Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 1 γιὰ τὰ μεταπτυχιακὰ μαθήματα «Θεωρία Γραφημάτων» τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος καὶ «Γραφοθεωρία» του Μ.Π.Λ.Α.

Κυριακὴ 29 Μαρτίου 2015

Πρὶν ἀρχίσετε νὰ λύνετε τὶς ἀσκήσεις, διαβάστε προσεκτικὰ τὸ παρακάτω κείμενο:

Λύστε **16** ἀπὸ τὶς **60** παρακάτω ἀσκήσεις στὶς ὁποῖες πρέπει νὰ βρίσκονται τουλάχιστον **2** καί τὸ πολύ **4** ἀπὸ κάθε ἑνότητα καὶ κατὰ προτίμηση αὐτὲς μὲ ἀστερίσκους. Ἂν δὲν λύσετε **16**, συμπληρῶστε μὲ κενές ἀπαντήσεις αὐτὲς ποὺ θὰ θέλατε νὰ λύσετε προκειμένου νὰ γίνουν **16**. Στὶς ἀπαντήσεις σας συμπληρῶστε τὸν ἀριθμὸ καὶ τὴν ἐκφώνηση κάθε ἄσκησης ποὺ λύνετε. Οἱ καλύτερες ἀπαντήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Δευτέρα 04/05/2015 (15:00-18:00) καὶ τὴν Παρασκευή 08/05/2015 (14:00-17:00). Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικὰ, γραμμένες κατὰ προτίμηση σὲ LaTeX καὶ ὑποβεβλημένες μέσω της ἠ-τάξης ὡς ἀρχεῖα .pdf, πρὶν τὶς 23:59 τῆς 03/05/2015. Ἀρχεῖα ποὺ δὲν θὰ εἶναι σὲ .pdf καὶ δὲν θὰ ἀναγράφουν στὴν ἀρχή τους πλήρη στοιχεία τῶν μελῶν τῶν ὁμάδων στὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπόψη. Οἱ ἐνδιαφερόμενοι/ες φοιτητὲς/ριες πρέπει νὰ σχηματίσουν ὁμάδες συνεργασίας 1 ἢ 2 ἀτόμων καὶ νὰ δηλωθοῦν ὡς ὁμάδες στὴν ἠ-τάξη γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀσκήσεων (γιὰ ἀποφυγὴ λαθῶν καλύτερα νὰ δηλώσετε τὶς ὁμάδες σας ἀρκετὲς μέρες πριν τὴν ὑποβολή). Δὲν θὰ ὑπάρξει ἄλλη διαδικασία ὑποβολῆς διαφορετικὴ ἀπὸ αὐτὴ τῆς ἠ-τάξης. Ἡ συμμετοχὴ στην λύση τῶν ὁμάδων ἀσκήσεων μπορεῖ νὰ δώσει τὸ πολύ 3 μονάδες ἐπιπλέον στὸν τελικό βαθμό τοῦ μαθήματος ἐφόσον ὁ βαθμὸς τῆς τελικῆς ἐξέτασης εἶναι τουλάχιστον $3+\frac{1}{2}$. Στὶς παρουσιάσεις θὰ προτιμηθοῦν οἱ ὁμάδες ποὺ θὰ ἔχουν συλλέξει τοὺς περισσότερους αστερίσκους. Φοιτητές/ριες ποὺ δὲν θὰ κάνουν παρουσίαση σὲ κανένα ἀπὸ τὰ πακέτα ασκήσεων ποὺ θὰ παρουσιαστοῦν κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ μαθήματος δὲν θὰ μπορέσουν νὰ διεκδικήσουν καμμιὰ ἀπὸ τὶς 3 μονάδες. Τὸ ποσοστὸ τῶν 3 μονάδων ποὺ θὰ ἀνατεθεῖ σὲ κάθε φοιτητή/ρια θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν ποιότητα/ποσότητα τῶν ἀπαντήσεων ποὺ θὰ ὑποβάλει ἡ ὁμάδα του καὶ ἀπὸ τὴν ποιότητα τῶν παρουσιάσεών του.

