Λογικός Προγραμματισμός

Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής
mmarak@cs.hmu.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Λογικός Προγραμματισμός

Μάθημα 7

- **Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.**

Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγ. Λογισμό (Μέρος Γ)

- 4.1 Εισαγωγή. (Μέρος Α)
- 4.2 Σύνταξη της Κατηγορηματικής Λογικής. (Μέρος Α)
- 4.3 Ερμηνείες. (Μέρος Α)
- 4.4α. Λογικές ισοδυναμίες & Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων. (Μέρος Β)
- 4.4β. Λογικές ισοδυναμίες & μετασχ. τύπων. (Μέρος Β)
- 4.5 Τυπικά συστήματα & εξαγωγή συμπερ. (Μέρος Β)
- 4.6 Κανονικές μορφές τύπων. (Μέρος Β)
  - a) Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. b) Συναρτήσεις Skolem. c) Προτάσεις (Clauses). d) Προτάσεις Horn.
- 4.7 Αντικατάσταση. (Μέρος Γ)
- 4.8 Ενοποίηση. (Μέρος Γ)
- 4.9 Η Μέθοδος της (Δυαδικής) Επίλυσης. (Μέρος Δ)
- 4.10 Επίλυση & Στρατηγικές απόδειξης. (Μέρος Δ)
- 4.11 Η στρατηγική της γραμμικής επίλυσης. (Μέρος Ε)
- 4.12 Μετασχηματισμοί Λογικών Προγραμμάτων (Μέρος ΣΤ)

4.7 Αντικατάσταση.

- **Ορισμός:** ***Αντικατάσταση*** (***substitution***) **μεταβλητών από όρους** είναι **ένα σύνολο της μορφής**

  $$\{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$$

  - όπου **κάθε** X_i **(**$1 \le i \le K$**)** είναι **μια μεταβλητή διαφορετική από τις υπόλοιπες** <u>και</u>
  - **κάθε** t_i **είναι ένας όρος διαφορετικός από τη μεταβλητή** X_i.
  - Κάθε στοιχείο X_i/t_i ονομάζεται ***δέσμευση*** του X_i.
- **Ορισμός:** ***Βασικός όρος (ground term)*** είναι ένας όρος ο οποίος **δεν περιέχει μεταβλητές**.
- ***Βασικός ατομικός τύπος (ground atomic formula)*** είναι ένας ατομικός τύπος του οποίου **όλα τα ορίσματα είναι βασικοί όροι**.

4.7 Αντικατάσταση.

- **Παραδείγματα:** Έστω **a, b** **σταθερές**, **X, Y** **μεταβλητές**, **f/1, g/2** **συναρτήσεις** και **p/1, q/2** **κατηγορήματα**.
- **Βασικοί όροι**: Οι όροι **a, b, f(a), f(b), g(a,b), g(a,a), g(f(b),a), f(f(b))** κτλ είναι βασικοί όροι.
- **Μη- βασικοί όροι**: Οι όροι **X, Y, f(X), f(f(X)), g(Y,b), g(X,f(Y)), g(a,f(f(X)))** κτλ δεν είναι βασικοί όροι.
- **Βασικοί ατομικοί τύποι**: Οι ατομικοί τύποι **p(a), p(f(b)), p(f(f(a))), q(a,f(b)), q(f(a),g(a,b)),** κτλ είναι βασικοί ατομικοί τύποι
- **Μη- βασικοί ατομικοί τύποι**: Οι ατομικοί τύποι **p(X), p(f(X)), q(a,f(X)), q(X,g(a,Y)),** κτλ δεν είναι βασικοί ατομικοί τύποι.

4.7 Αντικατάσταση.

