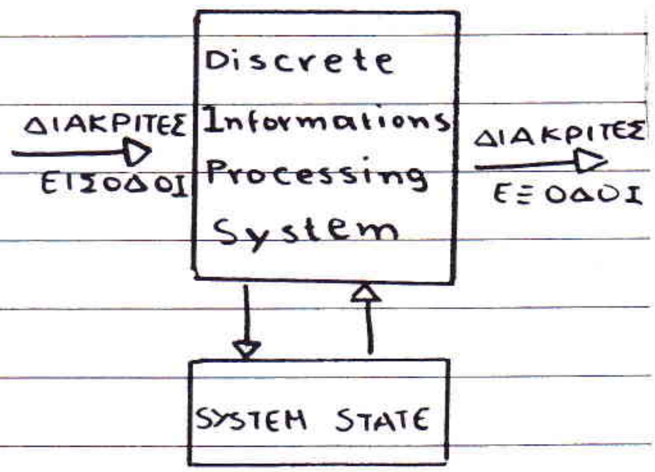
ΥΛΗ

1) Εισαγωγή - Αριθμητικά Συστήματα
2) Άλγεβρα Boole κ' λογικές πύλες
3) Απλοποίηση Συναρτήσεων Boole
4) Συνδυαστική λογική
5) Σύγχρονα ακολουθιακά ~~στα~~ κυκλώματα
6) καταχωρητές, μετρητές κ μονάδες μνήμης
7) μνήμη και προγραμματίσιμη λογική

ΚΕΦ 1

ΨΗΦΙΑΚΑ Κ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

Παίρνει ως εισόδους σετ διακριτής πληροφορίας και με βάση και την εσωτερική διακριτή πληροφορία γεννά ένα σετ διακριτής πληροφορίας ως εξόδους



Είδη ψηφιακών συστημάτων

(1) Χωρίς κατάσταση
- Συνδυαστικό λογικό σύστημα
- Η έξοδος είναι συνάρτηση εισόδου
(Έξοδος = Function(Εισόδου))

(2) Με κατάσταση

• Η κατάσταση ανανεώνεται σε διακριτές στιγμές στο χρόνο ⟹

⟹ Σύγχρονο Ακολουθιακό Σύστημα

• Η κατάσταση ανανεώνεται οποιαδήποτε στιγμή στο χρόνο ⟹

⟹ Ασύγχρονο Ακολουθιακό Σύστημα

• Κατάσταση = Function (Κατάσταση, Είσοδος)

• Έξοδος = Function (κατάσταση)

ή Function (Κατάσταση, Είσοδος)

πχ ΡΟΛΟΙ

Η κατάσταση ανανεώνεται οποιαδήποτε στιγμή στο χρόνο ⟹ Ασύγχρονο Ακολουθιακό Σύστημα

Παράδειγμα Ψηφιακού Συστήματος

Ενας ψηφιακός μετρητής (χιλιομετρητής)

