panikzettel.philworld.de

Mathematische Logik Panikzettel

Philipp Schröer, Tobias Polock, Luca Oeljeklaus, Caspar Zecha, Jonathan du Mesnil

Version 26 — 06.09.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Dieser Panikzettel ist eine mehr oder weniger informelle Zusammenfassung der Vorlesung Mathematische Logik bei Prof. Erich Grädel im Sommersemester 2017. Es werden hier die wichtigsten Aussagen, Tipps und Erklärungen gesammelt, die hoffentlich in dem unvermeidbaren Moment der Panik bei Hausaufgaben oder beim Lernen helfen. Wir haben etwas Formalismus im Sinne der Übersichtlichkeit weggelassen.

1.1 Logik

Eine Logik ist eine (typischerweise induktiv definierte) Menge von Formeln (Syntax) zusammen mit einem Typ von Interpretationen, mithilfe derer man einer Formel einen Wahrheitswert zuordnen kann (Semantik).

Für eine Interpretation $\mathfrak{I}$ ist $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}}$ der Wahrheitswert von φ unter $\mathfrak{I}$. Wenn $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ ist, sagen wir dass $\mathfrak{I}$ ein Modell von φ ist ($\mathfrak{I} \models \varphi$). Als Modell einer Formelmenge ($\mathfrak{I} \models \Phi$) bezeichnen wir eine Interpretation, die ein Modell aller Formeln aus Φ ist. Das Symbol $\models$ verwenden wir auch für die semantische Folgerungsbeziehung: Für eine Menge Φ von Formeln bedeutet $\Phi \models \psi$, dass jedes Modell, welches Modell aller Formeln aus Φ ist, auch Modell von ψ ist.

Eine Formel ist *erfüllbar*, wenn sie ein Modell hat. Eine Formel ist *gültig* oder *allgemeingültig*, wenn jede passende Interpretation ein Modell ist. Zwei Formeln φ und ψ sind äquivalent, wenn für Interpretationen $\mathfrak{I}$, die auf beide passen, $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$ ist.

1.2 Kalküle

Ein Kalkül ist eine syntaktische Methode, Aussagen über Formeln zu beweisen. Ein Kalkül hat dazu eine Menge von Axiomen, die sofort ableitbar sind, und Schlussregeln. Schlussregeln schreibt man üblicherweise in der Form

$$\frac{A \quad \dots \quad B}{C}$$

Was bedeutet, dass wenn $A \dots B$ ableitbar sind, auch C ableitbar ist.

2 Aussagenlogik

2.1 Definition

Die Menge AL der *aussagenlogischen Formeln* ist wie folgt induktiv definiert:

Boolesche Konstanten:	*Aussagenvariablen*:	*Junktoren*:
$0, 1 \in \mathrm{AL}$	$\tau \in \mathrm{AL}$	$\neg\psi,\ (\psi \wedge \phi),\ (\psi \vee \phi),\ (\psi \rightarrow \phi) \in \mathrm{AL}$ mit $\psi,\ \phi \in \mathrm{AL}$

Atomare Formeln enthalten nur Boolesche Konstanten und Aussagenvariablen.

$\tau(\phi)$ bezeichnet die Menge der in ϕ vorkommenden Aussagenvariablen.

Eine *aussagenlogische Interpretation* ist eine Abbildung für Variablen $\sigma \subseteq \tau$ auf einen Wahrheitswert: $\mathfrak{I} : \sigma \rightarrow \{\, 0,\ 1 \,\}$. Sie *passt* zu einer Formel $\psi \in \mathrm{AL}$, wenn sie jede vorkommende Variable belegt ($\tau(\psi) \subseteq \sigma$). Der Wahrheitswert einer Interpretation ist durch die logische Auswertung der Formel gegeben.

Ein *Modell einer Formel* $\psi \in \mathrm{AL}$ ist eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$.

Ein *Modell einer Formelmenge* $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$ ist eine Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \psi$ für alle $\psi \in \Phi$.

Formeln ϕ und ψ sind *logisch äquivalent* ($\phi \equiv \psi$), falls sie unter jeder passenden Interpretation denselben Wahrheitswert haben.

Koinzidenzlemma: Für eine Formel $\psi \in \mathrm{AL}$ und zwei zu ψ passende Interpretationen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ mit $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}'(X)$ für alle Variablen $X \in \tau(\psi)$ ist $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}'}$.

2.2 Normalformen

Ein *Literal* ist eine Aussagenvariable X oder die Negation $\neg X$. Das *Komplement* $\overline{X}$ ist $\neg X$ bzw. X für $\overline{\neg X}$.

Alle aussagenlogischen Formeln lassen sich in DNF und KNF äquivalent darstellen. Die Y_{ij} sind Literale.

Disjunktive Normalform (DNF):	*Konjunktive Normalform (KNF)*:
$\bigvee_{i=1}^{n} \bigwedge_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$	$\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$

2.3 Funktionale Vollständigkeit

Aus den Booleschen Konstanten und den Junktoren können Boolesche Funktionen konstruiert werden und umgekehrt. Eine Menge von Booleschen Funktionen heißt *funktional vollständig*, wenn sich jede Boolesche Funktion aus der Menge konstruieren lässt.

Einige Beispiele:

- $\{\wedge, \neg\}$ und $\{\vee, \neg\}$ sind funktional vollständig.
- $\{\rightarrow, 0\}$ ist funktional vollständig.

- $\{|\}$ ist funktional vollständig, wobei $(\phi \mid \psi) \equiv \neg(\phi \land \psi)$.
- $\{\land, \lor, 0, 1\}$ ist nicht funktional vollständig, da die Negation nicht allgemein darstellbar ist.

2.4 Horn-Formeln

Eine *aussagenlogische Horn-Formel* ist eine KNF-Formel $\bigwedge_{i=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$, wobei jede Disjunktion höchstens ein positives Literal enthält. Horn-Formeln können also als Konjunktionen von Implikationen geschrieben werden.

Erfüllbarkeit von Horn-Formeln kann in Polynomialzeit getestet werden. Dazu der *Markierungsalgorithmus* für eine Formel $\psi = \bigwedge_i C_i$:

1. Markiere alle C_i der Form $(1 \to X)$.
2. Wiederhole diesen Schritt, bis keine der Regeln mehr zutrifft. Seien $X_1, \ldots, X_n$ markiert.
   - Wenn $X_1 \land \ldots \land X_n \to X$ in ψ vorkommt, markiere X.
   - Wenn $X_1 \land \ldots \land X_n \to 0$ in ψ vorkommt, abbrechen, denn ψ ist unerfüllbar.
3. Dann ist ψ ist erfüllbar mit den markierten Literalen.

Nicht alle aussagenlogischen Formeln lassen sich als Horn-Formel schreiben. Man betrachte etwa $X \lor Y$.

2.5 Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Für den Kompaktheitssatz haben wir das *Lemma von Zorn* benutzt: Sei $(A, <)$ eine nicht-leere partielle Ordnung, in der jede Kette nach oben beschränkt ist. Dann besitzt $(A, <)$ ein maximales Element in A.

