

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА**

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики  
Кафедра математичної інформатики

**Кваліфікаційна робота  
на здобуття ступеня бакалавра**  
за освітньо-професійною програмою "Інформатика"  
спеціальності 122 Комп'ютерні науки на тему:

**ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ КРИПТОСИСТЕМ НА ОСНОВІ ЕЛІПТИЧНИХ  
КРИВИХ**

Виконав студент 4-го курсу  
Солонко Нікіта Владиславович

---

(підпис)

Науковий керівник:  
Член-кореспондент НАН України, професор  
Анісімов Анатолій Васильович

---

(підпис)

Засвідчую, що в цій роботі немає запозичень з  
праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент

---

(підпис)

## РЕФЕРАТ

Обсяг роботи: 26 сторінок, 5 ілюстрацій, 0 таблиць, 15 використаних джерел.

TBD.

## ЗМІСТ

Скорочення та умовні позначення .....	5
Вступ .....	6
Розділ 1. ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ .....	8
1.1. Переваги над $\mathbb{Z}_p^*$ .....	8
1.2. Загальний огляд еліптичних кривих .....	10
1.2.1. $E / \mathbb{R}$ .....	10
1.2.2. $E / \mathbb{F}_p$ .....	14
1.3. Додаткові обчислення в $E(\mathbb{F}_p)$ .....	16
1.3.1. $ E(\mathbb{F}_p) $ .....	16
1.3.2. Обчислення $nP$ .....	16
1.3.3. Дискретний логарифм в $E(\mathbb{F}_p)$ .....	17
1.4. Pairing(Спарювання точок еліптичної кривої) .....	17
1.5. Спеціальні види еліптичних кривих .....	18
1.5.1. Montgomery Curve(Крива Монтгомері) .....	18
1.5.2. Edwards Curve(Крива Едвардса) .....	19
1.5.3. Koblitz Curve(Крива Кобліца) .....	19
1.6. Припущення на яких будується ECC .....	19
1.6.1. ECDLP .....	19
1.6.2. CDH .....	21
1.6.3. DDH .....	21
1.7. Приклади еліптичних кривих у сучасній криптографії .....	21
1.7.1. secp256r1 (P256) .....	21
1.7.2. secp256k1 (Bitcoin curve) .....	21
1.7.3. Curve25519 .....	21
1.8. Застосування еліптичних кривих поза межами ECC .....	21
1.8.1. Алгоритм факторизації Ленстра .....	21
1.8.2. Тест на простоту .....	21
1.9. Висновки .....	21
Розділ 2. ЗАСТОСУВАННЯ У КРИПТОГРАФІЇ .....	22
2.1. Протоколи узгодження ключів .....	22
2.1.1. ECDH .....	22
2.2. Протоколи підпису і верифікації. ....	22
2.2.1. ECDSA .....	22
2.2.2. EdDSA .....	22
2.2.3. BLS .....	22
Розділ 3. ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ БІБЛІОТЕКИ .....	23
3.1. Core .....	23

3.1.1. Клас точки .....	23
3.1.2. Клас secp256k1 .....	23
3.1.3. Клас кривої Curve25519 .....	23
3.2. Algos .....	23
Розділ 4. ПОРІВНЯННЯ З ІСНУЮЧИМИ БІБЛІОТЕКАМИ .....	24
Висновки .....	25
Перелік джерел посилання .....	26

## СКОРОЧЕННЯ ТА УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

**ECC** Elliptic curve cryptography;

**EC** Elliptic curve;

**SIMD** Single instruction multiple data;

**DLP** Discrete Logarithm Problem, задача дискретного логарифму;

**GNFS** General Number Field Sieve;

## **ВСТУП**

### **Оцінка сучасного стану об'єкта дослідження**

На даний момент, окрім того, що застосування еліптичних кривих у криптографії активно досліджується в академічних роботах, існує безліч прикладних реалізацій ECC, що використовуються повсюдно. Більш того, криптосистеми з відкритим ключем, що використовують еліптичні криві, потроху стають популярнішими за, найбільш розповсюджений зараз, RSA. Так, наприклад, нові версії ssh рекомендують використовувати ключі Ed25519, що побудовані на еліптичних кривих Едварда, замість RSA. Аналогічні рекомендації зараз дають такі сервіси як: GitLab, GitHub, Amazon Web Services, Google Cloud Platform і багато інших.

### **Актуальність роботи та підстави для її виконання**

Як було зазначено раніше, криптосистеми з відкритим ключем побудовані на основі еліптичних кривих вже активно використовуються, але все ще перебувають у стані активного розвитку. Так, наприклад, стаття [1] в якій була запропонована одна з найбільш популярних зараз еліптичних кривих Ed25519 і алгоритм підпису/верифікації на її основі EdDSA була написана в 2012 році, що для криптографії недавно. Також зараз існує багато програмних реалізацій таких криптосистем, але, у зв'язку зі складністю їх імплементації, не всі вони є цілком безпечними. Варто зазначити, що з кожним роком архітектура обчислювальних систем розвивається: оптимізуються існуючі інструкції та додаються нові, що відкриває можливості як для оптимізації існуючих реалізацій, так і для написання нових - кращих. Наприклад, в архітектурі x64 апаратна підтримка SIMD обчислень з 512 бітними регістрами AVX-512 з'явилася в 2013 році, вже після виходу статті з описом Ed25519.

### **Мета й завдання роботи**

Метою роботи є дослідження застосування еліптичних кривих у сучасній криптографії, і як результат дослідження імплементувати криптографічну бібліотеку для роботи з еліптичними кривими та порівняти її з існуючими реалізаціями.

