Θεωρία Γραφημάτων
1η Διάλεξη

Α. Συμβώνης

Εθνικο Μετσοβειο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων

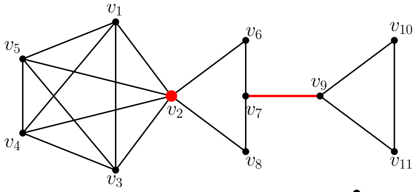
Φεβρουάριος 2015

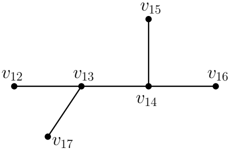
Εισαγωγή

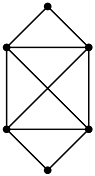
Διδάσκων:	Αντώνιος Συμβώνης			
	ΣΕΜΦΕ, κτίριο Ε, 3.18			
	symvonis@math.ntua.gr			
	www.math.ntua.gr/ symvonis			
	mycourses ...ΗΜΜΥ/ΕΜΦΕ			
Βοηθός Διδασκαλίας:	Χρυσάνθη Ραυτοπούλου			
	Κτίριο Ε, 2.22			
Διαλέξεις:	Δευτέρα	3-5μμ	}	Αίθουσα 105
	Παρασκευή	9-10.30πμ		Νέο κτίριο ΣΕΜΦΕ
Σύγγραμμα:	"Θεωρία Γραφημάτων"			
	Αλέξανδρος Παπαϊωάννου			
	Πανεπιστημιακές εκδόσεις ΕΜΠ			
Αξιολόγηση:	Γραπτές Ασκήσεις:	15%		
	Γραπτό Διαγώνισμα:	85%		

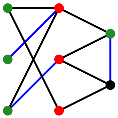
Θεματικές Ενότητες

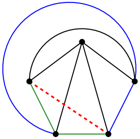
1. Εισαγωγή-Βασική Ορολογία
2. Συνεκτικότητα
3. Δένδρα
4. Eulerian Γραφήματα
5. Hamiltonian Γραφήματα
6. Χρωματισμός Γραφημάτων
7. Ταιριάσματα
8. Πλήρη Γραφήματα
   Ανεξάρτητα Σύνολα
   Καλύμματα Κορυφών
9. Επίπεδα Γραφήματα
10. ...











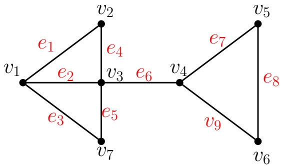
Γράφημα

$G = (V, E)$

$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}_{n \geq 0}$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}_{m \geq 0}$

$e_i = (u, v)_{\substack{i=1\ldots m \\ u,v \in V \\ u \neq v}}$



$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_7\}$

$E = \{e_1, e_2, \ldots, e_9\}$

Τάξη: $n = |V| = |V(G)|$ — Τάξη: 7

Μέγεθος: $e = |E| = |E(G)|$ — Μέγεθος: 9

Γειτονιά κορυφής: $N(u)$

$N(u) = \{v | (u, v) \in E\}$

$\mathrm{N}(W)_{W \subseteq V} = \{v | (u, v) \in E, u \in W, v \in V \setminus W\}$

$N(v_7) = \{v_1, v_2, v_6\}$

$N(v_4) = \{v_3, v_5\}$

$N(\{v_7, v_2\}) = \{v_1, v_6, v_3\}$

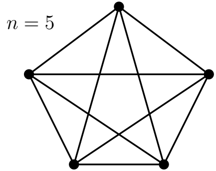
Βαθμός κορυφής: $d_G(u) = |N(u)|$ — $d(v_7) = 3, d(v_2) = 4$

Ελάχιστος βαθμός: $\delta(G) = \min_{u \in V} d_G(u)$ — $\delta(G) = 2$

Μέγιστος βαθμός: $\Delta(G) = \max_{u \in V} d_G(u)$ — $\Delta(G) = 4$

Ερώτηση 1.1: Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός ακμών ενός γραφήματος με n κορυφές?

Ερώτηση 1.2: Πόσα γραφήματα υπάρχουν με n κορυφές?