- **Ορισμός:** Έστω η αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}}$.
  - Η αντικατάσταση **θ** ονομάζεται ***βασική αντικατάσταση*** (***ground substitution***) εάν όλα τα $\boldsymbol{t_i}$ **(1 ≤i ≤K)** είναι βασικοί όροι.
  - Η αντικατάσταση θ ονομάζεται ***αντικατάσταση μετονομασίας*** (***renaming substitution***) εάν όλα τα $\boldsymbol{t_i}$ **(1 ≤i ≤K)** είναι μεταβλητές.
  - Η αντικατάσταση **θ = { }** ονομάζεται ***κενή*** *ή* ***ταυτοτική αντικατάσταση***, συμβολίζεται με ∈.
- **Παραδείγματα:** Εάν **a, b** είναι **σταθερές** **X, Y, Z, W** είναι **μεταβλητές** και **f/1, g/2** είναι **συναρτήσεις** τότε η αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_1 = \{X/f(a), Y/g(a, f(b))\}}$ είναι **βασική αντικατάσταση** ενώ η αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_2 = \{X/Z, Y/W\}}$ είναι **αντικατάσταση μετονομασίας**.

4.7 Αντικατάσταση.

- **Ορισμός:** Μια ***απλή έκφραση (expression)*** ***ή παράσταση*** είναι είτε **ένας όρος** ή **ένας ατομικός τύπος**. Μια ***έκφραση*** ή ***παράσταση*** είναι είτε **ένας όρος**, ή **ένας στοιχειώδης τύπος**, ή **μια σύζευξη** ή **διάζευξη στοιχειωδών τύπων**.
- **Ορισμός:** Έστω **E** και **F** δύο παραστάσεις. Οι **E** και **F** είναι ***παραλλαγές (variants)*** εάν υπάρχουν αντικαταστάσεις **θ** και **σ**
  - τέτοιες ώστε **E = F θ** και **F = E σ**.
  - Η **E** είναι **παραλλαγή** της **F** και η **F** είναι **παραλλαγή** της **E**.
- **Παραδείγματα:**
  - Οι παραστάσεις **p(f(a,X), g(Y), b)** και **p(f(a,V), g(W), b)** **είναι παραλλαγές**.
  - Οι παραστάσεις **p(f(X), a)** $\vee$ **q(b,X,Y)** και **p(f(W), a)** $\vee$ **q(b,W,V)** **είναι παραλλαγές**.
  - Ενώ οι παραστάσεις E = **p(a, f(X,Y))** και F= **p(a, f(X,X))** **δεν είναι παραλλαγές** διότι δεν υπάρχει **θ** τέτοιο ώστε **E = F θ.**

4.7 Αντικατάσταση.

- **Ορισμός:** Έστω Ε μια παράσταση και $\theta = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ μια αντικατάσταση. Ένα ***στιγμιότυπο*** (***instance***) ***Εθ*** του **Ε** λαμβάνεται εάν ταυτόχρονα αντικατασταθεί κάθε εμφάνιση του X_i στην **Ε** με t_i όπου $(1 \le i \le k)$.
- **Παραδείγματα:** Στα επόμενα παραδείγματα **Ε** είναι μια **παράσταση** και **θ** μια **αντικατάσταση** και **Εθ** το **στιγμιότυπο** από την εφαρμογή της αντικατάστασης **θ** στη παράσταση **Ε.**
  - 1. $E = p(X, f(a,Y), b) \vee \neg q(X, Z, g(X)),\ \theta = \{X/h(a), Y/X, Z/b\}$

    $E\theta = p(X, f(a,Y), b) \vee \neg q(X, Z, g(X))\ \{X/h(a), Y/X, Z/b\} =$

    $p(h(a), f(a,X), b) \vee \neg q(h(a), b, g(h(a)))$
  - 2. $E = p(X) \vee \neg q(g(X, Y))\ \ \theta = \{X/a, Y/f(b)\}\ \ E\theta = p(a) \vee \neg q(g(a, f(b)))$
  - 3. $E = p(X) \vee \neg q(g(X, Y)),\ \ \theta = \{X/Y, Y/f(b)\},\ \ E\theta = p(Y) \vee \neg q(g(Y, f(b)))$
  - 4. $E = p(Y, f(a), X) \vee \neg q(g(X, Y), Z),\ \theta = \{X/Z, Y/f(b)\},$

    $E\theta = p(f(b), f(a), Z) \vee \neg q(g(Z, f(b)), Z).$

4.7 Αντικατάσταση.

