

Investigación Operativa

Coloreo Particionado de Grafos

8 de diciembre de 2015

Integrante	LU	Correo electrónico
Martin Baigorria	575/14	martinbaigorria@gmail.com
Andrés Armesto Brosio	512/14	andresarmesto@gmail.com

Resumen: El presente trabajo practico tiene como objetivo resolver el problema del coloreo particionado de grafos utilizando programación lineal. Para ello, en un primer momento modelamos el problema y lo implementamos utilizando CPLEX. Se experimenta con diferentes configuraciones de los métodos Branch & Bound y Branch & Cut, evaluando diferentes heurísticas, configuraciones y variando los tipos de grafos a resolver.

Keywords: Linear Programming, Partitioned Graph Coloring, Branch & Bound, Cut & Branch, CPLEX.

Índice

1. Modelo	3
1.1. Función objetivo	3
1.2. Restricciones	3
1.3. Eliminación de simetrías	3
2. Branch & Bound	4
3. Desigualdades	4
3.1. Desigualdad de Clique	4
3.2. Desigualdad de Agujero Impar	5
3.3. Planos de Corte	5
3.4. Heurísticas	5
3.4.1. Heurística de Separación para Clique Maximal	6
3.4.2. Heurística de Separación para Agujero Impar	7
3.5. Cut & Branch	7
4. Experimentación	8
4.1. Eliminación de simetría	8
4.2. Efectividad de las familias de desigualdades	9
4.3. Efecto de aumentar el numero de particiones	9
4.4. Efecto de aumentar la densidad del grafo	10
4.5. Efecto de aumentar la cantidad de restricciones incorporadas por iteración	11
4.6. Efecto de aumentar la cantidad de iteraciones de planos de corte	11
4.7. Comparación B&B, C&B, CPLEX default	12
4.8. Estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de branching	13
5. Conclusión	14
6. Apéndice A: Código	15
6.1. coloring.cpp	15

1. Modelo

Dado un grafo $G(V, E)$ con $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas, un coloreo de G se define como una asignación de un color o etiqueta a cada $v \in V$ de forma tal que para todo par de vértices adyacentes $(p, q) \in E$ poseen colores distintos. El clásico problema de *coloreo de grafos* consiste en encontrar un coloreo del grafo que utilice la menor cantidad de colores posibles.

En este trabajo resolveremos una variante de este problema, el *coloreo particionado de grafos*. A partir de un conjunto de vértices V que se encuentra particionado en V_1, \dots, V_k , el problema consiste en asignar un color $c \in C$ a solo un vértice de cada partición de forma tal que dos vértices adyacentes no reciban el mismo color y minimizando la cantidad de colores utilizados.

Este problema se puede modelar con Programación Lineal Entera. Para ello, definamos las siguientes variables:

$$x_{pj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado al vertice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{pj} = 1 \text{ para algun vertice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1.1. Función objetivo

De esta forma la función objetivo del LP consiste en minimizar la cantidad de colores utilizados:

$$\min \sum_{j \in C} w_j \quad (1)$$

Notar que $|C|$ esta acotado superiormente por la cantidad de particiones k .

1.2. Restricciones

Los vértices adyacentes no comparten color. Recordar que no necesariamente se le asigna un color a todo vértice.

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall (i, k) \in E, \quad \forall j \in C \quad (2)$$

Solo se le asigna un color a un único vértice de cada partición $p \in P$. Esto implica que cada vértice tiene a lo sumo solo un color.

$$\sum_{i \in V_p} \sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall p \in P \quad (3)$$

Si un nodo usa color j , $w_j = 1$:

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall i \in V, \forall j \in C \quad (4)$$

Integralidad y positividad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in C \quad (5)$$

$$w_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in C \quad (6)$$

1.3. Eliminación de simetrías

Una de nuestras ideas para eliminar las simetrías fue usar la clásica condición de coloreo que dice que los colores se deben utilizar en orden. Aunque existen otras, notamos que esta condicion mejoro ampliamente la ejecución del LP. Formalmente, se puede expresar como:

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall 1 \leq j \leq |C| \quad (7)$$

2. Branch & Bound

La implementación del modelo y del Branch & Bound se encuentran en el apéndice.

3. Desigualdades

3.1. Desigualdad de Clique

Sea $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ y sea K una clique maximal de G . La desigualdad clique están definida por:

$$\sum_{p \in K} x_{pj_0} \leq w_{j_0} \quad (8)$$

Demostración Para esta demostración utilizaremos las desigualdades Chvátal-Gomory sobre las restricciones del LP planteado en la sección 1.2 e inducción. A priori el teorema es bastante intuitivo. Si pinto algún vértice de una clique, no puedo pintar ninguno adyacente del mismo color sin importar la forma en la que particione los vértices del grafo. Sea n el tamaño de la clique maximal.

Casos Base

1. $n = 1$: Si en la clique maximal tengo solo un vértice, no existe arista que contenga este vértice, caso contrario la clique tendría dos elementos. Por lo tanto, este vértice puede estar pintado o no dentro de la partición. Es decir, se cumple la ecuación que queremos probar.
2. $n = 2$: Si la clique maximal tiene dos elementos, por definición son conexos. Por la restricción que indica que los vértices adyacentes no comparten color, aquí hay 2 opciones. La primera opción es que a ningún vértice se le asigna un color j_0 . La otra opción es que dada la estructura de particiones, se le asigne solo a uno de ellos el color j_0 . Por lo tanto la desigualdad para $n = 2$ vale.
3. $n = 3$: Este es el caso mas interesante en el que utilizamos la desigualdad de Chvátal-Gomory. Si la clique tiene 3 vértices, hay tres desigualdades que se deben cumplir:

$$\begin{aligned} \blacksquare x_{1j_0} + x_{2j_0} &\leq 1 \\ \blacksquare x_{2j_0} + x_{3j_0} &\leq 1 \\ \blacksquare x_{1j_0} + x_{3j_0} &\leq 1 \end{aligned}$$

Multiplicando todas estas desigualdades por $1/3$ y sumando entonces:

$$1/3(x_{1j_0} + x_{2j_0}) + 1/3(x_{2j_0} + x_{3j_0}) + 1/3(x_{1j_0} + x_{3j_0}) \leq 3/2$$

Como x_{ij} toma valores enteros, entonces: $1/3(x_{1j_0} + x_{2j_0}) + 1/3(x_{2j_0} + x_{3j_0}) + 1/3(x_{1j_0} + x_{3j_0}) \leq 1$

Simplificando: $x_{1j_0} + x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq 1$.

Utilizando la definición de w_j entonces: $x_{1j_0} + x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq w_{j_0}$

Por lo tanto la desigualdad vale para $n = 3$.

Paso Inductivo: $P(n-1) \implies P(n)$

Como vale la hipótesis inductiva, sabemos que:

$$\sum_{p \in K-n} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

Al agregar un vértice a la clique, agregamos $n-1$ aristas:

$$x_{1j_0} + x_{nj_0} \leq 1, x_{2j_0} + x_{nj_0} \leq 1, \dots, x_{(n-1)j_0} + x_{nj_0} \leq 1$$

Utilizando esto, podemos ver que:

$$x_{nj_0} + \sum_{p \in K-n} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

Esto es claramente equivalente a lo que queremos demostrar y se puede justificar a partir de dos casos:

- Si al vértice x_{nj_0} se le asigna un color, por las restricciones de las aristas que agregamos al resto de los vértices de la clique no se le puede asignar el color j_0 .
- Si al vértice x_{nj_0} no se le asigna un color o se le asigna un color diferente a j_0 , por hipótesis inductiva sabemos que lo que queremos probar vale. \square

3.2. Desigualdad de Agujero Impar

Sea $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ y sea $C_{2k+1} = v_1, \dots, v_{2k+1}$, $k \geq 2$, un agujero de longitud impar. La desigualdad esta definida por:

$$\sum_{p \in C_{2k+1}} x_{pj_0} \leq kw_{j_0} \quad (9)$$

Demostración Por teoremas de coloreo (que se prueban en general por inducción), sabemos que el numero cromático $\chi(C) = 3$. En el peor de los casos, cada vértice del agujero estara en una partición diferente. Aqui nuevamente tenemos dos casos:

- Si no se asigna el color j_0 a algun vértice del agujero, la desigualdad vale.
- Si se asigna el color j_0 , en el peor de los casos el mismo sera utilizado por a lo sumo $(|C| - 1)/2$ vértices. Como $|C| = 2k + 1$, $(2k + 1 - 1)/2 = k$. Por lo tanto vale la desigualdad. \square

3.3. Planos de Corte

Luego de relajar el PLEM, los *algoritmos de separación* buscan acotar el espacio de búsqueda para que se parezca mas a la cápsula convexa. Existen algoritmos de separación exactos y heurísticos. Los algoritmos heurísticos, luego de resolver la relajación del problema entero y encontrar una solución óptima x^* , retornan una o mas desigualdades de la clase violadas por alguna familia de desigualdades.

Dado que es un algoritmo heurístico, es posible que exista una desigualdad de la clase violada aunque el procedimiento no sea capaz de encontrarla. Si se encuentra una desigualdad que es violada por la solución óptima de la relajación, se agrega esta nueva restricción y se vuelve a resolver el programa lineal. Este procedimiento se conoce como algoritmo de plano de corte. Si una solución óptima al problema existe, este tipo de algoritmo no necesariamente la encuentra. Por ejemplo, las heurísticas que encuentran desigualdades validas pueden fallar y el algoritmo no puede continuar.

3.4. Heurísticas

En general, construir las familias de desigualdades enunciadas en las secciones anteriores de forma exhaustiva es un problema NP-Hard. Por esta razón los algoritmos heurísticos son sumamente útiles para buscar una aproximación polinomial al problema. Las heurísticas que enunciaremos a continuación utilizan algunas propiedades de la representación de nuestro grafo, ya sea para su construcción o para lograr una mejor complejidad temporal y espacial.

En primer lugar, representamos la estructura del grafo mediante una matriz de adyacencias. Esta matriz se implemento utilizando una lista. Dado que la matriz de adyacencias es simétrica y la diagonal no es necesaria para este problema en particular, guardamos solo la parte triangular superior de la misma. Esto nos da la ventaja de poder saber si dos vértices son adyacentes o no en $\mathcal{O}(1)$ y reduce la complejidad espacial de forma considerable. La formula que utilizamos para generar la biyección entre arista e índice en la lista se puede ver claramente en el código. La idea es bastante simple y se basa principalmente en usar la expresión para la suma de enteros consecutivos.

