**Ὁμάδα ἀσκήσεων No. 3 γιὰ τὰ μεταπτυχιακά μαθήματα «Θεωρία Γραφημάτων» τοῦ Μαθηματικοῦ Τμήματος καὶ «Γραφοθεωρία» του Μ.Π.Λ.Α.**

Ἔκδοση $\boxed{3}$ τελική

Κυριακὴ 03 Μαΐου 2015

Πρὶν ἀρχίσετε νὰ λύνετε τὶς ἀσκήσεις, διαβάστε προσεκτικὰ τὸ παρακάτω κείμενο:

---

Λύστε τὶς παρακάτω 60 ἀσκήσεις. Οἱ καλύτερες ἀπαντήσεις θὰ παρουσιαστοῦν τὴν Δευτέρα 08/06/2015 (15:00-18:00) καὶ τὴν Παρασκευὴ 12/06/2015 (14:00-17:00). Οἱ λύσεις πρέπει νὰ παραδοθοῦν ἠλεκτρονικὰ, γραμμένες κατὰ προτίμηση σὲ LaTeX καὶ ὑποβεβλημένες μέσω της ἠ-τάξης ὥς ἀρχεῖα `.pdf`, πρὶν τὶς 23:59 τῆς 07/06/2015. Ἀρχεῖα ποὺ δὲν θὰ εἶναι σὲ `.pdf` καὶ δὲν θὰ ἀναγράφουν στὴν ἀρχή τους πλήρη στοιχεία τῶν μελῶν τῶν ὀμάδων στὶς ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν δὲν θὰ ληφθοῦν ὑπόψη. Οἱ ἐνδιαφερόμενοι/ες φοιτητὲς/ριες πρέπει νὰ σχηματίσουν ὁμάδες συνεργασίας 1 ή 2 ατόμων καὶ νὰ δηλωθοῦν ὥς ὀμάδες στὴν ἠ-τάξη γιὰ τὴν ἐπίλυση τῶν ἀσκήσεων (γιὰ ἀποφυγὴ λαθῶν καλύτερα νὰ δηλώσετε τὶς ὁμάδες σας ἀρκετὲς μέρες πριν τὴν ὑποβολή). Δὲν θὰ ὑπάρξει ἄλλη διαδικασία ὑποβολῆς διαφορετικὴ ἀπὸ αὐτὴ τῆς ἠ-τάξης. Ἡ συμμετοχὴ στην λύση τῶν ὁμάδων ἀσκήσεων μπορεῖ νὰ δώσει τὸ πολύ 3 μονάδες ἐπιπλέον στὸν τελικό βαθμό τοῦ μαθήματος ἐφόσον ὁ βαθμὸς τῆς τελικῆς ἐξέτασης εἶναι τουλάχιστον $3+\frac{1}{2}$. Στὶς παρουσιάσεις θὰ προτιμηθοῦν οἱ ὁμάδες ποὺ θὰ ἔχουν συλλέξει τοὺς περισσότερους αστερίσκους. Φοιτητές/ριες ποὺ δὲν θὰ κάνουν παρουσίαση σὲ κανένα ἀπὸ τὰ πακέτα ασκήσεων ποὺ θὰ παρουσιαστοῦν κατὰ τὴν διάρκεια τοῦ μαθήματος δὲν θὰ μπορέσουν νὰ διεκδικήσουν καμμιὰ ἀπὸ τὶς 3 μονάδες. Τὸ ποσοστὸ τῶν 3 μονάδων ποὺ θὰ ἀνατεθεῖ σὲ κάθε φοιτητή/ρια θὰ ἐξαρτηθεῖ ἀπὸ τὴν ποιότητα/ποσότητα τῶν ἀπαντήσεων ποὺ θὰ ὑποβάλει ἡ ὁμάδα του καὶ ἀπὸ τὴν ποιότητα τῶν παρουσιάσεών του.

---

# 1 Χρωματισμοί κορυφῶν καὶ ἀκμῶν

1.1 Δεῖξτε πῶς προκύπτει ἡ εἰκασία τοῦ Hadwiger γιὰ τὴν περίπτωση $k=5$ (εἰκασία 8.30 τῶν σημειώσεων) ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν 4 χρωμάτων καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Wagner (Θεώρημα 8.27 τῶν σημειώσεων).

