

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»

Мегафакультет компьютерных технологий и управления  
Факультет систем управления и робототехники

**ОТЧЕТ**

**по проекту**

по теме *«Стабилизация положения и ориентации планарного  
квадрокоптера методом обратной связи по состоянию»*

**Планирование траекторий движения**

Студент:

*Группа № R3435*

*В.В. Никулин*

Преподаватели:

*к. т. н., доцент*

*С.А. Чепинский*

*к. т. н., доцент*

*А.Ю. Краснов*

Санкт-Петербург 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
1 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ .....	5
1.1 Система координат и обозначения .....	5
1.2 Уравнения поступательного движения .....	6
1.2.1 Модель силы тяги роторов .....	6
1.2.2 Уравнения динамики .....	7
1.2.3 Кинематические соотношения .....	8
1.2.4 Система уравнений поступательного движения .....	8
1.3 Уравнения вращательной динамики .....	8
1.3.1 Управляющий момент .....	8
1.3.2 Уравнение динамики вращения .....	9
1.3.3 Кинематическое соотношение .....	9
1.3.4 Система уравнений вращательного движения .....	10
1.4 Полная математическая модель .....	10
1.5 Параметры модели .....	10
2 АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ .....	12
2.1 Точка равновесия .....	12
2.2 Линеаризация системы .....	12
2.3 Управляемость системы .....	14
2.4 Наблюдаемость системы .....	14
2.5 Собственные значения и устойчивость .....	14
3 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ ....	16
3.1 Общая структура регулятора .....	16
3.2 Метод линейно-квадратичного регулятора (LQR) .....	17
3.3 Выбор весовых матриц .....	17
3.4 Решение уравнения Риккати .....	17
3.5 Анализ замкнутой системы .....	18
3.6 Ограничения на управляющие воздействия .....	19
3.7 Применение к нелинейной системе .....	19
3.8 Показатели качества регулирования .....	20

4	РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ .....	21
4.1	Параметры симуляции .....	21
4.2	Сценарии моделирования.....	21
4.3	Показатели качества .....	22
4.4	Анализ результатов .....	22
4.5	Моделирование свободного движения .....	23
4.6	Графики переходных процессов .....	23
4.7	Анализ управляющих воздействий .....	27
4.8	Моделирование при различных начальных условиях .....	27
4.9	Моделирование при внешних возмущениях.....	28
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	31
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	33

## ВВЕДЕНИЕ

Планарный квадрокоптер представляет собой летательный аппарат с четырьмя роторами, способный перемещаться в вертикальной плоскости. Основными координатами такой системы являются горизонтальное положение  $x$ , высота  $z$  и угол наклона корпуса  $\theta$ , который определяет наклон аппарата относительно горизонта. Управление аппаратом осуществляется с помощью двух величин: суммарной тяги, действующей на центр масс, и управляющего момента, изменяющего угол наклона корпуса. Особенностью планарного квадрокоптера является то, что горизонтальное движение возникает косвенно через наклон корпуса. Это делает систему неполноприводной и создаёт дополнительные трудности при разработке алгоритмов управления, поскольку изменение одной переменной напрямую влияет на несколько аспектов движения.

В последние годы квадрокоптеры получили широкое распространение и перестали быть исключительно экспериментальными аппаратами. Их используют в аэросъёмке, мониторинге окружающей среды, доставке грузов и даже в научных исследованиях. Несмотря на кажущуюся простоту конструкции, управление квадрокоптером является нетривиальной задачей из-за сильной взаимосвязи движений по разным осям и высокой нелинейности системы.

В данной работе решается задача стабилизации положения и ориентации планарного квадрокоптера с использованием метода обратной связи по состоянию и линейно-квадратичного регулятора (LQR). Этот метод позволяет оптимально выбрать управляющие воздействия, минимизируя отклонения от заданного положения и величину усилий, приложенных к системе. Такой подход обеспечивает стабильность аппарата даже при воздействии внешних возмущений и внутренних динамических эффектов, а также даёт возможность оценить эффективность системы управления до её практической реализации.

Цель работы заключается в разработке надёжной системы стабилизации, которая позволяет удерживать квадрокоптер на заданной высоте и поддерживать правильное положение корпуса.

# 1 ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

## 1.1 Система координат и обозначения

Рассмотрим планарный квадрокоптер, движущийся в вертикальной плоскости  $x-z$ , изображённый на рисунке 1. Планарный квадрокоптер представляет собой упрощённую модель полного квадрокоптера, в которой движение ограничено одной вертикальной плоскостью, что позволяет существенно упростить анализ динамики системы при сохранении основных физических особенностей.

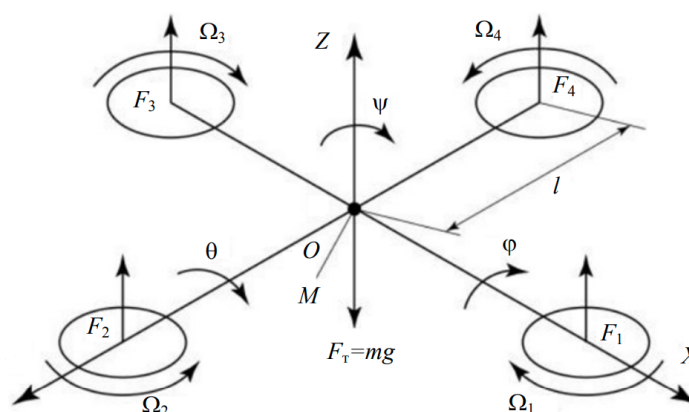


Рисунок 1 — Схема квадрокоптера в пространстве и система координат

В работе используются две системы координат:

- **Инерциальная система координат**  $O_{xyz}$  — неподвижная система координат, связанная с землёй. Ось  $X$  направлена горизонтально вперёд, ось  $Z$  направлена вертикально вверх, ось  $Y$  перпендикулярна плоскости движения (на рисунке не показана, так как движение происходит в плоскости  $x-z$ ).
- **Связанная система координат**  $O_{x_b y_b z_b}$  — система координат, жёстко связанная с корпусом квадрокоптера. Ось  $Z_b$  направлена вверх вдоль нормали к плоскости роторов, ось  $X_b$  направлена вперёд вдоль продольной оси квадрокоптера.

Основными координатами квадрокоптера являются:

- $x$  — горизонтальное положение центра масс в инерциальной системе координат [м];

- $z$  — высота центра масс над уровнем земли [м];
- $\theta$  — угол наклона корпуса (тангаж) [рад], определяющий ориентацию связанной системы координат относительно инерциальной.

Угол  $\theta$  положителен при наклоне корпуса вперёд (нос квадрокоптера опускается). Горизонтальное перемещение возникает только за счёт изменения тангажа, поэтому крен  $\phi$  (вращение вокруг продольной оси  $X_b$ ) и рыскание  $\psi$  (вращение вокруг вертикальной оси  $Z$ ) не учитываются в модели, так как в плоскости  $x-z$  они не влияют на динамику квадрокоптера.

## 1.2 Уравнения поступательного движения

Поступательное движение центра масс планарного квадрокоптера описывается законами Ньютона для материальной точки. На центр масс действуют следующие силы:

- Сила тяжести  $\vec{F}_g = -mg\vec{e}_z$ , направленная вертикально вниз;
- Суммарная сила тяги роторов  $\vec{T}$ , направление которой зависит от ориентации корпуса;
- Аэродинамические силы (сопротивление воздуха, подъёмная сила), которые в первом приближении для простоты моделирования пренебрежимо малы при малых скоростях движения.