En segundo lugar, numeramos todos los vértices con enteros comenzando con $id = 1$. Por construcción, luego nuestras heurísticas nos garantizaran que nuestro conjunto de índices que representa a un miembro de una familia esta ordenado. Esto es muy ventajoso en el sentido que podemos saber fácilmente si un nuevo potencial miembro de la familia esta contenido dentro de un miembro existente. Por otro lado, tiene una clara desventaja: la familia dependerá de como los vértices son numerados.

En un principio, la estrategia que seguimos fue generar las diferentes familias una vez, y luego verificar en cada iteración si la solución de la relajación violaba alguna desigualdad. Dado que esta estrategia en general no daba resultados muy satisfactorios, luego decidimos generar las familias en función del resultado de la relajación para cada iteración.

Por otro lado, muchas veces nuestra heurística generaba familias de desigualdades violadas muy grandes, y agregar todas terminaba siendo contraproducente. Por lo tanto, decidimos buscar algún criterio para poder determinar cuales son las mejores desigualdades a agregar y luego definir un *threshold* para decidir cuantas agregamos al LP. El criterio que utilizamos es el modulo de la diferencia entre los miembros de la desigualdad, aunque pueden existir otros en función también de la cantidad de variables en la desigualdad. Muchas veces las desigualdades mas violadas difieren solamente en pocas variables, por lo que esto también podría ser tenido en cuenta.

3.4.1. Heurística de Separación para Clique Maximal

Para esta heurística, lo que hacemos es recorrer los vértices que tienen una solución positiva en la relajación del LP en orden. En primer lugar, tomamos el primer vértice, y luego comenzamos a recorrer la lista hasta que encontramos un vértice adyacente. Lo agregamos al conjunto que representa al miembro de la clique, y seguimos agregando elemento en orden de forma que cumplan que son adyacentes con todos los que ya hemos agregado. Una vez recorrida toda la lista, agregamos este conjunto a la familia. Luego comenzamos a generar una nueva familia a partir del segundo vértice, y así sucesivamente. Luego agregamos las mejores *threshold* desigualdades por score. Este procedimiento se puede ilustrar con el siguiente pseudocódigo:

Algorithm 1 Algoritmo para agregar cliques violadas

```
1: procedure GENERATECLIQUEFAMILY( $V, E, sol, threshold, lp$ )
2:    $set < score, set < int >> clique\_family$ 
3:   for  $id \leftarrow 1, |V|$  do
4:     if  $sol[id] > 0 + \epsilon$  then
5:       continue
6:     end if
7:      $set < int > clique$ 
8:      $clique.insert(id)$ 
9:     for  $id2 \leftarrow id + 1, |V|$  do
10:      if  $sol[id2] > 0 + \epsilon$  then
11:        continue
12:      end if
13:      if  $clique.adyaentToAll(id2)$  then
14:         $clique.insert(id2)$ 
15:      end if
16:    end for
17:    if  $\neg clique\_family.isContained(clique)$  then
18:       $clique\_family.insert(< getScore(clique), clique >)$ 
19:    end if
20:  end for
21:   $sortByScore(clique\_family)$ 
22:   $addTopCliqueRestrictions(lp, clique\_family, threshold)$ 
23: end procedure
```

Notar que en la practica solo consideramos cliques de tamaño mayor a 2, dado que si no se pisan con las restricciones de adyacencia del LP. A su vez, esta heurística debe ser generalizada para todos los colores, cosa que no mostramos dado que no aportaba nada al momento de mostrar la idea del algoritmo de forma clara.

3.4.2. Heurística de Separación para Agujero Impar

Para esta heurística, seguimos un procedimiento similar al anterior. Recorremos los vértices en orden, y los vamos agregando si son adyacentes. Al final, el conjunto de vértices resultante es un camino. Luego, vemos si el ultimo elemento del camino es adyacente al primero y si el camino tiene longitud impar. Si esto sucede, agregamos el conjunto a la familia. Si no sucede, quitamos el ultimo elemento y verificamos nuevamente la condición hasta que se satisfaga. Finalmente, agregamos las mejores *threshold* desigualdades por score. Este procedimiento se puede ilustrar con el siguiente pseudocódigo:

Algorithm 2 Algoritmo para agregar agujeros impares violados

```
1: procedure GENERATEODDholeFAMILY( $V, E, sol, threshold, lp$ )
2:    $set < score, set < int >> oddhole\_family$ 
3:   for  $id \leftarrow 1, |V|$  do
4:     if  $sol[id] > 0 + \epsilon$  then
5:       continue
6:     end if
7:      $set < int > path$ 
8:      $path.insert(id)$ 
9:     for  $id2 \leftarrow id + 1, |V|$  do
10:      if  $sol[id2] > 0 + \epsilon$  then
11:        continue
12:      end if
13:      if  $isAdjacent(path.end, id2)$  then
14:         $path.insert(id2)$ 
15:      end if
16:    end for
17:    while  $path.size() \geq 3$  and  $(path.size() \bmod 2 == 0 \text{ or } \neg isAdjacent(path.start, path.end))$  do
18:       $path.erase(path.end)$ 
19:    end while
20:    if  $path.size() \geq 3$  and  $isAdjacent(path.start, path.end)$  then
21:       $oddhole\_family.insert(< getScore(path), path >)$ 
22:    end if
23:  end for
24:   $sortByScore(oddhole\_family)$ 
25:   $addTopPathRestrictions(lp, oddhole\_family, threshold)$ 
26: end procedure
```

Notar que en ambas heurísticas utilizamos la tolerancia ϵ para evitar problemas numéricos.

3.5. Cut & Branch

Dado que las familias de desigualdades anteriormente expuestas no describen de forma exhaustiva la cápsula convexa del problema, los algoritmos de planos de corte no necesariamente convergen. Por esta razón decidimos implementar un algoritmo Cut & Branch. Los algoritmos Cut & Branch buscan aplicar planos de corte a la raíz del árbol de enumeración de Branch & Bound, lo que *potencialmente* puede mejorar el tiempo de ejecución de los problemas al reducir el espacio de búsqueda y permitiendo mejores podas. Una vez aplicados los cortes, se resuelve el problema resultante mediante Branch & Bound.

En nuestra implementación, los parámetros que deben ser calibrados para este algoritmo son la cantidad de iteraciones y el threshold. Por cada iteración, el algoritmo resuelve la relajación del problema y agrega a lo sumo *threshold* restricciones de cada tipo.

4. Experimentación

Dada una cantidad de vértices, los grafos se generan con formato DIMACS ¹. El generador toma como parámetro la densidad del grafo. Dada una clique con esa cantidad de vértices, se elijen vértices al azar hasta que se llega a la densidad deseada. Debido a que estas instancias están diseñadas para coloreo de grafos, asignamos los vértices de forma uniforme en el total de particiones pasado por parámetro a nuestro programa de coloreo particionado.

Por cuestiones de tiempo, para cada una de las experimentaciones CPLEX se ejecuto sin limitar la cantidad de threads con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-3610QM CPU @ 2.30GHz y 16GB de memoria RAM.

4.1. Eliminación de simetría

Al igual que el problema de coloreo de grafos, el problema del coloreo particionado de grafos presenta una gran cantidad de soluciones simétricas. De no romper la simetría del problema, los algoritmos de búsqueda normalmente tendrían un espacio mucho mayor de búsqueda, lo que afecta el tiempo de ejecución de forma considerable a medida que crece el tamaño del problema. Para romper la simetría en nuestro problema, en la sección 1.3 mostramos como utilizamos la clásica condicion de coloreo de que los colores se deben utilizar en orden. Esto se puede ver en el siguiente gráfico:

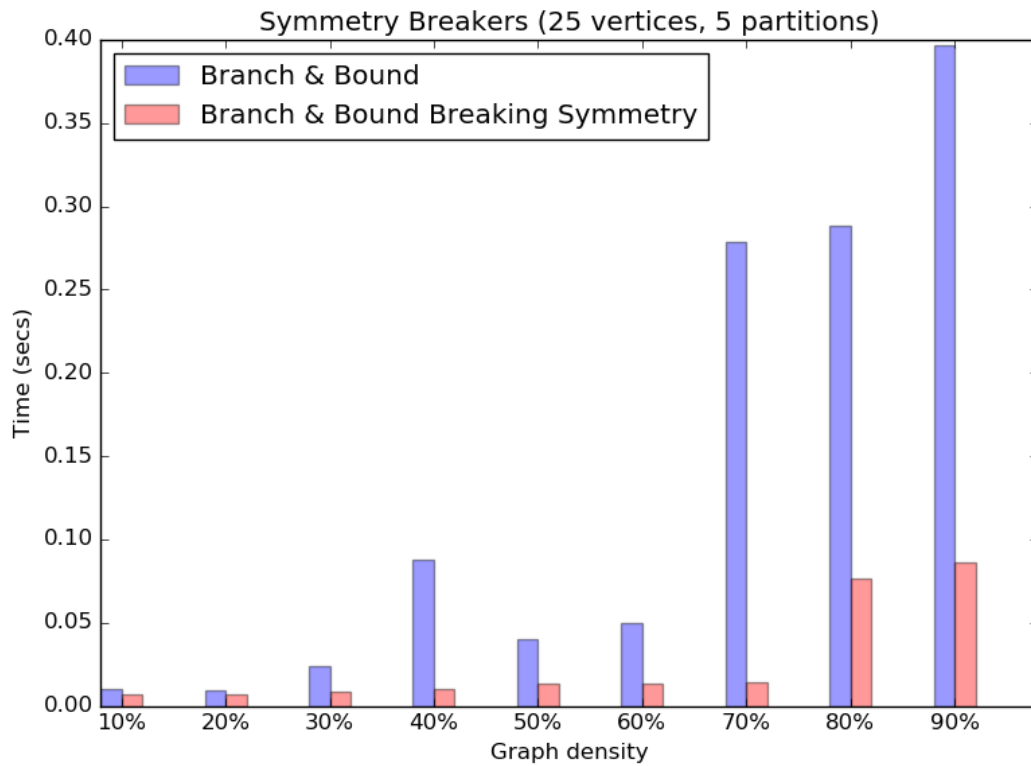


Figura 1: Eliminación de simetría.

Esto nos da una noción sumamente relevante de la importancia y la efectividad de romper la simetría en los LP. Cabe mencionar que existen muchas otras estrategias para romper la simetría de los problemas, y esta no es necesariamente la mejor.