---

1 Βαθμοί, κύκλοι, μονοπάτια

1.1 Γιὰ κάθε γράφημα G με τουλάχιστον μία ακμή ὑπάρχει μιὰ κορυφὴ τέτοια ὥστε ὁ μέσος βαθμὸς τῶν γειτόνων της νὰ εἶναι τουλάχιστον $d(G)$.

1.2 Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα G ὅπου $\Delta(G)+\delta(G)\geq n-1$, ἔχει διάμετρο τὸ πολὺ 4.

1.3 Δεῖξτε ὅτι ἂν τὸ γράφημα G δὲν περιέχει ὑποδαίρεση κύκλου με 4 κορυφὲς ὡς ὑπογράφημα, τότε κάθε υπογράφημά του περιέχει κορυφή βαθμοῦ ≤ 2.

1.4 Ἕνα γράφημα μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς ἄρτιου βαθμοῦ δὲν περιέχει γέφυρες (καλοῦμε *γέφυρα* ἑνὸς γραφήματος G μιὰ ἀκμὴ τέτοια ὥστε τὸ $G\setminus e$ νὰ ἔχει περισσότερες συνεκτικὲς συνιστῶστες ἀπὸ τὸ G).

1.5 Σὲ ἕνα συνεκτικὸ γράφημα κάθε δύο μονοπάτια μέγιστου μήκους ἔχουν μιὰ κοινὴ κορυφή.

1.6 Κάθε k-κανονικὸ γράφημα μὲ περιφέρεια 4 περιέχει τουλάχιστον $2k$ κορυφές.

1.7 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι ἂν γιὰ κάποιο γράφημα G ἰσχύει ὅτι **διάμετρος**$(G)\geq 2$, τότε τὸ ἴδιο θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ τὸ γράφημα ποὺ ἐνάγεται ἀπὸ τὸ ἀπόκεντρο τοῦ G.

1.8 ($\star$) Προσδιορίστε τὴν μέση ἀπόσταση δύο κορυφῶν τοῦ γραφήματος Q_r (δηλ. τὸν μέσο ὅρο τῶν ἀποστάσεων γιὰ ὅλα τὰ δυνατὰ ζεύγη διακεκριμένων κορυφῶν).

1.9 ($\star$) Γιὰ κάθε θετικό ἀκέραιο a καὶ γιὰ κάθε γράφημα G, τὸ $V(G)$ περιέχει περισσότερες ἀπὸ $(1-\frac{1}{\alpha})\cdot n(G)$ κορυφὲς βαθμού αὐστηρά μικρότερου του $2\alpha\delta^*(G)$.

1.10 ($\star\star$) Κάθε γράφημα G μὲ τουλάχιστον 2 κορυφές καὶ $\epsilon(G)\geq 2$, έχει περιφέρεια το πολύ $2\cdot\log_2(n)$.

2 Ἄκυκλα γραφήματα

2.1 Ἀποδεῖξτε ὅτι κάθε δέντρο ἔχει τὸ πολὺ 2 κεντρικὲς κορυφές.

2.2 Δεῖξτε ὅτι ἕνα γράφημα εἶναι δάσος ἄν καὶ μόνο ἄν κάθε μή-κενή τομὴ δύο συνεκτικῶν του ὑπογραφημάτων εἶναι συνεκτική.

2.3 Ἔστω γράφημα G, n κορυφῶν, τὸ ὁποίο περιέχει ὡς ἐναγόμενο ὑπογράφημα ἕνα δέντρο T μὲ περισσότερες ἀπὸ $n-k$ κορυφές για $k \geq 1$. Δεῖξτε ὅτι τὸ G δὲν περιέχει ὡς τοπολογικὸ ἔλασσον τὴν διακεκριμένη ἕνωση k τριγώνων.

