωγή φαίνεται στο σχήμα ***Σχήμα 3.10***.

	Κεντρική πρόταση	Πλευρική πρόταση	Αντικατάσταση
G_1:	$\neg p(a,X)$	π_1: $p(X_1, Y_1) \leftarrow q(X_1, Z_1) \wedge q(Z_1, Y_1)$	$\theta_1 = \{X_1/a,\ Y_1/X\}$
G_2:	$\neg(q(a,Z_1) \wedge q(Z_1,X))$	π_2: $q(X_2, Y_2) \leftarrow r(X_2, Y_2)$	$\theta_2 = \{X_2/Z_1,\ Y_2/X\}$
G_3:	$\neg(q(a,Z_1) \wedge r(Z_1, X))$	π_4: $r(a, b)$	$\theta_3 = \{Z_1/a,\ X/b\}$
G_4:	$\neg q(a, a)$	π_2: $q(X_3, Y_3) \leftarrow r(X_3, Y_3)$	$\theta_4 = \{X_3/a,\ Y_3/a\}$
G_5:	$\neg r(a, a)$		
	$\blacksquare$ αποτυχία		

Σχήμα 3.10: SLD−εξαγωγή με επιλογή του πλέον δεξιού στοιχειώδους τύπου.

Αυτός ο κανόνας υπολογισμών και η σειρά με την οποία εξετάζονται οι προτάσεις του προγράμματος δεν οδήγησαν σε απόρριψη. Το σύστημα αποτυγχάνει οπότε οπισθοδρομεί στην προηγούμενη κεντρική πρόταση, ακυρώνοντας την ενοποίηση που έκανε. Προσπαθεί να βρει μια άλλη πρόταση από το πρόγραμμα η οποία να ενοποιείται με τον επιλεχθέντα στοιχειώδη τύπο της κεντρικής πρότασης. Συνεχίζοντας από την κεντρική πρόταση G_4 έχουμε την SLD-εξαγωγή του σχήματος ***Σχήμα 3.11***.

	Κεντρική πρόταση	**Πλευρική πρόταση**	**Αντικατάσταση**
G_4:	$\neg q(a,a)$	π_3: $q(X_4, Y_4) \leftarrow s(X_4, Y_4)$	$\theta_5 = \{X_4/a, Y_4/a\}$
G_5:	$\neg s(a,a)$		
	■ αποτυχία		

Σχήμα 3.11: SLD−εξαγωγή με επιλογή του πλέον δεξιού στοιχειώδους τύπου (οπισθοδρόμηση Α).

Έχουμε ξανά αποτυχία, οπότε οπισθοδρομεί στην προηγούμενη κεντρική πρόταση G_4 ακυρώνοντας την ενοποίηση που έκανε. Επειδή δεν υπάρχει άλλη πρόταση στο πρόγραμμα η κεφαλή της οποίας να ταιριάζει με τον επιλεχθέντα στοιχειώδη τύπο οπισθοδρομεί στην κεντρική πρόταση G_3 ακυρώνοντας την ενοποίηση που έκανε. Συνεχίζοντας από την κεντρική πρόταση G_3 έχουμε την SLD-απόρριψη του σχήματος ***Σχήμα 3.12***. Αυτή η SLD–εξαγωγή οδήγησε σε SLD–απόρριψη. Η υπολογισθείσα απάντηση αντικατάστασης είναι $\theta_1 \circ \theta_2 \circ \theta_6 \circ \theta_7 = \{X_1/a, Y_1/c, X_2/b, Y_2/c, Z_1/b, X/c, X_5/a, Y_5/b\}$ περιορισμένη στις μεταβλητές του $\neg p(\alpha, X)$ δηλαδή $\{X/c\}$.

	Κεντρική πρόταση	**Πλευρική πρόταση**	**Αντικατάσταση**
G_3:	$\neg(q(\alpha, Z_1) \wedge r(Z_1, X))$	π_5: $r(b, c)$	$\theta_6 = \{Z_1/b, X/c\}$
	$\neg q(a,b)$	π_2: $q(X_5, Y_5) \leftarrow r(X_5, Y_5)$	$\theta_7 = \{X_5/a, Y_5/b\}$
	$\neg r(a,b)$	π_4: $r(a,b)$	
	□ επιτυχία		

Σχήμα 3.12: SLD–εξαγωγή με επιλογή του πλέον δεξιού στοιχειώδους τύπου (οπισθοδρόμηση B).

Στα επόμενα, η λέξη στόχος αναφέρεται στην κεντρική πρόταση σε μια SLD–εξαγωγή. Επιπλέον θα χρησιμοποιούμε για κανόνα υπολογισμών την επιλογή του πλέον αριστερού στοιχειώδους τύπου από την κεντρική πρόταση.

