Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf
RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 20. Mai 2022 — Bearbeitung: 23. – 27. Mai 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

7. Präsenzübung

Aufgabe P 24

Es sei X eine mit Parametern $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$ binomialverteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ (kurz: $X \sim \text{bin}(n,p)$). Gemäß B 2.4 ist damit die Zähldichte p^X der (diskreten) Zufallsvariablen X gegeben durch:

$$p^X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \text{ für } k \in \{0,\dots,n\} .$$

(a) Bestimmen und skizzieren Sie die Verteilungsfunktion F^X der Zufallsvariablen X für $n = 8$ und $p = 0.5$.

(b) Berechnen Sie für $n = 8$ und $p = 0.5$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(X \leq 3)$, (ii) $P(X > 5)$, (iii) $P(2 < X \leq 4)$, (iv) $P(2 \leq X \leq 4)$.

Aufgabe P 25

Die auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gegebene Zufallsvariable X sei gleichverteilt auf dem Intervall $[-7,5]$ (kurz: $X \sim R(-7,5)$, vgl. B 3.7). Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(X \leq 3)$,

(ii) $P(X > 2)$,

(iii) $P(-8 < X \leq 3.8)$,

(iv) $P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2)$.

Hinweis zu (iv): Beachten Sie, dass $P(X \leq 1 \,|\, X \leq 2)$ eine Kurzschreibweise ist für

$$P\Big(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq 1\} \,\Big|\, \{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \leq 2\}\Big) .$$

Aufgabe P 26

Es seien X und Y zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, die jeweils gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 2]$ sind (kurz: $X \sim R(0, 2)$ und $Y \sim R(0, 2)$).

Zeigen Sie, dass durch

$$f^Z(z) \;=\; \begin{cases} 0 & , \quad z < 0\,, \\ \frac{1}{4}\,z & , \quad 0 \le z < 2\,, \\ \frac{1}{4}\,(4 - z) & , \quad 2 \le z \le 4\,, \\ 0 & , \quad z > 4\,, \end{cases}$$

eine Riemann-Dichte der (stetigen) Zufallsvariablen $Z = X + Y$ gegeben ist.

Aufgabe P 27

(a) Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathfrak{A}$. Zeigen Sie:

(i) $\limsup\limits_{n \to \infty} A_n = \Big\{ \omega \in \Omega \;\Big|\; |\{ n \in \mathbb{N} \,:\, \omega \in A_n \}| = \infty \Big\}$.

(ii) $\liminf\limits_{n \to \infty} A_n = \Big\{ \omega \in \Omega \;\Big|\; |\{ n \in \mathbb{N} \,:\, \omega \notin A_n \}| < \infty \Big\}$.

(b) Ein Roulette-Spiel besteht aus einem grünen Feld, 18 roten Feldern und 18 schwarzen Feldern. Bei einem Spielzug landet eine Kugel in einem der Felder. Das Roulette-Spiel wird unendlich oft gespielt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

(i) $K_\infty \,\widehat{=}$ es fällt unendlich oft Rot,

(ii) $K_\star \,\widehat{=}$ es fällt nur endlich oft Rot.

Hinweis: Ohne Nachweis kann verwendet werden, dass die Ereignisse $B_n \,\widehat{=}$ im n-ten Spiel fällt Rot, $n \in \mathbb{N}$, stochastisch unabhängig sind.