1.2 Ἕνα γράφημα καλεῖται $k$-*χρωματικά κρίσιμο* ἄν ἡ ἀφαίρεση ἀπὸ αὐτὸ ὁποιασδήποτε ἀκμῆς του δημιουργεῖ ἕνα $(k-1)$-χρωματίσιμο γράφημα. Δεῖξτε ὅτι ἄν τὸ $G$ εἶναι συνεκτικὸ καὶ $k$-χρωματικά κρίσιμο τότε $\delta(G)\geq k-1$.

1.3 Δεῖξτε ὅτι για κάθε $k\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$, κάθε γράφημα $G$ ὅπου $\chi(G)\geq k$ περιέχει διμερὲς ὑπογράφημα μὲ $\binom{k}{2}/2$ ἀκμές.

1.4 Ἄν ἡ εἰκασία τοῦ Hadwiger ἰσχύει γιὰ $k$, τότε ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε $k'\in[k]$.

1.5 Ἕνα γράφημα εἶναι 4-χρωματίσιμο ἄνν εἶναι ἡ ἕνωση δύο διμερῶν γραφημάτων.

1.6 Ἔστω $G$ γράφημα ὅπου $\Delta(G)\leq 3$. Δεῖξτε ὅτι τὸ $G$ εἶναι 4-ἀκμοχρωματίσιμο.

1.7 Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $c$ τέτοιο ὥστε κἀθε ἕνωση δύο ἐπίπεδων γραφημάτων νὰ ἔχει χρωματικό ἀριθμό τὸ πολὺ $c$.

# 2 Διαπεράσεις

2.1 ($\star$) Γιὰ ποιὰ $k$ και $l$ τὸ γράφημα $G_{k,l}=P_l^{[k]}$ εἶναι Χαμιλτονιανὸ;

2.2 Σύμφωνα μὲ τὸ Θεώρημα του Smith, σὲ ἕνα 3-κανονικὸ γράφημα $G$, κάθε ἀκμὴ ἀνήκει σὲ ἕνα ἄρτιο πλῆθος Χαμιλτονιανῶν κύκλων του $G$. Χρησιμοποιῆστε αὐτὸ τὸ θεώρημα γιὰ να δείξετε ὅτι ἄν ἕνα 3-κανονικὸ γράφημα $G$ εἶναι Χαμιλτονιανὸ, τότε θὰ περιέχει τουλάχιστον 3 Χαμιλτονιανοὺς κύκλους.

2.3 Κάθε Χαμιλτονιανὸ 3-κανονικὸ γράφημα εἶναι 3-ἀκμοχρωματίσιμο.

2.4 Ἄν τὸ $r\geq 3$ εἶναι πρῶτος, τότε τὸ $K_r$ ἔχει $k=(r-1)/2$ Χαμιλτονιανοὺς κύκλους $C_1,\dots,C_k$ τέτοιους ὥστε τὸ $\{E(C_1),\dots,E(C_k)\}$ νὰ εἶναι διαμέριση τοῦ $E(K_r)$. Εἶναι ἀπαραίτητο τὸ $r$ νὰ εἶναι πρῶτος;

2.5 Ἄν ἕνα γράφημα εἶναι διμερὲς καὶ Χαμιλτονιανὸ, τὸτε τὰ δύο μέρη του θὰ ἔχουν τὸν ἴδιο ἀριθμὸ κορυφῶν.

2.6 Ἕνα ἐπίπεδο γράφημα εἶναι διμερὲς ἄν καὶ μόνο ἄν τὸ δυϊκὸ του εἶναι γράφημα Euler.

2.7 ($\star$) Ἔστω $G$ συνεκτικὸ γράφημα τέτοιο ὥστε τὸ συμπλήρωμά του νὰ εἶναι ἀτρίγωνο. Δεῖξτε ὅτι τὸ $G$ ἔχει Χαμιλτονιανὸ μονοπάτι.

2.8 Σὲ κάθε συνεκτικὸ γράφημα ὑπάρχει περιήγηση ἡ ὁποῖα νὰ περνάει ἀπὸ κάθε ἀκμή ἀκριβῶς 2 φορὲς.

2.9 ($\star$) Ἔστω $G$ 3-κανονικὸ γράφημα ποὺ εἶναι μοναδικὰ 3-ἀκμικὰ χρωματίσιμο (κάθε 3-ἀκμικὸς του χρωματισμὸς ὁρίζει τὴν ἴδια διαμέριση τοῦ $E(G)$). Δεῖξτε ὅτι τὸ $G$ εἶναι Χαμιλτονιανό.

