Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf
RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 24. Juni 2022 —— Bearbeitung: 27. Juni – 1. Juli 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

11. Präsenzübung

Aufgabe P 40

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die jeweils auf dem Intervall $[0, b]$ (stetig) gleichverteilt seien mit unbekannter oberer Intervallgrenze $b > 0$. Wir betrachten folgende Funktion:

$$\widehat{b}_n = 2\,\overline{X}_n = \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,.$$

(a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}_b\Big(\widehat{b}_n\Big)$.

(b) Berechnen Sie die Varianz $\mathrm{Var}_b\Big(\widehat{b}_n\Big)$ von $\widehat{b}_n$ für $b > 0$.

In der schließenden Statistik nennt man $\widehat{b}_n$ einen erwartungstreuen Schätzer *für b.*

Aufgabe P 41

Auf dem letzten Aachener Weihnachtsmarkt wurden vom Gewerbeaufsichtsamt an zwei Glühweinständen Untersuchungen angestellt, um die erwartete Füllmenge μ der Becher zu bestimmen. Hierbei wurden am ersten Stand die Füllmengen $x_1, \dots, x_n$ und am zweiten Stand die Füllmengen $y_1, \dots, y_m$ gemessen.

Es werde angenommen, dass diese $n + m$ Messwerte als Realisationen von Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ bzw. $Y_1, \dots, Y_m$ aufgefasst werden können, die (gemeinsam) stochastisch unabhängig sind mit $\mu = \mathrm{E}(X_i) = \mathrm{E}(Y_j) \geq 0$, $\sigma_1^2 = \mathrm{Var}(X_i) > 0$ und $\sigma_2^2 = \mathrm{Var}(Y_j) > 0$ für $i = 1, \dots, n$ bzw. $j = 1, \dots, m$.

Zur Schätzung von μ soll eine Schätzfunktion der Form

$$\widehat{\mu} = a\,\overline{X}_n + b\,\overline{Y}_m + c = a\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i + b\,\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Y_j + c$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ verwendet werden.

(a) Bestimmen Sie a, b, c so, dass der Schätzer $\hat{\mu}$ erwartungstreu für μ ist, d.h., es soll gelten:

$$\mathrm{E}_\mu\Big(\widehat{\mu}\Big) = \mu \quad \text{für alle} \quad \mu \in [0, \infty).$$

(b) Bestimmen Sie a, b, c so, dass $\hat{\mu}$ unter allen erwartungstreuen Schätzern der oben angegebenen Form minimale Varianz besitzt. Welcher Schätzer ergibt sich speziell für $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$?

Aufgabe P 42

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ stochastisch unabhängige, jeweils beta$(\alpha, 1)$-verteilte Zufallsvariablen mit (unbekanntem) Parameter $\alpha > 0$. Die zugehörige Dichtefunktion f_α der Zufallsvariablen X_i für $i \in \{1, ..., n\}$ in Abhängigkeit vom Parameter α ist dann gemäß B 3.11 gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha-1} & \text{für} \quad x \in (0,1) \ , \\ 0 & \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \backslash (0,1) \ . \end{cases}$$

Bestimmen Sie zu gegebenen Realisationen $x_1, ..., x_n \in (0,1)$ von $X_1, ..., X_n$ eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\alpha}$ für den unbekannten Parameter α.

Welche Maximum-Likelihood-Schätzung erhält man für die folgenden Daten:

$$0.46 \ , \ 0.24 \ , \ 0.67 \ , \ 0.79 \ , \ 0.83 \ , \ 0.85 \ , \ 0.42 \ , \ 0.90 \ ?$$

Aufgabe P 43

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ seien stochastisch unabhängig und jeweils geometrisch verteilt mit (unbekanntem) Parameter $p \in (0,1)$.

Bestimmen Sie zu gegebenen Realisationen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ von $X_1, \ldots, X_n$ mit $\overline{x} > 0$ eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{p}$ für den Parameter p.