Der *Kompaktheitssatz*:

- Für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}$:
  Φ ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von Φ erfüllbar ist.
- Für $\Phi \subseteq \mathrm{AL}, \psi \in \mathrm{AL}$:
  $\Phi \models \psi$ genau dann, wenn eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ existiert, so dass $\Phi_0 \models \psi$.

2.6 Resolution

Die Resolution ist ein syntaktisches Verfahren, um Unerfüllbarkeit von Formeln in KNF nachzuweisen.

Dazu ist eine *Klausel* eine endliche Menge von Literalen. $\Box$ ist die leere Klausel. $\mathrm{K}(\psi)$ ist die *Klauselmenge* einer Formel ψ in KNF. $\mathrm{K}(\psi)$ enthält für jede Disjunktion in ψ eine Menge mit den darin vorkommenden Literalen.

Die leere Klauselmenge $K = \emptyset$ ist erfüllbar. Wenn $\Box \in \mathrm{K}$, dann ist K unerfüllbar.

Eine *Resolvente* von zwei Klauseln C_1 und C_2 ist eine Klausel C, genau wenn es ein Literal Y gibt mit $Y \in C_1, \overline{Y} \in C_2$, sodass $C = (C_1 \setminus \{Y\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{Y}\})$ Dafür gibt es eine graphische Notation:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash] C_1 \arrow[dr] & & C_2 \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

Das *Resolutionslemma* sagt uns, dass für eine Klauselmenge K und $C_1, C_2 \in$ K und C Resolvente von C_1 und C_2 folgt, dass K und $K \cup \{ C \}$ äquivalent sind.

Nun definieren wir *Resolution* für jede Klauselmenge K:

- $\mathrm{Res}(K) := \mathrm{K} \cup \{ C : C$ ist Resolvente zweier Klauseln aus K $\}$.
- $\mathrm{Res}^0(K) := \mathrm{K}$ und $\mathrm{Res}^{n+1}(K) := \mathrm{Res}(\mathrm{Res}^n(K))$.
- $\mathrm{Res}^*(K) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Res}^n(\mathrm{K})$.

Die Klauselmenge K ist genau dann unerfüllbar, wenn $\square \in \mathrm{Res}^*(\mathrm{K})$.

Einheitsresolution ist eine Variante von Resolution, bei der man eine Resolvente C von C_1 und C_2 nur bilden darf, wenn C_1 oder C_2 nur ein Element enthält. Diese ist auf Horn-Klauseln vollständig.

2.7 Der aussagenlogische Sequenzenkalkül

Eine *Sequenz* ist ein Ausdruck der Form $\Gamma \Rightarrow \Delta$ für endliche Formelmengen $\Gamma, \Delta \subseteq \mathrm{AL}$.

Eine Sequenz ist *gültig*, wenn jedes Modell von Γ auch ein Modell von mindestens einer Formel aus Δ ist, also wenn $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$.

Axiome vom Sequenzenkalkül sind alle Sequenzen der Form $\Gamma,\ \psi \Rightarrow \Delta,\ \psi$.

Falls Γ, Δ disjunkte Mengen von Aussagenvariablen sind, ist $\Gamma \Rightarrow \Delta$ falsifizierbar. Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \emptyset$ ist gültig genau dann wenn $\bigwedge \Gamma$ unerfüllbar ist. Eine Sequenz $\emptyset \Rightarrow \Delta$ ist gültig genau dann wenn $\bigvee \Delta$ allgemeingültig ist.

Die *Schlussregeln* sind, für Δ, Γ beliebige endliche Formelmengen und ψ, θ beliebige Formeln:

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \theta}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \theta}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \theta}$$

Für Formelmengen Φ und Formeln ψ heißt ψ *ableitbar* aus Φ ($\Phi \vdash \psi$), wenn ein endliches $\Gamma \subseteq \Phi$ existiert, so das $\Gamma \Rightarrow \psi$ im SK ableitbar ist. Wir schreiben $\vdash \psi$, falls $\emptyset \Rightarrow \psi$ im SK ableitbar ist.

Der Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig.

3 Prädikatenlogik

3.1 Strukturen

Eine *Signatur* τ, z.B. $\tau = \{+, \cdot, 0, 1\}$, ist eine Menge von Funktions- und Relationssymbolen. Jedes Symbol hat eine feste, endliche Stelligkeit.

Eine Signatur heißt *relational*, wenn sie nur Relationssymbole, bzw. *funktional* oder auch τ-Algebra, wenn sie nur Funktionssymbole enthält. Nullstellige Funktionssymbole heißen auch *Konstantensymbole*.

Eine *τ-Struktur* $\mathfrak{A} = (A, P_1, P_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots)$ besteht aus einem nichtleeren *Universum* A, sowie einer Signatur $\tau = \{P_1, P_2, \ldots, f_1, f_2, \ldots\}$.

$\mathfrak{A}$ ist *Substruktur* von $\mathfrak{B}$, kurz $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{B}$ ist *Erweiterung* von $\mathfrak{A}$ wenn:

- $A \subseteq B$
- Für alle Relationssymbole $R \in \tau$ gilt: $R^{\mathfrak{A}} = R^{\mathfrak{B}} \cap A^n$
- Für alle Funktionssymbole $f \in \tau$ gilt: $f^{\mathfrak{A}} = f^{\mathfrak{B}}|_A$

Ein *Redukt* ist eine Struktur, die durch Weglassen von Relationen und Funktionen in der Signatur entsteht. Umgekehrt erhalten wir eine *Expansion* durch das Hinzufügen von Relationen und Funktionen.

3.2 Ein Zoo von Strukturen

Als Beispiele haben wir verschiedene Strukturen mit der Prädikatenlogik definiert.

Graphen haben die Signatur $\tau_G = \{ E \}$, wobei E die (binäre) Kantenrelation ist. Wir haben *gerichtete* und *ungerichtete* Graphen. Letztere dürfen keine Schlingen haben und E muss symmetrisch sein.

Partielle Ordnungen sind Strukturen der Form $(A, <)$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- *Irreflexivität:* Für kein $a \in A$ gilt $a < a$.
- *Transitivität:* $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$.

Lineare/totale Ordnungen erfüllen zusätzlich:

- *Vergleichbarkeit:* Für alle a, b gilt $a < b, a = b$ oder $b < a$.

Dichte Ordnungen sind lineare Ordnungen, wo für zwei beliebige Elemente $a < b$ immer ein c existiert mit $a < c < b$.

Wohlordnungen sind lineare Ordnungen ohne unendliche absteigende Ketten, d.h. es gibt keine unendliche Folge $a_0, a_1, \ldots$ in A, so dass $a_{i+1} < a_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

Wortstrukturen sind Strukturen für ein Wort über einem Alphabet. Für jedes Wort w ist $\mathfrak{B}(w)$ die Wortstruktur mit der Signatur $\{ < \} \cup \{ P_a : a \in \text{Alphabet}(w) \}$. Das Universum von $\mathfrak{B}(w)$ ist die Menge $\{ 0, \ldots, n-1 \}$. $<$ ist die übliche Ordnung und $P_a := \{ i < n : w_i = a \}$.

