Θεωρία Γραφημάτων
4η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικο Μετσοβειο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

Φεβρουάριος 2015

Συνεκτικότητα

Συνεκτικό γράφημα:

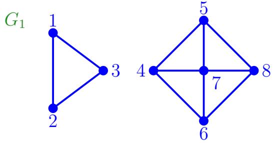
Ένα γράφημα G ονομάζεται ***συνεκτικό*** αν κάθε ζεύγος κορυφών του $u, v \in V(G)$ ενώνεται με ένα μονοπάτι

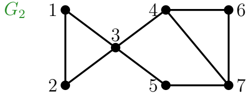
Συνεκτική συνιστώσα:

Μια ***συνεκτική συνιστώσα*** ενός γραφήματος G είναι ένα μεγιστοτικό επαγόμενο υπογράφημα του G το οποίο είναι συνεκτικό

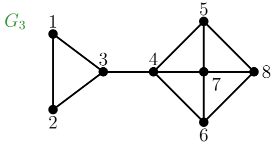
Διαχωριστής (Separator, cut-set):

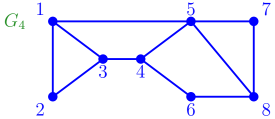
Έστω ένα συνεκτικό γράφημα G και έστω σύνολο $S \subset V(G)$. Το σύνολο S είναι ένας ***διαχωριστής*** του G αν το γράφημα $G \backslash S$ δεν είναι συνεκτικό





$S_1 = \{3\}$ $S_2 = \{4, 7\}$ $S_3 = \{4, 5\}$





$S_1 = \{3\}$ $S_2 = \{4\}$

$S_3 = \{4, 5, 6, 8\}$

$S_1 = \{4, 5\}$ $S_2 = \{1, 3\}$ $S_3 = \{5, 8\}$

$S_4 = \{5, 6\}$ $S_5 = \{4, 8\}$

Ελαχιστοτικός διαχωριστής [minimal separator]:

Ένας διαχωριστής S του G ονομάζεται ***ελαχιστοτικός*** αν κανένα υποσύνολό του δεν είναι επίσης διαχωριστής του G

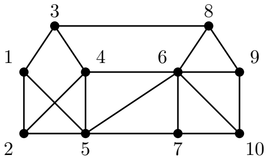
Ελάχιστος διαχωριστής [minimum separator]:

Ένας διαχωριστής S του G ονομάζεται ***ελάχιστος*** αν δεν υπάρχει άλλος διαχωριστής του G με μικρότερο μέγεθος

(u, v)-διαχωριστής:

Ένας διαχωριστής S του G τέτοιος ώστε οι κορυφές $u, v \in V(G) \setminus S$ να ανήκουν σε διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \setminus S$

- ελαχιστοτικός (u, v)-διαχωριστής/ελάχιστος (u, v)-διαχωριστής



ελαχιστοτικοί διαχωριστές:

$\underbrace{S_1 = \{1,4,5\}}_{\uparrow}$ $\underbrace{S_2 = \{6,7,8\}}_{\uparrow}$ $S_3 = \{1,4,6,9\}$

ελάχιστοι διαχωριστές

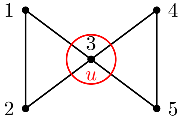
$(1,9)$-διαχωριστές: $\{3,4,5\}, \{3,4,6,7\}, \{4,5,8\}, \{3,4,6,10\}$

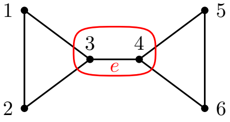
Κορυφή τομής:

κορυφή $u \in V(G)$: $G \backslash u$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G

Γέφυρα:

Ακμή $e \in E(G)$: $G \backslash e$ έχει περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες από το G





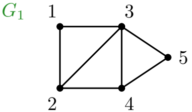
Συνεκτικότητα:

Η ***συνεκτικότητα $k(G)$*** ενός γραφήματος G ορίζεται ως το μέγεθος ενός ελάχιστου διαχωριστή του G

- Απαιτείται η αφαίρεση $k(G)$ κορυφών από το G ώστε να καταστεί μη-συνεκτικό

2-συνεκτικό γράφημα:

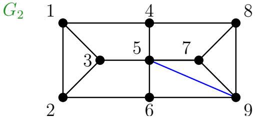
Γράφημα με ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους 2



$S_1 = \{2,3\}$

$S_2 = \{3,4\}$

Ιδιότητα: δεν έχει κορυφές-τομής



$S_1 = \{4,5,6\}$

$S_2 = \{2,3,4\}$

$S_3 = \dots$

3-συνεκτικό γράφημα:

Γράφημα με ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους 3

***k*- συνεκτικό γράφημα:**

Γράφημα G με $|V(G)| \geq k+2$ το οποίο έχει ελάχιστο διαχωριστή μεγέθους k

κρίσιμη ακμή:

Μια ακμή $e \in E(G)$ ονομάζεται ***κρίσιμη*** αν $k(G \backslash e) = k(G) - 1$

- κρίσιμες ακμές του G_2: όλες εκτός της $(5,9)$

Θεώρημα 4.1:

Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό ανν περιέχει περίπατο που περνάει από όλες τις κορυφές του

Απόδειξη :

"$\Leftarrow$"

- Προφανές από τον ορισμό του συνεκτικού γραφήματος και το γεγονός ότι "αν υπάρχει ένας (u, v)-περίπατος τότε υπάρχει και ένα (u, v)- μονοπάτι" ✓

"$\Rightarrow$"

- Έστω μια αυθαίρετη διάταξη $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$ των κορυφών του G
- Το G είναι συνεκτικό $\xRightarrow{\text{ορισμός}} \forall u_i, u_{i+1} \exists$ μονοπάτι P_i από την u_i στην u_{i+1}, $1 \leq i < n$
- Η παράθεση των μονοπατιών $P_1 P_2 \ldots P_{n-1}$ ορίζει περίπατο που περνά από όλες τις κορυφές του G ✓ ∎

Θεώρημα 4.2:

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι είτε το G είναι συνεκτικό ή το $\overline{G}$ είναι συνεκτικό

Απόδειξη *[Με επαγωγή στον αριθμό κορυφών του G]:*

Βάση: $|V(G)| = 2$ Το K_2 [•——•] είναι συνεκτικό ενώ

Το $\overline{K_2}$ [•   •] δεν είναι

Αυτά είναι τα μόνα γραφήματα 2 κορυφών ✓

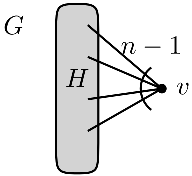
Ε.Υ. Έστω ότι για όλα τα γραφήματα H με $|V(H)| < n$ ισχύει ότι είτε το H είναι συνεκτικό ή το $\overline{H}$ είναι συνεκτικό

Ε.Β. Έστω γράφημα G με $|V(G)| = n$ και κορυφή $v \in V(G)$

- $H = G \backslash v$: H συνεκτικό ή $\overline{H}$ συνεκτικό

Περίπτωση 1: Η v είναι καθολική κορυφή

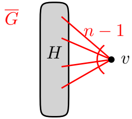
$\Rightarrow G$ συνεκτικό ✓



Περίπτωση 2: Η v είναι απομονωμένη κορυφή

$\Rightarrow$ στο $\overline{G}$ η v είναι καθολική κορυφή

$\Rightarrow$ $\overline{G}$ συνεκτικό ✓

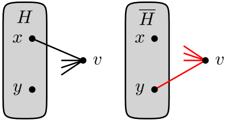


Περίπτωση 3: Η v δεν είναι ούτε καθολική ούτε απομονωμένη

- $\exists x, y \in V(G) : (v,x) \in E(G), (v,y) \notin E(G)$

$$\left.\begin{array}{l} H \text{ συνεκτικό} \\ (v,x) \in E(G) \end{array}\right\} \Rightarrow G \text{ συνεκτικό}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{H} \text{ συνεκτικό} \\ (v,y) \in E(\overline{G}) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{G} \text{ συνεκτικό} \checkmark$$



■

Θεώρημα 4.3:

Έστω H μια συνεκτική συνιστώσα του γραφήματος G. Τότε ισχύει

i. $\delta(H) \geq \delta(G)$

ii. $\Delta(H) \leq \Delta(G)$

Απόδειξη :

i. $\delta(H) \geq \delta(G)$

- Έστω $\delta(H) < \delta(G)$
- $\exists v \in V(G) : d_G(v) = \delta(G)$ και για κάθε άλλη κορυφή

$$\boxed{w \in V(G) : d_G(v) \leq d_G(w) \qquad (1)}$$

- $\exists x \in V(H) : d_H(x) = \delta(H)$ και για κάθε άλλη κορυφή $y \in V(H) : d_H(x) \leq d_H(y) \Rightarrow$

[ο βαθμός κάθε κορυφής στο H είναι ίσος με τον βαθμό της στο G]

$$\boxed{d_G(x) \leq d_G(y) \qquad (2)}$$

(1),(2) $\Rightarrow d_G(v) \leq d_G(x)$

$\Leftrightarrow \delta(G) \leq \delta(H)$ ***άτοπο*** ✓

ii. όμοια ✓ ■

Θεώρημα 4.4:

Κάθε απλό γράφημα G με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$ είναι συνεκτικό

Απόδειξη :

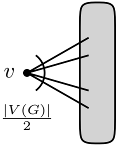
- Έστω ότι δεν είναι συνεκτικό
- Έστω H η μικρότερη συνιστώσα

$$\boxed{|V(H)| \leq \frac{|V(G)|}{2} \qquad (3)}$$

[αλλιώς το G θα είχε $> |V(G)|$ κορυφές !!]

- $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2} \Rightarrow$ Κάθε συνιστώσα έχει μέγεθος $\geq \frac{|V(G)|}{2} + 1$

$$\boxed{\Rightarrow |V(H)| \geq \frac{|V(G)|}{2} + 1 \qquad (4)}$$



(3),(4) $\Rightarrow$ ***άτοπο*** ■

Ερώτηση 4.1: Ποια η διάμετρος του γραφήματος G με $\delta(G) \geq \frac{|V(G)|}{2}$?

