Темы для теормина

Сформулируйте **определения** следующих понятий:

1. Первообразная функции на отрезке

> **Определение 83** (Понятие первообразной).
> Первообразной функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется функция F такая, что
> $$F'(x) = f(x), \quad x \in \langle a, b\rangle.$$

2. Неопределённый интеграл

> **Определение 84** (Понятие неопределенного интеграла).
> Неопределённым интегралом функции f на промежутке $\langle a, b\rangle$ называется множество всех первообразных f на этом промежутке.
> Неопределенный интеграл обозначается следующим образом:
> $$\int f\, dx,$$
> где
> $\int$ — знак неопределенного интеграла,
> f — подынтегральная функция,
> $f\, dx$ — подынтегральное выражение,
> x — переменная интегрирования.

3. Интегральная сумма

> **Определение 92** (Понятие интегральной суммы).
> Пусть на отрезке $[a, b]$ задана функция f и введено разбиение (τ, ξ). Величина
> $$\sigma_\tau(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$
> называется интегральной суммой для функции f на отрезке $[a, b]$, отвечающей разбиению (τ, ξ).

4. Мелкость (ранг, диаметр) разбиения

Определение 90 (Понятие мелокости (ранга) разбиения).
Величина

$$\lambda(\tau) = \max_{i \in \{1,2,\ \dots,n\}} \Delta x_i$$

называется мелкостью (рангом, диаметром) разбиения (дробления).

5. Определенный интеграл (интеграл Римана)

Определение 93 (Понятие интеграла Римана).
Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$. Говорят, что число I является интегралом Римана от функции f по отрезку $[a, b]$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta :\ \forall (\tau, \xi) :\ \lambda(\tau) < \delta\ \ |\sigma_\tau(f, \xi) - I| < \varepsilon.$$

Обозначают это число так:

$$I = \int\limits_a^b f\ dx.$$

6. Верхняя и нижняя суммы Дарбу

Определение 96 (Понятие сумм Дарбу).
Пусть функция f задана на отрезке $[a, b]$ и τ — некоторое разбиение этого отрезка. Величины

$$S_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, ..., n\},$$

$$s_\tau(f) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i, \quad m_i = \inf_{x \in \Delta_i} f(x), \quad i \in \{1, 2, ..., n\},$$

называют верхней и нижней суммами Дарбу для функции f, отвечающими разбиению τ, соответственно.

7. Кусочно-непрерывная функция

Определение 99 (Понятие кусочно-непрерывной функции).
Функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ называется кусочно-непрерывной, если ее множество точек разрыва конечно или пусто, и все разрывы – разрывы первого рода.

8. Интеграл с переменным верхним (нижним) пределом

Определение 100 (Понятие интеграла с переменным верхним пределом).
Пусть $f \in R[a, b]$ и $x \in [a, b]$. Функция

$$\Phi(x) = \int\limits_a^x f\ dx$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

9. Криволинейная трапеция в декартовых координатах

Определение 104 (Понятия подграфика и криволинейной трапеции).
Пусть $f : [a, b] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$. Множество

$$G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b],\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

называется подграфиком функции f.

Если функция f непрерывна на $[a, b]$, то подграфик называется криволинейной трапецией.

10. Криволинейный сектор в полярных координатах

Определение 105 (Понятия подграфика и криволинейного сектора).
Пусть $0 < \beta - \alpha \leq 2\pi,\ f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R},\ f \geq 0$. Множество

$$\widetilde{G_f} = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi \in [\alpha, \beta],\ 0 \leq r \leq f(\varphi)\}$$

называется подграфиком функции f в полярных координатах. Если функция f непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то подграфик называется криволинейным сектором.

11. Несобственный интеграл и его вычисление

Определение 122 (Понятие несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$. Тогда символ

$$\int\limits_a^b f\ dx$$

называется несобственным интегралом от функции f по множеству $[a, b)$.

Определение 123 (Понятие значения несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $-\infty < a < b \le +\infty$ и $\omega \in [a, b)$. Предел

$$\lim_{\omega \to b-0} \int\limits_a^\omega f\ dx,$$

если он существует в $\overline{\mathbb{R}}$, называется значением несобственного интеграла от функции f по множеству $[a, b)$.