2.4 Καλοὺμε *κύρος* κορυφῆς v σὲ ἕνα γράφημα G τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ὅλων τῶν κορυφῶν τοῦ G ἀπό τὴν v τὸ συμβολίζουμε μὲ $\textbf{κύρος}(G, v)$.

Ἄν τὸ T εἶναι δέντρο και $e = \{x, y\}$ εἶναι ἀκμὴ τοῦ T, τότε καλοῦμε $T(e, x)$ και $T(e, y)$ τὶς δύο συνεκτικὲς συνιστῶσες ποὺ προκύπτουν ἄν ἀφαιρέσουμε ἀπό τὸ T τὴν ἄκμή $\{x, y\}$. Ὁρίζουμε τὸ ἰσοζύγιο μιᾶς ἀκμῆς $e = \{x, y\}$ τοῦ T τὴν ποσότητα $\textbf{ἰσοζύγιο}(G) = |n(T(e, x)) - n(T(e, y))|$ ὅπου $n(T(e, x))$ καὶ $n(T(e, y))$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν τῶν δέντρων $T(e, x)$ καὶ $T(e, y)$ ἀντίστοιχα. Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε δέντρο T καὶ γιὰ κάθε ἀκμή $e = \{x, y\}$ τοῦ T, ἰσχύει ὅτι $\textbf{ἰσοζύγιο}(e) = |\textbf{κύρος}(T, x) - \textbf{κύρος}(T, y)|$.

2.5 Ἕνα γράφημα καλεῖται *μονοκυκλικὸ* ἄν περιέχει ένα καὶ μόνο κύκλο. Δεῖξτε ὅτι ἕνα ἀπλό μονοκυκλικὸ γράφημα χωρίς κορυφές βαθμού 2 περιέχει τουλάχιστον 3 κορυφές βαθμοῦ 1.

2.6 Ἔστω δεντροπαράγοντας T ἑνὸς διμεροῦς γραφήματος Γ μὲ μέρη τὰ U καὶ D (δηλ. τὸ $\{U, D\}$ εἶναι διαμέριση τοῦ $V(G)$ καὶ κάθε ἄκμή τοῦ G συνδέει μιὰ κορυφὴ τοῦ U μὲ μιὰ κορυφὴ τοῦ Δ). Δεῖξτε ὅτι ἄν ὅλα τὰ φύλλα τοῦ T εἶναι στὸ D τότε τὸ T ἔχει ἄρτια διάμετρο.

2.7 Ἄν ἕνα γράφημα G δὲν εἶναι κύκλος καὶ ἔχει τὸσες κορυφὲς ὅσο καὶ ἀκμές, τότε τὸ G δὲν εἶναι δισυνεκτικό.

2.8 Κάθε αὐτομορφισμὸς δέντρου διατηρεῖ ἀναλοίωτο τό κέντρο του.

2.9 ($\star$) Ἔστω $G = T_1 \cup T_2$ ὅπου T_1 και T_2 εἶναι δέντρα. Δεῖξτε ὅτι $\exists c \in \mathbb{N} : \delta^*(G) \leq c$ καὶ βρέστε τὴν μικρότερη σταθερὰ c γιὰ τὴν ὁποῖα $\delta^*(G) \leq c$ γιὰ κάθε γράφημα ποὺ εἶναι ἕνωση δύο δέντρων.

2.10 ($\star$) Σὲ κάθε δένδρο μὲ n κορυφὲς καὶ διάμετρο τουλάχιστον $2k-3$ ὑπάρχουν τουλάχιστον $n-k$ διαφορετικὰ μονοπάτια μήκους k.

3 Συνεκτικότητα

3.1 Κάθε κανονικὸ διμερὲς συνεκτικὸ γράφημα εἶναι δισυνεκτικό (ἕνα γράφημα καλεῖται *διμερὲς* ὅταν ὑπάρχει διαμέριση $\{U, D\}$ τοῦ $V(G)$ τέτοια ὥστε κάθε ἀκμὴ τοῦ G νὰ ἔχει ἕνα ἄκρο στὸ U καὶ ἕνα ἄκρο στὸ D).

