



Стабилизация планарного квадрокоптера

Метод обратной связи по состоянию

Никулин Василий, R3435

1. Введение

1

Объект управления

Планарный квадрокоптер: летательный аппарат с четырьмя роторами, движущийся в вертикальной плоскости.

- Координаты: x, z, θ
- Управление: суммарная тяга T и управляющий момент M
- Особенность: неполноприводная система

2

Задача управления

Стабилизация положения (x, z) и ориентации (θ) квадрокоптера.

- Компенсация внешних возмущений
- Обеспечение устойчивого поведения

3

Метод управления

Метод обратной связи по состоянию (LQR).

- Оптимальность
- Единая структура управления
- Гарантированная устойчивость

2. Постановка задачи: математическая модель

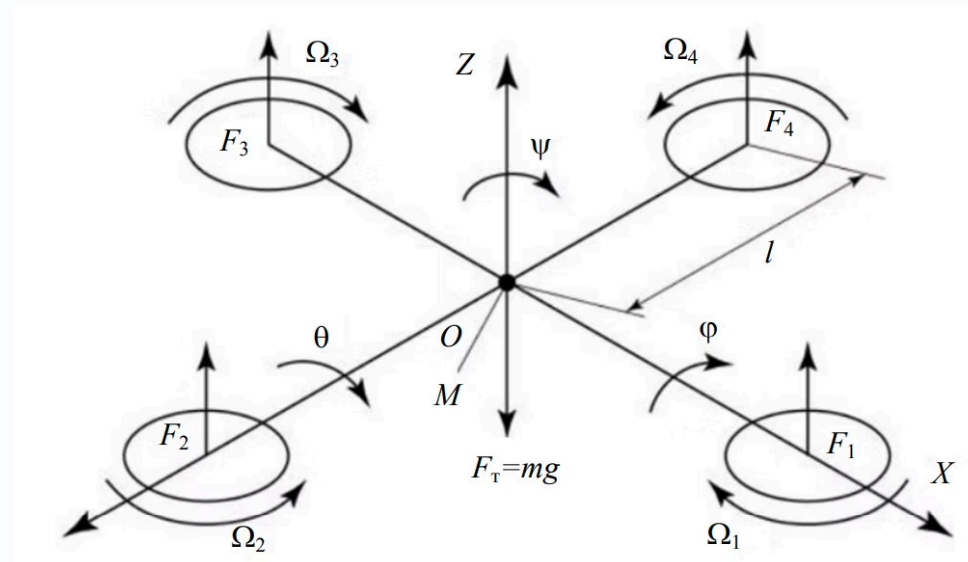
Вектор состояния и управления

Вектор состояния: $x = [x, v_x, z, v_z, \theta, \omega_\theta]^T$

Вектор управления: $u = [T, M]^T$

Параметры модели

- $m = 1.0$ кг (масса)
- $J = 0.01$ кг·м² (момент инерции)
- $g = 9.81$ м/с² (ускорение свободного падения)



Уравнения динамики (нелинейная модель)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= -(T/m) \sin(\theta) \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_z &= (T/m) \cos(\theta) - g \\ \dot{\theta} &= \omega_\theta \\ \dot{\omega}_\theta &= M/J\end{aligned}$$

2. Постановка задачи: линеаризация и анализ

Линеаризованная система в окрестности точки равновесия ($T_0 = mg, M_0 = 0, \theta = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{\delta x} &= \delta v_x \\ \dot{\delta v_x} &= -g\delta\theta \\ \dot{\delta z} &= \delta v_z \\ \dot{\delta v_z} &= \delta T/m \\ \dot{\delta\theta} &= \delta\omega_\theta \\ \dot{\delta\omega_\theta} &= \delta M/J\end{aligned}$$

Матричная форма: $\dot{x} = Ax + Bu$

Матрица A (6×6):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Матрица B (6×2):

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1/m & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1/J \end{bmatrix}$$

- **Управляемость:** $\text{rank}(C) = 6 \rightarrow$ система полностью управляема.
- **Собственные значения:** Все равны нулю \rightarrow система на границе устойчивости.

3. Синтез управления: LQR-регулятор

Закон управления

$$u = u_0 - K \cdot \delta x$$

- $u_0 = [mg, 0]^T$
- K (2×6) - матрица коэффициентов обратной связи
- δx - вектор отклонений состояния

Функционал качества

$$J = \int_0^\infty (\delta x^T Q \delta x + u^T R u) dt$$

- Q - веса для переменных состояния
- R - веса для управляющих воздействий



Алгебраическое уравнение Риккати (ARE)

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

Матрица коэффициентов обратной связи: $K = R^{-1} B^T P$

3. Синтез управления: выбор весовых матриц

Матрицы весов

$$Q = \text{diag}([100, 10, 100, 10, 50, 5])$$

$$R = \text{diag}([1, 0.01])$$

- Высокие веса для положения $(q_x, q_z) \rightarrow$ точная стабилизация.
- Высокий вес для угла $(q_\theta) \rightarrow$ стабилизация ориентации.
- Низкий вес для момента $(r_M) \rightarrow$ быстрая реакция по ориентации.



