

# Λογικός Προγραμματισμός

---

**Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής**  
**[mmarak@cs.hmu.gr](mailto:mmarak@cs.hmu.gr)**

**Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών**  
**Σχολή Μηχανικών**  
**Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο**

# Λογικός Προγραμματισμός

## Μάθημα 2

### □ 2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

## 2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό (Μέρος Α)

- ✓ 2.1 Εισαγωγή (Μέρος Α).
- ✓ 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους (Μέρος Α).
- ✓ 2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων (Μέρος Β).
- ✓ 2.4. Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων (Μέρος Β).
- ✓ 2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων (Μέρος Β).
- ✓ 2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων (Μέρος Γ).

# Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

- ✓ 4.1 Εισαγωγή. (Μέρος Α)
- ✓ 4.2 Σύνταξη της Κατηγορηματικής Λογικής. (Μέρος Α)
- ✓ 4.3 Ερμηνείες. (Μέρος Α)
- ✓ 4.4α. Λογικές ισοδυναμίες & Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων. (Μέρος Β)
- ✓ 4.4β. Λογικές ισοδυναμίες & μετασχ. τύπων. (Μέρος Β)
- ✓ 4.5 Τυπικά συστήματα & εξαγωγή συμπερ. (Μέρος Β)
- ✓ 4.6 Κανονικές μορφές τύπων. (Μέρος Β)
  - a) Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. b) Συναρτήσεις Skolem. c) Προτάσεις (Clauses). d) Προτάσεις Horn.
- ✓ 4.7 Αντικατάσταση. (Μέρος Γ)
- ✓ 4.8 Ενοποίηση. (Μέρος Γ)
- ✓ 4.9 Η Μέθοδος της (Διαδικής) Επίλυσης. (Μέρος Δ)
- ✓ 4.10 Επίλυση & Στρατηγικές απόδειξης. (Μέρος Δ)
- ✓ 4.11 Η στρατηγική της γραμμικής επίλυσης. (Μέρος Ε)
- ✓ 4.12 Μετασχηματισμοί Λογικών Προγραμμάτων (Μέρος ΣΤ)

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό

### 2.1 Εισαγωγή.

- ❑ Ένας από τους πρώτους τρόπους **Αναπαράστασης Γνώσης (ΑΓ)** ήταν η **λογική**. Η πιο θεμελιώδης έννοια στη λογική είναι η **αλήθεια**. Μία πρόταση μπορεί να έχει δύο πιθανές τιμές είτε **αληθής** ή **ψευδής**.
- ❑ Για παράδειγμα, η ακόλουθη πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής ή ψευδής.
  - **Ο Γιάννης είναι τριτοετής σπουδαστής στο Τμήμα Πληροφορικής.**
- ❑ Η εκφραστική δύναμη συστημάτων των οποίων η ΑΓ στηρίζεται στην λογική έγκειται στον τρόπο με τον οποίο κτίζεται η γνώση.
  - **Αρχικά**, έννοιες πάνω στις οποίες **απλές ιδέες** μπορούν να εκφραστούν είναι η **έννοια της αλήθειας** και **της μη αλήθειας**.
  - **Περισσότερο εκφραστικές λογικές** μπορούν να δημιουργηθούν με **επιπλέον έννοιες και σύμβολα όπως οι λογικοί σύνδεσμοι**, τα κατηγορήματα, κτλ.. Κατά συνέπεια, **πιο πολύπλοκες** και **πιο λεπτές ιδέες** μπορούν να αναπαρασταθούν.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό

### 2.1 Εισαγωγή.

- ❑ Η μελέτη της **λογικής** ως μέθοδος **ΑΓ** και **εξαγωγής συμπερασμάτων** περιλαμβάνει τα εξής:
- ❑ 1. Την **συντακτική μορφή των προτάσεων**. Δηλαδή **ποια μορφή θα έχουν οι απλές προτάσεις και πως θα δημιουργούνται οι σύνθετες προτάσεις**.
- ❑ 2. Την **ερμηνεία και την αλήθεια των προτάσεων**. Μια πρόταση ανάλογα με το πεδίο του προβλήματος μπορεί να έχει διαφορετικές ερμηνείες.
  - Για παράδειγμα, η σύνθετος πρόταση “ **$p$  or  $q$** ” μπορεί να έχει μια από τις εξής ερμηνείες ανάλογα με το πεδίο του προβλήματος: 1) Στο πεδίο των **ακέραιων αριθμών** «**Ο  $N$  είναι άρτιος ακέραιος ή ο  $N$  είναι περιττός ακέραιος**». Στο πεδίο της **μετεωρολογίας** μπορεί να έχει την εξής ερμηνεία «**Ο καιρός είναι βροχερός ή ο καιρός είναι συννεφιασμένος**». Η αλήθεια της σύνθετης πρότασης εξαρτάται από την αλήθεια των απλών προτάσεων  **$p$**  και  **$q$** .
- ❑ 3. Την **απόδειξη ή εξαγωγή νέων προτάσεων** από τις υπάρχουσες προτάσεις.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό

### 2.1 Εισαγωγή.

□ Η ΑΓ σε λογική είναι δηλωτική. Τα πλεονεκτήματα της είναι τα εξής:

- 1. Η γνώση μπορεί εύκολα ν' αλλάζει.
- 2. Η γνώση μπορεί να επεκταθεί. Η επέκταση της γνώσης γίνεται με **συμπερασματικούς κανόνες** που εξάγουν επιπλέον γνώση πέρα απ' αυτή που σαφώς έχει οριστεί.
- 3. Μπορεί να γίνει **επεξεργασία της γνώσης από αναδρομικά προγράμματα**. Συνεπώς, ένα σύστημα βασισμένο σε λογική μπορεί να απαντήσει σε ερωτήσεις **για το τι γνωρίζει**.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό

### 2.1 Εισαγωγή.

- ❑ Ο Προτασιακός Λογισμός (ΠΛ) είναι η **πιο απλή μορφή λογικής**.
  - Ο ΠΛ ασχολείται με την **αναπαράσταση γνώσης ως προτάσεις** καθώς και **με την εξαγωγή νέας γνώσης (συμπεράσματα) από προτάσεις**.
  - Ο ΠΛ είναι μια **συμβολική λογική** η οποία ασχολείται με τις **λογικές ιδιότητες συνθέτων προτάσεων**.
- ❑ Μία πρόταση μπορεί να έχει μια τιμή από τις τιμές αληθείας, **αληθής** και **ψευδής**.
- ❑ Απλές προτάσεις μπορούν να συνδέονται με **λογικούς συνδέσμους** για σχηματισμό πιο **σύνθετων προτάσεων**.
- ❑ Οι **λογικοί σύνδεσμοι** είναι οι εξής:  $\wedge$  (**και, σύζευξη**),  $\vee$  (**ή, διάζευξη**),  $\neg$  (**όχι, άρνηση**),  $\rightarrow$  (**εάν .. τότε.., συνεπάγεται, συνεπαγωγή**),  $\leftrightarrow$  (**εάν και μόνο εάν, ισοδυναμία**)



## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Η χρήση **λογικών συνδέσμων** σε προτάσεις δημιουργεί **την πιο απλή μορφή λογικής**, τον **προτασιακό λογισμό**.
- Οι απλές προτάσεις ονομάζονται **ατομικοί τύποι (atomic formula)** ή **άτομα (atoms)**.
- Με **λογικούς συνδέσμους** μπορούμε να **συνδέσουμε** είτε **ατομικούς τύπους** ή **σύνθετες προτάσεις**.
- Στη συνέχεια, τα  **$p, q, r, s$**  παριστάνουν **απλές προτάσεις** ή **ατομικούς τύπους**, και τα  **$P, Q, R, S$**  ή  **$\varphi, \psi$  (πεζά)** παριστάνουν **σύνθετες προτάσεις** ή **σύνθετους τύπους**.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ Οι **ατομικοί** ή οι **σύνθετοι τύποι** (προτάσεις) ονομάζονται **καλά-σχηματισμένοι τύποι** (well-formed formulas) ή **τύποι** (formulas) ή **λογικές παραστάσεις** ή **εκφράσεις** (expressions).
- ❑ Οι **καλά σχηματισμένοι τύποι** ή **τύποι** του προτασιακού λογισμού ορίζονται ως εξής.
  - 1. Κάθε ατομικός τύπος είναι ένας τύπος.
  - 2. Εάν  $\phi$  είναι ένας τύπος τότε  $(\neg\phi)$  είναι τύπος.
  - 3. Εάν,  $\phi$  και  $\psi$  είναι τύποι τότε  $(\phi \wedge \psi)$ ,  $(\phi \vee \psi)$ ,  $(\phi \rightarrow \psi)$ ,  $(\phi \leftrightarrow \psi)$  είναι τύποι.
  - 4. Μια έκφραση είναι τύπος εάν και μόνο εάν **μπορεί ν' αποδειχθεί με τους προηγούμενους τρεις κανόνες ότι είναι τύπος.**