unt up →
Reset →

0	0	1	3	5	6	4

Είσοδος : count up, reset

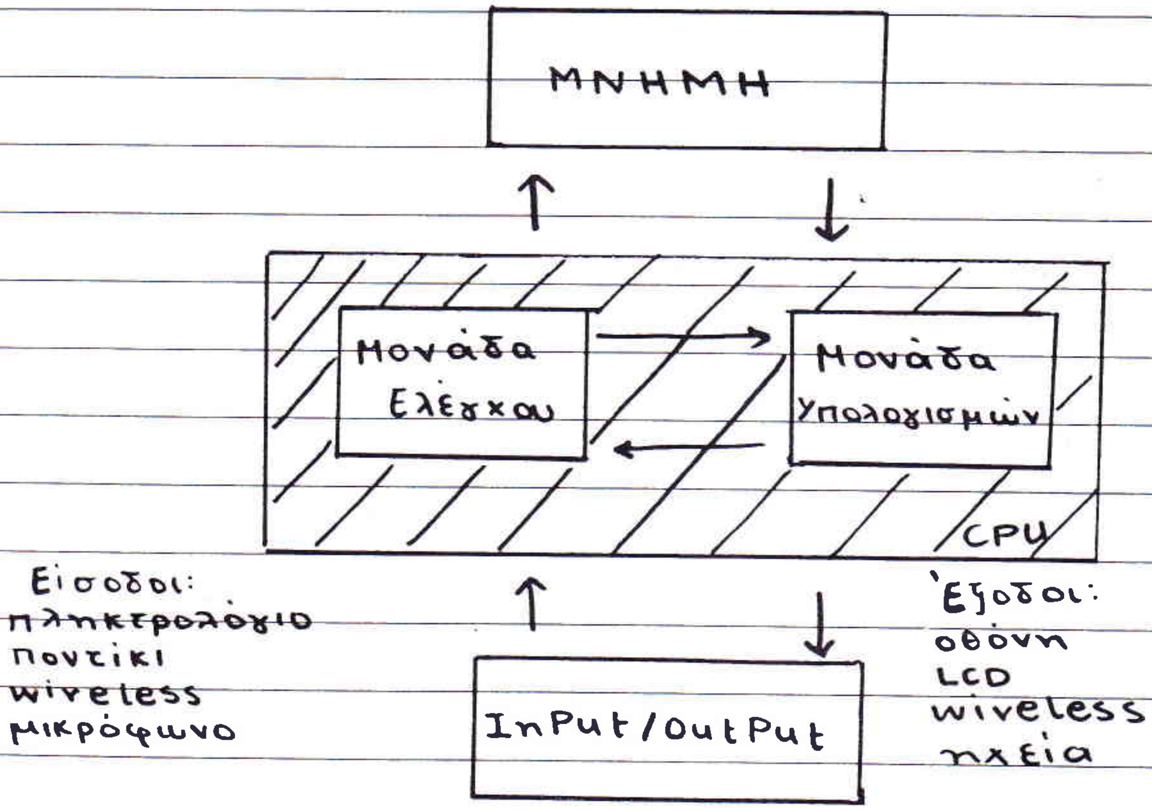
Έξοδος : LCD

Κατάσταση : Η τιμή των αποθηκευμένων ψηφίων

· Ερ: Είναι σύγχρονο ή ασύγχρονο?

Απ: Είναι ασύγχρονο γενικά αλλά κατά μήκους είναι σύγχρονο.

