ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διδάσκων Γεώργιος Τζανετόπουλος *Τελικό Διαγώνισμα*

1. Λύστε την ακόλουθη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (*variation of parameters*):

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}=e^x\,sin(x)\,,x>0$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\begin{cases}1+\sin(\pi t)\,,|t|<1\\ 0,|t|>1\end{cases}.$

Υπολογίστε το μετασχηματισμό *Fourier* της f χρησιμοποιώντας ότι:

i) $\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\sin(\alpha t)\}_{(s)}=\frac{\pi}{i}[\boldsymbol{\delta}(s-\alpha)-\boldsymbol{\delta}(s+\alpha)]$ **ii)** $\boldsymbol{\mathcal{F}}\{1\}_{(s)}=2\pi\,\boldsymbol{\delta}(s)$ **iii)** $\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t)\}_{(s)}=\left[\pi\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{1}{is}\right]$

και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού *Fourier* όπου $\boldsymbol{\delta}$ η συνάρτηση του *Dirac,* $\mathbf{u}$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος

$$u(t)=\begin{cases}1,t>0\\ 0,t<0\end{cases}.$$

3. Βρείτε το μετασχηματισμό *Laplace* της συνάρτησης:

$$f(t)=\begin{cases}0,t\le\alpha\\ \frac{k(t-\alpha)}{\beta-\alpha},\alpha\le t\le\beta,\acute{o}\pi o\upsilon\ \beta>\alpha>0,k>0\\ 0,t>\beta\end{cases}$$

4. Δίνεται ο επόμενος πίνακας τιμών μίας συνάρτησης f .

k	0	1	2	3
x_k	0	1	2	3
$y_k=f(x_k)$	0	2	1	1

α) Υπολογίστε το πολυώνυμο παρεμβολής *Lagrange*.
β) Με παρεμβολή *Lagrange* εκτιμήστε την τιμή $f(6)$.
γ) Να γίνει η γραφική παράσταση του πολυωνύμου παρεμβολής.

5. Ένα νόμισμα με όψεις $K o\rho\acute{\omega}\nu\alpha, \Gamma\rho\acute{\alpha}\mu\mu\alpha\tau\alpha$ ρίχνεται 5 φορές. Αν $\mathcal{X}$ η τυχαία μεταβλητή που δηλώνει πόσες φορές εμφανίζεται το διατεταγμένο ζεύγος K,Γ να βρεθούν:
α) Η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{X}$.
β) Η μέση τιμή και η διασπορά της τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{X}$.

ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΙΑΣ		
1		2,50
2		2,50
3		2,50
4	α)	1,00
	β)	1,00
	γ)	0,50
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

ΤΜΗΜΑ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ		
1		2,50
2		2,50
3		2,50
5	α)	1,25
	β)	1,25
ΣΥΝΟΛΟ		***10,00***

Λύσεις των θεμάτων

1. Η χαρακτηριστική εξίσωση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος είναι:

$$\lambda^2 + \lambda = 0 \Longrightarrow \lambda(\lambda + 1) = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$$

Άρα οι συναρτήσεις βάσης του ιδιόχωρου των λύσεων του ομογενούς προβλήματος είναι οι:

$$y_1(x) = e^{\lambda_1 x} = 1 \text{ και } y_2(x) = e^{\lambda_2 x} = e^{-x}$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων ως προς τις παραγώγους συναρτήσεις v_1', v_2' :

$$\begin{matrix} v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' = e^x\,sin(x) \end{matrix} \Longrightarrow \begin{matrix} v_1' + v_2'e^{-x} = 0 \\ -v_2'e^{-x} = e^x\,sin(x) \end{matrix}$$

Με την μέθοδο του *Cramer* παίρνουμε:

$$v_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ e^x\,sin(x) & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{-sin(x)}{-e^{-x}} \Longrightarrow v_1' = e^x\,sin(x)$$

$$v_2' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^x\,sin(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & e^{-x} \\ 0 & -e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{e^x\,sin(x)}{-e^{-x}} \Longrightarrow v_2' = -e^{2x}\,sin(x)$$