### **Можливі сфери застосування**

Оскільки програмна реалізація яку я розроблю у рамках цієї роботи не буде сертифікована, то її не варто буде застосовувати в реальних системах на які може бути здійснена атака, але вона може бути застосована у навчальних і академічних цілях. В перспективі така бібліотека може бути застосована всюди де потрібна безпечна комунікація, в умовах коли можливе прослуховування, або втручання в канали зв'язку, між сутностями які ще не узгодили симетричний ключ. Наприклад: TLS, HTTPS і так далі.

## РОЗДІЛ 1. ЕЛІПТИЧНІ КРИВІ

### 1.1. Переваги над $\mathbb{Z}_p^*$

Під  $\mathbb{Z}_p^*$  мається увазі мультиплікативна група лишків за модулем  $p$ , де  $p$  - просте число.

Розглянемо мотивацію використання нового криптографічного примітиву, коли вже побудовано і імplementовано багато криптосистем на основі  $\mathbb{Z}_p^*$ , таких як: Diffie-Hellman, ElGamal, RSA і багато інших. Проблема використання таких криптосистем полягає у тому, що вони були запропоновані давно: Diffie-Hellman [2] - 1976, RSA [3] - 1978, ElGamal [4] - 1985. З того часу кратно збільшились обчислювальні можливості. Частота ядер виросла з кГц до ГГц, кількість ядер збільшилась з одиниць до сотень, з'явилися зручні інструменти для об'єднання процесорів у кластери. Також, через бажання зламати дані криптосистеми, багато вчених шукали спосіб знайти більш ефективні алгоритми розв'язання проблем на які вони спираються. Таким чином у 1993 Ленстра [5] придумав ефективний алгоритм розкладання великих чисел на множники - GNFS(General Number Field Sieve), який може розкласти число  $n > 10^{100}$  за час:

$$\exp\left(\left(\left(\frac{64}{9}\right)^{\frac{1}{3}} + o(1)\right)(\log n)^{\frac{1}{3}}(\log \log n)^{\frac{2}{3}}\right)$$

Це стало основною проблемою криптосистем на основі  $\mathbb{Z}_p^*$ , тому що він робить вирішення обчислювальних проблем, на які спираються ці криптосистеми субекспоненційним, замість експоненційних. Варто зазначити, що цей алгоритм не є чисто теоретичною загрозою. За його допомогою у 2019 році [6] було знайдено дискретний логарифм 795 бітного числа. Таким чином, в патенті RSA [3] рекомендований розмір ключів був 200біт, в першій NIST сертифікації -



512 біт, зараз же мінімальний рекомендований розмір - 2048 біт. Важливим також є те, що GNFS неможливо узагальнити на будь-які скінчені циклічні групи, тому він не зачіпає групу точок еліптичної кривої над скінченим полем (позначення буде наведено далі), по цій причині найкращий відомий алгоритм для вирішення проблеми дискретного логарифма для групи точок еліптичних кривих (ECDLP) займає час  $O(\sqrt{q})$ , де  $q$  - розмір групи. Через це розміри ключів що мають однакову безпеку для  $Z_p^*$  і для групи точок еліптичної кривої сильно відрізняються. Порівняльна характеристика безпеки ключа в залежності від розміру ключа RSA/Diffie-Hellman і ECC:

Symmetric Key Size (bits)	RSA and Diffie-Hellman Key Size (bits)	Elliptic Curve Key Size (bits)
80	1024	160
112	2048	224
128	3072	256
192	7680	384
256	15360	521

Table 1: NIST Recommended Key Sizes

Рисунок 1: <https://www.globalsign.com/en/blog/elliptic-curve-cryptography>

Як можна побачити з наведеної таблиці використання еліптичних кривих дає вагому перевагу, оскільки зменшує розмір ключа, що в свою чергу зменшує час потрібний на проведення операцій з ключем (що дає вигравш у швидкодії), кількість затраченої енергії (що є вагомою перевагою для IoT), навантаження на мережу під час передачі ключа і загалом трафік.

Ще однією перевагою криптографії еліптичних кривих є те, що можна використати багато напрацювань з криптографії з відкритим що використовує  $Z_p^*$ . Оскільки ECC як складно обчислювальну проблему використовує

знаходження дискретного логарифма - DLP(у випадку еліптичних кривих вживають термін ECDLP), аналогічно до складно обчислювальної проблеми в Diffie-Hellman і ElGamal. До того еліптичні криві мають додаткову структуру, яку не має  $\mathbb{Z}_p^*$ , що дозволяє побудувати неможливі для  $\mathbb{Z}_p^*$  криптосистеми. Такою додатковою структурою є можливість будувати pairing(спарювання точок еліптичних кривих), lattices(алгебраїчні решітки), isogenies(ізогенії). Алгебраїчні решітки і ізогенії еліптичних кривих зараз активно використовуються для побудови пост-квантових криптосистем з відкритим ключем.

## 1.2. Загальний огляд еліптичних кривих

### 1.2.1. $E / \mathbb{R}$

Існує декілька форм задання еліптичних кривих. Почнемо з найбільш класичної:

Еліптичною кривою  $E$  називається множина точок, що є розв'язком рівняння:  $y^2 = x^3 + a * x + b$ .

