Investigación Operativa
Coloreo Particionado de Grafos

10 de diciembre de 2015

Integrantes	LU	Correo electrónico
Martin Baigorria	575/14	martinbaigorria@gmail.com
Andrés Armesto Brosio	512/14	andresarmesto@gmail.com

Resumen: El presente trabajo práctico tiene como objetivo resolver el problema del coloreo particionado de grafos utilizando programación lineal. Para ello, en un primer momento modelamos el problema y lo implementamos utilizando CPLEX. Se experimenta con diferentes configuraciones de los métodos Branch & Bound y Branch & Cut, evaluando diferentes heurísticas, configuraciones y variando los tipos de grafos a resolver.

Keywords: Linear Programming, Partitioned Graph Coloring, Branch & Bound, Cut & Branch, CPLEX.

Índice

1. Modelo

Dado un grafo $G(V, E)$ con $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas, un coloreo de G se define como una asignación de un color o etiqueta a cada $v \in V$ de forma tal que para todo par de vértices adyacentes $(p, q) \in E$ poseen colores distintos. El clásico problema de *coloreo de grafos* consiste en encontrar un coloreo del grafo que utilice la menor cantidad de colores posibles.

En este trabajo resolveremos una variante de este problema, el *coloreo particionado de grafos*. A partir de un conjunto de vértices V que se encuentra particionado en $V_1, ..., V_k$, el problema consiste en asignar un color $c \in C$ a sólo un vértice de cada partición de forma tal que dos vértices adyacentes no reciban el mismo color y minimizando la cantidad de colores utilizados.

Este problema se puede modelar con Programación Lineal Entera. Para ello, definamos las siguientes variables:

$$x_{pj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado al vertice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{pj} = 1 \text{ para algun vertice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

1.1. Función objetivo

De esta forma la función objetivo del LP consiste en minimizar la cantidad de colores utilizados:

$$min \sum_{j \in C} w_j \tag{1}$$

Notar que $|C|$ esta acotado superiormente por la cantidad de particiones k.

1.2. Restricciones

Los vértices adyacentes no comparten color. Recordar que no necesariamente se le asigna un color a todo vértice.

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1 \quad \forall (i, k) \in E, \ \forall j \in C \tag{2}$$

Sólo se le asigna un color a un único vértice de cada partición $p \in P$. Esto implica que cada vértice tiene a lo sumo sólo un color.

$$\sum_{i \in V_p} \sum_{j \in C} x_{ij} = 1 \quad \forall p \in P \tag{3}$$

Si un nodo usa color j, $w_j = 1$:

$$x_{ij} \leq w_j \quad \forall i \in V, \forall j \in C \tag{4}$$

Integralidad y positividad de las variables:

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i \in V, \forall j \in C \tag{5}$$

$$w_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in C \tag{6}$$

1.3. Eliminación de simetrías

Una de nuestras ideas para eliminar simetría fue usar la clásica condición de coloreo que establece que los colores se deben utilizar en orden. Aunque existen otras, notamos que esta condición mejoró ampliamente la ejecución del LP. Formalmente, se puede expresar como:

$$w_j \geq w_{j+1} \quad \forall\ 1 \leq j < |C| \tag{7}$$

2. Branch & Bound

Los algoritmos de tipo Branch & Bound se utilizan para resolver problemas de programación lineal entera (PLE) o programación lineal entera mixta (PLEM, PEM, o MIP en inglés). El algoritmo consiste en tomar el problema de PEM y resolver en primera instancia la relajación lineal, es decir aquella que relaja las condiciones de integralidad sobre las variables. Con esto se obtiene un x^*, es decir una solución óptima de la relajación lineal. Si la solución obtenida cumple con las condiciones de integralidad, se ha encontrado un óptimo y el algoritmo termina. Si existe al menos una variable que no la cumple, se parte el problema original en 2 o más subproblemas. El proceso de partición se llama *branching*, y existe diversidad de criterios para realizarlo. Sin embargo, todas las formas de branching cumplen que todos los puntos factibles del problema original deben estar en alguna partición, y que el x^* hallado no pertenece a ninguna de ellas, de forma de no caer nuevamente en él. El proceso se repite en cada subproblema que nace, y termina cuando no quedan nodos por explorar. A su vez, otra parte importante del algoritmo consiste en cortar aquellas ramas cuyo valor óptimo de la relajación lineal es peor que el valor óptimo obtenido hasta ese momento. A este fenómeno se lo llama poda, o *bounding* en inglés.

Los criterios más importantes a determinar en un algoritmo de Branch & Bound son cómo realizar el branching (qué variables) y qué nodos a explorar, o cómo recorrer el árbol de enumeración (verticalmente, horizontalmente, etc.).

La implementación del modelo y del Branch & Bound se encuentran en el apéndice.

3. Desigualdades

3.1. Desigualdad de Clique

Sea $j_0 \in \{1, ..., |C|\}$ y sea K una clique maximal de G. La desigualdad clique están definida por:

$$\sum_{p \in K} x_{pj_0} \leq w_{j_0} \tag{8}$$

Demostración Para esta demostración utilizaremos las desigualdades Chvátal-Gomory sobre las restricciones del LP planteado en la sección 1.2, e inducción. A priori, el teorema es bastante intuitivo: si pinto algún vértice de una clique, no puedo pintar ninguno adyacente del mismo color sin importar la forma en la que particione los vértices del grafo. Sea n el tamaño de la clique maximal.

Casos Base

1. $n = 1$: Si en la clique maximal tengo sólo un vértice, no existe arista que contenga este vértice, caso contrario la clique tendría al menos dos elementos. Por lo tanto, este vértice puede estar pintado o no dentro de la partición. Es decir, se cumple la ecuación que queremos probar.

2. $n = 2$: Si la clique maximal tiene dos elementos, por definición son conexos. Por la restricción que indica que los vértices adyacentes no comparten color, aquí hay 2 opciones. La primera opción es que a ningún vértice se le asigne el color j_0. La otra opción es que, dada la estructura de particiones, se le asigne sólo a uno de ellos el color j_0. Por lo tanto, vale la desigualdad para $n = 2$.

3. $n = 3$: Este es el caso más interesante en el que utilizamos la desigualdad de Chvátal-Gomory. Si la clique tiene 3 vértices, hay tres desigualdades que se deben cumplir:

   - $x_{1j_0} + x_{2j_0} \leq 1$
   - $x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq 1$
   - $x_{1j_0} + x_{3j_0} \leq 1$

   Multiplicando todas estas desigualdades por $1/2$ y sumando entonces:

   $1/2(x_{1j_0} + x_{2j_0}) + 1/2(x_{2j_0} + x_{3j_0}) + 1/2(x_{1j_0} + x_{3j_0}) \leq 3/2$

   Desarrollando: $x_{1j_0} + x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq 3/2$.

   Como x_{ij} toma valores enteros, se implica: $x_{1j_0} + x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq 1$

   Utilizando la definición de w_j entonces: $x_{1j_0} + x_{2j_0} + x_{3j_0} \leq w_{j_0}$

   Por lo tanto la desigualdad vale para $n = 3$.

Paso Inductivo: $P(n-1) \implies P(n)$
Como vale la hipótesis inductiva, sabemos que:

$$\sum_{p \in K-n} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

Al agregar un vértice a la clique, agregamos $n-1$ aristas, por lo que deben cumplir:
$x_{1j_0} + x_{nj_0} \leq 1$, $x_{2j_0} + x_{nj_0} \leq 1$,..., $x_{(n-1)j_0} + x_{nj_0} \leq 1$
Utilizando esto, podemos ver que:

$$x_{nj_0} + \sum_{p \in K-n} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

Esto es claramente equivalente a lo que queremos demostrar y se puede justificar a partir de dos casos:

- Si al vértice x_{nj_0} se le asigna el color j_0, las restricciones de las aristas agregadas agregamos hacen que al resto de los vértices de la clique no se le puede asignar el color j_0.
- Si al vértice x_{nj_0} no se le asigna color, o se le asigna un color diferente a j_0, se obtiene la expresión de la hipótesis inductiva, y sabemos que lo que queremos probar vale. □

3.2. Desigualdad de Agujero Impar

Sea $j_0 \in \{1, ..., n\}$ y sea $C_{2k+1} = v_1, ..., v_{2k+1}$, $k \geq 2$, un agujero de longitud impar. La desigualdad esta definida por:

$$\sum_{p \in C_{2k+1}} x_{pj_0} \leq k w_{j_0} \tag{9}$$

Demostración Por teoremas de coloreo (que se prueban en general por inducción), sabemos que el número cromático $\chi(C) = 3$. En el peor de los casos, cada vértice del agujero estará en una partición diferente. Aquí nuevamente tenemos dos casos:

