Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf

RWTH Aachen, SoSe 2022

12. Mai 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

3. Globalübung - Lösungen

Aufgabe 14

In (a) und (b) sind gemäß B 1.4 die folgenden beiden Eigenschaften nachzuweisen:

(i) $p_k \geq 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}_0\,,$

(ii) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1\,.$

(a) (i) $p_k \overset{\text{Def.}}{=} p(1-p)^k > 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}_0\,,$ da $p \in (0,1)$

(ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \overset{\text{Def.}}{=} p \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{Geom.}}{=}} p\,\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

(b) (i) $p_k \overset{\text{Def.}}{=} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}}_{>0} \underbrace{e^{-\lambda}}_{>0} > 0 \;\forall\; k \in \mathbb{N}_0\,,$ da $\lambda > 0$

(ii) $$\sum_{k=0}^{\infty} p_k \overset{\text{Def.}}{=} e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \underset{\text{Reihe}}{\overset{\text{Exp-}}{=}} e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = 1$$

In (c),(d) sind gemäß B 3.4 die folgenden beiden Eigenschaften nachzuweisen:

(i) $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}\,,$

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1\,.$

(c) (i) Mit $\lambda > 0$ ist auch $\lambda\, e^{-\lambda x} > 0 \;\forall\; x > 0$
und damit insgesamt $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;&\overset{\text{Def.}}{=}\; \int_0^{\infty} \lambda\, e^{-\lambda x}\,dx \;=\; \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &=\; -\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^{-\lambda x}}_{=0} + 1 \;=\; 1\end{aligned}$$

(d) (i) Mit $\alpha > 0$ ist auch $\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} > 0 \;\forall\; x \geq 1$

und damit insgesamt $f(x) \geq 0 \;\forall\; x \in \mathbb{R}$

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;&\overset{\text{Def.}}{=}\; \int_1^{\infty} \alpha\, x^{-\alpha-1}\,dx \;=\; \left[-x^{-\alpha}\right]_{x=1}^{x=\infty} \\ &=\; -\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}}_{=0} + 1 \;=\; 1\end{aligned}$$

Aufgabe 15

Mit den Rechenregeln aus Lemma B 4.1 folgt:

(a)

$$\begin{aligned}P(A\cup B) \;&\overset{\text{B 4.1,(5)}}{=}\; P(A) + P(B) - P(A\cap B) \\ &\overset{\text{(i),(iii),(v)}}{=}\; \frac{3}{10} + \frac{7}{20} - \frac{1}{10} \;=\; \frac{11}{20}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}P(A^c\cup C) \;&\overset{\text{B 4.1,(5)}}{=}\; P(A^c) + P(C) - P(A^c\cap C) \\ &\overset{\text{B 4.1,(3)}}{=}\; 1 - P(A) + 1 - P(C^c) - P(A^c\cap C) \\ &\overset{\text{(ii),(iii),(iv)}}{=}\; 1 - \frac{3}{10} + 1 - \frac{7}{10} - \frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{4}\end{aligned}$$

(c) Zunächst gilt (Skizze!):

$$C \;=\; (C\cap A)\cup(C\cap A^c) \;=\; \underbrace{(A\cap C)\cup(A^c\cap C)}_{\text{Disjunkte Vereinigung}}$$

Hiermit folgt:

$$P(C) \overset{\text{B 4.1,(1)}}{=} P(A\cap C)+P(A^c\cap C) \quad\Longrightarrow$$

$$P(A\cap C) \;=\; P(C)-P(A^c\cap C) \overset{\text{B 4.1,(3)}}{=} 1-P(C^c)-P(A^c\cap C)$$

$$\overset{\text{(ii),(iv)}}{=} 1-\frac{7}{10}-\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{20}$$

(d) Analog zu (c) gilt:

$$A\cap C \;=\; \underbrace{(A\cap C\cap B)\cup(A\cap C\cap B^c)}_{\text{Disjunkte Vereinigung}}$$

Hiermit folgt:

$$P(A\cap B^c\cap C) \;=\; P(A\cap C\cap B^c) \overset{\text{B 4.1,(1)}}{=} P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$$

$$\overset{\text{(c),(vi)}}{=} \frac{1}{20}-\frac{1}{20} \;=\; 0$$

(e) Zunächst gilt:

$$\begin{aligned}P\big((A\cup B)\cap C\big) &\overset{\text{D-Ges.}}{=} P\big((A\cap C)\cup(B\cap C)\big)\\ &\overset{\text{B 4.1,(5)}}{=} P(A\cap C)+P(B\cap C)-P\big((A\cap C)\cap(B\cap C)\big)\\ &= P(A\cap C)+P(B\cap C)-P(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Es folgt:

$$P(B\cap C) \;=\; P\big((A\cup B)\cap C\big)-P(A\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

$$\overset{\text{(vii),(c),(vi)}}{=} \frac{3}{20}-\frac{1}{20}+\frac{1}{20} \;=\; \frac{3}{20}$$