Θεώρημα 4.5:

Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G. Τότε $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$

Απόδειξη *[Με επαγωγή στο $|V(G)|$]:*

Βάση: $|V(G)| = 2$ $\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet$ $|E(G)| = |V(G)| - 1$ ✓

Ε.Υ. Για κάθε απλό συνεκτικό γράφημα G με $|V(G)| < n$ ισχύει $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$

Ε.Β. Έστω G με $|V(G)| = n$

Περίπτωση 1: $\delta(G) \geq 2$

$$2|E(G)| = \sum_{u \in V(G)} d(u) \geq \sum_{u \in V(G)} \delta(G) \geq 2|V(G)| \Leftrightarrow$$

$$2|E(G)| \geq 2|V(G)| \Leftrightarrow |E(G)| \geq |V(G)| \quad \checkmark$$

Περίπτωση 2: $\delta(G) = 1$ [$\delta(G) \neq 0$ γιατί G συνεκτικό]

- Έστω $v \in V(G)$ κορυφή με βαθμό $d(v) = 1$
- $G \backslash v$ συνεκτικό γιατί η v δεν είναι κορυφή τομής
- $|E(G \backslash v)| \geq |V(G \backslash v)| - 1$ [από Ε.Υ.]

$|E(G)| - 1 \geq |V(G)| - 1 - 1 \Rightarrow |E(G)| \geq |V(G)| - 1$ ✓ ■

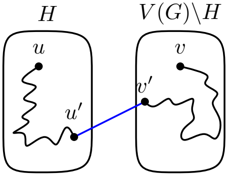
Θεώρημα 4.6:

Ένα γράφημα G είναι συνεκτικό ανν για κάθε σύνολο $H \subset V(G)$ υπάρχει τουλάχιστον μια ακμή $e \in E(G)$ με το ένα άκρο της στο H και το άλλο στο $V(G) \setminus H$

Απόδειξη :

“$\Rightarrow$”

- Έστω $u \in H$ και $v \in V(G) \setminus H$
- G συνεκτικό $\Rightarrow \exists$ μονοπάτι από $u \rightarrow v$
- u' η τελευταία κορυφή του μονοπατιού στο H
  v' η πρώτη κορυφή του μονοπατιού στο $V(G) \setminus H$
- Η ακμή $(u'v')$ ικανοποιεί το θεώρημα ✓



“$\Leftarrow$” [Με άτοπο]

Έστω το G δεν είναι συνεκτικό

- Έστω H μια συνεκτική συνιστώσα
- Δεν υπάρχουν ακμές του G με το ένα μόνο άκρο τους στην H

[η συνεκτική συνιστώσα είναι μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα του G]

άτοπο ✓ ■

Θεώρημα 4.7:

Μια ακμή e είναι γέφυρα ενός γραφήματος G ανν δεν ανήκει σε κάποιο κύκλο του G

Απόδειξη :

- Έστω H η συνεκτική συνιστώσα του G στην οποία ανήκει η e. Αρκεί να δείξουμε ότι το θεώρημα ισχύει για την H

"$\Leftarrow$" Έστω η $e = (u, v)$ δεν είναι γέφυρα

$\Rightarrow$ Το $H \backslash e$ είναι συνεκτικό
$\Rightarrow$ στο $H \backslash e$ υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P
$\Rightarrow$ Η παράθεση του P με την $e = (u, v)$ δημιουργεί κύκλο
$\Rightarrow$ Η e ανήκει σε κύκλο του H ***άτοπο*** ✓

"$\Rightarrow$" Έστω η $e = (u, v)$ ανήκει σε κάποιο κύκλο του H

$\Rightarrow$ Στο H υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P_{uv}^{H}

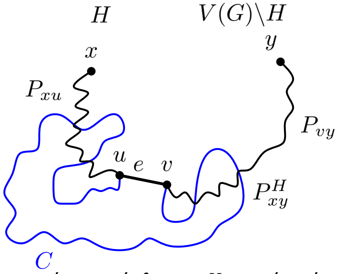
- Θα δείξω ότι το $H \backslash e$ είναι συνεκτικό [δηλ. η e δεν είναι γέφυρα].
  Αυτό οδηγεί σε άτοπο.
- Έστω $x, y \in V(H)$. Στο H υπάρχει (x, y)-μονοπάτι P_{xy}^{H} γιατί το H είναι συνεκτικό

Περίπτωση 1: $e \notin P^H_{xy}$

- Τότε P^H_{xy} είναι επίσης μονοπάτι του $H \backslash e$
  $\Rightarrow H \backslash e$ συνεκτικό $\Rightarrow$ Η e δεν είναι γέφυρα **άτοπο** ✓

