Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf

RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 15. Juni 2022 — Besprechung: 23. Juni 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

5. Globalübung

Aufgabe 23

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines zweidimensionalen diskreten Zufallsvektors (X, Y) sei durch die folgende Tabelle der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = i, Y = j)$$

für $i \in \{1{,}2\}$ und $j \in \{1{,}2{,}3{,}4{,}5\}$ gegeben.

$P(X=i,Y=j)$		j					$P(X=i)$
		1	2	3	4	5	
i	1	0	0,1	?	0,1	0,2	?
	2	0,1	?	0,1	0,2	0,1	?
$P(Y=j)$		0,1	0,2	0,1	?	0,3	

(a) Vervollständigen Sie die Tabelle durch Angabe der fehlenden Wahrscheinlichkeiten in der gemeinsamen Verteilung und in den Randverteilungen von X und Y.

(b) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\mathrm{E}X$, $\mathrm{E}Y$ und $\mathrm{E}(XY)$.

(c) Berechnen Sie die Kovarianz $\mathrm{Kov}(X{,}Y)$. Sind X und Y stochastisch unabhängig?

Aufgabe 24

Seien X und Y unkorrelierte Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{R}(-2, 4)$ (Rechteckverteilung bzw. stetige Gleichverteilung auf $[-2, 4]$, s. Bezeichnung B 3.6) und $Y \sim \mathrm{Exp}(0{,}5)$ (Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 0{,}5$, s. Bezeichnung B 3.7). Weiter seien $U = X - 2\,Y$ und $V = 3\,X + Y - 5$.

(a) Berechnen Sie $\mathrm{E}\,U$ und $\mathrm{E}\,V$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{Var}\,U$ und $\mathrm{Var}\,V$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Kov}(U, X)$.

Hinweis: Sie können die Resultate aus den Beispielen C 5.2 und C 5.13 verwenden.

Aufgabe 25

Seien $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$ und $\lambda > 0$. Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Y mit $X \sim \mathrm{po}(\lambda)$ und $Y \sim \mathrm{bin}\,(n,p)$ (d.h. X ist Poisson-verteilt und Y ist binomialverteilt, s. Bezeichnungen B 2.4 und B 2.5).

(a) Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion g_X von X (vgl. Bsp. C 6.3).

(b) (i) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion h_Y von Y.

(ii) Berechnen Sie mit Hilfe von h_Y den Erwartungswert $\mathrm{E}(Y)$ und die Varianz $\mathrm{Var}(Y)$ der Zufallsvariablen Y.

Aufgabe 26

Seien $s \in \mathbb{N}$ und (X,Y) ein zweidimensionaler stetiger Zufallsvektor mit Riemann-Dichte $f^{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$f^{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^s\, e^{-(x+1)y}}{(s-1)!} & , \ \text{falls}\, x,y > 0\,, \\ 0 & , \ \text{sonst}\,. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die Randdichte f^Y von Y, und geben Sie die Verteilung von Y an.

(b) Bestimmen Sie für $y > 0$ die bedingte Dichte $f^{X|Y=y}$ von X unter (der Hypothese) $Y = y$. Um die Dichte welcher Verteilung handelt es sich?

(c) Berechnen Sie für $y > 0$ den bedingten Erwartungswert $\mathrm{E}(X \,|\, Y = y)$ von X unter (der Hypothese) $Y = y$.

Aufgabe 27

Eine Bank betreibt in einer Region insgesamt 200 Geldautomaten, von denen jeder (unabhängig von den übrigen Automaten) mit Wahrscheinlichkeit 0,05 aufgrund einer Störung innerhalb einer Woche mindestens einmal ausfällt.

Für die Einrichtung eines ständigen Wartungsdienstes ist die Wahrscheinlichkeit von Interesse, dass die Anzahl der Geldautomaten, die in einer Woche mindestens eine derartige Störung aufweisen, mindestens 5 und höchstens 15 beträgt.

(a) Schätzen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mittels der Tschebyscheff–Ungleichung nach *unten* ab.

(b) Berechnen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit approximativ mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Hinweis:

Verteilungsfunktionswerte bzw. Quantile zur Standardnormalverteilung können Sie entsprechenden Tabellen in der Literatur entnehmen (z.B. in der Formelsammlung *Statistik griffbereit*, 6. Auflage, S. 89).