(f)

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C) &= P\big((A\cup B)\cup C\big)\\ &\overset{\text{B 4.1,(5)}}{=} P(A\cup B)+P(C)-P\big((A\cup B)\cap C\big)\\ &\overset{\text{B 4.1,(3)}}{=} P(A\cup B)+1-P(C^c)-P\big((A\cup B)\cap C\big)\\ &\overset{\text{(a),(ii),(vii)}}{=} \frac{11}{20}+1-\frac{7}{10}-\frac{3}{20} \;=\; \frac{7}{10}\end{aligned}$$

Aufgabe 16

Jeweils nachzuweisende Eigenschaften gemäß B 3.1:

(i) $\Omega \in \mathfrak{A}$,

(ii) $A^c \in \mathfrak{A}$ für jedes $A \in \mathfrak{A}$,

(iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$.

(a) (i) $\Omega \in \mathfrak{A}$ gemäß Definition von $\mathfrak{A}$.

(ii) $\emptyset^c = \Omega \in \mathfrak{A}$ und $\Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{A}$ jeweils gemäß Definition von $\mathfrak{A}$.

(iii) Sei $A_n \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}$.

<u>Fall 1:</u> $A_n = \emptyset \ \forall \ n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$

<u>Fall 2:</u> $A_{n_0} = \Omega$ für mind. ein $n_0 \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$

(i) – (iii) $\overset{\text{B 3.1}}{\implies}$ $\mathfrak{A}$ σ-Algebra über Ω.

(b) (i) $\Omega \in \mathfrak{A}$ gemäß Definition von $\mathfrak{A}$.

(ii) $\mathfrak{A}$ enthält sämtliche Komplemente von Mengen aus $\mathfrak{A}$, denn:

$$\emptyset^c = \Omega \in \mathfrak{A}\ ,\ \Omega^c = \emptyset \in \mathfrak{A}\ ,\ A^c \in \mathfrak{A}\ ,\ (A^c)^c = A \in \mathfrak{A}$$

(iii) Sei $A_n \in \mathfrak{A}, n \in \mathbb{N}$.

<u>Fall 1:</u> $A_n = \emptyset \ \forall \ n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$

<u>Fall 2:</u> $A_{n_0} = \Omega$ für mind. ein $n_0 \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$

<u>Fall 3:</u> $A_n \neq \Omega \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $A_{n_0} \neq \emptyset$ für mind. ein $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\implies A_{n_0} \in \{A, A^c\}$$

Weitere Fall-Unterscheidung erforderlich

<u>Fall 3.1:</u> $A_n \in \{\emptyset, A_{n_0}\} \ \forall \ n \in \mathbb{N}\backslash\{n_0\}$

$$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A_{n_0} \in \{A, A^c\} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$$

<u>Fall 3.2:</u> $A_{n_1} \notin \{\emptyset, A_{n_0}\}$ für mind. ein $n_1 \in \mathbb{N}\backslash\{n_0\}$

$$\implies \Omega \supseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \supseteq A_{n_0} \cup A_{n_1} = A \cup A^c = \Omega$$

$$\implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\in} \mathfrak{A}$$

(i) – (iii) $\overset{\text{B 3.1}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{A}$ σ-Algebra über Ω .

(c) $\mathfrak{A} = \mathfrak{Pot}(\Omega)$ ist trivialerweise eine σ-Algebra über Ω , da $\Omega \in \mathfrak{Pot}(\Omega)$ gemäß Definition gilt und da Komplemente sowie (beliebige) Vereinigungen von Teilmengen von Ω jeweils selbst wieder Teilmengen von Ω und damit Element von $\mathfrak{Pot}(\Omega)$ sind.

(d) Abkürzung: h.a. bedeutet *höchstens abzählbar*

(i) $\Omega \in \mathfrak{A}$, da $\Omega^c = \emptyset$ h.a.

(ii) Sei $A \in \mathfrak{A}$.

<u>Fall 1:</u> A h.a. $\Longrightarrow$ $(A^c)^c = A$ h.a. $\overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\Longrightarrow}$ $A^c \in \mathfrak{A}$

<u>Fall 2:</u> A überabzählbar $\overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\Longrightarrow}$ A^c h.a. $\overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\Longrightarrow}$ $A^c \in \mathfrak{A}$

(iii) Sei $A_n \in \mathfrak{A}\,, n \in \mathbb{N}$.

