Λογικός Προγραμματισμός

Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής
mmarak@cs.hmu.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Λογικός Προγραμματισμός

Μάθημα 3

- **2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.**

2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό (Μέρος Β)

- 2.1 Εισαγωγή (Μέρος Α).
- 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους (Μέρος Α).
- 2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων (Μέρος Β).
- 2.4. Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων (Μέρος Β).
- 2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων (Μέρος Β).
- 2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων (Μέρος Γ).

Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

- 4.1 Εισαγωγή. (Μέρος Α)
- 4.2 Σύνταξη της Κατηγορηματικής Λογικής. (Μέρος Α)
- 4.3 Ερμηνείες. (Μέρος Α)
- 4.4α. Λογικές ισοδυναμίες & Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων. (Μέρος Β)
- 4.4β. Λογικές ισοδυναμίες & μετασχ. τύπων. (Μέρος Β)
- 4.5 Τυπικά συστήματα & εξαγωγή συμπερ. (Μέρος Β)
- 4.6 Κανονικές μορφές τύπων. (Μέρος Β)
  - a) Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. b) Συναρτήσεις Skolem. c) Προτάσεις (Clauses). d) Προτάσεις Horn.
- 4.7 Αντικατάσταση. (Μέρος Γ)
- 4.8 Ενοποίηση. (Μέρος Γ)
- 4.9 Η Μέθοδος της (Δυαδικής) Επίλυσης. (Μέρος Δ)
- 4.10 Επίλυση & Στρατηγικές απόδειξης. (Μέρος Δ)
- 4.11 Η στρατηγική της γραμμικής επίλυσης. (Μέρος Ε)
- 4.12 Μετασχηματισμοί Λογικών Προγραμμάτων (Μέρος ΣΤ)

2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων.

- Ένας **τύπος μπορεί να απλοποιηθεί** με χρήση **λογικών ισοδυναμιών** οι οποίοι λέγονται **νόμοι του προτασιακού λογισμού**.
- Οι **νόμοι του προτασιακού λογισμού** είναι **σχήματα** τα οποία **μπορούν να εφαρμοστούν** **εφόσον** **ταιριάζουν σ' ένα τύπο**.
- Δίνεται στον **Πίνακα 2.6** ένας κατάλογος **με νόμους του προτασιακού λογισμού**.
  - Στα επόμενα παραδείγματα γίνεται αναφορά σ' αυτούς τους νόμους. **Ο νόμος που αναφέρεται σε κάθε γραμμή εφαρμόζεται στον αντίστοιχο τύπο για να προκύψει η επόμενη μορφή του τύπου**.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων.

$\neg\neg P \Leftrightarrow P$	Νόμος διπλής άρνησης
$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$	Αντιμεταθετικός (commutative) νόμος $\wedge$
$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$	-/- $\vee$
$P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$	-/- $\leftrightarrow$
$(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$	Προσεταιριστικός (associative) νόμος $\wedge$
$(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$	-/- $\vee$
$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	**Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\wedge$**
$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	**-/- $\vee$**
$(P \vee P) \Leftrightarrow P$	Νόμος απορρόφησης (idempotent) $\vee$
$(P \wedge P) \Leftrightarrow P$	-/- $\wedge$
$(P \vee F) \Leftrightarrow P$	OR-απλοποίηση (simplification)
$(P \vee T) \Leftrightarrow T$	-/-
$P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$	-/-
$(P \wedge F) \Leftrightarrow F$	AND-απλοποίηση (simplification)
$(P \wedge T) \Leftrightarrow P$	-/-
$P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$	-/-
$(T \rightarrow P) \Leftrightarrow P$	Απλοποίηση συνεπαγωγής ($\rightarrow$)
$(F \rightarrow P) \Leftrightarrow T$	-/-
$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \wedge R))$	-/-
$(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \rightarrow R$	-/-
$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \vee R))$	-/-
$(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \rightarrow R$	-/-

Πίνακας 2.6 Νόμοι του προτασιακού λογισμού.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων.