3.2 Γιὰ κάθε συνεκτικό γράφημα G, $m(G) \geq n(G) + \kappa(G) - 1$.

3.3 Γιὰ κάθε συνεκτικὸ γράφημα G ἰσχύει ὅτι $\textbf{διάμετρος}(G) \leq \frac{n(G)+\kappa(G)-2}{\kappa(G)}$.

3.4 Δεῖξτε ὅτι κάθε k-συνεκτικό γράφημα μὲ n κορυφὲς ἔχει τουλάχιστον $\lceil \frac{kn}{2} \rceil$ ἀκμές.

3.5 ($\star$) Ἔστω δισυνεκτικὸ γράφημα G ποὺ νὰ μῆν περιέχει ὡς ὑπογράφημα κάποια ὑποδιαίρεση τοῦ $K_{2,3}$. Νὰ ἀποδείξετε ὅτι γιὰ κάθε τρεῖς κορυφὲς τοῦ G, ὑπάρχει κύκλος ποὺ νὰ περνάει καὶ ἀπὸ τὶς τρεῖς. Μιὰ ἕνα γράφημα H εἶναι *ὑποδιαίρεση* ἑνὸς γραφήματος G ἄν τὸ H μπορεῖ νὰ προκύψει ἀπὸ τὸ G ἀντικαθιστῶντας ἀκμὲς μὲ μονοπάτια (μὲ τὰ ἴδια ἄκρα).

3.6 ($\star$) Ἄν ἕνα γράφημα εἶναι 3-συνεκτικὸ καὶ ἔχει τουλάχιστον 5 κορυφὲς, τότε περιέχει μιὰ ἀκμὴ τῆς ὁποῖας ἡ σύνθλιψη δημιουργεῖ πάλι 3-συνεκτικό γράφημα.

3.7 ($\star$) Ἔστω G εἶναι ἕνα κρίσιμα k-συνεκτικὸ γράφημα (δηλ. $\kappa(G) = k$ καὶ γιὰ κάθε $e \in E(G)$, $\kappa(G \setminus e) < k$) καὶ ἔστω H ἕνα k-συνεκτικὸ ὑπογράφημὰ του. Δεῖξτε ὅτι τὸ H εἶναι ἐπίσης κρίσιμα k-συνεκτικό.

3.8 ($\star$) Ἄν τὸ G εἶναι δισυνεκτικὸ γράφημα μὲ $\delta(G) \geq 3$, τότε θὰ ἔχει κορυφὴ v τέτοια ὥστε τὸ $G \setminus v$ νὰ εἶναι ἐπίσης δισυνεκτικό.

3.9 ($\star$) Ἕνα γράφημα είναι δισυνεκτικό ἄν καὶ μόνο ἄν μπορεί νὰ κατασκευαστεῖ ἀρχίζοντας ἀπό τὸ K_3 καὶ ἐφαρμόζοντας μιὰ ἀκολουθία μετασχηματισμῶν ποὺ μπορεῖ νὰ εἶναι,

- Ὑποδιαίρεση ἀκμῆς.
- Πρόσθεση ἀκμῆς.

3.10 ($\star\star$) Γιὰ κάθε k κορυφὲς ἑνὸς k-συνεκτικοῦ γραφήματος, ὑπάρχει κύκλος ποῦ νὰ τὶς περιέχει ὅλες.

4 Εμβαπτίσεις

4.1 Δεῖξτε ὅτι κάθε ἐξωεπίπεδο γράφημα μὲ ≥ 2 κορυφές περέχει τουλάχιστον δύο κορυφὲς βαθμοῦ ≤ 2.

