Prof. Dr. U. Kamps
C. Empacher, D. Rauwolf RWTH Aachen, SoSe 2022

2. Juni 2022

# Einführung in die angewandte Stochastik

**4. Globalübung - Lösungen**

## Aufgabe 19

Nach Voraussetzung sind die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ identisch geometrisch verteilt mit Parameter $\vartheta \in (0,1)$, sodass nach B 2.6 $\forall k \in \mathbb{N}_0$ gilt: $P(X = k) = P(Y = k) = (1-\vartheta)^k \vartheta$.

(i)

$$\begin{aligned}
P(X = Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k, Y = k) \overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) P(Y = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (1-\vartheta)^{2k} \vartheta^2 = \frac{\vartheta^2}{1-(1-\vartheta)^2} \\
&= \frac{\vartheta^2}{2\vartheta - \vartheta^2} = \frac{\vartheta}{2-\vartheta}.
\end{aligned}$$

(ii) Aus Symmetriegründen gilt $P(X < Y) = P(X > Y)$. Da gelten muss, dass

$$P(X < Y) + P(X = Y) + P(X > Y) = 1,$$

folgt

$$P(X < Y) = \frac{1}{2}(1 - P(X = Y)) \overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\vartheta}{2-\vartheta}\right).$$

(iii) Wir erhalten

$$\begin{aligned}
P(X > 2Y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=2j+1}^{\infty} P(X = i, Y = j) \overset{\text{unabh.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=2j+1}^{\infty} (1-\vartheta)^{i+j} \vartheta^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (1-\vartheta)^{3j+1} \vartheta^2 \left( \sum_{i=0}^{\infty} (1-\vartheta)^i \right) = \vartheta(1-\vartheta) \sum_{j=0}^{\infty} ((1-\vartheta)^3)^j \\
&= \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{1-(1-\vartheta)^3} = \frac{1-\vartheta}{3 - 3\vartheta + \vartheta^2}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 20

Es gilt allgemein für diskrete Zufallsvariablen $X$ und $Y$ mit Werten in $\mathbb{Z}$ (vgl. Beweis zu Satz C 1.13):

$$P(X+Y=k) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(X=j, Y=k-j)\,, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Seien $X$ und $Y$ Zufallsvariablen mit $P(X=k)=P(Y=k+1)=\frac{1}{4}$ für $k\in\{0,1,2,3\}$. Somit ist $\mathcal{X}=\{0{,}1{,}2{,}3\}$ der Träger der Zufallsvariable $X$ und $\mathcal{Y}=\{1{,}2{,}3{,}4\}$ der von $Y$.

(a) Aufgrund der Unabhängigkeit gilt in diesem Fall (vgl. Satz C 1.13)

$$P(X+Y=k) \;=\; \sum_{j\in\mathbb{Z}} P(X=j)P(Y=k-j)\,, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Es folgt:

$$P(X+Y=1)=P(X=0)P(Y=1)=\frac{1}{16}$$

$$\begin{aligned}
P(X+Y=2) &= P(X=0)P(Y=2)+P(X=1)P(Y=1)=\frac{1}{8},\\
P(X+Y=3) &= P(X=0)P(Y=3)+P(X=1)P(Y=2)\\
&\qquad\qquad\qquad + P(X=2)P(Y=1)=\frac{3}{16},\\
P(X+Y=4) &= P(X=0)P(Y=4)+P(X=1)P(Y=3)\\
&\qquad\qquad\qquad + P(X=2)P(Y=2)+P(X=3)P(Y=1)=\frac{1}{4},\\
P(X+Y=5) &= P(X=1)P(Y=4)+P(X=2)P(Y=3)\\
&\qquad\qquad\qquad + P(X=3)P(Y=2)=\frac{3}{16},\\
P(X+Y=6) &= P(X=2)P(Y=4)+P(X=3)P(Y=3)=\frac{1}{8},\\
P(X+Y=7) &= P(X=3)P(Y=4)=\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Der Träger der Zufallsvariable $Z=X+Y$ ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \{x+y|x\in\mathcal{X}, y\in\mathcal{Y}\}=\{x+y|x\in\{0{,}1{,}2{,}3\}, y\in\{1{,}2{,}3{,}4\}\}\\
&= \{1,\ldots,7\}.
\end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt daher:

$$p^Z(z)=P(Z=z)=\begin{cases} 1/16\,, & z\in\{1{,}7\}\\ 2/16\,, & z\in\{2{,}6\}\\ 3/16\,, & z\in\{3{,}5\}\\ 4/16\,, & z=4.\end{cases}$$