Ορισμός 3.46

Έστω P ένα σύνολο από προγραμματικές προτάσεις, R ένας κανόνας υπολογισμών και G μία πρόταση στόχος. Όλες οι δυνατές SLD–εξαγωγές μπορούν να επιδειχθούν σε ένα SLD–δέντρο. Το ***SLD–δέντρο*** του G (χρησιμοποιώντας το P και τον R) ορίζεται ως εξής:

1. Η ετικέτα στη ρίζα του δέντρου είναι ο αρχικός στόχος G.
2. Εάν το δέντρο περιέχει ένα κόμβο με ετικέτα τον στόχο G_i και εάν υπάρχει μια μετονομασμένη προγραμματική πρόταση $C_i \in P$ τέτοια ώστε ο G_{i+1} εξάγεται από τον G_i (κεντρική πρόταση) και την C_i (πλευρική πρόταση) μέσω του R τότε ο κόμβος G_i έχει παιδί τον κόμβο G_{i+1}. Η ακμή που τους συνδέει έχει ως ετικέτα την πρόταση C_i.

Έστω P ένα πρόγραμμα και G ένας στόχος. Εάν διαφορετικοί κανόνες υπολογισμών εφαρμοστούν στο {P, G}, θα δημιουργηθούν διαφορετικά SLD–δέντρα αλλά αυτά τα δέντρα θα συμφωνούν στις υπολογισθείσες απαντήσεις αντικατάστασης.

Κάθε μονοπάτι σε ένα SLD–δέντρο είναι μια SLD–εξαγωγή. Μία SLD–εξαγωγή μπορεί να είναι πεπερασμένη ή μη-πεπερασμένη.

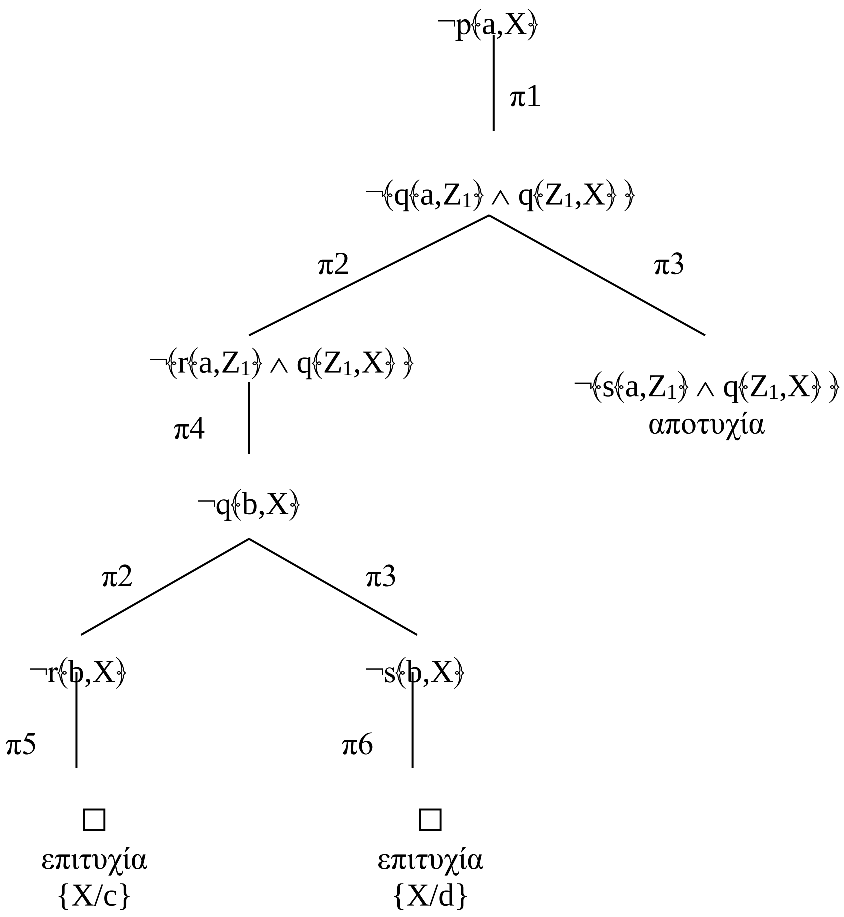
Ορισμός 3.47

Ένα μονοπάτι το οποίο τελειώνει σε άδεια πρόταση είναι μια ***SLD–απόρριψη***. Μία SLD–απόρριψη είναι μια ***επιτυχής SLD–εξαγωγή***. Μία ***ανεπιτυχής SLD–εξαγωγή*** είναι μια εξαγωγή η οποία τελειώνει σε ένα μη κενό στόχο G_K με την ιδιότητα ο επιλεχθείς από τον G_K στοιχειώδης τύπος να μην ενοποιείται με την κεφαλή καμίας πρότασης του προγράμματος.

Σε ένα SLD–δέντρο το κλαδί που αντιστοιχεί σε επιτυχή εξαγωγή ονομάζεται *επιτυχής κλάδος*. Το κλαδί που αντιστοιχεί σε ανεπιτυχή εξαγωγή ονομάζεται *ανεπιτυχής κλάδος*. Το κλαδί που αντιστοιχεί σε μη-πεπερασμένη εξαγωγή ονομάζεται *μη-πεπερασμένος κλάδος*.

