Λογικός Προγραμματισμός

Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής
mmarak@cs.hmu.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Λογικός Προγραμματισμός

Μάθημα 4

- **2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.**

2. Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό (Μέρος Γ).

- 2.1 Εισαγωγή (Μέρος Α).
- 2.2 Τύποι και η Αλήθειά τους (Μέρος Α).
- 2.3 Λογικές Ισοδυναμίες και Απλοποίηση Τύπων (Μέρος Β).
- 2.4. Μετασχηματισμοί Τύπων: Διαζευκτική και Συζευκτική Μορφή Τύπων (Μέρος Β).
- 2.5 Συνέπεια και Εξαγωγή Συμπερασμάτων (Μέρος Β).
- 2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων (Μέρος Γ).

Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.

- 4.1 Εισαγωγή. (Μέρος Α)
- 4.2 Σύνταξη της Κατηγορηματικής Λογικής. (Μέρος Α)
- 4.3 Ερμηνείες. (Μέρος Α)
- 4.4α. Λογικές ισοδυναμίες & Σημασιολογική Συνέπεια Τύπων. (Μέρος Β)
- 4.4β. Λογικές ισοδυναμίες & μετασχ. τύπων. (Μέρος Β)
- 4.5 Τυπικά συστήματα & εξαγωγή συμπερ. (Μέρος Β)
- 4.6 Κανονικές μορφές τύπων. (Μέρος Β)
  - a) Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή. b) Συναρτήσεις Skolem. c) Προτάσεις (Clauses). d) Προτάσεις Horn.
- 4.7 Αντικατάσταση. (Μέρος Γ)
- 4.8 Ενοποίηση. (Μέρος Γ)
- 4.9 Η Μέθοδος της (Δυαδικής) Επίλυσης. (Μέρος Δ)
- 4.10 Επίλυση & Στρατηγικές απόδειξης. (Μέρος Δ)
- 4.11 Η στρατηγική της γραμμικής επίλυσης. (Μέρος Ε)
- 4.12 Μετασχηματισμοί Λογικών Προγραμμάτων (Μέρος ΣΤ)

- **Συστήματα Hilbert:** Τα χαρακτηριστικά των συστημάτων Hilbert είναι τα εξής:
  - **Χρησιμοποιούν μόνο** τους λογικούς συνδέσμους ¬ και →. Όλοι οι τύποι γράφονται σ' αυτούς τους δυο συνδέσμους.
  - **Χρησιμοποιούν ένα μόνο συμπερασματικό κανόνα**, τον **κανόνα της απόσπασης (modus ponens).**
  - **Χρησιμοποιούν ένα σύνολο από λογικά αξιώματα** τα οποία είναι **ταυτολογίες**. **Τα αξιώματα είναι σχήματα**. **Κάθε αξίωμα του συστήματος είναι θεώρημα χωρίς άλλη απόδειξη.** Το πιο δημοφιλές σύνολο αξιωμάτων είναι το εξής.
    - **α.** $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi))$
    - **β.** $(\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \omega)) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \omega))$
    - **γ.** $(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \varphi) \rightarrow \psi)$

- Το **θεώρημα του συμπεράσματος** (**deduction theorem**) είναι ένα ***μέτα-θεώρημα*** (***metatheorem***) της κατηγορηματικής ΛΠΤ. **Είναι η τυποποίηση μιας συνηθισμένης τεχνικής απόδειξης** σύμφωνα με την οποία
  - **μια συνεπαγωγή φ → ψ αποδεικνύεται θεωρώντας ως αληθές το φ,**
  - στη συνέχεια **γίνεται εξαγωγή του ψ, από την υπόθεση φ** και **με την σύνδεση της με άλλες γνωστές υποθέσεις** (**αληθείς προτάσεις**).

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Το θεώρημα του συμπεράσματος δηλώνει ότι
  - **εάν** ο τύπος **ψ** **μπορεί να παραχθεί από ένα σύνολο υποθέσεων** (**αληθών προτάσεων**) $\{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa, \varphi\}$, όπου **φ** είναι ένας κλειστός τύπος,
  - **τότε** η συνεπαγωγή $\varphi \rightarrow \psi$ **μπορεί να παραχθεί από τις υποθέσεις** $\{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa\}$.
- Αυτό εκφράζεται συμβολικά ως εξής,

$$(\omega_1, \ldots, \omega_\kappa\ \varphi \vdash \psi)\ \underline{\textbf{συνεπάγεται}}\ (\omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \rightarrow \psi)$$

  - Στην ειδική περίπτωση που $\{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa\}$, είναι το άδειο σύνολο, το θεώρημα του συμπεράσματος αποδεικνύει ότι

$$\varphi \vdash \psi\ \underline{\textbf{συνεπάγεται}}\ \vdash \varphi \rightarrow \psi$$

- Το θεώρημα του συμπεράσματος ισχύει για όλες τις θεωρίες πρώτης τάξης με τα συνήθη παραγωγικά συστήματα της ΛΠΤ.