### 1.2.1 Модель силы тяги роторов

Каждый из четырёх роторов квадрокоптера создаёт силу тяги, пропорциональную квадрату угловой скорости вращения:

$$T_i = k_f \Omega_i^2, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (1)$$

где  $T_i$  — тяга  $i$ -го ротора [Н],  $k_f$  — коэффициент тяги [Н·с<sup>2</sup>/рад<sup>2</sup>],  $\Omega_i$  — угловая скорость  $i$ -го ротора [рад/с].

Суммарная сила тяги всех роторов:

$$T = \sum_{i=1}^4 T_i = k_f \sum_{i=1}^4 \Omega_i^2 \quad (2)$$

В связанной системе координат сила тяги направлена вдоль оси  $Z_b$  (нормаль к плоскости роторов). В инерциальной системе координат направление

этой силы определяется углом наклона (тангажа)  $\theta$  через матрицу поворота:

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} T \quad (3)$$

Таким образом, проекции суммарной силы тяги  $\vec{T}$  на оси инерциальной системы координат имеют вид:

$$T_x = -T \sin \theta, \quad (4)$$

$$T_z = T \cos \theta. \quad (5)$$

Знак «минус» в выражении для  $T_x$  обусловлен тем, что положительный угол  $\theta$  (наклон вперёд) создаёт силу, направленную в отрицательном направлении оси  $X$ , что соответствует физической интуиции: для движения вперёд квадрокоптер должен наклониться вперёд.

### 1.2.2 Уравнения динамики

Применяя второй закон Ньютона к центру масс квадрокоптера, получаем уравнения движения в проекциях на оси инерциальной системы координат:

$$m\ddot{x} = T_x = -T \sin \theta, \quad (6)$$

$$m\ddot{z} = T_z - mg = T \cos \theta - mg. \quad (7)$$

Уравнения (6) и (7) являются нелинейными и связывают поступательное движение аппарата с его ориентацией  $\theta$  и управляющим воздействием  $T$ .

**Ключевая особенность планарного квадрокоптера:** из уравнения (6) видно, что прямое управление горизонтальной координатой  $x$  отсутствует. Горизонтальное движение возникает косвенно, только при наличии ненулевого угла  $\theta$ , который создаёт горизонтальную проекцию силы тяги. Это отражает неполноприводность системы: при двух управляющих воздействиях ( $T$  и момент  $M$ , управляющий  $\theta$ ) необходимо стабилизировать три степени свободы ( $x, z, \theta$ ).

### 1.2.3 Кинематические соотношения

Кинематические соотношения связывают скорости центра масс с его координатами:

$$\dot{x} = v_x, \quad (8)$$

$$\dot{z} = v_z, \quad (9)$$

где  $v_x$  и  $v_z$  — проекции вектора скорости центра масс на оси инерциальной системы координат [м/с].

### 1.2.4 Система уравнений поступательного движения

Объединяя уравнения динамики (6), (7) и кинематики (8), (9), получаем полную систему уравнений поступательного движения планарного квадрокоптера в форме Коши:

$$\dot{x} = v_x, \quad (10a)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{1}{m}T \sin \theta, \quad (10b)$$

$$\dot{z} = v_z, \quad (10c)$$

$$\dot{v}_z = \frac{1}{m}T \cos \theta - g. \quad (10d)$$

Система (10) описывает эволюцию вектора состояния  $\begin{bmatrix} x & v_x & z & v_z \end{bmatrix}^T$  в зависимости от управляющих воздействий  $T$  и  $\theta$  (где угол  $\theta$ , в свою очередь, управляется моментом  $M$ ).

## 1.3 Уравнения вращательной динамики

Вращательное движение корпуса квадрокоптера относительно центра масс описывается уравнением динамики вращательного движения твёрдого тела вокруг неподвижной оси.

### 1.3.1 Управляющий момент

Управляющий момент  $M$  (или  $u_2$ ) создаётся за счёт разности тяг роторов, расположенных на противоположных сторонах квадрокоптера. Для пла-



нарного квадрокоптера, движущегося в плоскости  $x-z$ , момент создаётся разностью тяг передних и задних роторов:

$$M = L(T_2 + T_4 - T_1 - T_3) \quad (11)$$

где  $L$  — расстояние от центра масс до оси ротора [м],  $T_1, T_2, T_3, T_4$  — тяги роторов.

При малых углах наклона и симметричной конфигурации квадрокоптера можно считать, что управляющий момент  $M$  является независимым управляющим воздействием, наряду с суммарной тягой  $T$ .

### 1.3.2 Уравнение динамики вращения

Вращательное движение корпуса относительно центра масс определяется моментом инерции  $J$  и управляющим моментом  $M$ :

$$J\ddot{\theta} = M \quad (12)$$

где  $\ddot{\theta}$  — угловое ускорение корпуса [рад/с<sup>2</sup>],  $J$  — момент инерции корпуса относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости движения [кг·м<sup>2</sup>].

Уравнение (12) получено из основного уравнения динамики вращательного движения:

$$\frac{d}{dt}(J\dot{\theta}) = M \quad (13)$$

при условии, что момент инерции  $J$  постоянен (жесткий корпус).

### 1.3.3 Кинематическое соотношение

Кинематическая связь между угловым положением и угловой скоростью задаётся выражением:

$$\dot{\theta} = \omega_{\theta} \quad (14)$$

где  $\omega_{\theta}$  — угловая скорость тангажа [рад/с].

### 1.3.4 Система уравнений вращательного движения

Объединяя уравнения динамики (12) и кинематики (14), получаем систему уравнений вращательного движения:

$$\dot{\theta} = \omega_{\theta}, \quad (15a)$$

$$\dot{\omega}_{\theta} = \frac{1}{J}M. \quad (15b)$$

### 1.4 Полная математическая модель

Объединяя системы уравнений поступательного (10) и вращательного (15) движения, получаем полную математическую модель планарного квадрокоптера:

$$\dot{x} = v_x, \quad (16a)$$

$$\dot{v}_x = -\frac{1}{m}T \sin \theta, \quad (16b)$$

$$\dot{z} = v_z, \quad (16c)$$

$$\dot{v}_z = \frac{1}{m}T \cos \theta - g, \quad (16d)$$

$$\dot{\theta} = \omega_{\theta}, \quad (16e)$$

$$\dot{\omega}_{\theta} = \frac{1}{J}M. \quad (16f)$$

Система (16) описывает эволюцию вектора состояния:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & v_x & z & v_z & \theta & \omega_{\theta} \end{bmatrix}^T \quad (17)$$

в зависимости от вектора управления:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} T & M \end{bmatrix}^T \quad (18)$$

### 1.5 Параметры модели

В таблице 1 приведены значения параметров модели планарного квадрокоптера, используемые в симуляции.

Таблица 1 — Параметры модели планарного квадрокоптера

Параметр	Обозначение	Значение	Единица
Масса	$m$	1.0	кг
Момент инерции	$J$	0.01	кг·м <sup>2</sup>
Ускорение свободного падения	$g$	9.81	м/с <sup>2</sup>
Расстояние до ротора	$L$	0.25	м
Коэффициент тяги	$k_f$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	Н·с <sup>2</sup> /рад <sup>2</sup>

## 2 АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

### 2.1 Точка равновесия

Точка равновесия планарного квадрокоптера соответствует состоянию, при котором аппарат находится в покое на заданной высоте с горизонтальной ориентацией корпуса. В этом состоянии все скорости равны нулю, а суммарная тяга компенсирует силу тяжести.

Для системы уравнений (10) и уравнения вращательной динамики точка равновесия определяется как:

$$x = x_0, \quad v_x = 0, \quad z = z_0, \quad v_z = 0, \quad \theta = 0, \quad \omega_\theta = 0 \quad (19)$$

где  $x_0$  и  $z_0$  — заданные координаты положения квадрокоптера.