2.10 ($\star$) Ἂν τὸ γράφημα $G$ εἶναι Χαμιλτονιανό καὶ $S \subseteq V(G)$, τότε τὸ πλῆθος τῶν συνεκτικῶν συνιστωσῶν του $G \setminus S$ εἶναι τὸ πολύ $|S|$.

2.11 ($\star$) Ἕνα τριγωνοποιημένο ἐπίπεδο γράφημα ἔχει χρωματικὸ ἀριθμὸ 3 ἄν καὶ μόνο ἄν εἶναι γράφημα Euler.

# 3 Επίπεδα γραφήματα

3.1 Χρησιμοποιῆστε το θεώρημα τοῦ Nash-Williams γιὰ νὰ δείξετε ὅτι κάθε ἐπίπεδο γράφημα $G$ εἶναι ἡ ἕνωση 3 δασῶν.

3.2 Ἕνα πολύεδρο ἔχει ὄψεις ποὺ εἶναι τρίγωνα καὶ πεντάγωνα, ἔτσι ὥστε κάθε τρίγωνο νὰ περιβάλεται ἀπὸ πεντάγωνα καὶ κάθε πεντάγωνο νὰ περιβάλεται ἀπὸ τρίγωνα. Ἔστω ἐπίσης ὅτι κάθε κορυφὴ τοῦ πολυέδρου γειτονεύει μὲ ακριβῶς $r$ κορυφές. Δεῖξτε ὅτι $\frac{1}{m} = \frac{1}{r} - \frac{7}{30}$ ὅπου $m$ το πλήθος τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου. Δεῖξτε ἐπίσης ὅτι $r = 4$ καὶ ζωγραφίστε ἕνα τέτοιο πολύεδρο.

3.3 Γενικεῦστε τὸν τύπο τοῦ Euler γιὰ γενικὰ (ὄχι ἀπαραίτητα συνεκτικὰ) έπίπεδα γραφήματα.

3.4 Ἕνα ἐνεπίπεδο γράφημα λέγεται *αὐτοδυϊκό* ἄν εἶναι ἰσόμορφο μὲ τὸ δυϊκὸ του. Δεῖξτε ὅτι κάθε αὐτοδυϊκό γράφημα μὲ $n$ κορυφὲς ἔχει ἀκριβῶς $2(n-1)$ ἀκμές. Κατασκευάστε γιὰ κάθε $n \geq 4$ ἕνα αὐτοδυϊκό γράφημα μὲ $n$ κορυφές.

3.5 Δεῖξτε ὅτι κάθε ἐξωεπίπεδο γράφημα στὸ ὁποῖο δὲν μποροῦμε νὰ προσθέσουμε ἀκμὲς ἔτσι ὥστε νὰ συνεχίσει νὰ εἶναι ἐξωεπίπεδο, εἶναι Χαμιλτονιανὸ.

3.6 Γιὰ κάθε δισυνεκτικὸ ἐξωεπίπεδο γράφημα $G$ μὲ $n$ κορυφὲς, ἰσχύει ότι $\frac{1}{2}n \leq \mathbf{vc}(G) \leq \frac{3}{4}n$.

3.7 ($\star$) Κάθε μή-ἐπίπεδο 3-συνεκτικὸ γράφημα μὲ τουλάχιστον 6 κορυφὲς περιέχει τὸ $K_{3,3}$ ὥς ἐλάσσον.

# 4 Τέλεια γραφήματα

4.1 Δεῖξτε ὅτι τὸ συμπλήρωμα ἑνὸς κύβου (ὁποιασδήποτε διάστασης) εἶναι τέλειο.

4.2 Καλοῦμε $(x, y)$-*τοροειδὴ σχάρα* τὸ γράφημα $H_{x,y}$ ὅπου

$$V(H_{x,y}) = \{0, \ldots, x-1\} \times \{0, y-1\}$$

καὶ

$$E(H_{x,y}) = \{\{(a,b),(c,d)\} \mid |a-c \mod x| + |b-d \mod y| = 1\}.$$

Βρέστε για ποιὲς τιμὲς τῶν $x$ καὶ $y$ τὸ $H_{x,y}$ εἶναι τέλειο γράφημα.