- Si no se asigna el color j_0 a algún vértice del agujero, la desigualdad vale.
- Si se asigna el color j_0, en el peor de los casos el coloreo particionado coincide con el coloreo tradicional. En ese caso, se asignará el color j_0 a lo sumo a $(|C|-1)/2$ vértices. Dado $|C| = 2k+1$, $(2k+1-1)/2 = k$. Por lo tanto vale la desigualdad. □

3.3. Planos de Corte

Los algoritmos de planos de corte comenzaron a estudiarse en los años 60's. Fueron introducidos por Ralph E. Gomory, a quien luego se le sumó Václav Schvátal. En sus términos básicos, en un primer paso se resuelve la relajación lineal del problema. Luego, el procedimiento termina si se verifica que el problema es infactible, o si se halla una solución que cumple las condiciones de integralidad. En caso de que no ocurra esto, los *algoritmos de separación* buscan identificar desigualdades lineales que permitan separar el óptimo fraccionario hallado de los puntos enteros factibles. De este modo, se intenta que el poliedro se parezca más a la cápsula convexa. Se dice que la solución fraccionaria *viola* la desigualdad hallada, y al buscarla se debe garantizar que no queden puntos enteros factibles fuera del nuevo poliedro. Una vez encontradas una o más desigualdades válidas, se agregan a la formulación y se resuelve nuevamente la relajación lineal. Se repite el proceso hasta que se encuentre una solución que cumpla con la integralidad de las variables, el problema resulte infactible, o no se pueda obtener más desigualdades válidas.

Existen algoritmos de separación exactos y heurísticos. Los algoritmos heurísticos, luego de resolver la relajación del problema entero y encontrar una solución óptima x^*, retornan una o más desigualdades de la clase violadas la solución x^*.

Debido a la naturaleza heurística del algoritmo, es posible que exista una desigualdad de la clase violada, aunque éste sea incapaz de encontrarla. Si se encuentra una desigualdad que es violada por la solución óptima de la relajación, se agrega esta nueva restricción y se vuelve a resolver el programa lineal. Este procedimiento se conoce como algoritmo de plano de corte. Si una solución óptima al problema existe, este tipo de algoritmo no necesariamente la encuentra. Por ejemplo, las heurísticas que encuentran desigualdades válidas pueden fallar, y el algoritmo no puede continuar.

3.4. Heurísticas

En general, construir las familias de desigualdades enunciadas en las secciones anteriores de forma exhaustiva es un problema NP-Hard. Por esta razón, se recurre a algoritmos heurísticos para buscar una aproximación polinomial al problema. Las heurísticas que enunciaremos a continuación utilizan algunas propiedades de la representación de nuestro grafo, ya sea para su construcción o para lograr una mejor complejidad temporal y espacial.

En primer lugar, representamos la estructura del grafo mediante una matriz de adyacencias. Esta matriz se implemento utilizando una lista. Dado que la matriz de adyacencias es simétrica, y la diagonal no es necesaria para este problema en particular, guardamos sólo la parte triangular superior de la misma. Esto nos da la ventaja de poder saber si dos vértices son adyacentes o no en $\mathcal{O}(1)$, y asimismo reduce la complejidad espacial de forma considerable. La

fórmula que utilizamos para generar la biyección entre arista e índice en la lista puede verse claramente en el código. La idea es bastante simple y se basa principalmente en usar la expresión para la suma de enteros consecutivos.

En segundo lugar, numeramos todos los vértices con enteros comenzando con $id = 1$. Por construcción, luego nuestras heurísticas nos garantizarán que nuestro conjunto de índices que representa a un miembro de una familia está ordenado. Esto es muy ventajoso en el sentido que podemos saber fácilmente si un nuevo potencial miembro de la familia está contenido dentro de un miembro existente. Por otro lado, tiene una clara desventaja: la familia dependerá de como los vértices son numerados.

En un principio, la estrategia que seguimos fue generar las diferentes familias una vez, y luego verificar en cada iteración si la solución de la relajación violaba alguna desigualdad. Dado que esta estrategia en general no daba resultados muy satisfactorios, luego decidimos generar las familias en función del resultado de la relajación para cada iteración.

Por otro lado, muchas veces nuestra heurística generaba familias de desigualdades violadas muy grandes, y agregar todas terminaba siendo contraproducente. Por lo tanto, decidimos buscar algún criterio para poder determinar cuáles son las mejores desigualdades a agregar, y luego definir un *threshold* para decidir cuántas agregamos al LP. El criterio que utilizamos es el módulo de la diferencia entre los miembros de la desigualdad, aunque pueden existir otros en función también de la cantidad de variables en la desigualdad. Muchas veces las desigualdades más violadas difieren solamente en pocas variables, por lo que esto también podría ser tenido en cuenta.

3.4.1. Heurística de Separación para Clique Maximal

Para esta heurística, lo que hacemos es recorrer en orden los vértices que tienen una solución positiva en la relajación del LP. En primer lugar, tomamos el primer vértice, y luego comenzamos a recorrer la lista hasta que encontramos un vértice adyacente. Lo agregamos al conjunto que representa al miembro de la clique, y seguimos agregando elementos en orden de forma que cumplan la adyacentes con todos los que ya hemos agregado. Una vez recorrida toda la lista, agregamos este conjunto a la familia. Luego comenzamos a generar una nueva familia a partir del segundo vértice, y así sucesivamente. Luego agregamos las mejores *threshold* desigualdades por score. Este procedimiento se puede ilustrar con el siguiente pseudocódigo:

Algorithm 1 Algoritmo para agregar cliques violadas

```
1: procedure generateCliqueFamily(V, E, sol, threshold, lp)
2:     set < score, set < int >> clique_family
3:     for id ← 1, |V| do
4:         if sol[id] > 0 + ϵ then
5:             continue
6:         end if
7:         set < int > clique
8:         clique.insert(id)
9:         for id2 ← id + 1, |V| do
10:            if sol[id2] > 0 + ϵ then
11:                continue
12:            end if
13:            if clique.adyacentToAll(id2) then
14:                clique.insert(id2)
15:            end if
16:        end for
17:        if ¬clique_family.isContained(clique) then
18:            clique_family.insert(< getScore(clique), clique >)
19:        end if
20:    end for
21:    sortByScore(clique_family)
22:    addTopCliqueRestrictions(lp, clique_family, threshold)
23: end procedure
```

Notar que en la práctica sólo consideramos cliques de tamaño mayor a 2, dado que si no se pisan con las restricciones de adyacencia del LP. A su vez, esta heurística debe ser generalizada para todos los colores, lo que no fue mostrado para facilitar la visualización del algoritmo.

3.4.2. Heurística de Separación para Agujero Impar

Para esta heurística, seguimos un procedimiento similar al anterior. Recorremos los vértices en orden, y los vamos agregando si son adyacentes. Al final, el conjunto de vértices resultante es un camino. Luego, vemos si el ultimo elemento del camino es adyacente al primero, y si el camino tiene longitud impar. Si esto sucede, agregamos el conjunto a la familia. Si no sucede, quitamos el ultimo elemento y verificamos nuevamente la condición hasta que se satisfaga. Finalmente, agregamos las mejores *threshold* desigualdades por score. Este procedimiento se puede ilustrar con el siguiente pseudocódigo:

Algorithm 2 Algoritmo para agregar agujeros impares violados

```
1: procedure GENERATEODDHOLEFAMILY(V, E, sol, threshold, lp)
2:     set < score, set < int >> oddhole_family
3:     for id ← 1, |V| do
4:         if sol[id] > 0 + ϵ then
5:             continue
6:         end if
7:         set < int > path
8:         path.insert(id)
9:         for id2 ← id + 1, |V| do
10:            if sol[id2] > 0 + ϵ then
11:                continue
12:            end if
13:            if isAdyacent(path.end, id2) then
14:                path.insert(id2)
15:            end if
16:        end for
17:        while path.size() ≥ 3 and (path.size() mod 2 == 0 or ¬isAdyacent(path.start, path.end)) do
18:            path.erase(path.end)
19:        end while
20:        if path.size() ≥ 3 and isAdyacent(path.start, path.end) then
21:            oddhole_family.insert(< getScore(path), path >)
22:        end if
23:    end for
24:    sortByScore(oddhole_family)
25:    addTopPathRestrictions(lp, oddhole_family, threshold)
26: end procedure
```

Notar que en ambas heurísticas utilizamos la tolerancia ϵ para evitar problemas numéricos.

