Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 6. Mai 2022 Bearbeitung: 9. – 13. Mai 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

5. Präsenzübung

Aufgabe P 16

In einem Supermarkt soll mittels eines neu entwickelten Werbeplakats zum Kauf zweier Produkte P_1 und P_2 animiert werden.

Es bezeichnen A bzw. B die Ereignisse, dass ein (beliebig ausgewählter) Kunde Produkt P_1 bzw. P_2 kauft, und P die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung. Hierbei seien die folgenden Wahrscheinlichkeiten bekannt:

$$P(A) = \frac{1}{2}\ ,\ P(B) = \frac{1}{5}\ ,\ P(A \cap B) = \frac{1}{10}\ .$$

Berechnen Sie aus diesen Angaben die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(A \cup B)$,

(ii) $P\Big((A \cap B)^c\Big)$,

(iii) $P(A^c \cap B^c)$,

(iv) $P(A \cup B^c)$,

(v) $P\Big(A \cap (A^c \cup B)\Big)$,

(vi) $P\Big((A^c \cap B^c) \cup (A \cap B)\Big)$.

Beschreiben Sie zusätzlich die betrachteten Ereignisse jeweils verbal im Rahmen des gegebenen Zusammenhangs.

Hinweis: Man beachte, dass für einen Ergebnisraum Ω sowie zwei Ereignisse $E_1 \subseteq \Omega$ und $E_2 \subseteq \Omega$ gemäß der Regeln von *de Morgan* gilt:

$$(E_1 \cup E_2)^c \,=\, E_1^c \cap E_2^c \quad \text{und} \quad (E_1 \cap E_2)^c \,=\, E_1^c \cup E_2^c\ .$$

Aufgabe P 17

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{\sqrt{x+2}} & ,\quad 2 \leq x \leq 7\ , \\ 0 & ,\quad \text{sonst}\ , \end{cases}$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie c so, dass f eine Riemann-Dichte ist.

(b) Bestimmen Sie für das in (a) bestimmte c die zu f gehörige Verteilungsfunktion F.

(c) Berechnen Sie für das in (a) bestimmte c die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P\Big((-\infty, 5]\Big)$, (ii) $P\Big((3, 5]\Big)$, (iii) $P\Big((5, \infty)\Big)$.

(Hierbei bezeichnet P die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung.)

Aufgabe 18

Herr Planlos trifft zu einem zufälligen Zeitpunkt an einer Bushaltestelle ein, von der aus Busse in die gewünschte Richtung im Zehn-Minuten-Takt abfahren. Seine Wartezeit auf den nächsten Bus kann mit Hilfe der stetigen Gleichverteilung $R(0, 10)$ auf dem Intervall $[0, 10]$ modelliert werden.
Es bezeichne F die Verteilungsfunktion von $R(0, 10)$. Dann gibt $F(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass Herr Planlos höchstens x Minuten auf den nächsten Bus warten muss.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wartezeit von Herrn Planlos auf den nächsten Bus mehr als 7 Minuten beträgt.

Aufgabe P 19

Es seien $\Omega \neq \emptyset$ eine höchstens abzählbare Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{Pot}(\Omega)$ eine σ-Algebra über Ω mit $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$ für alle $\omega \in \Omega$. Zeigen Sie:

$$\mathfrak{A} \;=\; \mathfrak{Pot}(\Omega) \; .$$