(13/4/21)

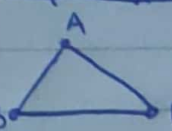
① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** **ΔΙΑΛΕΞΗ #8**

• ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ (2ο μάθημα)

Υπενθύμιση: trail = path , circuit = circle

• **Ορισμός Κύκλου (σε συνεκτικό G):** (διαφέρει από βιβλίο σε βιβλίο)
Κάθε κλειστή διαδρομή (κλειστή = αρχίζει κ' τελειώνει στην ίδια κορυφή) έτσι ώστε να διατρέχει όλες τις ακμές μία φορά, καλείται κύκλος. (και κύκλος Euler)

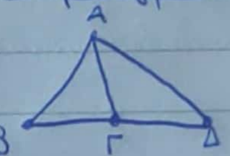
• **Παράδειγμα 1:**



(μη διατεταγμένο)

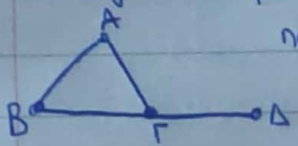
$|V|=3$, $|E|=3$
Κύκλος: ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ

• **Παράδειγμα 2:**



$|V|=4$, $|E|=5$
Κύκλος ? ~ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ (ΑΥΤΟΣ όχι)
(H/W: Υπάρχει κύκλος ?)
↳ (Υπόδειξη = ΝΑΙ)

• **Παράδειγμα 3:**
Αν φύγει η ακμή ΑΔ έχουμε το ° που δεν έχει κύκλο. (H/W: check)



Τότε καλούμε την ΑΔ **γέφυρα** (bridge)

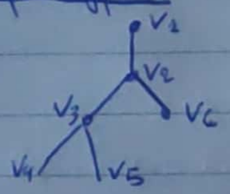
• **H/W:** Δείτε στο G του παρ. 2 αν έχουμε άλλες γέφυρες.

• **Ορισμός Δέντρου (Tree):**
Αν ένα G δεν έχει κανένα κύκλο λέγεται ακυκλικό (acyclic). Το συνεκτικό ακυκλικό ονομάζεται δέντρο T.

• **Ορισμός Δάσους:**
Ένα ακυκλικό G μη συνεκτικό ονομάζεται δάσος. (Forest)

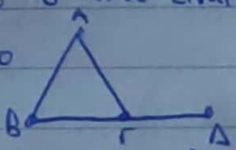
- **Ορισμός φύλλου:**
Κάθε κορυφή ενός T με deg (= βαθμός) = 1 ονομάζεται φύλλο.

- **Παράδειγμα 1:**



Προφανώς αυτό το G είναι T (γιατί;)
φύλλα = $\{V_1\}$

- **Παράδειγμα 2:**
Έστω G_1 το G (που είναι T) του παρ. 2
Έστω G_2 το

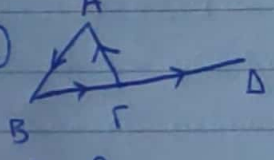


που είδαμε ότι είναι και αυτό T.

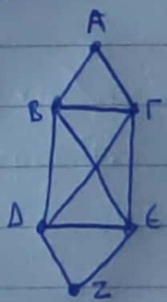
Το $G = G_1 \cup G_2$ έχει δύο δέντρα, άρα το G είναι δάσος
Το G_2 δεν έχει φύλλα.

- **SOS** - **Το κριτήριο (ή Θεώρημα) του Euler για την ύπαρξη κύκλου σε ένα συνεκτικό G:**
Ένα G έχει κύκλο (Euler) αν και μόνο αν για τις κορυφές ή καμία ή ακριβώς δύο έχουν περιττό βαθμό ή όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.

- **Παραδείγματα** (Οι γέφυρες του Κένισμπεργκ θα γίνουν στις 20/4/21)

① 

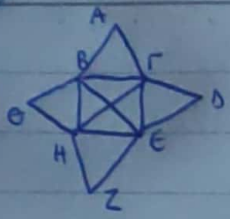
deg A = 2
deg B = 2
deg Δ = 0
deg Γ = 3

② 

$$\left.\begin{array}{l} \deg A = 2 \\ \deg Z = 2 \\ \deg B = 4 \\ \deg \Gamma = 4 \\ \deg \Delta = 4 \\ \deg E = 4 \end{array}\right\}$$

Όλες οι κορυφές έχουν άρτιο βαθμό.
⇒ Υπάρχει κύκλος Euler (H/W: Βρείτε τον.)