Transitionssysteme bestehen aus Zustandsmenge S und Aktionsmenge A. Dazu gibt es meist Eigenschaftsmenge B. Das Universum der Struktur ist dann S und zwei Relationsmengen: Für jedes $b \in B$ ein P_b die einstellige Relation der Zustände mit Eigenschaft b. Die zweistellige Relationen E_a treffen auf (s, t) zu, wenn es von Zustand s einen Übergang a zu t gibt.

3.3 Syntax der Prädikatenlogik

Wir haben eine feste, abzählbar unendliche Variablenmenge $\mathrm{VAR} := \{ v_0, v_1, v_2, \dots \}$.

Zunächst definieren wir die Menge $\mathrm{T}(\tau)$ der τ-*Terme*:

- $\mathrm{VAR} \subseteq \mathrm{T}(\tau)$.
- $ft_1 \dots t_n \in \mathrm{T}(\tau)$ mit $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}(\tau)$ und f ein n-stelliges Funktionssymbol aus τ.

Grundterme sind Terme ohne Variablen.

Dann ist die Menge $\mathrm{FO}(\tau)$ der τ-*Formeln* der Prädikatenlogik induktiv definiert durch:

Gleich-Operator:	*Relationen*:	*Junktoren der AL*:	*Quantoren*:
$t_1 = t_2 \in \mathrm{FO}(\tau)$	$Pt_1 \dots t_n \in \mathrm{FO}(\tau)$	$\neg\psi,\ (\psi \wedge \phi),\ (\psi \vee \phi) \in \mathrm{FO}(\tau)$	$\exists x\psi,\ \forall x\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$
mit $t_1, t_2 \in \mathrm{T}(\tau)$	mit $t_1, \dots, t_n \in \mathrm{T}(\tau)$ und $P \in \tau$ ein n-stelliges Relationssymbol	mit $\psi,\ \phi \in \mathrm{FO}(\tau)$	mit $x \in \mathrm{VAR}$ und $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$

Formeln, die nur Relationsausdrücke und solche mit dem Gleich enthalten, heißen *atomar* oder *Atom*. *Literale* sind Atome und deren Negationen. Formeln ohne Quantoren heißen *quantorenfrei*.

Eine Variable x kommt *gebunden* in einer Formel ψ vor, falls ψ eine Unterformel $\exists x\psi'$ oder $\forall x\psi'$ enthält. Eine Variable, die nicht durch einen Quantor gebunden ist, kommt *frei* vor. In einer Formel kann eine Variable gleichzeitig gebunden und frei vorkommen.

Ein *Satz* ist eine Formel, in der keine freien Variablen vorkommen.

Der *Quantorrenrang* einer Formel ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{qr}(\varphi) &= 0 && \text{für } \varphi \text{ atomar}\\
\mathrm{qr}(\neg\varphi) &= \mathrm{qr}(\varphi) &&\\
\mathrm{qr}(\varphi \circ \psi) &= \max(\mathrm{qr}(\varphi), \mathrm{qr}(\psi)) && \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\\
\mathrm{qr}(\mathrm{Q}x\,\psi) &= 1 + \mathrm{qr}(\psi) && \mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}
\end{aligned}$$

3.4 Semantik der Prädikatenlogik

Eine τ-*Interpretation* ist ein Paar $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, wobei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $\beta : X \to A$ eine Variablenbelegung mit $X \subseteq \mathrm{VAR}$ ist.

$\mathfrak{I}$ ordnet jedem Term einen Wert aus A und jeder Formel einen Wahrheitswert zu. Dabei wird die Bedeutung für die aussagenlogischen Junktoren übernommen. Weiterhin:

Für Terme:

- Für $x \in X$: $[\![x]\!]^{\mathfrak{I}} := \beta(x)$.
- $[\![ft_1 \dots t_n]\!]^{\mathfrak{I}} := f^{\mathfrak{A}}([\![t_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{I}})$.

Für atomare Formeln:

- $[\![t_1 = t_2]\!]^{\mathfrak{I}} := 1$ gdw. $([\![t_1]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![t_2]\!]^{\mathfrak{I}})$.
- $[\![Pt_1 \dots t_n]\!]^{\mathfrak{I}} := 1$ gdw. $([\![t_1]\!]^{\mathfrak{I}}, \dots, [\![t_n]\!]^{\mathfrak{I}}) \in P^{\mathfrak{A}}$.

Für Quantoren:

- $[\![\exists x\psi]\!]^{\mathfrak{I}} := \max_{x \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]}$.
- $[\![\forall x\psi]\!]^{\mathfrak{I}} := \min_{x \in A} [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}[x/a]}$.

Variablen ersetzen:

$$\beta[x/a](y) := \begin{cases} \beta(y) & \text{wenn } y \neq x, \\ a & \text{wenn } y = x \end{cases}$$

Ein *Modell* einer Formel ψ ist eine Interpretation $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, so dass $\text{frei}(\psi) \subseteq \text{dom}(\beta)$ und $[\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$. Wir schreiben: $(\mathfrak{A}, \beta) \models \psi$ oder auch $\mathfrak{A} \models \psi$. Ein *Modell einer Formelmenge* Φ ist ein $\mathfrak{I}$ so, dass $\mathfrak{I} \models \varphi$ für alle $\varphi \in \Phi$.

Das *Koinzidenzlemma* beschreibt die Tatsache, dass nicht in einer Formel ψ vorkommende Funktions- oder Relationssymbole das „Ergebnis" nicht ändern. Sei $\psi \in \text{FO}(\sigma \cap \tau)$ und $(\mathfrak{A}, \beta)$ eine σ-Interpretation und $(\mathfrak{A}', \beta')$ eine τ-Interpretation und es gelte zusätzlich:

- $\mathfrak{A} \restriction (\sigma \cap \tau) = \mathfrak{A}' \restriction (\sigma \cap \tau)$.
- $\text{frei}(\psi) \subseteq \text{dom}(\beta) \cap \text{dom}(\beta')$ und $\beta(x) = \beta'(x)$ für alle $x \in \text{frei}(\psi)$.

Dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi[\beta]$ genau dann, wenn $\mathfrak{A}' \models \psi[\beta']$.

Die *Modellklasse* von Φ, kurz $\text{Mod}(\Phi)$ besteht aus allen τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \Phi$.

Eine Klasse K von τ-Strukturen ist *axiomatisiert durch* Φ, wenn $K = \text{Mod}(\Phi)$. Dann ist Φ ein *Axiomensystem* für K.

Die *Semantische Folgerungsbeziehung:* Sei $\Phi \subseteq \text{FO}(\tau), \psi \in \text{FO}(\tau)$. ψ *folgt aus* Φ, wenn jede zu $\Phi \cup \{ \psi \}$ passende Interpretation, die Modell von Φ ist, auch Modell von ψ ist. Wir schreiben auch $\Phi \models \psi$ und $\phi \models \psi$ wenn $\Phi = \{ \phi \}$.

Eine Formel ist *erfüllbar*, wenn sie ein Modell hat, sonst *unerfüllbar*. Eine Formel ist *allgemeingültig* (kurz $\models \psi$) gdw. $\emptyset \models \psi$. Zwei Formeln sind *logisch äquivalent* (kurz $\psi \equiv \varphi$), wenn $\psi \models \varphi$ und $\varphi \models \psi$.

