Занятие 1
Таблица интегралов. Простейшие приемы интегрирования

I Просматриваем таблицу интегралов

1) $\int \frac{dx}{x^3}$
2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$
3) $\int \frac{dx}{x}$
4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}}$
5) $\int \frac{dx}{x^2+9}$
6) $\int 7^x dx$
7) $\int \sin x dx$
8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x}$

II Линейность неопределенного интеграла

1) $\int \left(3\cos x - 2e^x + 7x - 3\right) dx$
2) $\int x\left(x^3+1\right) dx$
3) $\int \frac{x^2-3x+5}{\sqrt{x}} dx$
4) $\int \frac{2^x+5^x}{10^x} dx$
5) $\int \frac{3+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} dx$

III Использование формул и специальных приемов

1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$
2) $\int \operatorname{tg}^2 x dx$
3) $\int \frac{5+\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$
4) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$
5) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$
6) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$
7) $\int \frac{x-2}{x+3} dx$
8) $\int \frac{4x+1}{x-5} dx$
9) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$

10) $\int \frac{dx}{x^2-6x+11}$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$

IV Почти табличное интегрирование (готовимся к внесению под знак дифференциала)

1) $\int (9x+17)^2\,dx$

2) $\int \sqrt{3x+4}dx$

3) $\int \frac{dx}{8x-1}$

4) $\int 4^{3-5x}\,dx$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$

6) $\int \cos 3x dx$

Занятие 2

Внесение под знак дифференциала

Важно обращать внимание, что внесение под знак дифференциала – это фактически замена переменной

I Вспоминаем прошлое занятие

1) $\int \frac{dx}{(3x+2)^4}$

2) $\int \sqrt[3]{4x-5}dx$

II Увидеть под интегралом функцию и ее производную

1) $\int \sin^3 x \cos x dx$

2) $\int \frac{\sin x dx}{\cos x+1}$

3) $\int \operatorname{ctg} x dx$

4) $\int \frac{2x+3}{\left(x^2+3x-1\right)^4}dx$

5) $\int \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x+7}}dx$

6) $\int \frac{\ln^5 x}{x}dx$

7) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1}dx$

8) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$

9) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$

11) $\int \frac{\sqrt{\ln^7(x+1)}dx}{x+1}$

12) $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$

13) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+9}dx$

14) $\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$

III Не хватает только «минуса»

1) $\int \sqrt[3]{1+\cos x}\sin x dx$

2) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}^3 x}}$

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,e^{\arcsin x}}$

IV Под интегралом функция и почти ее производная (умножение на константу)

1) $\int e^{x^3}x^2 dx$

2) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

3) $\int x^3\sqrt[5]{\left(5x^4-3\right)^7}dx$

4) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{9-2x^3}}$

5) $\int \frac{\left(x+1\right)dx}{x^2+2x+10}$

6) $\int \frac{7^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

7) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^6}}dx$

V «Двухшаговые» размышления

1) $\int e^{\cos 2x}\sin 2x dx$

2) $\int \frac{\arccos^3 2x dx}{\sqrt{1-4x^2}}$

3) $\int \frac{dx}{\left(2x+1\right)\sqrt[3]{\ln^2\left(2x+1\right)}}$

4) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg}^6 3x}dx}{1+9x^2}$

5) $\int \frac{\ln\arcsin x}{\arcsin x\sqrt{1-x^2}}dx$

Занятие 3
Интегрирование по частям

I Интегралы вида $\int P_n\left(x\right)\sin mx dx$, $\int P_n\left(x\right)\cos mx dx$, $\int P_n\left(x\right)e^{ax}dx$, где $P_n\left(x\right)$ многочлен ($u=P_n\left(x\right)$)

1) $\int xe^{-x}dx$

2) $\int x^2\cos x dx$

3) $\int (2x-1)\sin 3x dx$

4) $\int x3^x dx$

5) $\int x\,\mathrm{tg}^2 x dx$

6) $\int \left(x^2-2x+5\right)e^{-2x}dx$

II Интегралы вида $\int P_n\left(x\right)\ln x dx$, $\int P_n\left(x\right)\arcsin x dx$, $\int P_n\left(x\right)\arccos x dx$, $\int P_n\left(x\right)\mathrm{arctg}\, x dx$, $\int P_n\left(x\right)\mathrm{arcctg}\, x dx$ ($dv = P_n\left(x\right)$)

1) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$

2) $\int \ln x dx$

3) $\int x\ln^2 x dx$

4) $\int \mathrm{arctg}\, x dx$

5) $\int x\,\mathrm{arctg}\, x dx$

6) $\int x^2\,\mathrm{arcctg}\, x dx$

7) $\int \arcsin 3x dx$

III Интегралы вида $\int e^{ax}\cos mx dx$, $\int e^{ax}\sin mx dx$ и другие

1) $\int e^x \sin x dx$

2) $\int 4^x \cos\left(2x-1\right)dx$

3) $\int \cos \ln x dx$

4) $\int \sqrt{x^2+1}dx$

Занятие 4
Интегрирование рациональных дробей

I Уже применяли (повторяем)

1) $\int \frac{3x+1}{x+2}dx$

2) $\int \frac{5x-2}{2x-1}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-8x+20}$

4) $\int \frac{dx}{x^2+3x+3}$

5) $\int \frac{\left(x+2\right)dx}{3x^2+12x+11}$

II Знаменатель раскладывается на линейные множители

1) $\int \frac{7x+4}{x^2-x-6}dx$

2) $\int \frac{7x-x^2-4}{\left(x+1\right)^2\left(x^2-5x+6\right)}dx$

3) Вывести формулу $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

III В знаменателе есть квадратный трехчлен, не имеющий корней

1) $\int \frac{dx}{\left(x-1\right)\left(x^2+1\right)}$

2) $\int \frac{x^3-x+1}{x^2\left(x^2+x+5\right)}dx$

3) $\int \frac{x^2-x+1}{\left(x^2-5x\right)\left(x^2+2x+10\right)}dx$

IV Выделение целой части

1) $\int \frac{x^5+x^3-1}{x^2\left(x^2+6x+5\right)}dx$

2) $\int \frac{x^4+3x^2-5}{x^3+2x^2+5x}dx$

V Это возможно не для всех. Применение рекуррентной формулы $J_{n+1}=\frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^n}+\left(2n-1\right)J_n\right)$, $J_n=\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$

1) $\int \frac{4x^2-8x}{\left(x-1\right)^2\left(x^2+1\right)^2}dx$

Занятие 5
Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций

I Уже было (просто напоминаем приемы, а не решаем). Эти приемы проверяем в первую очередь

1) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx$, $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ – используем формулы тригонометрии

2) $\int \frac{\cos x dx}{3\sin x+2}$, $\int 5^{\sin x}\cos x dx$ – вносим под знак дифференциала

3) $\int (4x-3)\sin x dx$ – интегрируем по частям

II Произведение превращаем в сумму

1) $\int \sin x\cos 2x\cos 3x dx$

III Понижаем степень

1) $\int \cos^4 x dx$

IV Заносим под знак дифференциала и используем $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

1) $\int \cos^2 x\sin^5 x dx$

2) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx$

V Подстановки

1) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^8 x}dx$ подстановка $\operatorname{tg} x=t$

VI Универсальная тригонометрическая подстановка $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}; \sin x=\frac{2t}{t^2+1}; \cos x=\frac{1-t^2}{t^2+1}; dx=\frac{2dt}{t^2+1}$

Интегрирование рациональных дробей можно не делать

1) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

2) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x-5\cos^2 x}$ предварительно понизить степень

VII Уже было (просто напоминаем приемы, а не решаем)

1) $\int \frac{5-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$ – выделяем целую часть

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-5}}$ – выделяем полный квадрат

3) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx$, $\int \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{\left(2x^4-3\right)^5}}$ – вносим под знак дифференциала

4) $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$ – интегрируем по частям

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^2}}dx$ – выделяем целую часть и интегрируем по частям

VIII Корень заменяем на новую переменную

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x+1}}$

2) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}dx$

3) $\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\frac{dx}{x}$

IX Выбираем подходящую степень (рациональные дроби можно не интегрировать)

1) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}dx$

2) $\int \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}\right)}dx$

X Тригонометрическая подстановка для интегралов, содержащих $\sqrt{x^2 \pm a^2}$,

1) $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$ подстановка $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$

2) $\int \frac{\sqrt{x^2+9}}{x}dx$ подстановка $x = a\,\mathrm{tg}\,t$

3) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$ подстановка $x = \frac{a}{\sin t}$

XI Выводим формулу $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Занятие 6
Определенный интеграл (самостоятельное изучение)

I Непосредственное интегрирование

1) $\int\limits_1^2 \frac{3x^4-5x^2+7}{x}dx = \int\limits_1^2 \left(3x^3-5x+\frac{7}{x}\right)dx = \left(\frac{3}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+7\ln|x|\right)\Big|_1^2 =$

$= \frac{3}{4}(16-1) - \frac{5}{2}(4-1) + 7(\ln 2 - \ln 1) = \frac{15}{4} + 7\ln 2$