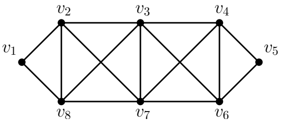
Λήμμα 1.1:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2E$$

Λήμμα 1.2:

Κάθε γράφημα έχει άρτιο αριθμό από κορυφές περιττού βαθμού

Περίπατοι-Περιηγήσεις



Περίπατος:

Ακολουθία κορυφών $[u_1\ u_2\ \ldots\ u_k]$ όπου $(u_i, u_{i+1}) \in E, i = 1, \ldots, k-1$

$[v_1\ v_2\ v_8\ v_3\ v_2\ v_7]$

Μπορεί να επαναλαμβάνονται κορυφές

Περιήγηση:

Περίπατος με ταυτόσημη πρώτη και τελευταία κορυφή $[u_1\ u_2\ \ldots\ u_k = u_1]$

$[v_1\ v_2\ v_8\ v_3\ v_2\ v_1]$

Μονοπάτι:

Περίπατος χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές

Κύκλος:

Περιήγηση χωρίς επαναλαμβανόμενες κορυφές (με εξαίρεση την v_1)

Εναλλακτικά

Περίπατος	–	Περιήγηση	–	Μονοπάτι	–	Κύκλος
$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$		$\updownarrow$
Μονοπάτι		Κύκλος		Απλό Μονοπάτι		Απλός Κύκλος

Μήκος

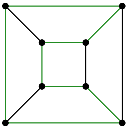
- περιπάτου
- περιήγησης
- μονοπατιού
- κύκλου

$[u_1\, u_2\, \ldots\, u_k] = k - 1$

=ο αριθμός των ακμών που περιλαμβάνει

Hamiltonian γραφήματα:

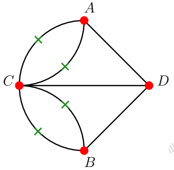
Τα γραφήματα που περιέχουν κύκλο μήκους $|V|$

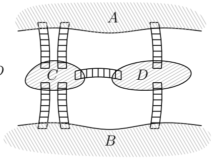


Κύκλος - μονοπάτι Hamilton

Eulerian γραφήματα:

Τα γραφήματα που περιέχουν περιήγηση μεγέθους $|E|$ η οποία περιλαμβάνει όλες τις ακμές

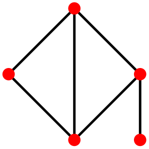




Κύκλος - μονοπάτι euler

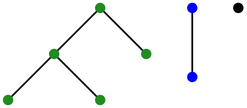
Συνεκτικό Γράφημα:

Υπάρχει μονοπάτι ανάμεσα σε κάθε ζεύγος κορυφών του



Συνεκτική Συνιστώσα:

Μεγιστοτικό συνεκτικό υπογράφημα



Δένδρο:

Συνεκτικό γράφημα χωρίς κύκλους

Λήμμα 1.3:

Κάθε δένδρο έχει μια κορυφή βαθμού 1

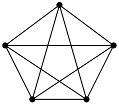
Θεώρημα 1.4:

Για κάθε δένδρο $T(V, E)$ ισχύει $|E| = |V| - 1$

Ειδικά Γραφήματα

- **Πλήρες Γράφημα – Κλίκα**

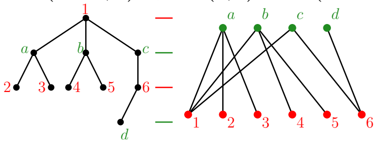
K_5



$$V(K_n) = n$$
$$E(K_n) = \frac{n(n-1)}{2}$$
$$d_{K_n}(u) = n - 1, u \in V(K_n)$$

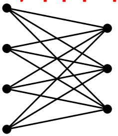
- **Διμερή Γραφήματα**

$$G = (A \cup B, E) : \nexists e = (u, v) \in E : (u \in A \text{ AND } v \in A) \text{ OR } (u \in B \text{ AND } v \in B)$$



- **Πλήρη Διμερή Γραφήματα**

$K_{4,3}$



$$V(K_{m,n}) = m + n$$
$$E(K_{m,n}) = mn$$

Ερώτηση 1.3: Να δειχθεί ότι ένα διμερές γράφημα έχει μόνο κύκλους/περιηγήσεις άρτιου μήκους.

