Λογικός Προγραμματισμός

Μανόλης Μαρακάκης, Καθηγητής
mmarak@cs.hmu.gr

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών
Σχολή Μηχανικών
Ελληνικό Μεσογειακό Πανεπιστήμιο

Λογικός Προγραμματισμός

Μάθημα 6

- **Αναπαράσταση Γνώσης και Συλλογιστική στον Κατηγορηματικό Λογισμό.**

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- **Ορισμός:** Δύο τύποι **φ** και **ψ** οι οποίοι **έχουν την ίδια τιμή αληθείας σε όλες τις ερμηνείες** λέγονται ***λογικά ισοδύναμοι***. Η λογική ισοδυναμία συμβολίζεται **φ ⇔ ψ** ή **φ≡ψ**.
- **Λογικές ισοδυναμίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον μετασχηματισμό τύπων** όπως στον προτασιακό λογισμό.
- Εάν **ψ** είναι ένας τύπος που περιέχει τον τύπο **φ** και **φ ⇔ φ΄** τότε **ψ ⇔ ψ {φ/φ΄}.**
  - Δηλαδή εάν στον τύπο **ψ** **αντικαταστήσουμε** τον τύπο **φ** με τον λογικά ισοδύναμό του **φ΄**
  - τότε θα πάρουμε ένα τύπο **λογικά ισοδύναμο** με τον τύπο **ψ**.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Ο **Πίνακας 3.13** περιέχει τους νόμους της ΛΠΤ. Διακρίνουμε
  - τύπους οι οποίοι είναι **λογικά ισοδύναμοι** και
  - τύπους οι οποίοι είναι **σημασιολογική συνέπεια** άλλων τύπων.
- Εάν τα σύμβολα **⇔, ⇒** αντικατασταθούν από τους αντίστοιχους λογικούς συνδέσμους ↔ και → τότε οι τύποι που προκύπτουν θα είναι **έγκυροι (αληθείς σε όλες τις ερμηνείες).**
- Ο **συμβολισμός φ(X,Y)** στους επόμενους νόμους της ΛΠΤ σημαίνει ότι ο τύπος **φ** περιέχει τις μεταβλητές **X** και **Y**. Ο τύπος **φ(X,Y)** μπορεί φυσικά να περιέχει κάποιες σταθερές τις οποίες δεν αναφέρουμε γιατί δεν ενδιαφέρουν την συζήτηση μας. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον συμβολισμό **ψ(X,Y)**.

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού.
  - **1. $\neg\forall X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \exists X\ \neg\varphi(X)$** **Νόμος De Morgan για $\forall$**
  - **2. $\neg\exists X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \forall X\ \neg\varphi(X)$** **Νόμος De Morgan για $\exists$**
  - **3. $\forall X\ \varphi(X) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X)$**
  - **4. $\forall X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \forall Y\ \forall X\ \varphi(X, Y)$** **μεταθετικότητα $\forall$**
  - **5. $\exists X\ \exists Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \exists Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$** **μεταθετικότητα $\exists$**
  - **6. $\exists X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Rightarrow \forall Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$**
  - **7. $\forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \wedge \forall X\ \psi(X)$**
    Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\forall$
  - **8. $\exists X\ (\varphi(X) \vee \psi(X)) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \vee \exists X\ \psi(X)$**
    Επιμεριστικός (distributive) νόμος $\exists$
  - **9. $\exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X) \wedge \exists X\ \psi(X)$**
  - **10. $\forall X\ \varphi(X) \vee \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi(X))$**

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού (**συνέχεια**).
  - **11.** $\forall X\,(\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \forall X\,\varphi(X) \leftrightarrow \forall X\,\psi(X)$
  - **12.** $\exists X\,(\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \exists X\,\varphi(X) \leftrightarrow \exists X\,\psi(X)$
  - **13.** $\exists X\,\varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists X\,(\varphi(X) \wedge \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **14.** $\forall X\,\varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall X\,(\varphi(X) \wedge \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **15.** $\exists X\,\varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \exists X\,(\varphi(X) \vee \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **16.** $\forall X\,\varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \forall X\,(\varphi(X) \vee \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **17.** $\forall X\,(\varphi \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \forall X\,\psi(X)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο φ