¹Para ver algunos ejemplos del formato: <http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html>

4.2. Efectividad de las familias de desigualdades

La idea de este experimento fue comparar las diferentes estrategias de planos de corte. Para ello se tomo a 40 como el a la cantidad de cortes de cada tipo que se podían agregar, con una sola iteración:

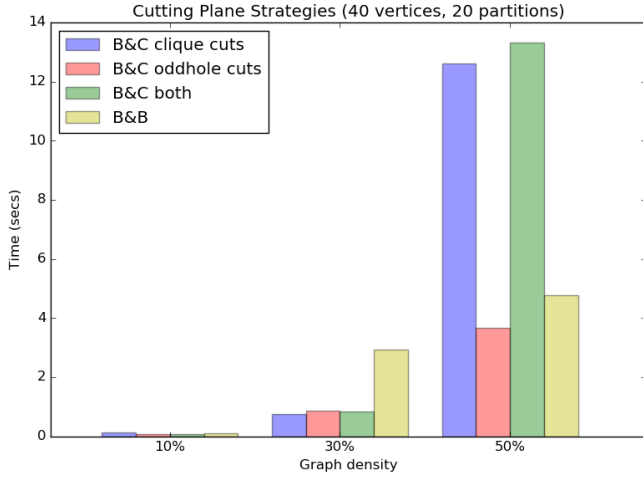


Figura 2: Estrategias de planos de corte (tiempo)

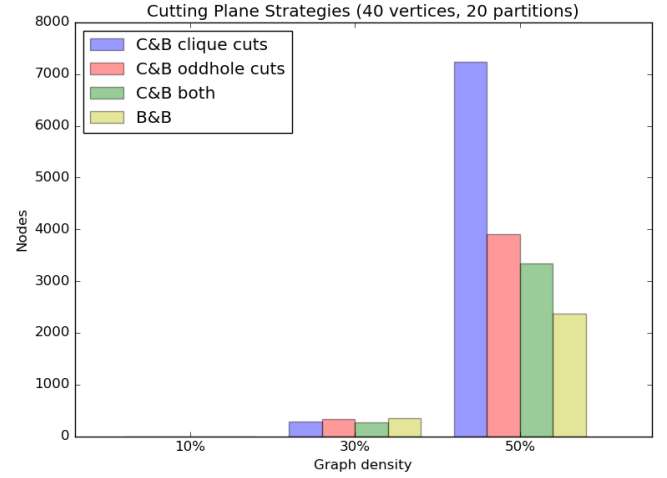


Figura 3: Estrategias de planos de corte (nodos recorridos)

Lo primero que podemos observar que no siempre hay una estrategia ganadora. Claramente la estrategia a seguir depende de la densidad del grafo. Cuanto mas denso, mas cliques nuestra heurística podría encontrar y a priori uno esperaría que los tiempos mejoren. Esto no sucede, y de hecho agregar las restricciones de clique empeora el tiempo de ejecución con respecto al resultado de B&B. También podemos observar que mejor tiempo de ejecución no necesariamente implica que se recorren menos nodos del árbol de enumeración. En contra de lo que esperábamos, las desigualdades de agujero impar parecen funcionar bien, aunque por supuesto se debe llevar a cabo una experimentación mas exhaustiva.

4.3. Efecto de aumentar el numero de particiones

A medida que aumentamos el numero de particiones, el problema comienza a parecerse mas a uno de coloreo. Dado que las desigualdades que implementamos son clásicas de coloreo, es de esperar que la performance mejore a medida que aumenta el numero de particiones [2]. Para Cut & Branch, solo utilizamos los mejores 40 cortes de clique con una iteración. A medida que aumenta el numero de particiones, podemos observar como la ganancia del corte es mayor.

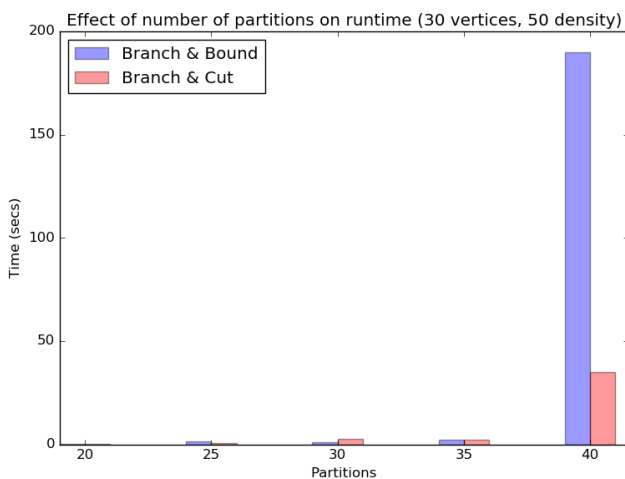


Figura 4: Tiempo de ejecucion a medida que aumenta el numero de particiones.

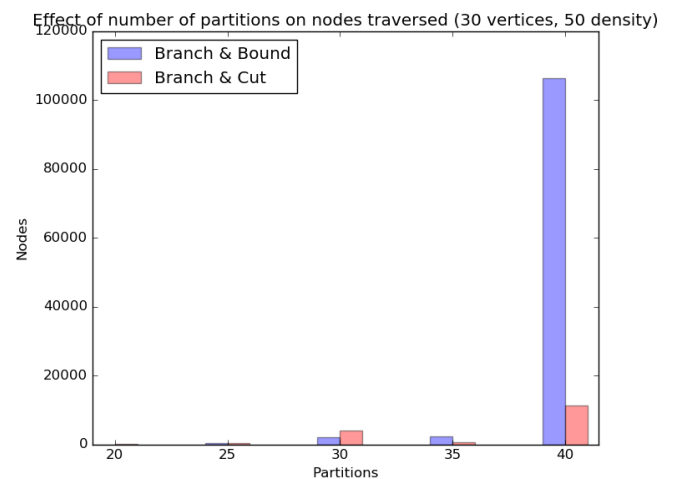


Figura 5: Nodos recorridos a medida que aumenta el numero de particiones.

4.4. Efecto de aumentar la densidad del grafo

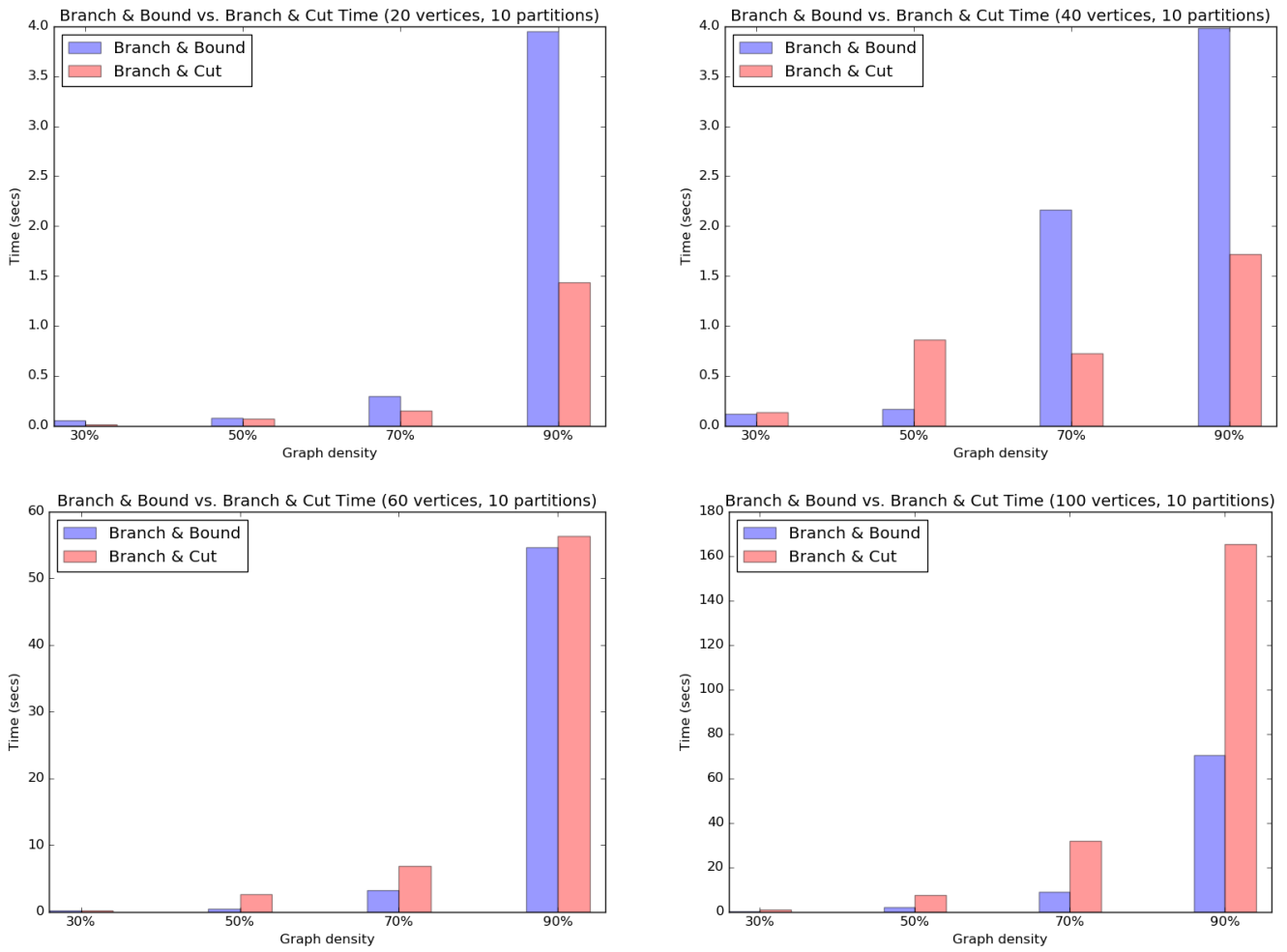


Figura 6: Efecto de aumentar la densidad del grafo.

A medida que aumenta la densidad del grafo, la dificultad del problema es claramente mayor. En los casos donde el numero de particiones es mayor en relación al numero de vértices, Branch & Cut con 1 iteración y 40 desigualdades violadas parece funcionar mejor. Esto no sucede en grafos esparsos, donde Branch & Bound puro tiene un menor tiempo de ejecución.

4.5. Efecto de aumentar la cantidad de restricciones incorporadas por iteración

Para todos nuestros experimentos en general utilizamos solo 1 iteración con un limite de 40 desigualdades por familia. La idea de este experimento fue evaluar esta configuración. Para ello utilizamos un grafo con 40 vértices y 20 particiones.

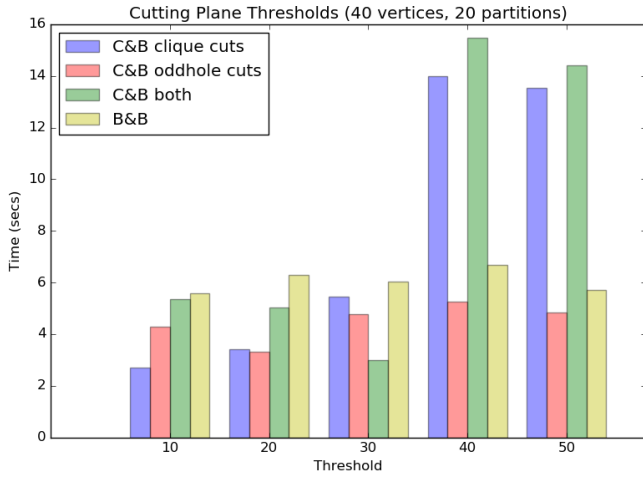


Figura 7: Tiempo de ejecución al incrementar el numero de restricciones incorporadas.

