Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Gerhard Woeginger
Tim Hartmann, Daniel Neuen

WS 2017/18
15.12.2017

Übung zur Vorlesung
Berechenbarkeit und Komplexität

Blatt 9

Tutoriumsaufgabe 9.1

Welche der folgenden Funktionen sind polynomiell berechenbar? Eingabe und Ausgabe sollen im Binärsystem dargestellt sein.

(a) Eingabe: eine natürliche Zahl n. Ausgabe: $n!$

(b) Eingabe: eine natürliche Zahl m. Ausgabe: Wahr, falls $m = n^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(c) Eingabe: eine natürliche Zahl m. Ausgabe: Wahr, falls $m = n!$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Tutoriumsaufgabe 9.2

Entwerfen Sie möglichst einfache **nicht-deterministische** 2-Band TM, die die folgenden Sprache in **linearer Zeit** entscheidet.

Die Sprache L_1 enthält alle Worte $xyz \in \{0, 1, 2\}^*$ mit $x = z$ und $|x| = |z| \geq 10$.

Tutoriumsaufgabe 9.3

Zeigen Sie: Wenn eine Sprache L von einer NTM M erkannt wird, so gibt es auch eine DTM M', die L erkennt. (In anderen Worten: NTMs haben nicht mehr Berechnungskraft als DTMs.)

Tutoriumsaufgabe 9.4

Gegeben sei das folgende Problem:

$$\begin{aligned}\text{3-COLORABILITY} = \{G \mid G = (V, E) &\text{ ist ein Graph und es existiert eine Abbildung} \\ c : V \to \{1, 2, 3\} &\text{ mit } c(v) \neq c(w) \text{ für alle } (v, w) \in E(G)\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass 3-Colorability in NP liegt.

— BITTE WENDEN —

Hausaufgabe 9.1 **(3 Punkte)**

Angenommen, es gibt einen Algorithmus A, der für eine gegebene natürliche Eingabezahl k in Binärdarstellung in linearer Zeit $O(\log k)$ den Wert k^2 berechnet.

Zeigen Sie, dass es dann einen Algorithmus B gibt, der für zwei gegebene natürliche Eingabezahlen m und n in Binärdarstellung in linearer Zeit $O(\log m + \log n)$ das Produkt mn berechnet.

Hausaufgabe 9.2 **(3 Punkte)**

Entwerfen Sie möglichst einfache **nicht-deterministische** 2-Band TM, die die folgende Sprache in **linearer Zeit** entscheidet.

> Die Sprache L_2 enthält alle Worte $w_1\#w_2\#\cdots\#w_n$ mit $n \geq 1$ und $w_1, \ldots, w_n \in \{0,1\}^*$, für die es einen Index k mit $w_k = 1^k$ gibt ($1 \leq k \leq n$).

Hausaufgabe 9.3 **(4 Punkte)**

Das Graph-Isomorphismus Problem (GI) ist wie folgt definiert:

> Problem: GI
> EINGABE: Zwei ungerichtete Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_1)$
> FRAGE: Ist G_2 isomorph zu G_1? (Existiert eine Bijektion $f : V_1 \to V_2$, sodass $\{u, v\} \in E_1$ genau dann wenn $\{f(u), f(v)\} \in E_2$?)

Zeigen Sie: Graph-Isomorphismus liegt in NP.

Hausaufgabe 9.4 **(5 Punkte)**

Wir geben eine alternative Laufzeitdefinition für nichtdeterministische Turingmaschinen an. Für eine NTM M und eine Eingabe x sei

$$T'_M(x) := \text{Länge des längsten Rechenweges von } M \text{ auf } x.$$

Falls ein nicht-terminierender Rechenweg auf x existiert, setzen wir $T'_M(x) := \infty$.

Daraus erhalten wir die worst case Laufzeit $t'_M(n) := \max\{T'_M(x) \mid x \in \Sigma^n\}$.

Sei nun NP' die Klasse der Entscheidungsprobleme, die durch eine NTM M erkannt werden, deren worst case Laufzeit $t'_M(n)$ polynomiell beschränkt ist.

Zeigen Sie, dass $\mathsf{NP} = \mathsf{NP}'$.

Wir wünschen euch frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

Abgabe bis Dienstag, den 09.01.2018 um 16:15 Uhr im Sammelkasten am Lehrstuhl i1 oder in Ihrem Tutorium.