$P\rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$	Νόμος αντιθετοαντιστροφής (contrapositive)
$P\leftrightarrow Q \Leftrightarrow (\neg P\leftrightarrow \neg Q)$	
$P\vee \neg P \Leftrightarrow T$	Αποκλεισμός τρίτου (excluded middle)
$P\Leftrightarrow P$	Νόμος της ταυτότητας
$P\wedge \neg P\Leftrightarrow F$	Νόμος της αντίφασης
$(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow ((P\wedge \neg Q) \rightarrow F)$	Απαγωγή σε άτοπο (Reduction ad absurdum)
$\mathbf{(P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P\rightarrow Q) \wedge (Q\rightarrow P)}$	**Νόμος ισοδυναμίας**
$((P\wedge Q) \rightarrow R) \Leftrightarrow (P\rightarrow (Q\rightarrow R))$	Νόμος εξαγωγής (exportation law)
$\mathbf{\neg(P\vee Q) \Leftrightarrow (\neg P\wedge \neg Q)}$	**Νόμος του De Morgan για** $\vee$
$\mathbf{\neg(P\wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P\vee \neg Q)}$	**-/- -/- για** $\wedge$
$\neg(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow P\wedge \neg Q$	Νόμος άρνησης συνεπαγωγής
$\neg(P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P\leftrightarrow \neg Q$	Νόμος άρνησης ισοδυναμίας
$\mathbf{(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P\vee Q)}$	**Νόμος αντικατάστασης συνεπαγωγής (→)**
$(P\rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P\wedge \neg Q)$	-/- συνεπαγωγής (→)
$(P\wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P\vee \neg Q)$	-/- σύζευξης $\wedge$
$(P\vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P\wedge \neg Q)$	-/- διάζευξης $\vee$
$\mathbf{(P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P\wedge Q) \vee (\neg P\wedge \neg Q)}$	**-/- ισοδυναμίας** $\leftrightarrow$
$\mathbf{(P\leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P\vee Q) \wedge (P\vee \neg Q)}$	**-/- ισοδυναμίας** $\leftrightarrow$

Πίνακας 2.6 Νόμοι του προτασιακού λογισμού. (συνέχεια)

2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων.

- Απλοποίηση του τύπου $\neg(\neg(p \wedge q) \vee p)$ με χρήση των νόμων του προτασιακού λογισμού.

$\neg(\neg(p \wedge q) \vee p)$	$\Leftrightarrow$	De Morgan
$\neg\neg(p \wedge q) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Διπλή άρνηση
$(p \wedge q) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Αντιμεταθετικός
$(q \wedge p) \wedge \neg p$	$\Leftrightarrow$	Προσεταιριστικός
$q \wedge (p \wedge \neg p)$	$\Leftrightarrow$	Αντίφαση
$q \wedge F$	$\Leftrightarrow$	AND-απλοποίηση
F		

2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων.

- Απλοποίηση του τύπου **$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$** με χρήση των νόμων του προτασιακού λογισμού

$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντικατάσταση συνεπαγωγής ($\rightarrow$)
$(p \wedge (\neg p \vee q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$\wedge$ Επιμεριστικός
$((p \wedge \neg p) \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντίφαση
$(F \vee (p \wedge q)) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
$(p \wedge q) \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	Αντικατάσταση συνεπαγωγής ($\rightarrow$)
$\neg(p \wedge q) \vee q$	$\Leftrightarrow$	De Morgan
$(\neg p \vee \neg q) \vee q$	$\Leftrightarrow$	Προσεταιριστικός
$\neg p \vee (\neg q \vee q)$	$\Leftrightarrow$	Αποκλεισμός τρίτου
$\neg p \vee T$	$\Leftrightarrow$	OR-απλοποίηση
T		

2.4 Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων.

- **Ορισμός:** Ένα σύνολο λογικών συνδέσμων είναι **επαρκές** εάν **για κάθε τύπο του προτασιακού λογισμού υπάρχει ένας λογικά ισοδύναμος τύπος (πρόταση)** που **δεν περιέχει άλλους συνδέσμους εκτός από τα στοιχεία αυτού του συνόλου**.
- Τα σύνολα των λογικών συνδέσμων $\mathbf{s_1=\{\neg, \vee\}}$ και $\mathbf{s_2=\{\neg, \rightarrow\}}$ είναι ***επαρκή***. **Κάθε υπερσύνολο** των $\mathbf{s_1}$ και $\mathbf{s_2}$ είναι επίσης **επαρκές**.
- Κάθε τύπος του ΠΛ μπορεί να μετασχηματιστεί σε δυο μορφές προτάσεων που περιέχουν **μόνο** τους λογικούς συνδέσμους $\mathbf{\{\neg, \wedge, \vee\}}$.