- **Θεώρημα του συμπεράσματος**.
- Ας θεωρήσουμε ότι **φ** και **ψ** είναι τύποι, $\boldsymbol{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa}$ είναι υποθέσεις.
- **Εάν** **φ**, $\boldsymbol{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa}$ έχουν ως **λογική συνέπεια** το **ψ**, **τότε** $\boldsymbol{\omega_1, \ldots, \omega_\kappa}$ έχουν ως **λογική συνέπεια** το **φ→ψ**

$$\underline{\textbf{εάν}}\ \omega_1, \ldots, \omega_{\kappa},\ \varphi \vdash \psi$$

$$\underline{\textbf{τότε}}\ \omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi$$

$$(\omega_1, \ldots, \omega_\kappa\ \varphi \vdash \psi) \models (\omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi)$$

- Το αντίστροφο του θεωρήματος του συμπεράσματος είναι επίσης συμπερασματικός κανόνας

$$\underline{\textbf{εάν}}\ \omega_1, \ldots, \omega_\kappa \vdash \varphi \to \psi$$

$$\underline{\textbf{τότε}}\ \omega_1, \ldots, \omega_{\kappa},\ \varphi \vdash \psi$$

- Η **απαγωγή σε άτοπον *(Reductio ad absurdum*** ή σε Λατινικά "reduction to absurdity"), είναι μια συνηθισμένη μορφή απόδειξης/επιχειρηματολογίας η οποία **προσπαθεί να αποδείξει ότι μια πρόταση είναι αληθής αποδείχνοντας ότι προκύπτει άτοπον εάν θεωρήσουμε ως αληθή την άρνηση της πρότασης**.
  - Με άλλα λόγια, **για να αποδείξουμε ότι η πρόταση p είναι αληθής**,
  - θα δείξουμε ότι $\neg \mathbf{p} \models \mathbf{F}$ ή ισοδύναμα $\neg \mathbf{p} \models (\mathbf{q} \wedge \neg \mathbf{q}) \models \mathbf{F}$.
- Συνεπώς, εφόσον $\neg \mathbf{p}$ (**η άρνηση της πρόταση**) συνεπάγεται **αντίφαση** συμπεραίνουμε ότι η πρόταση **p** είναι αληθής.

- **Απαγωγή σε άτοπον**: Έστω $\boldsymbol{\varphi_1,..,\varphi_\kappa}$, $\boldsymbol{\psi}$ τύποι. Θέλουμε ν' αποδείξουμε ότι

  $$\boldsymbol{\varphi_1,..,\varphi_\kappa \models \psi}.$$

  Αντί ν' αποδείξουμε ευθέως ότι το $\boldsymbol{\psi}$ είναι συνέπεια των τύπων $\boldsymbol{\varphi_1,..,\varphi_\kappa}$ αποδεικνύουμε ότι η αλήθεια του $\boldsymbol{\neg\psi}$ (του αντιθέτου του), οδηγεί σε αντίφαση. Δηλαδή, αποδεικνύουμε ότι το σύνολο των τύπων $\boldsymbol{\{\varphi_1,..,\varphi_\kappa, \neg\psi\}}$ είναι ασυνεπές (inconsistent). Αυτή η στρατηγική απόδειξης ονομάζεται ***απαγωγή σε άτοπο***.

- **Θεωρούμε ότι ισχύει** $\boldsymbol{\varphi_1,..,\varphi_\kappa, \neg\psi \models F}$, από το **θεώρημα του συμπεράσματος** έχουμε ότι $\boldsymbol{\varphi_1,..,\varphi_\kappa \models \neg\psi \rightarrow F}$. Για να είναι ο τύπος $\boldsymbol{\neg\psi \rightarrow F}$ αληθής όταν η σύζευξη των προτάσεων είναι αληθής θα πρέπει το $\boldsymbol{\neg\psi}$ να είναι ψευδές. Αυτό σημαίνει ότι το $\boldsymbol{\psi}$ είναι αληθές.