Für eine Formel ψ mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_k$ ist $\exists x_1 \ldots \exists x_k \psi$ der *existentielle Abschluss* und $\forall x_1 \ldots \forall x_k \psi$ der *universelle Abschluss* von ψ

3.5 Normalformen

Wir können FO-Formeln in verschiedene *Normalformen* überführen, wobei das Ersetzungslemma genutzt werden kann: Für Formeln ψ, ψ', ϕ, ϕ' gilt:

- wenn $\psi \equiv \phi$, dann auch $\neg\psi \equiv \neg\phi$.
- wenn $\psi \equiv \psi'$ und $\phi \equiv \phi'$, dann auch $(\psi \circ \phi) \equiv (\psi' \circ \phi')$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.
- wenn $\psi \equiv \phi$, dann auch $\exists x\psi \equiv \exists x\phi$ und $\forall x\psi \equiv \forall x\phi$.
- wenn ϑ eine Teilformel von ψ ist und $\phi \equiv \vartheta$, ist $\psi \equiv \psi[\vartheta/\phi]$, wobei $\psi[\vartheta/\phi]$ die Formel ist, die man durch Ersetzen von ϑ durch ϕ in ψ erhält.

Wir definieren *reduzierte Formeln* als solche, in denen weder $\wedge$, $\rightarrow$ noch $\forall$ vorkommen. Die Reduzierung ist mit den drei Regeln rechts für alle FO-Formeln möglich.

$$\psi \wedge \varphi \equiv \neg(\neg\psi \vee \neg\varphi)$$
$$\psi \rightarrow \varphi \equiv \neg\psi \vee \varphi$$
$$\forall x\psi \equiv \neg\exists x\neg\psi$$

Eine Formel ist in *Negationsnormalform* (NNF), wenn sie nur aus Literalen, den Junktoren $\vee$, $\wedge$ und Quantoren $\exists$ und $\forall$ aufgebaut ist. Jede Formel kann in NNF gebracht werden. Dazu reichen die folgenden Regeln aus:

De Morgan:	*Quantorenregeln:*	*Doppelte Negation:*
$\neg(\psi \wedge \varphi) \equiv (\neg\psi \vee \neg\varphi)$	$\neg\exists x\psi \equiv \forall x\neg\psi$	$\neg\neg\psi \equiv \psi$
$\neg(\psi \vee \varphi) \equiv (\neg\psi \wedge \neg\varphi)$	$\neg\forall x\psi \equiv \exists x\neg\psi$	

Eine Formel ist *termreduziert*, wenn alle Atome darin der Form $R\overline{x}$, $f\overline{x} = y$ und $x = y$ sind. Jede FO-Formel lässt sich in diese Form bringen, indem man für verschachtelte Terme neue Variablen hinzufügt.

Eine Formel ist *bereinigt*, wenn keine Variable sowohl frei als auch gebunden vorkommt und keine Variable mehr als einmal gebunden wird. Jede FO-Formel lässt sich bereinigen.

Eine Formel ist in *Pränex-Normalform* (PNF), wenn sie bereinigt ist und alle Quantoren nur zusammen am Anfang der Formel auftauchen. Jede FO-Formel lässt sich in PNF bringen.

Eine Formel ist in *Skolem-Normalform*, wenn an ihrem Anfang nur Allquantoren stehen und sie danach quantorenfrei ist. Zu jeder FO-Formel lässt sich eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolem-Normalform erstellen. Dazu bringen wir die Formel zunächst in Pränex-Normalform und fügen für jede existenziell quantifizierte Variable x ein neues Funktionssymbol f in die Signatur ein. Wenn vor dem Existenzquantor x_1 bis x_k allquantifiziert auftreten, ersetzen wir jedes Vorkommen von x durch $fx_1, \dots, x_k$ und entfernen den Existenzquantor.

Eine Formel ist in *relationaler Skolem-Normalform*, wenn sie relational ist und an ihrem Anfang zunächst nur Allquantoren stehen, danach Existenzquantoren und anschließend ein quantorenfreier Teil. Zu jeder Formel ϕ gibt es eine Formel ψ in relationaler Skolem-Normalform, die über denselben Universen erfüllbar ist. Dazu bringen wir ϕ zunächst in die Skolem-Normalform und ersetzen jedes n-stellige Funktionssymbol durch ein $n + 1$-stelliges Relationssymbol und quantifizieren die dabei entstehenden Variablen existentiell.

3.6 Spieltheoretische Semantik

Ein *Auswertungsspiel* (Model-Checking-Spiel) MC($\mathfrak{A}$,ψ), mit FO-Satz ψ, bestenfalls in Negationsnormalform, und passender Struktur $\mathfrak{A}$, ist ein Spiel zwischen der *Verifiziererin V* und dem *Falsifizierer F*. Dieser Algorithmus ist zur Auswertung von prädikatenlogischen Formeln.

Die Positionen des Spiels sind Paare (φ, β), mit φ als Unterformel von ψ und einer Belegung $\beta : \text{frei}(\varphi) \to A$. Für $\varphi = \varphi(\overline{x})$ und $\beta : \overline{x} \mapsto \overline{a}$ bezeichnen wir die Position (φ, β) durch $\varphi(\overline{a})$.

Ein Spiel beginnt bei der Position ϕ. Sei $\varphi(\overline{a})$ die aktuelle Position. Dann hängt der nächste Schritt von ϕ ab:

- φ ist ein Literal: Das Spiel ist beendet. Die Verifiziererin hat gewonnen, falls $\mathfrak{A} \models \varphi(\overline{a})$, sonst hat der Falsifizierer gewonnen.
- An einer Position $(\vartheta \vee \eta)$ ist die Verifiziererin am Zug und kann zu ϑ oder zu η ziehen.
- Analog zieht der Falsifizierer bei Position $(\vartheta \wedge \eta)$ entweder zu ϑ oder η.
- An einer Position der Form $\exists x \vartheta(x, \overline{b})$ wählt die Verifiziererin ein Element $a \in A$ und zieht zu $\vartheta(a, \overline{b})$.
- Analog darf an einer Position $\forall x \vartheta(x, \overline{b})$ der Falsifizierer ein Element $a \in A$ auswählen und zur Position $\vartheta(a, \overline{b})$ ziehen.

Für jeden Satz $\psi \in \text{FO}(\tau)$ und jede τ-Struktur $\mathfrak{A}$ gilt: $\mathfrak{A} \models \psi$ genau dann, wenn die Verifiziererin eine Gewinnstrategie für das Spiel $MC(\mathfrak{A}, \psi)$ von der Anfangsposition ψ hat.

Endliche Spiele Allgemeine Spiele sind zwischen Spieler 0 und Spieler 1 auf einem Spielgraphen $\mathcal{G} = (V, V_0, E)$, mit Menge V der *Spielpositionen*, Teilmenge $V_0 \subseteq V$ der Positionen, an denen Spieler

0 am Zug ist, und der Menge $E \subseteq V \times V$ an möglichen Zügen. Analog sind $V_1 := V \setminus V_0$ die Positionen, an denen Spieler 1 am Zug ist.