Περίπτωση 2: $e \in P^H_{xy}$

Τότε ορίζονται τα:
(x, u)-μονοπάτι P^H_{xu}
(v, y)-μονοπάτι P^H_{vy}



- Το ότι η $e = (u, v)$ ανήκει σε κάποιο κύκλο του H σημαίνει ότι υπάρχει (u, v)-μονοπάτι P^H_{uv} στο H
- Η παράθεση των μονοπατιών $P^H_{xu}P^H_{uv}P^H_{vy}$ σημαίνει ότι υπάρχει (x, y)-περίπατος και, συνεπώς, (x, y)-μονοπάτι P^H_{xy} στο H το οποίο δεν περιέχει την e
- Το P^H_{xy} είναι μονοπάτι και του $H \backslash e$
  $\Rightarrow$ Η e δεν είναι γέφυρα. **άτοπο** ✓

Θεώρημα 4.8:

Ένα συνεκτικό γράφημα G περιέχει τουλάχιστον 2 κορυφές οι οποίες δεν είναι κορυφές-τομής

Απόδειξη :

- Έστω ένα αυθαίρετο μεγιστοτικό (u, v)-μονοπάτι P_{uv}
- Το P_{uv} δεν μπορεί να επεκταθεί
  $\Rightarrow$ οι γείτονες των u, v ανήκουν στο P_{uv}
- Όλοι οι γείτονες των u, v ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα
- $G \setminus \{u, v\}$ συνεκτικό
  $\Rightarrow$ Οι u, v δεν είναι κορυφές-τομής ✓ ■

Ερώτηση 4.2: Να δειχθεί ότι εάν το γράφημα G έχει k συνεκτικές συνιστώσες τότε $K_k \subseteq \overline{G}$.

Ερώτηση 4.3: Να δειχθεί ότι κάθε 2 μέγιστα μονοπάτια ενός συνεκτικού γραφήματος έχουν κάποια κοινή κορυφή.

Ερώτηση 4.4: Να δειχθεί ότι για κάθε συνεκτικό γράφημα G με n κορυφές, υπάρχει μια απαρίθμηση $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ των κορυφών του τέτοια ώστε το επαγόμενο υπογράφημα G_i από τις κορυφές $\{v_1, \ldots, v_i\}$ $1 \leq i \leq n$ να είναι συνεκτικό.

Ερώτηση 4.5: Να δειχθεί ότι για κάθε γράφημα G με k συνεκτικές συνιστώσες ισχύει $|E(G)| \geq |V(G)| - k$.

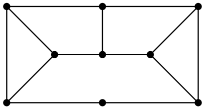
Δισυνεκτικότητα

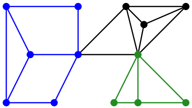
Δισυνεκτικό (2-Συνεκτικό) γράφημα:

Ένα γράφημα G με $|V(G)| \geq 2$ ονομάζεται ***δισυνεκτικό*** αν όλοι οι διαχωριστές του έχουν μέγεθος ≥ 2

Δισυνεκτική Συνιστώσα (biconnected component-block):

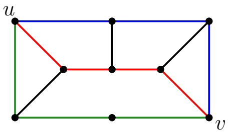
Ένα μεγιστοτικό δισυνεκτικό υπογράφημα ενός γραφήματος G ονομάζεται ***δισυνεκτική συνιστώσα*** του G





εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια:

$k \geq 2$ μονοπάτια ενός γραφήματος G ονομάζονται ***εσωτερικώς διακεκριμένα*** εάν τα σύνολα των εσωτερικών κορυφών τους είναι διακεκριμένα, δηλαδή ανά δύο ξένα μεταξύ τους



3 εσωτερικώς διακεκριμένα (u, v)-μονοπάτια

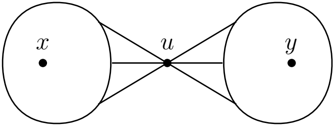
Θεώρημα 4.9:

Έστω ένα απλό συνδεδεμένο γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Το G είναι δισυνεκτικό ανν κάθε ζεύγος κορυφών του συνδέεται με 2 εσωτερικών διακεκριμένα μονοπάτια

Απόδειξη :

"$\Leftarrow$" [με άτοπο]

- Έστω το G δεν είναι δισυνεκτικό, δηλαδή έχει κορυφή τομής u και έστω x, y δύο κορυφές σε δύο διαφορετικές συνεκτικές συνιστώσες του $G \backslash u$



- Όλα τα μονοπάτια από την x προς την y περνούν από την u
- Το G δεν περιέχει 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια. ***άτοπο***

  Άρα το G είναι δισυνεκτικό ✓

“$\Rightarrow$”

- Έστω G δισυνεκτικό γράφημα και $x, y \in V(G)$
- Θα δείξουμε ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x, y)-μονοπάτια με επαγωγή ως προς την ποσότητα $\mathrm{dist}(x, y)$

Βάση: $\mathrm{dist}(x, y) = 1$

- $e = (x, y) \in E(G)$
- $G \backslash e$ είναι συνεκτικό

Απόδειξη:

