Λογικός Προγραμματισμός

Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής
mmarak@cs.hmu.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Λογικός Προγραμματισμός

Μάθημα 5

- **Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.**

Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγ. Λογισμό (Μέρος Α)

- 4.1 Εισαγωγή. (Μέρος Α)
- 4.2 Σύνταξη της Κατηγορηματικής Λογικής. (Μέρος Α)
- 4.3 Ερμηνείες. (Μέρος Α)
- 4.4α. Λογικές ισοδυναμίες & Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων. (Μέρος Β)
- 4.4β. Λογικές ισοδυναμίες & μετασχ. τύπων. (Μέρος Β)
- 4.5 Τυπικά συστήματα & εξαγωγή συμπερ. (Μέρος Β)
- 4.6 Κανονικές μορφές τύπων. (Μέρος Β)
  - a) Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. b) Συναρτήσεις Skolem. c) Προτάσεις (Clauses). d) Προτάσεις Horn.
- 4.7 Αντικατάσταση. (Μέρος Γ)
- 4.8 Ενοποίηση. (Μέρος Γ)
- 4.9 Η Μέθοδος της (Δυαδικής) Επίλυσης. (Μέρος Δ)
- 4.10 Επίλυση & Στρατηγικές απόδειξης. (Μέρος Δ)
- 4.11 Η στρατηγική της γραμμικής επίλυσης. (Μέρος Ε)
- 4.12 Μετασχηματισμοί Λογικών Προγραμμάτων (Μέρος ΣΤ)

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

4.1 Εισαγωγή.

- Το κύριο πρόβλημα του προτασιακού λογισμού είναι ότι **μελετά μόνο πλήρεις προτάσεις** και **δεν μπορεί να εξετάσει την εσωτερική δομή μιας πρότασης**.
- Για παράδειγμα ο προτασιακός λογισμός δεν μπορεί να αποδείξει την ορθότητα του εξής συλλογισμού.
  - Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί.
  - Όλοι οι Έλληνες είναι άνθρωποι.
  - Συνεπώς, όλοι οι Έλληνες είναι θνητοί.
- Ένας φορμαλισμός ο οποίος εκφράζει μόνο την αλήθεια ή μη προτάσεων **δεν είναι επαρκής** για αναπαράσταση της γνώσης του πεδίου του προβλήματος. Ένας **επαρκής** φορμαλισμός πρέπει να μπορεί να κάνει τα εξής:
  - 1) Να μιλάει για τα αντικείμενα/τις οντότητες του πεδίου του προβλήματος.
  - 2) Να εκφράζει τις σχέσεις μεταξύ αυτών των αντικειμένων.
  - 3) Να γενικεύει αυτές τις σχέσεις σε ομάδες/κλάσεις αντικειμένων.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

4.1 Εισαγωγή.

- Ο **κατηγορηματικός λογισμός** ή (**κατηγορηματική) λογική πρώτης-τάξεως** (**ΛΠΤ**) περιέχει,
  - όλα τα συστατικά του προτασιακού λογισμού
    - **προτασιακές μεταβλητές**, p, q,r, κτλ
    - τις **δύο σταθερές**, Α(ληθής), Ψ(ευδής),
    - τους **λογικούς συνδέσμους**, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
  - και επιπλέον
    - **όρους** (**terms**),
    - **κατηγορήματα** (**predicates**) και
    - **ποσοδείκτες** (**quantifiers**).

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.1 Εισαγωγή.

- Υπάρχουν δύο όψεις της **ΛΠΤ** τις οποίες θα μελετήσουμε, η **θεωρία του μοντέλου** και **η θεωρία της απόδειξης**.
- Η **θεωρία του μοντέλου** **μελετά τις σχέσεις μεταξύ προτάσεων της λογικής οι οποίες αφού ερμηνευτούν καταχωρεί τιμές αληθείας** σ' αυτές.
  - Η ερμηνεία των προτάσεων περιλαμβάνει **μια απεικόνιση** στοιχείων των προτάσεων σε αντικείμενα του πεδίου του προβλήματος.
- Το λεξιλόγιο της βασικής θεωρίας του μοντέλου περιλαμβάνει όρους όπως **αληθές (true), ψευδές (false), ερμηνεία (interpretation), ικανοποίηση ή επαλήθευση (satisfaction), μοντέλο (model), συνεπαγωγή (implication), λογική συνέπεια (semantic consequence)** και **έγκυρος/εγκυρότητα (valid/validity).**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

