(−) : Δεν δίνω πολύ βάση

(−)

π.χ Κάποιος γεμίζει φρούτα 4 ειδών και θέλει να έχει και από τα 4 είδη. 20 συνολικά ως εξής: πορτοκάλια και μήλα μέχρι 6, μπανάνες και ακτινίδια μέχρι 4. Πόσοι τρόποι υπάρχουν;

Λύση:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20 \qquad 1 \le x_1, x_2 \le 7 \quad , \quad 1 \le x_3, x_4 \le 4$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \to x^1 \\ x_1 \to x^2 \\ x_1 \to x^7 \end{array}\right\} \to x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = x(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) =$$

$$x + x^2 + x^3 + x^4 = x(1 + x + x^2 + x^3)$$

$$f(x) = x^4 (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^2 (1 + x + x^2 + x^3)$$

Θέλουμε τον συντελεστή του x^{20}.

π.χ (Για Εξάσκηση)

Σχηματίστε την $f(x)$ που αντιστοιχεί στο πρόβλημα με τα ψιλά. Δηλαδή αν πάρουμε ένα χρηματικό ποσό π.χ. 1€ και 80λ. με χρήση 5λ, 10λ, 20λ και 50λ

$$\left.\begin{array}{lll} \cdot\ 5λ & x_1 & \to 5x_1 \\ \cdot\ 10λ & x_2 & \to 10x_2 \\ \cdot\ 20λ & x_3 & \to 20x_3 \\ \cdot\ 50λ & x_4 & \to 50x_4 \end{array}\right\} \quad 5x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 50x_4 = 180$$

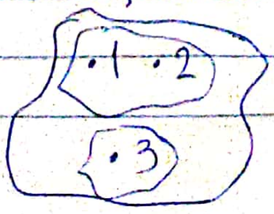
x_1, x_2, x_3, x_4 ~ φυσικοί αριθμοί ή 0

Λύση

5( ) 10(...) 20(...) 50(...)

Οι αριθμοί του BELL και ο αναδρομικός τύπος BELL

Ορισμός: Αν $A \neq \emptyset$, ξέρουμε ότι μία διαμέριση του A $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ είναι πεπερασμένο πλήθος από ξένα ανά δύο, υποσύνολα του A $\emptyset < A_i \subseteq A$, έτσι ώστε η ένωση των A_i να μας κάνει A.



$\{1,2\}, \{3\}$

Ορισμός: B_n για δοσμένο σύνολο A με $|A|=n$, είναι ο αριθμός των διαμερίσεων του A.

π.χ. $B_1=1$, $B_2=2$, $B_3=5$, $B_4=$ μεγάλη τιμή

Ορισμός: $B_0=1$, ισχύει $B_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k$

$$B_4=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}B_k=(1\cdot 1)+(3\cdot 1)+3\cdot 2+1\cdot 5=15$$

Επαναλήψεις Άσκησης

π.χ. Ο Cantor εισήγαγε το πρόβλημα.
Έστω ότι έχω μηχανή που δείχνει τυχερούς αριθμούς και μία άλλη που δείχνει άτυχους αριθμούς. Δύο διαφέρουν αν υπάρχει αριθμός που να είναι τυχερός για τη μία μηχανή και άτυχος για την άλλη. Δείξτε ότι το σύνολο όχι μόνο δεν είναι πεπερασμένο, αλλά δεν είναι και αριθμήσιμο.

π.χ. Με επαγωγή
Δείξτε χωρίς τη χρήση γνωστών αλγεβρικών τύπων, όπως ο $1+2+\dots+n=\frac{n(n-1)}{2}$, ότι $1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=(1+2+\dots+n)^2$

Λύση:
Λέγαμε ότι ισχύει για n και θέλουμε το $n+1$.
Θέλουμε $1^3+2^3+\dots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\dots+n+n+1)^2=(1+2+3+\dots+n)^2+(n+1)+\dots$
$\dots 2(1+2+3+\dots+n)(n+1)$

π.χ. Δείξτε $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\dots+n\cdot n!=(n+1)!-1$

Λύση:
$1\cdot 1!=1 \qquad (1+1)!-1=2!-1=2-1=1$
$1\cdot 1!+\dots+n\cdot n!+(n+1)(n+1)!=(n+2)!-1 \Rightarrow$
$(n+1)!-1+(n+1)\dots=(n+2)!-1=(n+1)!(n+2)+\dots$

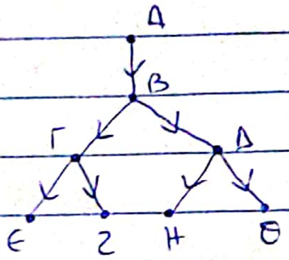
$\longrightarrow$

π.χ $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+n)} = \frac{n}{n+1}$

$\boxed{\text{Telescoping method: } \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}$

Λύση: $\sum_{k=1}^{n} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

π.χ Δέντρα



$G=(V,E)$

$|V| = 8$ (κορυφές)

$|E| = 7$ (ακμές)

$\deg E = \deg Z = \deg H = \deg \Theta = 0$ (φύλλα)

$\deg \Gamma = \deg \Delta = 2 = \deg B$

$\deg A = 1$