Наведене рівняння називають рівнянням Веєрштрасса і, відповідно, дану форму задання еліптичної кривої називають формою Веєрштрасса. Якщо еліптична крива задана над полем  $\mathbb{F}$ , будемо позначати це як  $E / \mathbb{F}$

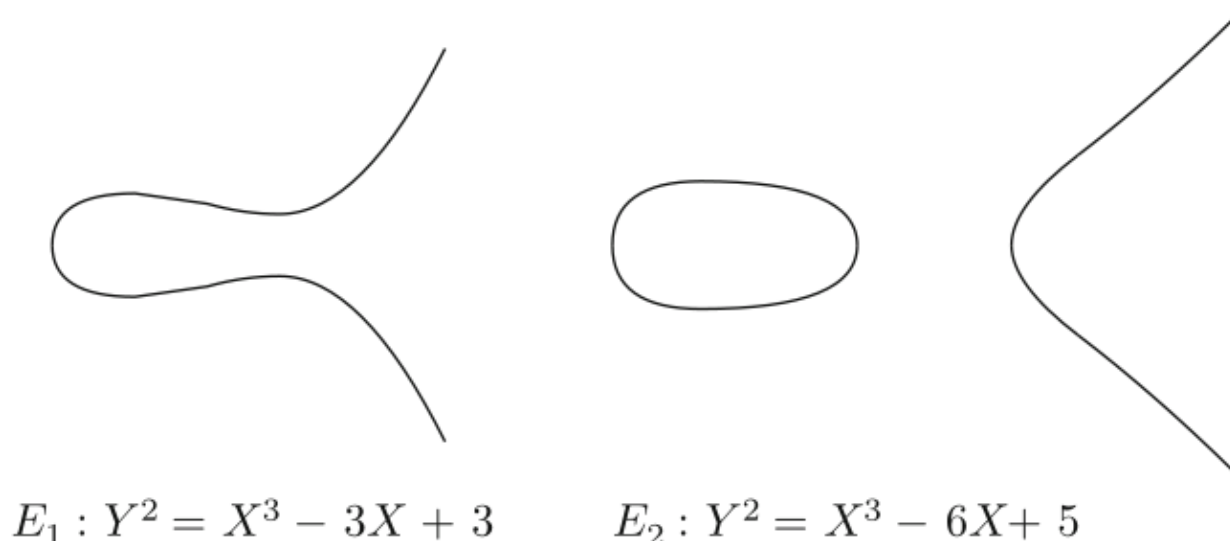


Рисунок 2: Ілюстрація 2 еліптичних кривих з [7]

Еліптичні криві є не просто об'єктом вивчення аналітичної геометрії, а й цікавим об'єктом розгляду алгебри, бо над точками еліптичної кривої можна проводити обчислення. Перед переходом до еліптичних кривих над скінченими полями, для більш інтуїтивного розуміння, розглянемо як «додавати» точки еліптичної кривої над  $\mathbb{R}$ , бо це можна легко інтерпретувати геометрично. Позначемо операцію додавання точок еліптичної кривої як  $\oplus$  і розглянемо її на прикладі з [7].

Для початку визначимо, що якщо  $A = (x, y) \in E$ , то  $-A = (x, -y) \in E$ . Нехай  $E / \mathbb{R}$  - це еліптична крива задана рівнянням  $y^2 = x^3 - 15x + 18$ ; Точки  $P = (7, 16), Q = (1, 2) \in E$ , тоді пряма  $L$  що їх сполучає задається рівнянням:  $y = \frac{7}{3}x - \frac{1}{3}$ . Для того щоб знайти в яких точках  $L$  перетинає  $E$  ми можемо підставити замість  $y$  рівність з  $L$  в  $E$  і розв'язати рівняння відносно  $x$ . Для наведеного прикладу маємо:

$$\left(\frac{7}{3}x - \frac{1}{3}\right)^2 = x^3 - 15x + 18 \rightarrow x^3 - \frac{49}{9}x^2 - \frac{121}{9}x + \frac{161}{9} = 0$$

Отримане рівняння є рівнянням третьої степені, отже воно має 3 корені, 2 з яких нам вже відомі, залишається знайти третій корінь. Найлегшим способом

є поділити отриманий поліном на  $(x - 7)(x - 1)$ . Таким чином отримуємо третій корінь  $x = -\frac{23}{9}$ . Підставляючи  $x$  в  $E$  отримуємо  $y = -\frac{170}{27}$ , а отже точку  $R = (-\frac{23}{9}, -\frac{170}{27})$ . Далі відображаємо  $R$  відносно ОХ і маємо

$$P \oplus Q = -R = R' = (-\frac{23}{9}, \frac{170}{27})$$

Цей метод називається методом хорди. Наведене вище в графічно:

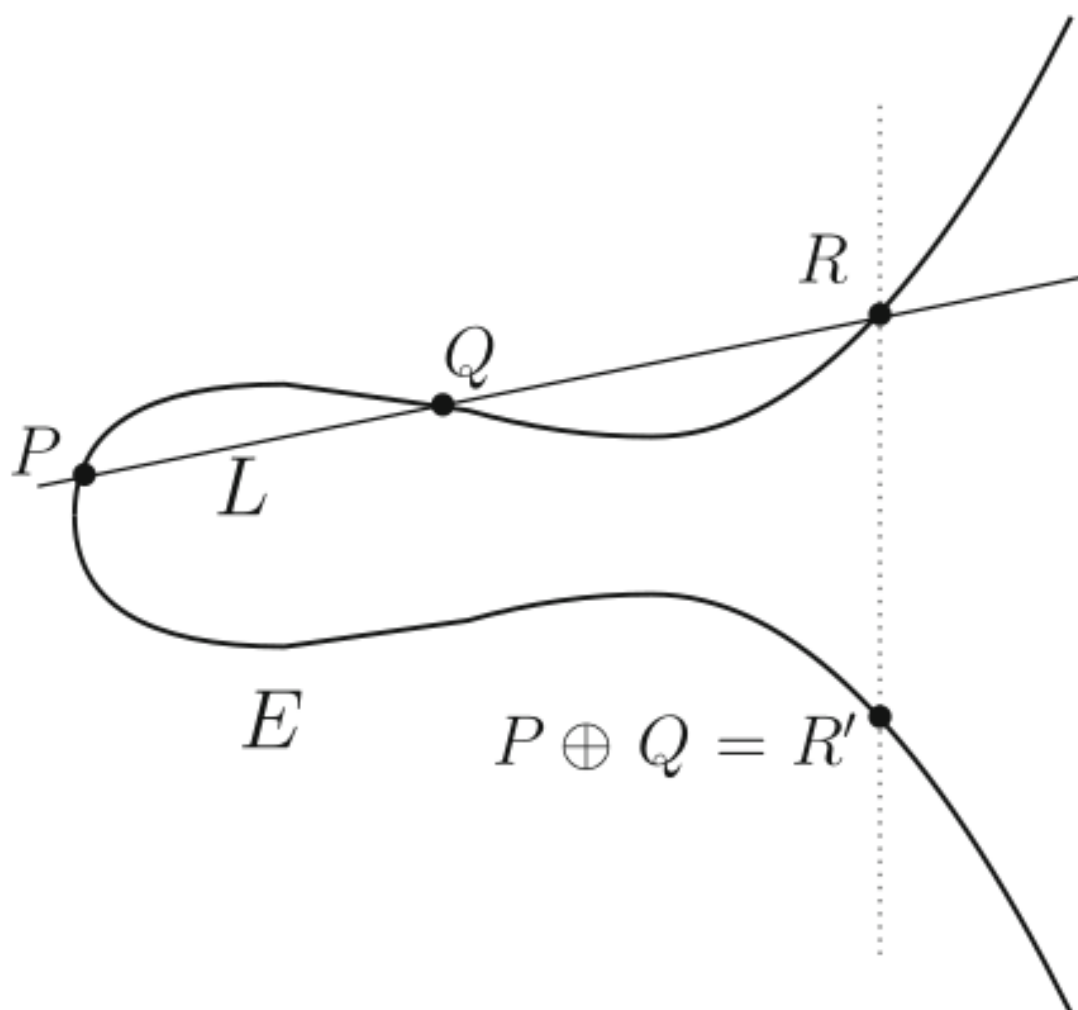


Рисунок 3:  $P \oplus Q$  з [7]

Розглянемо випадок  $P \oplus P = 2P = R'$ . Для цього проведемо дотичну до  $E$  в точці  $P$ . Для цього потрібно диференціювати  $E$  по  $x$ . На прикладі, який розглядався раніше:

$$2y \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 15 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 15}{2y}$$

Підставляючи координати  $P = (7, 16)$  отримуємо  $L : y = \frac{33}{8}x - \frac{103}{8}$ .

Аналогічно попередньому прикладу знаходимо  $R = (\frac{193}{64}, -\frac{223}{512})$ , а отже

$$P \oplus P = R' = -R = (\frac{193}{64}, \frac{223}{512})$$

Цей метод називається методом дотичної. Наведене вище в графічно:

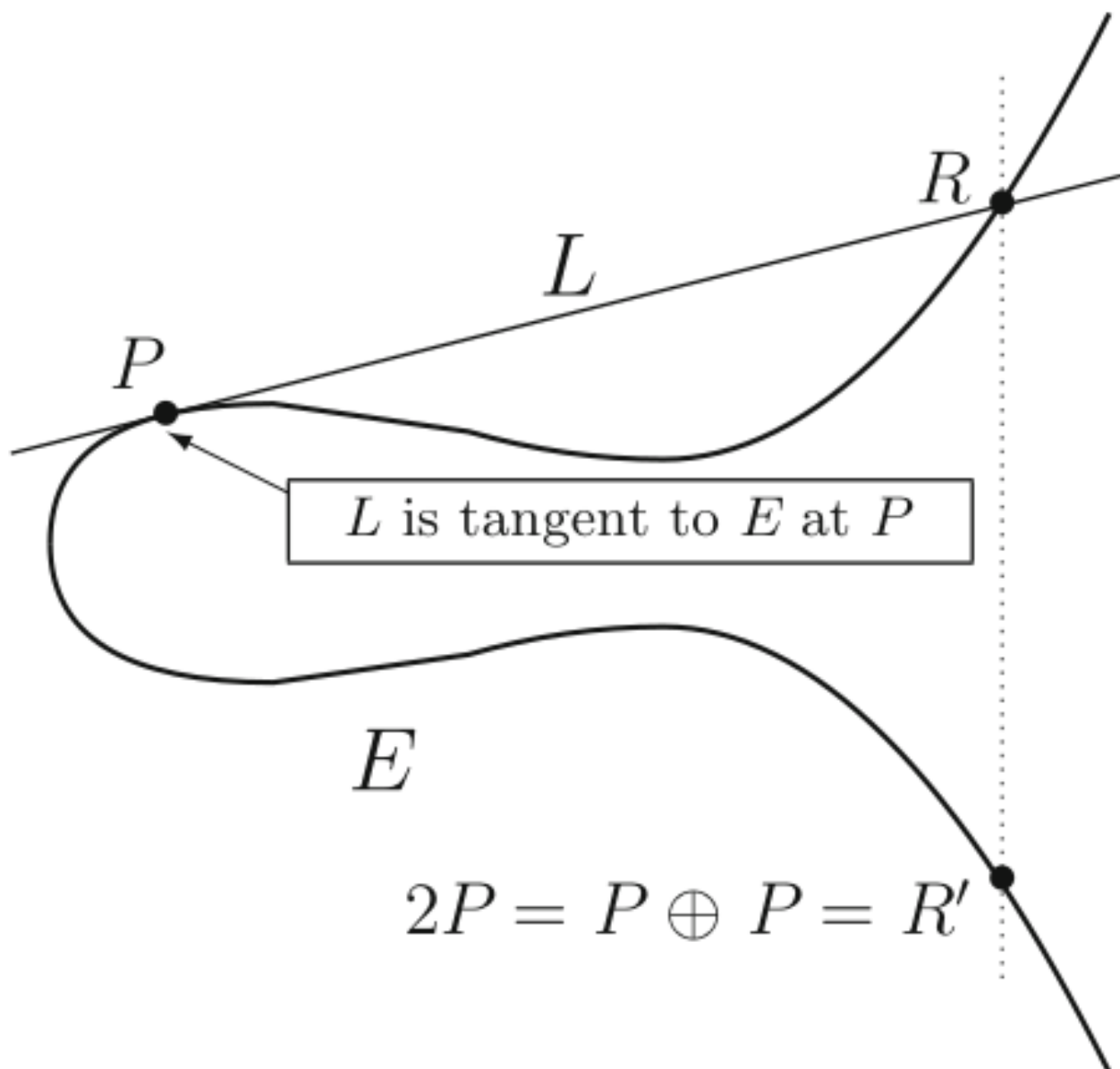


Рисунок 4:  $P \oplus P$  з [7]

Залишилось розглянути останній випадок:  $P \oplus (-P)$ . Для цього введемо спеціальну точку, що називається точкою на нескінченності:  $\mathcal{O}$ , тоді

$P \oplus (-P) = \mathcal{O}$ . Графічно це виглядає наступним чином:

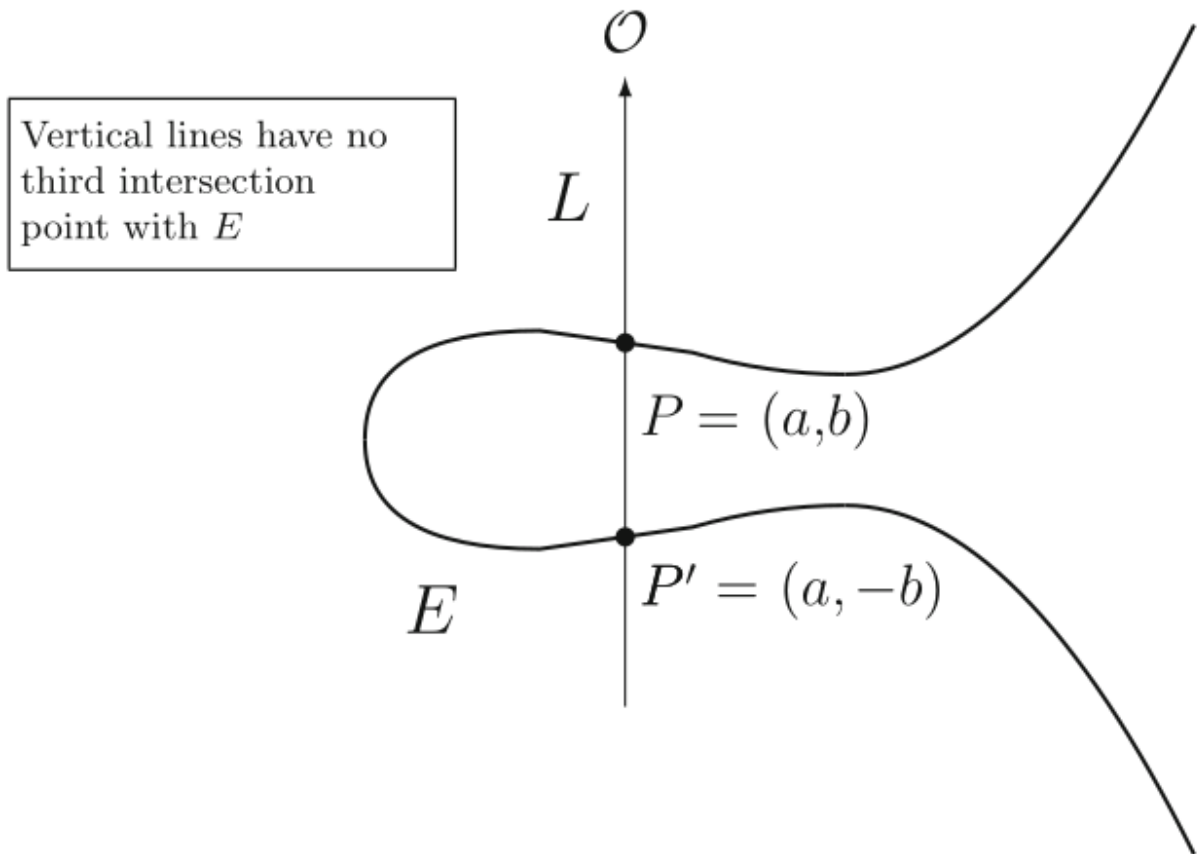


Рисунок 5:  $P \oplus (-P) = \mathcal{O}$  з [7]

Формальний кінцевий алгоритм, що покриває всі вищенаведені випадки, буде наведено у наступному підрозділі.

### 1.2.2. $E / \mathbb{F}_p$

Перейдемо до еліптичних кривих що застосовуються у криптографії - еліптичних кривих над скінченими полями. Почнемо з визначення:

Нехай  $p > 3$  - просте число. Тоді еліптичною кривою  $E$  визначеною над  $\mathbb{F}_p$  є множина розв'язків рівняння  $y^2 = x^3 + a * x + b$ , де  $a, b \in \mathbb{F}_p$  задовільняють умову  $4a^3 + 27b^2 \neq 0$ . Ця умова потрібна щоб впевнитись, що рівня  $x^3 + ax + b = 0$  має тільки один корінь. У випадку, якщо попередня властивість не виконується, рівняння кривої буде мати 2, або 3 однакових кореня. Нехай у

такому випадку коренем рівняння кривої буде  $x_0$ , тоді точка  $(x_0, 0)$  називається сингулярною, і відповідна крива теж називається сингулярною.