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού (**συνέχεια**).
  - **18.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \rightarrow \psi$

    Η μεταβλητή X δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **19.** $\exists X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X)$
  - **20.** $\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X))$
  - **21.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\forall X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X))$
  - **22.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X))$
  - **23.** $\forall X \neg \varphi(X) \vee \forall X\ \psi(X)) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X))$

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού.
- **1. Λογικές Ισοδυναμίες**
  - **1. $\neg\forall X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \exists X\ \neg\varphi(X)$** **Νόμος De Morgan για ∀**
  - **2. $\neg\exists X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \forall X\ \neg\varphi(X)$** **Νόμος De Morgan για ∃**
  - **3. $\forall X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \forall Y\ \forall X\ \varphi(X, Y)$** **μεταθετικότητα ∀**
  - **4. $\exists X\ \exists Y\ \varphi(X, Y) \Leftrightarrow \exists Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$** **μεταθετικότητα ∃**
  - **5. $\forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \wedge \forall X\ \psi(X)$**

    Επιμεριστικός (distributive) νόμος ∀
  - **6. $\exists X\ (\varphi(X) \vee \psi(X)) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \vee \exists X\ \psi(X)$**

    Επιμεριστικός (distributive) νόμος ∃
  - **7. $\exists X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$**

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **8. $\forall X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$**

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού (**συνέχεια**).
- **1. Λογικές Ισοδυναμίες (συνέχεια)**
  - **9.** $\exists X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **10.** $\forall X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **11.** $\forall X\ (\varphi \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \forall X\ \psi(X)$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο φ
  - **12.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi) \Leftrightarrow \exists X\ \varphi(X) \rightarrow \psi$

    Η μεταβλητή Χ δεν είναι ελεύθερη στον τύπο ψ
  - **13.** $\exists X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Leftrightarrow \forall X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X)$

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- Νόμοι του κατηγορηματικού λογισμού (**συνέχεια**).
- **2. Λογικές Συνέπειες (Συνεπαγωγές)**
  - **1.** $\forall X\ \varphi(X) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X)$
  - **2.** $\exists X\ \forall Y\ \varphi(X, Y) \Rightarrow \forall Y\ \exists X\ \varphi(X, Y)$
  - **3.** $\exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X)) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X) \wedge \exists X\ \psi(X)$
  - **4.** $\forall X\ \varphi(X) \vee \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi(X))$
  - **5.** $\forall X\ (\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \forall X\ \varphi(X) \leftrightarrow \forall X\ \psi(X)$
  - **6.** $\exists X\ (\varphi(X) \leftrightarrow \psi(X)) \Rightarrow \exists X\ \varphi(X) \leftrightarrow \exists X\ \psi(X)$
  - **7.** $\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X))$
  - **8.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\forall X\ \varphi(X) \rightarrow \forall X\ \psi(X))$
  - **9.** $\forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X)) \Rightarrow (\exists X\ \varphi(X) \rightarrow \exists X\ \psi(X))$
  - **10.** $\forall X \neg\ \varphi(X) \vee \forall X\ \psi(X)) \Rightarrow \forall X\ (\varphi(X) \rightarrow \psi(X))$

4.4β Λογικές Ισοδυναμίες και Μετασχηματισμοί Τύπων.

- **Παράδειγμα:** Θα αποδείξουμε ότι ο τύπος $\exists X\,(p(X) \rightarrow q(X))$ είναι **λογικά ισοδύναμος** με τον τύπο $\forall X\, p(X) \rightarrow \exists X\, q(X)$, δηλαδή τον **νόμο 19**.
  - $\exists X\,(p(X) \rightarrow q(X)) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
  - $\exists X\,(\neg p(X) \vee q(X)) \Leftrightarrow$ Επιμεριστικός (distributive) νόμος για $\exists$
  - $\exists X\, \neg p(X) \vee \exists X\, q(X) \Leftrightarrow$ Νόμος De Morgan για $\forall$
  - $\neg \forall X\, p(X) \vee \exists X\, q(X) \Leftrightarrow$ Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$
  - $\forall X\, p(X) \rightarrow \exists X\, q(X)$
- Χρησιμοποιήθηκαν οι ισοδυναμίες
  - Επιμεριστικός (distributive) νόμος για $\exists$:

$$\exists X\,(P(X) \vee Q(X)) \Leftrightarrow \exists X\, P(X) \vee \exists X\, Q(X)$$