Полученная матрица K

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10.0 & 5.48 & 0 & 0 \\ -10.0 & -7.00 & 0 & 0 & 19.15 & 2.32 \end{bmatrix}$$

Тяга T управляется по высоте, момент M - по горизонтали и ориентации.

3. Синтез управления: Анализ замкнутой системы

Динамика замкнутой системы: $\dot{x} = (A - BK)x$

Собственные значения замкнутой системы

- $\lambda_1 = -223.58$
- $\lambda_{2,3} = -2.63 \pm 2.63j$
- $\lambda_4 = -3.16$
- $\lambda_{5,6} = -2.74 \pm 1.58j$

Все собственные значения имеют отрицательные вещественные части \rightarrow асимптотическая устойчивость системы.

Ограничения на управляющие воздействия

- $T = \max(0, \min(T_{max}, T_0 + \delta T))$, где $T_{max} = 2.0 \cdot mg$
- $M = \max(-M_{max}, \min(M_{max}, \delta M))$, где $M_{max} = 0.8 \text{ Н}\cdot\text{м}$

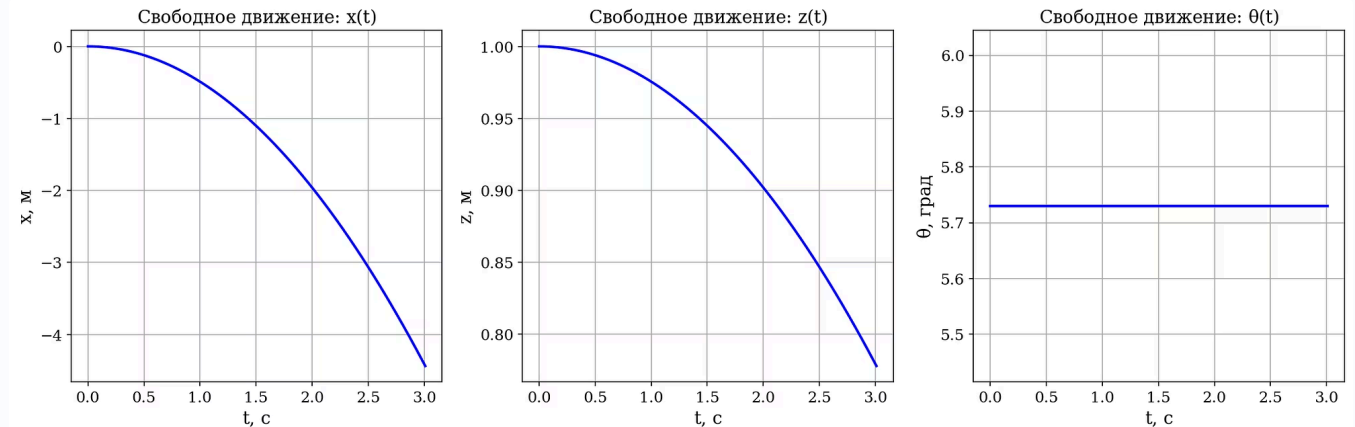
4. Эксперименты и моделирование

Параметры симуляции

- Шаг интегрирования: $dt = 0.01$ с
- Время симуляции: $T = 10 - 15$ с
- Весовые матрицы: $Q = \text{diag}([100, 10, 100, 10, 50, 5])$, $R = \text{diag}([1, 0.01])$

Моделирование свободного движения

- Начальные условия: $x_0 = 0$, $z_0 = 1.0$ м, $\theta_0 = 0.1$ рад
- Без управления квадрокоптер падает за ~ 3.0 с.
- Вывод: система неустойчива без управления.