- $d(x) > 1, d(y) > 1$

  [Αν $d(x) = 1$ τότε το y είναι διαχωριστής τους G $\Rightarrow G$ δεν είναι δισυνεκτικό - άτοπο]
- $G \backslash \{x\}$ είναι συνεκτικό

  [διαφορετικά το $\{x\}$ θα ήταν διαχωριστής του G $\Rightarrow G$ δεν είναι δισυνεκτικό - άτοπο]
- $G \backslash e$ είναι συνεκτικό

  [γιατί $G \backslash \{x\} \subset G \backslash e$]

- $\exists$ (x, y)-μονοπάτι P στο $G \backslash e$
- $\exists$ 2 εσωτερικώς διακειριμένα μονοπάτια στο G [το P και η e] ✓

Ε.Υ. Έστω ότι για κάθε $x, y \in V(G)$: $\text{dist}(x,y) < k$ ισχύει ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακριτά (x,y)-μονοπάτια

Ε.Β. Έστω $x, y \in V(G)$: $\text{dist}(x,y) = k \geq 2$

- G συνεκτικό $\Rightarrow \exists$ (x,y)-μονοπάτι στο G. Έστω w προτελευταία κορυφή του
- από Ε.Υ. $\Rightarrow \exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x,w)-μονοπάτια $P_1(x,w)$ και $P_2(x,w)$

Περίπτωση 1: Το $y \in P_1(x,w)$ [ή $y \in P_2(x,w)$]

$\Rightarrow$ Τα μονοπάτια $P_1(x,y)$ και $P_2(x,y) \cdot (w,y)$ είναι τα ζητούμενα ✓

Περίπτωση 2: $y \notin P_1(x,w)$ και $y \notin P_2(x,w)$

- Έστω $R(x,y)$ ένα (x,y)-μονοπάτι που δεν περιέχει την w

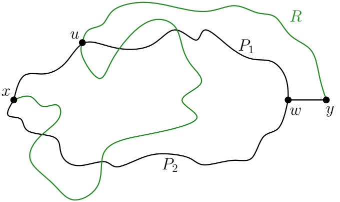
[υπάρχει γιατί $G \backslash w$ είναι συνεκτικό]

Περίπτωση 2α: Το $R(x,y)$ δεν έχει κοινές κορυφές με τα $P_1(x,w)$, $P_2(x,w)$

- Τα $R(x,y)$ και $P_1(x,w) \cdot (w,y)$ είναι τα ζητούμενα 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια ✓

Περίπτωση 2β: Το $R(x,y)$ έχει κοινές κορυφές με τα $P_1(x,w)$, $P_2(x,w)$

- Έστω $u \in R(x,y)$ η τελευταία (πηγαίνοντας από το $x \to y$) κοινή κορυφή και έστω $u \in P_1(x,w)$.



- Τα μονοπάτια $P_1(x,u) \cdot R(u,y)$ και $P_2(x,w) \cdot (w,y)$ είναι τα ζητούμενα 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (x,y)-μονοπάτια ✓ ■

Πόρισμα 4.10:

Έστω G ένα δισυνεκτικό γράφημα. Οι παρακάτω πράξεις δεν επηρεάζουν την δισυνεκτικότητα του G:

i. προσθήκη ακμής

ii. διάλυση κορυφής βαθμού 2 [πρέπει $|V(G)| \geq 3$]

iii. υποδιαίρεση ακμής [που δεν είναι βρόγχος]

Θεώρημα 4.11:

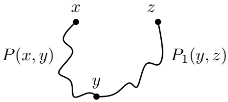
Έστω ένα δισυνεκτικό γράφημα G με $|V(G)| \geq 3$. Τότε για κάθε $x, y, z \in V(G)$ υπάρχει ένα μονοπάτι από την x προς την z το οποίο διέρχεται από την y

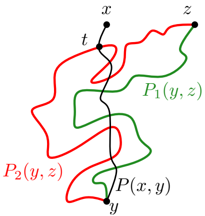
***Απόδειξη** [1ος τρόπος]:*

- G δισυνεκτικό $\Rightarrow$ $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα στην y και την z καθώς και ανάμεσα στην x και την y
- Έστω $P_1(y,z)$ και $P_2(y,z)$ τα (y,z)-μονοπάτια
- Έστω $P(x,y)$ το (x,y)-μονοπάτι

Περίπτωση 1: Το $P(x,y)$ και ένα από τα $P_1(y,z)$, $P_2(y,z)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένα

- Το μονοπάτι $P(x,y) \cdot P_1(y,z)$ είναι το ζητούμενο ✓





Περίπτωση 2: Το $P(x,y)$ έχει κοινές κορυφές και με τα 2 μονοπάτια

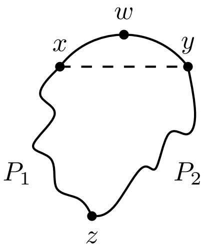
- Έστω t η τελευταία κοινή κορυφή των $P_1(y,z)$, $P_2(y,z)$ με το $P(x,y)$ και έστω ότι ανήκει στο $P_2(y,z)$
- Το μονοπάτι $P(x,t) \cdot P_2(t,y) \cdot P_1(y,z)$ είναι το ζητούμενο ✓ ■