Für eine Position v sei $vE := \{w : (v, w) \in E\}$ die Menge der unmittelbaren Nachfolgerpositionen. Eine Position v mit $vE = \emptyset$ ist eine Endpositionen. Wenn im Spiel eine Endposition erreicht wird, hat der Spieler verloren der am Zug ist, aber nicht ziehen kann. Die Menge der Endpositionen, in denen Spieler $\sigma \in \{0, 1\}$ gewinnt, ist $T_\sigma := \{v \in V_{1-\sigma} : vE = \emptyset\}$.

Eine *Partie* ist mit Anfangsposition v_0 ein endlicher oder unendlicher Pfad $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$ bzw. $(v_o, v_1, \ldots)$, so dass $(v_{i-1}, v_i) \in E$ für alle $i > 0$ und v_m eine Endposition ist.

Eine *Strategie* für Spieler σ ist eine Funktion $f : \{v \in V_\sigma : vE \neq \emptyset\} \to V$. f ist eine *Gewinnstratgie*, wenn Spieler σ jede Partie mit Anfangsposition v_0 gewinnt, wenn er mit Strategie f spielt.

Die *Gewinnregion* von Spieler σ ist $W_\sigma = \{\, v :$ Spieler σ hat eine Gewinnstrategie von Position v aus $\}$

Ein Spiel ist *determiniert*, wenn $W_0 \cup W_1 = V$.

Auswertungsspiele in FO haben die Eigenschaft, dass alle Partien endlich sind. Solche Spiele werden *fundiert* genannt. Fundierte Spiele sind determiniert.

Strategieproblem Sei *Game* das Strategieproblem mit endlichen Spielgraphen: Game $= \{(\mathcal{G}, v) :$ Spieler 0 hat eine Gewinnstrategie für $\mathcal{G}$ von Position $v\}$

Man kann Game in Polynomialzeit lösen. Sei die Menge W_σ^n der Positionen von denen Spieler σ eine Strategie hat, um in höchstens n Schritten zu gewinnen. Dann gibt es einen Algorithmus, der induktiv $W_\sigma^0 = T_\sigma$ berechnet, indem W_σ^n über

$$W_\sigma^{n+1} = \{v \in V_\sigma : vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset\} \cup \{v \in V_{1-\sigma} : vE \subseteq W_\sigma^n\}$$

berechnet wird. Man kann also aus einer Position in höchstens $n + 1$ Zügen gewinnen, wenn man selbst am Zug ist und in eine Position ziehen kann, aus der man in höchstens n Zügen gewinnen kann, oder in der der Gegenspieler am Zug ist, aber dieser nur in Positionen ziehen kann, aus denen man selbst in höchstens n Zügen gewinnen kann.

4 Definierbarkeit der Prädikatenlogik

4.1 Definierbarkeit

In einer Struktur $\mathfrak{A}$ heißt eine Relation $R \subseteq A^n$ *definierbar* wenn es eine Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ gibt, sodass

$$\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a}) \text{ gdw. } \bar{a} \in R$$

Eine Funktion f heißt definierbar, wenn die Relation R mit $(a_1, \ldots, a_n, b) \in R$ gdw. $f(a_1, \ldots, a_n) = b$ definierbar ist.

4.2 Das Isomorphielemma

Ein *Isomorphismus* π zwischen zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist eine Funktion von A nach B mit den folgenden Eigenschaften:

- π ist bijektiv.
- Für jedes Funktionssymbol f gilt $\pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$.
- Für jedes Relationssymbol R ist $(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \in R^{\mathfrak{B}}$.

Für Isomorphismen schreiben wir auch $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$. Ein Automorphismus von $\mathfrak{A}$ ist ein Isomorphismus $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}$.

Für τ-Strukturen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $\pi : \mathfrak{A} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}$ und Formeln $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ist

$$(\mathfrak{A}, \beta) \models \varphi \text{ gdw. } (\mathfrak{B}, \pi \circ \beta) \models \varphi$$

4.3 Theorien und elementar äquivalente Strukturen

Eine Theorie ist eine erfüllbare Satzmenge $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$, sodass für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ mit $T \models \varphi$ bereits $\varphi \in T$ gilt.

Eine Theorie ist vollständig, wenn für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ entweder $\varphi \in T$ oder $\neg\varphi \in T$ ist.

Zu einer τ-Struktur $\mathfrak{A}$ ist $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ die Menge aller von $\mathfrak{A}$ erfüllten Sätze. Diese ist immer vollständig. Für eine Modellklasse $\mathcal{K}$ ist $\mathrm{Th}(\mathcal{K}) = \bigcap_{\mathfrak{A} \in \mathcal{K}} \mathrm{Th}(\mathfrak{A})$.

Zwei τ-Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ heißen *elementar äquivalent* ($\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), wenn für jeden Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi \text{ gdw. } \mathfrak{B} \models \varphi$$

Es ist $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ genau dann wenn $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Th}(\mathfrak{B})$ ist.

4.4 Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiele

Sei τ eine relationale Signatur. Ein *lokaler (oder partieller) Isomorphismus* von τ-Struktur $\mathfrak{A}$ zu τ-Struktur $\mathfrak{B}$ ist eine injektive Abbildung $p : D \to B$ mit $D \subseteq A$. Für alle $n \in \mathbb{N}$, alle n-stelligen Relationssymbole $R \in \tau$ und alle $a_1, \dots, a_n \in D$ muss gelten:

$$(a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}} \text{ gdw. } (pa_1, \dots, pa_n) \in R^{\mathfrak{B}}$$

Das *Ehrenfeucht-Fraïssé-Spiel* $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ wird von zwei Spielern gespielt. Das *Spielfeld* besteht aus Strukturen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Wir nehmen an, dass $A \cap B = \emptyset$. Wir nennen die Spieler den *Herausforderer* (Spieler I) und die *Duplikatorin* (Spieler II). Eine Partie besteht aus m Zügen.

- Im Zug i bestimmt der Herausforderer entweder ein Element $a_i \in A$ oder ein $b_i \in B$. Die Duplikatorin wählt dann ein Element aus der anderen Struktur aus.
- Nach m Zügen gibt es einen Gewinner: Die Duplikatorin hat gewonnen, wenn die Menge $\{ (a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m) \}$ ein lokaler Isomorphismus ist. Andernfalls hat der Herausforderer gewonnen.

Eine *Gewinnstrategie* ist eine Funktion, die für jedes Teilspiel in jeder Position Züge nennt, die einen Gewinn garantieren, egal was der Gegner tut.

$G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ ist eine Abwandlung, bei der der Herausforderer zu Beginn das m wählt, für das $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gespielt wird.

Der *Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé* gibt uns die folgenden beiden Äquivalenzen:

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$	$\mathfrak{A} \equiv_m \mathfrak{B}$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
Die Duplikatorin gewinnt das EF-Spiel $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$	Die Duplikatorin gewinnt das EF-Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Wir haben für den obigen Satz die folgende stärkere Aussage verwendet:

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ τ-Strukturen, $\bar{a} = a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$, $\bar{b} = b_1, \dots b_n \in \mathfrak{B}$. Wenn es eine Formel $\psi(\bar{x})$ mit $\mathrm{qr}(\psi) = m$ gibt, so dass $\mathfrak{A} \models \psi(\bar{a})$ und $\mathfrak{B} \models \neg\psi(\bar{b})$, dann hat der Herausforderer eine Gewinnstrategie für $G_m(\mathfrak{A}, \bar{a}, \mathfrak{B}, \bar{b})$.

