Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 2 γιὰ τὰ μεταπτυχιακά μαθήματα «Θεωρία Γραφημάτων» τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος καὶ «Γραφοθεωρία» του Μ.Π.Λ.Α.

Ἔκδοση $\boxed{3}$ (Τελική)

Κυριακὴ 26 Ἀπριλίου 2015

Πρὶν ἀρχίσετε νὰ λύνετε τὶς ἀσκήσεις, διαβάστε προσεκτικὰ τὸ παρακάτω κείμενο:

Λύστε τὶς παρακάτω ἀσκήσεις. Οἱ καλύτερες ἀπαντήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Παρασκευή 22/05/2015 (14:00-17:00) καὶ τὴν Δευτέρα 25/05/2015 (14:00-17:00). Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικὰ, γραμμένες κατὰ προτίμηση σὲ LaTeX καὶ ὑποβεβλημένες μέσω της ἠ-τάξης ὡς ἀρχεῖα .pdf, πρὶν τὶς 23:59 τῆς 19/05/2015. Ἀρχεῖα ποὺ δὲν θὰ εἶναι σὲ .pdf καὶ δὲν θὰ ἀναγράφουν στὴν ἀρχή τους πλήρη στοιχεία τῶν μελῶν τῶν ὁμάδων στὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπόψη. Οἱ ἐνδιαφερόμενοι/ες φοιτητὲς/ριες πρέπει νὰ σχηματίσουν ὁμάδες συνεργασίας 1 ή 2 ἀτόμων καὶ νὰ δηλωθοῦν ὡς ὁμάδες στὴν ἠ-τάξη γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀσκήσεων (γιὰ ἀποφυγὴ λαθῶν καλύτερα νὰ δηλώσετε τὶς ὁμάδες σας ἀρκετὲς μέρες πριν τὴν ὑποβολή). Δὲν θὰ ὑπάρξει ἄλλη διαδικασία ὑποβολῆς διαφορετικὴ ἀπὸ αὐτὴ τῆς ἠ-τάξης. Ἡ συμμετοχὴ στην λύση τῶν ὁμάδων ἀσκήσεων μπορεῖ νὰ δώσει τὸ πολύ 3 μονάδες ἐπιπλέον στὸν τελικό βαθμό τοῦ μαθήματος ἐφόσον ὁ βαθμὸς τῆς τελικής ἐξέτασης εἶναι τουλάχιστον $3+\frac{1}{2}$. Στὶς παρουσιάσεις θὰ προτιμηθοῦν οἱ ὁμάδες ποὺ θὰ ἔχουν συλλέξει τοὺς περισσότερους αστερίσκους. Φοιτητές/ριες ποὺ δὲν θὰ κάνουν παρουσίαση σὲ κανένα ἀπὸ τὰ πακέτα ασκήσεων ποὺ θὰ παρουσιαστοῦν κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ μαθήματος δὲν θὰ μπορέσουν νὰ διεκδικήσουν καμμιὰ ἀπὸ τὶς 3 μονάδες. Τὸ ποσοστὸ τῶν 3 μονάδων ποὺ θὰ ἀνατεθεῖ σὲ κάθε φοιτητή/ρια θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν ποιότητα/ποσότητα τῶν ἀπαντήσεων ποὺ θὰ ὑποβάλει ἡ ὁμάδα του καὶ ἀπὸ τὴν ποιότητα τῶν παρουσιάσεών του.

---

1. Σὲ ἕνα γράφημα $G(n,p)$ ἡ πιθανότητα μιᾶς κορυφῆς νὰ ἔχει βαθμὸ k εἶναι $\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{n-1-k}$. Δεῖξτε ὅτι ὁ μέσος βαθμὸς εἶναι $(n-1)p$ μὲ ἀπευθεῖας ὑπολογισμό, δηλαδῆ χωρὶς νὰ χρησιμοποιήσετε τὴ γραμμικότητα τῆς μέσης τιμῆς.