3.5. Cut & Branch

Dado que las familias de desigualdades anteriormente expuestas no describen de forma exhaustiva la cápsula convexa del problema, los algoritmos de planos de corte no necesariamente convergen. Por esta razón decidimos implementar un algoritmo Cut & Branch. Los algoritmos Cut & Branch buscan aplicar planos de corte a la raíz del árbol de enumeración de Branch & Bound, lo que *potencialmente* puede mejorar el tiempo de ejecución de los problemas al reducir el espacio de búsqueda y permitiendo mejores podas. Una vez aplicados los cortes, se resuelve el problema resultante mediante Branch & Bound.

En nuestra implementación, los parámetros que deben ser calibrados para este algoritmo son la cantidad de iteraciones y el threshold. Por cada iteración, el algoritmo resuelve la relajación del problema y agrega a lo sumo *threshold* restricciones de cada tipo.

4. Experimentación

Dada la cantidad de vértices, los grafos se generan en el formato estándar DIMACS [1]. El generador toma como parámetro la densidad del grafo. Dada una clique con esa cantidad de vértices, se elijen vértices al azar hasta que se llega a la densidad deseada. Debido a que estas instancias están diseñadas para coloreo de grafos, asignamos los vértices de forma uniforme en el total de particiones pasado por parámetro a nuestro programa de coloreo particionado.

Por cuestiones de tiempo, cada uno de los experimientos CPLEX fue ejecutado sin límite de cantidad de threads, con un procesador Intel(R) Core(TM) i7-3610QM CPU @ 2.30GHz y 16GB de memoria RAM.

4.1. Eliminación de simetría

Al igual que el problema de coloreo de grafos, el problema del coloreo particionado de grafos presenta una gran cantidad de soluciones simétricas. De no romper la simetría del problema, los algoritmos tendrían un espacio de búsqueda mucho mayor, moviéndose por soluciones que, siendo computacionalmente distintas, en la práctica se trata de la misma. Esto afecta el tiempo de ejecución de forma considerable a medida que crece el tamaño del problema. Para romper la simetría en nuestro problema, en la sección 1.3 mostramos cómo utilizamos la clásica condicion de coloreo de que los colores se deben utilizar en orden. Este fenómeno se puede ver en el siguiente gráfico:

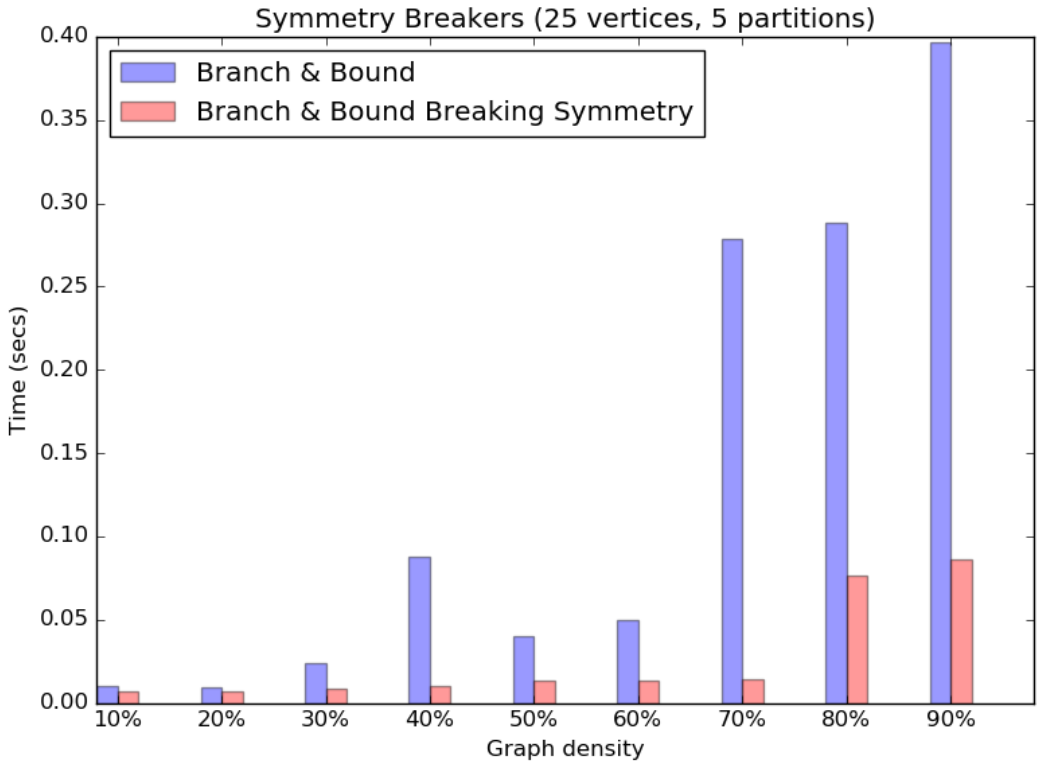


Figura 1: Tiempo de resolución del modelo incluyendo o no eliminación de simetría.

Esto nos brinda la noción de la importancia y efectividad de romper simetría al realizar la formulación de un LP. Cabe mencionar que existen muchas otras estrategias o expresiones para disminuir aun más el grado de simetría de la formulación. La formulación elegida no debe ser considerada necesarimante la mejor posible.

[1] Para ver algunos ejemplos del formato: http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html

4.2. Efectividad de las familias de desigualdades

La idea de este experimento es comparar las diferentes estrategias de planos de corte. Para ello, se eligió a 40 como la cantidad de cortes de cada tipo que se podían agregar, con una sola iteración:

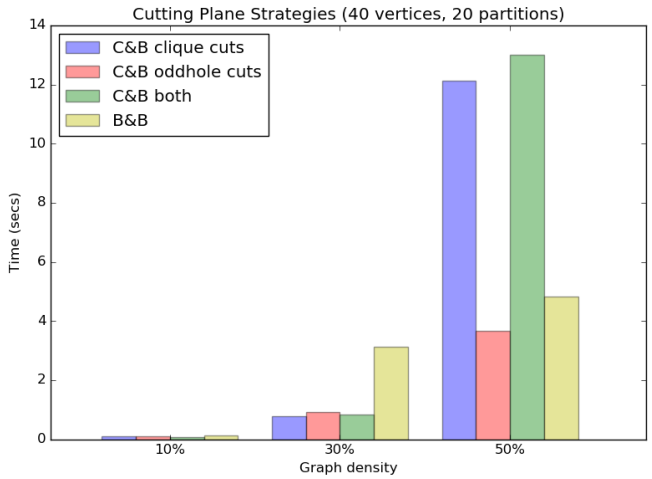


Figura 2: Estrategias de planos de corte (tiempo).

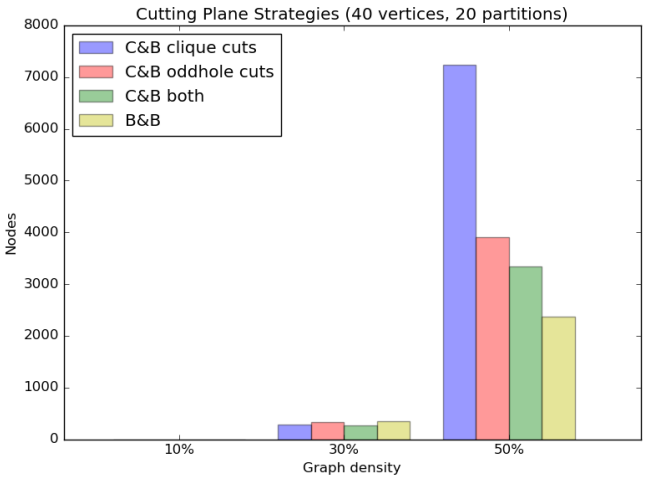


Figura 3: Estrategias de planos de corte (nodos).

Lo primero que podemos observar es que no siempre hay una estrategia ganadora por sobre las otras. Al aumentar la densidad del grafo, pueden más distinguidamente los distintos métodos.

En el caso de los grafos más densos, uno esperaría a priori que nuestra heurística encuentre más cliques, y que los tiempos sean mejores. Esto no sucede, y de hecho, agregar las restriciones de clique empeora el tiempo de ejecución con respecto a utilizar simplemente B&B. En los grafos menos densos, puede notarse un efecto positivo de los cortes, es decir preferencia del C&B sobre el B&B.

En contra de lo que esperábamos inicialmente, las desigualdades de agujero impar parecen funcionar bien, realizando mejores tiempos que el B&B. Sin embargo, esta hipótesis podría constatarse con mayor peso de llevar a cabo una experimentación más exhaustiva.

