Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 25. Mai 2022 Präsentation der Lösungen: 2. Juni 2022

Einführung in die angewandte Stochastik

4. Globalübung

Aufgabe 19

Es seien X, Y stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die beide eine geometrische Verteilung mit Parameter $\theta \in (0,1)$ besitzen. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

(i) $P(X = Y)$, (ii) $P(X < Y)$, (iii) $P(X > 2Y)$.

Aufgabe 20

Seien X und Y diskrete Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P(X = k) = \frac{1}{4}, P(Y = k+1) = \frac{1}{4}$ für $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$ unter der Annahme, dass X und Y stochastisch unabhängig sind.
Hinweis: Faltungssatz C 1.13.

(b) Wie sieht die Verteilung von $X + Y$ aus, falls X und Y *nicht* stochastisch unabhängig sind, sondern die gemeinsame Verteilung

$$P(X = k, Y = k+1) = \frac{1}{4}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\},$$

besitzen?

Aufgabe 21

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, wobei X die Werte -1, 0 und 1 und Y die Werte 1, 2 und 3 annehme. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $P(X = i, Y = j)$ für $i \in \{-1, 0, 1\}$, $j \in \{1, 2, 3\}$ sind in der folgenden Tabelle angegeben:

$P(X = i\,, Y = j)$		j		
		1	2	3
i	-1	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{5}$	0
	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$
	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{20}$

(a) Bestimmen Sie die zugehörigen Rand-Zähldichten p^X von X und p^Y von Y für die in der gegebenen Situation gilt:

$$p^X(i) = P(X = i) = \sum_{j \in \{1,2,3\}} P(X = i, Y = j), \quad i \in \{-1, 0, 1\},$$
$$p^Y(j) = P(Y = j) = \sum_{i \in \{-1,0,1\}} P(X = i, Y = j), \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Entscheiden Sie, ob die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig sind.

(b) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(X = 0 \mid Y \geq 2)$.

(c) Bestimmen Sie die bedingte (Zähl–)Dichte von Y bei gegebenem $X = 1$.

Aufgabe 22

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei für festes $c \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) \; = \; \begin{cases} c\,x\,(1 - y^3), & \text{falls } x \in [0, 2],\ y \in [0, 1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist f eine Riemann-Dichte über $\mathbb{R}^2$?

(b) Sei nun $c = \frac{2}{3}$ und seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit gemeinsamer Riemann-Dichtefunktion $f^{(X,Y)} := f$.

(i) Bestimmen Sie die Randdichten f^X von X und f^Y von Y.

(ii) Sind X und Y stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

(iii) Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X und Y.

(iv) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathrm{E}(X)$.