  - Νόμος αντικατάστασης $\rightarrow$: $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
  - Νόμος De Morgan για $\forall$: $\neg \forall X\, P(X) \Leftrightarrow \exists X\, \neg P(X)$

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).
4.5 Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Οι μέθοδοι εξαγωγής συμπερασμάτων στο κατηγορηματικό λογισμικό αντιστοιχούν σε αυτές του προτασιακού λογισμικού. Επιπλέον, έχουν επεκταθεί με συμπερασματικούς κανόνες που αφορούν τους ποσοδείκτες.
- Ένα **αξιωματικό σύστημα** αποτελείται από τα εξής τμήματα:
  - 1. **Μια τυπική γλώσσα**.
  - 2. **Ένα σύνολο** από **σχήματα λογικών αξιωμάτων**.
  - 3. **Ένα σύνολο** από **συμπερασματικούς κανόνες**.
- Τα **λογικά αξιώματα** **είναι έγκυροι (valid) τύποι**. Επιπλέον, τα λογικά αξιώματα είναι **σχήματα**, δηλαδή **αξιώματα μπορούν να δημιουργηθούν με αντικατάσταση τύπων σε μεταβλητές τύπων**.

4.5 Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Η ΛΠΤ μπορεί να εκφραστεί ως αξιωματικό σύστημα με διάφορους τρόπους. Η μορφή που θα έχει ως αξιωματικό σύστημα εξαρτάται από
  - τα **σχήματα λογικών αξιωμάτων** και
  - τους **κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων**

  που θα χρησιμοποιηθούν.
- Τα **σχήματα λογικών αξιωμάτων** και οι **συμπερασματικοί κανόνες** χρησιμοποιούνται για να δημιουργηθούν τα **θεωρήματα της ΛΠΤ**. Για να είναι ένα αξιωματικό σύστημα **πλήρες** θα πρέπει **όλα τα θεωρήματα** της **ΛΠΤ** **να είναι εξαγώγιμα**.

4.5 Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Ορισμός: Μια θεωρία Τ** αποτελείται από
  - ένα **τυπικό σύστημα** και
  - ένα **σύνολο από αξιώματα** τα οποία ονομάζονται ***μη–λογικά*** *ή* ***˝κατάλληλα˝ αξιώματα***.
- **Παράδειγμα μη–λογικών αξιωμάτων**
  - $\forall$X $\forall$Y (πατέρας(X, Y) $\rightarrow$ γονέας(X, Y))
  - $\forall$X $\forall$Y (μητέρα(X, Y) $\rightarrow$ γονέας(X, Y))
  - πατέρας(γιάννης, μάνος)
  - μητέρα(ελένη, μάνος)

4.5 Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- Η **εξαγωγή** ή **απόδειξη** ενός **τύπου φ** από μια **θεωρία Τ** η οποία αποτελείται από το **τυπικό σύστημα ΤΣ** και τα **μη–λογικά αξιώματα Α** συμβολίζεται $\mathbf{T} \vdash_{\mathbf{T\Sigma}} \boldsymbol{\varphi}$ ή $\mathbf{T} \vdash \boldsymbol{\varphi}$ εάν το τυπικό σύστημα είναι γνωστό.
- **Ορισμός:** Μια θεωρία **Τ** είναι ***ασυνεπής*** (***inconsistent***) εάν για κάποιο τύπο **φ**, οι τύποι **φ** και **¬φ** είναι **θεωρήματα** της **Τ**.
- **Ορισμός:** Ένα τυπικό σύστημα **ΤΣ** είναι **αποφασιστικό (decidable)** εάν πάντα μπορεί να αποφασίσει εάν **μια θεωρία** είναι ***συνεπής (consistent)*** ή **όχι**.
- Ένα τυπικό σύστημα είναι **ημι-*αποφασιστικό*** (***semi–decidable***) εάν μπορεί **πάντα** να **προσδιορίσει ασυνέπεια** αλλά **μόνο μερικές φορές** μπορεί να **προσδιορίσει συνέπεια**.
  - Η **πλήρης ΛΠΤ** είναι **ημι-αποφασιστική**.
  - Η **ΛΠΤ χωρίς συναρτήσεις** είναι **αποφασιστική**.