4.2 Τὸ *ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας* ἑνὸς γραφήματος ὁρίζεται ὥς $\mathbf{ds}(G) = \min\{|S| \mid \mathbf{B}_G[S] = V(G)\}$ (ὑπενθυμίζεται ὅτι $\mathbf{B}_G[S] = \mathbf{B}^1_G[S]$, ὅπου $\mathbf{B}^r_G[S]$ εἶναι ὅλες οἱ κορυφὲς τοῦ G ποῦ βρίσκονται σὲ ἀπόσταση τὸ πολὺ r ἀπὸ κάποια κορυφὴ τοῦ S). Τὸ *κάλυμμα ὄψεων* ἑνὸς ἐπίπεδου γραφήματος G εἶναι τὸ ελάχιστο πλήθος ὄψεων τοῦ G ποὺ εἶναι τέτοιες ὥστε ἡ ἕνωση τῶν συνόρων τους νὰ περιέχει ὅλες τις κορυφές του G. Δεῖξτε ὅτι ἄν ἕνα ἐπίπεδο γράφημα G ἔχει κάλυμμα ὄψεων τὸ πολύ k, τότε τὸ G θὰ εἶναι παράγοντας ἑνὸς γραφήματος H γιὰ τὸ ὁποιο $\mathbf{ds}(H) \leq k$. Συνεπάγεται ἡ πρόταση αὐτὴ ὅτι τὸ κἀλυμμα ὄψεων ἑνὸς ἐπίπεδου γραφήματος εἶναι ἄνω φράγμα στὸ ἐλάχιστο σύνολο κυριαρχίας του;

4.3 Ἄν τὸ G εἶναι ἐπίπεδο γράφημα μὲ περιφέρεια $k \geq 3$, τότε $m(G) \leq \frac{k(n(G)-2)}{k-2}$. Χρησιμοποιῆστε τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ γιὰ νὰ ἀποδείξετε ὅτι τὸ γράφημα τοῦ Petersen δὲν εἶναι ἐπίπεδο.

4.4 Δῶστε λεπτομερὴ ἀπόδειξη τοῦ ὅτι γιὰ κάθε γράφημα ὑπάρχει μιὰ ἐμβάπτιση τῶν κορυφῶν του στὸν τρισδιάστατο Εὐκλείδιο χῶρο, δηλ. μιὰ συνάρτηση $\sigma : V(G) \to \mathbb{R}^3$, τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε δύο ἀκμὲς $e_i = \{x^i_1, x^i_2\}, i \in \{1, 2\}$, τὰ ανοικτὰ εὐθύγραμμα τμήματα $L_i, i \in \{1, 2\}$ ποὺ ὁρίζουν τὰ ζεύγη σημείων $\sigma(x^i_1)$ και $\sigma(x^i_2)$, $i \in \{1, 2\}$ ἀντίστοιχα , δὲν ἔχουν κοινὰ σημεία.

4.5 ($\star$) Ἔστω χ ἕνας (ὄχι ἀπαραίτητα ἔγκυρος) χρωματισμὸς ἑνὸς τριγωνοποιημένου ἐπίπεδου γραφήματος. Δεῖξτε ὅτι ὁ ἀριθμὸς τῶν τριγώνων ποὺ φέρουν καὶ τὰ τρία χρώματα εἶναι ζυγός.

4.6 ($\star$) Ἔστω συνεκτικὸ ἐνεπίπεδο γράφημα Γ καὶ ἔστω Γ^* τὸ δυικὸ του. Δεῖξτε ὅτι τὰ Γ καὶ Γ^* ἔχουν τὸ ἴδιο πλῆθος δεντροπαραγόντων.

4.7 ($\star$) Κάθε ἐπίπεδο γράφημα μπορεῖ νὰ ζωγραφιστεῖ ἔτσι ὥστε ὅλες οἱ ἀκμὲς του νὰ εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα.

4.8 ($\star\star$) Ἔστω $\mathcal{P}_3 = \{G \mid \exists n \geq 0 : G \leq_{\text{ελ}} P_n \times K_3\}$ και $\mathcal{P}^*_3 = \{G \mid G^* \in \mathcal{P}_3\}$. Δεῖξτε ὅτι $\mathcal{P}^*_3 = \mathcal{P}_3$.

