Блок 1

Определение линейного оператора.

Определение 1.1. ***Линейным оператором*** в векторном пространстве V (***эндоморфизмом*** пространства V) называется отображение $\mathcal{A}\colon V \to V$, удовлетворяющее условиям:

1. $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$ для любых $x, y \in V$;
2. $\mathcal{A}(\lambda x) = \lambda \mathcal{A}x$ для любых $x \in V$, $\lambda \in F$.

Множество всех линейных операторов в пространстве V будем обозначать $\mathrm{End}(V)$.

Перечислите операции в множестве End(X).

Операции в множестве $\mathrm{End}(X)$ включают:

1. **Сложение операторов**: Для любых двух операторов $A, B \in \mathrm{End}(X)$, их сумма $A + B$ определяется как оператор, который каждому вектору $x \in X$ ставит в соответствие вектор $(A+B)(x) = A(x) + B(x)$.
2. **Умножение оператора на скаляр**: Для любого скаляра λ из поля и оператора $A \in \mathrm{End}(X)$, произведение λA — это оператор, который каждому вектору x ставит в соответствие $(\lambda A)(x) = \lambda(A(x))$.
3. **Умножение операторов (композиция)**: Для любых двух операторов $A, B \in \mathrm{End}(X)$, их произведение AB определяется как композиция $A \circ B$, где $(AB)(x) = A(B(x))$ для всех $x \in X$. Эта операция также известна как композиция операторов.
4. **Транспонирование**: Если рассматривать дополнительные структуры, можно ввести операцию транспонирования, где транспонированный оператор A^T определяется через его действие на двойственном пространстве.
5. **Обращение оператора**: Если оператор A обратим, то можно определить обратный оператор A^{-1}, для которого $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где I — это тождественный оператор.

Определение образа оператора и ядра

Определение 1.2. Для линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется его ***образ*** $\mathrm{Im}\,(\mathcal{A}) = \{\mathcal{A}x \mid x \in V\}$ и ***ядро*** $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}) = \{x \in V \mid \mathcal{A}x = 0\}$.

Сформулируйте теорему о ядре и образе.

Теорема 1.1. $\dim \operatorname{Im} \mathcal{A} + \dim \operatorname{Ker} \mathcal{A} = \dim V.$

При каком(их) условии(ях) A является изоморфизмом?

Из определения изоморфизма векторных пространств вытекает, что отображение $\mathcal{A}$ из V в себя является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}$ — биективный линейный оператор.

Критерий изоморфности на языке линейных операторов

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор в векторном пространстве V. Следующие условия эквивалентны:

1) $\mathcal{A}$ — *изоморфизм V на себя;*
2) $\operatorname{Im} \mathcal{A} = V$;
2') $r(\mathcal{A}) = \dim V$;
3) $\operatorname{Ker} \mathcal{A} = \{\mathbf{0}\}$;
3') $d(\mathcal{A}) = 0$.

Блок 2

Определение матрицы линейного оператора.

Определение 2.1. ***Матрицей линейного оператора*** $\mathcal{A}$ в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется матрица $A = (a_{ij})$, определяемая из равенств $\mathcal{A}e_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$.

Чему равна размерность пространства End(X)?

Замечание 2.1. Если $\dim V = n$, то размерность $\mathrm{End(V)}$ как векторного пространства равна n^2.

Сформулируйте закон преобразования матрицы оператора при смене базиса.

Если A — матрица линейного оператора в некотором базисе $\mathcal{B}$, и мы хотим найти матрицу A' того же оператора в другом базисе $\mathcal{B}'$, то для этого нам потребуется матрица перехода P от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$. Матрица перехода P составляется из координат векторов нового базиса $\mathcal{B}'$, выраженных через старый базис $\mathcal{B}$. Тогда матрица оператора в новом базисе A' вычисляется по формуле:

$$A' = P^{-1}AP$$

где:

- A — исходная матрица оператора в базисе $\mathcal{B}$,
- P — матрица перехода от базиса $\mathcal{B}$ к базису $\mathcal{B}'$,
- P^{-1} — обратная матрица к P.

Какой оператор называют невырожденным?

Оператор называют невырожденным, если его матрица имеет ненулевой определитель, то есть является обратимой.

Определение инвариантного подпространства.

Определение 3.1. Подпространство $U \leqslant V$ называется ***инвариантным*** относительно оператора $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$-инвариантным), если $\mathcal{A}U \leqslant U$, то есть для любого $x \in U$ его образ $\mathcal{A}x \in U$.

Определение линейной независимости подпространств.

Определение 6.1. Подпространства $V_1, \ldots, V_k$ называются ***линейной независимыми***, если равенства $v_1 + \ldots + v_k = 0$, $v_k \in V_k$ следует, что $v_1 = \ldots = v_k = 0$.