Απόδειξη *[2ος τρόπος]:*

- Έστω το γράφημα G' που κροκύπτει από τις πράξεις:
  i. Πρόσθεση ακμής $e = (x, y)$
  ii. Υποδιαίρεση της e. Έστω w η νέα κορυφή

[Εάν $\exists e' = (x, y) \in E(G)$ τότε το G' είναι πολυγράφημα]

- Από το Πόρισμα 4.10 G' είναι δισυνεκτικό
- Από το Θεώρημα 4.9 $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα (z, w)-μονοπάτια $P_1(z, w)$ και $P_2(z, w)$
- Έστω το $P_1(z, w)$ περνάει από το x και το $P_2(z, w)$ από το y
- Το μονοπάτι $P_1(x, z) \cdot P_2(z, y)$ είναι το ζητούμενο ✓



Θεώρημα 4.12:

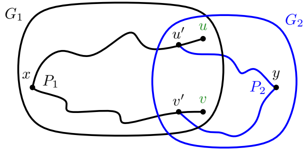
Έστω δισυνεκτικά γραφήματα G_1, G_2 τέτοια ώστε $|V(G_1) \cap V(G_2)| \geq 2$. Τότε το γράφημα $G_1 \cup G_2$ είναι δισυνεκτικό

Απόδειξη :

- Έστω $u, v \in V(G_1) \cap V(G_2)$
- Έστω $x, y \in V(G_1 \cup G_2)$

Αρκεί να δείξω ότι $\exists$ 2 εσωτερικώς διακεκριμένα μονοπάτια ανάμεσα στις x, y

- Εξετάζουμε μόνο την περίπτωση όπου μια κορυφή (έστω η x) ανήκει στο ένα γράφημα (έστω το G_1) και η άλλη (y) στο άλλο (G_2)



- G_1 δισυνεκτικό $\xRightarrow{\Theta.\ 4.11}$ $\exists P_1(u, x, v)$ στο G_1

  Έστω u' $[v']$ η πρώτη κορυφή του $P_1(x, u)$ $[P_1(x, v)]$ που ανήκει στο $V(G_1) \cap V(G_2)$
- G_2 δισυνεκτικό $\xRightarrow{\Theta.\ 4.11}$ $\exists P_2(u', y, v')$ στο G_2
- Τα μονοπάτια $P_1(x, u') \cdot P_2(u', y)$ και $P_1(x, v') \cdot P_2(v', y)$ είναι εσωτερικώς διακεκριμένα

$\Rightarrow G_1 \cup G_2$ δισυνεκτικό ■

Θεώρημα 4.13:

Έστω 2 δισυνεκτικές συνιστώσες H_1 και H_2 ενός γραφήματος G. Τότε οι H_1 και H_2 έχουν το πολύ μια κοινή κορυφή η οποία πρέπει να είναι κορυφή-τομής

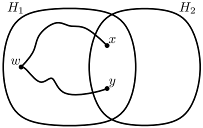
Απόδειξη :

Έστω $V(H_1) \cap V(H_2) \neq \emptyset$ [διαφορετικά ισχύει]

i. Θα δείξω ότι $|V(H_1) \cap V(H_2)| = 1$

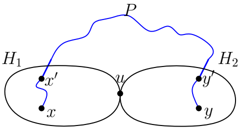
- Έστω $x, y \in V(H_1) \cap V(H_2)$
- Έστω $w \in V(H_1) \backslash V(H_2)$
- H_1 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_1(x, w, y)$ στο H_1
- $H_2 \cup P_1(x, w, y)$ δισυνεκτικό

  [Μπορεί να δημιουργηθεί από το H_2 με την προσθήκη της ακμής (x, y) και διαδοχικές διαιρέσεις της [Πόρισμα 4.10]]
- $H_2 \subset H_2 \cup P_1(x, w, y)$ άτοπο γιατί H_2 είναι μεγιστοτικό ως συνεκτική συνιστώσα ✓

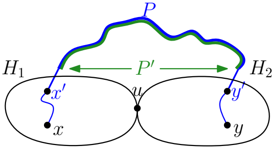


ii. Έστω u η κοινή κορυφή των $H_1, H_2 \Rightarrow$ η u είναι κορυφή τομής

- Έστω το $G \backslash u$ είναι συνεκτικό
- Έστω $x \in H_1, y \in H_2$ κορυφές διαφορετικές από την u
- $\exists$ μονοπάτι P από την x προς την y στο $G \backslash u$
- $H = H_1 \cup H_2, H \backslash u$ ένωση 2 "ξένων" μεταξύ τους γραφημάτων εκ των οποίων το ένα περιέχει το x και το άλλο το y



- Το P δεν ανήκει αποκλειστικά στο $H \backslash u$
- Το P περιέχει ακμές του $E(G) \backslash E(H)$
- Έστω το γράφημα $H' = H \cup P$
- Έστω P' ένα μεγιστοτικό υπομονοπάτι του P το οποίο αποτελείται από ακμές που δεν ανήκουν στα H_1, H_2
- Έστω $x' \in V(H_1)$ και $y' \in V(H_2)$ τα άκρα του P'