В точке равновесия управляющие воздействия принимают значения:

$$T_0 = mg, \quad u_2 = 0 \quad (20)$$

где  $T_0$  — тяга, компенсирующая силу тяжести.

### 2.2 Линеаризация системы

Для синтеза регулятора обратной связи по состоянию необходимо линеаризовать нелинейную модель в окрестности точки равновесия. Введём отклонения от равновесного состояния:

$$\delta x = x - x_0, \quad \delta v_x = v_x, \quad \delta z = z - z_0, \quad \delta v_z = v_z, \quad \delta \theta = \theta, \quad \delta \omega_\theta = \omega_\theta \quad (21)$$

$$\delta T = T - T_0, \quad \delta u_2 = u_2 \quad (22)$$

При малых углах наклона ( $\theta \ll 1$ ) справедливы приближения:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1 \quad (23)$$

Линеаризованная система уравнений имеет вид:

$$\delta \dot{x} = \delta v_x, \quad (24a)$$

$$\delta \dot{v}_x = -\frac{T_0}{m}\delta\theta - \frac{\delta T}{m}\theta_0, \quad (24b)$$

$$\delta \dot{z} = \delta v_z, \quad (24c)$$

$$\delta \dot{v}_z = \frac{\delta T}{m}, \quad (24d)$$

$$\delta \dot{\theta} = \delta \omega_\theta, \quad (24e)$$

$$\delta \dot{\omega}_\theta = \frac{\delta u_2}{J} \quad (24f)$$

Учитывая, что в точке равновесия  $\theta_0 = 0$  и  $T_0 = mg$ , получаем:

$$\delta \dot{x} = \delta v_x, \quad (25a)$$

$$\delta \dot{v}_x = -g\delta\theta, \quad (25b)$$

$$\delta \dot{z} = \delta v_z, \quad (25c)$$

$$\delta \dot{v}_z = \frac{\delta T}{m}, \quad (25d)$$

$$\delta \dot{\theta} = \delta \omega_\theta, \quad (25e)$$

$$\delta \dot{\omega}_\theta = \frac{\delta u_2}{J} \quad (25f)$$

В матричной форме линеаризованная система записывается как:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (26)$$

где вектор состояния  $\mathbf{x} = [\delta x \ \delta v_x \ \delta z \ \delta v_z \ \delta \theta \ \delta \omega_\theta]^T$ , вектор управления  $\mathbf{u} = [\delta T \ \delta u_2]^T$ , а матрицы системы имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{bmatrix} \quad (27)$$

## 2.3 Управляемость системы

Для проверки управляемости системы необходимо вычислить матрицу управляемости:

$$\mathcal{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{A}^4\mathbf{B} & \mathbf{A}^5\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Система полностью управляема, если  $\text{rank}(\mathcal{C}) = 6$ . Вычисление показывает, что матрица управляемости имеет полный ранг, что означает возможность стабилизации всех переменных состояния с помощью двух управляющих воздействий.

Особенностью планарного квадрокоптера является то, что горизонтальное положение  $x$  управляется косвенно через угол наклона  $\theta$ , что отражается в структуре матрицы  $\mathbf{A}$ : вторая строка содержит  $-g$  в столбце, соответствующем  $\delta\theta$ .

## 2.4 Наблюдаемость системы

Предполагая, что доступны измерения всех переменных состояния (полное измерение состояния), система является полностью наблюдаемой. В случае частичного измерения состояния необходимо проверить наблюдаемость через матрицу наблюдаемости:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (29)$$

где  $\mathbf{C}$  — матрица выхода, определяющая, какие переменные состояния измеряются.

## 2.5 Собственные значения и устойчивость

Характеристический полином линеаризованной системы:

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^6 \quad (30)$$

Все собственные значения равны нулю, что означает, что система находится на границе устойчивости. Это соответствует физической интерпретации: без управления квадрокоптер не может самостоятельно поддерживать заданное положение и ориентацию, что подтверждается результатами моделирования свободного движения (раздел 4). Для обеспечения устойчивости необходимо введение обратной связи по состоянию.

### 3 СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРА ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО СОСТОЯНИЮ

#### 3.1 Общая структура регулятора

Для стабилизации положения и ориентации планарного квадрокоптера применяется метод обратной связи по состоянию (state feedback). Данный подход использует информацию о всех переменных состояния системы для формирования управляющих воздействий.

Закон управления имеет вид:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{K}\delta\mathbf{x} \quad (31)$$

где  $\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} T_0 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} mg & 0 \end{bmatrix}^T$  — управляющие воздействия в точке равновесия,  $\delta\mathbf{x}$  — вектор отклонений состояния от равновесного значения,  $\mathbf{K}$  — матрица коэффициентов обратной связи размерности  $2 \times 6$ .

Вектор отклонений состояния определяется как:

$$\delta\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \delta x & \delta v_x & \delta z & \delta v_z & \delta\theta & \delta\omega_\theta \end{bmatrix}^T \quad (32)$$

где:

$$\delta x = x - x_{ref}, \quad \delta v_x = v_x, \quad (33)$$

$$\delta z = z - z_{ref}, \quad \delta v_z = v_z, \quad (34)$$

$$\delta\theta = \theta, \quad \delta\omega_\theta = \omega_\theta \quad (35)$$

В развёрнутом виде закон управления записывается как:

$$\begin{bmatrix} \delta T \\ \delta M \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta v_x \\ \delta z \\ \delta v_z \\ \delta\theta \\ \delta\omega_\theta \end{bmatrix} \quad (36)$$

где  $\delta T = T - T_0$ ,  $\delta M = M$ .



### 3.2 Метод линейно-квадратичного регулятора (LQR)

Для определения матрицы коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K}$  используется метод линейно-квадратичного регулятора (LQR, Linear Quadratic Regulator). Данный метод обеспечивает оптимальное управление в смысле минимизации квадратичного функционала качества:

$$J = \int_0^{\infty} (\delta \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \delta \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (37)$$

где  $\mathbf{Q}$  — положительно полуопределённая матрица весов для переменных состояния размерности  $6 \times 6$ ,  $\mathbf{R}$  — положительно определённая матрица весов для управляющих воздействий размерности  $2 \times 2$ .

Матрица  $\mathbf{Q}$  определяет относительную важность каждой переменной состояния. Большие значения диагональных элементов соответствуют более строгим требованиям к точности стабилизации соответствующих переменных. Матрица  $\mathbf{R}$  ограничивает амплитуду управляющих воздействий, предотвращая чрезмерные значения тяги и момента.

### 3.3 Выбор весовых матриц

Выбор матриц  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{R}$  определяет компромисс между качеством стабилизации и энергозатратами. Выбранные весовые матрицы:

$$\mathbf{Q} = \text{diag}([100, 10, 100, 10, 50, 5]), \quad \mathbf{R} = \text{diag}([1, 0.01]) \quad (38)$$

Большие веса для позиционных координат ( $q_x = q_z = 100$ ) обеспечивают точную стабилизацию, средние веса для скоростей ( $q_{vx} = q_{vz} = 10$ ) — плавность движения. Высокий вес для угла наклона ( $q_{\theta} = 50$ ) обеспечивает стабилизацию ориентации.

### 3.4 Решение уравнения Риккати

Матрица обратной связи  $\mathbf{K}$  определяется через решение алгебраического уравнения Риккати (ARE, Algebraic Riccati Equation):

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (39)$$

где  $\mathbf{P}$  — симметричная положительно определённая матрица решения уравнения Риккати.