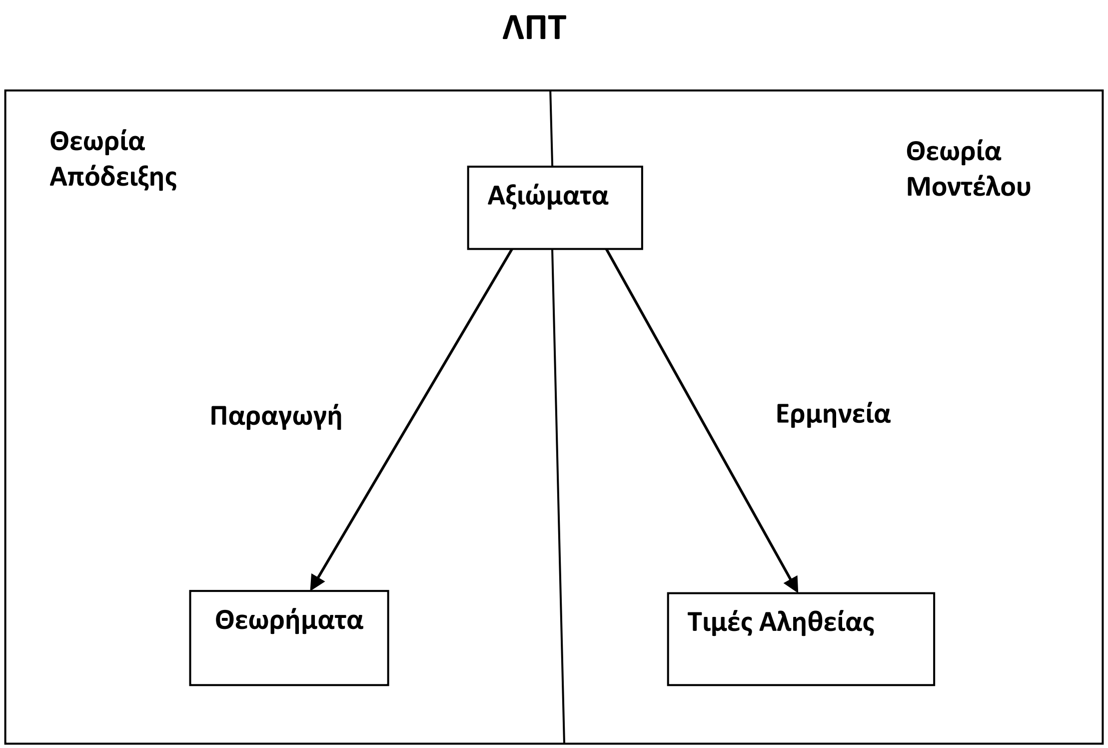
4.1 Εισαγωγή.

- Η **θεωρία της απόδειξης εξετάζει τις σχέσεις των προτάσεων με βάση τη παραγωγή τους από άλλες προτάσεις χρησιμοποιώντας κανόνες παραγωγής οι οποίοι λειτουργούν πάνω στη δομή (στο δομικό περιεχόμενο) των προτάσεων**.
- Το λεξιλόγιο της βασικής θεωρίας της αποδείξης περιλαμβάνει όρους όπως **αξίωμα (axiom), κανόνας συμπερασμού/παραγωγής** (**inference/derivation rule)**, **θεώρημα (theorem), απόδειξη** (**proof)**, **συνέπεια** (**consistency)**, **παραγωγή** ή **συντακτική συνεπαγωγή** (**derivation** or **syntactic consequence).**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- Αμφότερες οι όψεις είναι σημαντικές για την κατανόηση της **αναπαράστασης γνώσης και της συλλογιστικής στο κατηγορηματικό λογισμό**.
- Το Σχήμα 6.1 απεικονίζει τις δύο όψεις της ΛΠΤ.