Ερώτηση 1.4: Να δειχθεί (με χρήση γραφημάτων) ότι

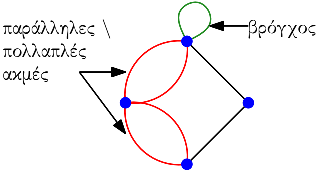
$$\binom{m+n}{2} = \binom{m}{2} + \binom{n}{2} + mn.$$

Κανονικά Γραφήματα:

Γραφήματα με ίδιο βαθμό για όλες τις κορυφές τους

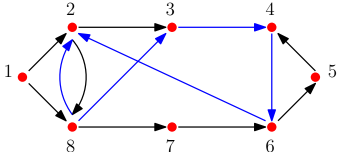
- k-κανονικό: $d_G(v) = k, \forall v \in V$
- G k-κανονικό $\Rightarrow |E(G)| = \frac{k|V(G)|}{2}$

Γενικεύσεις του Ορισμού του Γραφήματος



Απλά Γραφήματα:

- χωρίς βρόγχους
- χωρίς πολλαπλές ακμές



Κατευθυνόμενα Γραφήματα:

- Κάθε ακμή είναι ένα *διατεταγμένο* ζεύγος κορυφών

έσω-βαθμός: $d^-(v) = |\{e : e = (u, v) \in E\}|$

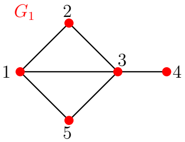
έξω-βαθμός: $d^+(v) = |\{e : e = (v, u) \in E\}|$

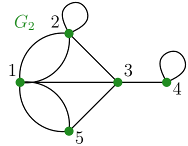
Λήμμα 1.5:

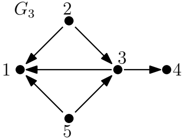
$$\sum_{v \in V} d^-(v) = \sum_{v \in V} d^+(v) = |E|$$

Ερώτηση 1.5: Πόσα κατευθυνόμενα γραφήματα n κορυφών υπάρχουν?

Αναπαράσταση Γραφημάτων







Πίνακας Γειτνίασης

	1	2	3	4	5
1		1	1		1
2	1		1		
3	1	1		1	1
4			1		
5	1		1		

	1	2	3	4	5
1		2	1		2
2		1	1		
3	1	1		1	1
4			1	1	
5	2		1		

	1	2	3	4	5
1					
2	1		1		
3	1			1	
4					
5	1		1		

Λίστα Γειτνίασης

G_1

1 → 2 → 3 → 5
2 → 1 → 3
3 → 1 → 2
4 → 3
5 → 3 → 1

G_2

1 → 2 → 2 → 3 → 5 → 5
2 → 1 → 1 → 2
3 → 1 → 2 → 4 → 5
4 → 3 → 4
5 → 1 → 1 → 3

G_3

1 ⊣
2 → 1 → 3
3 → 1 → 4
4 ⊣
5 → 1 → 3

Ισομορφικά Γραφήματα:

Δύο γραφήματα G και H είναι ***ισομορφικά*** αν υπάρχει $1-1$ και επί απεικόνιση $\sigma : V(G) \to V(H)$ τέτοια ώστε $\forall u, v \in V(G), u \neq v$ να ισχύει $(u, v) \in E(G) \Leftrightarrow (\sigma(u), \sigma(v)) \in E(H)$.

$G \simeq H$: το G είναι ισομορφικό με το H

Θεώρημα 1.6:

Η σχέση $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας

Σχέση ισοδυναμίας:

αντανακλαστική	$G \simeq G$
συμμετρική	$G \simeq H \Leftrightarrow H \simeq G$
μεταβατική	$G \simeq H \wedge H \simeq F \Leftrightarrow G \simeq F$

- Ένα γράφημα είναι ισόμορφο με άπειρο πλήθος γραφημάτων (που ανήκουν στην ίδια κλάση ισοδυναμίας)
- Γραφήματα αντιπρόσωποι (χωρίς ονόματα στις κορυφές)