4.5 Τυπικά Συστήματα και Εξαγωγή Συμπερασμάτων.

- **Ορισμός:** Ένα τυπικό σύστημα **ΤΣ** είναι ***ορθό/έγκυρο*** (***valid***) **εάν και μόνο εάν** όλα τα θεωρήματα τα οποία **μπορούν να αποδειχθούν** από ένα **σύνολο αξιωμάτων S** σε **μια θεωρία** του **ΤΣ** είναι επίσης **λογική συνέπεια** του **S**.
  - $S \vdash_{ΤΣ} \varphi$ **συνεπάγεται** $S \models \varphi$
- **Ορισμός**: Ένα τυπικό σύστημα είναι ***πλήρες*** **εάν και μόνο εάν** για όλους τους τύπους που είναι **λογική συνέπεια** ενός **συνόλου αξιωμάτων S** το **τυπικό σύστημα ΤΣ** **εξάγει/παράγει** από το **σύνολο των αξιωμάτων S** μια απόδειξη γι' αυτούς. Δηλαδή,
  - $S \models \varphi$ **συνεπάγεται** $S \vdash_{ΤΣ} \varphi$
  - $S \vdash_{ΤΣ} \varphi$ **συνεπάγεται** $S \models \varphi$

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή.

- Ο συντακτικός μετασχηματισμός των προτάσεων σε κανονική μορφή βοηθάει στον χειρισμό τους.
- Ένας τύπος είναι σε ***δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή*** (**ΔΕΚΜ**) - **prenex normal form** - εάν έχει την μορφή

$$(Q_1X_1) \,..\, (Q_KX_K)\ \varphi$$

  - όπου $Q_1,..,Q_K$ παριστάνουν τους ποσοδείκτες ∃ και ∀,
  - $X_1,..,X_K$ είναι μεταβλητές του τύπου **φ** και
  - **φ** είναι ένας τύπος χωρίς ποσοδείκτες.
  - Το $(Q_1X_1) \,..\, (Q_KX_K)$ ονομάζεται **πρόθεμα** (prefix) και το **φ** **πίνακας**.
- **Παραδείγματα**: Τύποι σε **δεσμευμένη εμπρός καν. μορφή**.
  - 1. $\forall X\ \forall Y\ \exists Z\ (\ (p(X) \rightarrow \neg q(X)\ ) \wedge r(Y,Z)\ )$
  - 2. $\forall X\ \exists Y\ \ (p(X, Y) \wedge q(X,Z)\ )$
- **Κάθε τύπος** είναι λογικά ισοδύναμος **με ένα τύπο σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή.

- **Ορισμός:** Η ***κανονικοποίηση*** *ή* ***σταθεροποίηση μεταβλητών*** (***standardizng the variables apart***) περιλαμβάνει την μετονομασία των μεταβλητών σε ένα τύπο ώστε διαφορετικές μεταβλητές να έχουν διαφορετικό όνομα.
- **Παραδείγματα:** Η κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών στους τύπους θα δώσει
  - για τον τύπο $\forall \mathbf{X}\ \mathbf{p(X)} \wedge \exists \mathbf{Y}\ \mathbf{q(X,Y)}$

    τον τύπο $\forall \mathbf{X}\ \mathbf{p(X)} \wedge \exists \mathbf{Y}\ \mathbf{q(Z,Y)}$
  - για τον τύπο $\forall \mathbf{X}\ \mathbf{p(X)} \vee \forall \mathbf{X}\ \forall \mathbf{Y}\ \mathbf{r(X,Y)} \vee \forall \mathbf{X}\ \exists \mathbf{Y}\ \mathbf{q(X,Y)}$

    τον τύπο $\forall \mathbf{X}\ \mathbf{p(X)} \vee \forall \mathbf{Z}\ \forall \mathbf{Y}\ \mathbf{r(Y,Z)} \vee \forall \mathbf{W}\ \exists \mathbf{V}\ \mathbf{q(W,V)}$
- Ένας τύπος μπορεί να μετατραπεί σε **δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή** με τους εξής μετασχηματισμούς.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή.