Por último, también podemos observar que un mejor tiempo de ejecución no necesariamente implica que se recorren menos nodos del árbol. Esto puede ser interesante tenerlo en cuenta en el caso de que uno compare en qué lugar se consume el tiempo de ejecución, o para evaluar distintas formas de poda del árbol.

4.3. Efecto de aumentar el número de particiones

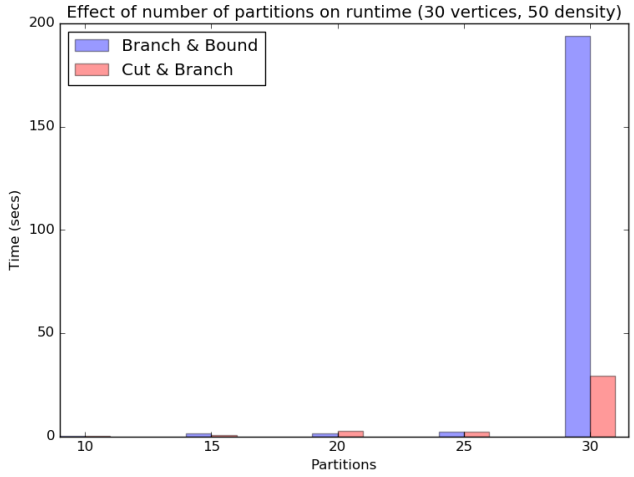


Figura 4: Tiempo de ejecucion a medida que aumenta el número de particiones.

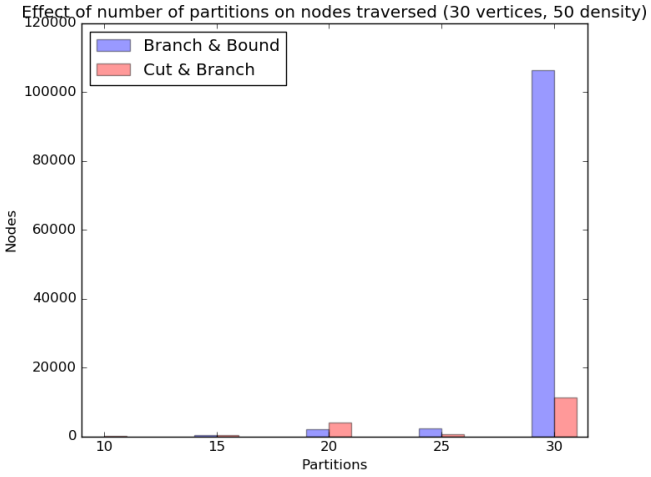


Figura 5: Nodos recorridos a medida que aumenta el número de particiones.

A medida que aumentamos el número de particiones, el problema comienza a parecerse más a uno de coloreo. Dado que las desigualdades que implementamos son clásicas de coloreo, es de esperar que la performance mejore a medida que aumenta el número de particiones. Para Cut & Branch, sólo utilizamos los mejores 40 cortes de clique con

una iteración. A medida que aumenta el número de particiones, podemos observar que el efecto positivo de incluir los cortes es considerable.

En cuanto a los nodos recorridos, puede verse que en el caso del C&B la cantidad es notablemente menor. Se atribuye esto a la virtud de los cortes de generar una buena solución al inicio, permitiendo descartar ramas del árbol.

4.4. Efecto de aumentar la densidad del grafo

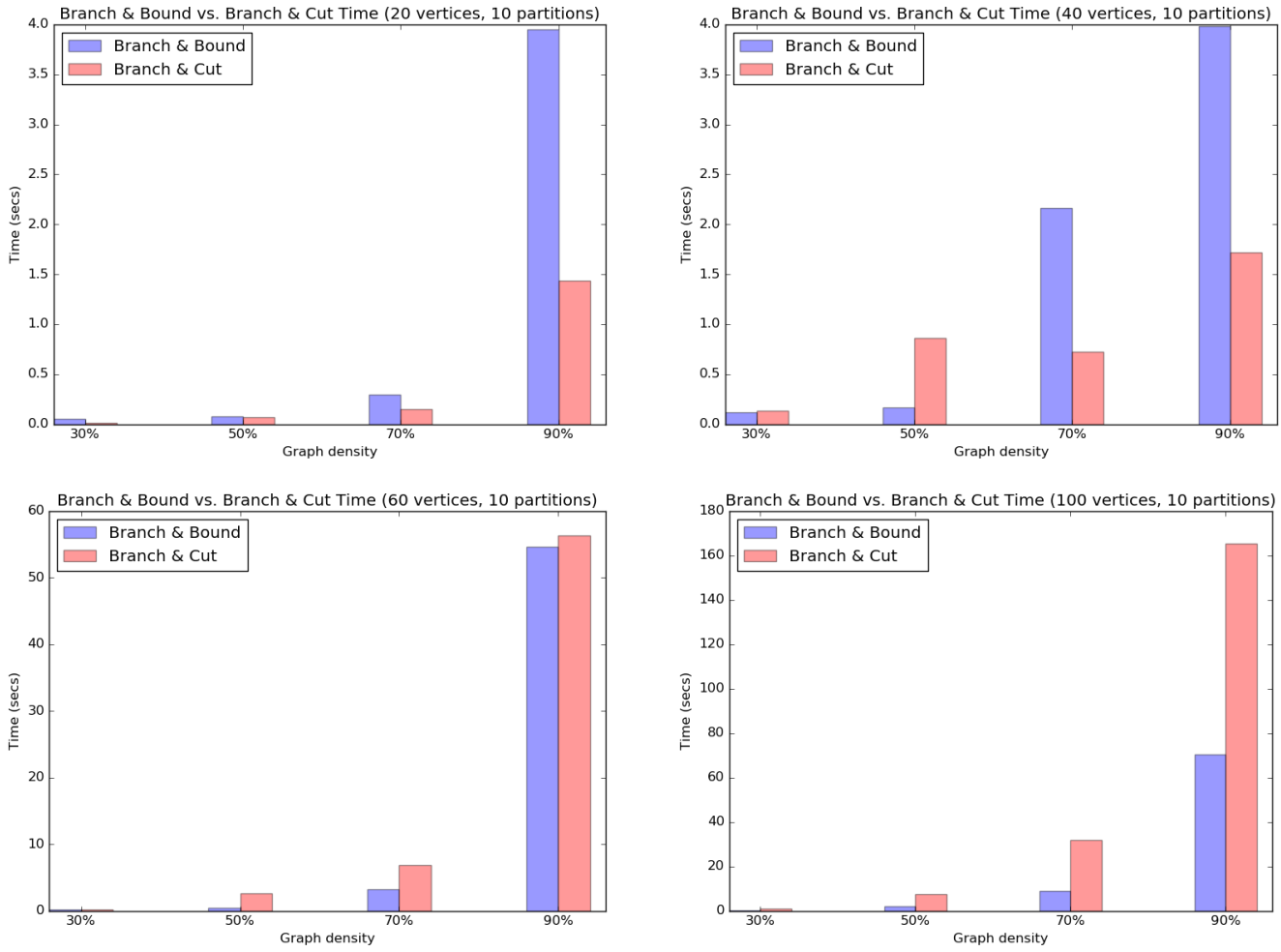


Figura 6: Efecto de aumentar la densidad del grafo.

A medida que aumenta la densidad del grafo, el problema de coloreo se vuelve sin duda más difícil. En gráficos más densos y cuya relación de número de particiones sobre número de vértices es mayor se puede apreciar una tendencia a funcionar mejor del Branch & Cut (nuevamente se utiliza 1 iteración y 40 desigualdades violadas). Sin embargo, en grafos esparsos, podemos notar una mayor efectividad del Branch & Bound puro, en cuanto a tiempos de ejecución. De cualquier modo, no es posible obtener resultados muy generales, sino más bien mejores o peores algoritmos para cierta densidad y cantidad de particiones.

4.5. Efecto de aumentar la cantidad de restricciones incorporadas por iteración

Para todos nuestros experimentos en general utilizamos sólo 1 iteración con un límite de 40 desigualdades por familia. La idea de este experimento es evaluar esta configuración. Para ello, utilizamos un grafo con 40 vértices y 20 particiones.

Como podemos concluirse de los gráficos, agregar más restricciones no es siempre ventajoso. En un principio, sumar restricciones parece mejorar la ejecución del C&B (para el caso de ambas familias), pero ya a partir de las 40 el tiempo de ejecución empeora de forma abrupta para las cliques. Esto no sucede para las restricciones de agujero impar, cuyo tiempo de ejecución no posee gran variabilidad con respecto al *threshold*.