- **Ορισμός:** Έστω ότι $\boldsymbol{\theta} = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ και $\boldsymbol{\sigma} = \{Y_1/s_1,\ldots,Y_v/s_v\}$ είναι δύο αντικαταστάσεις. Η **σύνθεση θ∘σ (ή θσ)** *των* **θ** και **σ** είναι η αντικατάσταση η οποία λαμβάνεται ως εξής:

  $$\{X_1/t_1\sigma,\ldots,X_K/t_K\sigma,\ Y_1/s_1,\ldots,Y_v/s_v\}$$

  όπου διαγράφονται δεσμεύσεις $X_i/t_i\,\sigma$ για τις οποίες ισχύει $X_i = t_i\,\sigma$ **(1≤i≤k)**. Επίσης, διαγράφονται δεσμεύσεις Y_j/s_j **(1≤j≤v)** για τις οποίες ισχύει $Y_j \in \{X_1,\ldots,X_K\}$.

- **Παραδείγματα:**
  - **1.** Έστω **θ = {X/a, Y/g(b,Z)}** και **σ = {Z/b, W/f(a)}**,

    θ∘σ = {X/a, Y/g(b,b), Z/b, W/f(a)}
  - **2.** Έστω **θ = {X/f(Y), Y/a, Z/W}** και

    σ = {Y/f(a), W/Z, V/g(a,f(b))}

    θ∘σ = {X/f(f(a)), Y/a, W/Z, V/g(a,f(b))}

4.7 Αντικατάσταση.

- Μια αντικατάσταση **θ** είναι ***αυτοαπορροφητική*** (***idempotent***) εάν **θ = θ◦θ**. αυτό σημαίνει ότι για την αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta} = \{X_1/t_1,\ldots,X_K/t_K\}$ **καμιά μεταβλητή** X_i **(1≤i≤k)** **δεν θα πρέπει να υπάρχει σε κάποιο από τους όρους** $\{t_1,\ldots,t_K\}$.
- ***Κάθε νόμιμη αντικατάσταση πρέπει να ικανοποιεί την ιδιότητα της αυτοαπορρόφησης***. Για παράδειγμα, η αντικατάσταση **θ = {X/Y, Y/a}** **δεν είναι αυτοαπορροφητική**.

$$\boldsymbol{\theta \circ \theta = \{X/a,\ Y/a\} \neq \theta}$$

- Έστω οι αντικαταστάσεις $\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{\theta_2}$ και $\boldsymbol{\theta_3}$, η έκφραση **Ε** και η κενή αντικατάσταση **ε.**
  - 1. $\theta_1\ \varepsilon = \varepsilon\ \theta_1 = \theta_1$
  - 2. $(E\ \theta_1)\theta_2 = E\ (\theta_1 \circ \theta_2)$
  - 3. $(\theta_1 \circ \theta_2) \circ \theta_3 = \theta_1 \circ (\theta_2 \circ \theta_3)$ Προσεταιριστική ιδιότητα της ◦

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.7 Αντικατάσταση.

- **Σημείωση:** η σύνθεση αντικαταστάσεων δεν ικανοποιεί την **μεταθετική ιδιότητα**, δηλαδή $\boldsymbol{\theta_1 \circ \theta_2 \neq \theta_2 \circ \theta_1}$
- **Παράδειγμα:** Έστω η παράσταση **E = p(X,Y,Z)** και οι αντικαταστάσεις $\boldsymbol{\theta_1}$ **= {X/f(Y), Z/c}** και $\boldsymbol{\theta_2}$ **= {X/a, Y/b}**
  - **E** $\boldsymbol{\theta_1}$ **= p(f(Y), Y, c)** και **E** $\boldsymbol{\theta_1\theta_2}$ **= p(f(b), b, c)**
  - **E** $\boldsymbol{\theta_2}$ **= p(a, b, Z)** και **E** $\boldsymbol{\theta_2\theta_1}$ **= p(a, b, c)**
  - δηλαδή **E** $\boldsymbol{\theta_1\theta_2 \neq}$ **E** $\boldsymbol{\theta_2\theta_1}$
- **Ορισμός:** Μια αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_1}$ είναι ***περισσότερο γενική*** από μια αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_2}$, συμβολίζεται $\boldsymbol{\theta_2 \leq \theta_1}$, εάν υπάρχει αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_3}$ ώστε να ισχύει $\boldsymbol{\theta_2 = \theta_1 \circ \theta_3}$.
- **Παράδειγμα:** Η αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_1}$ **= {X/f(Z), Y/b}** είναι **περισσότερο γενική** από την αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_2}$ **= {X/f(a), Y/b, Z/a}** γιατί εάν $\boldsymbol{\theta_3}$ **= {Z/a}** τότε $\boldsymbol{\theta_2 = \theta_1 \circ \theta_3}$.