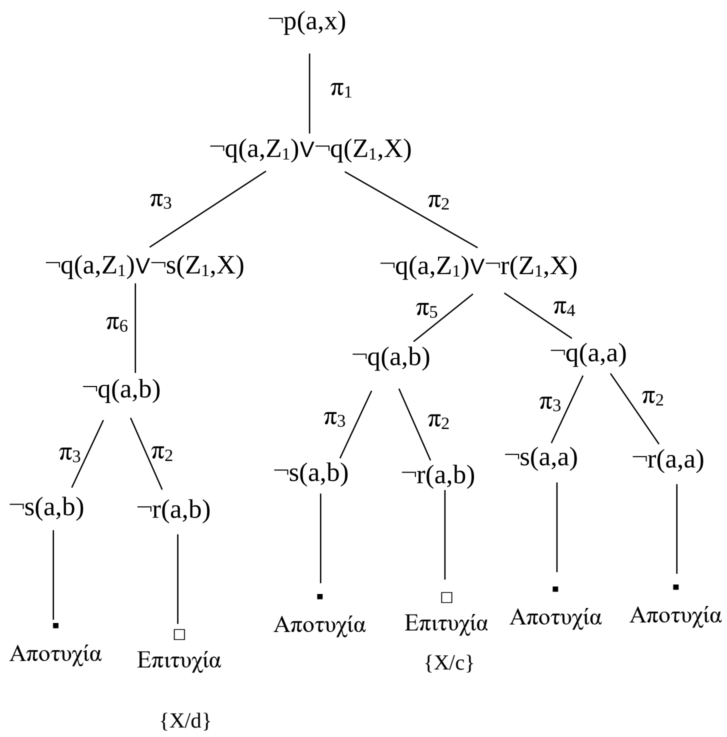
Παράδειγμα

Το SLD–δέντρο για το προηγούμενο παράδειγμα με κανόνα υπολογισμών τον πλέον αριστερό στοιχειώδη τύπο φαίνεται στο σχήμα **Σχήμα 3.13.**



Σχήμα 3.13: SLD–δέντρο αναζήτησης με κανόνα υπολογισμών τον πλέον αριστερό στοιχειώδη τύπο.

Το SLD–δέντρο για το προηγούμενο παράδειγμα με κανόνα υπολογισμών τον πλέον δεξιό στοιχειώδη τύπο φαίνεται στο σχήμα **Σχήμα 3.14**.



Σχήμα 3.14: SLD–δέντρο αναζήτησης με κανόνα υπολογισμών τον πλέον δεξιό στοιχειώδη τύπο.

Ορισμός 3.48
Ένας ***κανόνας αναζήτησης*** (***search rule***) είναι μια στρατηγική αναζήτησης ενός SLD–δέντρου για εύρεση επιτυχόντων κλάδων.

Ορισμός 3.49
Μία *διαδικασία SLD–απόρριψης* είναι ο αλγόριθμος της SLD–επίλυσης μαζί με τον καθορισμό ενός κανόνα υπολογισμών και ενός κανόνα αναζήτησης.

Από ένα SLD–δέντρο θέλουμε να βρούμε τις υπολογισθείσες απαντήσεις αντικατάστασης. Το σύνολο των απαντήσεων αντικατάστασης είναι ανεξάρτητο από τον κανόνα υπολογισμών. Η επιλογή του κανόνα αναζήτησης είναι σημαντική.

Θα συγκρίνουμε δύο στρατηγικές αναζήτησης, την *πλάτος–πρώτα* και την *βάθος–πρώτα*.

1. Η *πλάτος–πρώτα αναζήτηση* εγγυάται ότι θα βρει τους επιτυχείς κλάδους εάν υπάρχουν. Αυτή η στρατηγική θα βρει τις σωστές απαντήσεις αντικατάστασης σε κάθε περίπτωση. Ακόμα και αν υπάρχουν μη-πεπερασμένες εξαγωγές. Όμως το μέγεθος του δέντρου το οποίο πρέπει να κατασκευαστεί μεγαλώνει εκθετικά με το βάθος. Δηλαδή, αυτή η στρατηγική έχει μεγάλες απαιτήσεις μνήμης και δεν είναι αποτελεσματική.

2. Η *βάθος–πρώτα αναζήτηση* εγγυάται ότι θα βρει όλους τους επιτυχείς κλάδους εάν υπάρχουν μόνο όταν το SLD–δέντρο είναι πεπερασμένο. Δηλαδή, το SLD-δέντρο δεν έχει μη-πεπερασμένα μονοπάτια. Επιπλέον η μέθοδος είναι γρήγορη με μικρές απαιτήσεις μνήμης. Εάν το SLD–δέντρο δεν είναι πεπερασμένο η μέθοδος δεν εγγυάται ότι θα βρει όλες τις σωστές απαντήσεις αντικατάστασης.

Η πρότυπη (standard) Prolog χρησιμοποιεί για *κανόνα υπολογισμών* αυτόν που επιλέγει τον πλέον αριστερό στοιχειώδη τύπο του στόχου και για στρατηγική αναζήτησης την βάθος–πρώτα

3.11. Ασκήσεις

Άσκηση 1
Να εκφράσετε σχηματικά με σχέσεις συνόλων τη σημασιολογία των τύπων 1) $\forall X\ P(X) \Rightarrow Q(X)$, 2) $\forall X\ P(X) \Leftarrow Q(X)$ και 3) $\forall X\ P(X) \Leftrightarrow Q(X)$ όπου P(X) και Q(X) είναι τύποι.

Άσκηση 2
Τι ονομάζουμε στοιχειώδη (literal) τύπο; Δώστε 3 παραδείγματα στοιχειωδών τύπων.