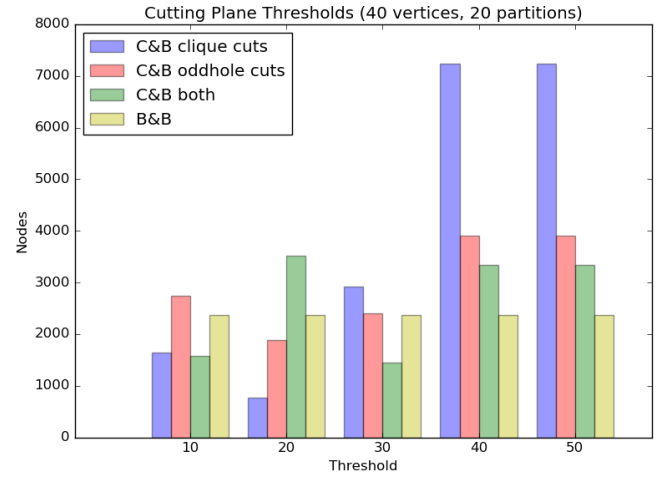


Figura 8: Nodos recorridos al incrementar el numero de restricciones incorporadas.

Como podemos observar, agregar mas restricciones no es siempre ventajoso. En un principio, agregar restricciones parece mejorar la ejecución del C&B, pero ya a partir de 40 el tiempo de ejecución empeora de forma abrupta para las cliques. Esto no sucede para las restricciones de agujero impar. Nuevamente, esto se puede deber a que nuestra heurística de clique no es lo suficientemente buena.

4.6. Efecto de aumentar la cantidad de iteraciones de planos de corte

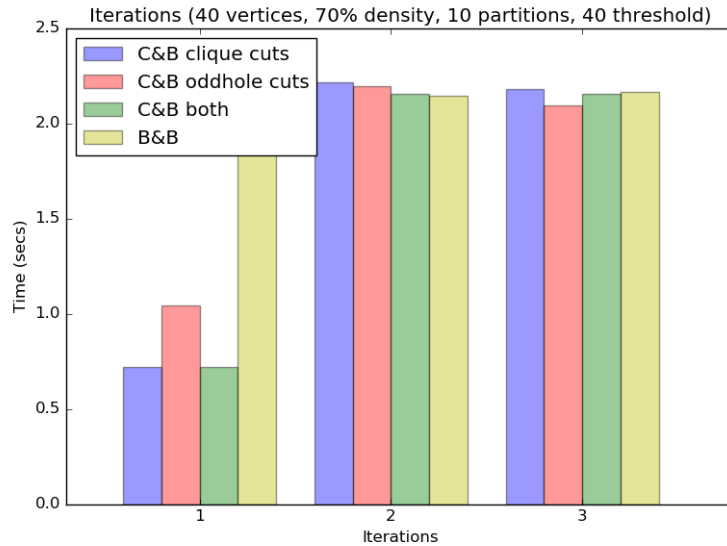


Figura 9: Tiempo de ejecución al aumentar la cantidad de iteraciones de planos de corte.

Como podemos ver, aumentar el numero de iteraciones de planos de corte no necesariamente mejora el tiempo de ejecución. En cada iteración lo que hacíamos era generar una familia en función de la solución de la relajación del problema, y luego agregar las *mejores* restricciones. En relación a la sección anterior, esto también esta relacionado con el *threshold* que elegimos para hacer la experimentación.

4.7. Comparación B&B, C&B, CPLEX default

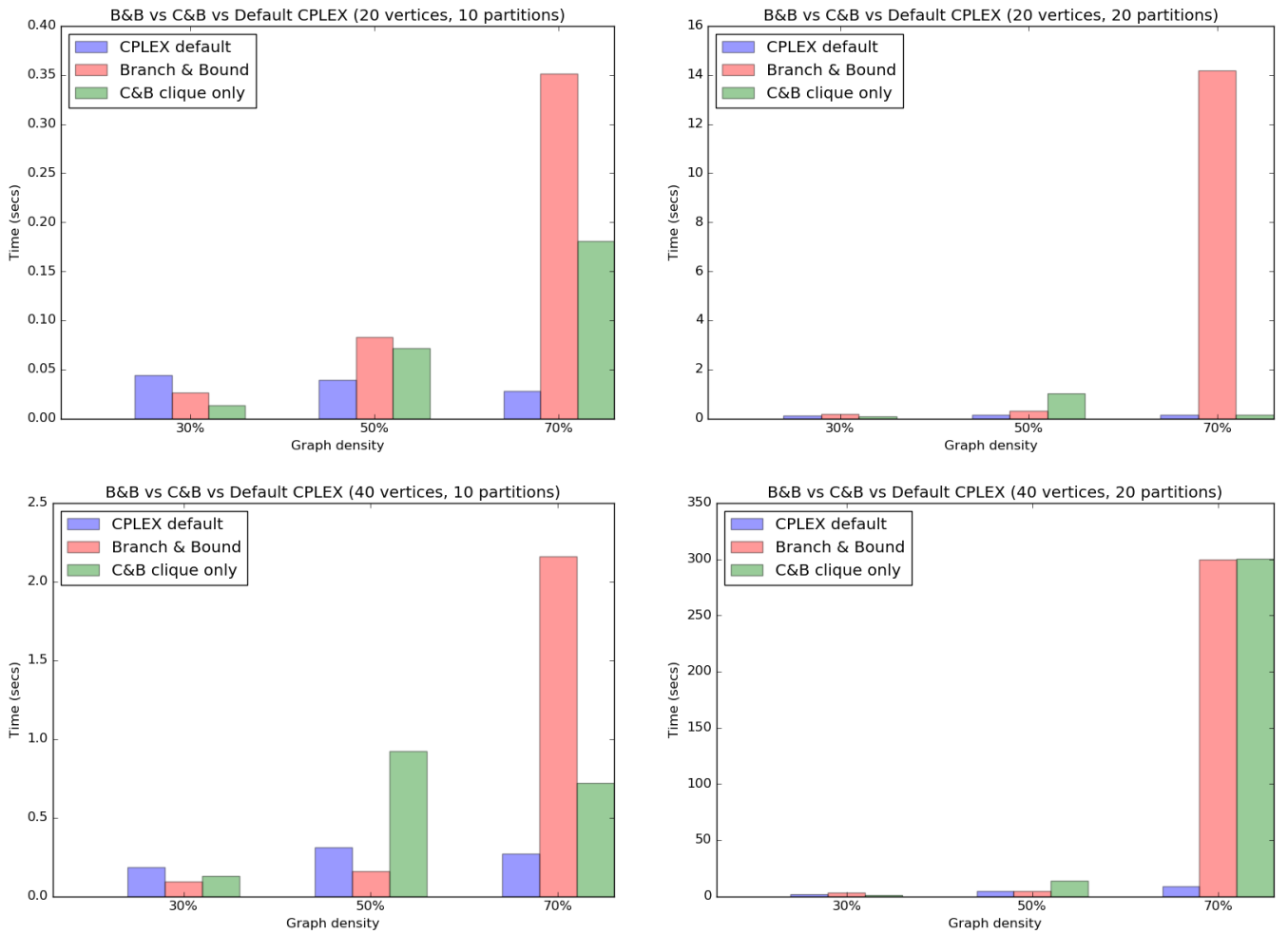


Figura 10: Comparacion B&B, C&B, CPLEX default para diferentes grafos.

Dado que el CPLEX por default utiliza cortes de Gomory y preprocesamiento de variables, no nos sorprende que en general sea superior a nuestras otras estrategias para grafos densos. Una propuesta interesante podría ser repetir esta experimentación permitiendo los cortes y el preprocesamiento para todas nuestras estrategias. Otra observación, el gráfico superior derecho es el caso de coloreo de grafos, dado que cada vértice pertenece a una partición diferente. Aquí podemos ver que las desigualdades de clique son sumamente útiles.

4.8. Estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de branching

Existen muchas estrategias de recorrido del árbol de enumeración. En este trabajo solo analizaremos DFS y BBS. DFS (Depth First Search) recorre el árbol de enumeración de B&B primero en profundidad. Por otro lado, BBS (Best Bound Search) recorre el árbol de enumeración utilizando alguna estrategia para intentar buscar una buena cota lo mas rápido posible. En general se utilizan estrategias heurísticas. En el caso de CPLEX, dado un nodo padre se calcula la solución a la relajación de todos sus hijos y luego se continua recorriendo el nodo con el mayor resultado de la función objetivo.²

Ambas estrategias son sumamente ventajosas ya que permiten obtener una cota superior a la solución final para utilizar de poda al hacer backtracking sobre el árbol de enumeración. Dado que no utilizamos heurísticas iniciales, esta estrategia parece razonable.

Por otro lado, las estrategias de selección de variable buscan encontrar cual es la mejor variable sobre la cual hacer branching. Hay muchas reglas, como por ejemplo *max/min infeasibility*. Mientras que la regla de *minimum infeasibility* busca hacer branching sobre mas cercana al entero, la regla de *maximum infeasibility* busca hacer exactamente lo contrario.³

En esta sección analizaremos 4 combinaciones de estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de branching para B&B puro y C&B con cortes de clique, 1 iteración y *threshold* = 30. Las combinaciones que analizaremos son: DFS + MAXINFEAS, DFS + MININFEAS, BESTBOUND + MAXINFEAS, BESTBOUND + MININFEAS.