4.8 Ενοποίηση.

- **Ορισμός:** Έστω $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ δύο **απλές παραστάσεις**. Ένας ***ενοποιητής (unifier)*** των $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ είναι μια **αντικατάσταση** $\boldsymbol{\theta}$ τέτοια ώστε $\mathbf{E_1\theta = E_2\theta}$.
- **Παράδειγμα**: Εάν $\mathbf{E_1 = p(X,Y)}$ και $\mathbf{E_2 = p(Z,a)}$ είναι δύο παραστάσεις τότε
  - **ένας ενοποιητής** $\boldsymbol{\theta_1}$ των $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ είναι ο $\boldsymbol{\theta_1} = \{X/b, Y/a, Z/b\}$

    $$E_1\theta_1 = E_2\theta_1 = p(b,a)$$
  - **Ένας άλλος ενοποιητής** $\boldsymbol{\theta_2} = \{X/a, Y/a, Z/a\}$

    $$E_1\theta_2 = E_2\theta_2 = p(a,a)$$
  - **Ένας άλλος ενοποιητής** $\boldsymbol{\theta_3} = \{X/Z, Y/a\}$

    $$E_1\theta_3 = E_2\theta_3 = p(Z,a)$$
  - **Ένας άλλος ενοποιητής** $\boldsymbol{\theta_4} = \{X/f(W), Y/a, Z/f(W)\}$

    $$E_1\theta_4 = E_2\theta_4 = p(f(W),a)$$

4.8 Ενοποίηση.

- **Ορισμός:** Ένας ενοποιητής $\boldsymbol{\theta_1}$ των απλών παραστάσεων $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ ονομάζεται ο ***πλέον γενικός ενοποιητής*** (***πγε***) «***most general unifier*** (***mgu***)» εάν για κάθε άλλο ενοποιητή $\boldsymbol{\theta_2}$ των $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ υπάρχει μια αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_3}$ έτσι ώστε να ισχύει $\boldsymbol{\theta_2 = \theta_1 \circ \theta_3}$.
- **Παράδειγμα:** Έστω οι απλές παραστάσεις $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ και οι ενοποιητές $\boldsymbol{\theta_1}$, $\boldsymbol{\theta_2}$, $\boldsymbol{\theta_3}$ και $\boldsymbol{\theta_4}$ του προηγούμενου παραδείγματος. Ο ενοποιητής $\boldsymbol{\theta_3 = \{X/Z, Y/a\}}$ είναι ο πλέον γενικός ενοποιητής των $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$.
  - **1.** $\boldsymbol{\theta_3 \circ \{Z/b\} = \{X/b, Y/a, Z/b\} = \theta_1}$
  - **2.** $\boldsymbol{\theta_3 \circ \{Z/a\} = \{X/a, Y/a, Z/a\} = \theta_2}$
  - **3.** $\boldsymbol{\theta_3 \circ \{Z/f(W)\} = \{X/f(W), Y/a, Z/f(W)\} = \theta_4}$

4.8 Ενοποίηση.

- Έχουν κατασκευαστεί πολλοί αλγόριθμοι ενοποίησης οι οποίοι βρίσκουν τον **πλέον γενικό ενοποιητή (πγε)** έχουν δημιουργηθεί.
- Ο πλέον γνωστός αλγόριθμος ενοποίησης είναι ο ονομαζόμενος **αλγόριθμος του Robinson** ο οποίος και τον κατασκεύασε.
- Εάν δοθούν σαν είσοδος δύο ατομικοί τύποι $\mathbf{A_1 = P(t_1,\ldots,t_v)}$ και $\mathbf{A_2 = P(r_1,\ldots,r_v)}$, **ο αλγόριθμος βρίσκει εάν είναι ενοποιήσιμοι ή όχι**.
  - **Εάν** ναι επιστρέφει τον **πγε**, **διαφορετικά** επιστρέφει **αποτυχία**.
  - Ο αλγόριθμος χρησιμοποιεί μια στοίβα **S** στην οποία καταχωρούνται τα ζεύγη των αντίστοιχων όρων των $\mathbf{A_1}$ και $\mathbf{A_2}$, δηλαδή $\mathbf{S := [\ (t_1, r_1),\ldots,(t_v, r_v)\ ]}$.