- H_1 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_1(x', u)$ στο H_1
- H_2 δισυνεκτικό $\Rightarrow \exists P_2(y', u)$ στο H_2
- $C = P'(x', y') \cdot P_2(y', u) \cdot P_1(u, x')$ κύκλος $\Rightarrow C$ δισυνεκτικό
- $H_1 \cup H_2 \cup C$ είναι δισυνεκτικό

[γιατί H_1, C δισυνεκτικό και $|V(H_1) \cap V(H_2)| \geq 2 \xRightarrow{\Theta.\ 4.12} H_1 \cup C$ δισυνεκτικό $\xRightarrow[\text{όμοια}]{\Theta.\ 4.12} (H_1 \cup C) \cup H_2$ δισυνεκτικό]

- $H' = H \cup P = H_1 \cup H_2 \cup C$ δισυνεκτικό
- Αλλά $H_1 \subset H' = H \cup P$ ***άτοπο***

  γιατί H_1 είναι μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα του G

$\Rightarrow G \backslash u$ δεν είναι συνεκτικό

$\Rightarrow$ Η u είναι κορυφή-τομής ✓

Θεώρημα 4.14:

Ένα γράφημα είναι δισυνεκτικό ανν μπορεί να κατασκευαστει ξεκινώντας από το K_3 και εφαρμόζοντας μια ακολουθία από:

i. υποδιαιρέσεις ακμής

ii. πρόσθεση ακμής

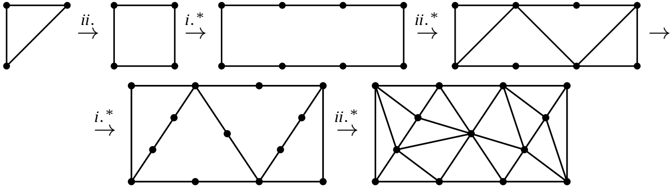
Απόδειξη :

"$\Leftarrow$"

- K_3 δισυνεκτικό
- Από Πόρισμα 4.10 η υποδιαίρεση ακμής και η πρόσθεση ακμής διατηρούν την δισυνεκτικότητα ✓

"$\Rightarrow$" Θα ακολουθήσει...

Παράδειγμα:

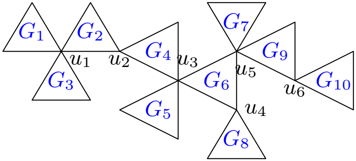


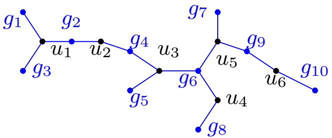
Δένδρο δισυνεκτικών συνιστωσών:

Έστω συνεκτικό γράφημα G και $G_1, G_2, \ldots, G_k$ οι δισυνεκτικές του συνιστώσες. Έστω $CC = \{g_i : G_i$ συνεκτική συνιστώσα του $G\}$, και $CV = \{u : u$ κορυφή τομής του $G\}$. Το γράφημα $T = (CC \cup CV, E)$ όπου

$$E = \{(g_i, u) : g_i \in CC, \{u\} \in CV, \{u\} \in V(G_i)\}$$

ονομάζεται ***δένδρο δισυνεκτικών συνιστωσών*** του G





Ερώτηση 4.6: Να δειχθεί ότι:

i. Το T είναι διμερές

ii. Το T είναι όντως δένδρο

k-συνεκτικότητα

Συνεκτικότητα:

Η ***συνεκτικότητα $k(G)$*** ενός γραφήματος G ορίζεται ως το μέγεθος ενός ελαχίστου διαχωριστή του

***k*-συνεκτικό:**

Ένα γράφημα G με $|V(G)| \geq k+2$ το οποίο έχιε ελάχιστο διαχωριστή μεγάθους k ονομάζεται ***k-συνεκτικό γράφημα***

Λήμμα 4.15:

$k(G) \leq \delta(G)$ [για απλό γράφημα G]

Απόδειξη :

- Έστω γράφημα G και έστω $u \in V(G) : d(u) = \delta(G)$
- Έστω $N_G(u)$ η γειτονιά της u
- Στο γράφημα $G \backslash N_G(u)$ η κορυφή u είναι απομονωμένη

$\Rightarrow N_G(u)$ είναι διαχωριστής του G

$\Rightarrow k(G) \leq |N_G(u)| = \delta(G)$ ∎

Θεώρημα 4.16*[Menger-1927]*:

Για κάθε γράφημα G και για κάθε ζεύγος s, t μη γειτονικών κορυφών του G ισχύει ότι το μέγεθος ενός ελαχίστου (s, t)-διαχωριστή του G είναι ίσο με τον μέγιστο αριθμό εσωτερικώς διακεκριμένων (s, t)-μονοπατιών στο G

Θεώρημα 4.17*[Whitney-1932]*:

Ένα γράφημα G είναι k-συνεκτικό ανν για κάθε ζεύγος u, v διαφορετικών κορυφών του G υπάρχουν τουλάχιστον k εσωτερικώς ανεξάρτητα (u, v)-μονοπάτια

Θεώρημα 4.18*[Halin-1968]*:

Για κάθε γράφημα G με $\delta(G) > k(G)$ υπάρχει ακμή $e \in E(G)$ τέτοια ώστε $k(G \backslash e) = k(G)$

[δηλαδή η e δεν είναι κρίσιμη ακμή]

Ερώτηση 4.7: Να αποδειχθεί το "$\Longrightarrow$" τμήμα του Θεωρήματος 4.14 κάνοντας χρήση του Θεωρήματος του Halin.