Άσκηση 3
Τι ονομάζουμε πρόταση (clause); Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι προτάσεις; α) $\forall X \forall Y (p(X) \vee \neg q(X,Y))$. β) $\forall X \forall Y \forall Z (p(X,Z) \vee \neg q(Z) \vee \neg r(X,Y))$. γ) $\forall X \exists Y \forall Z (p(X,Z) \vee \neg q(Z) \vee \neg r(Y))$. δ) $\forall X \forall Y \forall Z (p(X,Z) \vee \neg q(Y,Z) \vee r(Z))$. ε) $\forall X \forall Y \forall Z (p(X,Z) \wedge \neg q(Y,Z) \wedge \neg r(Z))$.

Άσκηση 4
Τι ονομάζουμε προτάσεις Horn (Horn clauses); Ποιοι από τους παρακάτω τύπους είναι προτάσεις Horn α) $\forall X \forall Y (p(X) \vee \neg q(X,Y))$. β) $\forall X \forall Y \forall Z (p(X,Z) \vee \neg q(Z) \vee \neg r(X,Y))$. γ) $\forall X \forall Z\ p(X,Z)$. δ) $\forall X \forall Z (\neg p(X,Z) \vee \neg q(Z))$. ε) $\forall X \forall Y \forall Z (p(X,Z) \vee q(Y,Z) \vee \neg r(Z))$.

Άσκηση 5
α) Ποιές μορφές μπορεί να έχει μια πρόταση Horn (Horn clause) στον κατηγορηματικό λογισμό; β) Ποιές από τις παρακάτω προτάσεις δεν είναι προτάσεις Horn και γιατί;

$\forall X_1,\ldots,X_K (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m \vee \psi \vee \varphi)$ (ή ισοδύναμα $\forall X_1,\ldots,X_K (\psi \wedge \varphi \leftarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m))$

$\forall X_1,\ldots,X_K (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m \vee \psi)$)ή ισοδύναμα $\forall X_1,\ldots,X_K (\psi \leftarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m))$

$\forall X_1,\ldots,X_K\ \psi$ (ή ισοδύναμα $\forall X_1,\ldots,X_K (\psi \leftarrow \text{true})$)

$\forall X_1,\ldots,X_K (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m)$)ή ισοδύναμα $\neg\exists X_1,\ldots,X_K (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)$(

όπου $X_1,\ldots,X_K$ είναι μεταβλητές και $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$, ψ είναι ατομικοί τύποι.

Άσκηση 6
Τι ονομάζεται αντικατάσταση; Να εφαρμόσετε την αντικατάσταση $\Theta=\{X/f(a), Y/b\}$ στη παράσταση $E = p(f(X),g(Y)) \wedge q(r(X,Y))$.

Άσκηση 7
Έστω η παράσταση $E = p(a, f(Y), X) \vee \neg q(g(X, Y), b)$ και $\theta = \{X/Z, Y/f(b)\}$. Να υπολογίσετε το στιγμιότυπο $E\theta$.

Άσκηση 8
Έστω η παράσταση $E = p(X) \vee \neg q(X,Y)$. Να εφαρμόσετε την αντικατάσταση $\theta = \{X/g(a,Y), Y/f(b,Z)\}$ στην παράσταση E. Δηλαδή να βρείτε το $E\theta$ = ;.

Άσκηση 9
Έστω η παράσταση $E = p(X, f(Y))$ και η αντικατάσταση $\theta = \{X/Y, Y/g(b)\}$. Να δημιουργήσετε το στιγμιότυπο $E\theta$.

Άσκηση 10
Έστω η παράσταση $E = p(X, f(Y), Y)$ και η αντικατάσταση $\theta = \{X/g(Y), Y/g(b)\}$. Να δημιουργήσετε το στιγμιότυπο $E\theta$.

Άσκηση 11
Έστω οι παραστάσεις $E_1 = p(g(Y), f(X,h(X),Y))$, $E_2 = \neg\, p(X, f(g(Z), W, Z))$ και η αντικατάσταση $\theta = \{X/g(Z), W/h(g(Z)), Y/Z\}$. Να δημιουργήσετε τα στιγμιότυπα $E_1\theta$ και $E_2\theta$. Να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 12
Έστω η παράσταση $E = p(X) \vee \neg\, q(g(X,Y))$ και η αντικατάσταση $\theta= \{X/Y, Y/f(b)\}$. Να δημιουργήσετε το στιγμιότυπο $E\theta$.

Άσκηση 13
Να αποδείξετε ότι οι παραστάσεις $E = p(f(X), a) \vee q(b,X,Y)$ και $F = p(f(W), a) \vee q(b,W,V)$ είναι παραλλαγές.

Άσκηση 14
Να αποδείξετε γιατί οι παραστάσεις $E = p(g(a,X),f(X,Y))$ και $F = p(g(a,X),f(X,X))$ δεν είναι παραλλαγές. Δηλαδή να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν αντικαταστάσεις θ και σ τέτοιες ώστε $E = F\,\sigma$ και $F = E\,\theta$.

