Μελάκης Νικόλαος tp4796

Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα

παράδοση έως 11-03-21 | 22:00

Άσκηση 1

α)

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} -1^2 & -1^3 & -1^4 \\ -1^3 & -1^4 & -1^5 \\ -1^4 & -1^5 & -1^6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U \cdot V = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{12} + u_{13} & -u_{11} + u_{12} - u_{13} & u_{11} - u_{12} + u_{13} \\ u_{21} - u_{22} + u_{23} & -u_{21} + u_{22} - u_{23} & u_{21} - u_{22} + u_{23} \\ u_{31} - u_{32} + u_{33} & -u_{31} + u_{32} - u_{33} & u_{31} - u_{32} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$V \cdot U = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{21} + u_{31} & u_{12} - u_{22} + u_{32} & u_{13} - u_{23} + u_{33} \\ -u_{11} + u_{21} - u_{31} & -u_{12} + u_{22} - u_{32} & -u_{13} + u_{23} - u_{33} \\ u_{11} - u_{21} + u_{31} & u_{12} - u_{22} + u_{32} & u_{13} - u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$U \cdot V + V \cdot U = \begin{bmatrix} (u_{11} - u_{12} + u_{13}) + (u_{11} - u_{21} + u_{31}) & (-u_{11} + u_{12} - u_{13}) + (u_{12} - u_{22} + u_{32}) & (u_{11} - u_{12} + u_{13}) + (u_{13} - u_{23} + u_{33}) \\ (u_{21} - u_{22} + u_{23}) + (-u_{11} + u_{21} - u_{31}) & (-u_{12} + u_{22} - u_{32}) + (-u_{12} + u_{22} - u_{32}) & (u_{21} - u_{22} + u_{23}) + (-u_{13} + u_{23} - u_{33}) \\ (u_{31} - u_{32} + u_{33}) + (u_{11} - u_{21} + u_{31}) & (-u_{31} + u_{32} - u_{33}) + (u_{12} - u_{22} + u_{32}) & (u_{31} - u_{32} + u_{33}) + (u_{13} - u_{23} + u_{33}) \end{bmatrix}$$

$$UV + VU = \begin{bmatrix} 2u_{11} - 2u_{21} + 2u_{31} & -u_{11} + 2u_{12} - u_{13} - u_{22} + u_{32} & u_{11} - u_{12} + 2u_{13} - u_{23} + u_{33} \\ -u_{11} + 2u_{21} - u_{22} + u_{23} - u_{31} & -2u_{12} + 2u_{22} - 2u_{32} & -u_{13} + u_{21} - u_{22} + 2u_{23} - u_{33} \\ u_{11} - u_{21} + 2u_{31} - u_{32} + u_{33} & u_{12} - u_{22} - u_{31} + 2u_{32} - u_{33} & u_{13} - u_{23} + u_{31} - u_{32} + 2u_{33} \end{bmatrix}$$

Άσκηση 2

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

α) $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1$.

β) Εφόσον $\det(A) \neq 0$, A αντιστρέψιμη και επειδή ο πίνακας είναι τετραγωνικός ισχύει:

$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{matrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{matrix}$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

γ) $A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$\det(A^2) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 8 = 1$

Η σχέση που έχει η $\det(A)$ με την $\det(A^2)$ είναι αντισυμμετρική

Άσκηση 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} , \quad A^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -2 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{S} = \frac{A + A^{T}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ -3 & -5 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & -14 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}{2} \Rightarrow$$

$$A^{S} = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/2 & 3/2 \\ 3/2 & -7 & 1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{+} = \frac{A - A^{T}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -7 & -5 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -7 & 6 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix}}{2} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & -11 \\ -3 & 11 & 0 \end{bmatrix}}{2} \rightarrow$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} 0 & -5/2 & 3/2 \\ 5/2 & 0 & -11/2 \\ -3/2 & 11/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4

Αρχή αυτοπαγωγικός πίνακας

α) Έστω ότι A ενελικτικό, άρα $A^2 = I$. Τότε,

$(I-A)(I+A) = I - A + A - A^2 = I - A^2 = 0$

Αν τώρα $(I-A)(I+A) = 0$, θα έχουμε και $I - A^2 = 0 \rightarrow A^2 = I$

Άρα ο A είναι ενελικτικός.

β) $\left(\frac{1}{2}(I+A)\right)^2 = \frac{1}{4}(I+2A+A^2) = \frac{1}{4}(I+2A+I) = \frac{1}{4}(2I+2A) = \frac{1}{2}(I+A)$ είναι ταυτοδύναμος

$\left(\frac{1}{2}(I-A)\right)^2 = \frac{1}{4}(I-2A+A^2) = \frac{1}{4}(I-2A+I) = \frac{1}{4}(2I-2A) = \frac{1}{2}(I-A)$ είναι ταυτοδύναμο