2.4 Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων.

- Αυτές οι μορφές είναι η **διαζευκτική κανονική μορφή** και η **συζευκτική κανονική μορφή**.
- **Ορισμός:** Ένας τύπος **Φ** είναι σε ***διαζευκτική κανονική μορφή*** (***ΔΚΜ***) (***disjunctive normal form***) **εάν** η μορφή του είναι $\psi_1 \vee .. \vee \psi_\kappa$ όπου κάθε ένα από τα ψ_i **(1≤i≤κ)** είναι **σύζευξη στοιχειωδών τύπων**. Δηλαδή, η **Φ** είναι **μία διάζευξη** κάθε όρος της οποίας είναι **σύζευξη στοιχειωδών τύπων**.
- **Examples**:
  - $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg q \wedge \neg r)$
  - $\neg(p \wedge q) \vee r$ **it is not** in disjunctive normal form.

- **Ορισμός:** Ένας τύπος **Φ** είναι σε **συζευκτική κανονική μορφή** (**ΣΚΜ**) (**conjunctive normal form**) **εάν** η μορφή του είναι $\psi_1 \wedge .. \wedge \psi_\kappa$ όπου κάθε ένα από τα ψ_i $(1 \leq i \leq \kappa)$ είναι **διάζευξη στοιχειωδών τύπων**. Δηλαδή, η **Φ** είναι μία **σύζευξη όρων**, κάθε όρος της οποίας είναι **διάζευξη στοιχειωδών τύπων**.
- **Παραδείγματα**
  - $(p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (\neg r \vee \neg p)$
  - $p \wedge (q \vee (r \wedge \neg p))$ **δεν είναι** σε συζευκτική κανονική μορφή

- Τρία βήματα απαιτούνται για να μετατραπεί ένας τύπος σε ΔΚΜ ή σε ΣΚΜ.
  - **1. Εξάλειψε όλους τους συνδέσμους → και ↔** με χρήση των αντίστοιχων νόμων της αντικατάστασης, **α)** (φ→ψ) ⇔ (¬φ∨ψ), **β)** (φ↔ψ) ⇔ (¬φ∨ψ) ∧ (φ∨¬ψ).
  - **2. Εάν** ο τύπος περιέχει **αρνητικούς σύνθετους τύπους**, είτε **σβήσε την άρνηση** χρησιμοποιώντας τον νόμο της **διπλής άρνησης** ή **περιόρισε την εμβέλεια της άρνησης** σε ατομικούς τύπους με τους ***νόμους του De Morgan***.
  - **3. Εάν** η εμβέλεια της άρνησης έχει περιοριστεί σε ατομικούς τύπους, **χρησιμοποίησε τους *αντιμεταθετικούς*** και **τους *επιμεριστικούς*** νόμους για να **περιορίσεις την εμβέλεια της σύζευξης (∧) για ΔΚΜ** ή **την εμβέλεια της διάζευξης (∨) για ΣΚΜ** στους στοιχειώδεις τύπους.

2.4 Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων.

- Εάν θέλουμε **ΔΚΜ** χρησιμοποιούμε τους επόμενους νόμους για να περιορίσουμε την εμβέλεια του $\wedge$.
  - **α.** $(\varphi\wedge(\psi\vee\omega)) \Leftrightarrow ((\varphi\wedge\psi) \vee (\varphi\wedge\omega))$ **επιμεριστικός νόμος**.
  - **β.** $((\psi\vee\omega) \wedge\varphi) \Leftrightarrow ((\psi\wedge\varphi) \vee (\omega\wedge\varphi))$ προκύπτει από **αντιμεταθετικό** και **επιμεριστικό νόμο**.
- Εάν θέλουμε **ΣΚΜ** χρησιμοποιούμε τους επόμενους νόμους για να περιορίσουμε την εμβέλεια του $\vee$.
  - **α.** $(\varphi\vee(\psi\wedge\omega)) \Leftrightarrow ((\varphi\vee\psi) \wedge (\varphi\vee\omega))$ **επιμεριστικός νόμος**.
  - **β.** $((\varphi\wedge\psi) \vee \omega)) \Leftrightarrow ((\varphi\vee\omega) \wedge (\psi\vee\omega))$ προκύπτει από **αντιμεταθετικό** και **επιμεριστικό νόμο**.