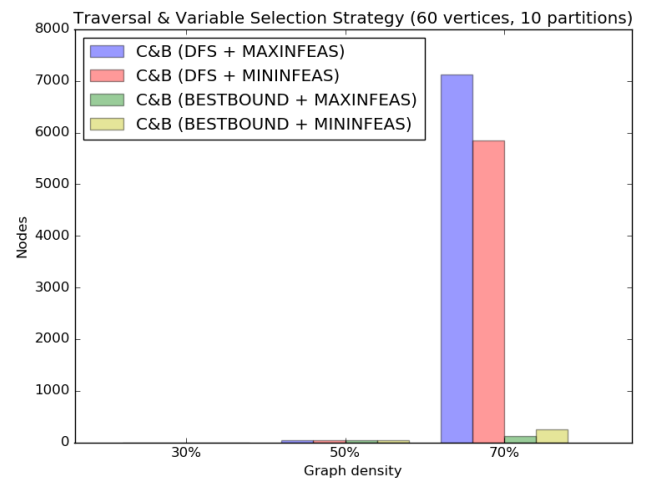
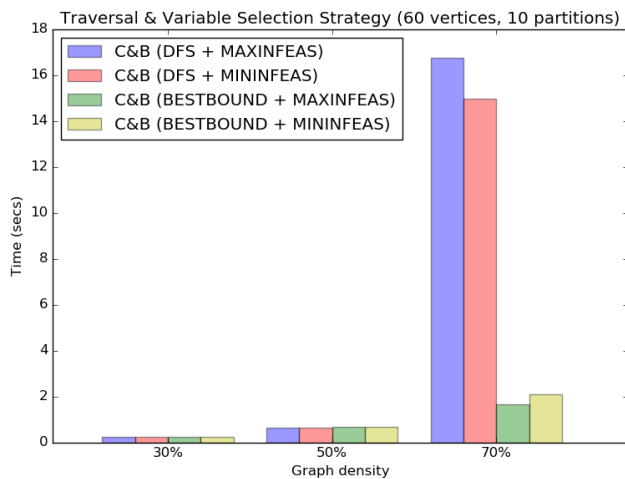
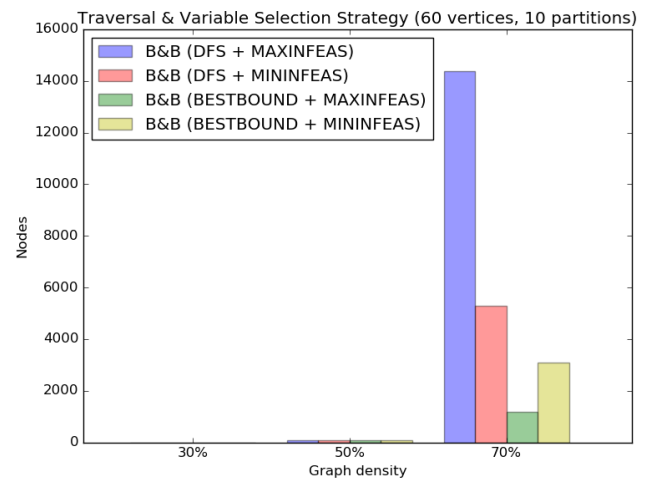
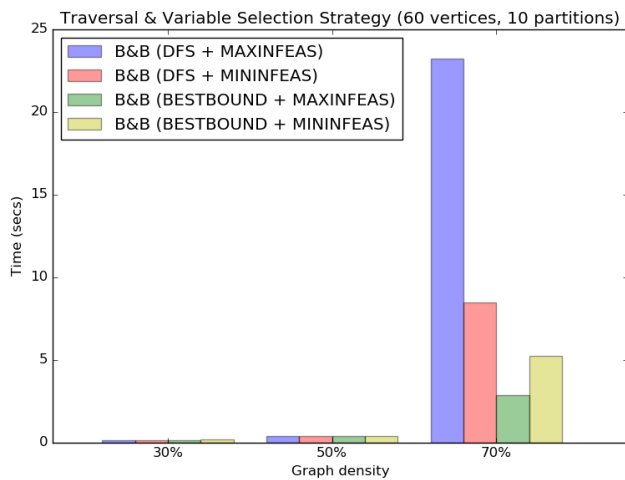


Figura 11: Tiempo de ejecución dependiendo de la estrategia de recorrido y selección de variable.

Figura 12: Nodos recorridos dependiendo de la estrategia de recorrido y selección de variable.

Como podemos observar, en general C&B tiene tiempos de ejecución menores y a su vez recorre menos nodos. La mejor estrategia para este problema parece ser BESTBOUND + MAXINFEAS. CPLEX utiliza por default BESTBOUND, aunque utiliza una heurística para elegir la variable de branching.

²http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/Parameters/topics/NodeSel.html

³http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SS9UKU_12.4.0/com.ibm.cplex.zos.help/Parameters/topics/VarSel.html

5. Conclusión

El famoso problema de coloreo de grafos, el cual ha sido estudiado ampliamente en la literatura, es un caso particular del coloreo particionado de grafos, donde cada vértice pertenece a una partición diferente. Por esta razón, en primer lugar notamos que el problema del coloreo particionado iba a ser al menos tan difícil como el problema de coloreo, que ya en si es un problema sumamente complicado.

Las desigualdades de planos de cortes que hemos implementado en este trabajo son desigualdades utilizadas normalmente para coloreo. Por esta razón notamos a lo largo de todo el trabajo que en general los algoritmos de Cut & Branch funcionan bien a medida que aumenta el numero de particiones. La intuición nos dice que deben existir mejores familias que exploten el hecho de que el grafo este dividido en particiones, aunque encontrarlas escapa el objetivo de este trabajo [2].

Uno de los primeros problemas que nos encontramos al programar el algoritmo de Cut & Branch fue buscar buenas heurísticas para las familias de desigualdades que probamos validas. Aquí es donde claramente entra la creatividad del investigador para diseñar estas heurísticas, principalmente porque generar estas familias de forma exhaustiva es un problema NP-Hard. A lo largo de este trabajo probamos varias estrategias, y finalmente nos quedamos con una que depende de la solución de la relajación en cada iteración. Sin embargo, no tenemos ninguna duda de que existen heurísticas mucho mas efectivas. A su vez, una vez encontrado este conjunto de desigualdades violadas, es sumamente importante encontrar un criterio para decidir cuales deben ser agregadas al programa lineal, dado que agregar todas en general hace que la optimización sea mas lenta.

Por otro lado, en general notamos que el tiempo de computo no esta dominado por la generación de estas familias, si no que por la resolución del programa lineal. Probablemente esto no siempre es cierto, y el investigador debe buscar un balance entre el tiempo de ejecución de la heurística y el tiempo que el programa lineal necesita luego para ser ejecutado. Por ejemplo, si consideramos el caso extremo donde generamos la familia entera, este problema es no polinomial y seguramente dominara el tiempo de ejecución.

Durante este trabajo, la performance de CPLEX nos sorprendió ampliamente. Por default, CPLEX en si funciona bastante bien. Buscar una mejor descripción de la cápsula convexa muchas veces es muy difícil y *en términos prácticos* puede llegar a no valer la pena dependiendo del tamaño de instancia que se quiera resolver. Aquí es donde entra CPLEX, que con una simple formulación del programa lineal logra optimizar el problema relativamente bien para instancias razonablemente chicas. Un comentario, es muy importante buscar romper con la simetría de los problemas. Esto en general no es muy difícil y mejora los tiempos de ejecución de forma considerable.

Una posible mejora para resolver este problema es implementar un algoritmo Branch & Cut, buscando buenas heurísticas iniciales y primales para el calculo de cotas del óptimo y haciendo cortes en cada nodo del árbol utilizando los *callbacks* de CPLEX [1].

Existe una gran cantidad de parámetros a calibrar para lograr una buena performance, y su elección en general se basa en una experimentación que logre emular los casos mas comunes en la practica. Durante este trabajo no trabajamos mucho con instancias y problemas sumamente difíciles dado el tiempo acotado para realizar el mismo, aunque sería interesante ver hasta que punto pueden llegar los algoritmos con una buena configuración.

Referencias

- [1] IBM. Ilog cplex optimization studio 12.6.1. http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.cplex.help/refcplex/html/overview.htm.
- [2] Isabel Méndez-Díaz and Paula Zabala. A branch-and-cut algorithm for graph coloring. *Discrete Applied Mathematics*, 154(5):826–847, 2006.

6. Apéndice A: Código

6.1. coloring.cpp

```
1 #include <ilcplex/ilocplex.h>
2 #include <ilcplex/cplex.h>
3
4 #include <stdlib.h>
5 #include <cassert>
6
7 #include <algorithm>
8 #include <string>
9 #include <vector>
10 #include <set>
11
12 #define TOL 1e-05
13
14 ILOSTLBEGIN // macro to define namespace
15
16 // helper functions
17 int getVertexIndex(int id, int color, int partition_size);
18 inline int fromMatrixToVector(int from, int to, int vertex_size);
19 inline bool isAdyacent(int from, int to, int vertex_size, bool* adjacencyList);
20 bool adyacentToAll(int id, int vertex_size, bool* adjacencyList, const set<int>&
    clique);
21 bool cliqueNotContained(const set<int>& clique, int color, const vector<tuple<double,
    int, set<int>>>& clique_familly);
22
23 // load LP
24 int loadObjectiveFunction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size, char vtype);
25 int loadAdyacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList);
26 int loadSingleColorInPartitionRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, vector<vector
    <int>>& partitions, int partition_size);
27 int loadAdyacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size);
28 int loadSymmetryBreaker(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size);
29
30 // cutting planes
31 int loadCuttingPlanes(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int edge_size,
    int partition_size, bool* adjacencyList, int iterations, int load_limit, int
    select_cuts);
32 int maximalCliqueFamillyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit);
33 int loadUnsatisfiedCliqueRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size
    , const set<int>& clique, int color);
34
35 int oddholeFamillyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit);
36 int loadUnsatisfiedOddholeRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int
    partition_size, const set<int>& path, int color);
37
38 // cplex functions
39 int solveLP(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int edge_size, int vertex_size, int
    partition_size);
40 int convertVariableType(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size, char vtype);
41 int setCPLEXConfig(CPXENVptr& env);
42 int setTraversalStrategy(CPXENVptr& env, int strategy);
43 int setBranchingVariableStrategy(CPXENVptr& env, int strategy);
44 int setBranchAndBoundConfig(CPXENVptr& env);
```

```

45
46 int checkStatus(CPXENVptr& env, int status);
47
48 // colors array!
49 const char* colors[] = {"Blue", "Red", "Green", "Yellow", "Grey", "Green", "Pink", "
    AliceBlue", "AntiqueWhite", "Aqua", "Aquamarine", "Azure", "Beige",
50 "Bisque", "Black", "BlanchedAlmond", "BlueViolet", "Brown", "BurlyWood", "CadetBlue", "
    Chartreuse", "Chocolate", "Coral", "CornflowerBlue",
51 "Cornsilk", "Crimson", "Cyan", "DarkBlue", "DarkCyan", "DarkGoldenRod", "DarkGray", "
    DarkGrey", "DarkGreen", "DarkKhaki", "DarkMagenta", "DarkOliveGreen",
52 "Darkorange", "DarkOrchid", "DarkRed", "DarkSalmon", "DarkSeaGreen", "DarkSlateBlue", "
    DarkSlateGray", "DarkSlateGrey", "DarkTurquoise",
53 "DarkViolet", "DeepPink", "DeepSkyBlue", "DimGray", "DimGrey", "DodgerBlue", "FireBrick", "
    FloralWhite", "ForestGreen", "Fuchsia",
54 "Gainsboro", "GhostWhite", "Gold", "GoldenRod", "Gray", "GreenYellow", "HoneyDew", "HotPink"
    , "IndianRed", "Indigo",
55 "Ivory", "Khaki", "Lavender", "LavenderBlush", "LawnGreen", "LemonChiffon", "LightBlue", "
    LightCoral", "LightCyan", "LightGoldenRodYellow",
56 "LightGray", "LightGrey", "LightGreen", "LightPink", "LightSalmon", "LightSeaGreen", "
    LightSkyBlue", "LightSlateGray", "LightSlateGrey",
57 "LightSteelBlue", "LightYellow", "Lime", "LimeGreen", "Linen", "Magenta", "Maroon", "
    MediumAquaMarine", "MediumBlue", "MediumOrchid",
58 "MediumPurple", "MediumSeaGreen", "MediumSlateBlue", "MediumSpringGreen", "
    MediumTurquoise", "MediumVioletRed", "MidnightBlue",
59 "MintCream", "MistyRose", "Moccasin", "NavajoWhite", "Navy", "OldLace", "Olive", "OliveDrab"
    , "Orange", "OrangeRed", "Orchid",
60 "PaleGoldenRod", "PaleGreen", "PaleTurquoise", "PaleVioletRed", "PapayaWhip", "PeachPuff",
    "Peru", "Plum", "PowderBlue",
61 "Purple", "RosyBrown", "RoyalBlue", "SaddleBrown", "Salmon", "SandyBrown", "SeaGreen", "
    SeaShell", "Sienna", "Silver", "SkyBlue",
62 "SlateBlue", "SlateGray", "SlateGrey", "Snow", "SpringGreen", "SteelBlue", "Tan", "Teal", "
    Thistle", "Tomato", "Turquoise", "Violet",
63 "Wheat", "White", "WhiteSmoke", "YellowGreen"};
64
65 int main(int argc, char **argv) {
66
67     if (argc != 11) {
68         printf("Usage: %s inputFile solver partitions symmetry_breaker iterations
            select_cuts load_limit custom_config traversal_strategy branching_strategy
            \n", argv[0]);
69         exit(1);
70     }
71
72     int solver = atoi(argv[2]);
73     int partition_size = atoi(argv[3]);
74     bool symmetry_breaker = (atoi(argv[4]) == 1);
75     int iterations = atoi(argv[5]);
76     int select_cuts = atoi(argv[6]); // 0: clique only, 1: oddhole only,
        2: both
77     int load_limit = atoi(argv[7]);
78     int custom_config = atoi(argv[8]); // 0: default, 1: custom
79     int traversal_strategy = atoi(argv[9]);
80     int branching_strategy = atoi(argv[10]);
81
82     if (solver == 1) {
83         printf("Solver: Branch & Bound\n");
84     } else {
85         printf("Solver: Cut & Branch\n");
86     }
87
88     /* read graph input file
89     * format: http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html

