Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 5. Mai 2022 Präsentation der Lösungen: 12. Mai 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

3. Globalübung

Aufgabe 14

Weisen Sie nach, dass durch die nachstehenden Funktionen eine Zähldichte bzw. eine Riemann-Dichte auf dem jeweils angegebenen Träger definiert ist.

(a) $p_k = p(1-p)^k$, $k \in \mathbb{N}_0$, für ein $p \in (0,1)$ (Geometrische Verteilung geo(p)),

(b) $p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}_0$, für ein $\lambda > 0$ (Poisson-Verteilung po(λ)),

(c) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \lambda e^{-\lambda x} & , & x > 0 \\ 0 & , & x \leq 0 \end{array} \right\}$ für ein $\lambda > 0$ (Exponentialverteilung Exp(λ)),

(d) $f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} & , & x \geq 1 \\ 0 & , & x < 1 \end{array} \right\}$ für ein $\alpha > 0$ (Pareto-Verteilung Par(α)).

Aufgabe 15

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ seien von drei Ereignissen $A, B, C \in \mathfrak{A}$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

(i) $P(B) = \dfrac{7}{20}$, (ii) $P(C^c) = \dfrac{7}{10}$, (iii) $P(A) = \dfrac{3}{10}$,

(iv) $P(A^c \cap C) = \dfrac{1}{4}$, (v) $P(A \cap B) = \dfrac{1}{10}$, (vi) $P(A \cap B \cap C) = \dfrac{1}{20}$,

(vii) $P\big((A \cup B) \cap C\big) = \dfrac{3}{20}$.

Berechnen Sie aus diesen Angaben die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(a) $A \cup B$, (c) $A \cap C$, (e) $B \cap C$,

(b) $A^c \cup C$, (d) $A \cap B^c \cap C$, (f) $A \cup B \cup C$.

Aufgabe 16

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengensysteme jeweils σ-Algebren über $\Omega \neq \emptyset$ sind:

(a) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$,

(b) $\mathfrak{A} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$ für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ mit $\emptyset \neq A \neq \Omega$,

(c) $\mathfrak{A} = \mathfrak{Pot}(\Omega)$,

(d) $\mathfrak{A} = \{A \subseteq \Omega \mid A \text{ höchstens abzählbar oder } A^c \text{ höchstens abzählbar}\}$.

Aufgabe 17

Eine Softwarefirma beschäftigt drei Programmierer P_1, P_2 und P_3. Von P_1 wurden 230, von P_2 690 und von P_3 460 Programmierungen im vergangenen Jahr vorgenommen. Hierbei haben bei

P_1: 12% aller Programme mindestens zwei Programmierfehler,
40% aller Programme genau einen Programmierfehler,

P_2: 15% aller Programme genau einen Programmierfehler,
70% aller Programme keinen Programmierfehler,

P_3: 75% aller Programme keinen Programmierfehler,
10% aller Programme mindestens zwei Programmierfehler.

Die Softwarefirma wählt aus allen im vergangenen Jahr erstellten Programmen zufällig eines aus.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat das ausgewählte Programm keine Programmierfehler?

(b) Die Softwarefirma stellt fest, dass das Programm genau einen Programmierfehler aufweist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt es vom Programmierer P_2?

Aufgabe 18

Ein homogener Würfel werde zweimal hintereinander geworfen.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \{1, \ldots, 6\}$ die Ereignisse

„Der erste Wurf zeigt die Ziffer k“,
„Die Summe der Ziffern beider Würfe ist durch Drei teilbar“

stochastisch unabhängig sind.

(b) Gibt es ein $k \in \{1, \ldots, 6\}$, so dass die Ereignisse

„Der erste Wurf zeigt die Ziffer k“,
„Das Produkt der Ziffern beider Würfe ist durch Drei teilbar“

stochastisch unabhängig sind?