Άσκηση 15
Πότε μια αντικατάσταση θ_1 είναι *περισσότερο γενική* από μια αντικατάσταση θ_2; Να γράψετε δυο αντικαταστάσεις θ_1 και θ_2 ώστε η θ_1 να είναι πιο γενική από την θ_2, δηλαδή $\theta_2 \leq \theta_1$

Άσκηση 16
Έστω E_1 και E_2 δύο απλές εκφράσεις. Τι είναι ένας *ενοποιητής* των E_1 και E_2 και τι ονομάζεται ο *πλέον γενικός ενοποιητής* των E_1 και E_2.

Άσκηση 17
Για τις παραστάσεις $E_1 = p(f(X),Y)$ και $E_2 = p(Z,a)$ να βρείτε τρεις ενοποιητές ένας από τους οποίους θα είναι ο πλέον γενικός ενοποιητής.

Άσκηση 18
Τι ονομάζουμε «ο πλέον γενικός ενοποιητής» των παραστάσεων E_1 και E_2. Έστω οι ατομικοί τύποι $A_1 = p(X,f(X),a)$ και $A_2 = p(b,Y,Z)$. Να βρείτε τον πλέον γενικό ενοποιητή των A_1 και A_2.

Άσκηση 19
Έστω οι δύο ατομικοί τύποι $p(g(a),g(X))$ και $p(Y,g(b))$. Εφαρμόσετε ένα αλγόριθμο ενοποίησης για να βρείτε τον πλέον γενικό ενοποιητή τους θ. Εφαρμόσετε την αντικατάσταση θ που βρήκατε στους δύο ατομικούς τύπους και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 20

Έστω οι δύο ατομικοί τύποι p(g(a),g(X)) και p(Y,Y). Εφαρμόσετε ένα αλγόριθμο ενοποίησης για να βρείτε τον πλέον γενικό ενοποιητή τους θ. Εφαρμόσετε την αντικατάσταση θ που βρήκατε στους δύο ατομικούς τύπους και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 21
Έστω οι δύο ατομικοί τύποι p(g(a),X) και p(Y,f(Z)). Εφαρμόσετε ένα αλγόριθμο ενοποίησης για να βρείτε τον πλέον γενικό ενοποιητή τους θ. Εφαρμόσετε την αντικατάσταση θ που βρήκατε στους δύο ατομικούς τύπους και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

Άσκηση 22
Να αποδείξετε με την μέθοδο του συνόλου ασυμφωνίας (*disagreement set*). την ενοποίηση των παρακάτω ατομικών τύπων

- A_1 = p(X, f(Y,a), a) και
- A_2 = p(g(Y), f(Z,Y), Z).

Σε κάθε βήμα της απόδειξης σας να φαίνονται α) η αντικατάσταση και β) το σύνολο ασυμφωνίας. Στο τέλος, η απόδειξης σας θα πρέπει να έχει δημιουργήσει τον πλέον γενικό ενοποιητή των ατομικών τύπων A_1 και A_2 και το μονοσύνολο που δημιουργείται εφόσον οι ατομικοί τύποι ενοποιούνται.

Άσκηση 23
Έστω οι προτάσεις $\Pi_1 = p(f(a), g(X)) \vee q(g(X), b)$ και $\Pi_2 = \neg p(f(a), g(b)) \vee \neg r(X, a)$ και θ ={X/b}. Να βρείτε την επιλύουσα των Π_1 και Π_2.

Άσκηση 24
Να ορίσετε τον συμπερασματικό κανόνα της «επίλυσης» στον κατηγορηματικό λογισμό και να τον εφαρμόσετε στις εξής προτάσεις (τύπους).

1. $\neg p(X,Y) \vee q(a,Y)$ και $r(a,Z) \vee \neg q(Z,b)$. Ποια θα είναι η νέα πρόταση που θα δημιουργηθεί;
   $\neg p(X,Y) \vee q(a,Y),\ r(a,Z) \vee \neg q(Z,b) \vdash$;
2. $\neg p(X,Y) \vee q(a,b)$, $r(X,Y) \vee \neg q(a,Y)$. Ποια θα είναι η νέα πρόταση που θα δημιουργηθεί;
   $\neg p(X,Y) \vee q(a,b),\ r(X,Y) \vee \neg q(a,Y) \vdash$;

Άσκηση 25
Να εφαρμόσετε τον συμπερασματικό κανόνα της «επίλυσης» στις προτάσεις (τύπους) $\neg p(X,b) \vee q(a,b)$ και $r(a,a) \vee \neg q(a,b)$. Ποια θα είναι η νέα πρόταση που θα δημιουργηθεί;

$$\neg p(X,b) \vee q(a,b),\ r(a,a) \vee \neg q(a,b) \vdash ;$$

Άσκηση 26
Έστω Π ένα σύνολο προτάσεων του κατηγορηματικού λογισμού το οποίο ονομάζεται *προτάσεις εισόδου*. Γράψετε μια γενική διαδικασία *απαγωγής σε άτοπο* η οποία να στηρίζεται στον *κανόνα της επίλυσης (resolution).*

Άσκηση 27
Τι είναι στρατηγική σ' ένα σύστημα αυτόματων συλλογισμών και ποιες κύριες κατηγορίες διακρίνουμε; Που στηρίζονται οι στρατηγικές συστημάτων τα οποία χρησιμοποιούν τον κανόνα της επίλυσης;

Άσκηση 28

Αναφέρετε και περιγράψετε τρεις στρατηγικές συστημάτων που χρησιμοποιούν τον κανόνα της επίλυσης. Η περιγραφή σας να αναφέρει πως επιλέγονται οι συγκρουόμενες προτάσεις.