2. ΑΓ και Συλλογιστική στο Προτασιακό Λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- **Παράδειγμα:** Θέλουμε ν' αποδείξουμε με την **στρατηγική απόδειξης** την **απαγωγή σε άτοπο** ότι, $r\to p,\ s\to q,\ q\to\neg p \models \neg r \vee \neg s$

		Δικαιολόγηση κανόνα
1.	$r\to p$	Αρχική υπόθεση (Πρ.1)
2.	$s\to q$	Αρχική υπόθεση (Πρ.2)
3.	$q\to\neg p$	Αρχική υπόθεση (Πρ.3)
4.	$\neg(\neg r \vee \neg s)$	**Εισαχθείσα υπόθεση**
5.	$\neg\neg r \wedge \neg\neg s$	Νόμος De Morgan για ∨ στην 4
6.	$r\wedge s$	Νόμος διπλής άρνησης
7.	r	Κανόνας διαγραφής σύζευξης στην 6.
8.	s	Κανόνας διαγραφής σύζευξης στην 6.
9.	p	Κανόνας απόσπασης 1,7
10.	q	Κανόνας απόσπασης 2,8
11.	$\neg p$	Κανόνας απόσπασης 3, 10
12.	$p\wedge\neg p$	Κανόνας εισαγωγής σύζευξης σε 9,11.
13.	F	Νόμος της αντίφασης.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Η ***επίλυση*** (***resolution***) είναι μια μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων με τα εξής χαρακτηριστικά:
  - **1.** Οι τύποι πρέπει να είναι σε **προτασιακή (clausal) μορφή**.
  - **2.** Η μέθοδος της επίλυσης ακολουθεί ως **στρατηγική απόδειξης** την ***απαγωγή σε άτοπο***.
    - Αποδεικνύει ότι η **άρνηση του συμπεράσματος** και **οι υποθέσεις** συνιστούν ένα **ασυνεπές σύνολο**.
  - **3.** Χρησιμοποιεί **ένα μόνο συμπερασματικό κανόνα**, αυτόν της **επίλυσης (resolution).**
- **Ορισμός:** Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τις προτάσεις $\varphi_1 \vee p$ και $\varphi_2 \vee \neg p$ όπου φ_1 και φ_2 είναι **προτάσεις** και **p** είναι **προτασιακή μεταβλητή**. Ο ***συμπερασματικός κανόνας της επίλυσης*** ορίζεται ως εξής.

$$\varphi_1 \vee p,\ \varphi_2 \vee \neg p \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2$$

- **Δυο προτάσεις επιλύονται <u>εάν και μόνο εάν</u>** περιέχουν **δυο στοιχειώδεις τύπους οι οποίοι είναι συμπληρωματικοί**.
  - Η **παραγόμενη νέα πρόταση** ονομάζεται ***λύση*** (***resolvent***).
  - **Οι αρχικές προτάσεις** ονομάζονται ***πατρικές προτάσεις***.
- Η **μέθοδος της επίλυσης** είναι ουσιαστικά μια **γενίκευση του συμπερασματικού κανόνα της απόσπασης (modus ponens)**.

- **Παράδειγμα 1**: Θέλουμε να βρούμε την λύση για τις προτάσεις **p∨¬q∨¬r** και **¬p∨s**. Η **επίλυση θα γίνει πάνω στο p** επειδή οι **συμπληρωματικοί στοιχειώδεις τύποι είναι** οι **p** και **¬p**. Συνεπώς, η εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης έχει ως εξής.

  $$p \lor \neg q \lor \neg r,\ \neg p \lor s \vdash \neg q \lor \neg r \lor s$$

- Η στρατηγική με την οποία επιτυγχάνεται το συμπέρασμα (deduction) είναι η **απαγωγή σε άτοπο**. Αυτή η στρατηγική
  - **προσθέτει στις υποθέσεις την άρνηση του συμπεράσματος**
  - και **προσπαθεί με διαδοχικά βήματα επίλυσης (resolution) να φθάσει στην άδεια πρόταση**, δηλαδή **σε αντίφαση**.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- **Διάζευξη χωρίς προτάσεις** λέγεται ***άδεια πρόταση*** και είναι πάντα **ψευδής**. Η άδεια πρόταση συμβολίζεται με το □. Ένα σύστημα εξαγωγής συμπερασμάτων που εξάγει την άδεια πρόταση είναι σαν να εξάγει αντίφαση.
- Η άδεια πρόταση είναι πάντα ψευδής για τον εξής λόγο. Έστω η πρόταση **p** όπου **p** **προτασιακή μεταβλητή**.
  - Η πρόταση **p** **είναι ισοδύναμη** με την πρόταση $\mathbf{p \lor F}$, και
  - η πρόταση $\mathbf{\neg p}$ **είναι ισοδύναμη** με την πρόταση $\mathbf{\neg p \lor F}$.
- Εάν εφαρμόσουμε τον **συμπερασματικό κανόνα της επίλυσης** σ' αυτές τις δύο προτάσεις θα έχουμε **σαν συμπέρασμα την αντίφαση**.

$$\mathbf{p \lor F,\ \neg p \lor F \vdash F \lor F} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad \mathbf{p \lor F,\ \neg p \lor F \vdash F}$$