Mit dem Satz von Ehrenfeucht-Fraïssé kann man dann Folgendes beweisen:

Es gibt keinen Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$, so dass für jeden endlichen und gerichteten Graphen $G = (V, E)$ gilt: $G \models \psi$ gdw. G zusammenhängend ist.

5 Vollständigkeitssatz, Kompaktheitssatz, Unentscheidbarkeit

5.1 Regeln des Sequenzenkalküls der Prädikatenlogik

$$(S \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, t \doteq t', \psi(t') \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow S)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma, t \doteq t' \Rightarrow \Delta, \psi(t')}$$

$$(\neg \Rightarrow)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \neg)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$$

$$(\vee \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \vee \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \vee)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \vee \theta}$$

$$(\wedge \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \wedge \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \wedge)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \wedge \theta}$$

$$(\rightarrow\Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \Rightarrow \Delta, \psi \qquad \Gamma, \theta \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \psi \rightarrow \theta \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow\rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \theta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi \rightarrow \theta}$$

$$(\exists \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}\, * \qquad (\Rightarrow \exists)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x \psi(x)}$$

$$(\forall \Rightarrow)\ \frac{\Gamma, \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta} \qquad (\Rightarrow \forall)\ \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x \psi(x)}\, *$$

$$(=)\ \frac{\Gamma, t = t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$$

$*$wenn c in Γ, Δ und ψ nicht vorkommt

5.2 Der Vollständigkeitssatz

Ein Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\tau)$ heißt aus einer Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ableitbar ($\Phi \vdash \varphi$), wenn es eine endliche Teilmenge $\Gamma \subseteq \Phi$ gibt, sodass für die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \varphi$ ein Beweis im Sequenzenkalkül existiert.

Eine Satzmenge Φ heißt inkonsistent, wenn jeder Satz aus ihr ableitbar ist.

Für jede Satzmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und jeden Satz $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ ist

$$\Phi \models \psi \text{ gdw. } \Phi \vdash \psi$$

$$\Phi \text{ ist unerfüllbar gdw. } \Phi \text{ inkonsistent ist}$$

5.2.1 Herbrand-Strukturen

Eine τ-Herbrand-Struktur ist eine Struktur mit der Menge aller τ-Grundterme als Universum, bei der die Funktionssymbole „auf sich selbst“ abgebildet werden, d.h. in jeder Herbrand-Struktur $\mathfrak{H}$ ist für jeden Grundterm $[\![t]\!]^{\mathfrak{H}} = t$.

Zu einer Menge atomarer Sätze $\Sigma \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ ist $\mathfrak{H}(\Sigma)$ die Herbrandstruktur mit $R^{\mathfrak{H}(\Sigma)} = \{\bar{a} \mid R\bar{a} \in \Sigma\}$.

5.2.2 Kongruenzrelationen

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur. $\sim \subseteq A \times A$ ist eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$, wenn sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.
- Für alle Funktionssymbole $f \in \tau$ gilt, wenn $a_1 \sim a_1', \dots, a_n \sim a_n'$, auch $fa_1 \dots a_n \sim fa_1' \dots a_n'$.
- Für alle Relationssymbole R und $a_1 \sim a_1', \dots, a_n \sim a_n'$ ist $(a_1, \dots, a_b) \in R^{\mathfrak{A}}$ gdw. $(a_1', \dots, a_n') \in R^{\mathfrak{A}}$.

5.2.3 Faktorstruktur

Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur und $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathfrak{A}$.
Dann ist $\mathfrak{A}/_\sim$ die Struktur der Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ mit $f^{\mathfrak{A}/\sim}([a_1], \dots, [a_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)]$ und $R^{\mathfrak{A}/\sim} = \{([a_1], \dots, [a_n]) \mid (a_1, \dots, a_n) \in R^{\mathfrak{A}}\}$.

5.2.4 Abschluss unter Substitution

Eine Satzmenge Φ heißt *abgeschlossen unter Substitution*, wenn für jeden Grundterm t der Satz $t = t$ in Φ ist und wenn $t = t'$ und $\psi(t)$ in Φ sind, auch $\psi(t')$ in Φ ist.

5.2.5 Kanonisches Modell

Sei eine Menge atomarer Sätze Σ gegeben, die abgeschlossen unter Substitution ist. Dann ist $\mathfrak{A}(\Sigma) := \mathfrak{H}(\Sigma)/_\sim$ mit $t \sim t'$ gdw. $t = t' \in \Sigma$ das *Kanonische Modell* von Σ.

5.2.6 Hintikka-Mengen

Für zwei Satzmengen Γ, Δ mit den folgenden Eigenschaften ist $\Gamma \cup \{ \neg\varphi \mid \varphi \in \Delta \}$ eine *Hintikka-Menge*:

- Γ und Δ sind disjunkt.
- Γ ist abgeschlossen unter Substitution.
- Wenn $\neg\psi \in \Gamma$, dann ist $\psi \in \Delta$. Wenn $\neg\psi \in \Delta$, dann ist $\psi \in \Gamma$.
- Wenn $\varphi \vee \psi \in \Gamma$, dann ist φ oder ψ in Γ. Wenn $\varphi \vee \psi \in \Delta$, dann sind φ und ψ in Δ.
- Wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Gamma$, dann gibt es einen Grundterm t, sodass $\psi(t) \in \Gamma$. Wenn $\exists x\, \psi(x) \in \Delta$, dann ist $\psi(t) \in \Delta$ für alle Grundterme t.

Für jede Hintikka-Menge Φ ist $\mathfrak{A}(\Sigma)$ mit Σ der Menge der atomaren Sätze in Φ ein Modell von Φ.

5.3 Der Kompaktheitssatz

Der Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik ist analog zu dem der Aussagenlogik:

Für jede Formelmenge $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$ und Formel $\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$ gilt:

$$\Phi \models \psi \text{ gdw. eine endliche Teilmenge } \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ existiert sodass } \Phi_0 \models \psi$$

$$\Phi \text{ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge } \Phi_0 \subseteq \Phi \text{ erfüllbar ist}$$

5.4 Die Sätze von Löwenheim-Skolem

Absteigend:

> Jede erfüllbare abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell.

Bemerkung zur Anwendung: Wenn τ abzählbar ist, dann ist auch $\mathrm{FO}(\tau)$ abzählbar, und also auch alle $\Phi \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$.

Aufsteigend:

- Jede Satzmenge, die beliebig große endliche Modelle hat, hat ein unendliches Modell.
- Jede Satzmenge Φ, die ein unendliches Modell hat, hat für jede unendliche Kardinalzahl $\kappa \geq |\Phi|$ ein Modell der Größe κ.