- **1. Εξάλειψη των λογικών συνδέσμων** $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$ **από τον τύπο**. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των νόμων της αντικατάστασης των $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
  - **α.** $\varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ και **β.** $\varphi \leftrightarrow \psi \Leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \neg\psi)$
- **2. Μετακίνηση της άρνησης** $(\neg)$π**ρος το εσωτερικό του πίνακα** έτσι ώστε να βρίσκεται μπροστά μόνο από ατομικούς τύπους. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των νόμων του De Morgan για $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ και τον νόμο της διπλής άρνησης.
  - **α.** $\neg(\varphi \wedge \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \neg\psi$
  - **β.** $\neg(\varphi \vee \psi) \Leftrightarrow \neg\varphi \wedge \neg\psi$
  - **γ.** $\neg\forall X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \exists X\ \neg\varphi(X)$
  - **δ.** $\neg\exists X\ \varphi(X) \Leftrightarrow \forall X\ \neg\varphi(X)$
  - **ε.** $\neg\neg\varphi \Leftrightarrow \varphi$

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή.

- **3.** ***Κανονικοποίηση*** *ή* ***σταθεροποίηση μεταβλητών*** (**Standardizing the variables apart**).
- **4. Μετακίνηση όλων των ποσοδεικτών στην αρχή του τύπου**. Αυτό μπορεί να γίνει με τους εξής νόμους.
  - **α.** $\forall X\ \varphi(X) \wedge \forall X\ \psi(X) \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi(X))$
  - **β.** $\exists X\ \varphi(X) \vee \exists X\ \psi(X) \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi(X))$
  - **γ.** $\exists X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$

    Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
  - **δ.** $\forall X\ \varphi(X) \wedge \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \wedge \psi)$

    Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
  - **ε.** $\exists X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \exists X\ (\varphi(X) \vee \psi)$

    Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.
  - **στ.** $\forall X\ \varphi(X) \vee \psi \Leftrightarrow \forall X\ (\varphi(X) \vee \psi)$

    Το X δεν είναι ελεύθερη μεταβλητή στον τύπο ψ.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Δεσμευμένη Εμπρός Κανονική Μορφή.

- **Παράδειγμα:** Μετατροπή του τύπου **$\exists X\ p(X) \rightarrow (q(X) \wedge \neg \forall Y\ r(Y))$** σε δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή.
  - **Βήμα 1**: $\exists X\ p(X) \rightarrow (q(X) \wedge \neg\forall Y\ r(Y)) \Leftrightarrow$

    $\neg\exists X\ p(X) \vee (q(X) \wedge \neg\forall Y\ r(Y)) \Leftrightarrow$ **Εξάλειψη →**
  - **Βήμα 2**: $\forall X\ \neg p(X) \vee (q(X) \wedge \exists Y\ \neg r(Y)) \Leftrightarrow$

    Μετακίνηση της άρνησης (¬) στο εσωτερικό του πίνακα.
  - **Βήμα 3**: $\forall X\ \neg p(X) \vee (q(Z) \wedge \exists Y\ \neg r(Y)) \Leftrightarrow$

    Κανονικοποίηση διαφορετικών μεταβλητών.
  - **Βήμα 4:** $\forall X\ \neg p(X) \vee \exists Y\ (q(Z) \wedge \neg r(Y)) \Leftrightarrow$

    Μετακίνηση ∃ ώστε να συμπεριλάβει και το q(Z).
  - **Βήμα 5:** $\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X) \vee (q(Z) \wedge \neg r(Y)))$

    Μετακίνηση ∀ και ∃ στην αρχή του τύπου.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Συναρτήσεις Skolem.