2) $\int\limits_{-4}^{-2} \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}} = \int\limits_{-4}^{-2} \frac{d(x+2)}{\sqrt{9-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{3}\Big|_{-4}^{-2} = -\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{\pi}{6}-x\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1+\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\right)dx =$

$= \frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\left(\pi + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$

4) $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+x} = \left[\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}\right] = \int\limits_1^3 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^3 \frac{dx}{x+1} = \ln\frac{|x|}{|x+1|}\Bigg|_1^3 = \ln\frac{3}{2}$

5) $\int\limits_0^1 \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}dx = \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}+2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + 2x\right)_0^1 = \frac{8}{3}$

II Внесение под знак дифференциала

1) $\int\limits_2^5 \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2}\int\limits_2^5 \frac{d\left(2x-3\right)}{2x-3} = \frac{1}{2}\ln|2x-3|\Big|_2^5 = \frac{1}{2}\ln 7$

2) $\int\limits_4^5 x\sqrt{x^2-16}dx = \left[xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2-16\right)\right] = \frac{1}{2}\int\limits_4^5 \sqrt{x^2-16}d\left(x^2-16\right) = \frac{1}{3}\left(\left(x^2-16\right)^{\frac{3}{2}}\right)_4^5 = \frac{27}{3} = 9$

3) $\int\limits_0^1 e^x\left(e^x-1\right)^4 dx = \left[e^x dx = d\left(e^x-1\right)\right] = \int\limits_0^1 \left(e^x-1\right)^4 d\left(e^x-1\right) = \left(\frac{\left(e^x-1\right)^5}{5}\right)_0^1 = \frac{\left(e-1\right)^5}{5}$

4) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\left(\ln x\right)^2}} = \left[\frac{dx}{x} = d\left(\ln x\right)\right] = \int\limits_1^e \frac{d\left(\ln x\right)}{\sqrt{1-\left(\ln x\right)^2}} = \arcsin\left(\ln x\right)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$

5) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\sin 2xdx = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\sin xdx = \left[\sin xdx = -d\left(\cos x\right)\right] =$

$= -2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 xd\left(\cos x\right) = \frac{-2\cos^7 x}{7}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 + \frac{2}{7} = \frac{2}{7}$

6) $\int\limits_0^1 \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx = 4\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = 4\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} xd\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2} =$

$\left(2\operatorname{arctg}^2 x - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2}\ln 2$

III Замена переменной (делаем замену в пределах интегрирования, к старой переменной не возвращаемся)

1) $\int\limits_1^9 \frac{dx}{5+2\sqrt{x}} = \left[x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt; x = 1 \Rightarrow t = 1; x = 9 \Rightarrow t = 3\right] =$

$= \int\limits_1^3 \frac{2tdt}{5+2t} = \int\limits_1^3 \left(1 - \frac{5}{5+2t}\right)dt = \left(t - \frac{5}{2}\ln|2t+5|\right)_1^3 = 2 - \frac{5}{2}\ln\frac{11}{7}$

2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+2\cos x} = \left[\begin{array}{c} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = t, dx = \frac{dt}{t^2+1}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x = 0 \,|\, t = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} \,|\, t = 1 \end{array}\right] = \int\limits_0^1 \frac{\frac{2}{t^2+1}dt}{3 + 2\frac{1-t^2}{1+t^2}} =$

$= \int\limits_0^1 \frac{2dt}{t^2+5} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{5}}$

3) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left[x = \sin t \Rightarrow dx = \cos tdt; x = 0 \Rightarrow t = 0; x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2}\right] = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 tdt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

4) $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}dx = \int\limits_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}+1}}dx = \left[\begin{array}{c} e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1; x = 1 \Rightarrow t = e \end{array}\right] = \int\limits_1^e \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} =$

$$= \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|_1^e = \ln\left|\frac{e+\sqrt{e^2+1}}{1+\sqrt{2}}\right|$$

IV Интегрирование по частям

1) $\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x \\ dv = dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = x \end{matrix} \right. \right\} = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi - \ln 4}{4}$

2) $\int\limits_{0.5}^0 \ln\left(1-x^2\right) dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln\left(1-x^2\right) \\ dv = dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = \dfrac{-2x}{1-x^2} dx \\ v = x \end{matrix} \right. \right\} = x\ln\left(1-x^2\right)\Big|_{0.5}^0 -$

$$-2\int\limits_{0.5}^0 \frac{x^2}{x^2-1} dx = 0.5\ln\frac{4}{3} - 2\int\limits_{0.5}^0 \left(1 - \frac{1}{x^2-1}\right) dx = 0.5\ln\frac{4}{3} - 2x\Big|_0^1 - \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|_{0.5}^0 = 1 + 0.5\ln 12$$

3) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2 \\ dv = \cos x dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = 2x dx \\ v = \sin x \end{matrix} \right. \right\} = x^2 \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x \\ dv = \sin x dx \end{matrix} \left| \begin{matrix} du = dx \\ v = -\cos x \end{matrix} \right. \right\} = \frac{\pi^2}{4} + 2x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \frac{\pi^2}{4} - 2\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Занятие 7–8
Приложения определенного интеграла

Важно порисовать картинки

Геометрические приложения

V Площадь криволинейной трапеции

Декартова система координат

1) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, y = \dfrac{x^2}{2}$

2) $y = \dfrac{1}{x}, y = x^2, y = 4$

Параметрическое задание $S = \left|\int\limits_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt\right|$

3) Петля $\begin{cases} x = 3t^2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = a\sin t \\ y = b\sin 2t \end{cases}$

Полярные координаты $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi) d\varphi$

5) $\rho = a\left(1-\cos\varphi\right)$

6) $\rho = 3\sqrt{3}a\cos\varphi, \rho = 3a\sin\varphi$

VI Длина дуги кривой

Декартова система координат $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} dx$

1) $y = \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{2}\ln x, x = 1, x = 2$

2) $y = \ln\cos x, x = 0, x = \dfrac{\pi}{4}$

Параметрическое задание $l=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}dt$

3) Первая арка циклоиды $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, $t\in[0;2\pi]$

4) Астероида $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$

Полярные координаты $l=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\varphi$

5) Логарифмическая спираль $\rho=ae^{\varphi}$, $\varphi\in[0;\pi]$

6) Замкнутая кривая $\rho=a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$

VII Объем тела вращения

1) $y^2=x, x^2=y$ относительно Ox

2) $y=2-\dfrac{x^2}{2}, x+y=2$ относительно Oy

Физические приложения (возможно нужны не всем специальностям)

VIII Работа переменной силы

Под действием силы $F(s)$ материальная точка движется по прямой Os. Работа этой силы на участке пути $[a,b]$ определяется по формуле $A=\int\limits_a^b F(s)ds$

1) Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 10см, если известно, что для удлинения ее на 1 см необходимо приложить силу в 1 кН

IX Вычисление моментов инерции и координат центра тяжести

Пусть плоская фигура G ограничена непрерывными кривыми $y=f_1(x), y=f_2(x), \left(f_1(x)\le f_2(x)\right), a\le x\le b$ и отрезками прямых $x=a, x=b$, а поверхностная плотность $\rho\equiv 1$. Тогда статические моменты фигуры G выражаются

$M_x=\dfrac{1}{2}\int\limits_a^b\left(f_2^2(x)-f_1^2(x)\right)dx$, $M_y=\int\limits_a^b x\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx$, а координаты центра тяжести

$x_0=\dfrac{M_y}{S}, y_0=\dfrac{M_x}{S}, S=\int\limits_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx-$ площадь фигуры G

1) Вычислить моменты инерции и координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной линиями $y=6-x^2, y=2$

Занятие 9
Несобственный интеграл

I Вычислить или установить расходимость по определению

1) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-4x}dx$

2) $\int\limits_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$

3) $\int\limits_{13}^{+\infty}\dfrac{dx}{x\ln x}$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0}x\cos x dx$

5) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

II Исследовать на сходимость, используя признаки сравнения

1) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

2) $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{\ln x}$

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{2+x+3x^5}$

4) $\int\limits_{1}^{+\infty} \ln\frac{x^2+2}{x^2+1}dx$

III Вычислить или установить расходимость по определению

1) $\int\limits_{0}^{3} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

2) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{1-\cos 2x}$

3) $\int\limits_{0}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

4) $\int\limits_{0}^{1} \ln x dx$

5) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{3x}{x^2-1}dx$

IV Исследовать на сходимость, используя признаки сравнения

1) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x}}$

2) $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{dx}{(1-x^3)\sqrt{x^3}}$

3) $\int\limits_{0}^{2\pi} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{2\pi-x}}$

4) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}$

V Исследовать на абсолютную и условную сходимость

1) $\int\limits_{\pi}^{+\infty} \frac{\cos 2x dx}{\sqrt[3]{x^4-1}}$

2) $\int\limits_{1}^{+\infty} \sin x^2 dx$

3) $\int\limits_{0}^{1} \frac{\cos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}dx$

4) $\int\limits_0^1 \frac{x^2+1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}\,dx$