Множиною точок еліптичною кривою  $E / \mathbb{F}_p : y^2 = x^3 + ax + b; a, b \in \mathbb{F}_p$  є  $E(\mathbb{F}_p) = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{F}_p \wedge y^2 = x^3 + ax + b\} \cup \{\mathcal{O}\}$ .

Розглянемо приклад. Нехай  $E : y^2 = x^3 + 1$  визначена на  $\mathbb{F}_{11}$ , тоді:  
 $E(\mathbb{F}_{11}) = \{\mathcal{O}, (-1, 0), (0, \pm 1), (2, \pm 3), (5, \pm 4), (7, \pm 5), (9, \pm 2)\}$

Тепер розглянемо  $\oplus$  для  $E(\mathbb{F}_p)$ . Для цього будемо спиратися на результати розгляду  $(E(\mathbb{R}), \oplus)$ , бо для  $E(\mathbb{F}_p)$  алгоритм виглядає аналогічно до алгоритму для  $E(\mathbb{R})$ , але його не вдасться легко інтерпретувати геометрично. Розглядом геометричної інтерпретації обчислень над точками еліптичних кривих над скінченими полями займається алгебраїчна геометрія і це виходить за межі даної роботи. Нехай  $P = (x_p, y_p) \vee \mathcal{O}, Q = (x_q, y_q) \vee \mathcal{O} \in E(\mathbb{F}_p)$ :

- Якщо  $P = \mathcal{O} \rightarrow P \oplus Q = Q$
- Інакше, якщо  $Q = \mathcal{O} \rightarrow P \oplus Q = P$
- Інакше, якщо  $Q = -P \rightarrow P \oplus Q = \mathcal{O}$  (варто зазначити що це покриває випадок коли  $y_p = y_q = 0$ )
- Інакше, якщо  $P = Q$  використовуємо метод дотичної:  $\lambda = \frac{3x_p + a}{2y_p}$
- Інакше використовуємо метод хорди:  $\lambda = \frac{y_q - y_p}{x_q - x_p}$
- $x = \lambda^2 - x_p - x_q; y = \lambda(x_p - x) - y_p \rightarrow P \oplus Q = (x, y)$

$(E(\mathbb{F}_p), \oplus)$  утворюють циклічну абелеву групу.

Наведений вище алгоритм для еліптичних кривих загального вигляду має 2 основних недоліки:

1. Він не є достатньо швидким, як буде розглянуто далі існують спеціальні види еліптичних кривих, для яких його можна прискорити
2. Імплементация додавання точок еліптичної кривої має працювати за константний час, інакше можлива атака що викриває приватний ключ. Як можна побачити,

даний алгоритм важко реалізувати таким чином, щоб він працював за константиний час через різну кількість обчислень за різних умов.

### 1.3. Додаткові обчислення в $E(\mathbb{F}_p)$

#### 1.3.1. $|E(\mathbb{F}_p)|$

Однією з найважливіших характеристик еліптичної над скінченим полем є  $q = |E(\mathbb{F}_p)|$  - розмір групи. Стосовно цієї характеристики існує теорема Hesse(Гассе):

Нехай  $E / \mathbb{F}_{p^e}$ , тоді:  $|E(\mathbb{F}_{p^e})| = p^e + 1 - t_{p^e}; t_{p^e} \leq 2\sqrt{p^e}$  - називається слідом Фробеніуса.

Важливим є здатність точно обчислити  $|E(\mathbb{F}_{p^e})|$ . Вперше ефективний алгоритм запропонував Schoof в [8], потім Elkies і Atkin запропонували поліпшення складності роботи цього алгоритму [9]. Результат називається SEA, він залишається найшвидшим алгоритмом до цього часу і має складність  $O(\log^2 p * M(\log^2 p) / \log \log p)$ , де  $M(n)$  - складність множення.

#### 1.3.2. Обчислення $nP$

Більшість ЕСС криптосистем використовують обчислення  $nP, P \in E(\mathbb{F}_p)$ . Для того щоб ці системи було можливо використовувати у реальному світі це обчислення має бути швидким. Спочатку визначимо формально, що

$$P \in E(\mathbb{F}_p), n \geq 1 \in \mathbb{N} : nP = (n-1)P \oplus P$$

Очевидний приклад:  $3P = P + 2P = P + P + P$ . Також зрозуміло що обчислювати  $nP$  наївно, за  $n-1$  додавань - неоптимально, тому використовують оптимізації:

**Double-and-add(подвоюй-і-додавай).** З її допомогою можна обчислити  $nP$  за не більше ніж  $2 \log_2 n$  додавань. Існують 2 версії цього алгоритму: яка використовує інверсію ( $P \rightarrow -P$ ) і яка не використовує. Оскільки знаходження точки еліптичної кривої оберненою до даної - тривільне і швидке, і перша версія працює за не більшу кількість додавань ніж друга, то використовують



частіше її. Я не наводжу тут алгоритм, оскільки я наведу в наступному розділі його реалізацію.

### Montgomery ladder(Сходи Монтгомері)

Швидкість обчислення  $nP$  є важливою характеристикою кривої. Існують криві, для яких можна оптимізувати як одиничну операцію  $P + Q$ , так і обчислення  $nP$  в цілому.

#### 1.3.3. Дискретний логарифм в $E(\mathbb{F}_p)$

Нехай  $E$  - еліптична крива,  $\mathbb{F}_p$  - скінчене поле,  $P \in E(\mathbb{F}_p)$ ,  $Q \in \langle P \rangle$ , тоді дискретним логарифмом  $Q$  за основою  $P$  є таке  $n$ , що  $Q = nP$  і позначається  $n = \log_P Q$ .

