Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 3. Juni 2022 Bearbeitung: 13. – 17. Juni 2022

# Einführung in die angewandte Stochastik

**9. Präsenzübung**

## Aufgabe P 32

Es bezeichne jeweils $P$ die zugrundliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung.

(a) Gegeben seien Ereignisse $A$, $B$ und $C$ mit

$$P(A) = \frac{1}{2}\,,\; P(B) = P(C) = \frac{1}{3}\,,\; P(B \cap C) = 0\,,\; P(B \,|\, A) = \frac{1}{4}\,,\; P(C \,|\, A) = \frac{1}{2}\,.$$

Berechnen Sie anhand dieser Angaben die Wahrscheinlichkeit $P(A \,|\, B \cup C)$.

(b) Die Zufallsvariable $Z$ sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 0.5$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(Z > 2)$.

(c) Es seien $X$ und $Y$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{N}(3, 9)$ und $Y \sim \mathrm{N}(-2, 4)$. Geben Sie jeweils die Verteilung der Zufallsvariablen

(i) $X + Y$ und

(ii) $X - Y$

an.

## Aufgabe P 33

Gegeben seien zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen $X$ und $Y$ mit $X \sim \mathrm{Exp}(2)$ und $Y \sim \mathrm{R}(2, 4)$. (Somit ist $X$ exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 2$ und $Y$ (stetig) gleichverteilt auf dem Intervall $[2, 4]$.)

(a) Bestimmen Sie eine Dichtefunktion $f^{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ des (zweidimensionalen stetigen) Zufallsvektors $(X, Y)$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(XY)$.

## Aufgabe P 34

Seien $X$ und $Y$ stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{bin}(10, 0{,}2)$ und $Y \sim \text{po}(5)$. Berechnen Sie die folgenden Kenngrößen:

(a) $\mathrm{E}(3X + Y)$, (b) $\mathrm{Var}(X - 2Y)$, (c) $\mathrm{Kov}(-2X, 5Y)$.

## Aufgabe P 35

Die Riemann-Dichte $f^{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ des zweidimensionalen stetigen Zufallsvektors $(X, Y)$ sei gegeben durch:

$$f^{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 2 & , \quad \text{falls } x, y \geq 0 \text{ und } x + y \leq 1 \;, \\ 0 & , \quad \text{sonst} \;. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die zugehörigen Randdichten $f^X$ und $f^Y$ von $X$ bzw. $Y$.

(b) Berechnen Sie $\mathrm{E}(X)$ und $\mathrm{E}(Y)$.

(c) Berechnen Sie $\mathrm{Var}(X)$ und $\mathrm{Var}(Y)$.

(d) Berechnen Sie $\mathrm{Kov}(X, Y)$ und $\mathrm{Korr}(X, Y)$.

Sind die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig?

**Hinweis zu (d):** Zu dem gegebenen stetigen Zufallsvektor $(X, Y)$ wird der Erwartungswert des Produkts $XY$ gemäß Satz C 5.6 berechnet, wie folgt:

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x\, y\, f^{(X,Y)}(x,y)\, dx\, dy \;.$$