4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

4.1 Εισαγωγή.

- **Ορισμός: *Πεδίο*** *(domain ή domain of discourse ή universe of discourse)* είναι η συλλογή όλων των αντικειμένων, οντοτήτων, του προβλήματος όπως άνθρωποι (π.χ. Γιάννης), ιδέες (π.χ. πέντε), σύμβολα(π.χ. 8), κτλ, τα οποία επηρεάζουν την λογική επιχειρηματολογία που εξετάζεται.
  - Τα στοιχεία της συλλογής, δηλαδή του πεδίου, ονομάζονται **άτομα (individuals)** ή **οντότητες** ή **αντικείμενα**.
  - Εάν το πεδίο ενός προβλήματος είναι **Π={α_1, …, α_κ}** τότε κάθε **α_i 1≤i≤κ** είναι μια **οντότητα** ή **αντικείμενο** και ονομάζεται **σταθερά**. **Κάθε σταθερά είναι ένας όρος**.
- **Παραδείγματα**:
  - 1) Το σύνολο **Π={γιάννης, μαρία, ελένη, κώστας}** παριστά το πεδίο ενός προβλήματος σχέσεων οικογένειας.
  - 2) Το σύνολο των ακέραιων αριθμών **Z={..,-1,0,1,..}** μπορεί να παριστά το πεδίο σ’ ένα αριθμητικό πρόβλημα.
- **Σημείωση**: στα επόμενα το πεδίο θα το συμβολίζουμε είτε με το Ελληνικό **Π**(εδίο) ή με το Αγγλικό **D**(omain).

4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- **Τα κατηγορήματα είναι ισχυρισμοί για αντικείμενα** (για σταθερές). Κάθε κατηγόρημα εκφράζεται ως μια **διατεταγμένη Ν-άδα αντικειμένων** τα οποία λέγονται **ορίσματα**.
  - Η **τιμή του κατηγορήματος** είναι είτε **αληθής** ή **ψευδής**.
  - Το **πλήθος των ορισμάτων** ενός κατηγορήματος λέγεται **πληθυκότητα** ή **βαθμός**. Κατηγορήματα με **πληθυκότητα 1** ονομάζονται **ιδιότητες**.
  - Ένα κατηγόρημα **p** με **πληθυκότητα ν** συμβολίζεται με **p/ν**.
- **Παραδείγματα**.
  - Ο ισχυρισμός, «**ο Γιάννης είναι πατέρας της Μαρίας**» παριστάνεται από το κατηγόρημα **πατέρας(γιάννης, μαρία)** όπου **πατέρας** είναι το όνομα του κατηγορήματος με **πληθυκότητα 2**, **γιάννης** και **μαρία** είναι **σταθερές** ή **αντικείμενα από το πεδίο του προβλήματος**.
  - Ο ισχυρισμός «**το γινόμενο 3 επί 5 είναι 15**» παριστάνεται από το κατηγόρημα **γινόμενο (3,5,15)** *ό*που **γινόμενο** είναι το όνομα του κατηγορήματος με **πληθυκότητα 3** επιπλέον **3,5,15** είναι **σταθερές** από το **πεδίο του προβλήματος** που είναι οι **ακέραιοι αριθμοί** (το σύνολο **Z**).