K_n : πλήρες γράφημα n κορυφών

$K_{m,n}$: πλήρες διμερές γράφημα $K_{m,n} = (A \cup B, E)$ με $|A| = m$ και $|B| = n$

P_n : μονοπάτι με n κορυφές

C_n : κύκλος με n κορυφές

Πράξεις και Τοπικοί Μετασχηματισμοί Γραφημάτων

Συμπλήρωμα Γραφήματος (ή Συμπληρωματικό Γράφημα):

$$\overline{G} = \{VG, \{(u,v) : u,v \in V(G) \wedge (u,v) \notin E(G)\}\}$$

- $\overline{\overline{G}} = G$

Διαγραφή κορυφής $[G \setminus v]$:

$$G \setminus v = \{VG \setminus v, E(G) \setminus \{(u,v) : (u,v) \in E(G)\}\}$$

- $G \setminus v$, όπου $S \subseteq V(G)$

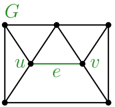
Διαγραφή ακμής $[G \setminus e]$:

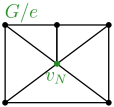
$$G \setminus e = (u,v) = \{VG, E(G) \setminus (u,v)\}$$

- $G \setminus A$, όπου $A \subseteq E(G)$

Σύμπτυξη ακμής (edge contraction) $G/e = (u, v)$:

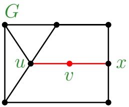
$$G/e = (u,v) = \{V(G) \setminus \{u,v\} \cup \{v_N\}, E(G) \setminus (u,v) \cup \{(v_N, x) : x \in N(u) \cup N(v)\}\}$$

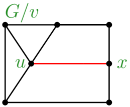




Διάλυση κορυφής v, $d_G(v) = 2$ $[G/v]$:

$$G/v = \{V(G) \setminus \{v\}, E(G) \setminus \{(u,v),(v,x)\} \cup \{(u,x)\} : (u,v),(v,x) \in E(G)\}$$

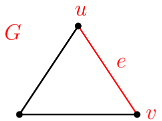


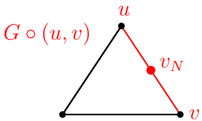


- Έστω $N_G(v) = \{u, x\}$. Τότε
  $G/v = G/(v,u) = G/(v,x)$

Υποδιαίρεση ακμής $[G \circ e], e = (u, v)$:

$$G \circ (u,v) = \{V(G) \cup \{v_N\}, E(G) \setminus \{(u,v)\} \cup \{(u,v_N),(v,v_N)\}\}$$





- Το γράφημα H είναι υποδιαίρεση του γραφήματος G αν το H προκύπτει από το G με διαδοχικές υποδιαιρέσεις ακμής.

Διακεκριμένα γραφήματα (ξένα μεταξύ τους):

G, H είναι ***διακεκριμένα*** εάν $V(G) \cap V(H) = \emptyset$

Ένωση:

$$G \cup H = (V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H))$$

Διακεκριμένη ένωση:

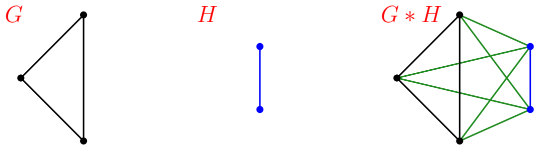
$G + H$ αν G, H διακεκριμένα

Τομή:

$$G \cap H = (V(G) \cap V(H), E(G) \cap E(H))$$

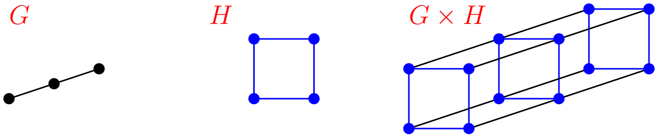
Σύνδεση διακεκριμένων γραφημάτων [$G * H$]:

$$G * H = \{V(G) \cup V(H), E(G) \cup E(H) \cup \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\}\}$$