```



```

90     * graph representation chosen in order to load the LP easily.
91     * - vector of edges
92     * - vector of partitions
93     */
94     FILE* fp = fopen(argv[1], "r");
95
96     if (fp == NULL) {
97         printf("Invalid input file.\n");
98         exit(1);
99     }
100
101     char buf[100];
102     int vertex_size, edge_size;
103
104     set<pair<double,int>> edges; // sometimes we have to filter directed graphs
105
106     while (fgets(buf, sizeof(buf), fp) != NULL) {
107         if (buf[0] == 'c') continue;
108         else if (buf[0] == 'p') {
109             sscanf(&buf[7], "%d %d", &vertex_size, &edge_size);
110         }
111         else if (buf[0] == 'e') {
112             int from, to;
113             sscanf(&buf[2], "%d %d", &from, &to);
114             if (from < to) {
115                 edges.insert(pair<double,int>(from, to));
116             } else {
117                 edges.insert(pair<double,int>(to, from));
118             }
119         }
120     }
121
122     // build adjacency list
123     edge_size = edges.size();
124     int adjacency_size = vertex_size*vertex_size - ((vertex_size+1)*vertex_size/2);
125     bool* adjacencyList = new bool[adjacency_size]; // can be optimized even more
126     // with a bitfield.
127     fill_n(adjacencyList, adjacency_size, false);
128     for (set<pair<double,int>>::iterator it = edges.begin(); it != edges.end(); ++it) {
129         adjacencyList[fromMatrixToVector(it->first, it->second, vertex_size)] = true;
130     }
131
132     // set random seed
133     srand(time(NULL));
134
135     // assign every vertex to a partition
136     // int partition_size = rand() % vertex_size + 1;
137     vector<vector<int>> partitions(partition_size, vector<int>());
138
139     for (int i = 0; i < vertex_size; ++i) {
140         partitions[i % partition_size].push_back(i+1);
141     }
142
143     // warning: this procedure doesn't guarantee every partition will have an element
144     // .
145     for (int i = 1; i <= vertex_size; ++i) {
146         int assign_partition = rand() % partition_size;
147         partitions[assign_partition].push_back(i);
148     }
149
150     // // update partition_size

```

```

149 // for (std::vector<vector<int> >::iterator it = partitions.begin(); it !=
150 //     partitions.end(); ++it) {
151 //     if (it->size() == 0) —partition_size;
152 // }
153 printf("Graph: vertex_size: %d, edge_size: %d, partition_size: %d\n", vertex_size
154 //     , edge_size, partition_size);
155 // start loading LP using CPLEX
156 int status;
157 CPXENVptr env; // pointer to enviroment
158 CPXLPptr lp; // pointer to the lp.
159
160 env = CPXopenCPLEX(&status); // create enviroment
161 checkStatus(env, status);
162
163 // create LP
164 lp = CPXcreateprob(env, &status, "Instance of partitioned graph coloring.");
165 checkStatus(env, status);
166
167 setCPLEXConfig(env);
168 if (custom_config == 1) setBranchAndBoundConfig(env);
169 setTraversalStrategy(env, traversal_strategy);
170 setBranchingVariableStrategy(env, branching_strategy);
171
172 if (solver == 1) { // pure branch & bound
173     loadObjectiveFunction(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_BINARY);
174 } else {
175     loadObjectiveFunction(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_CONTINUOUS);
176 }
177
178 loadAdjacencyColorRestriction(env, lp, vertex_size, edge_size, partition_size,
179 //     adjacencyList);
180 loadSingleColorInPartitionRestriction(env, lp, partitions, partition_size);
181 loadAdjacencyColorRestriction(env, lp, vertex_size, partition_size);
182
183 if (symmetry_breaker) loadSymmetryBreaker(env, lp, partition_size);
184
185 if (solver != 1) loadCuttingPlanes(env, lp, vertex_size, edge_size,
186 //     partition_size, adjacencyList, iterations, load_limit, select_cuts);
187
188 // write LP formulation to file, great to debug.
189 status = CPXwriteprob(env, lp, "graph.lp", NULL);
190 checkStatus(env, status);
191
192 convertVariableType(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_BINARY);
193
194 solveLP(env, lp, edge_size, vertex_size, partition_size);
195
196 delete [] adjacencyList;
197
198 return 0;
199 }
200
201 int getVertexIndex(int id, int color, int partition_size) {
202     return partition_size + ((id-1)*partition_size) + (color-1);
203 }
204
205 /* since the adjacency matrix is symmetric and the diagonal is not needed, we can
206 //     simply
207 * store the upper diagonal and get adjacency from a list. the math is quite simple,
208 //     it

```

```

205  * just uses the formula for the sum of integers. ids are numbered starting from 1.
206  */
207  inline int fromMatrixToVector(int from, int to, int vertex_size) {
208
209      // for speed, many parts of this code are commented, since by our usage we always
210      // know from < to and are in range.
211
212      // assert(from != to && from <= vertex_size && to <= vertex_size);
213
214      // if (from < to)
215          return from*vertex_size - (from+1)*from/2 - (vertex_size - to) - 1;
216      // else
217      // return to*vertex_size - (to+1)*to/2 - (vertex_size - from) - 1;
218  }
219
220  inline bool isAdyacent(int from, int to, int vertex_size, bool* adjacencyList) {
221      return adjacencyList[fromMatrixToVector(from, to, vertex_size)];
222  }
223
224  bool adjacentToAll(int id, int vertex_size, bool* adjacencyList, const set<int>&
    clique) {
225      for (set<int>::iterator it = clique.begin(); it != clique.end(); ++it) {
226          if (!isAdyacent(*it, id, vertex_size, adjacencyList)) return false;
227      }
228      return true;
229  }
230
231  bool cliqueNotContained(const set<int>& clique, int color, const vector<tuple<double,
    int, set<int>>>& clique_familly) {
232      for (vector<tuple<double, int, set<int>>>::const_iterator it = clique_familly.
    begin(); it != clique_familly.end(); ++it) {
233          // by construction, sets are already ordered.
234          if (get<1>(*it) == color && includes(get<2>(*it).begin(), get<2>(*it).end(),
    clique.begin(), clique.end())) return false;
235      }
236      return true;
237  }
238
239  int loadObjectiveFunction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size, char vtype) {
240
241      // load objective function
242      int n = partition_size + (vertex_size*partition_size);
243      double *objfun = new double[n];
244      double *ub = new double[n];
245      char *ctype = new char[n];
246      char **colnames = new char*[n];
247
248      for (int i = 0; i < partition_size; ++i) {
249          objfun[i] = 1;
250          ub[i] = 1;
251          ctype[i] = vtype;
252          colnames[i] = new char[10];
253          sprintf(colnames[i], "w-%d", (i+1));
254      }
255
256      for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
257          for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
258              int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
259              objfun[index] = 0;
260              ub[index] = 1;
261              ctype[index] = vtype;