4.8 Ενοποίηση.

- **Αλγόριθμος ενοποίησης του Robinson.**
- **Είσοδος**
  - Οι δύο ατομικοί τύποι $A_1 = P(t_1,\ldots,t_v)$ και $A_2 = P(r_1,\ldots,r_v)$ οι οποίοι θα ενοποιηθούν. P είναι το όνομα του κατηγορήματος.
- **Έξοδος**
  - Η αντικατάσταση θ, ο πλέον γενικός ενοποιητής των A_1 και A_2, ή αποτυχία.
-
- **Αλγόριθμος**
  - Αρχική τιμή στην αντικατάσταση θ το κενό σύνολο, θ := { }.
  - Αρχική τιμή στη στοίβα S τα ζεύγη των όρων $(t_1, r_1),\ldots,(t_v,r_v)$,
  - $S := [\ (t_1, r_1),\ldots,(t_v, r_v)\ ]$.
  - Αρχική τιμή ψευδές στην μεταβλητή Αποτυχία, Αποτυχία := ψευδής.

Αλγόριθμος (συνέχεια)

- **repeat**
- Πάρε την κορυφή (t, r) της στοίβας S;
- **if** t και r είναι διαφορετικές μεταβλητές **then** θ΄ := θ ∘ {t/r};
- αντικατέστησε την μεταβλητή t με τον όρο r στην στοίβα S;
- **else if** t μεταβλητή *και* r όρος (σύνθετος ή μη) στον οποίο δεν υπάρχει η μεταβλητή t
- **then** θ΄ := θ ∘ {t/r};
- αντικατέστησε την μεταβλητή t με τον όρο r στην στοίβα S;
- **else if** r μεταβλητή *και* t όρος (σύνθετος ή μη) στον
- οποίο δεν υπάρχει η μεταβλητή r. **then** θ΄ := θ ∘ {r/t};
- αντικατέστησε την μεταβλητή r με τον όρο t στην στοίβα S;
- **else if** t και r είναι ίδιες σταθερές ή ίδιες μεταβλητές **then** συνέχισε;
- **else if** t και r είναι σύνθετοι όροι με ίδιο όνομα συνάρτησης και ίδια πληθυκότητα κ, t = $F(s_1,\ldots,s_K)$ και r = $F(u_1,\ldots,u_K)$ **then**
- καταχώρησε τα ζεύγη των όρων $(s_1,u_1),\ldots,(s_K, u_K)$ στην στοίβα S;
- **else** Αποτυχία : = αληθής
- **until** (S = { }) **or** Αποτυχία;
- **if** Αποτυχία **then** έξοδος αποτυχία **else** έξοδος θ;

Παράδειγμα ενοποίησης με τον Αλγόριθμο Robinson

- Θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο για τους ατομικούς τύπους
  - $A_1 = p(X, f(Y,a), a)$ και
  - $A_2 = p(g(Y), f(Z,Y), Z)$.
- Κάθε βήμα αντιστοιχεί σε μια επανάληψη του βρόχου **repeat**….**until**.
- Η στοίβα **S** είναι μια λίστα από ζεύγη όρων.
- Σε κάθε βήμα φαίνονται οι νέες τιμές των **θ, S** και **Αποτυχία**.