Άσκηση 29

Έστω το παρακάτω σύνολο προτάσεων $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ όπου:

C_1 : $\neg p(a)$

C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$

C_3 : $p(X) \vee \neg r(X)$

C_4 : $q(X) \vee r(X)$

Να εφαρμόσετε την διαδικασία απαγωγής σε άτοπο και στρατηγική επιλογής των συγκρουόμενων προτάσεων για εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης την «στρατηγική της μονάδος (unit strategy)». Ο στόχος τον οποίο πρέπει να αποδείξετε είναι ο $\neg p(a)$. Στην περιγραφή σας πρέπει να φαίνονται τα εξής: α) Οι παραγόμενες προτάσεις. β) Το νέο σύνολο προτάσεων. γ) Η αντικατάσταση. δ) Οι συγκρουόμενες προτάσεις.

Άσκηση 30

Έστω το παρακάτω σύνολο προτάσεων $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ με κεντρική πρόταση την C_1.

C_1 : $\neg p(a)$

C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$

C_3 : $p(X) \vee \neg r(X)$

C_4 : $q(X) \vee r(X)$

Να εφαρμόσετε την διαδικασία απαγωγής σε άτοπο και στρατηγική επιλογής των συγκρουόμενων προτάσεων για εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης την «*στρατηγική της γραμμικής επίλυσης*» (*Linear Resolution*)» μέχρι να βρεθεί μια λύση για το στόχο. Στην περιγραφή σας πρέπει να φαίνονται τα εξής: α) Οι παραγόμενες προτάσεις. β) Το νέο σύνολο προτάσεων. γ) Η αντικατάσταση. δ) Οι συγκρουόμενες προτάσεις.

Άσκηση 31

Έστω το παρακάτω σύνολο προτάσεων $\Pi = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ με κεντρική πρόταση την C_1.

C_1 : $\neg p(f(a))$

C_2 : $p(X) \vee \neg q(X)$

C_3 : $p(X) \vee \neg r(f(X))$

C_4 : $q(f(a)) \vee p(f(a))$

Να εφαρμόσετε την διαδικασία απαγωγής σε άτοπο και στρατηγική επιλογής των συγκρουόμενων προτάσεων για εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης την «*στρατηγική της γραμμικής επίλυσης*» (*Linear Resolution*)» μέχρι να βρεθεί μια λύσει για το στόχο.. Στην περιγραφή σας πρέπει να φαίνονται τα εξής: α) Οι παραγόμενες προτάσεις. β) Το νέο σύνολο προτάσεων. γ) Η αντικατάσταση. δ) Οι συγκρουόμενες προτάσεις. Μπορείτε να κάνετε και σχηματική περιγραφή της εξαγωγής.

Άσκηση 32

Έστω το πρόγραμμα $\Pi=\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6\}$ και ο στόχος $G = \{\neg p(a, X)\}$

π_1 : $p(X, Y) \leftarrow q(X, Z) \wedge q(Z, Y)$

π_2 : $q(X, Y) \leftarrow r(X, Y)$

π_3 : $q(X, Y) \leftarrow s(X, Y)$

π_4 : $r(a,b)$

π_5 : r(b,c)
π_6 : s(b,d)

Δώστε δύο SLD-εξαγωγές για τον στόχο G και το πρόγραμμα Π χρησιμοποιώντας τους εξής κανόνες υπολογισμών:

α. Επιλογή του πλέον αριστερού στοιχειώδους τύπου.

β. Επιλογή του πλέον δεξιού στοιχειώδους τύπου.

Δηλαδή, θα παράγετε μια πεπερασμένη SLD–εξαγωγή $G_0,\ldots,G_n$ όπου το G_n είναι η άδεια πρόταση ($\square$).

Άσκηση 33

Έστω το παρακάτω πρόγραμμα **Π** και οι στόχοι **Σ1** και **Σ2**. Στο πρόγραμμα **Π** το κατηγόρημα gonios(X, Y) είναι αληθές εάν ο X είναι γονιός του Y και το κατηγόρημα progonos(X, Y) είναι αληθές εάν ο X είναι πρόγονος του Y.

Πρόγραμμα Π:

π_1:gonios(yannis, kostas).
π_2:gonios(yannis, eleni).
π_3:gonios(kostas, manos).
π_4:gonios(kostas, anna).
π_5:gonios(manos, nikos).
π_6:progonos(X, Y) :- gonios(X, Y). **ή** progonos(X, Y) $\vee\neg$ gonios(X, Y)
π_7:progonos(X, Y) :- gonios(X, Z), progonos(Z, Y). **ή**
progonos(X, Y) $\vee\neg$ gonios(X, Z) $\vee\neg$ progonos(Z, Y).