- Θεωρούμε τον τύπο ∀**X** ∃**Y p(Y,X)**, για κάθε **X** υπάρχει μια διαφορετική τιμή (σταθερά) του **Y**.
  - Το **Y** **μπορεί να αντικατασταθεί από μια συνάρτηση** **f(X)** η οποία **για κάθε** **X** **δημιουργεί την τιμή του** **Y**.
  - Συνεπώς ∃**Y p(Y,X)** μπορεί να αντικατασταθεί από **p(f(X),X)**, ο αρχικός τύπος γίνεται ∀**X p(f(X),X).**
- Η συνάρτηση **f** ονομάζεται **Skolem συνάρτηση**.
- Οι **Skolem συναρτήσεις** **επιτρέπουν την εξάλειψη των υπαρξιακών ποσοδεικτών**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Συναρτήσεις Skolem.

- Θεωρούμε ότι ένας τύπος **φ** είναι σε **δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή** χωρίς ελεύθερες μεταβλητές.
- ***Για να μετασχηματιστεί ο φ σε μορφή Skolem θα πρέπει να εξαλειφθούν οι υπαρξιακοί ποσοδείκτες.***
- Η εξάλειψη των υπαρξιακών ποσοδεικτών γίνεται με τα επόμενα βήματα τα οποία επαναλαμβάνονται για κάθε **Υπαρξιακό Ποσοδείκτη** της **φ**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Συναρτήσεις Skolem.

- Η εξάλειψη των υπαρξιακών ποσοδεικτών γίνεται ως εξής:
  - εάν ∃**Y** είναι **ο πρώτος από αριστερά υπαρξιακός ποσοδείκτης** (**Υπ.Ποσ.**) και
    - **X_1,…, $X_κ$** είναι οι **καθολικά δεσμευμένες μεταβλητές** αριστερά του ∃**Y**.
  - Ο τύπος **φ** μετασχηματίζεται σε μορφή Skolem ως εξής:
    - **1**. Εάν **κ = 0** (ο **Υπ.Ποσ.** δεν βρίσκεται στην εμβέλεια κάποιου καθολικού ποσοδείκτη), τότε **ο Υπ.Ποσ. εξαλείφεται** και **κάθε εμφάνισή του αντικαθίσταται από μια σταθερά διακριτή από τις άλλες**.
    - **2.** Εάν **κ > 0**, (ο **Υπ.Ποσ.** είναι στην εμβέλεια **κ > 0** καθολικών ποσοδεικτών), τότε **εξάλειψε τον Υπ.Ποσ.** και **αντικατέστησε το Y με ένα νέο όνομα συνάρτησης πληθυκότητας κ**. Ορίσματα της νέας συνάρτησης είναι οι καθολικές μεταβλητές μέσα στο πεδίο των οποίων βρίσκεται ο **Υπ.Ποσ.**
- Αυτά τα βήματα επαναλαμβάνονται για κάθε **Υπ.Ποσ.** της **φ**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Συναρτήσεις Skolem.

- **Παράδειγμα:** Θέλουμε να μετατρέψουμε τον τύπο **∀X ∃Y ∀W ∃Z p(X, Y, W, Z)** σε μορφή Skolem.
  - **α.** Η τιμή του **Y** εξαρτάται μόνο από το **X**. **Εισάγουμε την Skolem συνάρτηση** **f(X)** και ο τύπος γίνεται

    ∀X ∀W ∃Z p(X, f(X), W, Z).
  - **β.** Η τιμή του **Z** εξαρτάται από τα **X** και **W**. **Εισάγουμε την Skolem συνάρτηση** **g(X, W)** και ο τύπος γίνεται

    ∀X ∀W p(X,f(X),W,g(X, W)).
- **Σημείωση:** Εάν **φ** είναι ο αρχικός τύπος, ο τύπος σε μορφή Skolem **φ΄** **δεν είναι λογικά ισοδύναμος με τον αρχικό τύπο** **φ** αλλά διατηρεί την εξής ιδιότητα.
  - Ο τύπος **φ** **είναι επαληθεύσιμος** **τότε και μόνο τότε** ο **φ΄** **είναι επαληθεύσιμος**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Προτάσεις (Clauses).