4.9 ($\star\star$)Ὁρίζουμε τὸ *τετράγωνο* G^2 ἑνὸς γραφήματος G ὥς ἑξής: $G^2 = (V(G), \{\{x, y\} \mid \mathbf{dist}_G(x, y) \leq 2\})$. Περιγράψτε πλήρως ὅλα τὰ γραφήματα G γιὰ τὰ ὁποῖα τὸ G^2 εἶναι ἐπίπεδο.

4.10 ($\star\star$) Καλοῦμε (x, y)-*τοροειδὲς πλέγμα* τὸ γράφημα $H_{x,y}$ ὅπου $V(H_{x,y}) = \{0, \ldots, x-1\} \times \{0, y-1\}$ καὶ $E(H_{x,y}) = \{\{(a, b), (c, d)\} \mid |a - c \mod x| + |b - d \mod y| = 1\}$. Δεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει x τέτοιο ὥστε τὸ $2 \cdot K_5$ νὰ εἶναι τοπολογικὸ ἔλασσον τοῦ (x, y)-τοροειδοῦς πλέγματος.

5 Δομές σε γραφήματα

5.1 Ὑπολογίστε τὸ $\phi(r) = \sup\{\epsilon(G) \mid C_r \not\leq_{\text{τπ}} G\}$ γιὰ κάθε φυσικὸ $r \leq 5$.

5.2 Βρέστε τὸ $\max\{k \mid \exists G : n(G) = k \wedge K_4 \not\leq_{\text{τπ}} G \wedge K_4 \not\leq_{\text{τπ}} \overline{G}\}$.

5.3 Δεῖξτε ὅτι $K_{2,d(G)/4} \leq_{\text{τπ}} G$.

5.4 Κάθε γράφημα μὲ περισσότερες ἀπὸ $\frac{n(G)}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$ ἀκμὲς περιέχει κύκλο μήκους 4.

5.5 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει πεπερασμένο σύνολο γραφημάτων $\mathcal{A}$ τέτοιο ὥστε νὰ ἰσχύει τὸ παρακάτω:

(*) *Ἕνα γράφημα περιέχει το πολύ ἕναν κύκλο ἄν καὶ μόνο ἄν δὲν περιέχει κανένα ἀπὸ τὰ γραφήματα στὸ $\mathcal{A}$ ὧς τοπολογικὸ ἔλασσον.*

5.6 ($\star$) Καλοῦμε ἕνα ἄκυκλο γράφημα *σαρανταποδαροῦσα* ὅταν περιέχει ὧς ὑπογράφημα γράφημα S τέτοιο ὥστε

- $\Delta(S) \leq 2$
- κάθε κορυφή τοῦ G ποὺ δὲν ἀνήκει στὸ $V(S)$ ἐχει βαθμὸ τὸ πολύ 1 στὸ G.

Δεῖξτε ὅτι τὸ

$$\mathcal{S} = \{G \mid \forall H \in \{K_3, K_{1,3}^s\}\ H \not\leq_{\varepsilon\lambda} G\}$$

εἶναι τὸ σύνολο ὅλων τῶν σαρανταποδαρουσῶν ($K_{1,3}^s$ εἶναι τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἄν ὑποδιαιρέσουμε ἅπαξ ὅλες τὶς ἀκμὲς τοῦ $K_{1,3}$).

5.7 ($\star$) $H \leq_{\varepsilon\lambda} G \wedge \Delta(H) \leq 3 \Rightarrow H \leq_{\tau\pi} G$

5.8 ($\star$) Βρεῖτε ἕνα (καλό) ἄνω φράγμα γιὰ τὴν ποσότητα: $f(r) = \min\{k \mid K_r \leq_{\varepsilon\lambda} P_{k+1}^{[3]}\}$

5.9 ($\star$) Κάθε γράφημα περιέχει τουλάχιστον $\frac{m(G)(4m(G)-n(G)^2)}{3n(G)}$ τρίγωνα.