- **Παράδειγμα**: Ο τύπος **(¬p→ ¬q) → (p →q)** θα μετατραπεί σε **ΣΚΜ**.
  - **(¬p → ¬q)** → **(p → q)** ⇔ Νόμος αντικατάστασης →
  - **(¬¬p ∨ ¬q)** → **(¬p ∨ q)** ⇔ Νόμος αντικατάστασης →
  - **¬(¬¬p ∨ ¬q)** ∨ (¬p ∨ q) ⇔ De Morgan
  - **(¬¬¬p∧ ¬¬q)** ∨ (¬p ∨ q) ⇔ Διπλής άρνησης
  - **(¬p ∧ q) ∨ (¬p ∨ q)** ⇔ ∨ Επιμεριστικός **((P∧Q) ∨ R ⇔ ((P∨R) ∧ (Q∨R))**
  - **(¬p ∨ (¬p∨ q))** ∧ **(q∨ (¬p∨q))** ⇔ Προσεταιριστικός ∨
  - **(¬p ∨ ¬p**∨ q) ∧ (**q ∨q** ∨ ¬p) ⇔ Νόμος απορρόφησης
  - (¬p ∨ q) ∧ (q ∨ ¬p)

- **Παράδειγμα**: Ο τύπος **$(\neg p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r))$** θα μετατραπεί σε **ΔΚΜ**.
  - $(\neg p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — Νόμος αντικατάστασης $\leftrightarrow$
  - $((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \rightarrow (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
  - $\neg((\neg\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)) \vee (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — De Morgan
  - $(\neg(\neg\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)) \vee (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — Διπλής άρνησης
  - $(\neg(p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee \neg p)) \vee (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — De Morgan
  - $((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg\neg p)) \vee (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — Διπλής άρνησης
  - $((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \vee (p \wedge (q \vee r)) \Leftrightarrow$ — Επιμεριστικός νόμος $\wedge$
  - $((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p)) \vee ((p \wedge q) \vee (p \wedge r)) \Leftrightarrow$ — Προσεταιριστικός νόμος
  - $(\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow$ — Αντιμεταθετικός νόμος
  - $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow$ — Νόμος απορρόφησης
  - $(\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

2.4 Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων.

- Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος **Φ** είναι σε **ΣΚΜ** $\psi_1 \wedge .. \wedge \psi_\kappa$. Εάν χωρίσουμε τις συζεύξεις σε μια λίστα (ή ένα σύνολο) διαζεύξεων, $\{\psi_1,\ldots,\psi_\kappa\}$, κάθε ψ_i $(1 \le i \le \kappa)$ θα έχει την μορφή $p_1 \vee p_2 .. \vee p_n \vee (\neg q_1) \vee (\neg q_2) \vee .. \vee (\neg q_m)$ όπου $p_1,\ldots,p_n$ και $q_1,\ldots, q_m$ είναι προτασιακές μεταβλητές. Αυτή η διάζευξη στοιχειωδών τύπων είναι λογικά ισοδύναμη με τον εξής τύπο
  - $q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$
- Τύποι αυτής της μορφής λέγονται ***προτάσεις*** (***clauses***).
- Κάθε τύπος **Φ** μπορεί να μετασχηματιστεί σε μια λίστα (ή ένα σύνολο) προτάσεων $\{\pi_1,\ldots,\pi_\kappa\}$ όπου το π_i προέκυψε από το ψ_i $(1 \le i \le \kappa)$. Αυτή η λίστα των προτάσεων ονομάζεται **προτασιακή μορφή** του τύπου **Φ**.

2.4 Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων.