Με ολοκλήρωση των v_1', v_2' βρίσκουμε τις v_1, v_2 όπως παρακάτω:

$$v_1(x) = \int e^x\,sin(x)\,dx \Longrightarrow v_1(x) = \frac{1}{2}e^x[sin(x) - cos(x)]$$

$$v_2(x) = \int -e^{2x}\,sin(x)\,dx \Longrightarrow v_2(x) = -\frac{1}{5}e^{2x}[2sin(x) - cos(x)]$$

Συνεπώς η ειδική λύση της δοσμένης μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x) \Longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}e^x[sin(x) - \cos(x)] - e^{-x}\frac{1}{5}e^{2x}[2sin(x) - cos(x)]$$

$$\Longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{2}e^x[sin(x) - \cos(x)] - \frac{1}{5}e^x[2sin(x) - \cos(x)] \Longrightarrow y_p(x) = \frac{1}{10}e^x\,sin(x) - \frac{3}{10}e^x cos(x)$$

και η γενική λύση του δοσμένου προβλήματος είναι:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x)$$

όπου αντικαθιστώντας παίρνουμε τελικά:

$$\boxed{y(x) = c_1 + c_2e^{-x} + \frac{1}{10}e^x\,sin(x) - \frac{3}{10}e^x cos(x)}$$

2. Είναι: $u(t+1)=\begin{cases}1, t>-1\\ 0, t<-1\end{cases}$ και $u(t-1)=\begin{cases}1, t>1\\ 0, t<1\end{cases}$. Άρα: $u(t+1)-u(t-1)=\begin{cases}1, \ |t|<1\\ 0, |t|>1\end{cases}$, συνεπώς είναι φανερό ότι: $\boxed{f(t)=[1+g(t)]\cdot[u(t+1)-u(t-1)]}$ (1), με $g(t)=\sin(\pi t)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση **ii)** την ιδιότητα της γραμμικότητα και της χρονικής μετατόπισης του μετασχηματισμού *Fourier*, έχουμε:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t+1)-\mathbf{u}(t-1)\}_{(s)}= e^{is}\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t)\}_{(s)}-e^{-is}\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t)\}_{(s)}=\left[e^{is}-e^{-is}\right]\left[\pi\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{1}{is}\right]=2isin(s)\left[\pi\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{1}{is}\right]$$

$$=2\pi isin(s)\boldsymbol{\delta}(s)+2\frac{\sin(s)}{s}=2\pi isin(0)\boldsymbol{\delta}(s)+2\frac{\sin(s)}{s}=2\frac{\sin(s)}{s}\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t+1)-\mathbf{u}(t-1)\}_{(s)}=2\frac{\sin(s)}{s}}\ (2)$$

Επίσης από τη γραμμικότητα του μετασχηματισμού *Fourier* και τις υποθέσεις **i)** και **ii)**έχουμε:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\{1+g(t)\}_{(s)}=\boldsymbol{\mathcal{F}}\{1\}_{(s)}+\boldsymbol{\mathcal{F}}\{g(t)\}_{(s)}=2\pi\,\boldsymbol{\delta}(s)+\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\sin(\pi t)\}_{(s)}=2\pi\,\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{\pi}{i}[\boldsymbol{\delta}(s-\pi)-\boldsymbol{\delta}(s+\pi)]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}}\{1+g(t)\}_{(s)}=2\pi\,\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{\pi}{i}[\boldsymbol{\delta}(s-\pi)-\boldsymbol{\delta}(s+\pi)]}\ (3)$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) και την ιδιότητα της συνέλιξης του μετασχηματισμού *Fourier* παίρνουμε ότι:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}\{f(t)\}_{(s)}=\boldsymbol{\mathcal{F}}\{[1+g(t)]\cdot[\mathbf{u}(t+1)-\mathbf{u}(t-1)]\}_{(s)}=\frac{1}{2\pi}\left[\boldsymbol{\mathcal{F}}\{1+g(t)\}_{(s)}*\boldsymbol{\mathcal{F}}\{\mathbf{u}(t+1)-\mathbf{u}(t-1)\}_{(s)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[2\pi\,\boldsymbol{\delta}(s)+\frac{\pi}{i}[\boldsymbol{\delta}(s-\pi)-\boldsymbol{\delta}(s+\pi)]\right]*2\frac{\sin(s)}{s}=2\boldsymbol{\delta}(s)*\frac{\sin(s)}{s}+\frac{1}{i}\boldsymbol{\delta}(s-\pi)*\frac{\sin(s)}{s}-\frac{1}{i}\boldsymbol{\delta}(s+\pi)*\frac{\sin(s)}{s}$$