5.10 ($\star\star$) Δεῖξτε ὅτι ἕνα πολυγράφημα εἶναι σειραϊκὸ-παράλληλο ἄν εἶναι 2-συνεκτικὸ καὶ δὲν περιέχει καμιὰ ὑποδιαίρεση τοὺ K_4 ὥς ἔλασσον. Ένα γράφημα καλείται σειραϊκό-παράλληλο ἄν μπορεῖ να προκύψει ἀπὸ τὸ K_2 μετὰ ἀπὸ σειρὰ ὑποδιαιρέσεων ἀκμῶν ἤ διπλασιασμῶν ἀκμῶν (δηλαδῆ ἀντικατάσταση μιᾶς ἀκμῆς ἀπὸ μία διπλὴς πολλαπλότητας μὲ τὰ ἴδια ἄκρα).

6 Χρωματισμοί καὶ ἄλλα

6.1 Δεῖξτε ὅτι κάθε γράφημα μὲ m ἀκμὲς περιέχει ὧς ὑπογράφημα ἕνα διμερὲς γράφημα μὲ $m/2$ ἀκμές.

6.2 Δεῖξτε ὅτι $\chi(G_1 \times G_2) \leq \max\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$ καὶ ὅτι $\chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geq n$.

6.3 Ἔστω ὅτι γνωρίζουμε ὅτι ὅλα τὰ δισυνεκτικὰ ὑπογραφήματα ἑνὸς γραφήματος G εἶναι k-χρωματίσιμα. Δεῖξτε ὅτι καὶ τὸ G εἶναι k-χρωματίσιμο.

6.4 ($\star$) Γιὰ κάθε k, κατασκευάστε γράφημα μὲ περιφέρεια 4 καὶ χρωματικὸ ἀριθμὸ k.

6.5 Ἔστω γράφημα G γιὰ τὸ ὁποῖο κάθε δύο περιττοὶ κύκλοι ἔχουν μιὰ κοινὴ κορυφή. Δεῖξτε ὅτι $\chi(G) \leq 5$.

6.6 ($\star$) Ἔστω $\rho(G) = \min\{k \mid \exists\sigma : V(G) \to \{1, \ldots, k\}\ \forall_{i\in\{1,\ldots,k\}} K_3 \not\leq_{\varepsilon\lambda} G[\sigma^{-1}]\}$. Βρεῖτε μιὰ (ὅσο μπορεῖτε καλύτερη) συνάρτηση $\gamma : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ τέτοια ὥστε $\rho(G) \geq \gamma(n(G), m(G))$.

6.7 ($\star$) Ἔστω G τριμερὲς $(n + 1)$- κανονικὸ γράφημα ὅπου κάθε μέρος του ἔχει n κορυφές. Δεῖξτε ότι $K_3 \leq_{\upsilon\pi} G$.

6.8 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι ἄν $\delta(G) \geq \lfloor\frac{(r-2)\cdot n(G)}{r-1}\rfloor + 1$ τότε $K_r \subseteq_{\upsilon\pi} G$.

6.9 ($\star\star$) Ἕνα γράφημα καλεῖται *ἄρτιο* ἄν ὅλες οἱ κορυφὲς ἔχουν ἄρτιο βαθμό. Δεῖξτε ὅτι ἄν τὸ G εἶναι συνεκτικὸ γράφημα, τότε

$$|\{H \subseteq_{\pi\alpha} G \mid H \text{ εἶναι ἄρτιο}\}| = 2^{m(G)-n(G)+1}.$$

6.10 ($\star\star$) Δεῖξτε ὅτι υπάρχει θετική σταθερὰ c τέτοια ὥστε ἄν γιὰ κάποιο γράφημα G ἰσχύει ότι $\delta(G) \geq k$, τότε τὸ G περιέχει $c \cdot k^2$ ἀκμοδιακεκριμένους κύκλους.

Τέλος πρώτου πακέτου ἀσκήσεων. Καλὴ διασκέδαση!