- Μια πρόταση $q_1 \land q_2 \land \ldots \land q_m \rightarrow p_1 \lor p_2 \lor \ldots \lor p_n$ που έχει **το πολύ ένα ατομικό τύπο**, δηλαδή $n \leq 1$, λέγεται ***πρόταση Horn*** *(**Horn clause**)*. Δηλαδή, μια πρόταση Horn μπορεί να έχει μια από τις εξής μορφές.

1. $p \lor (\neg q_1) \lor (\neg q_2) \lor \ldots \lor (\neg q_m)$ ή ισοδύναμα $q_1 \land q_2 \land \ldots \land q_m \rightarrow p$
2. $(\neg q_1) \lor (\neg q_2) \lor \ldots \lor (\neg q_m)$ ή ισοδύναμα $\neg (q_1 \land q_2 \land \ldots \land q_m)$
3. p ή ισοδύναμα p

- **Οι προτάσεις Horn είναι μια περιορισμένη μορφή των προτάσεων**. Αυτό σημαίνει ότι **υπάρχουν τύποι Φ** που **ο μετασχηματισμός τους σε προτάσεις Horn είναι αδύνατος**.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Η εξαγωγή συμπερασμάτων από αληθείς προτάσεις λέγονται *συλλογισμοί*.** Ένας συλλογισμός είναι ***ορθός*** όταν **εξάγονται αληθή συμπεράσματα από αληθείς προτάσεις (υποθέσεις)**.
- Έστω $\boldsymbol{\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa}$ ένα σύνολο τύπων, ο τύπος $\boldsymbol{\psi}$ είναι ***σημασιολογική συνέπεια*** (***logical consequence***) ή απλώς ***συνέπεια*** των τύπων $\boldsymbol{\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa}$ **εάν και μόνο εάν για κάθε ερμηνεία Ε** στην οποία ο τύπος $\boldsymbol{\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_\kappa}$ είναι αληθής, ο τύπος $\boldsymbol{\psi}$ είναι επίσης αληθής. Η συνέπεια συμβολίζεται

$$\boldsymbol{\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa \models \psi}.$$

  - Οι τύποι $\boldsymbol{\varphi_1,\ldots,\varphi_\kappa}$ ονομάζονται ***υποθέσεις*** και
  - ο τύπος $\boldsymbol{\psi}$ ονομάζεται ***συμπέρασμα***.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Εάν** **ψ** είναι ένας τύπος, $\models$ **ψ** **τότε και μόνο τότε** όταν το **ψ** είναι **ταυτολογία**. Η σχέση μεταξύ των εννοιών ***συνέπειας*** (***consequence)*** και **ταυτολογίας** έχει ως εξής.
  - Υποθέτουμε ότι **φ** και **ψ** είναι τύποι,