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ **Παραδείγματα:** Οι επόμενες εκφράσεις είναι καλά-σχηματισμένοι τύποι.
  - $(p \wedge q) \vee ((\neg r) \wedge q)$
  - $\neg((p \rightarrow q) \vee (q \wedge r))$
- ❑ **Ορισμός:** Μια πρόταση ονομάζεται **στοιχειώδης τύπος (literal)** εάν έχει την μορφή  $p$  ή  $\neg p$  όπου  $p$  είναι μια **προτασιακή μεταβλητή**.
- ❑ Συχνά οι παρενθέσεις παραλείπονται από τους τύπους επειδή **οι σχηματιζόμενοι τύποι είναι πολύ μεγάλοι** και η **ανάγνωση τους είναι δύσκολη**.
- ❑ Όταν οι παρενθέσεις παραλείπονται πρέπει να ακολουθείται η εξής **προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων** για να **ερμηνευτεί σωστά ο τύπος**,  $\neg$ (μεγαλύτερη),  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$ (μικρότερη).

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Για τους **δυναμικούς λογικούς τελεστές** χρειάζεται να καθοριστεί η **προσεταιριστικότητα (associativity)** τους ώστε να μην υπάρχουν ασάφειες στην ερμηνεία των προτάσεων.
- Η **προσεταιριστικότητα αφορά τελεστές με ίδια προτεραιότητα.**
- Όλοι οι δυναμικοί τελεστές έχουν **αριστερή προσεταιριστικότητα**. Αυτό σημαίνει ότι η σωστή ερμηνεία της πρότασης  $p \wedge q \wedge r$  είναι  $((p \wedge q) \wedge r)$ .

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

□ Παραδείγματα:

*Πρόταση χωρίς παρενθέσεις*

➤  $\neg p \wedge q$

➤  $p \rightarrow q \vee \neg r$

➤  $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$

➤  $p \rightarrow q \rightarrow r$

*Ερμηνεία της πρότασης*

➤  $((\neg p) \wedge q)$

➤  $(p \rightarrow (q \vee (\neg r)))$

➤  $((p \rightarrow q) \leftrightarrow ((\neg p) \vee q))$

➤  $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

□ Η αλήθεια των σύνθετων τύπων εξαρτάται από την αλήθεια των ατομικών τύπων από τους οποίους αποτελούνται. Η αλήθεια σύνθετων τύπων οι οποίοι συνδέονται με τους λογικούς συνδέσμους  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\neg$ ,  $\rightarrow$ ,  $\leftrightarrow$  δίνεται από τον Πίνακα 2.1 στον οποίο τα  $p$  και  $q$  είναι προτάσεις,  $A$  και  $\Psi$  σημαίνει αληθές και ψευδές αντίστοιχα.

$p$	$q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	T

Πίνακας 2.1: Πίνακας Αληθείας των Προτασιακών Συνδέσμων.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Ας υποθέσουμε ότι  $\varphi$  είναι ένας τύπος και  $p_1, \dots, p_k$  είναι ατομικοί τύποι οι οποίοι υπάρχουν στον τύπο της  $\varphi$ . Για όλες τις δυνατές τιμές αληθείας που καταχωρούνται στα  $p_1, \dots, p_k$  αντιστοιχεί από μια τιμή αληθείας της  $\varphi$ .
- Οι τιμές αληθείας της  $\varphi$  για όλες τις δυνατές τιμές αληθείας των  $p_1, \dots, p_k$  βρίσκονται με πίνακες.
  - Αρχικά, **καταχωρούνται τιμές αληθείας στους ατομικούς τύπους.**
  - Στη συνέχεια, **υπολογίζονται οι εκφράσεις της  $\varphi$**  αρχίζοντας από εκείνες των οποίων **ο τελεστής έχει την μεγαλύτερη προτεραιότητα και ούτω καθεξής**. Σε κάθε περίπτωση ακολουθούμε την **προσεταιριστικότητα** των τελεστών.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- **Ορισμός:** Ας υποθέσουμε ότι  $\varphi$  είναι ένας τύπος και  $p_1, \dots, p_k$  είναι οι ατομικοί τύποι που υπάρχουν στον  $\varphi$ . Μια **ερμηνεία (interpretation)** του  $\varphi$  είναι μια **καταχώριση τιμών αληθείας σε καθένα από τα  $p_1, \dots, p_k$ .**
- **Κάθε γραμμή του πίνακα αληθείας του τύπου  $\varphi$  αντιστοιχεί σε μια ερμηνεία του τύπου  $\varphi$ .**



## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

□ Η τελευταία στήλη του Πίνακα 2.2 μας δίνει την τιμή αληθείας του τύπου  $p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$  ο οποίος πλήρης με παρενθέσεις έχει την μορφή  $((p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee (\neg q)))$ .

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$
T	T	T	F	T	<b>T</b>
T	F	F	T	T	<b>T</b>
F	T	T	F	F	<b>F</b>
F	F	T	T	T	<b>T</b>

Πίνακας 2.2: Πίνακας αληθείας του τύπου  $p \rightarrow q \rightarrow p \vee \neg q$

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

□ Η τελευταία στήλη του Πίνακα 2.3 μας δίνει την τιμή αληθείας του τύπου  $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$  ο οποίος πλήρης παρενθέσεων έχει την μορφή  $((p \leftrightarrow r) \wedge ((\neg q) \rightarrow r))$ .

p	q	r	$\neg q$	$\neg q \rightarrow r$	$p \leftrightarrow r$	$(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$
T	T	T	F	T	T	<b>T</b>
T	T	F	F	T	F	<b>F</b>
T	F	T	T	T	T	<b>T</b>
T	F	F	T	F	F	<b>F</b>
F	T	T	F	T	F	<b>F</b>
F	T	F	F	T	T	<b>T</b>
F	F	T	T	T	F	<b>F</b>
F	F	F	T	F	T	<b>F</b>

Πίνακας 2.3: Πίνακας αληθείας του τύπου  $(p \leftrightarrow r) \wedge (\neg q \rightarrow r)$

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ Ορισμός: Ένας τύπος  $\varphi$  είναι ταυτολογία ή λογικά αληθής (valid) εάν η τιμή αληθείας του  $\varphi$  είναι αληθής για όλες τις δυνατές ερμηνείες της.
- ❑ Η πρόταση  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$  είναι ταυτολογία όπως δείχνει ο Πίνακας 2.4.

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

Πίνακας 2.4: Πίνακας αληθείας του τύπου  $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ **Ορισμός:** Ένας τύπος  $\varphi$  είναι **αντίφαση** ή **λογικά ψευδής** (unsatisfiable or contradictory) εάν η **τιμή αληθείας** του  $\varphi$  είναι **ψευδής για όλες τις δυνατές ερμηνείες του**.
- ❑ Η πρόταση  $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$  είναι **αντίφαση** όπως δείχνει ο Πίνακας 2.5

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	F

Πίνακας 2.5: Πίνακας αληθείας του τύπου  $(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ **Ορισμός:** Ένας τύπος  $\varphi$  ο οποίος δεν είναι **μήτε ταυτολογία, ούτε αντίφαση** ονομάζεται **επαληθεύσιμος (satisfiable)**.
- ❑ Οι τύποι που μας ενδιαφέρουν περισσότερο είναι **οι ταυτολογίες** και **οι αντιφάσεις** επειδή,
  - μπορούμε ν' αντικαταστήσουμε μια προτασιακή μεταβλητή μ' ένα τύπο και
  - ο παραγόμενος τύπος θα είναι ταυτολογία ή αντίφαση όπως ο αρχικός.
- ❑ Επειδή οι **ταυτολογίες είναι σημαντικές** το σύμβολο  $\models$  χρησιμοποιείται για να δείξουμε ότι ένας τύπος είναι ταυτολογία. Εάν  $\varphi$  είναι ένας τύπος γράφουμε,
  - $\models \varphi$  για να δείξουμε ότι ο  $\varphi$  είναι **ταυτολογία**.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Ας υποθέσουμε ότι  $\varphi$  είναι μια ταυτολογία η οποία περιέχει την προτασιακή μεταβλητή  $p$ . Εάν αντικαταστήσουμε όλες τις εμφανίσεις της  $p$  στην  $\varphi$  με ένα τύπο  $\psi$  και προκύψει ο τύπος  $\varphi'$  τότε ο νέος τύπος  $\varphi'$  είναι επίσης ταυτολογία.
  - Αυτό συμβαίνει επειδή η **τιμή αληθείας ενός τύπου εξαρτάται από τις τιμές αληθείας των άμεσα μικρότερων παραστάσεων που περιέχει.**
- Όλες οι προτασιακές μεταβλητές μιας **ταυτολογίας** μπορούν ν' αντικατασταθούν με τύπους. Έτσι μια **ταυτολογία** μετατρέπεται σε σχήμα.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