Перечислите свойства проекторов.

Проекторы в линейной алгебре — это специальные виды линейных операторов, обладающие следующими ключевыми свойствами:

1. **Идемпотентность**: Проектор P удовлетворяет условию $P^2 = P$. Это означает, что повторное применение проектора не изменяет результат первого применения.
2. **Самосопряженность (для ортогональных проекторов)**: Проектор P называется ортогональным, если он самосопряжён, то есть $P = P^*$, где P^* обозначает сопряженный оператор. Это свойство означает, что проекция сохраняет углы и длины в евклидовом пространстве.
3. **Разложение единицы**: Для каждого проектора P, существует дополнительный проектор $Q = I - P$, где I — тождественный оператор. Проектор Q проецирует на дополнение подпространства, на которое проецирует P, таким образом, $P + Q = I$.
4. **Ранг плюс нулевое пространство**: Размерность (ранг) пространства, на которое проецирует P, плюс размерность ядра P (пространства, которое отображается в ноль) равняется размерности всего пространства.
5. **Инвариантные подпространства**: Подпространство, на которое проецирует P, и его дополнение (ядро $I - P$) являются инвариантными относительно P.
6. **Связь с собственными значениями**: Собственные значения проектора могут быть только 0 и 1. Векторы, отображаемые в ноль, соответствуют собственному значению 0, а векторы, которые проецируются без изменений, соответствуют собственному значению 1.

Блок 3

Определение собственного вектора и значения

Определение 4.1. Ненулевой вектор $x \in V$ называется ***собственным вектором*** оператора $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}x = \lambda x$. Число $\lambda \in F$ называется при этом ***собственным значением*** (***собственным числом***) оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному вектору x.

Определение собственного подпространства.

Определение 4.2. Подпространство $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$ называется ***собственным подпространством*** оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ и обозначается V_λ. Помимо собственных векторов, оно содержит нулевой.

Определение геометрической кратности.

Определение 4.3. ***Геометрической кратностью*** $g(\lambda)$ собственного значения λ называется размерность соответствующего ему собственного подпространства: $g(\lambda) = \dim V_\lambda$.

Определение корневого вектора высоты k.

Определение 7.1. Вектор $x \in V$ называется ***корневым вектором*** оператора $\mathcal{A}$, отвечающим собственному значению $\lambda \in F$, если существует такое целое неотрицательное число k, что $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^k x = 0$. Наименьшее такое k называется ***высотой*** корневого вектора x.

Какую высоту имеет собственный вектор?

Собственный вектор имеет высоту 1, так как для собственного вектора x оператора A, соответствующего собственному значению λ, выполняется условие $(A - \lambda E)x = 0$, что соответствует определению корневого вектора высоты 1 [”].

Определение корневого подпространства.

Корневые векторы, отвечающие собственному значению λ, высоты $\leqslant k$ — это $\operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k \leqslant V$. Возникает цепочка подпространств

$$V_\lambda = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \leqslant \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^2 \leqslant \ldots \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^k \leqslant \ldots \leqslant V^\lambda,$$

где V^λ={все корневые векторы с собственным значение λ} — ***корневое подпространство*** с собственным значением λ:

$$V^\lambda = \bigcup_{i=1}^{\infty} \operatorname{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})^i.$$

Перечислите свойства корневых подпространств.

Теорема 7.1. (***свойства корневых подпространств***)
1) V^λ $\mathcal{A}$-*инвариантно;*
2) $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda} = \mathcal{N}$ — ***нильпотентный*** *оператор, то есть существует такое неотрицательное целое* m, *то* $\mathcal{N}^m = \mathcal{O}$*;*
3) $(\mathcal{A}-\mu\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ *невырожден при* $\mu \neq \lambda$*;*
4) $\dim V^\lambda = m(\lambda)$ (*геометрический смысл алгебраической кратности*).

Блок 4

1) Как находится характеристический полином?(GG T_T)

Из замечания 4.1 следует, что для нахождения собственных подпространств удобнее сначала найти собственные значения из условия $\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = 0$. Пусть A — матрица оператора $\mathcal{A}$ в каком-либо базисе, тогда

$$\det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix}.$$

Определение 5.1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}(t) = (-1)^t \det(\mathcal{A} - t\mathcal{E}) = \det(t\mathcal{E} - \mathcal{A})$ называется ***характеристическим многочленом*** оператора $\mathcal{A}$.

Корни характеристического многочлена называются ***спектром оператора*** $\mathcal{A}$.

Если из контекста ясно, о каком операторе идёт речь, индекс $\mathcal{A}$ будем опускать.

2) Определение алгебраической кратности.

Определение 5.2. ***Алгебраической кратностью*** $m(\lambda)$ собственного значения λ называется его кратность как корня характеристического многочлена.