Определение 125 (Понятия интегралов первого и второго родов).
Несобственный интеграл по неограниченному промежутку часто называется несобственным интегралом первого рода.

Несобственный интеграл от неограниченной функции по промежутку конечной длины часто называется несобственным интегралом второго рода.

12. Абсолютная сходимость несобственного интеграла

Определение 127 (Понятие абсолютной сходимости).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Говорят, что несобственный интеграл от f по $[a, b)$ сходится абсолютно, если сходится интеграл

$$\int\limits_a^b |f|\ dx.$$

13. Условная сходимость несобственного интеграла

Определение 128.
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если интеграл от f по $[a, b)$ сходится, но не сходится абсолютно, то говорят, что интеграл сходится условно.

Сформулируйте следующие **утверждения**:

1. Теорема о множестве всех первообразных

Теорема 77 (О множестве всех первообразных).
Пусть F — первообразная функции f на $\langle a, b\rangle$. Для того чтобы Φ также была первообразной функции f на $\langle a, b\rangle$, необходимо и достаточно, чтобы

$$F(x) - \Phi(x) \equiv C, \quad x \in \langle a, b\rangle, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2. Замена переменной в неопределенном интеграле

Теорема 81 (Формула замены переменной).
Пусть f имеет первообразную на $\langle a, b\rangle$, $\varphi : \langle \alpha, \beta\rangle \to \langle a, b\rangle$, φ дифференцируема на $\langle \alpha, \beta\rangle$. Тогда

$$\int f\, dx = \int f(\varphi)\varphi'\, dt.$$

3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле

Теорема 82 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u и v дифференцируемы на $\langle a, b\rangle$, и пусть на $\langle a, b\rangle$ существует первообразная от vu'. Тогда

$$\int uv'\, dx = uv - \int vu'\, dx$$

или

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

4. Критерий существования определенного интеграла

Теорема 87 (Критерий Дарбу).

$$f \in R[a, b] \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\lambda(\tau)\to 0} (S_\tau(f) - s_\tau(f)) = 0,$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall \tau :\ \lambda(\tau) < \delta \ \ S_\tau(f) - s_\tau(f) < \varepsilon.$$

5. Связь интегрируемости и непрерывности

Теорема 88 (Об интегрируемости непрерывной функции).

$$f \in C[a,b] \quad \Rightarrow \quad f \in R[a,b].$$

6. Связь интегрируемости и кусочной непрерывности

Теорема 91 (Об интегрируемости кусочно-непрерывной функции).
Кусочно-непрерывная на отрезке функция интегрируема на нем.

7. Линейность интеграла Римана

Теорема 93 (О линейности интеграла Римана).
Пусть $f, g \in R[a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\ dx = \alpha \int\limits_a^b f\ dx + \beta \int\limits_a^b g\ dx.$$

8. Аддитивность по промежутку интеграла Римана

Теорема 94 (Об аддитивности по промежутку).
Пусть $f \in R[a,b]$, $c \in [a,b]$, тогда

$$\int\limits_a^b f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^b f\ dx.$$

9. Первая теорема о среднем

Теорема 97 (Первая теорема о среднем).
Пусть $f, g \in R[a,b]$, g не меняет знак на $[a,b]$, $m = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.
Тогда:

$$\exists \mu \in [m, M] : \int\limits_a^b fg\ dx = \mu \int\limits_a^b g\ dx.$$

Кроме того, если $f \in C[a,b]$, то

$$\exists \xi \in [a,b] : \int\limits_a^b fg\ dx = f(\xi) \int\limits_a^b g\ dx.$$

10. Теорема Барроу

Теорема 99 (О дифференцируемости интеграла с переменным верхним пределом).
Φ дифференцируема в точках непрерывности функции $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, причем в этих точках

$$\Phi'(x_0) = f(x_0).$$

11. Формула Ньютона-Лейбница

Теорема 101 (Усиленная формула Ньютона–Лейбница).
Пусть $f \in R[a,b]$ и F — некоторая первообразная f на $[a,b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b f\ dx = F(b) - F(a).$$