□ Παράδειγμα: Ο τύπος  $p \vee \neg p$  είναι **ταυτολογία**.

➤ Εάν αντικαταστήσουμε το  $p$  με τον τύπο  $\phi$  όπου το  $\phi$  είναι η παράσταση  $q \wedge r$  προκύπτει ο τύπος  $(q \wedge r) \vee \neg(q \wedge r)$  ο οποίος είναι επίσης **ταυτολογία**.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Εάν ο τύπος  $\varphi$  είναι **ταυτολογία** τότε ο τύπος  $\neg\varphi$  είναι **αντίφαση** και αντιστρόφως. Οι **αντιφάσεις**, όπως οι **ταυτολογίες**, λειτουργούν σαν σχήματα.
- Παράδειγμα: Ο τύπος  $p \wedge \neg p$  είναι **αντίφαση**. Εάν αντικαταστήσουμε το  $p$  με τον τύπο  $\varphi$  όπου το  $\varphi$  είναι η παράσταση  $q \wedge r$ , ο τύπος  $(q \wedge r) \wedge \neg(q \wedge r)$  είναι επίσης **αντίφαση**.
- Ορισμός: Εάν  $\varphi$  και  $\psi$  είναι τύποι και εάν ο τύπος  $\varphi \rightarrow \psi$  είναι **ταυτολογία** τότε λέμε ότι ο τύπος  $\psi$  είναι (λογική) σημασιολογική συνέπεια (logical consequence) ή απλά **συνέπεια** (*consequence*) του τύπου  $\varphi$ , συμβολίζεται  $\varphi \Rightarrow \psi$  ή  $\varphi \models \psi$ .



## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- ❑ Ορισμός: Εάν  $\varphi$  και  $\psi$  είναι τύποι οι οποίοι έχουν πάντα την ίδια τιμή αληθείας τότε οι  $\varphi$  και  $\psi$  λέγονται **λογικά ισοδύναμοι**, συμβολίζεται  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  ή  $\varphi \equiv \psi$ . Προφανώς, οι τύποι  $\varphi$  και  $\psi$  είναι **λογικά ισοδύναμοι** εάν ο τύπος  $\varphi \leftrightarrow \psi$  είναι **ταυτολογία**.
- ❑ Θα πρέπει να τονιστεί ότι τα σύμβολα  $\Rightarrow$ ,  $\models$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\equiv$  **δεν είναι σύνδεσμοι** του προτασιακού λογισμού. Δηλαδή εάν  $\varphi$  και  $\psi$  είναι τύποι τα  $\varphi \Rightarrow \psi$  και  $\varphi \Leftrightarrow \psi$  **δεν είναι τύποι** του προτασιακού λογισμού.
- ❑ Τα σύμβολα  $\Rightarrow$ ,  $\models$ ,  $\Leftrightarrow$ ,  $\equiv$  ανήκουν σε μια **μετα-γλώσσα** με την οποία **σχολιάζουμε την γλώσσα του προτασιακού λογισμού**.

## 2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

### 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους.

- Παράδειγμα: η έκφραση  $p \leftrightarrow \neg p$  είναι τύπος του προτασιακού λογισμού ο οποίος είναι **αντίφαση**.
- **Δεν μπορούμε να πούμε** ότι οι τύποι  $p$  και  $\neg p$  **είναι λογικά ισοδύναμοι ούτε μπορούμε να γράψουμε** ότι  $p \Leftrightarrow \neg p$ .

# Ευχαριστώ!