<u>Fall 1:</u> A_n h.a. $\forall\ n \in \mathbb{N}$

$$\Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ h.a.} \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\Longrightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

<u>Fall 2:</u> A_{n_0} überabzählbar für mind. ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
Gemäß Definition von $\mathfrak{A}$ ist dann $A_{n_0}^c$ h.a.

$$\Longrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \overset{\text{de Morg.}}{=} \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$$

$$\Longrightarrow \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c \text{ h.a.} \overset{\text{Def. }\mathfrak{A}}{\Longrightarrow} \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

(i) – (iii) $\overset{\text{B 3.1}}{\Longrightarrow}$ $\mathfrak{A}$ σ-Algebra über Ω

Bemerkung

Falls Ω selbst höchstens abzählbar ist, gilt $\mathfrak{A} = \mathfrak{Pot}(\Omega)$, da in diesem Fall *jede* Menge $A \subseteq \Omega$ höchstens abzählbar ist.

Aufgabe 17

Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lcl} A_i & : & \text{Das Programm ist vom Programmierer } P_i \text{ für } i \in \{1{,}2{,}3\}\,, \\ K & : & \text{Das Programm hat keinen Programmierfehler,} \\ E & : & \text{Das Programm hat genau einen Programmierfehler,} \\ Z & : & \text{Das Programm hat mindestens zwei Programmierfehler.} \end{array}$$

Weiter bezeichne P die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung. Dann gilt gemäß Aufgabenstellung:

$$P(A_1) = \frac{230}{1380} = \frac{1}{6}\,,\; P(A_2) = \frac{690}{1380} = \frac{1}{2}\,,\; P(A_3) = \frac{460}{1380} = \frac{1}{3}\,,$$

$$P(E \,|\, A_1) = 0.4\,,\; P(Z \,|\, A_1) = 0.12\,,\; P(K \,|\, A_2) = 0.7\,,$$

$$P(E \,|\, A_2) = 0.15\,,\; P(K \,|\, A_3) = 0.75\,,\; P(Z \,|\, A_3) = 0.1\,.$$

(Hierbei ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten aus den betreffenden relativen Häufigkeiten.)

(a) Gemäß Vorlesung (vgl. Def. B 5.2) bilden bedingte Wahrscheinlichkeiten **in der ersten Komponente** wiederum eine Wahrscheinlichkeitsverteilung. Damit folgt zunächst mit B 4.1:

$$\begin{aligned} P(K \,|\, A_1) &= P((E \cup Z)^c \,|\, A_1) = 1 - P(E \cup Z \,|\, A_1) \qquad (1) \\ &\underset{\text{disj.}}{\overset{E,Z}{=}} 1 - \big(P(E \,|\, A_1) + P(Z \,|\, A_1)\big) \overset{\text{Vor.}}{=} 1 - (0.4 + 0.12) = 0.48 \end{aligned}$$

Dann erhält man mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(K) &= \sum_{i=1}^{3} P(K \,|\, A_i) \cdot P(A_i) \\ &\overset{(1),\text{Vor.}}{=} 0.48 \cdot \frac{1}{6} + 0.7 \cdot \frac{1}{2} + 0.75 \cdot \frac{1}{3} = 0.68 \end{aligned}$$

(b) Zunächst folgt analog zu (1) wiederum mit B 4.1:

$$\begin{aligned} P(E \,|\, A_3) &= P((K \cup Z)^c \,|\, A_3) = 1 - P(K \cup Z \,|\, A_3) \qquad (2) \\ &\underset{\text{disj.}}{\overset{K,Z}{=}} 1 - \big(P(K \,|\, A_3) + P(Z \,|\, A_3)\big) \overset{\text{Vor.}}{=} 1 - (0.75 + 0.1) = 0.15 \end{aligned}$$

Dann erhält man mit der Bayes-Formel und dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(A_2 \,|\, E) &= \frac{P(E \,|\, A_2) \cdot P(A_2)}{P(E)} = \frac{P(E \,|\, A_2) \cdot P(A_2)}{\sum_{i=1}^{3} P(E \,|\, A_i) \cdot P(A_i)} \\ &\overset{\text{Vor.},(2)}{=} \frac{0.15 \cdot \frac{1}{2}}{0.4 \cdot \frac{1}{6} + 0.15 \cdot \frac{1}{2} + 0.15 \cdot \frac{1}{3}} \approx 0.39 \end{aligned}$$

Aufgabe 18

Modellierung
(vgl. Aufgabe 11)

Geeignete Grundmenge (Ergebnismenge):

$$\Omega = \big\{(\omega_1,\omega_2)\,\big|\,\omega_1,\omega_2 \in \{1,\dots,6\}\big\} \ .$$

Zugehörige Interpretation: Für $i \in \{1,2\}$ gibt ω_i die Augenzahl des i-ten Wurfs an.