4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- Μια **μεταβλητή Χ** είναι ένας **όρος** ο οποίος **μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το πεδίο του προβλήματος**.
- Για παράδειγμα,
  - έστω ότι το πεδίο **Π** ενός προβλήματος είναι το σύνολο **Π={γιάννης, νίκος, άννα, μαρία}** τότε στο κατηγόρημα **πατέρας(X, Y)** οι μεταβλητές **X** και **Y** μπορούν να πάρουν οποιαδήποτε τιμή από το σύνολο **Π**.
- Οι **συναρτήσεις**, όπως τα κατηγορήματα, εφαρμόζονται σε **διατεταγμένες Ν-άδες αντικειμένων** τα οποία λέγονται **ορίσματα**. Επιπλέον, οι συναρτήσεις επιστρέφουν μια τιμή από το πεδίο ορισμού τους. Το πλήθος των ορισμάτων μιας συνάρτησης ονομάζεται **πληθυκότητα** ή **βαθμός**. Εάν **f** είναι μια συνάρτηση με **πληθυκότητα ν** συμβολίζεται **f/ν**.
- Για παράδειγμα,
  - η συνάρτηση **συν(4,8)** θα επιστρέψει την τιμή **12**. Το πεδίο ορισμού και τιμών της συνάρτησης **συν/2** είναι το σύνολο των ακεραίων **Z**, **συν: Z ×Z → Z**.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- **Ορισμός**: Ένας **όρος (term)** ορίζεται αναδρομικά ως εξής.
  - Μία **σταθερά** είναι ένας όρος.
  - Μία **μεταβλητή** είναι ένας όρος.
  - **Εάν** **f** είναι ένα σύμβολο συνάρτησης με ν-ορίσματα, και $t_1, \ldots, t_\nu$ είναι όροι **τότε** $f(t_1, \ldots, t_\nu)$ είναι ένας όρος.
- **Ορισμός**: Εάν **p** είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος ν-ορισμάτων και $t_1, \ldots, t_\nu$ είναι όροι, τότε $p(t_1, \ldots, t_\nu)$ είναι ένας **ατομικός τύπος (atomic formula)** ή **άτομο**.
  - **Παραδείγματα**: **αδέλφια(γιάννης, μαρία)** και **μεγαλύτερο(επί(3,7),12)** είναι **ατομικοί τύποι** ή **άτομα**.
- **Ποσοδείκτες (quantifiers):** Θεωρήσετε τις εξής προτάσεις, «**όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί**» και «**μερικοί άνθρωποι είναι σπουδαστές**». Για να εκφραστούν προτάσεις αυτής της μορφής έχουν εισαχθεί στον κατηγορηματικό λογισμό ο **καθολικός** ∀ και ο **υπαρξιακός** ∃ ποσοδείκτης.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- **Ορισμός:** Ένας ποσοδείκτης δεικνύει **πόσο συχνά κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής**.
  - Ο **καθολικός ποσοδείκτης** δεικνύει ότι μια πρόταση είναι αληθής **για όλα τα αντικείμενα στα οποία εφαρμόζεται**. Για παράδειγμα, ∀**X θνητός(X)** σημαίνει ότι **για όλες τις τιμές του X** ο ισχυρισμός **θνητός(X)** είναι **αληθής**.
  - Ο **υπαρξιακός ποσοδείκτης** δεικνύει ότι ένας ισχυρισμός είναι αληθής **για τουλάχιστον ένα αντικείμενο στο οποίο εφαρμόζεται**. Για παράδειγμα, ∃**X είναι_σπουδαστής(X)** σημαίνει ότι **για μία τουλάχιστον τιμή του X** ο ισχυρισμός **είναι_σπουδαστής(X)** είναι **αληθής**.
- Συνεπώς, με τα κατηγορήματα και τους ποσοδείκτες μπορούμε να εκφράσουμε σε λογική περισσότερο πολύπλοκες προτάσεις.
  - Για παράδειγμα, ο ισχυρισμός «**όλοι οι σπουδαστές είναι μεγαλύτεροι των 18 χρονών**» παριστάνεται σε λογική ως εξής:
  - ∀X(είναι_σπουδαστής(X)→ μεγαλύτερος_από(X,18))