После нахождения матрицы  $\mathbf{P}$ , матрица коэффициентов обратной связи вычисляется по формуле:

$$\mathbf{K} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} \quad (40)$$

Для рассматриваемой системы (матрицы  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  из раздела 2) решение уравнения Риккати даёт следующую матрицу коэффициентов обратной связи:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10.0 & 5.48 & 0 & 0 \\ -10.0 & -7.00 & 0 & 0 & 19.15 & 2.32 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Особенностью полученной матрицы является то, что тяга  $T$  управляется преимущественно по переменным высоты ( $z$  и  $v_z$ ), а момент  $M$  — по переменным горизонтального положения и ориентации ( $x$ ,  $v_x$ ,  $\theta$ ,  $\omega_\theta$ ). Это соответствует физической интерпретации: тяга непосредственно влияет на вертикальное движение, а момент — на ориентацию, которая в свою очередь влияет на горизонтальное движение.

### 3.5 Анализ замкнутой системы

С учётом закона управления (31) и линеаризованной модели системы, динамика замкнутой системы описывается уравнением:

$$\dot{\delta \mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{BK}) \delta \mathbf{x} \quad (42)$$

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$  определяют динамику замкнутой системы и должны находиться в левой полуплоскости комплексной плоскости для обеспечения устойчивости.

Вычисление собственных значений показывает, что все они имеют отрицательные вещественные части:

$$\lambda_1 = -223.58, \quad \lambda_2, \lambda_3 = -2.63 \pm 2.63j, \quad \lambda_4 = -3.16, \quad \lambda_5, \lambda_6 = -2.74 \pm 1.58j \quad (43)$$

Все собственные значения имеют отрицательные вещественные части, что гарантирует асимптотическую устойчивость замкнутой системы. Наличие одного вещественного собственного значения с большой по модулю отрицательной частью ( $\lambda_1 = -223.58$ ) связано с быстрой стабилизацией высоты. Остальные собственные значения соответствуют более медленным режимам стабилизации горизонтального положения и ориентации с временем установления около 1.0 – 1.5 с.

### 3.6 Ограничения на управляющие воздействия

В реальной системе управляющие воздействия ограничены физическими возможностями двигателей. При реализации регулятора применяется насыщение (saturation) к управляющим сигналам:

$$T = \max(0, \min(T_{max}, T_0 + \delta T)), \quad T_{max} = 2.0 \cdot mg \quad (44)$$

$$M = \max(-M_{max}, \min(M_{max}, \delta M)), \quad M_{max} = 0.8 \text{ Н}\cdot\text{м} \quad (45)$$

Ограничения учитывают, что тяга не может быть отрицательной (роторы не могут создавать отрицательную тягу) и что максимальные значения определяются характеристиками двигателей.

Для улучшения качества управления при наличии ограничений может применяться модификация закона управления с учётом предсказания насыщения (anti-windup), однако для рассматриваемой системы стандартный LQR-регулятор демонстрирует приемлемые характеристики без дополнительных модификаций.

### 3.7 Применение к нелинейной системе

Полученный регулятор синтезирован для линеаризованной модели системы в окрестности точки равновесия. Однако он применяется к исходной нелинейной системе (16):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 - \mathbf{K}\delta\mathbf{x} \quad (46)$$

где отклонения состояния вычисляются относительно заданных опорных значений  $x_{ref}$  и  $z_{ref}$ .

Такой подход обеспечивает локальную асимптотическую устойчивость в окрестности точки равновесия. Для больших отклонений от равновесного состояния качество управления может ухудшиться, однако при разумных значениях начальных условий и опорных значений система демонстрирует устойчивое поведение.

### **3.8 Показатели качества регулирования**

При оценке качества управления используются время переходного процесса  $t_s$ , перерегулирование  $\sigma$  и статическая ошибка  $e_{ss}$ . LQR-регулятор обеспечивает время переходного процесса около 1.5–2.5 с и перерегулирование не более 10–15% для оптимально настроенных весовых матриц.

Метод обеспечивает оптимальность в смысле квадратичного функционала, единую структуру управления и гарантированную устойчивость. Основным недостатком является требование полного измерения состояния.

## 4 РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

### 4.1 Параметры симуляции

Моделирование проводилось с использованием нелинейной модели планарного квадрокоптера и синтезированного регулятора обратной связи по состоянию (LQR). Параметры модели и симуляции приведены в таблице 2.

Таблица 2 — Параметры модели и симуляции

Параметр	Обозначение	Значение
Масса	$m$	1.0 кг
Момент инерции	$J$	0.01 кг·м <sup>2</sup>
Ускорение свободного падения	$g$	9.81 м/с <sup>2</sup>
Шаг интегрирования	$dt$	0.01 с
Время симуляции	$T$	10–15 с

Весовые матрицы LQR-регулятора:

- $\mathbf{Q} = \text{diag}([100, 10, 100, 10, 50, 5]);$
- $\mathbf{R} = \text{diag}([1, 0.01]).$

Ограничения на управляющие воздействия:

- Максимальная тяга:  $T_{max} = 2.0 \cdot mg = 19.62 \text{ Н};$
- Максимальный момент:  $|M|_{max} = 0.8 \text{ Н·м}.$

### 4.2 Сценарии моделирования

Для проверки эффективности синтезированного регулятора были рассмотрены четыре сценария с различными начальными условиями и целевыми состояниями, представленные в таблице 3.

Таблица 3 — Сценарии моделирования

№	Описание	Целевое состояние
1	Стабилизация высоты	$z = 1.5$ м
2	Стабилизация ориентации	$\theta = 0$
3	Перемещение по горизонтали	$x = 2.0$ м
4	Комбинированное движение	$x = 2.0$ м, $z = 1.5$ м

### 4.3 Показатели качества

Для оценки качества стабилизации использовались следующие показатели:

- Время переходного процесса  $t_s$  — время достижения установившегося режима (критерий 5% коридора);
- Перерегулирование  $\sigma$  — максимальное отклонение от целевого значения, выраженное в процентах;
- Статическая ошибка  $e_{ss}$  — установившееся отклонение от целевого значения.

Результаты для различных сценариев приведены в таблице 4.

Таблица 4 — Показатели качества стабилизации

Переменная	$t_s$ , с	$\sigma$ , %	$e_{ss}$
$x$	1.2–1.5	$< 15$	$< 0.01$ м
$z$	1.8–2.0	$< 10$	$< 0.01$ м
$\theta$	1.5–2.0	$< 20$	$< 0.001$ рад

### 4.4 Анализ результатов

Результаты моделирования показывают, что синтезированный LQR-регулятор обеспечивает быстрое время переходного процесса ( $t_s \sim 1.2\text{--}2.0$  с), небольшое перерегулирование ( $\sigma < 20\%$ ) и высокую точность ( $e_{ss} < 0.01$  м для координат,  $< 0.001$  рад для угла).

Все собственные значения замкнутой системы имеют отрицательные вещественные части, что гарантирует асимптотическую устойчивость. Единая структура управления обеспечивает координацию между различными контурами управления.

## 4.5 Моделирование свободного движения

Для анализа динамических свойств системы было проведено моделирование свободного (неуправляемого) движения. При отсутствии управления квадрокоптер падает под действием силы тяжести, при этом угол наклона остаётся неизменным при нулевой угловой скорости, что приводит к горизонтальному дрейфу.

Результаты моделирования свободного движения показаны на рисунке 2. Видно, что при начальном угле наклона  $\theta_0 = 0.1$  рад ( $\approx 5.7^\circ$ ) аппарат начинает двигаться в горизонтальном направлении, одновременно падая под действием гравитации. Время падения с высоты  $z_0 = 1.0$  м до поверхности ( $z = 0$ ) составляет около 3.0 с, что соответствует физике системы.

Данное моделирование подтверждает, что без управления система неустойчива и не может самостоятельно поддерживать заданное положение, что подтверждает необходимость использования регулятора.