Παράδειγμα Ψηφιακού Υπολογιστή



ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

<u>πχ</u> Κυψελοειδής Επικοινωνίες / τηλέφωνα

Αυτοκίνητα

Video games

Φωτοαντιγραφικά

Πλυντήρια πιάτων

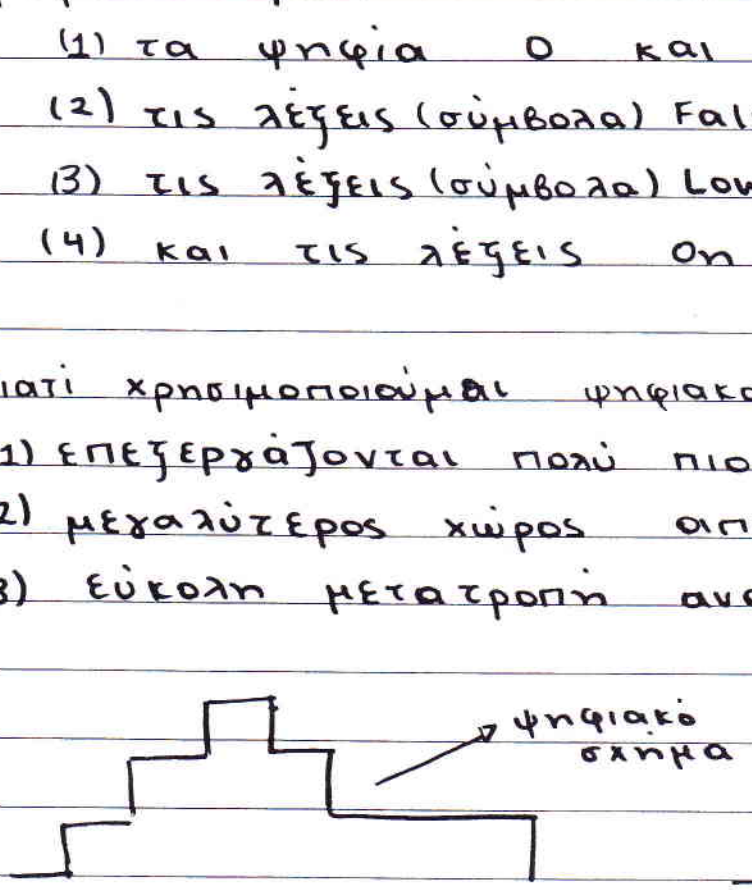
TVs

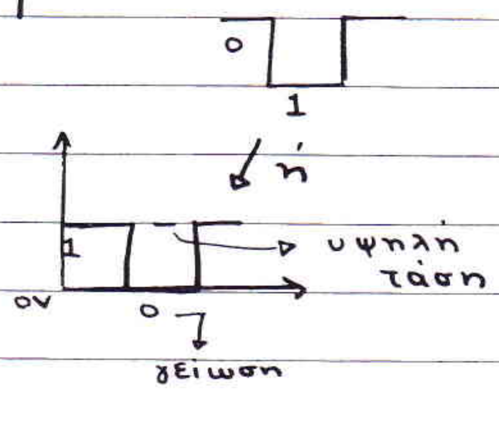
GPS

ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΑΣ, ΣΗΜΑΤΑ

- Στα ψηφιακά συστήματα, οι μεταβλητές παίρναν διακριτές τιμές.
- Οι μεταβλητές δύο επιπέδων ή δυαδικές μεταβλητές είναι οι πιο διαδεδομένες στα ψηφιακά συστήματα
- Οι δυαδικές τιμές αναπαριστάνονται αφηρημένα με:
  (1) τα ψηφία 0 και 1
  (2) τις λέξεις (σύμβολα) False (F) και True (T)
  (3) τις λέξεις (σύμβολα) Low (L) και High (H)
  (4) και τις λέξεις On και Off

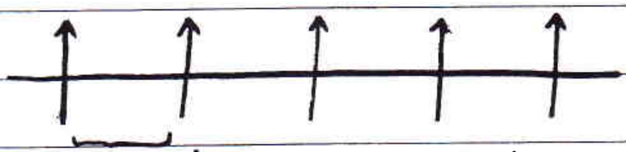
Γιατί χρησιμοποιούμαι ψηφιακούς χαρακτήρες?
1) επεξεργάζονται πολύ πιο γρήγορα
2) μεγαλύτερος χώρος αποθήκευσης
3) εύκολη μετατροπή αναλογικού → ψηφιακού.





Παραδείγματα σημάτων στον χρόνο

χρόνος :

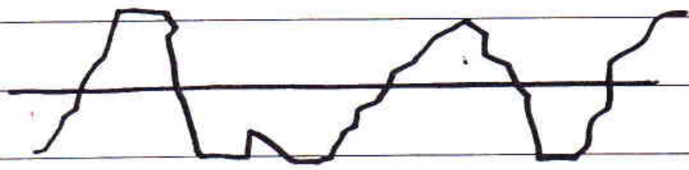


υποδιαίρεση (δεν βλέπει το χρόνο συνεχές το ψηφιακό σύστημα, αλλά κατά διαστήματα)

Ο επεξεργαστής δουλεύει σε 1 GHerz

ΔΛΔ : $T = \frac{1}{f}$, $T = 1\ nsec = 1 \cdot 10^{-9}\ sec$

Αναλογικό :
(συνεχές στην τιμή κ' στον χρόνο)