Θεώρημα 4.19:

Έστω ένα k-συνεκτικό γράφημα G, $k \geq 2$. Τότε κάθε k κορυφές του G ανήκουν σε ένα κύκλο του G

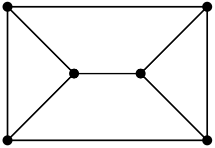
Σημείωση: Το έχουμε δείξει για $k = 2$.

Συνεκτικότητα ακμών/Πλευρική συνεκτικότητα

Συνεκτικότητα ακμών:

Έστω ένα γράφημα G. Ο ελάχιστος αριθμός ακμών που πρέπει να αφαιρεθεί από το G ώστε να δημιουργηθεί ένα μη-συνεκτικό γράφημα ονομάζεται ***συνεκτικότητα ακμών*** του G και συμβολίζεται με $\lambda(G)$

$$\lambda(G) = \min \{|F| : F \in E(G) \text{ και } G \backslash F \text{ μη συνεκτικό}\}$$



$\lambda(G) = 3$

Θεώρημα 4.20:

Για κάθε γράφημα G ισχύει ότι $k(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$

Απόδειξη :

- Έστω v κορυφή του G με $d(v) = \delta(G)$
- Έστω $E_G(v)$ οι προσκείμενες στην v ακμές
- $G \backslash E_G(v)$ είναι μη συνεκτικό γιατί η v είναι απομονωμένη

$$\boxed{\lambda(G) \leq \delta(G) \qquad (5)}$$

- Η ανισότητα $k(G) \leq \lambda(G)$ ισχύει όταν:

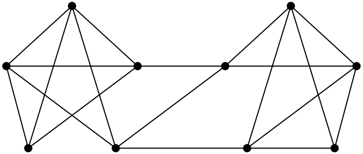
$\lambda(G) = 0$ Το G είναι μη συνεκτικό $\Rightarrow k(G) = 0$

$\lambda(G) = 1$ Το G περιέχει γέφυρα $e = (u, v)$

$\Rightarrow$ Οι $\{u\}$ και $\{v\}$ είναι διαχωριστές

$\Rightarrow k(G) = 1$

- Έστω $\lambda(G) \geq 2$
- Έστω $e_i = (u_i, v_i), i = 1, \ldots, \lambda(G)$ οι ακμές ενός “διαχωριστή ακμών”
- Αφαιρώντας όλες εκτός από την e_1, παίρνω συνεκτικό γράφημα με γέφυρα
- Έστω το σύνολο $S = \{w : w \in \{u_i, v_i\}, i = 2, \ldots, \lambda(G) \text{ και } w \neq u_1, v_1\}$
- Αν S διαχωριστής του $G \Rightarrow k(G) < \lambda(G)$
- Αν όχι, $S \cup \{u_1\}$ είναι διαχωριστής του $G \Rightarrow k(G) \leq \lambda(G)$ ∎



$$\left.\begin{aligned} \delta(G) &= 4 \\ k(G) &= 2 \\ \lambda(G) &= 3 \end{aligned}\right\}$$

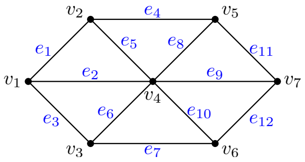
Θεώρημα 4.21*[Πλευρικό Θεώρημα Menger]*:

Έστω γράφημα G και u, v δυο κορυφές του. Τότε, το μέγιστο πλήθος των πλευρικά ανεξάρτητων (u, v)-μονοπατιών του ισούται με το ελάχιστο πλήθος ακμών που χωρίζουν τις u και v

Σημείωση: Αποδείχθηκε από τους Ford-Fulkerson το 1955.

Πλευρικά ανεξάρτητα μονοπάτια:

μονοπάτια που δεν περιέχουν κοινές ακμές [μπορεί να έχουν κοινές κορυφές]



$v_1e_1v_2e_5v_4e_8v_5e_{11}v_7$

$v_1e_2v_4e_9v_7$

$v_1e_3v_3e_6v_4e_{10}v_6e_{12}v_7$

Θεώρημα 4.22*[Whitney]*:

Έστω γράφημα G για το οποίο ισχύει ότι για όλες τις διακεκριμένες κορυφές του u, v υπάρχουν k πλευρικά ανεξάρτητα (u, v)-μονοπάτια. Τότε $\lambda(G) = k$