Claro está, que este incremento en el tiempo puede estar relacionado con la heurística de clique utilizada, que puede no se lo suficientemente buena. Debido al saldo importante que ocurre con los cortes por cliques, el *threshold* de 30 se considera empíricamente aceptable.

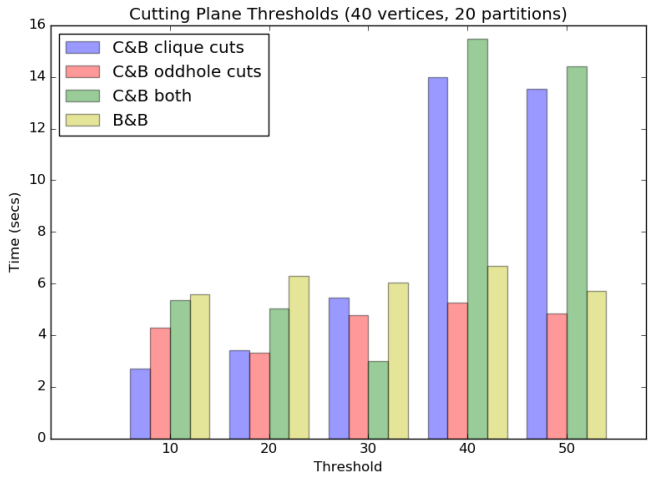


Figura 7: Tiempo de ejecución al incrementar el número de restricciones incorporadas.

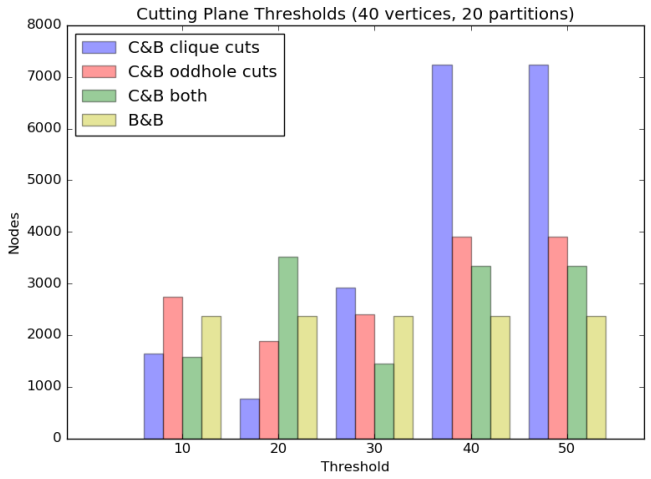


Figura 8: Nodos recorridos al incrementar el número de restricciones incorporadas.

Por otro lado, es visible en el primer gráfico una dependencia del tiempo de ejecución del B&B con respecto al *threshold* analizado. Sabemos que esta variabilidad no corresponde, y se atribuye a ruido del CPU.

4.6. Efecto de aumentar la cantidad de iteraciones de planos de corte

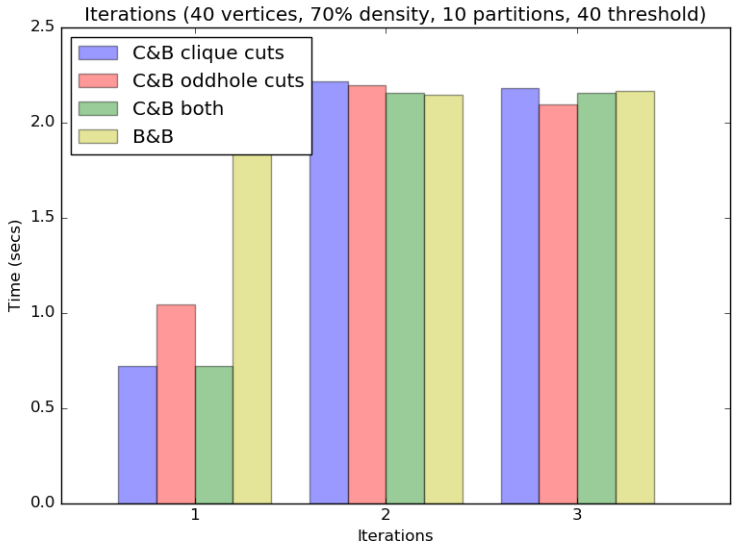


Figura 9: Tiempo de ejecución al aumentar la cantidad de iteraciones de planos de corte.

Como podemos ver, aumentar el número de iteraciones de planos de corte no necesariamente mejora el tiempo de ejecución. En cada iteración, lo que hacíamos era generar una familia de desigualdades en función de la solución de la relajación del problema, y luego agregar las *mejores* restricciones. En relación con la sección anterior, también está relacionado con el *threshold* elegido para la experimentación.

4.7. Comparación B&B, C&B, CPLEX default

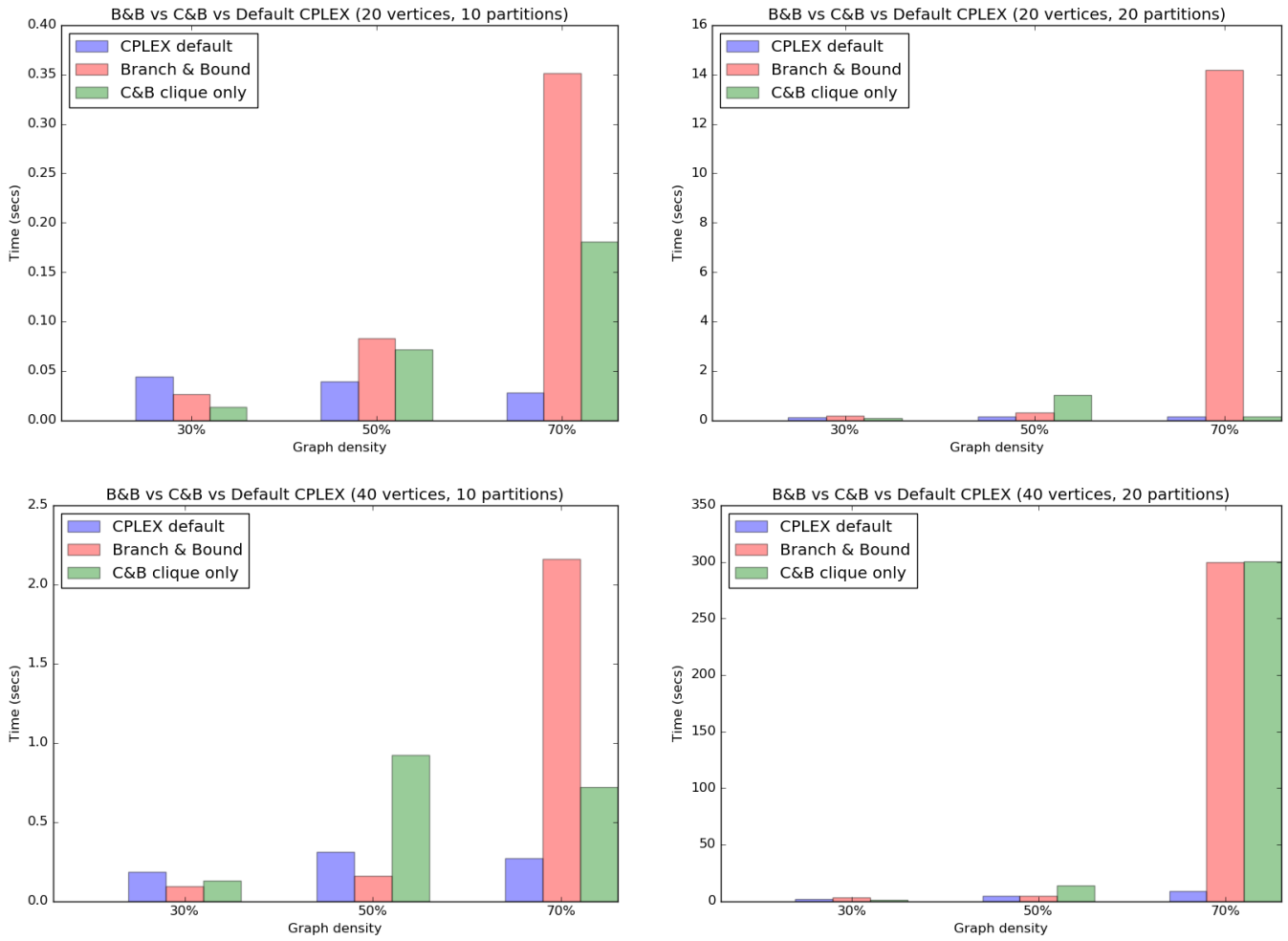


Figura 10: Comparacion B&B, C&B, CPLEX default para diferentes grafos.