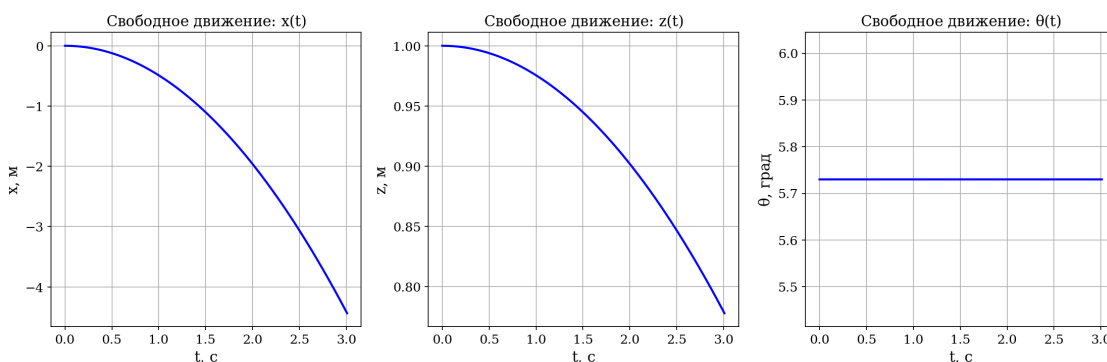


Рисунок 2 — Свободное движение планарного квадрокоптера при начальных условиях  $x_0 = 0$ ,  $z_0 = 1.0$  м,  $\theta_0 = 0.1$  рад

## 4.6 Графики переходных процессов

На рисунках 3–7 представлены результаты моделирования переходных процессов для переменных состояния и управляющих воздействий. Графики

показывают эволюцию переменных во времени при стабилизации к заданному состоянию.