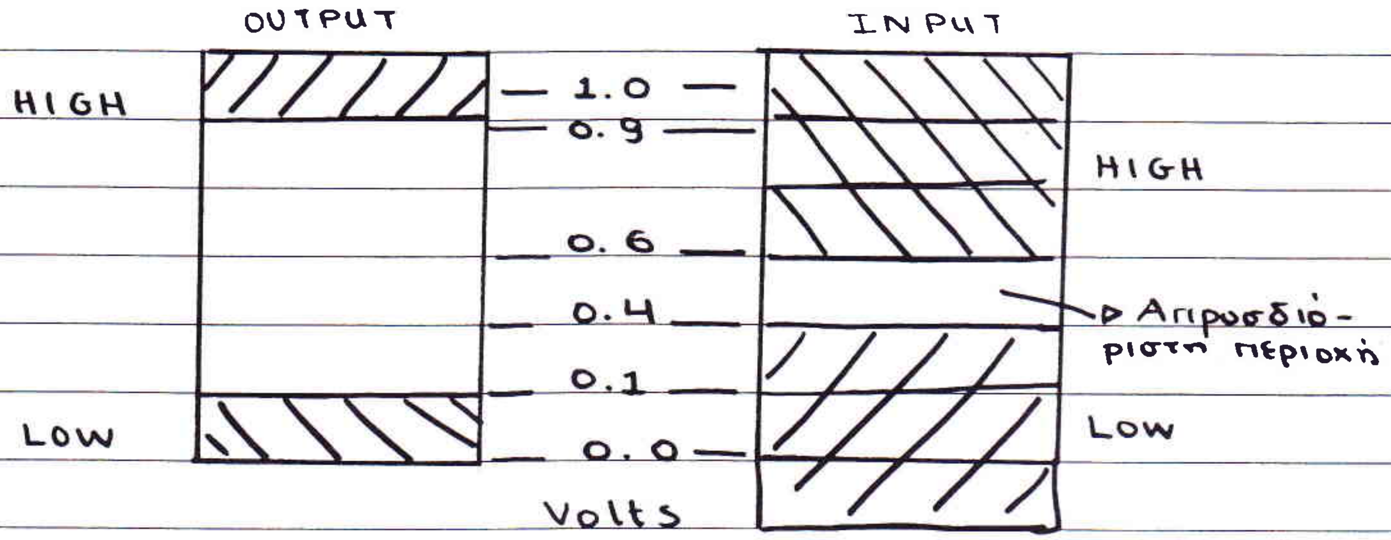


Σύγχρονο :
(διακριτό στην τιμή κ' στον χρόνο)

$\boxed{\text{Ψηφιακά}}$

Ασύγχρονο :
(διακριτό στην τιμή κ' συνεχές στον χρόνο)

Παράδειγμα Σήματος - Φυσική Ποσότητα: Τάση



ΨΗΦΙΑΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ - ΣΗΜΑΤΑ

- Επεξεργασία διακριτών στοιχείων (σύμβολα) πληροφορίας
- Αναπαράσταση των διακριτών στοιχείων με φυσικές ποσότητες, τα σήματα
- Τα σήματα στα σημερινά ψηφιακά συστήματα έχουν συνήθως δύο τιμές, δυαδικά (binary)
- Η αναπαράσταση των φυσικών σημάτων πραγματικού χρόνου γίνεται με κβαντισμό (μετατροπείς αναλογικού → ψηφιακού)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

- Δεκαδικοί (Decimal) 0–9

πχ 1 9 5 0 1 ← Least significant Digit, LSD

Most significant Digit, MSD

Βάση: 10, δέκα διαφορετικά ψηφία

- Δυαδικοί (Binary) 0–1

Βάση: 2, δύο διαφορετικά ψηφία

- Οκταδικοί (Octall) 0–7

Βάση: 8, οκτώ διαφορετικά ψηφία

- Δεκαεξαδικοί (Hexadecimal) 0–F

Βάση: 16, δεκαέξι διαφορετικά ψηφία

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, $\underset{10}{A}$, $\underset{11}{B}$, $\underset{12}{C}$, $\underset{13}{D}$, $\underset{14}{E}$, $\underset{15}{F}$

πχ το 15 θα μπορούσε να είναι ήτε Δεκαδικό ήτε Οκταδικό ήτε Δεκαεξαδικό

Άρα για να τα ξεχωρίσουμε:

$15_{(10)}$ $15_{(8)}$ $15_{(16)}$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

	Γενικά	Δεκαδικό	Δυαδικό
Βάση	r	10	2
Ψηφία	0 => r - 1	0 => 9	0 => 1
0	r^0	1	1
1	r^1	10	2
2	r^2	100	4
3	r^3	1000	8
4	r^4	10.000	16
5	r^5	100.000	32
-1	r^{-1}	0,1	0,5
-2	r^{-2}	0,01	0,25
-3	r^{-3}	0,001	0,125
-4	r^{-4}	0,0001	0, 0625
-5	r^{-5}	0,00001	0,03125

2^{10} (1024) - Kilo
2^{20} (1.048.576) - Mega
2^{30} (1.073.741.824) - Giga
2^{40} (1.099.511.627.776) - Tera

Αριθμητικά Συστήματα

Αριθμητικές πράξεις:

πρόσθεση, αφαίρεση, πολ/σμός, διαίρεση

Μετατροπή βάσης αριθμού:

μετατροπή από - σε δεκαδικό σύστημα

μετατροπή δυαδικό - οκταδικό - δεκαεξαδικό

Γενικά ένας αριθμός με βάση το r είναι:

$$a_n r^n + a_{n-1}\cdot r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 + a_{-1}\cdot r^{1} + a_{-2} r^{2}$$