- **Ορισμός:** Ένας ***στοιχειώδης τύπος*** (***literal***) είναι είτε ένας (θετικός) ατομικός τύπος (atomic formula) είτε ένας αρνητικός ατομικός τύπος. Για παράδειγμα, **p(X,Y), ¬p(X,Z), q(a,Z), ¬q(a,b)** είναι στοιχειώδεις τύποι, **a, b** είναι σταθερές.
- **Ορισμός:** Μια ***πρόταση*** είναι ένας τύπος της μορφής

$$\forall X_1 \ldots \forall X_K \ (L_1 \vee \ldots . \vee L_K)$$

κάθε L_i **(1≤i≤κ)** είναι ένας στοιχειώδης τύπος, $X_1,\ldots,X_K$ είναι όλες οι μεταβλητές οι οποίες υπάρχουν στον τύπο $L_1 \vee \ldots \vee L_K$.

- **Όλες οι μεταβλητές μιας πρότασης πρέπει να έχουν καθολική δέσμευση**.
- Συνήθως παραλείπουμε τους ποσοδείκτες και θυμόμαστε ότι όλες οι μεταβλητές έχουν καθολική δέσμευση.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Προτάσεις (Clauses).

- **Ορισμός:** Ένας τύπος **φ** είναι σε **Skolem *συζευκτική κανονική μορφή*** **ή *προτασιακή μορφή*** (**clause form**) εάν έχει την μορφή

$$\forall X_1 \ldots \forall X_m (\varphi_1 \wedge \ldots . \wedge \varphi_m)$$

όπου κάθε φ_i **(1≤i≤m)** είναι **διάζευξη βασικών τύπων**, δηλαδή μια πρόταση.

- Τα επόμενα 4 βήματα χρειάζονται για να μετατρέψουμε ένα **κλειστό τύπο** σε ***προτασιακή μορφή***.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Προτάσεις (Clauses).

- **1.** Μετατροπή του τύπου σε *δεσμευμένη εμπρός κανονική μορφή*.
  - **α.** Εξάλειψη των λογικών συνδέσμων $\rightarrow$ και $\leftrightarrow$.
  - **β.** Μετακίνηση της άρνησης ($\neg$) ώστε να βρίσκεται μπροστά μόνο από ατομικούς τύπους.
  - **γ.** Κανονικοποίηση των διαφορετικών μεταβλητών.
  - **δ.** Μετακίνηση όλων των ποσοδεικτών στην αρχή του τύπου.
- **2.** Μετατροπή του τύπου σε Skolem μορφή.
- **3.** Παρέλειψε όλους τους καθολικούς ποσοδείκτες.
- **4.** Περιόρισε την εμβέλεια της διάζευξης στους στοιχειώδεις τύπους. Χρησιμοποίησε τους εξής αντιμεταθετικούς και επιμεριστικούς νόμους για να επιτύχεις αυτό.
  - **α.** $(p \vee (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r))$ επιμεριστικός νόμος.
  - **β.** $((p \wedge q) \vee r) \Leftrightarrow ((p \vee r) \wedge (q \vee r))$ προκύπτει από αντιμεταθετικό και επιμεριστικό νόμο.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Προτάσεις (Clauses).

- **Παράδειγμα**: Θεωρούμε τον τύπο $\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X) \vee (q(Y) \wedge \neg r(Y)))$ ο οποίος είναι ήδη σε δεσμευμένη **εμπρός κανονική μορφή**.
- **Βήματα Μετασχηματισμού** — **Δικαιολόγηση**
- $\forall X\ \exists Y\ (\neg p(X) \vee (q(Y) \wedge \neg r(Y)))$ — **Skolem μορφή**
- $\forall X\ (\neg p(X) \vee (q(f(X)) \wedge \neg r(f(X))))$ — **Παράληψη καθολικών ποσοδεικτών**
- $\neg p(X) \vee (q(f(X)) \wedge \neg r(f(X)))$ — **Επιμεριστικός νόμος**
- $(\neg p(X) \vee q(f(X))) \wedge (\neg p(X) \vee \neg r(f(X)))$

- Είδαμε στα προηγούμενα ότι **κάθε κλειστή πρόταση** μπορεί να μετασχηματιστεί σε **προτασιακή μορφή**. Η **προτασιακή μορφή ενός τύπου μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο από προτάσεις** οι οποίες συνδέονται μεταξύ τους με **σύζευξη**.

