ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΛΟΓΙΚΗ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ 2

ΑΣΚΗΣΗ 1. Οι σύνδεσμοι δύο θέσεων είναι 16 τον αριθμό. Απ' αυτούς μόνον οι 10 είναι πραγματικά διπλοί. Οι υπόλοιποι είναι είτε ουσιωδώς μονοί (προβολές, $\neg A$, $\neg B$) ή 0 θέσεων (σταθεροί). Από τους 10 ξέρουμε ότι οι $|$ και $\downarrow$ αποτελούν από μόνοι τους (και μόνον αυτοί) επαρκή σύνολα. Από τους 8 που μας μένουν μπορούμε να σχηματίσουμε 28 ζευγάρια. Η ερώτηση είναι: πόσα απ' αυτά τα ζευγάρια αποτελούν επαρκή σύνολα;
(Υπόδειξη: Αποδείξτε ότι $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftarrow, \leftrightarrow\}$ και $\{\wedge, \vee, <, >, +\}$ δεν είναι επαρκή σύνολα. Αρα αποκλείονται 19 ζεύγη! Μετά αποδείξτε ότι $\{\rightarrow, \mathcal{F}\}$, $\{\leftarrow, \mathcal{F}\}$ είναι επαρκή και άρα συμπεράνετε ότι $\{\rightarrow, <\}$, $\{\rightarrow, >\}$, $\{\rightarrow, +\}$, $\{\leftarrow, <\}$, $\{\leftarrow, >\}$, $\{\leftarrow, +\}$ είναι επαρκή. Κατόπιν αποδείξτε ότι $\{<, \mathcal{T}\}$, $\{>, \mathcal{T}\}$ είναι επαρκή και συμπεράνετε ότι $\{<, \leftrightarrow\}$, $\{>, \leftrightarrow\}$ είναι επαρκή. (Εδώ $\varphi \rightarrow \psi \models\,\dashv \mathcal{T} > (\varphi > \psi)$ και $\{\rightarrow, <\}$ επαρκές. Επίσης $\mathcal{T} \models\,\dashv (A \leftrightarrow A)$.) Αρα μας μένει μόνο ένα ζευγάρι να ασχοληθούμε: το $\{+, \leftrightarrow\}$. Αποδείξτε τώρα ότι:
Πρόταση Το $\{\neg, +, \leftrightarrow\}$ δεν είναι επαρκές.) (3,0 μον.)

ΑΣΚΗΣΗ 2. Έστω Σ_1 και Σ_2 (πιθανώς άπειρα) σύνολα προτασιακών τύπων έτσι ώστε $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ δεν είναι ικανοποιήσιμο. Αποδείξτε ότι υπάρχει προτασιακός τύπος ϕ ώστε $\Sigma_1 \models \phi$ και $\Sigma_2 \models \neg\phi$. (1,5 μον.)

ΑΣΚΗΣΗ 3. Έστω Σ σύνολο προτάσεων ώστε για κάθε απονομή V υπάρχει κάποιος $\phi \in \Sigma$ ώστε $\overline{V}(\phi) = T$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{A_1, \ldots, A_n\} \subseteq \Sigma$ έτσι ώστε ο προτασιακός τύπος $A_1 \vee A_2 \vee \cdots \vee A_n$ είναι ταυτολογία. (1,5 μον.)

ΑΣΚΗΣΗ 4. Ορίζουμε μια σχέση $\prec$ στο σύνολο των προτασιακών τύπων ως εξής: $\varphi \prec \psi$ ανν $\models \varphi \rightarrow \psi$ και $\not\models \psi \rightarrow \varphi$.

α) Δείξτε ότι για τυχόντες προτασιακούς τύπους φ, ψ, αν $\varphi \prec \psi$, τότε υπάρχει προτασιακός τύπος χ τέτοιος που $\varphi \prec \chi \prec \psi$.

β) Βρείτε προτασιακούς τύπους $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ τέτοιους που $\varphi_1 \prec \varphi_2 \prec \varphi_3 \ldots$
(1,5 μον.)

ΑΣΚΗΣΗ 5. Οι *υποτύποι* ενός προτασιακού τύπου ϕ είναι όλοι οι προτασιακοί τύποι (συμπεριλαμβανομένου του ίδιου του ϕ) που «σχηματίζονται» με βάση τον επαγωγικό ορισμό ώστε να δημιουργηθεί ο τύπος ϕ π.χ. οι ϕ_1 και ϕ_2 είναι υποτύποι του $(\phi_1 \wedge \phi_2)$ κ.λ.π. Δείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε προτασιακό τύπο φ, αν στο φ υπάρχουν n εμφανίσεις συνδέσμων, τότε υπάρχουν το πολύ $2n + 1$ υποτύποι του φ. (1 μον.)

ΑΣΚΗΣΗ 6. Αποδείξτε ότι $|$ και $\downarrow$ είναι οι μόνοι σύνδεσμοι δύο θέσεων που είναι πλήρεις από μόνοι τους. (1,5 μον.)