(9/3/21)

① **ΔΙΑΚΡΙΤΑ** — ΔΙΑΛΕΞΗ 2 (ή FTC)

- Η συνδυαστική ανάλυση κ' το τυπολόγιο απαρίθμησης (σε συνδυασμό με επαγωγή)

- Δύο τύποι των Combinatorics (Διακριτές πιθανότητες)

① Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να πάρουμε κ αντικείμενα από n, $k \le n$, $n = 1, 2, \ldots$ είναι nC_k (ή C_k^n) $= \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

② Οι τρόποι με τους οποίους μπορούμε να διατάξουμε κ από n λέγονται μεταθέσεις διαφορετικά αντικείμενα (permutations) είναι nP_k (ή P_k^n) $= \frac{n!}{(n-k)!}$
Δείτε πιο κάτω τι γίνεται αν υπάρχουν στα κ αντικείμενα μερικά πανομοιότυπα (π.χ. ΑΝΑΝΑΣ → 2 'Ν' και 2 'Α')

- Παράδειγμα 1:

Αν σε 1 ομάδα 10 ατόμων θέλουμε να βάλουμε τα 3 σε τηλεργασία με πόσους τρόπους (πόσες 3άδες) γίνεται;

Λύση:

Έχουμε $C_3^{10} = \frac{10!}{7!\,3!} = \frac{10^3 \cdot \cancel{9} \cdot \cancel{8}^4 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot \cancel{6}_2} = \frac{10 \cdot 12}{1} = 120$

- Παράδειγμα 2:

Από 10μελή επιτροπή θέλουμε να επιλέξουμε πρόεδρο, αντιπρόεδρο και γραμματέα. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

Λύση:

Έχουμε διάταξη (arrangement), άρα μεταθέσεις.
Επομένως, $P_3^{10} = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$

- Παρατήρηση (SOS):

(Μεταθέσεις με επανάληψη - Permutations with repetition)

Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΑΝΑΝΑΣ υπάρχουν;

→ Αν στα κ αντικείμενα έχω μερικά με $r_1, r_2, \ldots, r_m$ επαναλήψεις, τότε το $P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{r_1! \cdot r_2! \cdots r_m!}}$

Scanned with CamScanner

②

- <u>Παράδειγμα ~~8~~4:</u>

ΑΝΑΝΑΣ

3Α, 2Ν

$n=6$ (γράμματα)

$r_1=3$

$r_2=2$

$$P_6^6=\frac{6!}{(\cancel{6-6})!\,3!\,2!}=\frac{\cancel{6}\cdot5\cdot4\cdot3\cdot\cancel{2}}{\cancel{6}\cdot\cancel{2}}=60$$

SOS • **H/W 2:**

Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης "ΔΩΔΕΚΑΔΑ";

- <u>Επίλυση προβλημάτων είτε με χρήση του FTC είτε με επαγωγή χωρίς χρήση Combinatorics</u>

- <u>Παράδειγμα:</u>

Αν έχω 5 διαφορετικά βιβλία και θέλω να δω με πόσους τρόπους μπορώ να τα διατάξω στο ράφι της βιβλιοθήκης έχω $P_5^5=\frac{5!}{0!}=5!$

$$\boxed{5}\times\boxed{4}\times\boxed{3}\times\boxed{2}\times\boxed{1}=5!$$

Αν αυτές είναι οι θέσεις στο ράφι

- <u>Παράδειγμα:</u>

Δείξτε την ταυτότητα: $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$ για κάθε φυσικό n

<u>Λύση:</u> (με επαγωγή)

→ Ισχύει για $n=1$? $(1=2-1)$ Ισχύει!