5.5 Standardverfahren zur Axiomatisierbarkeit

Eine klassische Aufgabe in Übung und Klausur besteht darin, die (endliche) Axiomatisierbarkeit von gewissen Strukturklassen zu zeigen oder zu widerlegen. Die (endliche) Axiomatisierbarkeit einer Strukturklasse $\mathcal{K}$ lässt sich meist am einfachsten durch Angabe eines passenden Axiomensystems beweisen.

Wenn man zeigen will, dass eine Klasse $\mathcal{K}$ hingegen nicht bzw. nicht endlich axiomatisierbar ist, bieten sich oft einige Standardverfahren an, die hier kurz erläutert werden sollen.

5.5.1 Nicht axiomatisierbar

Kompaktheitssatz Finde zunächst ein unendliches Axiomensystem Ψ für eine Strukturklasse K' mit $K \cap K' = \emptyset$, so dass jede endliche Teilmenge von Ψ ein Modell in K besitzt.

Wenn man nun annimmt, dass es ein Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$ gibt, muss $\Phi \cup \Psi$ unerfüllbar sein, mit KS gibt es dann ein endliches unerfüllbares $\Phi_0 \subseteq \Phi \cup \Psi$. Jedoch wurde Ψ so gewählt, dass Φ_0 erfüllbar ist, damit tritt ein Widerspruch auf und im Umkehrschluss muss gelten, dass kein passendes Φ existiert.

Die Schwierigkeit ist hierbei die Wahl von Ψ. Oftmals bietet es sich an, Ψ als Axiomensystem für die Klasse von unendlichen Strukturen o. ä. zu wählen.

Beispiel: Für $\mathcal{K}$ die Klasse der endlichen Mengen wähle $\Psi = \Phi_\infty$.

Ehrenfeucht-Fraïssé Beachte zunächst, dass τ abzählbar und relational sein muss. Finde zwei Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{B} \notin \mathcal{K}$ mit $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ und gebe eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin für $G(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an. Dann ist $\mathcal{K}$ nicht axiomatisierbar, da $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht in FO unterschieden werden können.

Die Schwierigkeit besteht hierbei in der passenden Wahl von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, zudem ist das Aufschreiben der Strategie manchmal aufwändig.

Beispiel: Für $\mathcal{K}$ die Klasse der abzählbaren Mengen wähle $\mathfrak{A} = \mathbb{N}$ und $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem Hier gibt es zwei Fälle:

- In $\mathcal{K}$ sind bel. große, aber nur endliche Strukturen Wenn ein hypothetisches Φ $\mathcal{K}$ axiomatisiert, hat Φ nach LS$\uparrow$ ein unendliches Modell, dies widerspricht aber der Definition von Φ.
  Klassisches Beispiel: Die Klasse aller endlichen Mengen.
- $\mathcal{K}$ beinhaltet unendliche Strukturen, so dass für alle $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}$ und eine feste Menge M $|A| < |M|$ gilt.
  Wenn ein hyp. Φ $\mathcal{K}$ axiomatisiert, gibt es nach LS$\uparrow$ ein Modell von Φ mit Mächtigkeit mindestens M, im Umkehrschluss gibt es kein passendes Φ.
  Beispiel: Die Menge der abzählbaren Mengen.

Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem Wenn $\mathcal{K}$ nur überabzählbar große Strukturen enthält, ist $\mathcal{K}$ nach LS$\downarrow$ nicht axiomatisierbar. Hierfür muss τ abzählbar sein.

5.5.2 Nicht endlich axiomatisierbar

Kompaktheitssatz Dazu benötigen wir ein unendliches Axiomensystem Φ für $\mathcal{K}$, wobei jede endliche Teilmenge von Φ kein Axiomensystem für $\mathcal{K}$ ist (bei entsprechenden Aufgaben soll oft zuerst die generelle Axiomatisierbarkeit überprüft werden, daher ist ein solches Φ oft schon vorhanden).

Nun nehmen wir an, dass ein Axiomensystem $\{\phi\}$ für $\mathcal{K}$ existiert, wobei dann $\{\neg\phi\} \cup \Phi$ unerfüllbar ist. Nach KS gibt es dann ein endliches unerfüllbares $\Phi_0 \subseteq \{\neg\phi\} \cup \Phi$. Um nun einen Widerspruch zu erzeugen, geben wir ein Modell von Φ_0 an.

Die Argumentation ist dabei oft sehr ähnlich zum Kompaktheitssatzschema für generelle Nichtaxiomatisierbarkeit.

Beispiel: Für $\mathcal{K}$ die Klasse der unendlichen Mengen wähle $\Phi = \Phi_\infty$.

5.6 Unentscheidbarkeit der Prädikatenlogik

Das Erfüllbarkeitsproblem („hat eine Formel ein Modell") und das Gültigkeitsproblem („ist eine Formel eine Tautologie") sind unentscheidbar.

Das Gültigkeitsproblem ist semi-entscheidbar.

6 Modallogik, Temporale Logik und Monadische Logik

6.1 Modallogik

Atomare Eigenschaften:	*Aussagenlogische Junktoren:*	*Modallogische Junktoren:*
$P_i \in \mathrm{ML}$ mit $i \in I$	$\neg\psi,\ (\psi \wedge \phi),\ (\psi \vee \phi),\ (\psi \rightarrow \phi) \in \mathrm{ML}$ mit $\psi,\ \phi \in \mathrm{ML}$	$\langle a\rangle\psi,\ [a]\psi$ mit $a \in A$ und $\psi \in \mathrm{ML}$

Falls $|A| = 1$ schreibt man statt $\langle a\rangle\psi$ und $[a]\psi$ $\Diamond\psi$ („möglicherweise ψ") und $\Box\psi$ („notwendigerweise ψ").

Ein *Transitionssytem* oder eine *Kripkestruktur* mit Aktionen aus A und atomaren Eigenschaften $\{ P_i : i \in I \}$ ist eine Struktur $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ mit:

Zustände:	*Transitionen:*	*Eigenschaften der Zustände:*
$v \in V$	$E_a \subseteq V \times V$ mit $a \in A$	$P_i \subseteq V$ mit $i \in I$

Statt $(u, v) \in E_a$ schreibt man auch $u \xrightarrow{a} v$.

Wir definieren die *Modellbeziehung* $\mathcal{K}, v \models \psi$ (ψ gilt im Zustand v von $\mathcal{K}$) induktiv:

1. $\mathcal{K}, v \models P_i$ gdw. $v \in P_i$.
2. $\neg\psi$, $(\psi \wedge \varphi)$, $(\psi \vee \varphi)$ und $(\psi \rightarrow \varphi)$ sind wie üblich definiert.
3. $\mathcal{K}, v \models \langle a\rangle\psi$ wenn ein w existiert mit $(v, w) \in E_a$ und $\mathcal{K}, w \models \psi$.
4. $\mathcal{K}, v \models [a]\psi$ wenn für alle w mit $(v, w) \in E_a$ gilt, dass $\mathcal{K}, w \models \psi$.

Jeder Formel ψ und jedem Transitionssystem $\mathcal{K}$ kann man die *Extension* zuordnen, d.h. die v, an denen ψ gilt: $[\![\psi]\!]^{\mathcal{K}} := \{ v \mid \mathcal{K}, v \models \psi \}$.