    φ $\models$ **ψ** **τότε και μόνο τότε** $\models$ **φ** → **ψ**,

    δηλαδή ο τύπος **φ→ψ** πρέπει να είναι **ταυτολογία**.
- **Εάν** **φ** είναι η σύζευξη όλων των υποθέσεων και **ψ** το συμπέρασμα, **τότε**
  - θα πρέπει ν'αποδειχθεί ότι **φ→ψ** είναι **ταυτολογία.**
  - ή ισοδύναμα θα πρέπει να αποδειχθεί ότι **φ** $\models$ **ψ**.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Μια **ταυτολογία** της μορφής **φ→ψ** ονομάζεται επίσης (**λογική ή σημασιολογική**) **συνέπεια**.
  - Για παράδειγμα, οι τύποι **p→T** και **F→p** είναι **ταυτολογίες**, **(αληθείς για κάθε τιμή του p**). Ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε **p** $\models$ **T** ή **F** $\models$ **p**.
  - **Ταυτολογίες αυτής της μορφής μπορούν να χρησιμοποιηθούν** σαν **σχήματα**. Τα προηγούμενα παραδείγματα σε σχήματα γίνονται **φ→T** και **F→φ** όπου **φ** είναι τύπος ή ισοδύναμα **φ** $\models$ **T** και **F** $\models$ **φ**.
- Οι **συμπερασματικοί κανόνες** είναι ουσιαστικά **σχήματα ταυτολογιών** αυτής της μορφής. Για παράδειγμα, ο **συμπερασματικός κανόνας** της **απόσπασης (modus ponens**) έχει ως εξής **φ, φ→ψ** $\models$ **ψ**, ή ισοδύναμα ο τύπος (**φ ∧(φ→ψ)) →ψ** είναι **ταυτολογία**.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.
2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Η συνέπεια $\boldsymbol{\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \models \psi}$, όπου $\boldsymbol{\varphi_i}$ **(1≤i≤κ)** είναι τύποι, μπορεί να αποδειχθεί
  - **είτε** με την **μέθοδο των *πινάκων αληθείας***
  - **ή** με την **συμπερασματική** ή **παραγωγική συλλογιστική** (**deductive reasoning**).
- Με την **μέθοδο των πινάκων αληθείας** **ελέγχουμε ότι ένας συγκεκριμένος τύπος** είναι **ταυτολογία**.
- Η **συμπερασματική** ή **παραγωγική συλλογιστική** (deductive reasoning) χρησιμοποιεί **συμπερασματικούς κανόνες (inference rules) οι οποίοι δημιουργούν νέους τύπους**.
  - Οι **νέοι τύποι προστίθενται στη λίστα των υποθέσεων** και
  - είναι **συμβατοί με τις υποθέσεις**.

2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Για να αποδείξουμε την ***συνέπεια (logical consequence)***

$$\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \models \psi$$

όπου φ_i **(1≤i≤κ)** είναι τύποι, με την μέθοδο των πινάκων αληθείας θα **πρέπει να αποδείξουμε** την **ταυτολογία**

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_\kappa \rightarrow \psi$$

2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Παράδειγμα 1**: Ο πίνακας **Πίνακας 3.7** αποδεικνύει την **ορθότητα** του **διαζευκτικού συλλογισμού**, $p \lor q, \neg p \models q$. Δηλαδή δείχνει ότι ο τύπος $((p \lor q) \land \neg p) \rightarrow q$ είναι **ταυτολογία**.

p	q	p ∨ q	¬p	(p ∨ q) ∧ ¬ p	((p ∨ q) ∧ ¬p) → q
Α	Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Α	Α	Α
Ψ	Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Πίνακας 3.7: Ορθότητα διαζευκτικού συλλογισμού.

2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Παράδειγμα 2**: Ο πίνακας **Πίνακας 3.8** αποδεικνύει την ορθότητα του **κανόνα της απόσπασης (modus ponens)**,

$$\mathbf{p, p \rightarrow q \models q},$$

δείχνει ότι ο τύπος **(p ∧ (p→q)) → q** είναι **ταυτολογία**.

p	q	p → q	p ∧ (p→q)	(p ∧ (p→q)) → q
Α	Α	Α	Α	Α
Α	Ψ	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Α	Α	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Πίνακας 3.8: Ορθότητα κανόνα απόσπασης.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Με την **μέθοδο των πινάκων αληθείας** **ελέγχουμε εάν ένας τύπος είναι ταυτολογία**. Το **μέγεθος του πίνακα αληθείας μεγαλώνει εκθετικά με το πλήθος των προτασιακών μεταβλητών**.
- Το πρόβλημα αυτό παρακάμπτεται από **την συμπερασματική ή παραγωγική (deductive) μέθοδο** αποδείξης. Μ' αυτή τη μέθοδο
  - **συμπερασματικοί κανόνες (inference rules) εξάγουν τύπους (συμπεράσματα)**
  - τους οποίους **προσθέτουν στις υποθέσεις** μέχρι **να εξαχθεί το τελικό συμπέρασμα**.