4.3 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι γιὰ κάθε θετικό ἀκέραιο $k$ ἰσχύει ὅτι ἕνα γράφημα $G$ εἶναι τέλειο ἄν καὶ μόνο ἄν τὸ $G^{(k)}$ εἶναι τέλειο.

# 5 Μερικὲς διατάξεις

5.1 Φτιάξτε ἕνα σύνολο γραφημάτων ποὺ νὰ ἀποτελεῖ ἄπειρη ἀντιαλυσίδα γιὰ ὅσο τὸ δυνατὸν περισσότερες σχέσεις διάταξης ἀπὸ τὶς: *ὑπογραφήματα, ἐναγόμενα ὑπογραφήματα, τοπολογικὰ ἐλάσσονα, ἐναγόμενα τοπολογικὰ ἐλάσσονα, ἐλάσσονα, ἐναγόμενα ἐλάσονα, συνθλίψεις, ἐμβυθίσεις, ἐναγόμενες εμβυθίσεις*.

5.2 Δεῖξτε ὅτι τὰ χορδικὰ γραφήματα εἶναι κλειστὰ ὥς πρὸς συνθλίψεις.

5.3 Ἔστω $\mathcal{C}$ ἀντιαλυσίδα γιὰ τὴν σχέση ἐλασσόνων γραφημάτων. Δεῖξτε (χωρῖς νὰ χρησιμοποιήσετε τὸ Θεώρημα τῶν Robertson καὶ Seymour) ὅτι ὑπάρχει $c$ τέτοιο ὥστε $\forall G \in \mathcal{C}\ \chi(G) \leq c$.

5.4 Ἔστω $Z_k$ το γράφημα ποὺ προκύπτει ἄν ἀντικαταστήσουμε κὰθε ἀκμὴ τοῦ $K_{1,k}$ μὲ μιὰ ἀκμὴ πολλαπλότητας $k$. Ἔστω $\mathcal{S}$ ἀντιαλυσίδα γιὰ τὴν σχέση ἐμβυθίσεων γραφημάτων. Δεῖξτε ὅτι ὑπάρχει $k$ τέτοιο ὥστε τὸ $Z_k$ δὲν περιέχεται ὡς ἐμβύθυνση σὲ κανένα ἀπὸ τὰ γραφήματα στὴν $\mathcal{S}$.

5.5 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $k$, ἡ κλάση τῶν γραφημάτων μὲ $\mathbf{vc}(G) \leq k$ εἶναι καλῶς μερικῶς διατεταγμένη ὥς πρὸς ὑπογραφήματα.

5.6 ($\star$) Δεῖξτε ὅτι, γιὰ κάθε $k$, κάθε γράφημα στὸ σύνολο παρεμπόδοσης ἐλασσόνων τῆς κλάσης

$$\mathcal{C}_k = \{G \mid \mathbf{vc}(G) \leq k\}$$

ἔχει $O(k^2)$ κορυφές.

5.7 ($\star$) Ἔστω $\mathcal{U}_r$ τὸ σύνολο παρεμπόδισης ἐλασσόνων γιὰ τὴν κλάση γραφημάτων μὲ προσανατολίσιμο γένος το πολύ $r$. Δεῖξτε ὅτι δὲν ὑπάρχει πολυώνυμο $p$ τέτοιο ὥστε $|\mathcal{U}_r| \leq p(r)$.

# 6 $k$-δέντρα

6.1 Ἕνα γράφημα εἶναι $k$-δέντρο ἄν

- εἶναι τὸ $K_{k+1}$
- Μπορεὶ νὰ φτιαχτεὶ ἀπὸ ἕνα $k$-δέντρο $G$ ἄν προσθέσουμε μιὰ καινούρια κορυφή στὸ $G$ καὶ τῆν συνεδέσουμε μὲ ὅλες τὶς κορυφὲς κάποιας $k$-κλίκας τοῦ $G$.

Δεῖξτε τά παρακάτω:

1. ἕνα $k$-δέντρο εἶναι ἐπίπεδο ἄν $k < 3$.
2. ἕνα $k$-δέντρο δὲν εἶναι ἐπίπεδο ἄν $k > 3$.
3. ἕνα 3-δέντρο εἶναι ἐπίπεδο ἄν καὶ μόνο ἄν δὲν περιέχει το γράφημα $Q$ ὥς σύνθλιψη. (Τὸ γράφημα $Q$ εἶναι τὸ γράφημα ποὺ προκύπτει ἀπὸ το $K_6$ ἄν ἀφαιρέσουμε τις ἀκμές ἑνὸς τριγώνου του.)