Dado que el CPLEX utiliza por default cortes de Gomory y preprocesamiento de variables, no nos sorprende que en general para grafos densos sea notablemente superior. Una propuesta interesante podría ser repetir esta experimentación permitiendo los cortes y el preprocesamiento para todas nuestras estrategias.

Al mismo tiempo, es importante observar el gráfico superior derecho, que corresponde al coloreo de grafos estándar (cada vértice pertenece a una partición diferente). En él se puede apreciar la gran utilidad de las desigualdades de clique para disminuir tiempos de ejecución, en el caso de grafos densos.

4.8. Estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de branching

Existen muchas estrategias de recorrido del árbol de enumeración. En este trabajo analizaremos únicamente Depth First Search (DFS) y Best Bound Search (BBS). DFS recorre el árbol de enumeración de B&B primero en profundidad, mientras que BBS recorre el árbol de enumeración buscando una buena cota lo más rápido posible, de modo de realizar una buena poda. En general, se utilizan estrategias heurísticas. En el caso de CPLEX, dado un nodo padre se calcula la solución a la relajación de todos sus hijos y luego se continua recorriendo el nodo con el mayor resultado de la función objetivo. [2].

Ambas estrategias son sumamente ventajosas, ya que permiten obtener una cota superior a la solución final para utilizar de poda al hacer backtracking sobre el árbol de enumeración. Dado que no utilizamos heurísticas iniciales, esta estrategia parece razonable.

Por otro lado, las estrategias de selección de variable buscan encontrar cuál es la mejor variable sobre la que hacer branching. Hay muchas reglas, como por ejemplo *max/min infeasibility*. Mientras que la regla de *minimum infeasibility* hace branching sobre aquella variable más cercana al valor entero, la regla de *maximum infeasibility* hace exactamente lo contrario [3].

[2] http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.6.1/ilog.odms.cplex.help/CPLEX/Parameters/topics/NodeSel.html
[3] http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SS9UKU_12.4.0/com.ibm.cplex.zos.help/Parameters/topics/VarSel.html

En esta sección analizaremos 4 combinaciones de estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de branching para B&B puro y C&B con cortes de clique, 1 iteración y *threshold* 30. Las combinaciones que analizaremos son DFS + MAXINFEAS, DFS + MININFEAS, BESTBOUND + MAXINFEAS y BESTBOUND + MININFEAS.

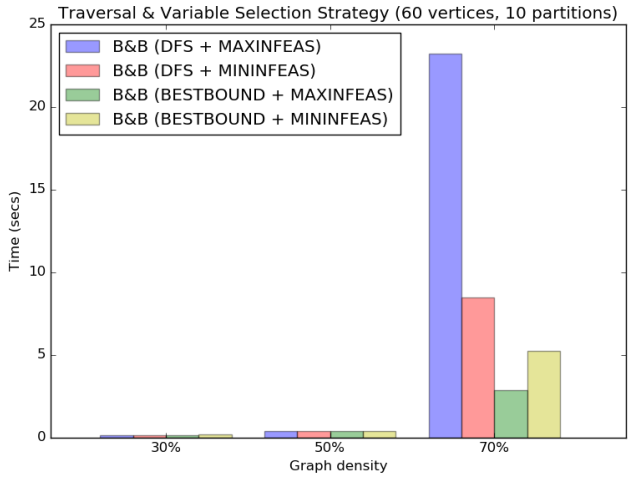


Figura 11: Tiempo de ejecución dependiendo de la estrategias de recorrido y selección de variable.

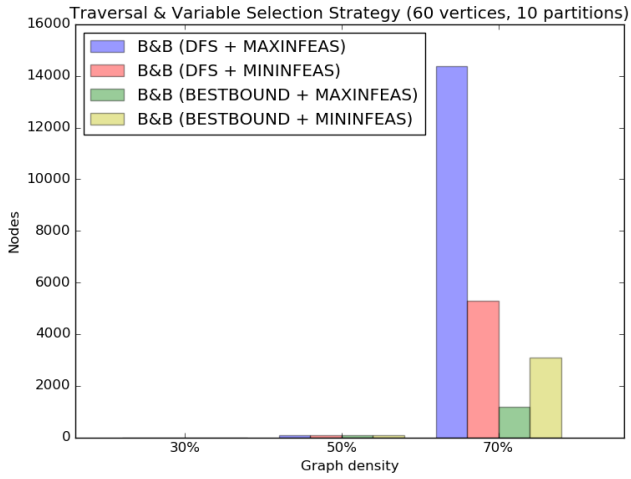
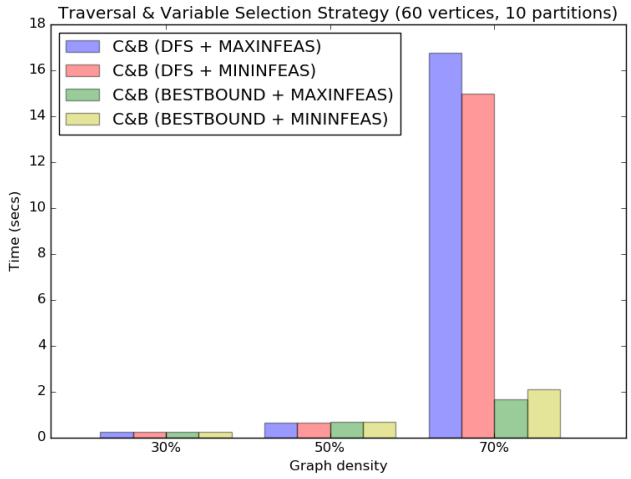
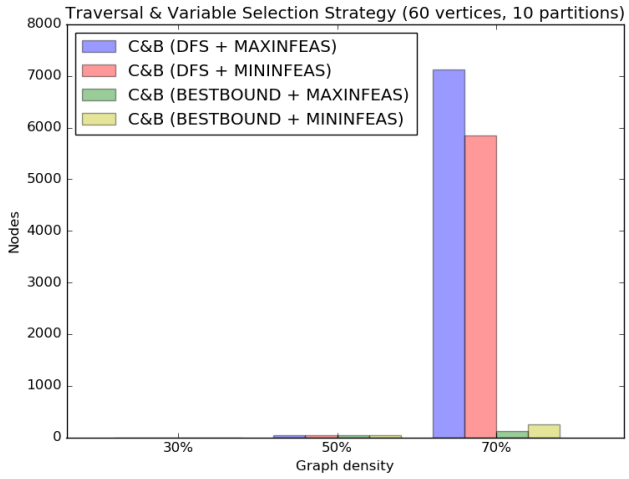


Figura 12: Nodos recorridos dependiendo de la estrategias de recorrido y selección de variable.





Como podemos observar, en general C&B tiene menores tiempos de ejecución, y recorre menos nodos. Al mismo tiempo, de las 4 combinaciones testeadas, la mejor estrategia para este problema parece ser BESTBOUND + MAXINFEAS. CPLEX utiliza por default BESTBOUND, aunque recurre a una heurística para elegir la variable de branching.

4.9. Instancias DIMACS

Las instancias DIMACS son comúnmente utilizadas en la literatura como instancias de benchmarking. A continuación se muestran nuestros tiempos de ejecución con B&B y B&C utilizando 1 iteración y *threshold* 30, utilizando sólo desigualdades de clique. La regla utilizada para recorrer el árbol de enumeración es la que utiliza el CPLEX por default.

Cada tabla utiliza fue elaborada utilizando un número de particiones diferente. Dado que las instancias DIMACS no tienen asocidas un número de partición (éstas se utilizan comúnmente para coloreo estándar), asignamos uno nosotros, y luego dividimos los vértices en orden en las diferentes particiones de forma uniforme.

Tomamos como tiempo límite de ejecución 10 minutos, y reportamos el número de colores encontrado por B&B hasta ese momento. En todos los casos, B&B y B&C coincidieron con el número de colores, por lo que los reportamos en una única columna.

En este punto, quizás sería interesante probar con otras configuraciones de C&B para los problemas más difíciles. Para esos problemas, C&B parece mostrar una mejor performance.

Cuadro 1: Benchmark con 10 particiones.