Η μέθοδος στηρίζεται σε συντακτική επεξεργασία των τύπων.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Η **παραγωγική συλλογιστική** (**deductive reasoning**) χρησιμοποιεί **συντακτική επεξεργασία των τύπων**.
  - **Όταν** ένα σύστημα αποδείξεων **βασίζεται στη συντακτική δομή των προτάσεων** και χρησιμοποιεί **ένα σύνολο από *συμπερασματικούς κανόνες* για να παράξει νέους τύπους** **τότε** έχουμε ***συντακτική παραγωγή συμπερασμάτων*** και αυτό παριστάνεται με το σύμβολο **|–**.
- Το σύμβολο **|–** λέγεται ***συντακτική συνεπαγωγή*** ή ***συντακτική εξαγωγή*** (***derivation***) ή ***παραγωγή*** (***deduction***) συμπεράσματος και ο αντίστοιχος **συμπερασματικός κανόνας** ονομάζεται ***κανόνας εξαγωγής*** (***derivation rule)*** ή ***κανόνας παραγωγής*** (***deduction rule***).
- Ο ***κανόνας εξαγωγής*** ή ***παραγωγής*** (***derivation ή deduction rule***) **της *απόσπασης*** (***modus ponens)*** είναι, **P, P→Q |– Q.**

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Μερικοί Συμπερασματικοί Κανόνες του Προτασιακού Λογισμού φαίνονται στο Πίνακα 2.9.

1.	$\varphi, \varphi \rightarrow \psi \models \psi$	Κανόνας απόσπασης (modus ponens)
2.	$\neg\psi, \varphi \rightarrow \psi \models \neg\varphi$	Κανόνας modus tollens
3.	$\varphi, \psi \models \varphi \wedge \psi$	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης
4.	$\varphi \wedge \psi \models \varphi$ (ή $\varphi \wedge \psi \models \psi$)	Κανόνας διαγραφής σύζευξης
5.	$\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \omega \models \varphi \rightarrow \omega$	Υποθετικός συλλογισμός
6.	$\varphi \vee \psi, \neg\varphi \models \psi$	Διαζευκτικός συλλογισμός ή κανόνας επίλυσης μονάδος
7.	$\varphi \rightarrow \psi, \neg\varphi \rightarrow \psi \models \psi$	Νόμος των περιπτώσεων

Πίνακας 2.9: Μερικοί Συμπερασματικοί Κανόνες του Προτασιακού Λογισμού

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Υπάρχουν διάφορα συστήματα τα οποία με **παραγωγικούς *κανόνες*** **εξάγουν** **τύπους** τα οποία λέγονται ***τυπικά συστήματα***. **Όλα τα τυπικά συστήματα έχουν τα εξής κοινά χαρακτηριστικά**.
  - **Έχουν μία λίστα επιτρεπτών παραγωγικών κανόνων L**.
  - **Δημιουργούν μια λίστα T από τύπους**.
    - Αρχικά η λίστα **T** είναι **άδεια**.
    - Οι **υποθέσεις ενός προβλήματος προστίθενται στη λίστα**
    - καθώς και **οι τύποι που εξάγονται με κανόνες** από προηγούμενους τύπους.
    - Αυτή **η διαδικασία συνεχίζεται** μέχρι **να δημιουργηθεί τα τελικό συμπέρασμα**.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Ένα σύστημα το οποίο εξάγει τύπους θα πρέπει εκτός από την **ορθότητα των παραγόμενων τύπων** να είναι ***πλήρες***. Αυτό σημαίνει ότι **κάθε τύπος** ο οποίος είναι (**σημασιολογική) συνέπεια των υποθέσεων** **θα πρέπει να εξάγεται από το σύστημα**.
- Υπάρχουν πολλά είδη τυπικών συστημάτων. Τα πιο γνωστά είναι τα ***συστήματα Hilbert*** και τα ***συστήματα φυσικών συμπερασμάτων*** και τα δύο τα συναντάμε σε παραλλαγές.
  - Τα **συστήματα Hilbert** **χρησιμοποιούν** **ένα σύνολο από σχήματα λογικών αξιωμάτων** ενώ
  - τα **συστήματα φυσικών συμπερασμάτων** **δεν χρησιμοποιούν** **σχήματα λογικών αξιωμάτων**.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Μια ***απόδειξη (proof)*** σ' ένα **τυπικό σύστημα** ορίζεται ως μια **ακολουθία τύπων** κάθε τύπος της οποίας παράγεται μ' ένα από τους εξής τρόπους.
  - **1. Εάν** το σύστημα χρησιμοποιεί σχήματα λογικών αξιωμάτων, τότε **ένας τύπος μπορεί να δημιουργηθεί ως στιγμιότυπο (instance) ενός αξιώματος του συστήματος** μ' αντικατάσταση των μεταβλητών του από τύπους.
  - **2. Ένας τύπος μπορεί να παραχθεί** από την **εφαρμογή *ενός παραγωγικού κανόνα*** (*inference rule*) του συστήματος στους προηγούμενους τύπους της ακολουθίας.
- **Εάν** η ακολουθία των τύπων οδηγήσει σε κάποιο συγκεκριμένο τύπο **φ τότε** λέμε ότι **η ακολουθία των τύπων** είναι η ***απόδειξη του φ*** **από το σύστημα** ή ότι το ***φ είναι θεώρημα του συστήματος***.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Ένα **τυπικό σύστημα** είναι **γενικό σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων/προτάσεων**. Για να κάνει αποδείξεις, το τυπικό σύστημα, σε κάποιο **συγκεκριμένο πρόβλημα** θα πρέπει **να προστεθούν στο σύστημα κάποιες προτάσεις, υποθέσεις (premises), σχετικές με το πρόβλημα**.
- Μια ***εξαγωγή ή παραγωγή (deduction) συμπεράσματος (πρότασης/τύπου)*** σ' ένα τυπικό σύστημα ορίζεται **ως μια ακολουθία τύπων** κάθε τύπος της οποίας παράγεται μ' ένα από τους εξής τρόπους.
  - **1. Εάν** το σύστημα χρησιμοποιεί σχήματα λογικών αξιωμάτων, **τότε ένας τύπος** μπορεί **να είναι στιγμιότυπο (instance) των αξιωμάτων**.
  - **2. Ένας τύπος** μπορεί **να είναι μια υπόθεση**.
  - **3. Ένας τύπος** μπορεί **να παραχθεί από την εφαρμογή ενός κανόνα εξαγωγής συμπερασμάτων του συστήματος στους προηγούμενους τύπους της ακολουθίας**.