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- **Ορισμός:** Έστω οι δύο προτάσεις $\boldsymbol{\varphi_1}\vee \mathbf{p}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}\vee\neg \mathbf{p}$ όπου $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$ είναι **διάζευξη στοιχειωδών τύπων**. Προτάσεις αυτής της μορφής ονομάζονται ***συγκρουόμενες προτάσεις*** οι οποίες συγκρούονται στους συμπληρωματικούς στοιχειώδεις τύπους **p** και $\neg$**p**.
- Μια γενική διαδικασία **απαγωγής σε άτοπο** η οποία στηρίζεται στον **κανόνα της επίλυσης** δίνεται στον **Αλγόριθμο 3.1**.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- Έστω **Π** είναι ένα σύνολο προτάσεων το οποίο ονομάζεται **προτάσεις εισόδου**.
  - **1.** $\mathbf{\Pi_0 = \Pi}$
  - **2.** Διάλεξε δύο συγκρουόμενες προτάσεις

    $\varphi_1 \vee p \in \Pi_{i-1}$ <u>και</u> $\varphi_2 \vee \neg p \in \Pi_{i-1}$, $i=\{1,..,v\}$.
  - **3.** $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ % Εφαρμογή του συμπερασματικού κανόνα της επίλυσης
  - **4.** $\Pi_i = \Pi_{i-1} \cup \{\varphi\}$
  - **5. Εάν** $\varphi = \square$ **τότε**
  - **Τερμάτισε την διαδικασία**;
  - Το σύνολο των προτάσεων **Π** είναι **μη-επαληθεύσιμο** (unsatisfiable);
  - **6. Εάν** $\Pi_{i+1} = \Pi_i$ για όλα τα ζεύγη συγκρουόμενων προτάσεων **τότε**
  - **Τερμάτισε την διαδικασία**;
  - Το σύνολο των προτάσεων **Π** είναι **επαληθεύσιμο (satisfiable)**;
  - **7. Πήγαινε στο βήμα (2).**

Αλγόριθμος 3.1: Διαδικασία απαγωγής σε άτοπον στον προτασιακό λογισμό.

2.6 Συμπερασματικοί Κανόνες και Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων.

- **Ορισμός:** Έστω **Π** ένα σύνολο προτάσεων το οποίο ονομάζεται **προτάσεις εισόδου**. Μια ***εξαγωγή συμπεράσματος*** (***deduction***) είναι **μια ακολουθία προτάσεων** $\boldsymbol{\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_v}$ έτσι ώστε κάθε $\boldsymbol{\varphi_i}$ **(**$\boldsymbol{1 \leq i \leq v}$**)**
  - **είτε** **ανήκει στις προτάσεις εισόδου,**
  - **ή** είναι **μία πρόταση εξαγόμενη** από τις προτάσεις $\boldsymbol{\varphi_j}$ και $\boldsymbol{\varphi_\kappa}$ όπου $\boldsymbol{1 \leq j < i}$ και $\boldsymbol{1 \leq \kappa < i}$.

  Η πρόταση $\boldsymbol{\varphi_i}$ ονομάζεται ***εξαγόμενη (derived)*** πρόταση.

- **Ορισμός**: Μια ***απόρριψη*** (***refutation***) των προτάσεων εισόδου **Π** είναι **μια πεπερασμένη εξαγωγή συμπεράσματος** $\boldsymbol{\varphi_1, .., \varphi_v}$ τέτοια ώστε $\boldsymbol{\varphi_v = \square}$.

- **Παράδειγμα 1:** Θέλουμε ν' αποδείξουμε **τον κανόνα της απόσπασης**, **p, ¬p ∨ q** ├ **q** με την **μέθοδο της επίλυσης**.

1.	**p**	Υπόθεση
2.	**¬p ∨ q**	Υπόθεση
3.	**¬q**	**Άρνηση συμπεράσματος**
4.	**q**	Επίλυση στο 1 και 2
5.	□	Επίλυση στο 3 και 4

- **Παράδειγμα 2:** Θέλουμε ν' αποδείξουμε **$\neg p \vee q \vee r$, p, $\neg q$** $\vdash$ **r** με την μέθοδο της επίλυσης.

1.	**$\neg p \vee q \vee r$**	Υπόθεση
2.	**p**	Υπόθεση
3.	**$\neg q$**	Υπόθεση
4.	**$\neg r$**	**Άρνηση συμπεράσματος**
5.	**$q \vee r$**	Επίλυση στο 1 και 2
6.	**r**	Επίλυση στο 3 και 5
7.	$\square$	Επίλυση στο 4 και 6

Τέλος Μαθήματος

Ευχαριστώ!