Problema	n	m	Tiempo B&B (secs)	Tiempo B&C (secs)	Colores utilizados
anna	138	493	0.04	0.50	1
david	87	406	0.02	0.29	1
fpsol2.i.1	496	11654	0.51	8.71	1
fpsol2.i.2	451	8691	0.44	7.66	1
fpsol2.i.3	425	8688	0.45	8.15	1
games120	120	638	0.04	0.32	1
homer	561	1629	0.11	0.72	1
huck	74	301	0.02	0.10	1
inithx.i.1	864	18707	0.79	9.66	1
inithx.i.2	645	13979	0.59	6.53	1
inithx.i.3	621	13969	0.59	6.16	1
jean	80	254	0.02	0.10	1
le450_15a	450	8168	0.31	14.68	1
le450_15b	450	8169	0.35	15.68	1
le450_15c	450	16680	0.64	36.05	1
le450_15d	450	16750	0.83	38.00	1
le450_25a	450	8260	0.34	24.95	1
le450_25b	450	8263	0.33	15.41	1
le450_25c	450	17343	0.70	42.17	1
le450_25d	450	17425	0.70	39.60	1
le450_5a	450	5714	0.27	8.19	1
le450_5b	450	5734	0.30	13.78	1
le450_5c	450	9803	0.46	29.12	1
le450_5d	450	9757	0.47	33.13	1
miles1000	128	3216	8.81	7.77	2
miles1500	128	5198	600.00	600.00	3
miles250	128	387	0.03	0.24	1
miles500	128	1170	0.06	0.54	1
miles750	128	2113	0.32	2.73	1
mulsol.i.1	197	3925	0.15	2.20	1
mulsol.i.2	188	3885	0.14	2.01	1
mulsol.i.3	184	3916	0.16	3.02	1
mulsol.i.4	185	3946	0.15	4.37	1
mulsol.i.5	186	3973	0.15	3.42	1
myciel3	11	20	0.01	0.01	3
myciel4	23	71	0.01	0.02	1
myciel5	47	236	0.01	0.04	1
myciel6	95	755	0.04	0.29	1
myciel7	191	2360	0.09	1.75	1
queen10_10	100	1470	0.12	0.61	1
queen11_11	121	1980	0.18	1.03	1
queen12_12	144	2596	0.36	2.29	1
queen13_13	169	3328	0.44	2.73	1
queen14_14	196	4186	0.18	5.05	1
queen15_15	225	5180	0.23	7.02	1
queen16_16	256	6320	0.23	8.62	1
queen5_5	25	160	0.06	0.14	3
queen6_6	36	290	0.12	0.54	2
queen7_7	49	476	0.12	0.41	2
queen8_12	96	1368	3.54	3.96	2
queen8_8	64	728	0.26	0.64	2
queen9_9	81	1056	1.76	2.54	2
school1	385	19095	1.17	90.04	1
school1_nsh	352	14612	0.83	46.13	1
zeroin.i.1	211	4100	0.16	4.87	1
zeroin.i.2	211	3541	0.17	3.82	1
zeroin.i.3	206	3540	0.25	1.91	1

Cuadro 2: Benchmark con 20 particiones.

Problema	n	m	Tiempo B&B (secs)	Tiempo B&C (secs)	Colores utilizados
anna	138	493	0.07	0.49	1
david	87	406	0.04	0.42	1
fpsol2.i.1	496	11654	1.10	34.07	1
fpsol2.i.2	451	8691	0.75	17.08	1
fpsol2.i.3	425	8688	0.83	17.88	1
games120	120	638	1.85	2.00	1
homer	561	1629	0.39	2.35	1
huck	74	301	0.08	0.18	1
inithx.i.1	864	18707	1.95	36.07	1
inithx.i.2	645	13979	1.42	16.36	1
inithx.i.3	621	13969	1.38	17.08	1
jean	80	254	0.04	0.22	1
le450_15a	450	8168	0.93	66.87	1
le450_15b	450	8169	0.87	58.17	1
le450_15c	450	16680	2.06	120.52	1
le450_15d	450	16750	4.21	197.03	1
le450_25a	450	8260	0.97	96.22	1
le450_25b	450	8263	1.14	52.73	1
le450_25c	450	17343	2.94	155.22	1
le450_25d	450	17425	2.49	122.38	1
le450_5a	450	5714	1.25	65.50	1
le450_5b	450	5734	0.68	59.74	1
le450_5c	450	9803	2.04	110.64	1
le450_5d	450	9757	1.31	103.62	1
miles1000	128	3216	600.00	600.00	3
miles1500	128	5198	600.00	600.00	6
miles250	128	387	0.06	0.60	1
miles500	128	1170	16.50	17.50	2
miles750	128	2113	142.62	29.64	2
mulsol.i.1	197	3925	0.67	11.13	1
mulsol.i.2	188	3885	0.65	10.69	1
mulsol.i.3	184	3916	0.79	15.27	1
mulsol.i.4	185	3946	0.77	16.79	1
mulsol.i.5	186	3973	0.71	25.82	1
myciel3	11	20	0.14	0.49	4
myciel4	23	71	0.44	0.54	3
myciel5	47	236	0.072	0.24	1
myciel6	95	755	0.15	1.21	1
myciel7	191	2360	0.39	11.53	1
queen10_10	100	1470	11.04	23.04	2
queen11_11	121	1980	19.26	56.27	2
queen12_12	144	2596	27.91	32.60	2
queen13_13	169	3328	51.07	19.02	2
queen14_14	196	4186	600.00	153.14	2
queen15_15	225	5180	600.00	39.00	2
queen16_16	256	6320	600.00	600.00	2
queen5_5	25	160	1.00	1.00	5
queen6_6	36	290	2.80	4.29	4
queen7_7	49	476	13.84	25.16	4
queen8_12	96	1368	300.04	301.40	3
queen8_8	64	728	23.12	42.98	3
queen9_9	81	1056	600.00	99.08	3
school1	385	19095	8.57	119.25	1
school1_nsh	352	14612	4.31	86.76	1
zeroin.i.1	211	4100	0.40	6.32	1
zeroin.i.2	211	3541	0.32	4.08	1
zeroin.i.3	206	3540	0.32	6.75	1

Aclaración: en la segunda tabla la cantidad de particiones en la instancia *myciel*3 coincidió con la cantidad de vértices.

Al ver ambas tablas, puede observarse que los algoritmos concluyeron para la mayoría de las instancias testeadas. También, puede verse que en muchos casos fue necesario con un sólo color para realizar el coloreo, debido a la baja cantidad de particiones en relación con la cantidad de vértices. Este mismo fenómeno se aprecia en los grafos más chicos, donde al duplicar la cantidad de particiones, instancias de menos de 40 o 50 vértices incrementaron la cantidad de colores utilizados, al estar más próximo a un coloreo estándar.

Si miramos las instancias *miles*, puede verse como aumentan los tiempos al incrementar la densidad del grafo. Por otro lado, instancias bien densas como las *school* muestran una marcada diferencia entre el tiempo por B&B y C&B. Esto puede atribuirse a un largo tiempo de ejecución de las heurísticas de separación, debido a la gran cantidad de aristas.

Mirando la tabla de 20 particiones, puede notarse que existen casos en que el B&B no pudo terminar y el C&B sí lo hizo. Existen también otros casos aislados en los que los tiempos de C&B son menores que los de B&B. En términos generales, el desempeño de B&B fue rotundamente mejor, por lo que se entiende que la complejización del algoritmo y todo su desarrollo para incluir cortes debe ser hecho en la medida en que sea necesario, y no antes.

5. Conclusión

El famoso problema de coloreo de grafos, que ha sido estudiado ampliamente en la literatura, es un caso particular del coloreo particionado de grafos, donde cada vértice pertenece a una partición diferente. Por esta razón, en primer lugar notamos que el problema del coloreo particionado sería al menos tan difícil como el problema de coloreo estándar, que de por sí representa un problema complicado.

Las desigualdades de planos de cortes que se han implementado en este trabajo son desigualdades utilizadas normalmente para coloreo. Por esta razón, a lo largo de todo el trabajo hemos notado que los algoritmos de Cut & Branch tienden a funcionar mejor en los casos en que la relación cantidad de particiones sobre cantidad de nodos es mayor. La intuición nos sugiere que deben existir mejores familias, que exploten el hecho de que el grafo esté dividido en particiones, si bien encontrarlas y desarrollarlas escape del alcance de este trabajo.

Uno de los primeros problemas que encontramos al programar el algoritmo de Cut & Branch fue encontrar buenas heurísticas para las familias de desigualdades que probamos válidas. A priori sabíamos, por ejemplo, que generar todas las cliques de manera exhaustiva es un problema NP-Hard. Aquí es donde interviene sin duda la creatividad del investigador para el diseño de los algoritmos, y obtener una heurística que genere un buen resultado. A lo largo de este trabajo probamos varias estrategias, y finalmente nos quedamos con una que depende de la solución de la relajación en cada iteración. Sin embargo, no tenemos ninguna duda de que existen heurísticas mucho más efectivas. A su vez, una vez encontrado este conjunto de desigualdades violadas, es sumamente importante establecer un criterio para decidir cuáles deben ser agregadas al programa lineal. Se pudo comprobar, en términos generales, que agregarlas todas hace que la optimización sea más lenta.