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- **Ορισμός:** Ένας **καλοσχηματισμένος τύπος** ή **τύπος** (well-formed formula) ορίζεται αναδρομικά ως εξής:
  - **1.** Ένας **ατομικός τύπος** είναι ένας καλοσχηματισμένος τύπος ή τύπος.
  - **2.** Εάν **φ** και **ψ** είναι τύποι, τότε **(¬φ), (φ∧ψ), (φ∨ψ), (φ→ψ)** και **(φ↔ψ)** είναι τύποι.
  - **3.** Εάν **φ** είναι ένας τύπος και **X** μια μεταβλητή, τότε **(∀Xφ)** και **(∃Xφ)** είναι τύποι.
- Στους τύπους **(∀Xφ)** και **(∃Xφ)** η μεταβλητή **X** ονομάζεται **δεσμευμένη μεταβλητή**, η εμβέλεια της είναι ο τύπος **φ**.
  - Ένας **ποσοδείκτης μαζί με την μεταβλητή του** θεωρείται ως **ένας τελεστής μ' ένα όρισμα** <u>και</u> ***προτεραιότητα ίδια μ' αυτή της άρνησης***.
- Η προτεραιότητα των λογικών συνδέσμων είναι, όπως στον προτασιακό λογισμό, **¬(μεγαλύτερη), ∧,∨,→, ↔(μικρότερη).**
  - Για παράδειγμα, ο τύπος ∀**X p(X)** ∧ **q(X)** σημαίνει ∀**X (p(X))** ∧ **q(X).**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- Η μεταβλητή **X** ενός ποσοδείκτη σ' ένα τύπο **μπορεί να αντικατασταθεί από κάποια άλλη μεταβλητή η οποία δεν υπάρχει στον τύπο**.
  - Για παράδειγμα ∀**X p(X)** είναι λογικά ισοδύναμη με την ∀**Y p(Y).** Ο τύπος ∀**Y p(Y)** είναι ***παραλλαγή*** του τύπου ∀**X p(X).**
- Μια μεταβλητή η οποία δεν είναι δεσμευμένη ονομάζεται ***ελεύθερη*.** Η μεταβλητή **Y** στον τύπο ∀**X p(X)** ∧ **q(Y)** είναι **ελεύθερη**.
- Τύποι των οποίων **όλες οι μεταβλητές είναι δεσμευμένες** λέγονται ***κλειστοί*** τύποι.
- Τύποι οι οποίοι **έχουν ελεύθερες μεταβλητές** λέγονται ***ανοικτοί*** τύποι.

4.2 Σύνταξη του κατηγορηματικού λογισμού.

- **Ορισμός:** Θεωρούμε ότι **φ** είναι ένας τύπος, **X** μια μεταβλητή και **t** είναι όρος. **φ[X/t]** ή **φ{X/t}** παριστά το τύπο που προκύπτει εάν **όλες οι εμφανίσεις του X** στον τύπο **φ** **αντικατασταθούν από τον όρο t**.
  - **{X/t}** ονομάζεται **αντικατάσταση του X** από το **t** **(**ο όρος **t** είναι ***στιγμιότυπο*** (*instance*) του **X).**
  - Ο τύπος **φ{X/t}** ονομάζεται ***στιγμιότυπο*** (***instance***) του τύπου **φ**.
- **Παραδείγματα**
  - **1.** Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση **{X/a}** στο τύπο **p(X)** $\wedge$ **q(b),** δηλαδή **p(X)** $\wedge$ **q(b){X/a},** προκύπτει ο τύπος **p(a)** $\wedge$ **q(b).**
  - **2.** Εφαρμόζοντας την αντικατάσταση **{X/t(a)}** στο τύπο **p(X)** $\wedge$ **q(X),** δηλαδή **p(X)** $\wedge$ **q(X){X/t(a)},** προκύπτει ο τύπος **p(t(a))** $\wedge$ **q(t(a)).**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.3 Ερμηνείες.

- Στη ΛΠΤ οι τύποι περιέχουν μεταβλητές. Για να ορίσουμε την **ερμηνεία (interpretation) ενός τύπου** **πρέπει να ορίσουμε**
  - **το πεδίο του προβλήματος**, και
  - **μια αντιστοιχία του πεδίου του προβλήματος** με
    - τις **σταθερές**,
    - τις **μεταβλητές**,
    - τα **σύμβολα συναρτήσεων** και
    - τα **σύμβολα κατηγορημάτων** **του τύπου**.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.3 Ερμηνείες.