Στόχος Σ_1: ?- progonos(yannis,eleni). ή $\neg$ progonos(yannis,eleni)
Στόχος Σ_2: ?- progonos(yannis, anna). ή $\neg$ progonos(yannis, anna)

Για κάθε ***Σ1*** και **Σ2** να εκτελέσετε με λεπτομέρεια όλα τα βήματα εξαγωγής συμπεράσματος (deduction) με επίλυση (resolution) τα οποία χρειάζονται να εκτελεστούν μέχρι την ικανοποίηση του αντίστοιχου αρχικού στόχου. Σε κάθε βήμα επίλυσης να φαίνονται με λεπτομέρεια τα εξής: 1) Η κεντρική πρόταση. 2) Η μετονομασμένη πρόταση του προγράμματος **Π** που συμμετέχει στο βήμα της επίλυσης ως πλευρική πρόταση. 3) Οι στοιχειώδεις τύποι (literals) οι οποίοι ενοποιούνται, η εφαρμογή της ενοποίησης και η αντικατάσταση θ_i που θα προκύψει. 4) Η εφαρμογή της αντικατάστασης θ_i στη κεντρική πρόταση (central clause) και στη πλευρική πρόταση (side clause). 5) Αναλυτικά η νέα κεντρική (central) πρόταση που θα προκύψει από την εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης. Να σημειωθεί ότι ο στόχος «?- progonos(yannis,eleni).» είναι ισοδύναμος με τη πρόταση « $\neg$ progonos(yannis,eleni). » και ο στόχος «?- progonos(yannis, anna).» είναι ισοδύναμος με τη πρόταση «$\neg$ progonos(yannis, anna)».

Ο *κανόνας υπολογισμών (computation rule)* που θα χρησιμοποιήσετε είναι «*επιλογή πάντα του πρώτου στοιχειώδη τύπου (literal), δηλαδή του πλέον αριστερού στοιχειώδη τύπου*». Η επιλογή των προτάσεων από το πρόγραμμα να γίνεται με τη σειρά από την $1^{η}$ πρόταση π_1 προς το τη τελευταία πρόταση π_7 όπως γίνεται και στη Prolog.

Η απάντηση σας να έχει την εξής δομή.

Αναλυτικά η εξαγωγής συμπεράσματος με επίλυση για το στόχο Σ1.

Βήμα 1.

1) Η κεντρική πρόταση Σ_1 = $\Sigma_{κι}$.
2) Η μετονομασμένη πλευρική πρόταση $\Pi_{\pi 1}$.
3) Οι στοιχειώδεις τύποι (literals) που ενοποιούνται είναι $L1_1$ = .. και $L2_1$ = ... Η εφαρμογή της ενοποίησης και η αντικατάσταση θ_1 που θα προκύψει, δηλαδή unify($B1_1$, $B2_1$) = θ_1 = {..}

4) Η εφαρμογή της αντικατάστασης θ_1 στη κεντρική πρόταση και στη πλευρική πρόταση θα είναι $\Sigma_{\kappa\iota}\,\theta_1 = \Sigma'_{\kappa 1}$ και $\Pi_{\pi 1}\,\theta_1 = \Pi'_{\pi 1}$ αντίστοιχα.
5) Η νέα κεντρική (central) πρόταση που θα προκύψει από την εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης στις προτάσεις $\Sigma'_{\kappa 1}$ και $\Pi'_{\pi 1}$ είναι $\Sigma_{\kappa 2}$.

$$\Sigma'_{\kappa 1}, \Pi'_{\pi 1} \vdash \Sigma_{\kappa 2}$$

Βήμα 2.

1) Η κεντρική πρόταση $\Sigma_{\kappa 2}$.
2) Η μετονομασμένη πλευρική πρόταση $\Pi_{\pi 2}$.
3) Οι στοιχειώδεις τύποι (literals) που ενοποιούνται $L1_2$ και $L2_2$. Η εφαρμογή της ενοποίησης και η αντικατάσταση θ_2 που θα προκύψει, δηλαδή unify($B1_2$, $B2_2$) = θ_2 = {..}
4) Η εφαρμογή της αντικατάστασης θ_2 στη κεντρική πρόταση και στη πλευρική πρόταση θα είναι $\Sigma_{\kappa 2}\,\theta_2 = \Sigma'_{\kappa 2}$ και $\Pi_{\pi 2}\,\theta_2 = \Pi'_{\pi 2}$ αντίστοιχα.
5) Η νέα κεντρική (central) πρόταση που θα προκύψει από την εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης στις προτάσεις $\Sigma'_{\kappa 2}$ και $\Pi'_{\pi 2}$ είναι $\Sigma_{\kappa 3}$.

$$\Sigma'_{\kappa 2}, \Pi'_{\pi 2} \vdash \Sigma_{\kappa 3}$$

Βήμα 3.

:

Βήμα N_1

:

Αναλυτικά η εξαγωγής συμπεράσματος με επίλυση για το στόχο Σ_2.

Βήμα 1.

:

Βήμα N_2

:

Βιβλιογραφία

[Genesereth, Nilsson 1987], Michael Genesereth, Nils Nilsson, Logical Foundations of Artificial Intelligence, Morgan Kaufmann Publishers, 1987.

[Hogger 1990], Christopher Hogger, Essentials of Logic Programming, Clarendon Press, 1990.

[Lloyd 1987] John Lloyd, Foundations of Logic Programming, Springer-Verlag, second edition, 1987.

[Russell, Norvig 1995], Stuart Russell, Peter Norvig, Artificial Intelligence: A Modern Approach, Prentice Hall International, 1995.