```

```

262         colnames[index] = new char[10];
263         sprintf(colnames[index], "x%d-%d", id, color);
264     }
265 }
266
267 // CPLEX bug? If you set ctype, it doesn't identify the problem as continuous.
268 int status = CPXnewcols(env, lp, n, objfun, NULL, ub, NULL, colnames);
269 checkStatus(env, status);
270
271 // free memory
272 for (int i = 0; i < n; ++i) {
273     delete[] colnames[i];
274 }
275
276 delete[] objfun;
277 delete[] ub;
278 delete[] ctype;
279 delete[] colnames;
280
281 return 0;
282 }
283
284 int loadAdjacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList) {
285
286     // load first restriction
287     int ccnt = 0; // new columns being added.
288     int rcnt = edge_size * partition_size; // new rows being added.
289     int nzcnt = rcnt*2; // nonzero constraint coefficients being
        added.
290
291     double *rhs = new double[rcnt]; // independent term in restrictions.
292     char *sense = new char[rcnt]; // sense of restriction inequality.
293
294     int *matbeg = new int[rcnt]; // array position where each restriction
        starts in matind and matval.
295     int *matind = new int[rcnt*2]; // index of variables != 0 in restriction
        (each var has an index defined above)
296     double *matval = new double[rcnt*2]; // value corresponding to index in
        restriction.
297     char **rownames = new char*[rcnt]; // row labels.
298
299     int i = 0;
300     for (int from = 1; from <= vertex_size; ++from) {
301         for (int to = from + 1; to <= vertex_size; ++to) {
302
303             if (!isAdjacent(from, to, vertex_size, adjacencyList)) continue;
304
305             for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
306                 matbeg[i] = i*2;
307
308                 matind[i*2] = getVertexIndex(from, color, partition_size);
309                 matind[i*2+1] = getVertexIndex(to, color, partition_size);
310
311                 matval[i*2] = 1;
312                 matval[i*2+1] = 1;
313
314                 rhs[i] = 1;
315                 sense[i] = 'L';
316                 rownames[i] = new char[40];
317                 sprintf(rownames[i], "%s", colors[color-1]);
318

```

```

319         ++i;
320     }
321 }
322 }
323
324 // debug flag
325 // status = CPXsetintparam(env, CPXPARAMDATACHECK, CPX_ON);
326
327 // add restriction
328 int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
    matval, NULL, rownames);
329 checkStatus(env, status);
330
331 // free memory
332 for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
333     delete [] rownames[i];
334 }
335
336 delete [] rhs;
337 delete [] sense;
338 delete [] matbeg;
339 delete [] matind;
340 delete [] matval;
341 delete [] rownames;
342
343 return 0;
344 }
345
346
347 int loadSingleColorInPartitionRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, vector<vector
<int>>& partitions, int partition_size) {
348
349     // load second restriction
350     int p = 1;
351     for (std::vector<vector<int>>>::iterator it = partitions.begin(); it !=
    partitions.end(); ++it) {
352
353         int size = it->size(); // current partition size.
354         if (size == 0) continue; // skip empty partitions.
355
356         int ccnt = 0; // new columns being added.
357         int rcnt = 1; // new rows being added.
358         int nzcnt = size*partition_size; // nonzero constraint coefficients
    being added.
359
360         double *rhs = new double[rcnt]; // independent term in restrictions.
361         char *sense = new char[rcnt]; // sense of restriction inequality.
362
363         int *matbeg = new int[rcnt]; // array position where each
    restriction starts in matind and matval.
364         int *matind = new int[nzcnt]; // index of variables != 0 in
    restriction (each var has an index defined above)
365         double *matval = new double[nzcnt]; // value corresponding to index in
    restriction.
366         char **rownames = new char*[rcnt]; // row labels.
367
368         matbeg[0] = 0;
369         sense[0] = 'E';
370         rhs[0] = 1;
371         rownames[0] = new char[40];
372         sprintf(rownames[0], "partition_%d", p);
373

```

```

374     int i = 0;
375     for (std::vector<int>::iterator it2 = it->begin(); it2 != it->end(); ++it2) {
376         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
377             matind[i] = getVertexIndex(*it2, color, partition_size);
378             matval[i] = 1;
379             ++i;
380         }
381     }
382
383     // add restriction
384     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg,
385                             matind, matval, NULL, rownames);
386     checkStatus(env, status);
387
388     // free memory
389     delete [] rownames[0];
390     delete [] rhs;
391     delete [] sense;
392     delete [] matbeg;
393     delete [] matind;
394     delete [] matval;
395     delete [] rownames;
396
397     ++p;
398 }
399
400 return 0;
401 }
402
403 int loadSymmetryBreaker(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size) {
404
405     int ccnt = 0; // new columns being added.
406     int rcnt = partition_size - 1; // new rows being added.
407     int nzcnt = 2*rcnt; // nonzero constraint coefficients being
408                          // added.
409
410     double* rhs = new double[rcnt]; // independent term in restrictions.
411     char *sense = new char[rcnt]; // sense of restriction inequality.
412
413     int *matbeg = new int[rcnt]; // array position where each restriction
414     // starts in matind and matval.
415     int *matind = new int[rcnt*2]; // index of variables != 0 in restriction
416     // (each var has an index defined above)
417     double *matval = new double[rcnt*2]; // value corresponding to index in
418     // restriction.
419     char **rownames = new char*[rcnt]; // row labels.
420
421     int i = 0;
422     for (int color = 0; color < partition_size - 1; ++color) {
423         matbeg[i] = i*2;
424         matind[i*2] = color;
425         matind[i*2+1] = color + 1;
426         matval[i*2] = -1;
427         matval[i*2+1] = 1;
428
429         rhs[i] = 0;
430         sense[i] = 'L';
431         rownames[i] = new char[40];
432         sprintf(rownames[i], "%s", "symmetry_breaker");
433
434         ++i;
435     }

```

```

431
432
433 // add restriction
434 int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
    matval, NULL, rownames);
435 checkStatus(env, status);
436
437 // free memory
438 for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
439     delete [] rownames[i];
440 }
441
442 delete [] rhs;
443 delete [] sense;
444 delete [] matbeg;
445 delete [] matind;
446 delete [] matval;
447 delete [] rownames;
448
449 return 0;
450 }
451
452 int loadCuttingPlanes(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int edge_size,
    int partition_size, bool* adjacencyList, int iterations, int load_limit, int
    select_cuts) {
453
454     printf("Finding Cutting Planes.\n");
455
456     // calculate runtime
457     double inittime, endtime;
458     int status = CPXgettime(env, &inittime);
459
460     int n = partition_size + (vertex_size*partition_size);
461
462     double *sol = new double[n];
463     int i = 1;
464     int unsatisfied_restrictions = 0;
465     while (i <= iterations) {
466
467         printf("Iteration %d\n", i);
468
469         // solve LP
470         status = CPXlpopt(env, lp);
471         checkStatus(env, status);
472
473         status = CPXgetx(env, lp, sol, 0, n - 1);
474         checkStatus(env, status);
475
476         // print relaxation result
477         // for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
478         //     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
479         //         int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
480         //         if (sol[index] == 0) continue;
481         //         cout << "x" << id << "_" << color << " = " << sol[index] << endl;
482         //     }
483         // }
484
485         if (select_cuts == 0 || select_cuts == 2) unsatisfied_restrictions +=
            maximalCliqueFamilyHeuristic(env, lp, vertex_size, edge_size,
            partition_size, adjacencyList, sol, load_limit);
486         if (select_cuts == 1 || select_cuts == 2) unsatisfied_restrictions +=
            oddholeFamilyHeuristic(env, lp, vertex_size, edge_size, partition_size,

```

```

adjacencyList, sol, load_limit);
487
488     if (unsatisfied_restrictions == 0) break;
489
490     unsatisfied_restrictions = 0;
491     ++i;
492 }
493
494 status = CPXgettime(env, &endtime);
495 double elapsed_time = endtime - inittime;
496 cout << "Time taken to add cutting planes: " << elapsed_time << endl;
497
498 return 0;
499 }
500
501 int maximalCliqueFamilyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit) {
502
503     printf("Generating clique family.\n");
504
505     int loaded = 0;
506
507     vector<tuple<double, int, set<int>>> clique_family;
508
509     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
510
511         for (int id = 1; id <= vertex_size; id++) {
512
513             if (sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)] == 0) continue;
514
515             double sum = sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)];
516             set<int> clique;
517             clique.insert(id);
518             for (int id2 = id + 1; id2 <= vertex_size; ++id2) {
519                 if (sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)] == 0) continue;
520
521                 if (adjacentToAll(id2, vertex_size, adjacencyList, clique)) {
522                     clique.insert(id2);
523                     sum += sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)];
524                 }
525             }
526             if (clique.size() > 2 && sum > sol[color - 1] + TOL) {
527                 if (cliqueNotContained(clique, color, clique_family)) {
528                     double score = sum - sol[color - 1];
529                     clique_family.push_back(tuple<double, int, set<int>>(score,
color, clique));
530                 }
531             }
532         }
533     }
534
535     sort(clique_family.begin(), clique_family.end(), greater<tuple<double, int, set
<int>>>());
536
537     //print the family
538     for (vector<tuple<double, int, set<int>>>::const_iterator it = clique_family.
begin();
539         it != clique_family.end() && loaded < load_limit; ++loaded, ++it) {
540
541         loadUnsatisfiedCliqueRestriction(env, lp, partition_size, get<2>(*it), get
<1>(*it));
542         cout << "Score: " << get<0>(*it) << " - ";

```



```

543         for (set<int>::iterator it2 = get<2>(*it).begin(); it2 != get<2>(*it).end();
544             ++it2) {
545             cout << *it2 << " ";
546         }
547     cout << endl;
548 }
549 printf("Loaded %d/%d unsatisfied clique restrictions! (all colors)\n", loaded, (
550     int) clique_familly.size());
551 return loaded;
552 }
553
554 int loadUnsatisfiedCliqueRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size
555 , const set<int>& clique, int color) {
556     int ccnt = 0;
557     int rcnt = 1;
558     int nzcnt = clique.size() + 1;
559
560     double rhs = 0;
561     char sense = 'L';
562
563     int matbeg = 0;
564     int* matind = new int[clique.size() + 1];
565     double* matval = new double[clique.size() + 1];
566     char **rowname = new char*[rcnt];
567     rowname[0] = new char[40];
568     sprintf(rowname[0], "unsatisfied_clique");
569
570     matind[0] = color - 1;
571     matval[0] = -1;
572
573     int i = 1;
574     for (set<int>::iterator it = clique.begin(); it != clique.end(); ++it) {
575         matind[i] = getVertexIndex(*it, color, partition_size);
576         matval[i] = 1;
577         ++i;
578     }
579
580     // add restriction
581     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, &rhs, &sense, &matbeg, matind
582         , matval, NULL, rowname);
583     checkStatus(env, status);
584
585     // free memory
586     delete[] matind;
587     delete[] matval;
588     delete rowname[0];
589     delete rowname;
590
591     return 0;
592 }
593
594 int oddholeFamillyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
595 edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit) {
596
597     printf("Generating oddhole familly.\n");
598
599     int loaded = 0;
600
601     vector<tuple<double, int, set<int>>> path_familly; // dif, color, path