(b) Gilt für die gemeinsame Verteilung

$$P(X=k, Y=k+1) = \frac{1}{4}, \quad k \in \{0,1,2,3\},$$

so folgt

$$\begin{aligned} P(X+Y=1) &= P(X=0, Y=1) = \frac{1}{4}, \\ P(X+Y=3) &= P(X=1, Y=2) = \frac{1}{4}, \\ P(X+Y=5) &= P(X=2, Y=3) = \frac{1}{4}, \\ P(X+Y=7) &= P(X=3, Y=4) = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Mit $X = k$ und $Y = k+1$ kann die Summe $X+Y$ für $k \in \{0,1,2,3\}$ nur Werte in der Menge $\{1,3,5,7\}$ mit positiver Wahrscheinlichkeit annehmen. Der Träger der Zufallsvariable $X+Y$ ist also gegeben durch $\mathcal{M} := \{1,3,5,7\}$. Zusammenfassend gilt für $j \in \mathcal{M}$:

$$P(X+Y=j) = \frac{1}{4}.$$

## Aufgabe 21

(a) Gemäß Aufgabenstellung ergeben sich folgende Werte für die Rand-Zähldichten $p^X$ von $X$ bzw. $p^Y$ von $Y$:

$$\begin{aligned} p^X(-1) &= P(X=-1) = \sum_{j=1}^{3} P(X=-1, Y=j) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{4}, \\ p^X(0) &= P(X=0) = \sum_{j=1}^{3} P(X=0, Y=j) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}, \\ p^X(1) &= P(X=1) = \sum_{j=1}^{3} P(X=1, Y=j) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{1}{4}, \\ p^Y(1) &= P(Y=1) = \sum_{i=-1}^{1} P(X=i, Y=1) = \frac{1}{20} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{7}{20}, \\ p^Y(2) &= P(Y=2) = \sum_{i=-1}^{1} P(X=i, Y=2) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2}, \\ p^Y(3) &= P(Y=3) = \sum_{i=-1}^{1} P(X=i, Y=3) = 0 + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir die folgende um die Rand-Zähldichten ergänzte Tabelle zur Verteilung des diskreten zweidimensionalen Zufallsvektors $(X,Y)$:

| $P(X=i, Y=j)$ | | $j$ = 1 | 2 | 3 | $P(X=i)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| i | -1 | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{5}$ | 0 | $\frac{1}{4}$ |
| | 0 | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | 1 | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ | $\frac{1}{4}$ |
| $P(Y=j)$ | | $\frac{7}{20}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{20}$ | 1 |

In der vorliegenden Situation sind $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig, falls **für alle** $i \in \{-1{,}0{,}1\}$, $j \in \{1{,}2{,}3\}$ gilt, dass

$$P(X=i, Y=j) = P(X=i)P(Y=j).$$

Hier gilt jedoch bspw.

$$P(X=-1, Y=3) \overset{\text{Vor.}}{=} 0 \neq \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{20} \overset{\text{s.o.}}{=} P(X=-1) \cdot P(Y=3).$$

Somit sind $X$ und $Y$ **nicht** stochastisch unabhängig.