Нехай  $q$  - порядок  $P$ , тоді очевидно що, якщо  $Q = n_0 P$ , то  $Q = (n_0 + iq)P$ ,  $\forall i \in \mathbb{N}$ . Для визначеності будемо вважати, що дискретний логарифм - це найменше таке  $n$ , що  $Q = nP$ . У такому випадку зрозуміло, що  $\log_P(Q) \in \mathbb{Z}_q$ .

Важливо відмітити, що для дискретного логарифму точок еліптичної кривої виконується властивість звичайного логарифму:

$$\log_P(Q_1 + Q_2) = \log_P(Q_1) + \log_P(Q_2), \forall Q_1, Q_2 \in \langle P \rangle$$

З цього випливає, що  $\log_P$  визначає груповий гомоморфізм:

$$\log_P : \langle P \rangle \rightarrow \mathbb{Z}_q$$

Зазвичай на практиці  $P$  вибирається з генераторів  $E(\mathbb{F}_p)$ .

#### 1.4. Pairing(Спарювання точок еліптичної кривої)

$E / \mathbb{F}_p$  має додаткову структуру - pairing. Вона може бути використана для побудови криптосистем неможливих для циклічних груп у загальному випадку, а також для  $\mathbb{Z}_p^*$  і дозволяє розширити множину криптосистем ЕСС. Зазвичай у визначенні використовують мультиплікативні групи, замість адитивних, але оскільки ми концентруємося саме на еліптичних кривих, то:

Нехай  $\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_T$  - циклічні групи порядку  $q$ , де  $q$  - просте.

$g_0 \in \mathbb{G}_0, g_1 \in \mathbb{G}_1$  - генератори. Pairing - це ефективно обчислювальна функція  $e : \mathbb{G}_0 \times \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_T$ , яка задовільняє наступні вимоги:

1. Білінеарність.  $\forall u, u' \in \mathbb{G}_0, \forall v, v' \in \mathbb{G}_1$ :

$$e(u + u', v) = e(u, v)e(u', v) \wedge e(u, v + v') = e(u, v)e(u, v')$$

2. Недегенаривність:  $g_T = e(g_0, g_1)$  - генератор в  $\mathbb{G}_T$

Коли  $\mathbb{G}_0 = \mathbb{G}_1$  ми кажемо що спарювання симетричне, інакше - асиметричне.

$\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1$  називаються pairing groups, а  $\mathbb{G}_T$  - target group (цільовою групою).

З білінеарності випливає основна властивість спарювання, яка використовується в побудові криптосистем:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_q : e(g_0^\alpha, g_1^\beta) = e(g_0, g_1)^{\alpha\beta} = e(g_0^\beta, g_1^\alpha)$$

Вимога недегенеративності потрібна щоб  $e$  не повертала завжди  $\mathcal{O} \in \mathbb{G}_T$  для всіх аргументів.

Найбільш зручним і ефективним спарюванням для  $E / \mathbb{F}_p$  - є асиметричне спарювання. Спарювання сконструйоване з  $E / \mathbb{F}_p$  має групи  $\mathbb{G}_0, \mathbb{G}_1, \mathbb{G}_T$  з наступними властивостями:

- $\mathbb{G}_0$  - це підгрупа  $E(\mathbb{F}_p)$  порядку  $q$ , де  $q$  - просте.
- $\mathbb{G}_1$  - це підгрупа  $E(\mathbb{F}_{p^d})$  порядку  $q$ , для деякого  $d \in \mathbb{N} > 0$ , де  $\mathbb{G}_0 \cap \mathbb{G}_1 = \{\mathcal{O}\}$
- $\mathbb{G}_T$  - це мультиплікативна група

## 1.5. Спеціальні види еліптичних кривих

### 1.5.1. Montgomery Curve (Крива Монтгомері)

Еліптична крива  $E / \mathbb{F}_p$  у формі Монтгомері у змінних  $u, v$  має вигляд:

$$Bv^2 = u^3 + Au^2 + u; A, B \in \mathbb{F}_p, B(A^2 - 4) \neq 0$$

Це рівняння кривої може бути легко приведено до рівняння Веерштрасса заміною змінних:  $u = Bx - \frac{A}{3}; v = By$ . Цікавою особливістю кривої Монтгомері є те, що  $|E(\mathbb{F}_p)|$  завжди ділиться на 4. З цього також випливає, що не кожену

криву у формі Веєрштраса можна привести до кривої у формі Монтгомері заміною змінних.

Криві Монтгомері дозволяють пришвидшити операцію додавання, шляхом оптимізації Montgomery ladder.

### 1.5.2. Edwards Curve(Крива Едвардса)

Еліптична крива  $E / \mathbb{F}_p$  формі Едвардса має вигляд:

$$x^2 + y^2 = 1 + dx^2y^2, d \neq 0, 1 \in \mathbb{F}_p$$

Аналогічно кривій Монтгомері, крива Едвардса може бути приведена до форми Вейерштраса заміною змінних, але не навпаки.  $|E(\mathbb{F}_p)|$  завжди ділиться на 4.

### 1.5.3. Koblitz Curve(Крива Кобліца)

## 1.6. Припущення на яких будується ЕСС

У цьому підрозділі розглядаються припущення, на які опираються ЕСС криптосистеми.

### 1.6.1. ECDLP

Почнемо з формального визначення:

ECDLP - це проблема знаходження дискретного логарифму для еліптичної кривої. Припущення полягає у тому, що ECDLP для точок еліптичної кривої над скінченим полем є складнообчислювальною проблемою, тобто не існує ефективного алгоритму обчислення дискретного логарифму.

На ECDLP існує багато атак - ефективних алгоритмів розв'язання. Ним присвячена ціла глава в [10]. Перша група атак працює для будь якої циклічної групи:

- 
- 
-

Такж існує група атак, що використовують додаткову структуру кривих - pairing(спарювання). Визначення і побудова pairing будуть описані згодом.

