Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

Ausgabe: 21. April 2022 Präsentation der Lösungen: 28. April 2022

# Einführung in die angewandte Stochastik

**2. Globalübung**

## Aufgabe 8

Gegeben sei ein gepaarter Datensatz $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ eines bivariaten quantitativen Merkmals $(X, Y)$ mit empirischen Standardabweichungen $s_x > 0$ zu $x_1, \ldots, x_n$ und $s_y > 0$ zu $y_1, \ldots, y_n$.

Zeigen Sie, dass für den zugehörigen Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizienten $r_{xy}$ gilt:

(i) Aus $r_{xy} = -1$ folgt, dass es Zahlen $b < 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$y_i = a + b\,x_i \ , \ i \in \{1, \ldots, n\} .$$

(ii) Aus $r_{xy} = 1$ folgt, dass es Zahlen $b > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$y_i = a + b\,x_i \ , \ i \in \{1, \ldots, n\} .$$

**Hinweis:** Sie können hierbei (ohne eigenen Nachweis) die *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* in der folgenden Version nutzen:
Für Zahlen $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left( \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) .$$

In dieser Ungleichung liegt Gleichheit genau dann vor, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit

$$a_i = c \cdot b_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \quad \text{oder} \quad b_i = c \cdot a_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\} .$$

## Aufgabe 9

Für eine Produktionsanlage soll ein lineares Kostenmodell aufgrund der Daten aus vergangenen Perioden angepasst werden. Diese Daten bestehen aus produzierten Mengen $x_1, \ldots, x_6$ (in 1 000 Stück) und hierfür entstandenen Kosten $y_1, \ldots, y_6$ (in 1 000 €) in sechs Perioden.

| Periode $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Menge $x_i$ (in 1 000 Stück) | 7 | 9 | 6 | 11 | 8 | 7 |
| Kosten $y_i$ (in 1 000 €) | 16.5 | 22.0 | 15.0 | 24.5 | 19.0 | 17.0 |

Bestimmen Sie die (aus den Daten geschätzte) Regressionsgerade $\hat{f}(x) = \hat{a} + \hat{b}\,x$, $x \in \mathbb{R}$, und stellen Sie diese Regressionsgerade mit den gegebenen Datenpaaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_6, y_6)$ in einem (geeignet gewählten) Koordinatensystem dar.

Berechnen Sie weiter das zugehörige Bestimmtheitsmaß, und treffen Sie eine Aussage über Richtung und Stärke der empirischen Korrelation zwischen den beiden betrachteten Merkmalen.

## Aufgabe 10

In einer medizinischen Untersuchung wird der gesundheitliche Zustand von Rauchern und Nichtrauchern verglichen. Dabei werden die an der Untersuchung teilnehmenden Personen in Männer und Frauen sowie in Raucher und Nichtraucher eingeteilt. Die Menge der Männer wird mit $A$ bezeichnet, die Menge der Raucher mit $B$.

Welche Personen werden durch die folgenden Mengen beschrieben?

(i) $B^c$ ,

(ii) $A \cap B$ ,

(iii) $B \setminus A$ ,

(iv) $(A \cup B)^c$ ,

(v) $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$ .

## Aufgabe 11

Es werden gleichzeitig ein roter und ein schwarzer Würfel geworfen (beides unverfälschte, jeweils sechsseitige Würfel mit den Augenzahlen $1, \ldots, 6$).

(a) Geben Sie zu diesem Zufallsexperiment eine geeignete Grundmenge $\Omega$ an, und beschreiben Sie die folgenden Ereignisse als Teilmengen von $\Omega$ :

  (i) Die Augensumme beträgt 8,

  (ii) Die Augensumme ist kleiner als 5,

  (iii) Beide Augenzahlen betragen jeweils höchstens 3,

  (iv) Die Augenzahl des roten Würfels ist geringer als die des schwarzen Würfels.

(b) Berechnen Sie für die Ereignisse aus (a) die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

## Hinweis zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Im weiteren Verlauf können Sie (ohne eigenen Nachweis) verwenden, dass für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, P)$ die folgende Rechenregel erfüllt ist (vgl. B 4.1):

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{für jedes Ereignis} \quad A \subseteq \Omega \, .$$

## Aufgabe 12

Eine homogene Münze (d.h. die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von Kopf und Zahl sind identisch) werde sieben Mal hintereinander geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment an.

(b) Wie viele mögliche Versuchsausgänge gibt es?

(c) Beschreiben Sie die nachstehenden Ereignisse als Teilmengen von $\Omega$, und berechnen Sie ihre Wahrscheinlichkeiten:

  (i) Genau sechs der sieben Münzwürfe ergeben Zahl.

  (ii) Mindestens sechs der sieben Münzwürfe ergeben Zahl.

  (iii) In zwei aufeinander folgenden Würfen fällt Kopf, oder in zwei aufeinander folgenden Würfen fällt Zahl.

## Aufgabe 13

Eine Gruppe von $k$ Personen sei hinsichtlich ihrer Geburtstage in einem Jahr (kein Schaltjahr, d.h. 365 Tage) zufällig zusammengesetzt.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei der $k$ Personen am selben Tag des Jahres Geburtstag haben (allgemein für $k \in \mathbb{N}$).

(b) Geben Sie für $k \in \{10, 22, 23, 40\}$ die zugehörigen Zahlenwerte der in (a) bestimmten Wahrscheinlichkeit an.

**Hinweis zu (a):** Betrachten Sie das zugehörige Komplementärereignis.