[Sterling, Shapiro 1997], Leon Sterling, Ehud Shapiro, The Art of Prolog, second edition, The MIT Press, 1997.

Παράρτημα Α: Ευρετήριο Αγγλικής – Ελληνικής Ορολογίας

	Αγγλικός Όρος	Ελληνικός Όρος
A.	associativity	προσεταιριστικότητα
	assumption	υπόθεση
	assertion	ισχυρισμός
	arity	πληθυκότητα, βαθμός
	atomic formula	ατομικός τύπος
	argument	όρισμα
	atom	ατομικός όρος
B.	breadth – first	πλάτος–πρώτα, πρώτα σε πλάτος
	backward reasoning	προς τα πίσω συλλογισμός
	backward chaining	προς τα πίσω αλυσίδα
	binding	δέσμευση
	biconditional	διπλή υπόθεση, ισοδυναμία
	bounded	δεσμευμένο
C.	contradiction	αντίφαση, λογικά ψευδής
	contingent	επαληθεύσιμος
	compiler	μεταγλωττιστής
	consistent	συνεπές
	contradiction	αντίφαση, αντιλογία, λογικά ψευδής
	conditional	υποθετική
	clause	πρόταση, προγραμματικός τύπος
	complete	πλήρης
	cut	αποκοπή, κλάδεμα, τομή
D.	depth – first	βάθος–πρώτα, πρώτα σε βάθος
	deduction	εξαγωγή συμπεράσματος, παραγωγή
	decidable	αποφασιστικό
	domain	πεδίο, πεδίο ορισμού
	deductive	συμπερασματικός, -ή, -ό, παραγωγικός
	deductive reasoning	συμπερασματική λογική, παραγωγική λογική
E.	equivalence	ισοδυναμία
F.	forward reasoning	προς τα εμπρός συλλογισμός
	forward chaining	προς τα εμπρός αλυσίδα
	formula	τύπος
	formal logic	τυπική λογική
	function	όνομα συνάρτησης, σύμβολο συνάρτησης
	formal reasoning	τυπική συλλογιστική
G.	goal	στόχος, τύπος στόχος
	ground representation	αναπαράσταση σε βασικούς όρους
	goal clause	πρόταση στόχος

	ground atomic formula	βασικός ατομικός τύπος
	ground substitution	βασική αντικατάσταση
	ground clause	βασική πρόταση
	ground term	βασικός όρος
	ground instance	βασικό στιγμιότυπο
H.	heuristic	ευρετικός, ευριστικός, ευρηματικός
I.	idempotent	αυτοαπορρόφηση
	instance	στιγμιότυπο
	inference	εξαγωγή συμπεράσματος, συμπέρασμα
	inference rule	συμπερασματικός κανόνας
	interpretation	ερμηνεία
	interpreter	μεταφραστής
	infix	μεσοθεματικός, μεσόθεμα
	inconsistent	ασυνεπές
	identity substitution	ταυτοτική αντικατάσταση
	implication	συνεπαγωγή
J.		
K.		
L.	logical implication	σημασιολογική συνέπεια, λογική συνέπεια, συνέπεια
	logical consequence	σημασιολογική συνέπεια, λογική συνέπεια, συνέπεια
	literal	στοιχειώδης τύπος
M.	modus ponens	κανόνας απόσπασης
	most general unifier (mgu)	πλέον γενικός ενοποιητής (πγτ)
	matching	ταύτιση, ταίριασμα
N.	non – ground representation	αναπαράσταση σε μη-βασικούς όρους
O.		
P.	problem solving	επίλυση προβλήματος
	problem reduction	απλοποίηση προβλήματος
	pruning	αποκοπή
	propositional calculus	προτασιακός λογισμός
	predicate calculus	κατηγορηματικός λογισμός
	prefix	προθεματικός, πρόθεμα
	postfix	μεταθεματικός, μετάθεμα
	prenex	δεσμευμένη εμπρός
	premise	υπόθεση
	program clause	προγραμματική πρόταση
	predicate	κατηγόρημα

Q.	quantifier	ποσοδείκτης
	query	ερώτηση
R.	resolution	επίλυση
	reduction ad absurdum	απαγωγή σε άτοπο
	resolvent	επιλύουσα
	refutation	απόρριψη
	renaming	μετονομασία
	renaming substitution	αντικατάσταση μετονομασίας
	reasoning	συλλογιστική
S.	search	αναζήτηση λύσης
	state – space	χώρος καταστάσεων, διάστημα καταστάσεων
	satisfiable	ικανοποιήσιμο, επαληθεύσιμο
	standardizing variables apart	κανονικοποίηση/σταθεροποίηση μεταβλητών
	sound	σωστή
	substitution	αντικατάσταση
	subformula	υποτύπος
T.	tautology	ταυτολογία
	term	όρος
	tuple	πλειάδα
U.	unsatisfiable	μη-ικανοποιήσιμο, μη-επαληθεύσιμο
	unifier	ενοποιητής
	unification	ενοποίηση
V.	valid	ορθή, ορθότητα, έγκυρο, λογικά αληθής
	variant	παραλλαγή
W.	well – formed	καλά διαμορφωμένος
X.		
Y.		
Z.		

Ευρετήριο

Κ