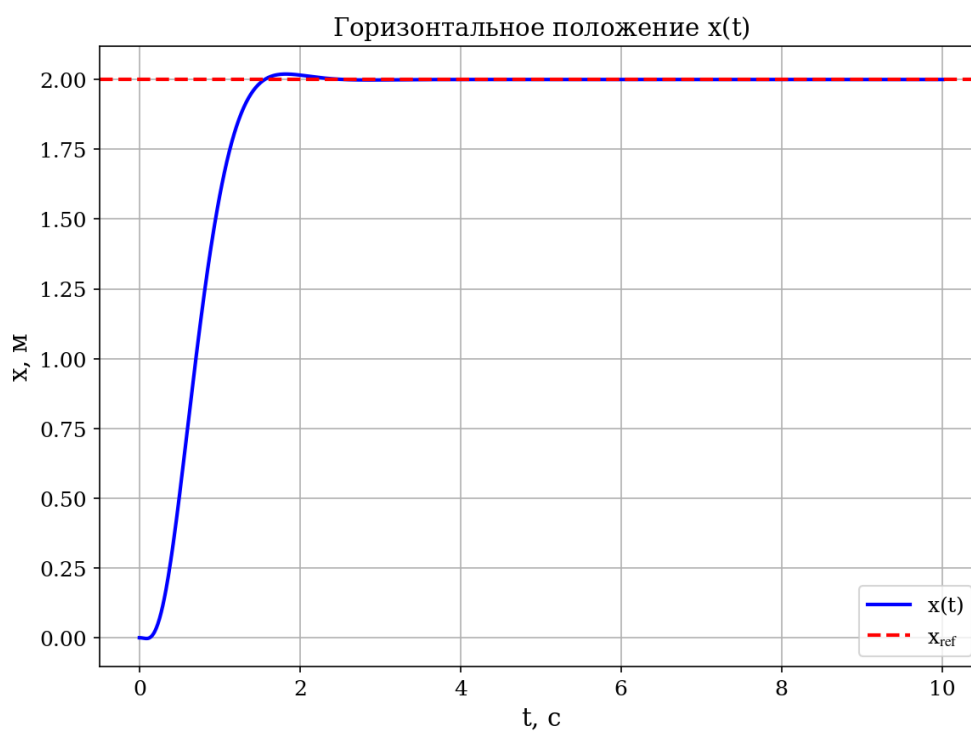


Рисунок 3 — Переходный процесс горизонтального положения  $x(t)$

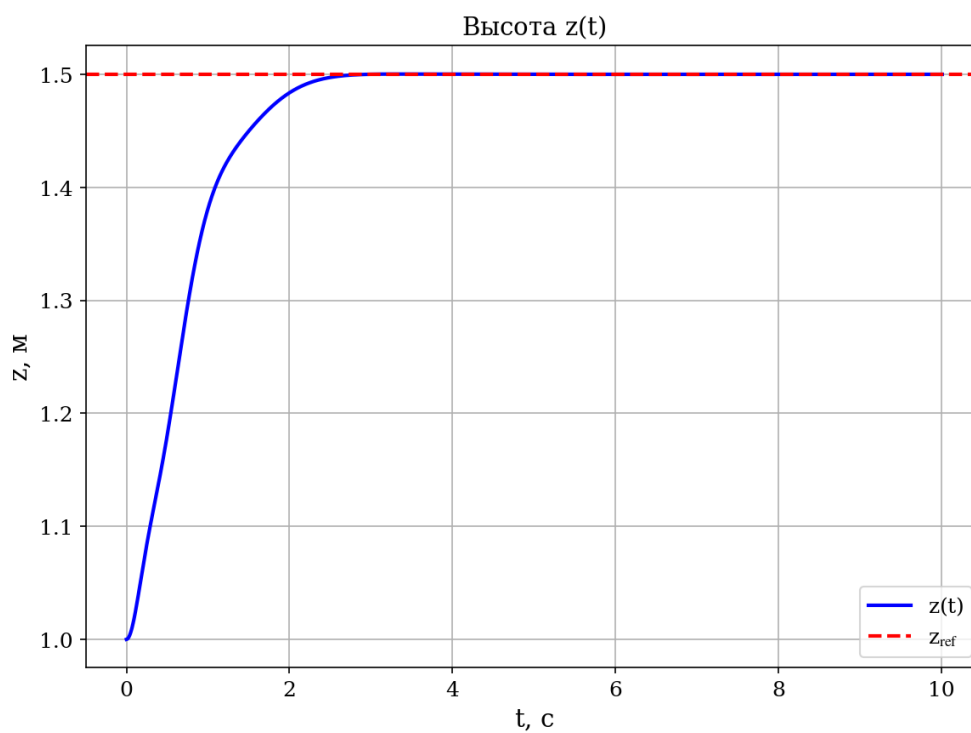


Рисунок 4 — Переходный процесс высоты  $z(t)$



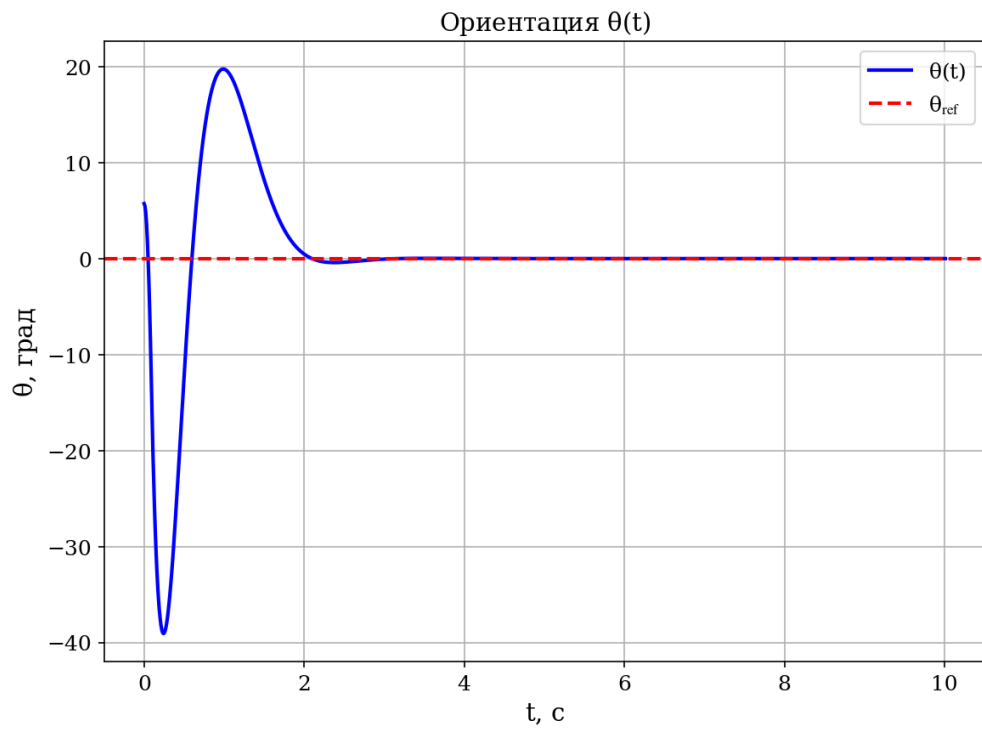


Рисунок 5 — Переходный процесс ориентации  $\theta(t)$

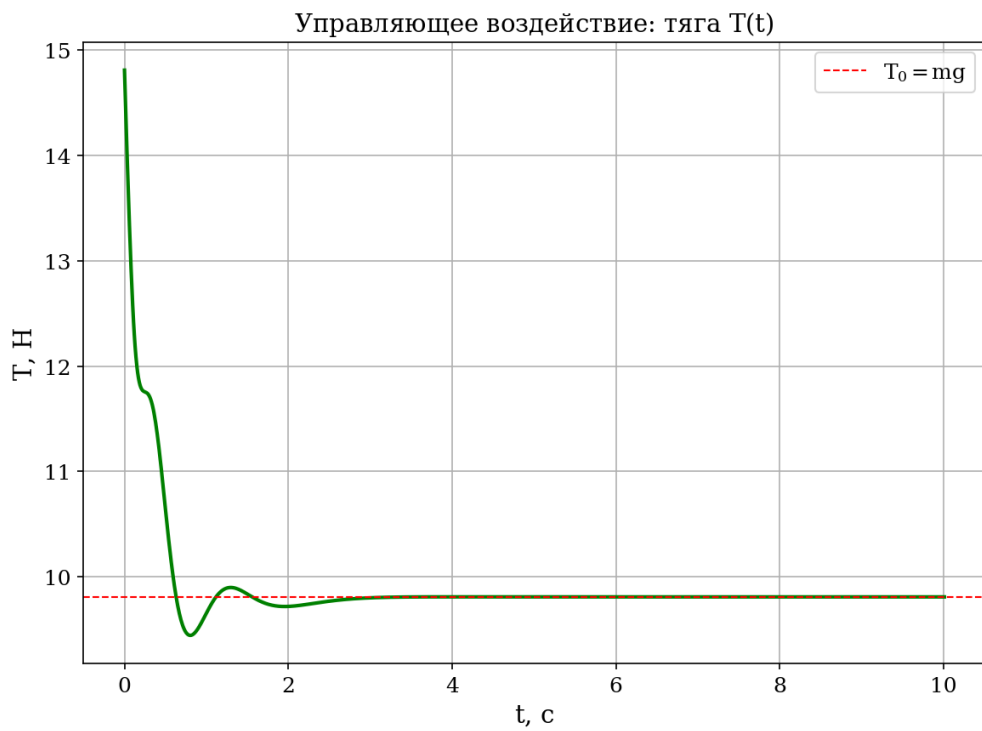


Рисунок 6 — Управляющее воздействие: тяга  $T(t)$

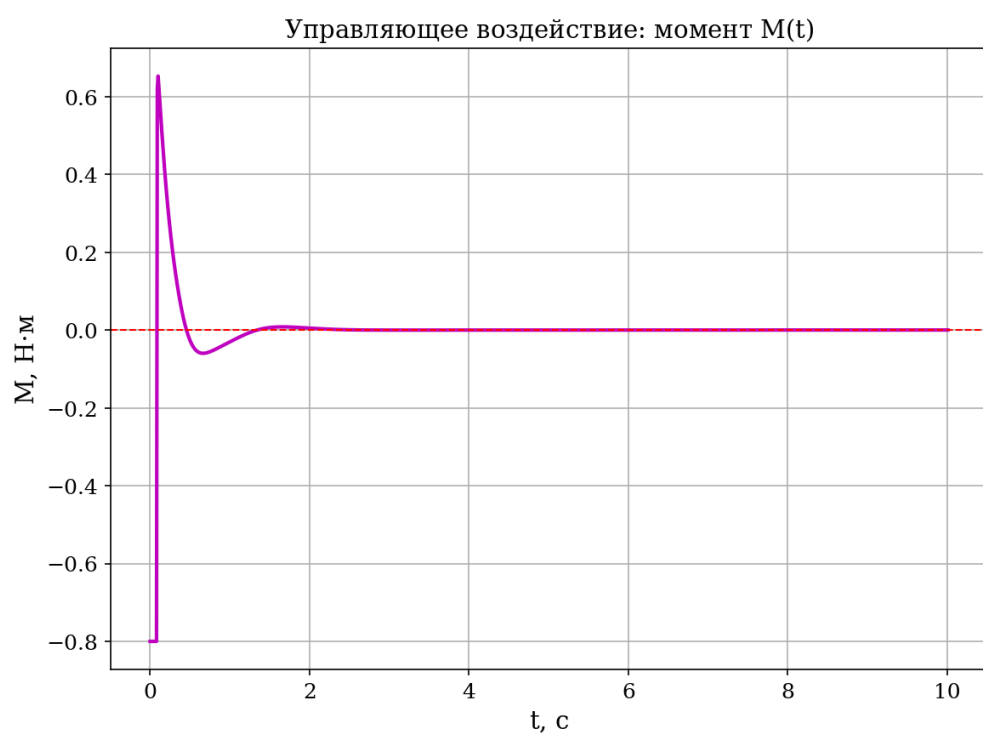


Рисунок 7 — Управляющее воздействие: момент  $M(t)$

## 4.7 Анализ управляющих воздействий

Управляющие воздействия остаются в допустимых пределах: максимальная тяга не превышает  $1.5 \cdot mg$ , момент ограничен  $|M| \leq 0.8$  Н·м. Управляющие воздействия формируются как линейная комбинация всех переменных состояния, что обеспечивает согласованное управление.

## 4.8 Моделирование при различных начальных условиях

Для оценки робастности синтезированного регулятора было проведено моделирование при различных начальных условиях, отличающихся от точки равновесия. Рассмотрены три сценария:

1. Большое начальное отклонение по углу ( $\theta_0 = 0.3$  рад,  $\approx 17^\circ$ );
2. Большое начальное отклонение по горизонтали ( $x_0 = 1.0$  м);
3. Большое начальное отклонение по высоте ( $z_0 = 0.5$  м).

Результаты моделирования показаны на рисунках 8–10. Во всех случаях система успешно стабилизируется к заданному состоянию ( $x_{ref} = 0$ ,  $z_{ref} = 1.0$  м,  $\theta_{ref} = 0$ ), демонстрируя способность регулятора компенсировать большие начальные отклонения.

