παράδοση έως 24-03-21
ώρα 22^{00}

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

Μελάκης Νικόλαος
tp4726

Άσκηση 1

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&4&9&16\\1&8&27&64\\1&16&81&256\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_2=\Sigma_2-2\Sigma_1}\begin{vmatrix}1&0&3&4\\1&2&9&16\\1&6&27&64\\1&14&81&256\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_3=\Sigma_3-3\Sigma_3}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&0&4\\1&2&6&16\\1&6&24&64\\1&14&78&256\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_4=\Sigma_4-4\Sigma_1}\begin{vmatrix}1&0&0&0\\1&2&6&14\\1&6&24&60\\1&14&78&252\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\cdot\begin{vmatrix}2&6&16\\6&24&60\\14&78&252\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}1&6&12\\1&24&60\\1&78&252\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}1&2&12\\1&6&60\\1&14&252\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}1&2&6\\1&6&24\\1&14&78\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}2&6&16\\6&24&60\\14&78&252\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_2=\Sigma_2-3\Sigma_2}\begin{vmatrix}2&0&12\\6&6&60\\14&36&252\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_3=\Sigma_3-6\Sigma_1}\begin{vmatrix}2&0&0\\6&6&24\\14&36&168\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\begin{vmatrix}6&24\\36&168\end{vmatrix}+0-0=2\begin{vmatrix}6&24\\36&168\end{vmatrix}$$ το οποίο έχει ορίζουσα

$$2(6\cdot168-24\cdot36)=2\cdot144=\boxed{288}$$

Εν τέλει προκύπτει ότι $\boxed{\det(A)=288}$ το οποίο επαληθεύεται στο Octave (δείτε askhsh1.jpg)

Άσκηση 2

$$B=\begin{bmatrix}0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\\1&2&3&0\end{bmatrix}$$

a)

$$\det(B)=\begin{vmatrix}0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\\1&2&3&0\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_3=\Sigma_3-2\Sigma_2}\begin{vmatrix}0&1&0&3\\3&0&1&2\\2&3&-6&1\\1&2&-1&0\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_4=\Sigma_4-3\Sigma_2}$$

$$\begin{vmatrix}0&1&0&0\\3&0&1&2\\2&3&-6&-8\\1&2&-1&-6\end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix}0&1&2\\3&-6&-8\\2&-6&-6\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}3&1&2\\2&-6&-8\\1&-1&-6\end{vmatrix}+0\begin{vmatrix}3&0&2\\2&3&-8\\1&2&-6\end{vmatrix}-0\begin{vmatrix}3&0&1\\2&3&-6\\1&2&-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&1&2\\2&-6&-8\\1&-1&-6\end{vmatrix}\xrightarrow{\Sigma_1=\Sigma_1-3\Sigma_2}\begin{vmatrix}0&1&0\\20&-6&4\\4&-1&-4\end{vmatrix}=0\begin{vmatrix}-6&4\\-1&-4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}20&4\\4&-4\end{vmatrix}$$

$$+0\begin{vmatrix}20&-6\\4&-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}20&4\\4&-4\end{vmatrix}=20(-4)-4\cdot4=-96$$

Επομένως $\det(B)=-96\neq0$ άρα υπάρχει ο B^{-1}

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}0&1&2&3&1&0&0&0\\3&0&1&2&0&1&0&0\\2&3&0&1&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

Επειδή όμως το στοιχείο (1,1) είναι 0, βρίσκουμε το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο στην στήλη 1 και το ανταλλάσουμε.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc}3&0&1&2&0&1&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\2&3&0&1&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{\Gamma_1=\frac{\Gamma_1}{3}}\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&1/3&2/3&0&1/3&0&0\\0&1&2&3&1&0&0&0\\2&3&0&1&0&0&1&0\\1&2&3&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 - 2r_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20/3 & -28/3 & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4 = r_4 - r_1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2/3 & -1/3 & 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 = r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{20}{3} & -\frac{28}{3} & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 8/3 & -2/3 & 0 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_4 = r_4 - 2r_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -20/3 & -28/3 & -3 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -20/3 & -2 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3 = -\frac{3r_3}{20}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & \frac{-3}{20} & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -20/3 & -2 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 = r_1 - \frac{r_3}{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/20 & 3/10 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \\ 0 & 0 & -4/3 & -20/3 & -2 & -1/3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2 = r_2 - 2r_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/20 & 3/10 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 = \Gamma_4 + \frac{4\Gamma_3}{3}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/20 & 3/10 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -24/5 & -7/5 & -1/5 & -1/5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_4 = \frac{5\Gamma_4}{24}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1/5 & -3/20 & 3/10 & 1/20 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/24 & 1/24 & 1/24 & -5/24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 = \Gamma_1 - \frac{\Gamma_4}{5}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/24 & 7/24 & 1/24 & 1/24 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 1/10 & -1/5 & 3/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/24 & 1/24 & 1/24 & -5/24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 = \Gamma_2 - \frac{\Gamma_4}{5}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/24 & 7/24 & 1/24 & 1/24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/24 & -5/24 & 7/24 & 1/24 \\ 0 & 0 & 1 & 7/5 & 9/20 & 1/10 & -3/20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/24 & 1/24 & 1/24 & -5/24 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 = \Gamma_3 - \frac{7\Gamma_4}{5}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -5/24 & 7/24 & 1/24 & 1/24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/24 & -5/24 & 7/24 & 1/24 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/24 & 1/24 & -5/24 & 7/24 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7/24 & 1/24 & 1/24 & -5/24 \end{array}\right]$$

Επομένως

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -5/24 & 7/24 & 1/24 & 1/24 \\ 1/24 & -5/24 & 7/24 & 1/24 \\ 1/24 & 1/24 & -5/24 & 7/24 \\ 7/24 & 1/24 & 1/24 & -5/24 \end{bmatrix}$$

β) Δείτε askhsh2a.jpg

γ)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 6 & 8 \\ 8 & 14 & 8 & 6 \\ 6 & 8 & 14 & 8 \\ 8 & 6 & 8 & 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 7 & 4 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 7 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

Ασκηση 4

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{ν.δ.ο} \quad \Delta^2 = 4I$$

$$\Delta^2 = \Delta \cdot \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4I$$

Επομένως $\boxed{\Delta^2 = 4I}$

AM = TM4726

$$\Delta^k = \Delta^{4726} = \left(\Delta^{2363}\right)^2 \quad \left(\Delta^2\right)^{2363} = (4I)^{2363} = \boxed{4^{2363} \cdot I}$$