1η Σειρά Ασκήσεων

Προθεσμία παράδοσης: Δευτέρα 27 Απριλίου 2015 (σε μορφή pdf μέσω του mycourses). Μετά τη λήξη της προθεσμίας, δεν θα γίνονται δεκτές εργασίες.

Η άσκηση είναι ατομική: Οι φοιτητές μπορούν να συζητήσουν μεταξύ τους θέματα που αφορούν την άσκηση αλλά δεν επιτρέπεται να αντιγράψουν την λύση ή μέρη αυτής. Για απορίες να συμβουλεύεστε τον διδάσκοντα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Έστω απλό μη συνεκτικό γράφημα G με 3 συνεκτικές συνιστώσες. Δείξτε ότι $\Delta(\bar{G}) \geq 2n/3$, όπου n το πλήθος των κορυφών του G και $\bar{G}$ το συμπληρωματικό γράφημα του G.

(2) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω ακολουθίες βαθμών είναι γραφικές. Στην περίπτωση γραφικής ακολουθίας βαθμών να δοθεί γράφημα που την υλοποιεί.

- i. $4, 4, 3, 2, 1$
- ii. $4, 3, 2, 1$
- iii. $7, 7, 6, 5, 4, 4, 3, 2$
- iv. $7, 6, 6, 5, 4, 3, 2, 1$
- v. $7, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1$
- vi. Εάν x ακέραιος με $0 \leq x \leq 5$, για ποιες τιμές του x η ακολουθία $5, 5, 3, 2, 1, x$ είναι γραφική;

(3) i. Έστω ένα πλέγμα $R_{p,q}$, με $p, q \geq 1$.
- i.α′. Δείξτε ότι το $R_{p,q}$ είναι διμερές γράφημα.
- i.β′. Βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή για το k έτσι ώστε το $R_{p,q}$ να περιέχει το C_k ως επαγόμενο υπογράφημα.

ii. Έστω απλά γραφήματα G και H. Με $G * H$ συμβολίζουμε την σύνδεση των G, H και με $G \times H$ το γινόμενό τους. Βρείτε ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε
- ii.α′. το γράφημα $G * H$ να είναι διμερές.
- ii.β′. το γράφημα $G \times H$ να είναι διμερές.

(4) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G το οποίο δεν είναι κανονικό (δηλαδή υπάρχουν τουλάχιστον δύο κορυφές με διαφορετικό βαθμό). Αν το G έχει n κορυφές και $m = rn/2$ ακμές, όπου r ακέραιος με $1 \leq r \leq n-2$, να δειχθεί ότι $\Delta(G) - \delta(G) \geq 2$.

(5) Ακολουθώντας την απόδειξη του θεωρήματος 2.12 (Kapoor-Polimeni-Wall), κατασκευάστε ένα απλό συνεκτικό γράφημα με 10 κορυφές και σύνολο βαθμών το $\{3, 5, 6, 7, 9\}$.

(6) Έστω απλό συνεκτικό γράφημα G με $n \geq 3$ κορυφές και $m > \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ ακμές. Να δειχθεί ότι το G περιέχει τουλάχιστον ένα τρίγωνο.

(7) Κατασκευάστε ένα απλό συνεκτικό κυβικό γράφημα (3-κανονικό) με 10 κορυφές το οποίο να περιέχει (τουλάχιστον) ένα k-κύκλο για κάθε k με $3 \leq k \leq 10$. Μπορεί ένα τέτοιο γράφημα να έχει ακριβώς έναν k-κύκλο για κάθε k με $3 \leq k \leq 10$;

(8) Δύο πεπερασμένες ακολουθίες s_1 και s_2 από μη αρνητικούς ακεραίους λέγονται **διγραφικές** αν υπάρχει απλό διμερές γράφημα G με σύνολα διαμέρισης κορυφών V_1 και V_2 έτσι ώστε η s_i να περιέχει τους βαθμούς των κορυφών του συνόλου V_i για $i = 1, 2$. Δείξτε ότι οι ακολουθίες $s_1 : a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_r$

και $s_2 : b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_t$, με $r \geq 2$, $0 < a_1 \leq t$ και $0 < b_1 \leq r$ είναι διγραφικές αν και μόνο αν οι ακολουθίες $s'_1 : a_2, a_3, \ldots, a_r$ και $s'_2 : b_1 - 1, b_2 - 1, \ldots, b_{a_1} - 1, b_{a_1+1}, \ldots, b_t$ είναι διγραφικές.

(9) Ένα απλό συνεκτικό γράφημα G λέγεται **αυτοσυμπληρωματικό** αν το G είναι ισόμορφο με το συμπληρωματικό του γράφημα $\bar{G}$. Για παράδειγμα το P_4 και το C_5 είναι αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα.

i. Έστω G_1 και G_2 δύο αυτοσυμπληρωματικά γραφήματα, όπου το G_2 έχει άρτιο πλήθος κορυφών n_2. Έστω G το γράφημα που προκύπτει από τα G_1 και G_2 ενώνοντας κάθε κορυφή του G_2 με βαθμό λιγότερο από $n_2/2$ με κάθε κορυφή του G_1. Δείξτε ότι το G είναι αυτοσυμπληρωματικό.
ii. Δείξτε ότι υπάρχει κανονικό αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με 5^n κορυφές για κάθε $n \geq 1$.
iii. Δείξτε ότι υπάρχει αυτοσυμπληρωματικό γράφημα με n κορυφές για κάθε $n \equiv 0 \pmod 4$ ή $n \equiv 1 \pmod 4$.

(10) Ένα **τουρνουά (tournament)** είναι ένα πλήρες κατευθυνόμενο γράφημα $G = (V, E)$ τέτοιο ώστε για κάθε ζεύγος κορυφών $u, v \in V$, ακριβώς μία από τις ακμές (u, v), (v, u) ανήκει στο E.

i. Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο n υπάρχει τουρνουά με n κορυφές στο οποίο όλοι οι προς-τα-έξω βαθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους και όλοι οι προς- τα-μέσα βαθμοί είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.
ii. Δείξτε ότι σε κάθε τουρνουά με n κορυφές υπάρχει μια **κορυφή-βασιλιάς**, δηλαδή μια κορυφή u από την οποία υπάρχει μονοπάτι προς οποιαδήποτε άλλη κορυφή μήκους το πολύ δύο.
iii. Δείξτε ότι για οποιοδήποτε ακέραιο θετικό αριθμό $n \geq 3$ υπάρχει τουρνουά με n κορυφές έτσι ώστε κάθε κορυφή να είναι βασιλιάς.

Γενικές οδηγίες

- Το παραδοτέο σας για την άσκηση αυτή είναι αρχείο κειμένου σε μορφή pdf: στην πρώτη σελίδα θα αναγράφονται τα στοιχεία σας (ονοματεπώνυμο, εξάμηνο, αριθμός μητρώου και ημερομηνία).
- Το όνομα του αρχείου θα είναι της μορφής "*ΕπίθετοΌνομα*" όπου βάζετε το επίθετο και το όνομά σας με λατινικούς χαρακτήρες.

Την εργασία θα την υποβάλλετε ηλεκτρονικά από τη σελίδα του μαθήματος στο mycourses.ntua.gr, επιλέγοντας «Εργασίες» από το μενού «Εργαλεία».
