(23/3/21)

① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** **ΔΙΑΛΕΞΗ #5**

ΓΕΝΝΗΤΡΙΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ (GENERATING FUNCTIONS) ΚΑΙ ΜΙΑ ΠΡΩΤΗ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΠΑΝΩ ΣΤΟΥΣ ΑΡΙΘΜΟΥΣ FIBONACCI.

- Πρακτικός ορισμός (χωρίς θεωρία σύγκλισης σειρών) (Γέφυρα που συνδέει διακριτά (αριθμήσιμο) με συνεχή μαθηματικά)!

↳ Η $F(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \underbrace{a_0+a_1x+a_2x^2}_{\text{συντελεστές}}+\dots$ καλείται γεννήτρια συνάρτηση.

- Παράδειγμα 1 (Απειρ. Λογ. 1):

Αν $a_n=\frac{1}{n!}$ $(0!=1)$, τότε $f(x)=e^x$ (σειρά Maclauren της εκθετικής)

$-\infty<x<+\infty$, $\underset{\overset{\|}{f(-1)}}{e^{-1}}=1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}+\dots$ (εναλλασσόμενη σειρά)

- Παράδειγμα 2 (Λυκείου):

Γεωμετρική σειρά: $a, a\omega, a\omega^2, a\omega^3$

$a+a\omega+a\omega^2+a\omega^3+\dots = a(\underbrace{1+\omega+\omega^2+\omega^3+\dots}_{f(x)=\frac{1}{1-\omega}})$

$=(\text{αν } -1\le\omega\le 1)=\frac{a}{1-\omega}$

$\rightarrow \boxed{F(x)=1+x+x^2+x^3+\dots} \rightarrow f(-1)=\cancel{1}-\cancel{1}+\cancel{1}-\cancel{1}+\dots=0\cdot\infty$

$\circ\ f(-1)\neq\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\neq 0\cdot\infty$

- Παράδειγμα 3:

$f(x)=\frac{1}{1-x^2}=1+x^2+x^4+x^6+\dots \rightarrow (x\neq\pm1)$

- Παράδειγμα 4:

Τις γεν. συν. μπορούμε να τις παραγωγίσουμε και να πάρουμε νέες!

$f(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots$

$f'(x)=[(1-x)^{-1}]'=-(1-x)^{-1-1}\cdot(1-x)'=\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}+\dots$

②

(... συνέχεια):

$$f'(-1) = \frac{1}{4} = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

→ <u>Παρατήρηση</u>:

Αν ήταν $1+2+3+4\dots$ δεν θα συνέκλινε $(\to +\infty)$ αλλά εναλλασσόμενη συγκλίνει.

- <u>Παράδειγμα 5</u>:

→ $$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k x^k = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots,$$

→ $$\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots$$

→ $$\frac{1/2}{1+1/2} = \frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \dots$$

- <u>Οι αριθμοί Fibonacci</u> ως το πιο χρήσιμο παράδειγμα αναδρομικής ακολουθίας (recurrence).

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 2), \text{ με } F_0 = 0,\ F_1 = 1, \quad F_{18} = ?$$

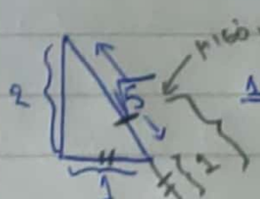
$F_2 = 1 + 0 = 1$

$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$

$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$

$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$

- <u>Ο Τύπος της "Χρυσής Τομής"</u>:



$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi, \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \bar{\varphi} \ (\text{"συζυγής" } \varphi)$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \bar{\varphi}^n\right]$$

check: $F_0 = 0$ O.K.

$F_1 = 1$ O.K.

<u>H/W</u>: Ελέγξτε τον τύπο για $n=2$, $n=3$, $n=4$

(<u>Υπ.</u>: $(a \pm \beta)^3 = a^3 \pm 3a^2\beta + 3a\beta^2 \pm \beta^3$)

③

- <u>Πως προέκυψε ο τύπος για τον τυχαίο F_n?</u> <u>(Απόδειξη)</u>

Η πρώτη χρήση της γεννήτριας συνάρτησης.