Wir können ML als Fragment von FO auffassen:
Zu jeder Formel $\psi \in \mathrm{ML}$ existiert eine Formel $\psi^*(x)$ in FO^2, so dass für alle Transitionssysteme $\mathcal{K}$ und alle Zustände v von $\mathcal{K}$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K} \models \psi^*(v)$. FO^2 ist dabei die Menge der relationalen FO-Formeln mit nur zwei Variablen.

6.2 Bisimulation

Eine *Bisimulation* zwischen zwei Transitionssystemen $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$ und $\mathcal{K}' = (V', (E'_a)_{a\in A}, (P'_i)_{i\in I})$ ist eine Relation $Z \subseteq V \times V'$, so dass für alle $(v, v') \in Z$ gilt:

- $v \in P_i$ gdw. $v' \in P'_i$ für alle $in \in I$.
- *Hin:* Für alle $a \in A$, $w \in W$ mit $v \xrightarrow{a} w$ existiert ein $v' \xrightarrow{a} w'$ und es ist $(w, w') \in Z$.
- *Her:* Für alle $a \in A$, $w' \in V'$ mit $v' \xrightarrow{a} w'$ existiert ein $w \in V$ mit $v \xrightarrow{a} w$ und es ist $(w, w') \in Z$.

Das *Bisimulationsspiel* auf zwei Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$. Auf beiden befindet sich jeweils ein Spielstein.

> Spieler I bewegt seinen Stein entlang einer Transition $v \xrightarrow{a} w$.
> Spieler II muss dann entsprechend einen Zug $v' \xrightarrow{a} w'$ in der anderen Struktur machen.
> Am Anfang und nach jedem Zug wird überprüft, ob für die aktuelle Position v, v' gilt: $v \in P_i$ gdw. $v' \in P'_i$ für alle $i \in I$. Wenn nicht, hat Spieler I gewonnen, sonst geht das Spiel weiter.
> Spieler II gewinnt genau dann das Bisimulationsspiel auf $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ von (u, u'), wenn $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$.

Für alle Kripkestrukturen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ gilt: Wenn $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$, dann ist $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ für alle n. Die Umkehrung gilt jedoch nicht: es gibt $\mathcal{K}, v$ und $\mathcal{K}', v'$, so dass $\mathcal{K}, v \sim_n \mathcal{K}', v'$ aber $\mathcal{K}, v \not\sim \mathcal{K}', v'$.

Daraus ergibt sich ein Werkzeug, mit dem man zeigen kann, dass gewisse Eigenschaften nicht in der Modallogik definierbar sind: Wenn man zwei bisimilare Strukturen hat, von denen eine die gewünschte Eigenschaft hat und die andere nicht, ist die Eigenschaft nicht ML-definierbar.

Die *Modaltiefe* $\mathrm{md}(\psi)$ ist definiert analog zum Quantorenrang.

Auch wieder analog zur Prädikatenlogik definieren wir elementare Äquivalenz:

$\mathcal{K}, v \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', v'$ wenn für alle $\psi \in \mathrm{ML}$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K}', v' \models \psi$.	$\mathcal{K}, v \equiv^n_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', v'$ wenn für alle $\psi \in \mathrm{ML}$ mit $\mathrm{md}(md) \leq n$ gilt: $\mathcal{K}, v \models \psi$ gdw. $\mathcal{K}', v' \models \psi$.

Für Kripkestrukturen $\mathcal{K}, \mathcal{K}'$ und $u \in \mathcal{K}, u' \in \mathcal{K}'$:

$\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$ $\Downarrow$ $\mathcal{K}, u \equiv_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', u'$	$\mathcal{K}, u \sim_n \mathcal{K}', u'$ $\Downarrow$ $\mathcal{K}, u \equiv^n_{\mathrm{ML}} \mathcal{K}', u'$

Für endlich verzweigte Transitionssysteme können wir sogar sagen, dass $\mathcal{K}, u \sim \mathcal{K}', u'$ genau dann gilt, wenn $\mathcal{K}, u \equiv_{\mathrm{ML}} K', u'$.

6.3 Abwicklungen und Baummodell-Eigenschaft

Ein Baum mit Wurzel v ist ein Transitionssystem, in dem es zu jedem Knoten $w \neq v$ genau einen Pfad von v zu w gibt.

Zu jedem Transitionssystem $\mathcal{K}$ mit Knoten v gibt es einen Baum $\mathcal{K}'$ mit Wurzel v', sodass $\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v'$. Um diesen zu konstruieren, wird das Transitionssystem „abgewickelt“:
Man erzeugt einen Baum mit Wurzel w' für alle Nachfolger w von v in $\mathcal{K}$, fügt diese disjunkt zusammen und fügt die Wurzel v' mit einer Kante entsprechenden Typs von v' nach w' ein.

6.4 Temporale Logiken

LTL („linear temporal logic“) erweitert Aussagenlogische Formeln mit den Variablen $P_1, \dots, P_n$ um die folgende Syntax:

- Wenn $\varphi \in \mathrm{LTL}$ ist auch $\mathrm{X}\varphi \in \mathrm{LTL}$.
- Wenn $\varphi, \psi \in \mathrm{LTL}$ ist auch $\varphi \mathrm{U} \psi \in \mathrm{LTL}$.

Interpretationen von LTL-Formeln sind (möglicherweise unendliche) Wörter $v_1 v_2 \dots$ mit einer aktuellen Position v_i und einem Wahrheitswert für jedes P_j an jedem v_k. Der Wahrheitswert von booleschen Operatoren ist wie üblich. P_i wird sein Wahrheitswert an der aktuellen Position zugeordnet. $\mathrm{X}\varphi$ ist erfüllt, wenn die aktuelle Position nicht die letzte ist und an der nächsten Position φ gilt. $\varphi \mathrm{U} \psi$ gilt wenn es eine folgende Position gibt, an der ψ gilt und an allen Positionen davor ab der aktuellen Position φ gilt.

CTL („computation tree logic“) ist die Zusammenfassung von ML und LTL: Sie erweitert Aussagenlogische Formeln in den Variablen $P_1, \dots, P_n$ um die folgende Syntax:

- Wenn $\varphi \in \mathrm{CTL}$ sind auch $\mathrm{EX}\varphi$ und $\mathrm{AX}\varphi$ in CTL.
- Wenn $\varphi, \psi \in \mathrm{CTL}$ sind auch $\mathrm{E}(\varphi \mathrm{U} \psi)$ und $\mathrm{A}(\varphi \mathrm{U} \psi)$.

Interpretationen von CTL-Formeln sind Transitionssysteme mit einer aktuellen Position.

- $\mathrm{EX}\psi$ und $\mathrm{AX}\psi$ sind analog zu $\Diamond\psi$ bzw. $\Box\psi$.
- $\mathrm{E}(\psi \mathrm{U} \vartheta)$ ist erfüllt, wenn es einen Pfad ab der aktuellen Position gibt, auf dem an einer Stelle ϑ und an allen Stellen davor ψ gilt. $\mathrm{A}(\psi \mathrm{U} \vartheta)$ ist analog mit allen Pfaden.

6.5 Monadische Logik

Monadische Logik (MSO) ist eine Erweiterung von FO um Quantifizierung von einstelligen Relationssymbolen.