(b) Gemäß der Definition bedingter Wahrscheinlichkeiten in B 5.2 und laut Aufgabenstellung folgt

$$\begin{aligned} P(X=0 \mid Y \geq 2) &= \frac{P(X=0, Y \geq 2)}{P(Y \geq 2)} \\ &= \frac{P(X=0, Y=2) + P(X=0, Y=3)}{P(Y=2) + P(Y=3)} \\ &= \frac{\frac{1}{5} + \frac{1}{10}}{\frac{1}{2} + \frac{3}{20}} = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{13}{20}} = \frac{6}{13}. \end{aligned}$$

Dabei ging im zweiten Schritt ein, dass sich laut Aufgabenstellung das Ereignis $\{Y \geq 2\}$ disjunkt in die Ereignisse $\{Y=2\}$ und $\{Y=3\}$ und das Ereignis $\{X=0\} \cap \{Y \geq 2\}$ disjunkt in die Ereignisse $\{X=0\} \cap \{Y=2\}$ und $\{X=0\} \cap \{Y=3\}$ zerlegen lässt.

(c) Es gilt aufgrund der Aufgabenstellung und (a):

$$P(Y=j \mid X=1) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & j \in \{1{,}2\} \\ \frac{1}{5}, & j = 3. \end{cases}$$

## Aufgabe 22

(a) Zunächst muss nach C 3.7 gelten, dass $f(x) \geq 0$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Für $x \in [0,2], y \in$ [0,1] folgt aus

$$f(x,y) = c \quad \cdot \underbrace{x}_{\geq 0, \text{ da } x \in [0,2]} \cdot \underbrace{(1-y^3)}_{\geq 0, \text{ da } y \leq 1},$$

dass $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gelten muss. Weiterhin muss

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$$

erfüllt sein. Somit folgt

$$\begin{aligned}
1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^2 cx(1-y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 c(1-y^3) \int_0^2 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 c(1-y^3)\Big[\frac{1}{2}x^2\Big]_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2c(1-y^3)\,\mathrm{d}y = 2c\Big[y - \frac{1}{4}y^4\Big]_{y=0}^{y=1} = 2c\Big(1-\frac{1}{4}\Big) = \frac{3c}{2}.
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $c = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und die Lösung ist eindeutig.

(b) Sei nun $c = \frac{2}{3}$ und $(X,Y) \sim f$.

(i) Eine Randdichte $f^X$ von $X$ ist gemäß Bez. C 3.12 gegeben durch:

$$f^X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}y, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für $x \in \mathbb{R}\backslash[0,2]$:

$$f^X(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^{(X,Y)}(x,y)}_{=0}\,\mathrm{d}y \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Für $x \in [0,2]$ erhält man:

$$\begin{aligned}
f^X(x) \;&=\; \int_0^1 \frac{2}{3}\,x\,\big(1-y^3\big)\,\mathrm{d}y \;=\; \frac{2}{3}\,x \int_0^1 \big(1-y^3\big)\,\mathrm{d}y \\
&=\; \frac{2}{3}\,x\left[y - \frac{1}{4}y^4\right]_{y=0}^{y=1} \;=\; \frac{2}{3}\,x \cdot \frac{3}{4} \;=\; \frac{x}{2}.
\end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$f^X(x) \;=\; \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \in [0,2], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Randdichte $f^Y$ von $Y$ ist gemäß Bez. C 3.12 gegeben durch:

$$f^Y(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} f^{(X,Y)}(x,y)\,\mathrm{d}x, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Es folgt für $y \in \mathbb{R}\backslash[0,1]$:

$$f^Y(y) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f^{(X,Y)}(x,y)}_{=\,0}\,\mathrm{d}x \overset{\text{Vor.}}{=} 0.$$