→ Έστω $f(x) = x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$

→ Άρα $xf(x) = x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 5x^6 + \dots$

→ $x^2 f(x) = x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 5x^7 + \dots$

$$f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = x + 0 + 0 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x)(1 - x - x^2) = x$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x}{\underbrace{1 - x - x^2}} = \frac{x}{(x-\phi)(x-\bar{\phi})} = \frac{A}{x-\phi} + \frac{B}{x-\bar{\phi}} \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{5}},\ B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

- $-x^2 - x + 1 = -1(x-\rho_1)(x-\rho_2)$

$$\rho_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \begin{cases} \phi \\ \bar{\phi} \end{cases}$$

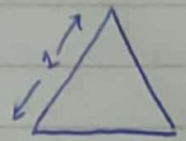
→ $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1}{x-\phi} - \frac{1}{x-\bar{\phi}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \phi^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\phi}^n\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \phi^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \bar{\phi}^n\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}\right) \cdot x^n$$

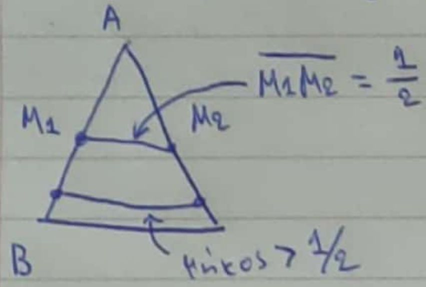
④

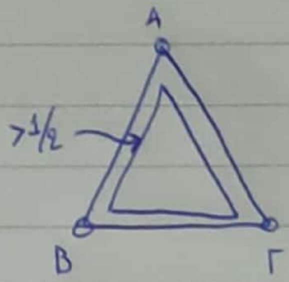
Ασκήσεις ό (προηγ. μάθημα ①)

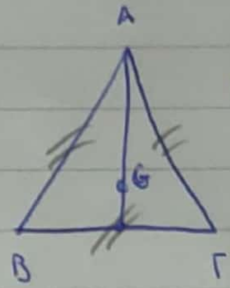


ισόπλευρο

- ① 4 σημεία τουλάχιστον ένα ζεύγος σε απόσταση $> 1/2$
  (Στην πράξη κάθε ζεύγους να έχει αυτή την ιδιότητα!)





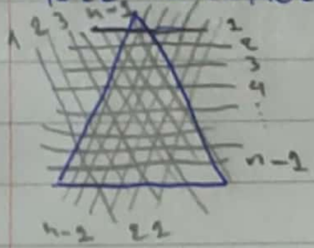


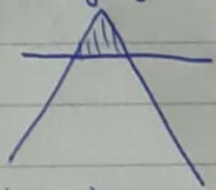
$AG = \frac{2}{3}\sqrt{1^2 - \frac{1}{4}}$
$= \frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{3} > 1/2$
$(\sqrt{3} > 3/2)$

H/W

- Γενική Άσκηση (Βάλτε μετά $n=2, n=3$)

→ Έστω n^2+1, $n \geq 2$ σημεία στο εσωτερικό τριγώνων
Τότε τουλάχιστον 1 ζεύγος απέχει $< 1/n$.





"τρίγωνα ισόπλευρα πλευράς $1/n$

πόσα τέτοια τρίγωνα?
$1+3+5+\ldots+2n-1$

→ Λήμμα: $1+3+5+\ldots+2n-1 = n^2$, $n \geq 2$

Απόδειξη: Από $1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

Άρα $1+2+\ldots+2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$

Άρα $1+3+5+\ldots+2n-1+2+4+6+\ldots+2n$
Άρα $1+3+5+\ldots+2\underbrace{(1+2+3+\ldots+n)}_{\frac{n(n+1)}{2} = n^2+n} = 2n^2+n$

(πίσω) → ...

⑤ (συνέχεια)

$\Rightarrow 1+3+5+\dots+2n-1 = 2n^2+n-n^2-n = n^2$

Τουλάχιστον 2 σημεία

είναι το ίδιο τριγωνάκι

• Προτεινόμενες Ασκήσεις:

① Αν στο ισόπλευρο πάρουμε 7 σημεία, τότε τουλάχιστον 2 έχουν απόσταση $< 1/2$