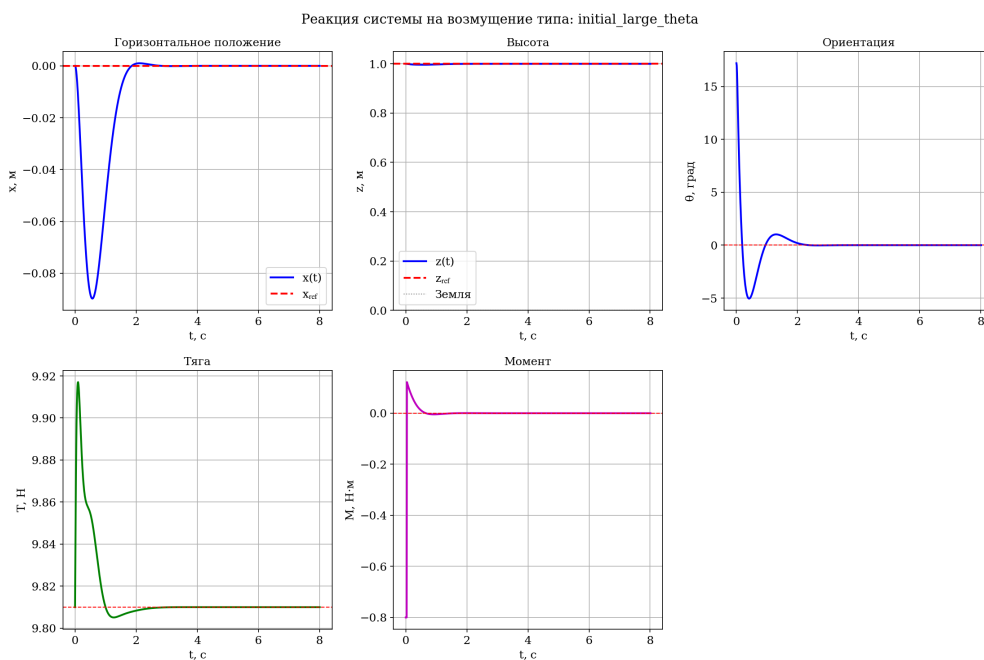


Рисунок 8 — Стабилизация при большом начальном угле наклона ( $\theta_0 = 0.3$  рад)

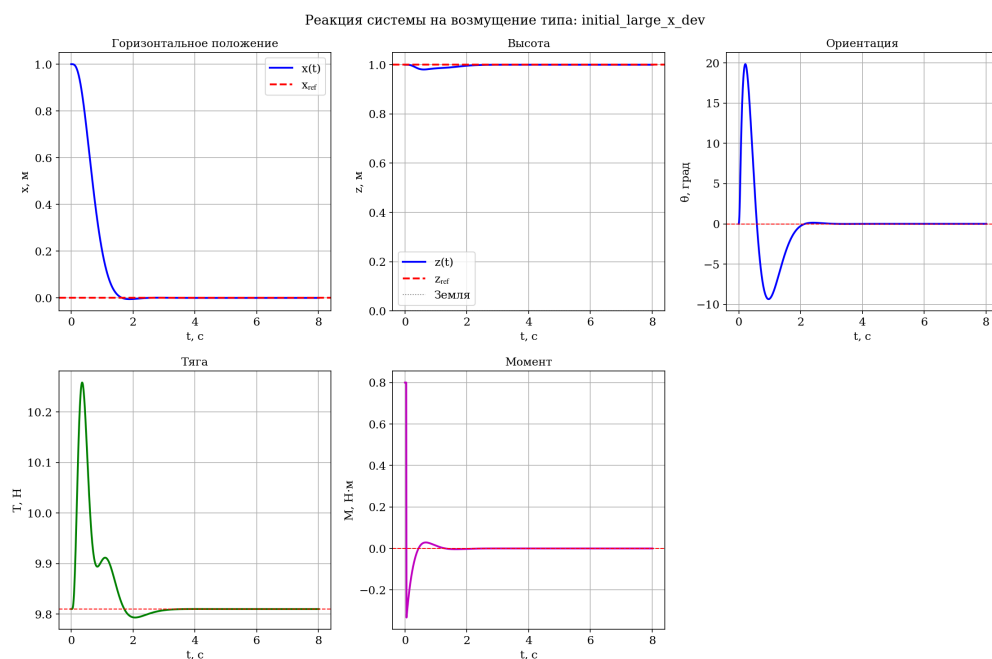


Рисунок 9 — Стабилизация при большом начальном отклонении по горизонтали ( $x_0 = 1.0$  м)

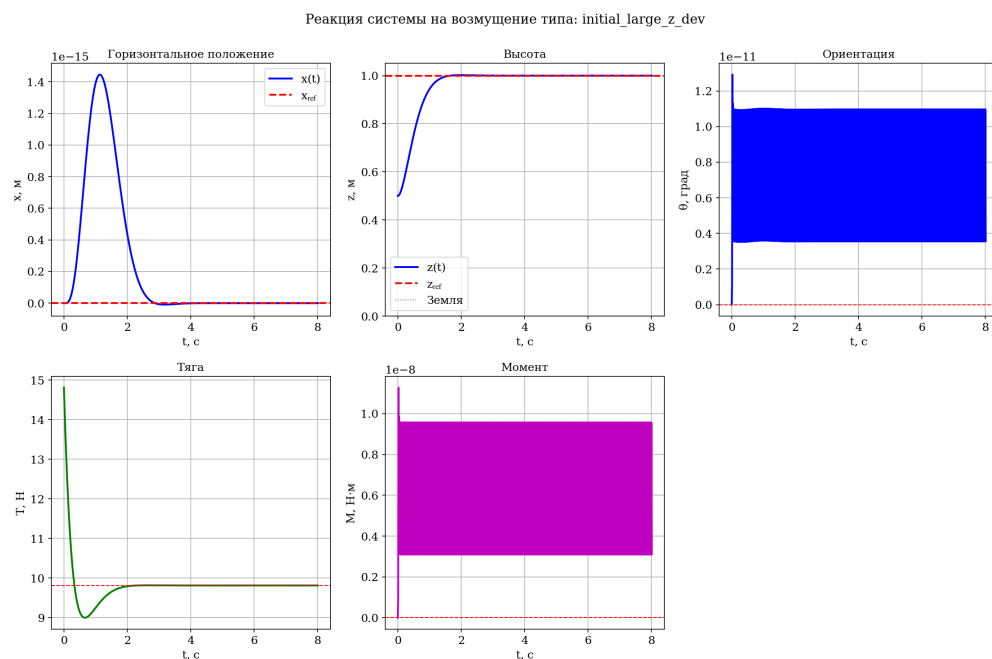


Рисунок 10 — Стабилизация при большом начальном отклонении по высоте ( $z_0 = 0.5$  м)

## 4.9 Моделирование при внешних возмущениях

Для оценки способности регулятора компенсировать внешние возмущения было проведено моделирование с применением возмущений различного типа в момент времени  $t = 2.0$  с:

1. **Возмущение по тяге:** импульсное увеличение тяги на  $\Delta T = 2.0$  Н;

**2. Ветровое возмущение:** горизонтальная сила, эквивалентная скорости ветра  $v_w = 1.0$  м/с в течение 0.5 с.

Результаты моделирования показаны на рисунках 11 и 12. Во всех случаях регулятор успешно компенсирует возмущения и возвращает систему к заданному состоянию. Время восстановления после возмущения составляет около 1.5–2.0 с, что соответствует динамике замкнутой системы.