ΜΕΤΑΤΡΟΠΕΣ

$19_{(10)} \to (2)$

2	
19	
9	1
4	1
2	0
1	0
$\boxed{0}$	1

$10011_{(2)} \Rightarrow 19_{(10)}$

$43_{(10)} \to (2)$

2	
43	
21	1
10	1
5	0
2	1
1	0
$\boxed{0}$	1

$101011_{(2)} \to 43_{(10)}$

$19_{(10)} \to (8)$

8	
19	
2	3
$\boxed{0}$	2

$23_{(8)} \Rightarrow 19_{(10)}$

Επαλήθευση: $2 * 8^1 + 3 * 8^0 = 16 + 3 =$
$= 19$

$27_{(8)} \Rightarrow 23_{(10)}$

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ 23 & \\ 2 & 7 \;\uparrow \\ 0 & 2 \end{array} \qquad 27_{(8)}$$

$19_{(16)} \rightarrow {}_{(10)}$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ 19 & \\ 1 & 3 \;\uparrow \\ 0 & 1 \end{array} \qquad 13_{(16)} \Rightarrow 19_{(10)}$$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ 43 & \\ 2 & B \;\uparrow \\ 0 & 2 \end{array} \qquad 43_{(10)} \Rightarrow 2B_{(16)}$$

με 2 ψηφία οι δυνατοί συνδιασμοί είναι:

00
01
10
11

ΔΕΚΑΕΞΑΔΙΚΟΣ	ΔΕΚΑΔΙΚΟΣ	ΔΥΑΔΙΚΟΣ
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

→ όσα μηδενικά βάλω από μπροστά πχ 000 → 0000 δεν αλλάζει το νούμερο

$37_{(8)} \rightarrow (10) \rightarrow (2)$

(α) Από (8) → (10) : $3 * 8^1 + 7 * 8^0 = 24 + 7 = 31_{(10)}$

Από (10) → (2) :

31	
15	1
7	1
3	1
1	1
0	1

$11111_{(2)}$

(β) τρόπος →

$37_{(8)}$

$3 \rightarrow 0011$, $7 \rightarrow 111$

$11111_{(2)}$

ΔΥΑΔΙΚΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΕΝΟΣ ΒΙΤ ΜΕ ΚΡΑΤΟΥΜΕΝΟ

Z :	0	0	0	0	→ κρατούμενο Z (αρχικό) πάντα θα είναι μηδέν
X :	0	0	1	1	
Y :	0	1	0	1	+
C S	00	01	01	10	

→ κρατούμενα

πχ

$$\begin{array}{r} 264_{(8)} \\ +\ 124_{(8)} \\ \hline 410_{(8)} \end{array} \quad // \quad \begin{array}{r} 010110100_{(2)} \\ +\ 001010100_{(2)}\ (1) \\ \hline \underbrace{100}_{4}\underbrace{001}_{1}\underbrace{000}_{0}{}_{(2)} \end{array}$$

ΔΥΑΔΙΚΗ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ BIT

Επέκταση σε δύο αριθμούς με πολλά Bit

Παράδειγμα :

Κρατούμενα	0000$\underline{0}$*	011$\underline{0}$
	01100	10110
Προσθετέοι	+ 10001	+ 10111
	11101	101101

* **Σημείωση** : Το $\underline{0}$ είναι το 'εξ' ορισμού Κρατούμενο Εισόδου στο λιγότερο σημαντικό bit

ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΝΟΣ BIT ΜΕ ΔΑΝΕΙΚΟ

(Β) : ΔΑΝΕΙΚΟ ΕΞΟΔΟΥ

$\boxed{Z :}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$
X :	0	0	1	1
Y :	0	1	0	1 −
BS	00	11	01	00

→ Δανεικό Ζ (αρχικό) ΠΑΝΤΑ θα είναι μηδέν

Δανεικά

ΔΥΑΔΙΚΗ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΛΩΝ BIT

Επέκταση σε δύο αριθμούς με πολλά Bit

παράδειγμα:

Δανεικά	00000	00110
	10110	10110
Αφαιρετέοι	- 10010	- 10011
	00100	00001

ΔΙΑΦΟΡΑ: Αν ο αφαιρετέος είναι μεγαλύτερος του μειωτέου τα αντιστρέφουμε και βάζουμε - στο αποτέλεσμα