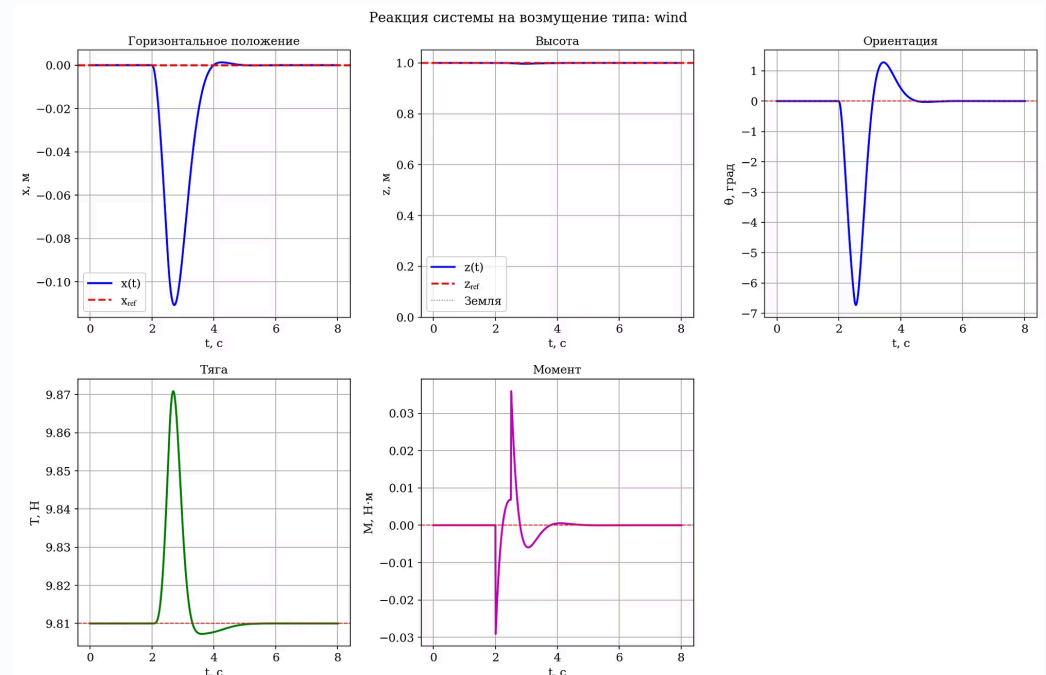
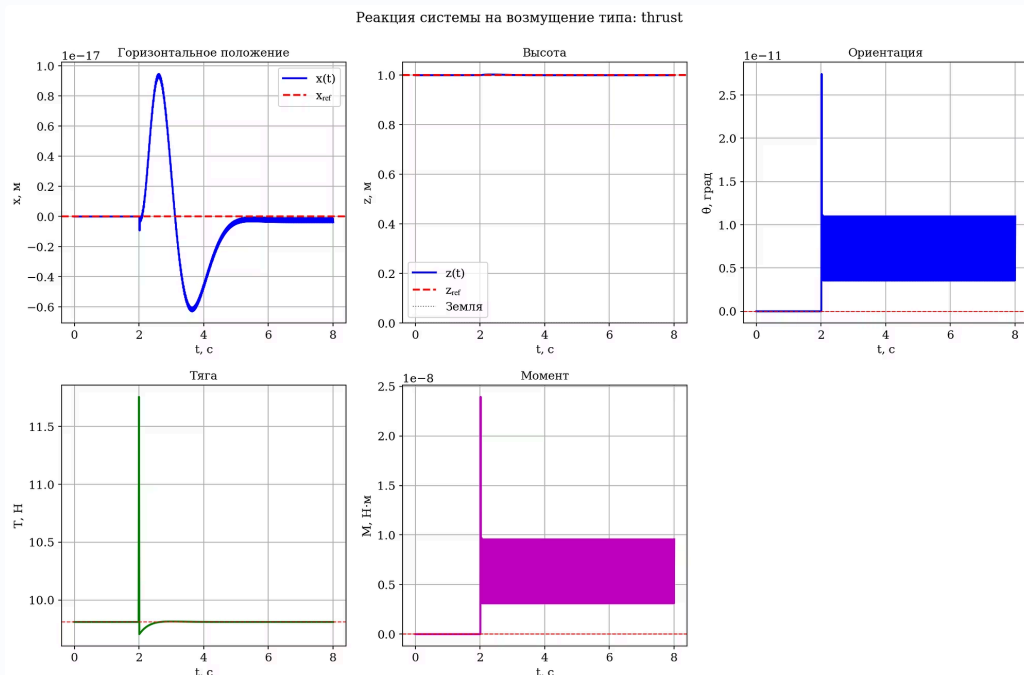
4. Эксперименты и моделирование

Переходные процессы при управлении $(x=0, z=0) \rightarrow (x=2, z=1.5)$

- Время переходного процесса (t_s): x : 1.2-1.5 с, z : 1.8-2.0 с, θ : 1.5-2.0 с
- Перерегулирование (σ): < 20%
- Статическая ошибка (e_{ss}): < 0.01 м для x, z ; < 0.001 рад для θ

Моделирование при внешних возмущениях

- Возмущение по тяге: $\Delta T = 2.0$ Н (импульсное)
- Ветровое возмущение: $v_w = 1.0$ м/с
- Результат: регулятор успешно компенсирует возмущения, система возвращается к заданному состоянию за 1.5-2.0 с.



5. Заключение

Основные результаты

- Построена нелинейная и линеаризованная модель.
- Система полностью управляема, но неустойчива без управления.
- Разработан LQR-регулятор с оптимальной матрицей K .
- Моделирование подтвердило устойчивость и эффективность.

Преимущества LQR

- Оптимальность и единая структура управления.
- Гарантированная устойчивость для линеаризованной системы.
- Систематическая настройка через матрицы Q и R .

Ограничения

- Требуется полное измерение состояния.
- Синтез для линеаризованной модели.
- Качество управления может ухудшиться при больших отклонениях.