12. Интегрирование по частям в определенном интеграле

Теорема 102 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u, v дифференцируемы на $[a,b]$, причем $u', v' \in R[a,b]$. Тогда:

$$\int\limits_a^b uv'\ dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'\ dx$$

13. Замена переменной в определенном интеграле

Теорема 103 (Формула замены переменной).
Пусть $f \in C[a,b]$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta] \to [a,b]$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R[\alpha, \beta]$. Тогда:

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f\ dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)\varphi'\ dt.$$

14. Интеграл от четной функции по симметричному промежутку

Теорема 104 (Об интеграле от четной функции по симметричному промежутку).
Пусть $f \in R[0,a]$ и является четной. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f\ dx = 2\int\limits_{0}^{a} f\ dx.$$

15. Интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку

Теорема 105 (Об интеграле от нечетной функции по симметричному промежутку).
Пусть $f \in R[0,a]$ и является нечетной. Тогда:

$$\int\limits_{-a}^{a} f\ dx = 0.$$

16. Вычисление площади плоской фигуры. Граница задана в декартовых координатах

Теорема 107 (О вычислении площади подграфика).
Пусть $f \in R[a,b]$ и G_f — подграфик функции f. Если подграфик имеет площадь, то

$$S(G_f) = \int\limits_{a}^{b} f\ dx.$$

17. Вычисление площади плоской фигуры. Граница задана параметрически

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)d(x(t)) = \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x'(t)dt$$

***Примечание**: подразумевается, что функции $x(t)$, $x'(t)$, $y(t)$ **непрерывны** на промежутке интегрирования и, кроме того, функция $x(t)$ **монотонна** на нём.*

18. Вычисление площади плоской фигуры. Граница задана в полярных координатах

Теорема 109 (О площади подграфика в полярных координатах).
Пусть $f \in R[\alpha, \beta]$ и $\widetilde{G_f}$ — подграфик функции f. Если подграфик имеет площадь, то

$$S(\widetilde{G_f}) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2 \, d\varphi.$$

19. Вычисление длины кривой. Кривая задана в декартовых координатах

Теорема 115 (О длине графика гладкой функции).
Пусть $f \in C^1[a, b]$ и

$$\Gamma_f = \{(x, y) : y = f(x), \ x \in [a, b]\}$$

— график функции f. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} \, dx.$$

20. Вычисление длины кривой. Кривая задана параметрически

Теорема 114 (О вычислении длины пути).
Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ — гладкий путь, тогда

$$l_\gamma = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt.$$

21. Вычисление длины кривой. Кривая задана в полярных координатах

Теорема 116 (О длине графика функции в полярной системе координат).
Пусть $f \in C^1[\varphi_0, \varphi_1]$, $f \geq 0$ и

$$\Gamma_f = \{(\varphi, r) : r = f(\varphi),\ \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]\}$$

— график функции f в полярной системе координат. Тогда длина $l(\Gamma_f)$ графика функции f равна

$$l(\Gamma_f) = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{f^2 + (f')^2}\, d\varphi.$$

22. Вычисление объема тела вращения

Теорема 111 (О вычислении объема тела вращения).
Пусть T — тело вращения, полученное вращением графика функции $y = f(x)$ вокруг оси Ox. Тогда

$$V(T_f) = \pi \int\limits_a^b f^2\, dx.$$

23. Линейность несобственного интеграла

Теорема 117 (О линейности несобственного интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Если сходятся интегралы

$$\int\limits_a^b f\, dx \quad \text{и} \quad \int\limits_a^b g\, dx,$$

то

$$\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int\limits_a^b f\, dx + \beta \int\limits_a^b g\, dx.$$

24. Аддитивность по промежутку несобственного интеграла

Теорема 118 (Об аддитивности по промежутку).
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$. Тогда для любого $c \in (a, b)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f\ dx = \int\limits_a^c f\ dx + \int\limits_c^b f\ dx,$$

причем интегралы

$$\int\limits_a^b f\ dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^b f\ dx$$

сходятся или нет одновременно.