4. ΑΓ και Συλλογιστική στο Κατηγορηματικό Λογισμό (ΛΠΤ).

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Horn Προτάσεις (Clauses).

- **Ορισμός**: Μια **πρόταση** είναι μια ***πρόταση Horn*** (***Horn clause***) εάν περιέχει **το πολύ ένα ατομικό τύπο**. Μια πρόταση Horn μπορεί να έχει μια από τις εξής μορφές.
  - **1.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m \vee \psi)$ ή
  - **2.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ \psi$
  - **3.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m)$

  όπου $\varphi_1,\ldots,\varphi_m, \psi$ είναι ατομικοί τύποι <u>και</u> $X_1,\ldots,X_K$ είναι μεταβλητές οι οποίες υπάρχουν στους τύπους $\varphi_1,\ldots,\varphi_m, \psi$.
- Ο ***λογικός προγραμματισμός*** **(ΛΠ)** χρησιμοποιεί ***προτάσεις Horn (Horn Clauses)***.
- Προτάσεις της μορφής 1 και 2 ονομάζονται ***προγραμματικές προτάσεις (program clauses)***.
- Προτάσεις της μορφής 3 ονομάζονται ***προτάσεις στόχοι (goal clauses)***.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Horn Προτάσεις (Clauses).

- Οι προτάσεις Horn μπορούν να γραφούν σε ισοδύναμες μορφές τις οποίες συναντάμε στις γλώσσες του **ΛΠ**.
  - **1.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m \vee \psi) \Leftrightarrow$
    $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m) \vee \psi) \Leftrightarrow$
    $\boldsymbol{\forall X_1,\ldots,X_K\ (\psi \leftarrow (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m))}$
  - **2.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ \psi \Leftrightarrow \boldsymbol{\forall X_1,\ldots,X_K}\ (\boldsymbol{\psi \leftarrow \mathrm{true}})$
  - **3.** $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_m) \Leftrightarrow$
    $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)) \Leftrightarrow$
    $\boldsymbol{\neg\exists X_1,\ldots,X_K\ (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)}$
- Η πρόταση στόχος $\boldsymbol{\neg\exists X_1,\ldots,X_K(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m)}$ είναι μια **υπαρξιακή ερώτηση**. **Το σύστημα προσπαθεί να δημιουργήσει ένα παράδειγμα που να διαψεύδει την αλήθεια της**.
- Δηλαδή, προσπαθεί να βρει κάποιους όρους $\boldsymbol{t_1,\ldots,t_K}$ έτσι ώστε όταν αντικαταστήσουν τις μεταβλητές $\boldsymbol{X_1,\ldots,X_K}$ στον τύπο $\boldsymbol{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m}$ ο τύπος που δημιουργείται να είναι **αληθής**.

4.6 Κανονικές Μορφές Τύπων: Horn Προτάσεις (Clauses).

- **Παράδειγμα:**
  - ***Προγραμματικές προτάσεις***

    $\forall X\ \forall Y$ (γονέας (X, Y) $\leftarrow$πατέρας (X, Y))

    $\forall X\ \forall Y$ (γονέας (X, Y) $\leftarrow$μητέρα (X, Y))

    πατέρας (γιάννης, μάνος) $\leftarrow$true

    πατέρας (γιάννης, άννα) $\leftarrow$true

    μητέρα (ελένη, νίκος) $\leftarrow$true
  - ***Προτάσεις στόχοι***
  - $\neg\exists X$ πατέρας (γιάννης, X)
  - $\neg\exists X$ μητέρα (X, νίκος)
- Τις προγραμματικές προτάσεις θα τις συναντάμε στη μορφή:

1. $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\psi \leftarrow(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m)\ )$ ή ισοδύναμα $\psi \leftarrow\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m$

2. $\forall X_1,\ldots,X_K\ (\psi \leftarrow \text{true})$ ή ισοδύναμα $\psi \leftarrow \text{true}$ ή ψ.

Τέλος Διάλεξης

Ευχαριστώ!

Ερωτήσεις;