6.2 Καλοῦμε *μερικό $k$-δέντρο* κάθε ὑπογράφημα ἑνός $k$-δέντρου. Δεῖξτε ὅτι τὸ $K_{r,r}$ εἶναι μερικό $r$-δέντρο ἀλλὰ δὲν εἶναι μέρικὸ $(r-1)$-δέντρο.

6.3 Ἄν ἕνα χορδικὸ γράφημα εἶναι ἐξωεπίπεδο, τότε ϑὰ εἶναι καὶ μερικὸ 2-δέντρο.

6.4 ($\star$) Ἄν ἕνα χορδικὸ γράφημα εἶναι ἐπίπεδο, τότε ϑὰ εἶναι καὶ μερικὸ 3-δέντρο.

6.5 Δεῖξτε ὅτι ὁ τρισδιάστατος ὑπερκύβος εἶναι μερικό 3-δέντρο.

6.6 ($\star$) Τὰ γραφήματα τομῶν τῶν ὑποδέντρων δέντρων εἶναι τὰ γραφήματα χωρῖς ἐναγόμενους κύκλους μήκους μεγαλύτερου τοῦ 3.

# 7 Ἄπειρα γραφήματα

7.1 Ἔστω $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $t \in (0,2)$ και $C_r = \{\mathbf{p} = \{x_1, \ldots, x_r\} \in \mathbb{R}^r \mid x_1^2 + \ldots + x_r^2 = 1\}$. Ἔστω ἐπίσης τὸ ἄπειρο γράφημα $G_r^t$ ποὺ ἔχει ὥς σύνολο κορυφῶν τὸ $C_r$ καὶ ὅπου δύο σημεῖα συνδέονται μὲ μιὰ ἀκμὴ ἄνν ἡ Εὐκλείδεια ἀπόστασή τους εἶναι *ἀκριβῶς* $t$. Ἔστω τέλος τὸ σύνολο:

$$H_r = \{t \mid G_r^t \text{ ἔχει ἄπειρες συνεκτικὲς συνιστῶσες}\}.$$

Δεῖξτε ὅτι $|H_2| = \aleph_0$. Ἰσχύει τὸ ἴδιο γιὰ $r \geq 3$;

7.2 Ἔστω $G_r$ τὸ (ἄπειρο) γράφημα μὲ $V(G_r) = \mathbb{R}^r$ καὶ ὅπου δύο κορυφές ἑνώνονται ἄν ἡ μεταξὺ τους Εὐκλείδια ἀπόσταση εἶναι 1. Δεῖξτε ὅτι $3 \leq \chi(G_2) \leq 7$. Βρείτε στὴν βιβλιογραφία τὶς καλύτερες ἐκτιμήσεις τοῦ $\chi(G_r)$ γιὰ $r > 2$.

7.3 ($\star$) Χρησιμοποιῶντας τὸ λῆμμα τοῦ Kőnig, ἀποδεῖξτε ὅτι ἄν τὸ $G$ εἶναι γράφημα ὅπου $|V(G)| = \aleph_0$ καὶ κάθε ὑπογράφημά του εἶναι 3-χρωματίσιμο, τὸτε καὶ τὸ $G$ εἶναι 3-χρωματίσιμο.

## 8 Κανονικὰ γραφήματα καὶ Ταιριάσματα

8.1 ($\star$) Κάθε διμμερές $k$-κανονικὸ γράφημα ὅπου $k \geq 1$ ἔχει τέλειο ταίριασμα.

8.2 ($\star\star$) Δεῖξτε ὅτι κὰθε συνεκτικὸ γράφημα μὲ ἄρτιο ἀριθμὸ ἀκμῶν μπορεῖ νὰ προσανατολιστεῖ ἔτσι ὥστε κάθε κορυφὴ νὰ ἔχει ἄρτιο ἐξώβαθμο. Χρησιμοποιῶντας αὐτὸ δεῖξτε ὅτι κάθε 3-κανονικὸ γράφημα μὲ $4k$ κορυφὲς περιέχει ἀνεξάρτητο σύνολο μὲ $k$ κορυφὲς τὸ ὁποῖο ἂν ἀφαιρεθεῖ ἀπὸ τὸ $G$ δημιουργεῖ γράφημα τοῦ ὁποίου ὅλες οἱ συνεκτικὲς συνιστῶσες εἶναι μονοκυκλικές.