③

③ 

$\deg A = \deg \Delta = \deg Z = \deg \Theta = 2$
$\deg B = 5 = \deg \Gamma = \deg H = \deg E$ $\Bigg\}$ Άρα δεν έχει κύκλο Euler (δεν σχηματίζεται με μονοκονδυλιά)

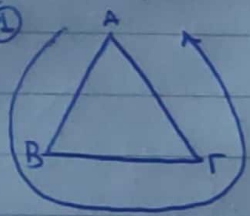
- **Ορισμός κύκλου Hamilton:**

Κάθε κλειστή διαδρομή (close path) που επισκέπτεται όλες τις κορυφές μία μόνο φορά (εκτός της αρχικής = τελικής) καλείται κύκλος Hamilton.

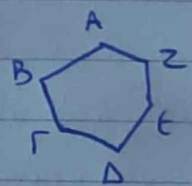
- **Παρατήρηση:**

Δεν διαθέτουμε κριτήριο ανάλογο με εκείνο του Euler.
Αυτό (η ανίχνευση κύκλου Hamilton) έχει αποδειχθεί με Η/Υ νέας γενιάς ότι είναι NP hard problem.
Ενώ αντιθέτως η ανεύρεση κύκλου Euler δεν είναι NP hard!

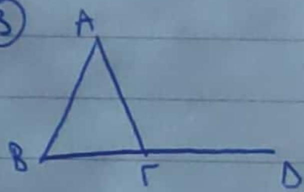
- **Παραδείγματα:**

① 

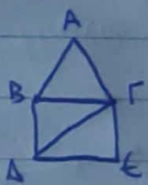
Α,Β,Γ δίνει κύκλο Hamilton

② 

Προφανώς έχει κύκλο Hamilt.

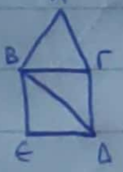
③ 

ΔΕΝ έχει κύκλο Hamilton

- **H/W:**  Δοκιμάστε για κύκλο Hamilton.

④

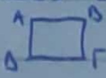
- **Ασκήσεις:**

① 

Βρείτε εφόσον υπάρχουν μερικές γέφυρες του G.

② Υπάρχει απλό γράφημα (όχι multiplicity σε ακμές!) με 5 κορυφές βαθμών 3, 3, 2, 2, 2;

↳ Υπόδειξη: Ξεκινήστε με κύκλο μήκους 5 όπου θα προσθέσετε μία επιπλέον ακμή.

↳ Μήκος κύκλου = πλήθος ακμών π.χ. 

(κύκλος μήκους = 4)

δύσκολη

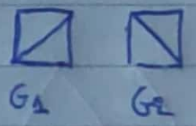
③ Έστω απλό G με τουλάχιστον 2 κορυφές → $(|V| \geq 2)$

Δείξτε ότι υπάρχουν 2 κορυφές με τον ίδιο βαθμό.

εύκολη

④ 

Υπάρχει κύκλος Euler? Αν ναι βρείτε τον.

⑤ 

Έστω $G = G_1 \cup G_2$.

Έχουμε δάσος; Αν ναι, πόσα δέντρα κ' πόσα φύλλα;

⑥ Συνέχεια της λυμένης άσκησης με την $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ και $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0$ $k \geq n$

Το ερώτημα για x να δίνει $a_0 = 0$ υπονοεί αν $F(x) = 0$ ...

Επίσης βρείτε τι σημαίνει αν $a_0 = 1$.

⑦ Αν $F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ με $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 0$ και $a_k = 2$ $\forall k \geq 3$

Βρείτε στην απλούστερη δυνατή μορφή την $F(x)$.

⑧ Δείξτε ότι κάθε συνεκτικό G με $|V| = n$ κορυφές, έχει $|E| \geq n-1$

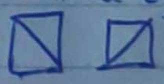
5

$\cong$

- <u>Ορισμός Ισόμορφων Γραφημάτων</u>

Λέμε ότι $G_1 \cong G_2$ αν υπάρχει f αμφιμονοσήμαντη (1-1) και επί έτσι ώστε: $f: V_1 \rightarrow V_2$ και $f: E_1 \rightarrow E_2$

Ασκ. 9 Είναι τα εξής γραφήματα ισόμορφα;



Ασκ. 10 Είναι τα T_1, T_2 ισόμορφα;