(30/3/21)

① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** **ΔΙΑΛΕΞΗ #6**

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

- Παρατήρηση:

Μία ακολουθία $a_0, a_1, a_2, \dots$ αντιστοιχεί σε μία δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$ ← γεν. συν.

Η πιο βασική περίπτωση είναι η ακολουθία $(1,1,1,\dots)$ που δίνει $1+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$

- Απόδειξη:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Rightarrow x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{n+1} = \underbrace{x + x^2 + \dots}_{f(x)-1} \Rightarrow x f(x) = f(x) - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = f(x) - x f(x) = (1-x) f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1-x}$$

- Παράδειγμα (συνέχεια προηγούμενου παραδείγμ.)

Με παραγώγηση είδαμε ότι αν $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n$ τότε $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$

Με την ίδια μέθοδο βρείτε την $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

Λύση:

$$F(x) = x \cdot \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right)' = x \left[\frac{1(1-x)^2 - x \cdot 2(1-x) \cdot (-1)}{(1-x)(1-x)^4} \right] = x \left[\frac{(1-x)^2 + 2x(1-x)}{(1-x)(1-x)^4} \right] =$$

$$= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

- **H/W:** Υπολογίστε την $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^3 x^n$

- Αριθμητικό Παράδειγμα Χρήσης Γεννήτριας Συνάρτησης:

Υπολογίστε με απλή έκφραση την ακριβή τιμή της σειράς:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{2^n} \xrightarrow{\text{Απάντηση}} f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = 3$$

2

- Χρήση γεν. συνάρτ. σε προβλήματα που επιλύονται με τη μέθοδο του εγκλεισμού αποκλεισμού

- Παράδειγμα:

Αν $a+\beta+\gamma=11$ αντικείμενα, με a,β,γ ακεραίους στο διάστημα $[0,5]$. Πόσοι τρόποι λύσης υπάρχουν για αυτή την εξίσωση;
($\underline{\text{π.χ.}}$ $a=4$, $\beta=5$, $\gamma=2$)

Λύση:

Το a μπορεί $\to 0,1,2,3,4,5$, συμβολίζεται $(x^0+x^1+x^2+x^3+x^4+x^5)$
Για το β και γ, ισχύει το ίδιο ακριβώς.
Η "ένωση" των αποτελεσμάτων είναι το γινόμενο αυτών των εκφράσεων και αυτή είναι $=f(x)=$ η γεννήτρια συνάρτηση του προβλήματος.
$\to f(x)=(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^3$
Ο συντελεστής του x^{11}, $[x^{11}]$ είναι ο ζητούμενος αριθμός των λύσεων.

- H/W: $(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^2=?$

Μετά ασχοληθείτε με τους όρους που εμφανίζουν στον πολλ/σμό με $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ έχουν x^{11}

- Εφαρμογή 2η:

Μια καντίνα έχει ακόμα προδιάθεση 9 sandwich. Τα 3 είναι σκέτα με τυρί, τα 4 έχουν τυρί και σαλάμι και τα άλλα 2 έχουν τυρί και μαγιονέζα. Κάποιος θέλει να πάρει 3 sandwich. Με πόσους τρόπους μπορεί να το κάνει;

Λύση:

Τυρί σκέτο $\to 1+x+x^2+x^3$
Τυρί + σαλάμι $\to 1+x+x^2+x^3+x^4$
Τυρί + μαγιονέζα $\to 1+x+x^2$

$f(x)=(1+x+x^2+x^3)(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2)$
$\to$ Θέλουμε $[x^3]$ $\leftarrow$ (Αφού θα πάρει 3 sandwich)
Υπόδειξη: $\dfrac{(1-x^4)}{1-x}\cdot\dfrac{(1-x^5)}{1-x}\cdot\dfrac{(1-x^3)}{1-x}=$

$$=\frac{1-x^5-x^4+x^9+1-x^5-x^4+x^9-x^3+x^8+x^7-x^{12}}{(1-x)^3}=$$

$$=\frac{-x^{12}+x^9+x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+1}{-x^3+3x^2-3x+1}$$ (συν. πίσω)

③

(Συνέχεια) Η διαίρεση:

$$\begin{array}{l|l} -x^{12}+x^9+x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+1 & -x^3+3x^2-3x+1 \\ \hline 3x^{11}+x^9+x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+1 & x^9-3x^8\ldots \\ & \vdots \\ & [x^3]\,x^3 \end{array}$$

Με πράξεις βρίσκουμε τη λύση $=[x^3]$

- <u>Εφαρμογή της Γεννήτριας Συνάρτησης για υπολογισμό αναδρομικών ακολουθιών</u>

→ <u>Παράδειγμα:</u>

Βρείτε την (a_n) για την οποία $a_n - 2a_{n-1} = n$, με $a_0 = 1$.

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^n = x\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}x^{n-1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n =$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{k=1}^{n} k$

$\Rightarrow f(x) - 2xf(x) = \frac{n(n+1)}{2}$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots$

$\Rightarrow f(x)(1-2x) = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{1}{1-2x} \Rightarrow f(x) = \frac{n(n+1)}{2}\cdot\left(\sum 1 + 2x + (2x)^2 \ldots\right.$

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \ldots + \frac{n(n+1)}{2} 2^n x^n + \ldots$

- <u>H/W</u>: Βρείτε τη (a_n), όταν $a_n - 3a_{n-1} = n$, $a_0 = 1$

- <u>H/W</u>: Υπολογίστε την γεν. συν. $f(x)$ για την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(1^2+2^2+\ldots+n^2)x^n$

④ <u>Υπόδειξη</u>: $f(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n\right) =$ <u>γιατί</u>; $= \ldots$

Μετά $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$; και το $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n$

④

- <u>Υπόδειξη σε παλιά H/W:</u>
Για τα 7 σημεία εντός ισοπλεύρου πλευράς 1 m, χωρίστε το τρίγωνο σε 3 ισόπλευρα πλευράς $< \frac{1}{2}$ και σε άλλα 3 κυρτά πολύγωνα των οποίων η διάμετρος (μεγαλύτερη απόσταση ανάμεσα στις κορυφές) να είναι $\leq \frac{1}{2}$ και μετά εφαρμόστε P.H.P.

- <u>SOS Παράδειγμα:</u>
Βρείτε την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας (a_n) όπου a_n είναι ο ~~πλήθος~~ πληθικός αριθμός των υποσυνόλων ενός συνόλου με ~~2n~~ τα στοιχεία (προφανώς $a_0 = 0$), τα οποία περιέχουν τουλάχιστον έναν ακέραιο $> n$.

Για $|\Omega|$ όταν Ω έχει 2 στοιχεία έχουμε 2^{2n} υποσύνολα $= 4^n$
Αυτά που περιέχουν στοιχεία $> n$ δεν είναι αυτά που περιέχουν από $1 \to n$, άρα είναι πλήθος 2^n
Άρα $a_n = 4^n - 2^n$,
Άρα ζητείται η $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (4^n - 2^n) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (4x)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (2x)^n =$

$$= \frac{1}{1-4x} \cancel{-1} - \left(\frac{1}{1-2x} \cancel{-1} \right) = \frac{2x}{(1-4x)(1-2x)}$$