$$=2\frac{\sin(s)}{s}+\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(s-\lambda)}{s-\lambda}\boldsymbol{\delta}(\lambda-\pi)d\lambda-\frac{1}{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(s-\lambda)}{s-\lambda}\boldsymbol{\delta}(\lambda+\pi)d\lambda=2\frac{\sin(s)}{s}+\frac{1}{i}\left[\frac{\sin(s-\lambda)}{s-\lambda}\right]_{\lambda=\pi}-\frac{1}{i}\left[\frac{\sin(s-\lambda)}{s-\lambda}\right]_{\lambda=-\pi}$$

$$=2\frac{\sin(s)}{s}+\frac{1}{i}\frac{\sin(\pi-\lambda)}{\pi-\lambda}-\frac{1}{i}\frac{\sin(\pi+\lambda)}{\pi+\lambda}\Longrightarrow\boxed{\boldsymbol{\mathcal{F}}\{f(t)\}_{(s)}=2\frac{\sin(s)}{s}-i\frac{\sin(\pi-\lambda)}{\pi-\lambda}+i\frac{\sin(\pi+\lambda)}{\pi+\lambda}}$$

3. Είναι:

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\}_{(s)}=\int_0^{+\infty}e^{-st}f(t)dt=\int_0^{a}e^{-st}\,0dt+\int_a^{\beta}e^{-st}\frac{k(t-\alpha)}{\beta-\alpha}dt+\int_\beta^{+\infty}e^{-st}\,0dt=\int_a^{\beta}e^{-st}\frac{k(t-\alpha)}{\beta-\alpha}dt=$$

$$=\frac{k}{\beta-\alpha}\int_a^{\beta}e^{-st}(t-\alpha)dt=\frac{k}{\beta-\alpha}\int_a^{\beta}e^{-st}tdt-\frac{k\alpha}{\beta-\alpha}\int_a^{\beta}e^{-st}dt=\frac{k}{\beta-\alpha}\int_a^{\beta}\frac{-1}{s}\frac{d}{dt}(e^{-st})\,tdt+\frac{k\alpha}{\beta-\alpha}\left\{\frac{1}{s}e^{-st}\right\}_{t=a}^{t=b}=$$

$$=\frac{k}{\beta-\alpha}\left\{\left(\frac{-1}{s}\right)te^{-st}\right\}_{t=a}^{t=\beta}+\frac{k}{\beta-\alpha}\frac{1}{s}\int_a^{\beta}e^{-st}dt+\frac{k\alpha}{(\beta-\alpha)s}\left(e^{-\beta s}-e^{-\alpha s}\right)=$$

$$=\frac{-k}{(\beta-\alpha)s}\left(\beta e^{-\beta s}-\alpha e^{-\alpha s}\right)-\frac{k}{(\beta-\alpha)s^2}\{e^{-st}\}_{t=a}^{t=b}+\frac{k\alpha}{(\beta-\alpha)s}\left(e^{-\beta s}-\alpha e^{-\alpha s}\right)=$$

$$=\frac{-k}{(\beta-\alpha)s}\left(\beta e^{-\beta s}-\alpha e^{-\alpha s}\right)-\frac{k}{(\beta-\alpha)s^2}\left(e^{-\beta s}-e^{-\alpha s}\right)+\frac{k\alpha}{(\beta-\alpha)s}\left(e^{-\beta s}-e^{-\alpha s}\right)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\boxed{\boldsymbol{\mathcal{L}}\{f(t)\}_{(s)}=-\frac{k}{s}e^{-\beta s}-\frac{k}{s^2}\frac{e^{-\beta s}-e^{-\alpha s}}{\beta-\alpha}}$$

4.