25. Критерий сходимости несобственного интеграла в терминах остатка

Лемма 79.
Пусть $f \in R_{loc}[a, b)$, $c \in (a, b)$. Тогда сходимость несобственного интеграла от f по $[a, b)$ равносильна тому, что

$$\lim_{c \to b-0} \int\limits_c^b f\ dx = 0.$$

26. Замена переменной в несобственном интеграле

Теорема 121 (Формула замены переменной).
Пусть $f \in C[A, B)$, $x = \varphi(t) : [\alpha, \beta) \to [A, B)$, φ дифференцируема и $\varphi' \in R_{loc}[\alpha, \beta)$. Пусть, кроме того, существует $\varphi(\beta - 0) \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда

$$\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta-0)} f\ dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi)\varphi'\ dt,$$

причем если существует один интеграл (в $\overline{\mathbb{R}}$), то существует и другой.

27. Интегрирование по частям в несобственном интеграле

Теорема 120 (Формула интегрирования по частям).
Пусть u, v дифференцируемы на $[a,b)$ и $u', v' \in R_{loc}[a,b)$. Тогда

$$\int\limits_a^b uv'\,dx = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b vu'\,dx, \quad uv\Big|_a^b = \lim_{\omega \to b-0} u(\omega)v(\omega) - u(a)v(a),$$

или

$$\int\limits_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_a^b v\,du,$$

причем равенство справедливо тогда и только тогда, когда существует (в $\mathbb{R}$) хотя бы два предела из трех.

28. Критерий сходимости несобственного интеграла от положительной функции

Теорема 122 (Критерий сходимости интеграла от знакопостоянной функции).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$, $f \geq 0$. Тогда функция

$$F(\omega) = \int\limits_a^\omega f\,dx, \quad \omega \in [a,b),$$

возрастает, а сходимость интеграла

$$\int\limits_a^b f\,dx$$

равносильна ограниченности функции $F(\omega)$.

29. Первый признак сравнения (с неравенством) для несобственного интеграла

Теорема 123 (Признаки сравнения).
Пусть $f, g \in R_{loc}[a,b)$ и $0 \leq f \leq g$ при $x \in [a,b)$. Тогда:

1. Сходимость интеграла от g по $[a,b)$ влечет сходимость интеграла от f по $[a,b)$, то есть

$$\int_a^b g\, dx < +\infty \Rightarrow \int_a^b f\, dx < +\infty.$$

2. Расходимость интеграла от f по $[a,b)$ влечет расходимость интеграла от g по $[a,b)$, то есть

$$\int_a^b f\, dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b g\, dx = +\infty.$$

Признак сравнения 1. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на промежутке (A,B) и удовлетворяют неравенству $f(x) \le |g(x)|$, где A и B – любые числа (не обязательно конечные). Тогда

1) из сходимости интеграла $\int_A^B g(x)\,dx$ вытекает сходимость интеграла $\int_A^B f(x)\,dx$.
2) расходимость интеграла $\int_A^B f(x)\,dx$ влечет расходимость интеграла $\int_A^B g(x)\,dx$.

30. Второй признак сравнения (предельный) для несобственного интеграла

3. Если $f \sim g$ при $x \to b-0$, то интегралы от f и g по $[a,b)$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак сравнения 2. Если существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \lambda$, то

при $0 < \lambda < \infty$ интегралы $\int_A^\infty f(x)\,dx$ и $\int_A^\infty g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно;
при $\lambda = 0$ сходимость интеграла $\int_A^\infty g(x)\,dx$ влечет за собой сходимость интеграла $\int_A^\infty f(x)\,dx$;
при $\lambda = \infty$ из расходимости интеграла $\int_A^\infty g(x)\,dx$ вытекает расходимость интеграла $\int_A^\infty f(x)\,dx$.

31. Признак абсолютной сходимости для несобственного интеграла

Теорема 125 (О сходимости абсолютно сходящегося интеграла).
Пусть $f \in R_{loc}[a,b)$. Если интеграл от f по $[a,b)$ сходится абсолютно, то он сходится.