8.3 Ἕνα κανονικὸ διμερές γράφημα δὲν ἔχει ποτὲ ἀρθρικὲς κορυφές.

8.4 ($\star$) Βρείτε ἕνα γράφημα ποὺ νὰ εἶναι ἀκμομεταβατικὸ ἀλλὰ ὄχι κορυφομεταβατικό καὶ ἕνα γράφημα ποὺ να εἶναι κορυφομεταβατικὸ ἀλλὰ ὄχι ακμομεταβατικό.

8.5 Κάθε 3-κανονικὸ γράφημα χωρίς γέφυρες $G$ περιέχει ταίριασμα μεγέθους $\frac{1}{3}m(G)$.

8.6 Ἔστω $G$ γράφημα, $M$ μεγιστικὸ ταίριασμα τοῦ $G$ καὶ $M'$ μέγιστο ταίριασμα τοῦ $G$. Δεῖξτε ὅτι $|M| \geq |M'|/2$.

8.7 $\delta(G) \geq n(G)/2 \Rightarrow \mu(G) \geq \lfloor n(G)/2 \rfloor$.

## 9 Διάφορα

9.1 Δεῖξτε ὅτι ὁ αριθμὸς Ramsey $r(4,3)$ εἶναι ἴσος μὲ 9. Βρείτε στὴν βιβλιογραφία τὶς καλύτερες ἐκτιμήσεις τοῦ $r(4,r)$ γιὰ $r > 3$.

9.2 Ἔστω οἱ ἑξῆς κλάσεις γραφημάτων.

$\mathcal{G}_1 = \{G \mid$ Κάθε συνεκτικὸ ὑπογράφημα τοῦ $G$ εἶναι ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $G\}$.

$\mathcal{G}_2 = \{G \mid$ Κάθε ἐναγόμενο ὑπογράφημα τοῦ $G$ ἔχει κορυφὴ βαθμοῦ τὸ πολὺ $1\}$.

Δεῖξτε ὅτι $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_2$.

9.3 Ἕνα γράφημα $G$ εἶναι διμερὲς ἄνν γιὰ κάθε ὑπογράφημά $H$ τοῦ $G$ ἰσχύει ὅτι $\alpha(H) \geq n(H)/2$.

9.4 Δεῖξτε ὅτι για κάθε $k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, ἕνα γράφημα εἴτε θὰ περιέχει $k$ διακεκριμένα τρίγωνα ἤ θὰ περιέχει ἕνα σύνολο $S$ μὲ $3k-3$ κορυφές τέτοιες ὥστε τὸ $G \setminus S$ δεν περιέχει κανένα τρίγωνο.

9.5 Ἔστω $G$ γράφημα $n$ κορυφών χωρίς γέφυρες ὅπου $C_4 \not\leq_{\tau\pi} G$ καὶ $K_{1,5} \not\leq_{\upsilon\pi} G$. Δεῖξτε ὅτι τὸ $G$ εἶναι μοναδικὸ γιὰ κάθε $n$ καὶ ὑπολογίστε τὴν διάμετρο καὶ τὸ μῆκος τοῦ μέγιστου μονοπατιοῦ του ὥς συνάρτηση τοῦ $n$.

9.6 Δεῖξτε ὅτι τὸ $L(K_{3,3})$ εἶναι αὐτοσυμπληρωματκό.

9.7 ($\star$) Ποιὰ εἶναι ἡ συνεκτικότητα τοῦ ὑπερκύβου $r$ διαστάσεων;

9.8 ($\star$) Ἄν γιὰ κάποιο γράφημα $G$ ἰσχύει ὅτι $m(G) > n(G) + 3$ τότε τὸ $G$ περιέχει δύο ἀκμοδιακεκριμένους κύκλους.

9.9 ($\star$) Κάθε 3-συνεκτικὸ μὴ διμερὲς γράφημα ἔχει τουλάχιστον 4 περιττοὺς κύκλους.

---

Τέλος τρίτου (καὶ τελευταίου) πακέτου ἀσκήσεων. Καλὴ διασκέδαση!