Für $y \in [0,1]$ erhält man:

$$\begin{aligned} f^Y(y) \;&=\; \int_0^2 \frac{2}{3}\,x\left(1-y^3\right)\mathrm{d}x \;=\; \left(1-y^3\right)\int_0^2 \frac{2}{3}\,x\,\mathrm{d}x \\ &=\; \left(1-y^3\right)\left[\frac{x^2}{3}\right]_{x=0}^{x=2} \;=\; \frac{4}{3}\left(1-y^3\right). \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt:

$$f^Y(y) = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\left(1-y^3\right), & y \in [0,1], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii) Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ sind stochastisch unabhängig, da

$$f^{(X,Y)}(x,y) \;=\; \frac{2}{3}\,x\left(1-y^3\right) \;=\; \frac{1}{2}\,x\cdot\frac{4}{3}\left(1-y^3\right) \;=\; f^X(x)\cdot f^Y(y)\,,$$

für $x \in [0,2]$ und $y \in [0,1]$ bzw. $f^{(X,Y)}(x,y) = 0 = f^X(x)\cdot f^Y(y)$ sonst.
D.h. $f^{(X,Y)}(x,y) = f^X(x)\cdot f^Y(y)$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

(iii) Gemäß C 3.8 ist die zu $f$ gehörige Verteilungsfunktion $F^{(X,Y)}$ gegeben durch

$$F^{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

<u>Fall 1</u>: Für $x<0$ oder $y<0$ gilt

$$F^{(X,Y)}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t_1,t_2)\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t_1\,\mathrm{d}t_2 = 0.$$

<u>Fall 2:</u> Für $x \in [0,2]$ und $y \in [0,1]$ gilt zunächst, da $X$ und $Y$ stochastisch unabhängig sind, $F^{(X,Y)}(x,y) = F^X(x)\cdot F^Y(y)$, also

$$\begin{aligned} F^{(X,Y)}(x,y) &= F^X(x)\cdot F^Y(y) = \int_{-\infty}^{x} f^X(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{y} f^Y(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^y \frac{4}{3}(1-t^3)\,\mathrm{d}t \;=\; \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=0}^{t=x}\cdot\left[\frac{4}{3}\left(t-\frac{t^4}{4}\right)\right]_{t=0}^{t=y} \\ &= \frac{x^2}{4}\cdot\frac{4}{3}\left(y-\frac{y^4}{4}\right) \;=\; \frac{1}{3}x^2\left(y-\frac{y^4}{4}\right). \end{aligned}$$

<u>Fall 3:</u> Für $x>2$ und $y \in [0,1]$ gilt

$$\begin{aligned} F^{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} f^X(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{y} f^Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t\cdot\int_0^y \frac{4}{3}(1-t^3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=0}^{t=2}\cdot\left[\frac{4}{3}\left(t-\frac{t^4}{4}\right)\right]_{t=0}^{t=y} = \frac{4}{3}\Big(y-\frac{y^4}{4}\Big). \end{aligned}$$

Fall 4: Für $x \in [0,2]$ und $y > 1$ gilt

$$\begin{aligned} F^{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} f^X(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{y} f^Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t^3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=0}^{t=x} \cdot \left[\frac{4}{3}\left(t - \frac{t^4}{4}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{4}x^2. \end{aligned}$$

Fall 5: Für $x > 2$ und $y > 1$ gilt

$$\begin{aligned} F^{(X,Y)}(x,y) &= \int_{-\infty}^{x} f^X(t)\,\mathrm{d}t \int_{-\infty}^{y} f^Y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 \frac{t}{2}\,\mathrm{d}t \cdot \int_0^1 \frac{4}{3}(1-t^3)\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{t^2}{4}\right]_{t=0}^{t=2} \cdot \left[\frac{4}{3}\left(t - \frac{t^4}{4}\right)\right]_{t=0}^{t=1} = 1 \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man aus den Fällen 1-5 folgende Darstellung für die Verteilungsfunktion $F^{(X,Y)}$:

$$F^{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } y < 0, \\ \frac{1}{3}x^2\left(y - \frac{y^4}{4}\right), & (x,y) \in [0,2] \times [0,1], \\ \frac{4}{3}\left(y - \frac{y^4}{4}\right), & x > 2 \text{ und } y \in [0,1], \\ \frac{1}{4}x^2, & x \in [0,2] \text{ und } y > 1, \\ 1, & x > 2 \text{ und } y > 1. \end{cases}$$

(iv) Es gilt:

$$\mathrm{E}(X) \overset{\text{C 5.1}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x\, f^X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{2}\,x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$