- Θα ορίσουμε την ερμηνεία για **κλειστούς τύπους**. Ας υποθέσουμε ότι **Φ** είναι ένα σύνολο κλειστών τύπων τέτοιο ώστε
  - **$\{p_1,\ldots,p_\kappa\}$** είναι όλα τα κατηγορήματα του **Φ,**
  - **$\{f_1,\ldots,f_m\}$** είναι όλες οι συναρτήσεις του **Φ**,
  - **$\{a_1,\ldots,a_n\}$** όλες οι σταθερές του **Φ**.
- Μια ερμηνεία **I** του **Φ** είναι μια τετράδα της εξής μορφής.

$I=(D, \{R_1,\ldots,R_k\}, \{F_1,\ldots,F_m\}, \{d_1,\ldots,d_n\})$, όπου

- **1.** **D** είναι ένα μη κενό πεδίο.
- **2.** Σε κάθε σταθερά **$a \in \{a_1,\ldots,a_n\}$** του **Φ** καταχωρείται μια τιμή **$d \in \{d_1,\ldots,d_n\}$** από το **D**.
- **3.** Σε κάθε σύμβολο συνάρτησης **$f \in \{f_1,\ldots,f_m\}$** του **Φ** με πληθυκότητα **v** καταχωρείται μια συνάρτηση **$F \in \{F_1,\ldots,F_m\}$** πληθυκότητας **v** από το **D^v** στο **D**.
- **4.** Σε κάθε κατηγόρημα **$p \in \{p_1,\ldots,p_\kappa\}$** του **Φ** με πληθυκότητα **v** καταχωρείται μια σχέση **$R \in \{R_1,\ldots,R_\kappa\}$** πληθυκότητας **v** στο **D^v**.

4.3 Ερμηνείες.

- **Παράδειγμα 1:** Θεωρούμε τον τύπο **∀Xp(a,X)** όπου **p** είναι κατηγόρημα πληθυκότητας 2, και **a** είναι σταθερά. Θεωρούμε τις εξής ερμηνείες.
  - **α.** **I_1 = (N, {μικρότερο_ίσο}, { }, {0})**

    όπου **μικρότερο_ίσο** είναι η γνωστή σχέση **≤** του συνόλου των φυσικών **N**. Δηλαδή η ερμηνεία του τύπου είναι **∀X μικρότερο_ίσο (0,X).** Ο τύπος **είναι αληθής** επειδή **για κάθε d∈N** ο τύπος **μικρότερο_ίσο (0, d)** είναι **αληθής**.
  - **β.** **I_2 = (N, {μικρότερο_ίσο}, { }, {1}).**

    Ο τύπος **∀X μικρότερο_ίσο(1, X)** **δεν είναι αληθής σε αυτήν την ερμηνεία** επειδή υπάρχει ένα **d∈N** για το οποίο η σχέση **μικρότερο_ίσο(1, d)** είναι **ψευδής**. Για **d = 0**, **μικρότερο_ίσο(1, 0)** είναι **ψευδής**.

4.3 Ερμηνείες.

- Ένας κλειστός τύπος **P** με μια ερμηνεία στο **D** είναι αληθής ή ψευδής. Η τιμή αληθείας του κλειστού τύπου υπολογίζεται ως εξής.
  - **1.** Εάν **R** είναι η σχέση που καταχωρήθηκε στο κατηγόρημα **p** πληθυκότητας **n**, then **p(d_1,...,d_n)** είναι **αληθής** εάν η σχέση **<d_1,…,d_n>** $\in$**R**, διαφορετικά είναι **ψευδής**.
  - **2.** Θεωρούμε ότι **P_1** και **P_2** είναι κλειστοί τύποι.
    - **a.** Ο τύπος **$\neg P_1$** είναι **αληθής** εάν ο τύπος**P_1** είναι **ψευδής**, αλλιώς είναι **ψευδής**.
    - **b.** Ο τύπος **$P_1 \wedge P_2$** είναι **αληθής** εάν αμφότεροι οι τύποι **P_1** και **P_2** are **αληθείς**, αλλιώς είναι **ψευδής**.
    - **c.** Ο τύπος **$P_1 \rightarrow P_2$** είναι **αληθής** εάν ο τύπος **P_1** είναι **ψευδής** ή ο τύπος **P_2** είναι **αληθής**, αλλιώς είναι **ψευδής**.
    - **d.** Ο τύπος **$P_1 \vee P_2$** είναι **αληθής** εκτός εάν αμφότεροι οι τύποι **P_1** και **P_2** είναι **ψευδείς** τότε ο τύπος είναι **ψευδής**.
    - **e.** Ο τύπος **$P_1 \leftrightarrow P_2$** είναι **αληθής** εάν οι τύποι **P_1** και **P_2** έχουν την ίδια τιμή αληθείας αλλιώς είναι **ψευδής**.
    - **f.** Ο τύπος **$\forall$X P(X)** είναι **αληθής** εάν για κάθε στοιχείο **d_i (1 ≤ i ≤ k)** of **D,** ο τύπος **P(d_i)** είναι **αληθής**, αλλιώς είναι **ψευδής**.
    - **g.** Ο τύπος **$\exists$X P(X)** είναι **αληθής** εάν υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο **d$\in$D** τέτοιο ώστε ο τύπος **P(d)** είναι **αληθής**, αλλιώς είναι **ψευδής**.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.3 Ερμηνείες.