2. Δεῖξτε ὅτι τὸ τυχαῖο γράφημα $G(n,p)$ με $p = n^{-0.7}$ δὲν ἔχει σχεδὸν σίγουρα 4-κλίκα γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα n.

3. ($\star$) Θεωρῆστε τὸ παρακάτω τυχαῖο κατευθυνόμενο γράφημα. Γιὰ κάθε κορυφὴ v ἐπιλέγουμε ὁμοιόμορφα τυχαῖα μία κορυφὴ u καὶ τοποθετοῦμε τὴν ἀκμὴ $v \to u$. Κάθε κορυφὴ ἔχει μόνο μία ἐξερχόμενη ἀκμὴ καὶ μπορεῖ νὰ ὑπάρχουν θηλιές. Ἔστω $r(v)$ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν στὶς ὁποῖες μποροῦμε νὰ φτάσουμε ἀπὸ τὴν v.

   - Γιὰ $k = 1, \ldots, n$ ποιὰ ἡ πιθανότητα $r(v) = k$· Ἡ πιθανότητα θὰ ἔχει μορφὴ γινομένου.
   - Δεῖξτε ὅτι γιὰ μία κορυφὴ v, $Pr[r(v) \leq \sqrt{n}/10] \leq 1/3$ καὶ $Pr[r(v) \geq 10\sqrt{n}] \leq 1/3$.
     Ὑπόδειξη: Θὰ χρησιμοποιήσετε πιθανὰ φράγματα ἁπλοποίησης.
     Παράδειγμα: $\prod_{i=1}^{n/2}(1-\frac{i}{n}) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n/2}\frac{i}{n}$.

4. ($\star$) Θεωρῆστε τὸ τυχαῖο γράφημα $G(n,p)$ μέ $p = 6.6/n$. Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα εἶναι σχεδὸν σίγουρα μὴ 3-χρωματίσιμο γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα n.

   Ὑπόδειξη: Ὑπολογίστε τὸν μέσο ἀριθμὸ ἔγκυρων 3-χρωματισμῶν. Γιὰ κάποιο συγκεκριμένο 3-χρωματισμό θεωρῆστε τὸν ἀριθμὸ τῶν κορυφῶν $\alpha n, \beta n, (1-\alpha-\beta)n$ σὲ κάθε χρῶμα. Ἐφαρμόστε κατάλληλα φράγματα.

5. ($\star$) Θεωρῆστε τὸ παρακάτω τυχαῖο γράφημα μὲ n κορυφές. Κάθε κορυφὴ διαλέγει ὁμοιόμορφα τυχαῖα 2 κορυφὲς καὶ τοποθετοῦμε μή-κατευθυνόμενες ἀκμὲς πρὸς αὐτές. Ἡ τυχαῖα ἐπιλογὴ γίνεται μὲ ἐπανάληψη καὶ μπορεῖ μία κορυφὴ νὰ ἐπιλέξει καὶ τὸν ἑαυτό της στὴν ὁποῖα περίπτωση παραλείπουμε αὐτὴ τὴν θηλιά. Παρατηροῦμε ὅτι οἱ ἀκμὲς θὰ εἶναι περίπου $2n$ ἀλλὰ μπορεῖ κάποιες κορυφὲς νὰ ἔχουν βαθμὸ μικρότερο ἀπὸ 2 ἂν ἐπέλεξαν τὸν ἑαυτό τους ἤ τὴν ἴδια κορυφὴ δύο φορές. Μπορεῖ ἐπίσης κάποιες κορυφὲς νὰ ἔχουν βαθμὸ ἀρκετά μεγαλύτερο ἀπὸ 4 ἂν ἄλλες κορυφὲς ἔτυχε νὰ τὶς ἐπιλέξουν.

   Δεῖξτε ὅτι τὸ γράφημα εἶναι σχεδὸν σίγουρα συνεκτικὸ γιὰ ἀρκετὰ μεγάλα n.

Τέλος δεύτερου πακέτου ἀσκήσεων. Καλὴ διασκέδαση!