Δέχομαι τον τύπο ~~[illegible]~~ και θα δείξω ότι ισχύει και για $n+1$

→ Θέλω να δείξω $\underbrace{1+2+2^2+\dots+2^{n-1}}_{2^n-1}+2^n=2^{n+1}-1$

Άρα θέλω $\Leftrightarrow 2^n-\cancel{1}+2^n=2^{n+1}-\cancel{1}$

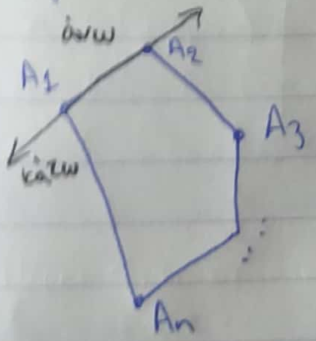
$\Leftrightarrow \boxed{2\cdot2^n=2^{n+1}}$ Ισχύει!

Scanned with CamScanner

③

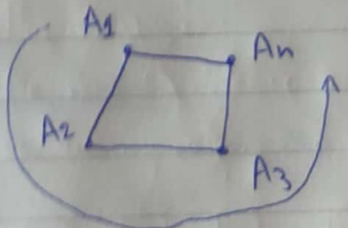
• Προβλήματα είτε με επαγωγή είτε με το FTC

→ Ορισμός Κυρτών πολυγώνων στο επίπεδο:



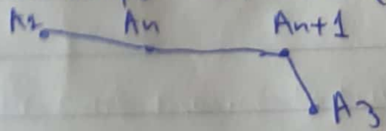
• Πρόβλημα 1 (εύκολο)

Αν το κυρτό πολύγωνο έχει n κορυφές $(n \geq 3)$ τότε έχει και n πλευρές (ακμές)



Εφαρμόζουμε επαγωγή
Ισχύει για $n=3$
δέχομαι για n .... να δείξω το $n+1$;

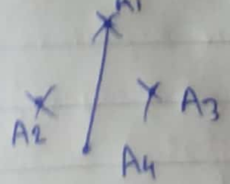
Σβήνουμε μία πλευρά και βάζουμε ένα σημείο ανάμεσά τους



$$\underbrace{n-1}_{\text{έβγαλα 1 πλευρά}}\underbrace{+2}_{\text{δημιουργήθηκαν 2 πλευρές}}=n+1$$

• Πρόβλημα 2

Με χρήση FTC δείξτε ότι το κυρτό πολύγωνο με n κορυφές $(n \geq 3)$ έχει $n \cdot (n-3)/2$ διαγωνίους



→ κάθε ... με $n-3$ κορυφές που δίνουν διαγωνίους
→ Αλλά επειδή κάθε $A_\kappa A_m$ διαγώνιος είναι η ίδια με την $A_m A_\kappa$ παίρνω $\underbrace{n}_{\text{κορυφές}}\underbrace{(n-3)}_{\text{ενώσεις}}/2$

SOS • H/W 3: Αποδείξτε τον τύπο με επαγωγή.

Scanned with CamScanner

SOS ④

∘ Πρόβλημα 3 (SOS):

Αν $A=\{1,2,\dots,10\}$ βρείτε πόσα υποσύνολα του A έχουν τουλάχιστον έναν άρτιο αριθμό ως στοιχείο τους.

→ Όλα τα υποσύνολα του A είναι $|\Omega(10)| = 2^{10}$

→ Το υποσύνολο $\{1,3,5,7,9\}$ δίνει ένα δυναμοσύνολο $\Omega(5)$ τα οποία δεν έχουν την υπόθεση του άρτιου στοιχείου.

→ Άρα από το $2^{10} - 2^5 = 2^5 \cdot (2^5 - 1) = 32 \cdot 31 = \dots\dots$

∘ ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΔΙΑΜΕΡΙΣΕΙΣ ΑΚΕΡΑΙΩΝ (integer Partitions)

→ Ορισμός: Αν n φυσικός αριθμός, $(1,2,\dots)$, μία διαμέριση του είναι ένα σύνολο από άλλους φυσικούς $n_1, n_2, \dots, n_k$: $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$

∘ Παράδειγμα:

Αν $\mu(n)$ ο αριθμός των διαμερίσεων

$\mu(1) = 1$

$\mu(2) = 2$

$\mu(3) = 3$

Πώς βρίσκεται $\mu(n)$ αν n μεγάλο;

↳ Χρειαζόμαστε την Θεωρία του Tomler(?) για τις γεννήτριες συναρτήσεις. → generating functions