Γινόμενο διακεκριμένων γραφημάτων [$G \times H$]:

$$\begin{aligned} G \times H : \quad V(G \times H) &= \{(u,v) : u \in V(G), v \in V(H)\} \\ E(G \times H) &= \{\{((u,x),(v,x)) : (u,v) \in E(G), x \in V(H)\} \cup \\ &\quad \{((u,x),(u,y)) : u \in V(G), (x,y) \in E(H)\}\} \end{aligned}$$



- Η ένωση, η σύνδεση και το γινόμενο γραφημάτων είναι πράξεις

  προσεταιριστικές και αντιμεταθετικές

  $$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

  $$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \qquad\qquad a \cdot b = b \cdot a$$

  - $kG \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \cup G \cup \cdots \cup G}_{k \text{ φορές}}$
  - $G^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G * G * \cdots * G}_{k \text{ φορές}}$
  - $G^{[k]} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{G \times G \times \cdots \times G}_{k \text{ φορές}}$

Σημείωση: Για τις πράξεις της ένωσης και της σύνδεσης υποθέτουμε ότι συμμετέχουν k διακεκριμένα ισομορφικά με το G γραφήματα.

Υπογράφημα [$H \subseteq G$]:

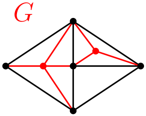
$H \subseteq G$ εάν $V(H) \subseteq V(G)$ και $E(H) \subseteq E(G)$

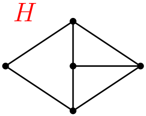
- Το G είναι υπεργράφημα του H

Επαγόμενο υπογράφημα:

Το γράφημα H είναι ***επαγόμενο υπογράφημα*** του G εάν
$V(H) \subseteq V(G)$ και
$\forall u, v \in V(H), (u, v) \in E(H) \Leftrightarrow (u, v) \in E(G)$

- Κάθε επαγόμενο υπογράφημα προκύπτει από διαγραφές κορυφών

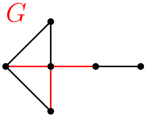


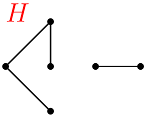


Παραγόμενο υπογράφημα:

Το γράφημα H είναι ***παραγόμενο υπογράφημα*** του G εάν
$V(H) = V(G)$ και
$E(H) \subseteq E(G)$

- Κάθε παραγόμενο υπογράφημα προκύπτει από διαγραφές ακμών



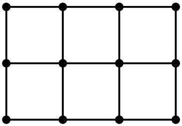


Πλέγμα $R_{p,q}$

$$V(R_{p,q}) = \{\{u_1, u_2 \ldots, u_p\} \times \{v_1, v_2, \ldots, v_q\}\}$$
$$E(R_{p,q}) = \Big\{ \Big\{ ((u_i, v_j), (u_{i'}, v_{j'})) \Big\} : |i - i'| + |j - j'| = 1 \Big\}$$

$$|V(R_{p,q})| = pq$$
$$|E(R_{p,q})| = p(q-1) + q(p-1)$$

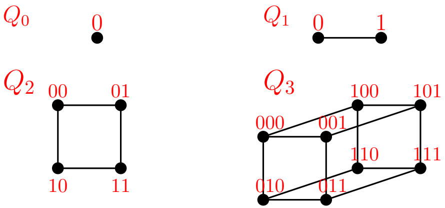
$R_{3,4}$



- $R_{p,q} = P_p \times P_q$
- Torus: $T_{p,q} = C_p \times C_q$

Υπερκύβος $[Q_r]$ Hyper-cube

- $Q_n = P_2 \times Q_{n-1}$
- $|V(Q_n)| = 2^n$
- $|E(Q_n)| = n2^{n-1}$
- διάμετρος$(Q_n) = n$



Ερώτηση 1.6: hamiltonian?

Ερώτηση 1.7: eulerian?

Ερώτηση 1.8: Σε ένα δένδρο προσθέτουμε k ακμές έτσι ώστε να προκύψει ένα απλό γράφημα. Δείξτε ότι το γράφημα περιέχει k κύκλους.

Ερώτηση 1.9: Έστω G ένα απλό συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και $m \geq 2n - 2$ ακμές. Δείξτε ότι το G περιέχει δύο κύκλους ίσου μήκους.