ΔΥΑΔΙΚΟΣ ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ

0 * 0 = 0

0 * 1 = 0

1 * 0 = 0

1 * 1 = 1

Επέκταση πολ/σμού σε πολλά bit:

```
     1011
   ×  101
   ------
     1011
    0000     1
 + 1011
 --------
   110111
```

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΑ: χρησιμοποιούνται για αναπαράσταση αρνητικών αριθμών - αφαίρεση

ΓΕΝΙΚΑ	Βάση: 2	Βάση: 10
συμπλήρωμα ως προς r-1	ως προς 1	ως προς 9
συμπλήρωμα ως προς r	ως προς 2	ως προς 10

ΤΥΠΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ: ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

(1) ως προς 1 : ο αριθμός που όταν τον προσθέσω σε αυτόν θα μου δώσει τον αντίστροφο αριθμό

(2) ως προς 2 : πρώτα βρίσκω το συμπλήρωμα ως προς 1 και του προσθέτω έναν άσο (1)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ως προς (1) 1001011

↓ ως προς ένα (δλδ το αντίστροφο)

0110100

Άμα προσθέσει το αρχικό με το συμπλήρωμά του το αποτέλεσμα ΠΑΝΤΑ θα είναι 111111 ... 1

ως προς (2) $\quad 01011$

$\downarrow$ ως προς 1

10100

$\downarrow$ ως προς 2

$$\begin{array}{r} 10100 \\ +1 \\ \hline 10101 \end{array}$$

$A = \overline{\overline{A}}$: συμπλήρωμα του συμπληρώματος (σλδ ως προς 2)

<u>ΠΡΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ</u>

9's compl : αφαίρεση κάθε ψηφίου απο το 9
10's compl : 9's compl + 1
1's compl : αντικατάσταση 0 με 1 κ' 1 με 0
2's compl : 1's compl + 1

<u>Αφαίρεση με συμπληρώματα ως προς 2,1</u>

βάλαμε ένα μηδενικό γτ θέλουμε θετικό αριθμό +23

$$\begin{array}{rcrr} 23 & \rightarrow & 10111 & 010111 \\ -13 & \rightarrow & 1101 & 110011 \\ \hline & & & \boxed{1}001010 \end{array}$$

συμπλήρωμα ως προς 2 και προσθέσαμε 2 άσσους γτ το θέλουμε αρνητικό -13

Παρατήρηση : Ενας αριθμός είναι θετικός όταν το πρώτο ψηφείο είναι <u>0</u> και αρνητικός όταν είναι <u>1</u>

Δεν τελείωσε όμως εκεί! Δεν είναι αυτό το τελικό αποτέλεσμα.

23 : 010111

-13 : 110010

~~1~~001010

τελικό αποτέλεσμα → 1010

20 : 010100

Ενώ +13 : 001101

\+ 11

100001

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: ο υπολογιστής στο συμπλήρωμα ως προς 2 αν προκύπτει αποτέλεσμα με παραπάνω δεκαδικά ψηφία απο το αρχικό το πετάει δεν το υπολογίζει δλδ το τελικό μας αποτέλεσμα θα είναι: 1010 και ΟΧΙ 1001010 Ενώ στο συμπλήρωμα ως προς ένα αν το αποτέλεσμα είναι με παραπάνω δεκαδικά ψηφεία απο το αρχικό δεν το πετάει αλλά το προσθέτει απο κάτω!

πχ

$$
\begin{array}{r}
010111 \\
+\ 110010 \\
\hline
\boxed{1}001001 \\
+\ 1 \\
\hline
00\underbrace{1010}
\end{array}
$$

Δεκαδικός	Προσημασμένο συμπλήρωμα ως προς 2	προσημασμένο συμπλήρωμα ως προς 1	Προσημασμένο μέγεθος
+7	0111	0111	0111
+6	0110	0110	0110
+5	0101	0101	0101
+4	0100	0100	0100
+3	0011	0011	0011
+2	0010	0010	0010
+1	0001	0001	0001
+0	0000	0000	0000
-0	—	1111	1000
-1	1111	1110	1001
-2	1110	1101	1010
-3	1101	1100	1011
-4	1100	1011	1100
-5	1011	1010	1101
-6	1010	1001	1110
-7	1001	1000	1111
-8	1000	—	—