Такими атаками є:

- 
- 
- 

Оскільки ЕСС ґрунтується на припущенні про обчислювальну складність ECDLP і ЕСС активно використовується в реальних криптосистемах можна припустити, що для будь якої кривої  $E / \mathbb{F}_p$ , де  $p$  - достатньо велике число ECDLP складнообчислювальне, але це є хибним твердженням, у тому числі через наведені до цього атаки, наприклад:

- Якщо  $|E(\mathbb{F}_p)|$  не є простим і всі прості множники у його розкладі менші деякого  $q_{\max}$ , то тоді існує алгоритм обчислення дискретного логарифму в  $|E(\mathbb{F}_p)|$  за час  $\Theta(\sqrt{q_{\max}})$ .

Зокрема, якщо  $q_{\max} < 2^{80}$ , то ECDLP не є складнообчислювальною проблемою на практиці. Тому в реальних системах використовують криві  $E / \mathbb{F}_p$  для яких  $|E(\mathbb{F}_p)|$  рівне  $q$ ,  $4q$ , або  $8q$  для деякого простого  $q$ .

- Якщо  $|E(\mathbb{F}_p)| = p$ , то ECDLP для  $E(\mathbb{F}_p)$  розв'язний за поліноміальний час.

Такі криві називаються аномальними і не використовуються на практиці

- Нехай існує таке мале  $\tau > 0 \in \mathbb{N}$ , що  $|E(\mathbb{F}_p)|$  ділить  $p^\tau - 1$ . Тоді ECDLP в  $E(\mathbb{F}_p)$  можна звести до DLP в  $\mathbb{F}_{p^\tau}$ , що в свою чергу дозволить використати GNFS.

На практиці, якщо  $p$  - 256 бітне число і  $\tau = 2$ , то розв'язок ECDLP займе приблизно пару годин. Для захисту від цієї атаки, треба переконатися що  $p^\tau$  достатньо велике для того щоб GNFS в  $\mathbb{F}_{p^\tau}$  був нездійснений.

Але, при виконанні деякої множини вимог до еліптичної кривої, найоптимальніший алгоритм вирішення ECDLP працює не швидше ніж

найоптимальніший алгоритм вирішення DLP для довільної циклічної групи. Тобто, якщо параметри кривої підбрано правильно, то ECDLP має часову складність  $O(\sqrt{q})$ , де  $q = |E(\mathbb{F}_p)|$ .

### **1.6.2. CDH**

### **1.6.3. DDH**

З цього розділу має бути очевидно, що розробка своєї еліптичної кривої - це складна справа, до того ж, неправильно підібрана еліптична крива може призвести до того, що криптосистеми з її використанням не будуть безпечними. Тому на практиці використовують набір затверджених, або просто перевірених кривих. Деякі з них будуть розглянуті у цьому розділі далі.

## **1.7. Приклади еліптичних кривих у сучасній криптографії**

### **1.7.1. secp256r1 (P256)**

### **1.7.2. secp256k1 (Bitcoin curve)**

### **1.7.3. Curve25519**

## **1.8. Застосування еліптичних кривих поза межами ЕСС**

### **1.8.1. Алгоритм факторизації Ленстра**

### **1.8.2. Тест на простоту**

## **1.9. Висновки**

## **РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ У КРИПТОГРАФІЇ**

### **2.1. Протоколи узгодження ключів**

#### **2.1.1. ECDH**

### **2.2. Протоколи підпису і верифікації.**

#### **2.2.1. ECDSA**

#### **2.2.2. EdDSA**

#### **2.2.3. BLS**

## **РОЗДІЛ 3. ІМПЛЕМЕНТАЦІЯ БІБЛІОТЕКИ**

### **3.1. Core**

#### **3.1.1. Клас точки**

#### **3.1.2. Клас secp256k1**

#### **3.1.3. Клас кривої Curve25519**

### **3.2. Algos**

## **РОЗДІЛ 4. ПОРІВНЯННЯ З ІСНУЮЧИМИ БІБЛІОТЕКАМИ**

Benchmarks



## **ВИСНОВКИ**

## ПЕРЕЛІК ДЖЕРЕЛ ПОСИЛАННЯ

- [1] Daniel J. Bernstein, Niels Duif, Tanja Lange, Peter Schwabe, and Bo-Yin Yang, “High-speed high-security signatures,” 2011. [Online]. Available: <https://ed25519.cr.yp.to/ed25519-20110926.pdf>
- [2] W. Diffie, and M. E Hellman, “New directions in cryptography,” 1976. [Online]. Available: <https://ee.stanford.edu/~hellman/publications/24.pdf>
- [3] R. L. Rivest, A. Shamir, and L. Adleman, “A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems,” 1985. [Online]. Available: <https://people.csail.mit.edu/rivest/Rsapaper.pdf>
- [4] TAHER ELGAMAL, “Public key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms.” [Online]. Available: <https://caislab.kaist.ac.kr/lecture/2010/spring/cs548/basic/B02.pdf>
- [5] Arjen K. Lenstra, and H. W. Lenstra, “The development of the number field sieve.”
- [6] Dan Boneh, and Victor Shoup, *A Graduate Course in Applied Cryptography*, 2023. [Online]. Available: <http://toc.cryptobook.us/book.pdf>
- [7] Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher, and Joseph H. Silverman, *An Introduction to Mathematical Cryptography*, 2014.
- [8] R. Schoof., “Elliptic curves over finite fields and the computation of square roots mod  $p$ ,” 1985.
- [9] R. Schoof., “Counting points on elliptic curves over finite fields,” 1995.
- [10] Lawrence C. Washington, *Elliptic Curves: Number Theory and Cryptography*, 2008.