(16/3/21)

① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** **ΔΙΑΛΕΞΗ 4**

- **Διόρθωση για το μ(4)** – (διαμέριση του 4).

$\mu(1)=1$
$\mu(2)=2$
$\mu(3)=3$
$\mu(4)=5 \begin{cases} 4 \\ 3+1 \\ 2+2 \\ 1+1+1+1 \\ 2+1+1\ (?) \end{cases}$

Πάντως το $\mu(n) \uparrow$ ταχύτερα από το n και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\mu(n)} = 0$

Δεν υπάρχει κλειστός τύπος για το $\mu(n)$.
Υπάρχει προσεγγιστικός τύπος (με 1-1.5% επιτυχία) . . . . . .

Στο μέρος Γ αν προλάβουμε θα πούμε πως με χρήση των γεννητριών συναρτήσεων (generating functions) για σχετικά μικρά ή χωρίς Η/Υ ή για όλα τα n με καλό Η/Υ μπορούμε να βρούμε το $\mu(n)$ (μέθοδος Euler?)

- **ΛΥΣΗ H/W:**

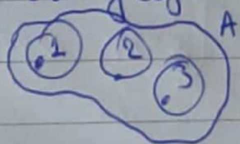
Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΔΩΔΕΚΑΔΑ;

Έχουμε: 3Δ, 2Α } Τύπος $= \frac{8!}{3!2!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot\cancel{4}^{2}\cdot\cancel{3!}}{\cancel{3!}\cdot\cancel{2}} = 56\cdot60 = 3.360$

- **ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ** (Αριθμοί Bell) – (Partitions of sets)

→ **Ορισμός:** Αν $|A|=n$, τότε διαμέριση του Α είναι μία συλλογή $\{A_1,\dots,A_k\}$ μη κενών ανά δύο ξένων υποσυνόλων του Α.

$A = \bigcup_{n=1}^{k} A_n$



$n=3$

Διαμερίσεις
- A
- $\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$
- $\{\{1,2\},\{3\}\}$
- $\{\{1,3\},\{2\}\}$
- $\{\{2,3\},\{1\}\}$

} 5 διαμερίσεις

② (Αριθμός Bell)

- Αν b_n ο αριθμός των διαμερίσεων όταν $|A|=n$, ορίζουμε $b_0 = 1$. κενό

- Παραδείγματα (H/W):

$b_1 = 1$
$b_2 = 2$
$b_3 = 5$
$\to b_4 = ?$

ΛΙΣΤΑ

- Αναδρομικός Τύπος του Bell (recursive formula)

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k$$

"Διωνυμικοί συντελεστές Pascal"

- $n=3$

$$b_4 = \binom{3}{0} b_0 + \binom{3}{1} b_1 + \binom{3}{2} b_2 + \binom{3}{3} b_3$$
$$= b_0 + 3b_1 + 3b_2 + b_3$$
$$= 1 + 3 + 6 + 5 = 15$$

$(b_4 = 15)$

- H/W: Καταγράψτε τις διαμερίσεις του $A = \{a, \beta, \gamma, \delta\}$ (πρέπει να είναι 15)

SOS
- SOS Παράδειγμα: Βρείτε το b_5:

ΛΙΣΤΑ

$b_0 = 1$ (εξ ορισμού)
$b_1 = 1$
$b_2 = 2$
$b_3 = 5$
$b_4 = 15$

$$b_5 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} b_k =$$
$$= b_0 + 4b_1 + 6b_2 + 4b_3 + b_4$$
$$= 1 + 4\cdot 1 + 6\cdot 2 + 4\cdot 5 + 15 = 52$$

- Παρατήρηση:

Όταν $n\uparrow$ τότε $b_n\uparrow$ πολύ ταχύτερα και μάλιστα $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b_n} = 0$

Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΕΓΚΛΕΙΣΜΟΥ ΑΠΟΚΛΕΙΣΜΟΥ
(The Principle of inclusion exclusion)

→ Γενική διατύπωση: Για μας τα προβλήματα θα είναι για $n=2$ ή 3.

• A_v $A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ("ένωση") $\Rightarrow |A| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{i=j} |A_i \cap A_j| - \sum_{\substack{i\neq j \\ \neq k}} |A_i \cap A_j \cap A_m| - \dots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{k=1}^{k} A_i\right|$

(πεπερασμένα σύνολα)

• Για $n=2$.

$A = B \cup \Gamma \Rightarrow$

$|A| = |B| + |\Gamma| - |B \cap \Gamma|$

• Για $n=3$.

$A = B \cup \Gamma \cup \Delta \Rightarrow$

$|A| = |B| + |\Gamma| + |\Delta| - |B \cap \Gamma| - |B \cap \Delta| - |\Gamma \cap \Delta| + |B \cap \Gamma \cap \Delta|$

SOS • **Παράδειγμα (SOS):**

Σε μια τάξη υπάρχουν 25 φοιτητές που παίρνουν μαθηματικά (ίσως κ' άλλα μαθήματα), 20 που παίρνουν φυσική, 15 που παίρνουν Χημεία, ενώ ξέρουμε ότι
→ 10 παίρνουν και Μ (Μαθηματικά) και Φ (φυσική).
→ 5 » » Μ (») και Χ (Χημεία).
→ 2 παίρνουν και τα 3 (Μ και φ και Χ)

Πόσοι είναι οι φοιτητές της τάξης;

$|\text{Τάξη}| = 25 + 20 + 15 - 10 - 5 - 5 + 2$ ($n=3$)
$= 42$

Επαναληπτικές Ασκήσεις:

1. Βρείτε 4 σημεία εντός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς 1m, έτσι ώστε να υπάρχουν (τουλάχιστον) 2 σημεία απ' αυτά να έχουν απόσταση $> 1/2$ m.

2. Στο τρίγωνο της άσκ. 1 παίρνουμε n^2+1 σημεία. Δείξτε ότι υπάρχουν 2 (τουλάχιστον) σημεία απ' αυτά με απόσταση $\leq 1/n$ m.

3. Από n τυχαίους ακεραίους, δείξτε ότι πάντα μπορούμε να πάρουμε από έναν ως n, το άθροισμα των οποίων θα διαιρείται με n.

4. Αν $|A|=n$, $n \geq 2$ και μία διαμέριση του A αποτελείται από m υποσύνολα, $m<n$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα υποσύνολο της εν λόγω διαμέρισης με 2 στοιχεία.