5bit → $2^5 = 32$ συνδιασμούς για <u>ΜΗ προσημασμένους</u> αριθμούς μπορώ να αναπαραστήσω από 0 ... 31 <u>ΕΝΩ</u> για <u>Προσημασμένους</u> αριθμούς μπορώ από -15 ... 0 ... 15

Αν θέλουμε το -23_2 με 6 δεκαδικά ψηφία:

23	
11	1
5	1
2	1
1	0
$\boxed{0}$	1

$\underline{10111}$

αλλά αφού θέλουμε με 6 δεκαδικά ψηφία θα γίνει

$+ \leftarrow \boxed{0}10111$: 23

και αφού θέλουμε το -23

$\boxed{1}01000$

$-$

BCD → Binary Coded Deccimal κώδικας

έχει βάρη 8, 4, 2, 1

πχ $\overbrace{1000}^{8}\overbrace{0001}^{1}$

άκυρες λέξεις → πχ στο οχταδικό σύστημα δεν μπορούμε να αναπαραστήσουμε τους αριθμούς απο 10 → 16

έγκυροι κωδικοί → απο το 0 → 9

έχουμε 6 κωδικές λέξεις που δεν χρησιμοποιούνται

Αν κάνουμε μια πρόσθεση που το αποτέλεσμα βγει > από το 9 τότε για να γίνει έγκυρος κώδικας του προσθέτουμε το 6

πχ

$$\begin{array}{r} 3 \\ +\ 9 \\ \hline 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0011 \\ +\ 1001 \\ \hline 1100 \ >9 \\ +\ 0110 \ \longrightarrow 6 \\ \hline \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{0010}_{2} \end{array}$$

Πρόσθεση 2905 BCD με 1897 BCD

$$\begin{array}{r} 2905 \\ +\ 1897 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2^{1} \\ +\ 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 9 \\ +\ 8 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0 \\ +\ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 5 \\ +\ 7 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0001 \\ +\ 0010 \\ \hline \underbrace{0100}_{4} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1000 \\ +\ 1001 \\ \hline 10010 \\ +\ 110 \\ \hline 1\ \underbrace{1000}_{8} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1001 \\ +\ 0000 \\ \hline 1010 >9 \\ +\ 110 \\ \hline 1\ \underbrace{0000}_{0} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0111 \\ +\ 0101 \\ \hline 1100 >9 \\ 110\ + \\ \hline 1\ \underbrace{0010}_{2} \end{array}$$

→ κρατούμενο από το προηγούμενο

Άρα το αποτέλεσμα είναι 4802

⚠ <u>ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ</u> ενός δεκαδικού αριθμού σε έναν δυαδικό

<u>ΚΩΔΙΚΟΠΟΙΗΣΗ</u> ενός δεκαδικού αριθμού χρησιμοποιώντας έναν δυαδικό κώδικα

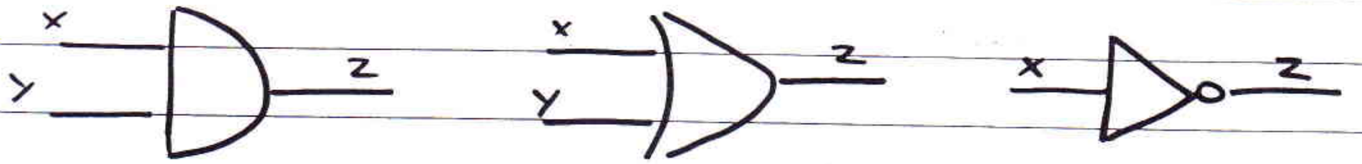
πχ μετατροπή : $13_{10} = 1101_{(2)}$

κωδικοποίηση : $13 \Longleftrightarrow 0001\,|\,0011$

0001 ← 1, 3 → 0011

ΣΥΜΒΟΛΑ ΛΟΓΙΚΩΝ ΠΥΛΩΝ – ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ

ειδικά σύμβολα για αναπαράσταση λογικών πυλών



AND	OR	NOT
$z = x \cdot y$	$z = x + y$	$z = \bar{x} = x'$

x	0	0	1	1	
y	0	1	0	1	
x,y	0	0	0	1	(AND)
x,y	0	1	1	1	(OR)
x	1	1	0	0	(NOT)

Συμπεριφορά αναπαράσταση στο χρόνο, κυματομορφές – waveform.