- **Εάν** $\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa$ είναι οι υποθέσεις ενός προβλήματος και **ψ** το συμπέρασμα το οποίο εξάγεται από το τυπικό σύστημα **ΤΣ** χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό για να δηλώσουμε αυτή την εξαγωγή:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa\} \vdash_{\text{ΤΣ}} \psi \quad \text{ή} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \vdash_{\text{ΤΣ}} \psi$$

  - **Εάν** το τυπικό σύστημα **ΤΣ** είναι **γνωστό** χρησιμοποιείται ο εξής συμβολισμός:

$$\{\varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa\} \vdash \psi \quad \text{ή} \quad \varphi_1, \ldots, \varphi_\kappa \vdash \psi$$

- **Εάν κ=0 τότε** έχουμε ***απόδειξη***, όχι ***εξαγωγή συμπερασμάτων***, γι' αυτό χρησιμοποιείται ο συμβολισμός

$$\vdash \psi$$

  - **Εάν** το **ψ** είναι ένα θεώρημα του τυπικού συστήματος, αυτό μπορεί ν' αποδειχθεί χωρίς επιπλέον υποθέσεις.

- **Έννοια τυπικής απόδειξης**. Θέλουμε **ν' αποδείξουμε** τον **τύπο (πρόταση)** **¬r** έχοντας ως **υποθέσεις** τους τύπους **p→q, q→¬r, ¬p→¬r**, δηλαδή θέλουμε ν' *αποδείξουμε την συνέπεια (logical consequence)*,

$$p\to q,\ q\to\neg r,\ \neg p\to\neg r \models \neg r$$

  - ή θέλουμε να κάνουμε την ***εξαγωγή (deduction) συμπεράσματος***

$$p\to q,\ q\to\neg r,\ \neg p\to\neg r \vdash \neg r$$

Όροι τυπικής απόδειξης	***Δικαιολόγηση***
1. p→q	υπόθεση
2. q→¬r	υπόθεση
3. ¬p→¬r	υπόθεση
4. p→¬r	υποθετικός συλλογισμός στις 1 και 2
5. ¬r	Νόμος των περιπτώσεων στις 3 και 4

Τέλος Μαθήματος

Ευχαριστώ!