```

```

600
601     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
602
603         for (int id = 1; id <= vertex_size; id++) {
604
605             if (sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)] == 0) continue;
606
607             double sum = 0;
608             set<int> path;
609             path.insert(id);
610             for (int id2 = id + 1; id2 <= vertex_size; ++id2) {
611                 if (sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)] == 0) continue;
612
613                 if (isAdjacent(*(--path.end()), id2, vertex_size, adjacencyList)) {
614                     path.insert(id2);
615                 }
616
617             }
618
619             while (path.size() >= 3 && (path.size() % 2 == 0 ||
620                 !isAdjacent(*path.begin(), *(--path.end()), vertex_size,
621                     adjacencyList))) {
622                 path.erase(--path.end());
623
624             }
625             for (set<int>::iterator it = path.begin(); it != path.end(); ++it) {
626                 sum += sol[getVertexIndex(*it, color, partition_size)];
627             }
628
629             int k = (path.size() - 1) / 2;
630             if (path.size() > 2 && sum > k * sol[color - 1] + TOL) {
631                 double score = sum - k * sol[color - 1];
632                 path_familly.push_back(tuple<double, int, set<int>>(score, color, path));
633             }
634         }
635     }
636
637     sort(path_familly.begin(), path_familly.end(), greater<tuple<double, int, set<int>>>());
638
639     //print the familly
640     for (vector<tuple<double, int, set<int>>>::const_iterator it = path_familly.
641         begin();
642         it != path_familly.end() && loaded < load_limit; ++loaded, ++it) {
643         loadUnsatisfiedOddholeRestriction(env, lp, partition_size, get<2>(*it), get
644             <1>(*it));
645         cout << "Score: " << get<0>(*it) << " - ";
646         for (set<int>::iterator it2 = get<2>(*it).begin(); it2 != get<2>(*it).end();
647             ++it2) {
648             cout << *it2 << " ";
649         }
650         cout << endl;
651     }
652
653     printf("Loaded %d/%d unsatisfied oddhole restrictions! (all colors)\n", loaded, (
654         int) path_familly.size());
655
656     return loaded;
657 }

```

```

654 int loadUnsatisfiedOddholeRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int
    partition_size, const set<int>& path, int color) {
655
656     int ccnt = 0;
657     int rcnt = 1;
658     int nzcnt = path.size() + 1;
659
660     double rhs = 0;
661     char sense = 'L';
662
663     int matbeg = 0;
664     int* matind = new int[path.size() + 1];
665     double* matval = new double[path.size() + 1];
666     char **rowname = new char*[rcnt];
667     rowname[0] = new char[40];
668     sprintf(rowname[0], "unsatisfied-oddhole");
669
670     int k = (path.size() - 1) / 2;
671
672     matind[0] = color - 1;
673     matval[0] = -k;
674
675     int i = 1;
676     for (set<int>::iterator it = path.begin(); it != path.end(); ++it) {
677         matind[i] = getVertexIndex(*it, color, partition_size);
678         matval[i] = 1;
679         ++i;
680     }
681
682     // add restriction
683     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, &rhs, &sense, &matbeg, matind
        , matval, NULL, rowname);
684     checkStatus(env, status);
685
686     // free memory
687     delete[] matind;
688     delete[] matval;
689     delete rowname[0];
690     delete rowname;
691
692     return 0;
693 }
694
695 int loadAdjacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size) {
696
697     // load third restriction
698     int ccnt = 0; // new columns being added.
699     int rcnt = vertex_size * partition_size; // new rows being added.
700     int nzcnt = rcnt*2; // nonzero constraint coefficients being
        added.
701
702     double *rhs = new double[rcnt]; // independent term in restrictions.
703     char *sense = new char[rcnt]; // sense of restriction inequality.
704
705     int *matbeg = new int[rcnt]; // array position where each restriction
        starts in matind and matval.
706     int *matind = new int[rcnt*2]; // index of variables != 0 in
        restriction (each var has an index defined above)
707     double *matval = new double[rcnt*2]; // value corresponding to index in
        restriction.
708     char **rownames = new char*[rcnt]; // row labels.

```

```

709
710     int i = 0;
711     for (int v = 1; v <= vertex_size; ++v) {
712         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
713             matbeg[i] = i*2;
714
715             matind[i*2] = getVertexIndex(v, color, partition_size);
716             matind[i*2+1] = color-1;
717
718             matval[i*2] = 1;
719             matval[i*2+1] = -1;
720
721             rhs[i] = 0;
722             sense[i] = 'L';
723             rownames[i] = new char[40];
724             sprintf(rownames[i], "color_res");
725
726             ++i;
727         }
728     }
729
730     // add restriction
731     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
732                             matval, NULL, rownames);
733     checkStatus(env, status);
734
735     // free memory
736     for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
737         delete[] rownames[i];
738     }
739
740     delete[] rhs;
741     delete[] sense;
742     delete[] matbeg;
743     delete[] matind;
744     delete[] matval;
745     delete[] rownames;
746
747     return 0;
748 }
749
750 int solveLP(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int edge_size, int vertex_size, int
751             partition_size) {
752
753     printf("\nSolving MIP.\n");
754
755     int n = partition_size + (vertex_size*partition_size); // amount of total
756                     variables
757
758     // calculate runtime
759     double inittime, endtime;
760     int status = CPXgettime(env, &inittime);
761     checkStatus(env, status);
762
763     // solve LP
764     status = CPXmipopt(env, lp);
765     checkStatus(env, status);
766
767     status = CPXgettime(env, &endtime);
768     checkStatus(env, status);
769
770     // check solution state

```

```

768     int solstat;
769     char statstring[510];
770     CPXCHARptr p;
771     solstat = CPXgetstat(env, lp);
772     p = CPXgetstatstring(env, solstat, statstring);
773     string statstr(statstring);
774     if (solstat != CPXMIP_OPTIMAL && solstat != CPXMIP_OPTIMAL_TOL &&
775         solstat != CPXMIP_NODE_LIM_FEAS && solstat != CPXMIP_TIME_LIM_FEAS) {
776         // printf("Optimization failed.\n");
777         cout << "Optimization failed: " << solstat << endl;
778         exit(1);
779     }
780
781     double objval;
782     status = CPXgetobjval(env, lp, &objval);
783     checkStatus(env, status);
784
785     // get values of all solutions
786     double *sol = new double[n];
787     status = CPXgetx(env, lp, sol, 0, n - 1);
788     checkStatus(env, status);
789
790     int nodes_traversed = CPXgetnodecnt(env, lp);
791
792     // write solutions to current window
793     cout << "Optimization result: " << statstring << endl;
794     cout << "Time taken to solve final LP: " << (endtime - inittime) << endl;
795     cout << "Colors used: " << objval << endl;
796     cout << "Nodes traversed: " << nodes_traversed << endl;
797     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
798         if (sol[color - 1] == 1) {
799             cout << "w_" << color << " = " << sol[color - 1] << " (" << colors[color - 1]
800                 << ")" << endl;
801         }
802     }
803
804     for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
805         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
806             int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
807             if (sol[index] == 1) {
808                 cout << "x_" << id << " = " << colors[color - 1] << endl;
809             }
810         }
811     }
812
813     delete[] sol;
814
815     return 0;
816 }
817
818 int convertVariableType(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
819 partition_size, char vtype) {
820
821     int n = partition_size + (vertex_size * partition_size);
822     int* indices = new int[n];
823     char* xtype = new char[n];
824
825     for (int i = 0; i < n; i++) {
826         indices[i] = i;
827         xtype[i] = vtype;
828     }
829     CPXchgctype(env, lp, n, indices, xtype);

```

```

828
829     delete [] indices;
830     delete [] xctype;
831
832     return 0;
833 }
834
835 int setTraversalStrategy(CPXENVptr& env, int strategy) {
836
837     // MIP node selection strategy
838     // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P\_12.3.0/ilog.odms.cplex.
839     // help/Content/Optimization/Documentation/Optimization\_Studio/\_pubskel/
840     // ps.refparameterscplex2299.html
841
842     // 0 CPX_NODESEL_DFS          Depth-first search
843     // 1 CPX_NODESEL_BESTBOUND    Best-bound search; default
844     // 2 CPX_NODESEL_BESTEST      Best-estimate search
845     // 3 CPX_NODESEL_BESTEST_ALT  Alternative best-estimate search
846
847     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_NODESEL, strategy);
848
849     return 0;
850 }
851
852 int setBranchingVariableStrategy(CPXENVptr& env, int strategy) {
853
854     // MIP variable selection strategy
855     // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SS9UKU\_12.4.0/com.ibm.cplex.zos.
856     // help/Parameters/topics/VarSel.html
857
858     // -1 CPX_VARSEL_MININFEAS    Branch on variable with minimum infeasibility
859     // 0 CPX_VARSEL_DEFAULT       Automatic: let CPLEX choose variable to branch
860     // on; default
861     // 1 CPX_VARSEL_MAXINFEAS     Branch on variable with maximum infeasibility
862     // 2 CPX_VARSEL_PSEUDO        Branch based on pseudo costs
863     // 3 CPX_VARSEL_STRONG        Strong branching
864     // 4 CPX_VARSEL_PSEUDOREDUCED Branch based on pseudo reduced costs
865
866     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_VARSEL, strategy);
867
868     return 0;
869 }
870
871 int setCPLEXConfig(CPXENVptr& env) {
872     // maximize objective function
873     // CPXchgobjsen(env, lp, CPX_MAX);
874
875     // enable/disable screen output
876     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_SCRIND, CPX_OFF);
877
878     // set execution limit
879     CPXsetdblparam(env, CPX_PARAM_TILIM, 300);
880
881     // measure time in CPU time
882     // CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_CLOCKTYPE, CPX_ON);
883
884     return 0;
885 }
886
887 int setBranchAndBoundConfig(CPXENVptr& env) {
888     // CPLEX config

```

```

886 // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P\_12.2.0/ilog.odms.cplex.
      help/Content/Optimization/Documentation/CPLEX/\_pubskel/CPLEX916.html
887
888 // deactivate pre-processing
889 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMPRESLVND, -1);
890 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMREPEATPRESOLVE, 0);
891 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMRELAXPREIND, 0);
892 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMREDUCE, 0);
893 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMLANDPCUTS, -1);
894
895 // disable presolve
896 // CPXsetintparam(env, CPX_PARAMPREIND, CPX_OFF);
897
898 // enable traditional branch and bound
899 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMMIPSEARCH, CPX_MIPSEARCH_TRADITIONAL);
900
901 // use only one thread for experimentation
902 // CPXsetintparam(env, CPX_PARAMTHREADS, 1);
903
904 // do not add cutting planes
905 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMEACHCUTLM, CPX_OFF);
906
907 // disable gomory fractional cuts
908 CPXsetintparam(env, CPX_PARAMFRACCUTS, -1);
909
910 return 0;
911 }
912
913
914 int checkStatus(CPXENVptr& env, int status) {
915     if (status) {
916         char buffer[100];
917         CPXgeterrorstring(env, status, buffer);
918         printf("%s\n", buffer);
919         exit(1);
920     }
921     return 0;
922 }

```