α) Οι συντελεστές του πολυωνύμου *Lagrange* δίνονται από:

$$l_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} \Longrightarrow \boxed{l_0(x) = -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3)}$$

$$l_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} \Longrightarrow \boxed{l_1(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x-3)}$$

$$l_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)} \Longrightarrow \boxed{l_2(x) = -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3)}$$

$$l_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} \Longrightarrow \boxed{l_2(x) = \frac{1}{6}x(x-1)(x-2)}$$

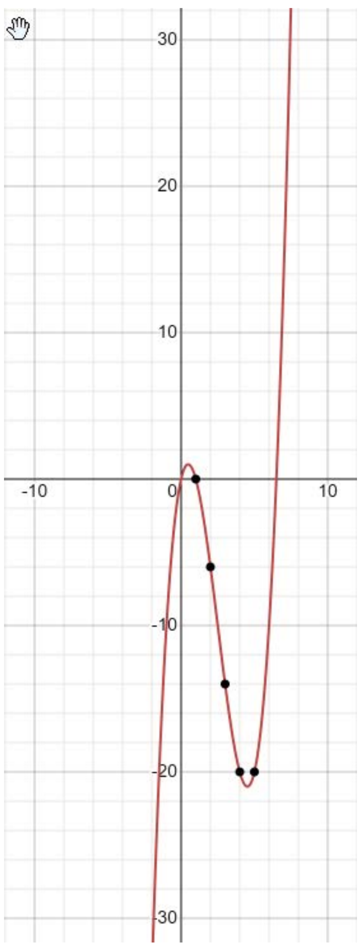
Άρα:

$$p_3(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(x_2)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) = x(x-2)(x-3) - \tfrac{1}{2}x(x-1)(x-3) + \tfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)$$

$$\Longrightarrow \boxed{p_3(x) = \tfrac{2}{3}x^3 - 5x^2 + \tfrac{13}{3}x}.$$

β) $f(6) \approx p_3(6) = \frac{2}{3}\cdot 6^3 - 5\cdot 6^2 + \frac{13}{3}\cdot 6 = 4\cdot 6^2 - 5\cdot 6^2 + 26 = -6^2 + 26 = -10$

γ)



5. **α)** Ο δειγματικός χώρος Ω με τα αποτελέσματα της ρίψης του νομίσματος 5 διαδοχικές φορές αποτελείται από $2^5 = 32$ πιθανά ενδεχόμενα. Άρα $\mathcal{N}(\Omega) = 32$. Η τυχαία μεταβλητή $\mathcal{X}$ μπορεί να πάρει τις τιμές 0, 1, 2. Οπότε έχουμε:

$P[\mathcal{X} = 2] = \frac{6}{32}$ καθώς $[\mathcal{X} = 2] = \{ΚΓΚΚΓ, ΚΓΓΚΓ, ΚΚΓΚΓ, ΚΓΚΓΚ, ΓΚΓΚΓ, ΚΓΚΓΓ\}$

$P[\mathcal{X} = 0] = \frac{6}{32}$ καθώς $[\mathcal{X} = 0] = \{ΚΚΚΚΚ, ΓΚΚΚΚ, ΓΓΓΓΓ, ΓΓΓΓΚ, ΓΓΚΚΚ, ΓΓΓΚΚ\}$

$P[\mathcal{X} = 1] = \frac{20}{32}$ καθώς $P[\mathcal{X} = 1] = 1 - P[\mathcal{X} = 2] - P[\mathcal{X} = 0]$

β) Είναι:

$$E(\mathcal{X}) = \sum_{x=0}^{2} x f(x) = 0f(0) + 1f(1) + 2f(2) = f(1) + 2f(2) = \frac{20}{32} + 2 \cdot \frac{6}{32} = 1 \Longrightarrow \boxed{E(\mathcal{X}) = 1}$$

Επίσης:

$$E(\mathcal{X}^2) = \sum_{x=0}^{2} x^2 f(x) = 0^2 f(0) + 1^2 f(1) + 2^2 f(2) = f(1) + 4f(2) = \frac{20}{32} + 4 \cdot \frac{6}{32} = \frac{44}{32} = \frac{11}{8}$$

Συνεπώς:

$$Var(\mathcal{X}) = E(\mathcal{X}^2) - [E(\mathcal{X})]^2 = \frac{11}{8} - 1 = \frac{3}{8} \Longrightarrow \boxed{Var(\mathcal{X}) = \frac{3}{8}}$$