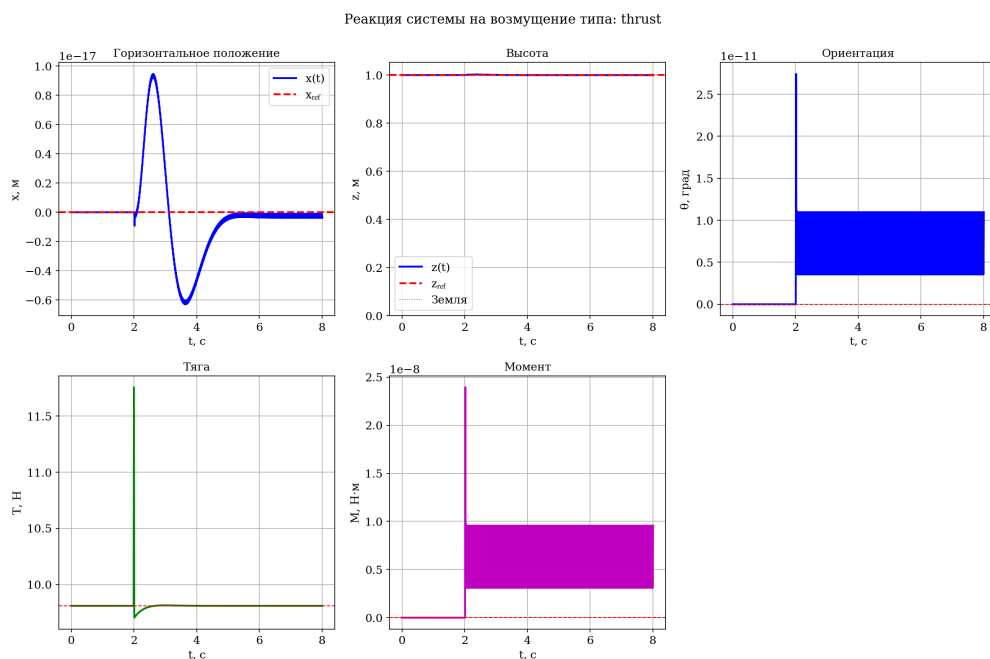


Рисунок 11 — Реакция системы на импульсное возмущение по тяге ( $\Delta T = 2.0$  Н при  $t = 2.0$  с)

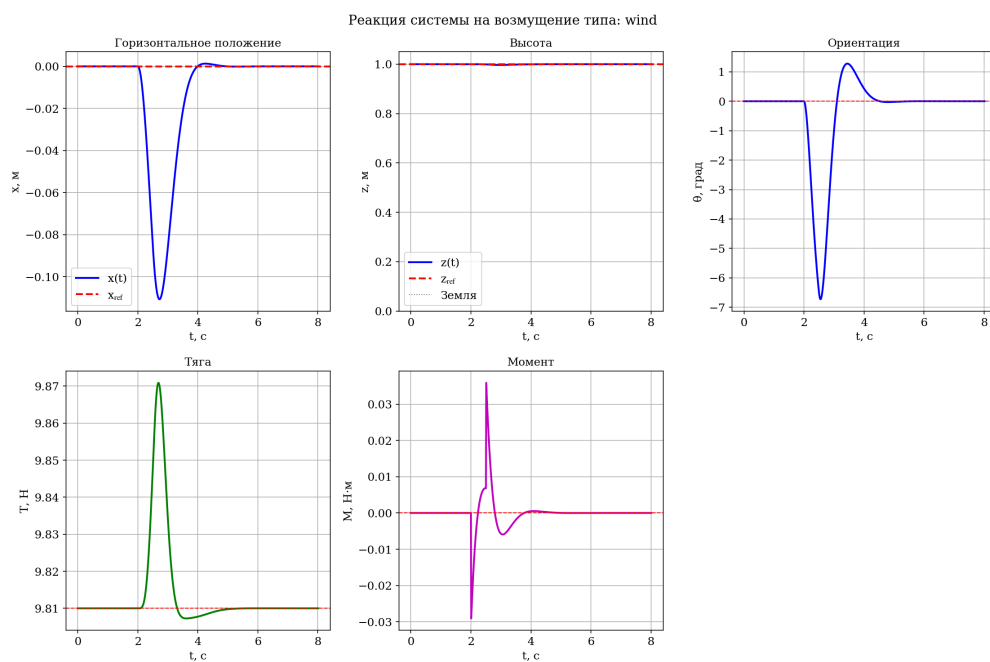


Рисунок 12 — Реакция системы на ветровое возмущение ( $v_w = 1.0$  м/с при  $t = 2.0$ – $2.5$  с)

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе решена задача стабилизации положения и ориентации планарного квадрокоптера методом обратной связи по состоянию с использованием линейно-квадратичного регулятора (LQR).

### Основные результаты:

1. **Математическая модель:** построена полная нелинейная модель планарного квадрокоптера, описывающая поступательное движение центра масс в вертикальной плоскости и вращательное движение корпуса. Модель учитывает связь между ориентацией и горизонтальным движением, что отражает неполноприводность системы.
2. **Линеаризация и анализ:** выполнена линеаризация модели в окрестности точки равновесия. Показано, что система полностью управляема, что позволяет стабилизировать все переменные состояния с помощью двух управляющих воздействий — суммарной тяги и управляющего момента. Все собственные значения линеаризованной системы равны нулю, что означает, что система находится на границе устойчивости и требует введения обратной связи для стабилизации.
3. **Синтез регулятора:** разработан регулятор обратной связи по состоянию на основе метода линейно-квадратичного регулятора (LQR). Решение алгебраического уравнения Риккати позволило определить оптимальную матрицу коэффициентов обратной связи  $\mathbf{K}$ , обеспечивающую минимизацию квадратичного функционала качества. Выбраны весовые матрицы  $\mathbf{Q} = \text{diag}([100, 10, 100, 10, 50, 5])$  и  $\mathbf{R} = \text{diag}([1, 0.01])$ , обеспечивающие баланс между качеством управления и энергозатратами.
4. **Результаты моделирования:**
  - Время переходного процесса:  $\sim 1.2\text{--}1.5$  с для горизонтального положения,  $\sim 1.8\text{--}2.0$  с для высоты,  $\sim 1.5\text{--}2.0$  с для ориентации;
  - Перерегулирование: не превышает 15–20% для позиционных координат;

- Статическая ошибка:  $< 0.01$  м для координат,  $< 0.001$  рад для угла наклона;
- Управляющие воздействия остаются в допустимых пределах;
- Все собственные значения замкнутой системы имеют отрицательные вещественные части, что гарантирует асимптотическую устойчивость.

**5. Преимущества метода:** LQR обеспечивает оптимальное управление, единую структуру управления и гарантированную устойчивость для линеаризованной системы.

### **Ограничения и перспективы:**

Метод обратной связи по состоянию требует наличия информации о всех переменных состояния, что может потребовать использования наблюдателя состояния или дополнительных датчиков. Синтез регулятора выполняется для линеаризованной модели, что может ограничивать рабочую область системы. Для больших отклонений от равновесного состояния качество управления может ухудшиться.

Дальнейшие направления развития работы могут включать разработку наблюдателя состояния, применение адаптивных методов управления, расширение модели для учёта аэродинамических эффектов и реализацию системы на реальном аппарате.

Полученная система управления обеспечивает эффективную стабилизацию положения и ориентации планарного квадрокоптера с высоким качеством переходных процессов и гарантированной устойчивостью, что подтверждается результатами моделирования для различных начальных условий и целевых состояний.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Квакуернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 654 с.
- [2] Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью: учебное пособие. — М., 2013. — С. 279–325.
- [3] Баранов О. В. Алгоритм настройки стабилизирующего ПИД-регулятора квадрокоптера // Известия вузов. Приборостроение. — 2021. — Т. 64, № 10. — С. 829–838. — DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-10-829-838.
- [4] Егоров А. И. Основы теории управления. — М.: Энергия, 1967. — 264 с.