- **Αρχικές τιμές**
  - θ := { };
  - S := [(X,g(Y)), (f(Y,a), f(Z,Y)), (a,Z)].
  - Αποτυχία := ψευδής;
- **βήμα 1**
  - θ := { } ∘ {X/g(Y)} = {X/g(Y)}
  - S := [(f(Y,a), f(Z,Y)), (a,Z)].
  - Αποτυχία := ψευδής;
- **βήμα 2**
  - θ := {X/g(Y)};
  - S := [(Y,Z), (a,Y), (a,Z)];
  - Αποτυχία := ψευδής;
- **βήμα 3**
  - θ := {X/g(Y)} ∘ {Y/Z} = {X/g(Z), Y/Z}
  - S := [(a,Z), (a,Z)];
  - Αποτυχία := ψευδής
- **βήμα 4**
  - θ := {X/g(Z), Y/Z} ∘ {Z/a} = {X/g(a), Y/a, Z/a}
  - S := [(a,a)];
  - Αποτυχία := ψευδής;
- **βήμα 5**
  - θ := {X/g(a), Y/a, Z/a}
  - S := [ ];
  - Αποτυχία := ψευδής;
- **Έξοδος**
  - θ := {X/g(a), Y/a, Z/a}
  - $A_1\theta$ = p(X, f(Y, a), a) {X/g(a), Y/a, Z/a} = p(g(a), f(a, a), a)
  - $A_2\theta$ = p(g(Y), f(Z, Y), Z) {X/g(a), Y/a, Z/a} = p(g(a), f(a, a), a)

4.8 Ενοποίηση.

- Ένας πολύ δημοφιλής αλγόριθμος ενοποίησης ορίζεται με **βάση το** **σύνολο ασυμφωνίας** (**disagreement set**).
- **Ορισμός:** Έστω ότι **E** είναι ένα πεπερασμένο σύνολο απλών παραστάσεων. Το ***σύνολο ασυμφωνίας*** (***disagreement set***) ορίζεται ως εξής.
  - **Προσδιόρισε την θέση του πλέον αριστερού συμβόλου** στην οποία **δεν έχουν ίδιο σύμβολο όλες οι παραστάσεις του** **E**.
  - **Απόσπασε από κάθε παράσταση την υποπαράσταση** η οποία **αρχίζει από αυτή την θέση**.
  - Το **σύνολο όλων αυτών των υποπαραστάσεων** είναι το **σύνολο ασυμφωνίας** της **E**.
- **Παράδειγμα:** Έστω η παράσταση **E = {p(f(X),h(Y),a), p(f(X),Z,a), p(f(X),h(Y),b)).** Το σύνολο ασυμφωνίας της παράστασης **E** είναι το σύνολο **{h(Y),Z}.**

4.8 Ενοποίηση.

- Έστω **Ε** ένα σύνολο απλών παραστάσεων. Ο αλγόριθμος ενοποίησης βασίζεται στο **σύνολο ασυμφωνίας**[Lloyd1987].

1. **Βάλε κ=0** και **θ_0 = { }.**
2. ***Εάν*** **Εθ_κ** είναι **μονοσύνολο *τότε* σταμάτησε**, **θ_κ** είναι ο **πγε**,
   διαφορετικά **βρες** το **σύνολο ασυμφωνίας Δ$_\kappa$** του **Εθ_κ**;
3. ***Εάν*** υπάρχει μεταβλητή **Χ** και όρος **Τ** στο **Δ$_\kappa$** τέτοιοι ώστε η μεταβλητή **Χ** να μην υπάρχει στον όρο **Τ**,
   τότε **βάλε $\theta_{\kappa+1} = \theta_\kappa \circ \{X/T\}$**,
   αύξησε το **κ** και **πήγαινε στο βήμα 2**,
   διαφορετικά σταμάτησε, η **Ε δεν είναι ενοποιήσιμη**.

Αλγόριθμος 3.3: Αλγόριθμος ενοποίησης με βάση το σύνολο ασυμφωνίας.

4.8 Ενοποίηση.

- **Παράδειγμα 1**: Έστω το σύνολο **Ε** των απλών εκφράσεων **Ε={f(g(a),g(X)), f(Y,Y) }**
- ***Πρώτη επανάληψη*:**
  - $\boldsymbol{\theta_0}$ = { } Δ_1 = {g(a), Y}
  - $\boldsymbol{\theta_1}$ = {Y/g(a)},
- ***Δεύτερη επανάληψη:***
  - $\mathbf{E\theta_1}$ = {**f(g(a),g(X)), f(g(a),g(a))** }
  - $\boldsymbol{\Delta_2}$ = {X,a}
  - $\boldsymbol{\theta_2}$ = {Y/g(a), X/a},
- ***Third iteration:***
  - $\mathbf{E\theta_2}$ = { **f(g(a),g(a))** } **μονοσύνολο**
  - η αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta_2}$ είναι ο **πγε** της **Ε**