- **Παράδειγμα 2:** Θεωρούμε τον τύπο **∀X ∀Y (p(X, Y)) → p(f(X, a), f(Y, b))** όπου **p** είναι ένα **κατηγόρημα** πληθυκότητας 2, **a** και **b** είναι **σταθερές**. Θεωρούμε την εξής ερμηνεία:
  - **I_1 = (Z, {μικρότερο_ίσο}, {συν }, {1})**
  - Το πεδίο **Z** είναι το σύνολο των **ακέραιων αριθμών**, ***μικρότερο_ίσο*** είναι η σχέση **≤**, ***συν*** είναι ο **τελεστής της πρόσθεσης** (το γνωστό +). Οι σταθερές **a** και **b** καταχωρούνται την ίδια τιμή **1** από το πεδίο **Z**.
- Η ερμηνεία του τύπου έχει ως εξής:
  - **∀X∀Y(μικρότερο_ίσο(X,Y)→ μικρότερο_ίσο (συν(X,1),συν(Y,1)))**
- η οποία είναι αληθής για κάθε ζεύγος ακεραίων d_1 και d_2.
  - **μικρότερο_ίσο(d_1, d_2) → μικρότερο_ίσο(συν(d_1, 1), συν(d_2, 1))**
- ή χρησιμοποιώντας τα γνωστά μαθηματικά σύμβολα **≤** και **+** για **μικρότερο_ίσο** και **συν** αντίστοιχα έχουμε τον εξής τύπο.
  - **$(d_1 \leq d_2) \rightarrow (d_1 + 1) \leq (d_2 + 1)$**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.3 Ερμηνείες.

- **Ορισμός:** Θεωρούμε ότι **Φ** είναι **ένα σύνολο τύπων**. Μια ερμηνεία **I** του **Φ** είναι ένα **μοντέλο** του **Φ** (ή η **Φ** είναι **αληθής** στο **I**) **εάν** **όλοι οι τύποι** του **Φ** **είναι αληθείς** στο **I**.
- **Ορισμός:** Ένας τύπος **φ** είναι **λογική συνέπεια** (***logical consequence***) **ενός συνόλου τύπων** **Φ** **τότε και μόνον τότε εάν** ο τύπος **φ** είναι αληθής σε **όλα τα μοντέλα** του **Φ**. Αυτό συμβολίζεται **Φ** $\models$**φ.**
- **Ορισμός:** Ένας τύπος **φ** είναι **ικανοποιήσιμος** ή **επαληθεύσιμος** (***satisfiable***) εάν **υπάρχει μια ερμηνεία I** στην οποία είναι **αληθής**, συμβολίζεται **I** $\models$**φ**. Σε αντίθετη περίπτωση ο τύπος **φ** είναι **μη ικανοποιήσιμος** ή **μη επαληθεύσιμος**, συμβολίζεται **I** $|\neq$**φ**.
- **Ορισμός:** Ένας τύπος **φ** είναι **έγκυρος** (***valid***) εάν είναι **αληθής σε όλες τις ερμηνείες**.

Τέλος Διάλεξης

Ευχαριστώ!

Ερωτήσεις;