3) Определение оператора с простым спектром.

Оператор с простым спектром — это линейный оператор, у которого все собственные значения различны, и каждому собственному значению соответствует ровно один собственный вектор (с точностью до умножения на скаляр). Это означает, что алгебраическая и геометрическая кратности каждого собственного значения равны единице.

4) Как выглядит матрица оператора с простым спектром?

Матрица линейного оператора с простым спектром (или, как говорят, с простым собственным спектром) — это такая матрица, у которой все собственные значения различны и, следовательно, все собственные векторы линейно независимы. Если матрица диагонализируема и имеет простой спектр, её можно представить в диагональной форме в подходящем базисе.

Общий вид такой матрицы в базисе из её собственных векторов выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

5) Определение диагонализуемого оператора (оператора скалярного типа).

Определение 6.2. Линейный оператор в конечномерном векторном пространстве называется ***диагонализируемым***, если существует базис, в котором матрицам этого оператора имеет диагональный вид.

6) Что такое спектральное разложение диагонализуемого оператора?

Пусть оператор $\mathcal{A}$ диагонализируем и $V = \bigoplus\limits_{i=1}^{k} V_{\lambda_i}$. Рассмотрим проектор $\mathcal{P}_i$ на подпространство V_{λ_i} параллельно прямой сумме оставшихся подпространств. Тогда $\mathcal{P}_i^2 = \mathcal{P}_i$, $\mathcal{P}_i\mathcal{P}_j = \mathcal{O}$ при $i \neq j$ и $\sum\limits_{i=1}^{k} \mathcal{P}_i = \mathcal{E}$. Легко проверяется, что оператор $\mathcal{A}$ действует на любой вектор так же, как оператор $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$. Выражение $\mathcal{A} = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i \mathcal{P}_i$ называется ***спектральным разложением*** оператора $\mathcal{A}$.

7) Сформулируйте критерий диагонализуемости.

Теорема 6.2. (***критерий диагонализируемости***) *Оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия:*
1) *Характеристический многочлен раскладывается на линейные сомножители* (*то есть все его корни лежат в поле* F)*;*
2) *Геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.*

Блок 5

1) Определение нильпотентного оператора

Определение

Оператор $\mathcal{A}$ называется нильпотентным, если $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$ для некоторого натурального k. Минимальное число k, для которого $\mathcal{A}^k = \mathcal{O}$, называется степенью нильпотентности оператора $\mathcal{A}$.

2) Определение циклического подпространства

Циклическое подпространство — это подпространство векторного пространства, которое порождается одним вектором. Если v — вектор из векторного пространства V над полем F, то циклическое подпространство, порождённое v, обозначается как $\langle v \rangle$ и состоит из всех скалярных кратных v. То есть $\langle v \rangle = \{\lambda v \mid \lambda \in F\}$. Это множество является подпространством V и включает вектор v, нулевой вектор, а также все другие векторы, которые можно получить, умножая v на любой скаляр из F.

3) Что находится в клетках диаграммы Юнга?

В клетках диаграммы Юнга обычно находятся числа или символы, которые представляют элементы конфигурации или структуры, описываемой диаграммой. В контексте различных областей математики и информатики, содержимое клеток может варьироваться:

1. **В теории представлений и алгебре** - диаграммы Юнга используются для представления разбиений чисел. Каждая клетка соответствует части разбиения. Например, разбиение числа 4 как $4 = 3 + 1$ можно представить диаграммой с тремя клетками в первом ряду и одной клеткой во втором ряду.

4) Что находится в столбцах диаграммы Юнга?

разбиений или в теории представлений симметрической группы, то в столбцах диаграммы Юнга традиционно учитывается условие строгого возрастания элементов сверху вниз. Это условие используется, например, при построении стандартных табло Юнга, где каждое число от 1 до n размещается в клетке так, чтобы в каждом столбце числа строго возрастали сверху вниз.

5) Напишите общий вид матрицы жордановой клетки.

Если вернуться к произвольному линейному оператору $\mathcal{A}$, то можно заметить, что на циклическом подпространстве нильпотентного оператора $\mathcal{N} = \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})|_{V^\lambda}$ оператор $\mathcal{A}$ задаётся матрицей

$$J(\lambda) = J(0) + \lambda E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

называемой ***жордановой клеткой*** с собственным значением λ

6) Как выглядит жорданова нормальная форма?

Определение 9.1. ***Жордановой матрицей*** называется блочно-диагональная матрица

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \mathbf{O} \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & J_k \end{pmatrix},$$

где $J_1, J_2, \dots J_k$ — какие-то жордановы клетки.

Жорданова матрица также называется ***жордановой нормальной формой*** (ЖНФ) для оператора $\mathcal{A}$. Верна следующая