1. **Βάλε κ=0** και **θ_0 = { }.**
2. ***Εάν*** $\mathbf{E\theta_\kappa}$ είναι **μονοσύνολο** ***τότε*** **σταμάτησε**, $\boldsymbol{\theta_\kappa}$ είναι ο **πγε**, ***διαφορετικά*** **βρες** το **σύνολο ασυμφωνίας** $\boldsymbol{\Delta_\kappa}$ του $\mathbf{E\theta_\kappa}$;
3. ***Εάν*** υπάρχει μεταβλητή **Χ** και όρος **Τ** στο $\boldsymbol{\Delta_\kappa}$ τέτοιοι ώστε η μεταβλητή **Χ** να μην υπάρχει στον όρο **Τ**, ***τότε*** **βάλε** $\boldsymbol{\theta_{\kappa+1} = \theta_\kappa \circ \{X/T\}}$, **αύξησε** το **κ** και **πήγαινε στο βήμα 2**, ***διαφορετικά*** σταμάτησε, η **Ε** **δεν είναι ενοποιήσιμη**.

4.8 Ενοποίηση.

- **Παράδειγμα 2**: Έστω το σύνολο **Ε** των απλών εκφράσεων **Ε={f(X,X), f(Y,g(Y)) }**
- ***Πρώτη επανάληψη*:**
  - θ_0 = { } Δ_1 = {X, Y}
  - θ_1 = {X/Y},
- ***Δεύτερη επανάληψη:***
  - $E\theta_1$ = {**f(Y, Y), f(Y, g(Y))** }
  - Δ_2 = {Y,g(Y)}
  - Η μεταβλητή **Y** υπάρχει στον όρο **g(Y)** (**έλεγχος ύπαρξης/occur check**), **οι υποπαραστάσεις αυτές δεν είναι ενοποιήσιμες.**
  - Συνεπώς, οι **απλές παραστάσεις** της **Ε** **δεν είναι ενοποιήσιμες**.

1. **Βάλε κ=0** και θ_0 **= {** }.
2. ***Εάν*** $E\theta_\kappa$ είναι **μονοσύνολο** ***τότε*** **σταμάτησε**, θ_κ είναι ο **πγε**, ***διαφορετικά*** **βρες** το **σύνολο ασυμφωνίας** Δ_κ του $E\theta_\kappa$;
3. ***Εάν*** υπάρχει μεταβλητή **Χ** και όρος **Τ** στο Δ_κ τέτοιοι ώστε η μεταβλητή **Χ** να μην υπάρχει στον όρο **Τ**, ***τότε*** **βάλε** $\theta_{\kappa+1} = \theta_\kappa \circ \{X/T\}$, **αύξησε** το **κ** και **πήγαινε στο βήμα 2**, ***διαφορετικά*** σταμάτησε, η **Ε** **δεν είναι ενοποιήσιμη**.

4.8 Ενοποίηση.

- Όταν σε ένα ζεύγος όρων **(t, r)** είτε ο όρος **t** είναι **μεταβλητή** και ο όρος **r** **σύνθετος όρος** ή αντίστροφα τότε ο αλγόριθμος κάνει τον ***έλεγχο–ύπαρξης*** γνωστό ως ***occur–check***. Αυτός ο έλεγχος σκοπό έχει **να μην επιτρέψει αυτοαναφερόμενες δεσμεύσεις** όπως για παράδειγμα **X/f(X)**. Μία τέτοια δέσμευση καταχωρεί στην μεταβλητή **X** **ένα μη-πεπερασμένο όρο** **f(f(f(…)))** ενώ **όλες οι εκφράσεις πρέπει να είναι πεπερασμένες**.
- Ο ***έλεγχος–ύπαρξης*** **έχει υψηλό υπολογιστικό κόστος**, γι' αυτό πολλές γλώσσες λογικού προγραμματισμού **παραλείπουν** τον ***έλεγχο–ύπαρξης*** **από τον αλγόριθμο ενοποίησης που χρησιμοποιούν**. Αυτή η παράλειψη έχει σαν συνέπεια ο αλγόριθμος ενοποίησης να **χάσει την ορθότητά του**.

Ευχαριστώ!

Ερωτήσεις;