Homogener Würfel $\longrightarrow$ Beschreibung durch Laplace-Raum (Ω,P), d.h.:

$$P(E) \;=\; \frac{|E|}{|\Omega|} \;\overset{\text{B 1.11}}{=}\; \frac{|E|}{36}\ ,\ E \subseteq \Omega\ . \tag{1}$$

Bezeichnungen der betrachteten Ereignisse

A_k : „Der erste Wurf zeigt die Ziffer k" für $k \in \{1,\dots,6\}$,

B : „Die Summe der Ziffern beider Würfe ist durch Drei teilbar",

C : „Das Produkt der Ziffern beider Würfe ist durch Drei teilbar".

(a) Für $k \in \{1,\dots,6\}$ gilt:

$$\begin{aligned} A_k \;&=\; \big\{(k,\omega_2)\,\big|\,\omega_2 \in \{1,\dots,6\}\big\} \\ &=\; \big\{(k,1),(k,2),(k,3),(k,4),(k,5),(k,6)\big\} \end{aligned} \tag{2}$$

und damit

$$P(A_k) \;\overset{(1)}{=}\; \frac{|A_k|}{36} \;\overset{(2)}{=}\; \frac{6}{36} \;=\; \frac{1}{6} \tag{3}$$

Weiter gilt (gem. Def. von B):

$$\begin{aligned} B \;=\; \Big\{\; &\underbrace{(1,2),(2,1)}_{\text{Augensumme 3}},\underbrace{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}_{\text{Augensumme 6}}, \\ &\underbrace{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)}_{\text{Augensumme 9}},\ \underbrace{(6,6)}_{\text{Augensumme 12}}\ \Big\} \end{aligned} \tag{4}$$

und damit

$$P(B) \;\overset{(1)}{=}\; \frac{|B|}{36} \;\overset{(4)}{=}\; \frac{12}{36} \;=\; \frac{1}{3} \tag{5}$$

Schließlich gilt für $k \in \{1,\dots,6\}$:

$$A_k \cap B \;\overset{(2),(4)}{=}\; \begin{cases} \{(1,2),(1,5)\} & ,\ k = 1\ , \\ \{(2,1),(2,4)\} & ,\ k = 2\ , \\ \{(3,3),(3,6)\} & ,\ k = 3\ , \\ \{(4,2),(4,5)\} & ,\ k = 4\ , \\ \{(5,1),(5,4)\} & ,\ k = 5\ , \\ \{(6,3),(6,6)\} & ,\ k = 6\ , \end{cases} \tag{6}$$

Es folgt für $k \in \{1,\ldots,6\}$:

$$P(A_k \cap B) \overset{(1)}{=} \frac{|A_k \cap B|}{36} \overset{(6)}{=} \frac{2}{36} = \frac{1}{18} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \overset{(3),(5)}{=} P(A_k)\,P(B)\ ,$$

und damit sind A_k und B stochastisch unabhängig für alle $k \in \{1,\ldots,6\}$.

(b) Gem. Def. von C gilt:

$$\begin{aligned} C \;=\; \big\{&(1{,}3),(1{,}6),(2{,}3),(2{,}6),(3{,}1),(3{,}2),(3{,}3),(3{,}4),(3{,}5),(3{,}6),\\ &(4{,}3),(4{,}6),(5{,}3),(5{,}6),(6{,}1),(6{,}2),(6{,}3),(6{,}4),(6{,}5),(6{,}6)\big\} \end{aligned} \tag{7}$$

und damit

$$P(C) \overset{(1)}{=} \frac{|C|}{36} \overset{(7)}{=} \frac{20}{36} = \frac{5}{9} \tag{8}$$

Weiter gilt für $k \in \{1,\ldots,6\}$:

$$A_k \cap C \overset{(2),(7)}{=} \begin{cases} \{(1{,}3),(1{,}6)\} & ,\ k = 1\ ,\\ \{(2{,}3),(2{,}6)\} & ,\ k = 2\ ,\\ \{(3{,}1),\ldots,(3{,}6)\} & ,\ k = 3\ ,\\ \{(4{,}3),(4{,}6)\} & ,\ k = 4\ ,\\ \{(5{,}3),(5{,}6)\} & ,\ k = 5\ ,\\ \{(6{,}1),\ldots,(6{,}6)\} & ,\ k = 6\ , \end{cases} \tag{9}$$

Es folgt für $k \in \{1,2,4,5\}$

$$P(A_k \cap C) \overset{(1)}{=} \frac{|A_k \cap C|}{36} \overset{(9)}{=} \frac{2}{36} = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} \overset{(3),(8)}{=} P(A_k)\,P(C)$$

und für $k \in \{3,6\}$

$$P(A_k \cap C) \overset{(1)}{=} \frac{|A_k \cap C|}{36} \overset{(9)}{=} \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{9} \overset{(3),(8)}{=} P(A_k)\,P(C)\ .$$

Damit sind A_k und C stochastisch *abhängig* für alle $k \in \{1,\ldots,6\}$.