Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf
RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 30. Juni 2022 — Besprechung: 7. Juli 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

6. Globalübung

Aufgabe 28

Die Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$ seien stochastisch unabhängig und jeweils Pareto-verteilt mit (unbekanntem) Parameter $\alpha > 0$. Die zugehörige Dichtefunktion f_α und die zugehörige Verteilungsfunktion F_α der Zufallsvariablen X_i für $i \in \{1, \dots, n\}$ in Abhängigkeit vom Parameter α sind dann gemäß B 3.12 gegeben durch

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad F_\alpha(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{x^{\alpha}}, & x \geq 1, \\ 0, & x < 1. \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie zu gegebenen Realisationen $x_1, \dots, x_n \in (1, \infty)$ von $X_1, \dots, X_n$ eine Maximum-Likelihood-Schätzung $\widehat{\alpha}$ für den Parameter α.

(b) Berechnen Sie den aus (a) resultierenden Schätzwert zu folgenden Daten:

$$1{,}65\,,\; 2{,}97\,,\; 3{,}52\,,\; 3{,}07\,,\; 2{,}06\,,\; 2{,}41\,,\; 3{,}84\,,\; 5{,}48\,,\; 1{,}86\,,\; 4{,}90\,,\; 7{,}36\,,\; 1{,}58\,.$$

(c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X_1 den Wert $x = 2$ übersteigt, indem Sie den unbekannten Parameter α durch den in (b) berechneten Schätzwert ersetzen.

Aufgabe 29

Eine Fluggesellschaft möchte wissen, wie hoch der Anteil p der Passagiere ist, die ihren Flug nicht antreten. Hierzu soll ein Konfidenzintervall für p bestimmt werden.

Die Überprüfung von 1000 zufällig ausgewählten Passagieren ergibt, dass 74 von ihnen den Flug nicht angetreten haben. Bestimmen Sie anhand dieses Ergebnisses ein approximatives zweiseitiges Konfidenzintervall für p zum Konfidenzniveau 90%.

Aufgabe 30

Auf 12 Versuchsflächen wurde eine neue Weizensorte angebaut. Die einzelnen Flächen erbrachten die folgenden Hektarerträge (in t):

$$3{,}56\,,\; 3{,}37\,,\; 3{,}78\,,\; 3{,}12\,,\; 3{,}72\,,\; 3{,}41\,,\; 3{,}56\,,\; 3{,}66\,,\; 3{,}71\,,\; 3{,}49\,,\; 3{,}56\,,\; 3{,}40\,.$$

Aus Erfahrung ist bekannt, dass diese Hektarerträge als Realisationen stochastisch unabhängiger, jeweils $\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$-verteilter Zufallsvariablen mit $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ angesehen werden können.

(a) Ermitteln Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den (unbekannten) Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0,9 bei unbekannter Varianz σ^2.

(b) Ermitteln Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall für den (unbekannten) Erwartungswert μ zum Konfidenzniveau 0,9 bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 0{,}0324$.

(c) Wie groß müsste die Anzahl der Versuchsflächen mindestens sein, um bei bekannter Varianz $\sigma^2 = 0{,}0324$ ein zweiseitiges 90%–Konfidenzintervall für den (unbekannten) Erwartungswert μ angeben zu können, dessen Länge höchstens 0,1 (t) beträgt?

Aufgabe 31

Für Geschwindigkeitsmessungen im Straßenverkehr stehen ein mobiles Radarsystem S_1 und eine fest installierte (geeichte) Messanlage S_2 zur Verfügung. Durch Vergleich der Messergebnisse soll die Tauglichkeit der mobilen Anlage S_1 für den alltäglichen Einsatz überprüft werden.

Hierzu wurde mit beiden Systemen jeweils mehrfach die Geschwindigkeit eines Fahrzeugs gemessen, das mit konstanter Geschwindigkeit von 50 km/h den Messpunkt passierte. Es wurden 12 Messungen mit dem mobilen System S_1 und 8 Messungen mit dem System S_2 durchgeführt. Die zugehörigen gemessenen Geschwindigkeiten (in km/h) sind in der folgenden Tabelle angegeben:

Nr. der Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Messanlage S_1	52,3	53,9	51,0	49,3	49,9	47,6	49,2	50,9	48,1	50,3	53,9	48,4
Messanlage S_2	48,1	50,8	53,3	52,0	49,9	48,4	52,1	50,2	–	–	–	–

Nehmen Sie an, dass die mit System S_1 bzw. S_2 gemessenen Geschwindigkeiten $x_1, \dots, x_{12}$ und $y_1, \dots, y_8$ als Realisationen stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_{12}$, $Y_1, \dots, Y_8$ mit $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y_j \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ für $i \in \{1, \dots, 12\}$, $j \in \{1, \dots, 8\}$ aufgefasst werden können, wobei $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ jeweils unbekannt seien.

Geben Sie ein zweiseitiges Konfidenzintervall für die Differenz $d = \mu_1 - \mu_2$ der erwarteten Geschwindigkeitsmessungen μ_1 und μ_2 zum Konfidenzniveau 0,95 an.