LaTeXRechnungen zu Aufgabe 6

Nils Breer

Zuletzt bearbeitet am 3. Oktober 2017

Inhaltsverzeichnis

1 Gesetz von Biot-Savart

Das Gesetz von Biot-Savart lautet

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}') \times \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \, \mathrm{d}V' \tag{1}$$

2 Gaußsche Fehlerfortpflanzung

Der Fehler einer Gaußverteilung bestimmt sich durch

$$\sigma_f = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_i \right)^2} \tag{2}$$

3 Maxwell Gleichungen

Die 4 Maxwellgleichungen der Elektrdynamik lauten

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\partial_t \boldsymbol{B} \qquad \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 j + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \boldsymbol{E} \tag{4}$$

4 Wellengleichungen

Im Vakuum gilt $\rho = 0$ und $j = 0$, also lauten die Maxwellgleichungen nun

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \partial_t \boldsymbol{B}. \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \boldsymbol{E} \tag{8}$$

Außerdem benutzen wir, dass $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$ gilt. Somit ergibt sich, wenn man die Rotation auf (7) anwendet

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = \nabla \times (\partial_t \boldsymbol{B}) \tag{9}$$

Nun kann man im nächsten Schritt die Graßmann Identität benutzen und außerdem auch $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$ wie nach Vorraussetzung. Zusätzlich können nach dem Satz von Schwarz die Ableitungen vertauscht werden.

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \triangle \boldsymbol{E} = \partial_t \left(\nabla \times \boldsymbol{B}\right) \tag{10}$$

$$-\triangle \boldsymbol{E} = \partial_t \left(\mu_0 \epsilon_0 \partial_t \boldsymbol{E}\right) \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \mu_0 \epsilon_0 \boldsymbol{E} - \triangle \boldsymbol{E} = 0 \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} - \triangle\right) = 0 \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{1}{c^2} - \triangle\right) := \Box \tag{14}$$

$$\implies \Box \boldsymbol{E} = 0 \tag{15}$$

Die Wellengleichung für das Magnetfeld werden analog hergeleitet.

5 Harmonischer Oszillator

Die DGL des harmonischen Oszillators ist folgendermaßen definiert:

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \tag{16}$$

Eine Lösung der DGL ist

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t} \left(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)\right) \tag{17}$$

mit

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \tag{18}$$