Por otro lado, en nuestro caso hemos notado que el tiempo de cómputo no está dominado por la generación de estas familias, sino por la resolución del programa lineal. La explicación más probable de esto es que el algoritmo de Cut & Branch implementado realiza cortes únicamente en el nodo raíz (una o más iteraciones), por lo que la cantidad de llamados a las heurísticas no crece al recorrer el árbol. En el caso más general, esto no se cumple, y es tarea del investigador procurar un balance entre el tiempo de ejecución de la heurística y el tiempo de ejecución necesario para resolver el programa lineal. Por supuesto, también es importante descubrir en qué tipos de problemas (tamaño, características particulares, etc) conviene utilizar determinadas estrategias como cortes específicos, o diferentes modos de recorrer el árbol de enumeración. En definitiva, el diseño del algoritmo requiere conocer las distintas variables intervinientes, y cómo éstas afectan el resultado final. Es por ello que las horas experimentación con diversas instancias son una etapa clave para conocer el proceso y poder refinarlo. Posteriormente, se podrá acomodarlo o refinarlo, para obtener buenos resultados ya sea en una instancia en particular, o en términos más generales de aplicación.

A lo largo de este trabajo, la performance de CPLEX nos sorprendió notablemente. Por default, CPLEX en sí funciona bastante bien. Conseguir una mejor descripción de la cápsula convexa muchas veces es difícil, y *en términos prácticos* puede llegar a no valer la pena. Debe balancearse el esfuerzo y la dificultad con el tiempo de cómputo y la calidad de la solución obtenida. Por supuesto, también influye el tamaño de instancia que uno necesite resolver. Aquí es donde entra CPLEX, que con una formulación simple del PPL logra optimizar el problema relativamente bien para instancias razonablemente chicas. Como comentario, comprobamos la suma importancia de romper con la simetría de los problemas. Esto en general no representa gran dificultad adicional, y mejora los tiempos de ejecución de forma considerable.

En cuanto a oportunidades de mejora, se podría generalizar el algoritmo Branch & Cut, agregando heurísticas iniciales y primales (qué mejoran el cálculo de cotas, la inicialización y la poda de ramas), o encontrando mejores estrategias de cortes en diferentes partes del árbol, utilizando los *callbacks* de CPLEX. Asimismo, podrían incluirse estrategias de preprocesamiento.

Existe gran cantidad de parámetros a calibrar para lograr una buena performance, y su elección en general se basa en una experimentación que logre emular los casos más comunes en la práctica. Durante este trabajo, no se experimentó en profundidad con instancias y problemas sumamente difíciles debido al tiempo acotado para realizar el mismo. Sería interesante, sin embargo, ver hasta qué punto pueden llegar los algoritmos con una buena configuración.

6. Apéndice A: Código

6.1. coloring.cpp

```
#include <ilcplex/ilocplex.h>
#include <ilcplex/cplex.h>

#include <stdlib.h>
#include <cassert>

#include <algorithm>
#include <string>
#include <vector>
#include <set>

#define TOL 1e-05

ILOSTLBEGIN // macro to define namespace

// colors array!
const char* colors[] = {"Blue", "Red", "Green", "Yellow", "Grey", "Green", "Pink", "AliceBlue","AntiqueWhite","Aqua","Aquamarine","Azure","Beige",
"Bisque","Black","BlanchedAlmond","BlueViolet","Brown","BurlyWood","CadetBlue","Chartreuse","Chocolate","Coral","CornflowerBlue",
"Cornsilk","Crimson","Cyan","DarkBlue","DarkCyan","DarkGoldenRod","DarkGray","DarkGrey","DarkGreen","DarkKhaki","DarkMagenta","DarkOliveGreen",
"Darkorange","DarkOrchid","DarkRed","DarkSalmon","DarkSeaGreen","DarkSlateBlue","DarkSlateGray","DarkSlateGrey","DarkTurquoise",
"DarkViolet","DeepPink","DeepSkyBlue","DimGray","DimGrey","DodgerBlue","FireBrick","FloralWhite","ForestGreen","Fuchsia",
"Gainsboro","GhostWhite","Gold","GoldenRod","Gray","GreenYellow","HoneyDew","HotPink","IndianRed","Indigo",
"Ivory","Khaki","Lavender","LavenderBlush","LawnGreen","LemonChiffon","LightBlue","LightCoral","LightCyan","LightGoldenRodYellow",
"LightGray","LightGrey","LightGreen","LightPink","LightSalmon","LightSeaGreen","LightSkyBlue","LightSlateGray","LightSlateGrey",
"LightSteelBlue","LightYellow","Lime","LimeGreen","Linen","Magenta","Maroon","MediumAquaMarine","MediumBlue","MediumOrchid",
"MediumPurple","MediumSeaGreen","MediumSlateBlue","MediumSpringGreen","MediumTurquoise","MediumVioletRed","MidnightBlue",
"MintCream","MistyRose","Moccasin","NavajoWhite","Navy","OldLace","Olive","OliveDrab","Orange","OrangeRed","Orchid",
"PaleGoldenRod","PaleGreen","PaleTurquoise","PaleVioletRed","PapayaWhip","PeachPuff","Peru","Plum","PowderBlue",
"Purple","RosyBrown","RoyalBlue","SaddleBrown","Salmon","SandyBrown","SeaGreen","SeaShell","Sienna","Silver","SkyBlue",
"SlateBlue","SlateGray","SlateGrey","Snow","SpringGreen","SteelBlue","Tan","Teal","Thistle","Tomato","Turquoise","Violet",
"Wheat","White","WhiteSmoke","YellowGreen"};

int getVertexIndex(int id, int color, int partition_size) {
    return partition_size + ((id-1)*partition_size) + (color-1);
}

/* since the adyacency matrix is symmetric and the diagonal is not needed, we can simply
 * store the upper diagonal and get adyacency from a list. the math is quite simple, it
 * just uses the formula for the sum of integers. ids are numbered starting from 1.
 */
inline int fromMatrixToVector(int from, int to, int vertex_size) {

```

```
43      // for speed, many parts of this code are commented, since by our usage we always
44      // know from < to and are in range.
45
46      // assert(from != to && from <= vertex_size && to <= vertex_size);
47
48      // if (from < to)
49          return from*vertex_size - (from+1)*from/2 - (vertex_size - to) - 1;
50      // else
51      //  return to*vertex_size - (to+1)*to/2 - (vertex_size - from) - 1;
52  }
53
54  inline bool isAdyacent(int from, int to, int vertex_size, bool* adjacencyList) {
55      return adjacencyList[fromMatrixToVector(from, to, vertex_size)];
56  }
57
58  bool adyacentToAll(int id, int vertex_size, bool* adjacencyList, const set<int>&
        clique) {
59      for (set<int>::iterator it = clique.begin(); it != clique.end(); ++it) {
60          if (!isAdyacent(*it, id, vertex_size, adjacencyList)) return false;
61      }
62      return true;
63  }
64
65  bool cliqueNotContained(const set<int>& clique, int color, const vector<tuple<double,
        int, set<int> > >& clique_familly) {
66      for (vector<tuple<double, int, set<int> > >::const_iterator it = clique_familly.
            begin(); it != clique_familly.end(); ++it) {
67          // by construction, sets are already ordered.
68          if (get<1>(*it) == color && includes(get<2>(*it).begin(), get<2>(*it).end(),
                clique.begin(), clique.end())) return false;
69      }
70      return true;
71  }
72
73  int loadObjectiveFunction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
        partition_size, char vtype) {
74
75      // load objective function
76      int n = partition_size + (vertex_size*partition_size);
77      double *objfun  = new double[n];
78      double *ub      = new double[n];
79      char     *ctype = new char[n];
80      char **colnames = new char*[n];
81
82      for (int i = 0; i < partition_size; ++i) {
83          objfun[i] = 1;
84          ub[i] = 1;
85          ctype[i]    = vtype;
86          colnames[i] = new char[10];
87          sprintf(colnames[i], "w_%d", (i+1));
88      }
89
90      for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
91          for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
92              int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
93              objfun[index]   = 0;
94              ub[index] = 1;
95              ctype[index]    = vtype;
96              colnames[index] = new char[10];
97              sprintf(colnames[index], "x%d_%d", id, color);
98          }
99      }
```

```
100
101     // CPLEX bug? If you set ctype, it doesn't identify the problem as continous.
102     int status = CPXnewcols(env, lp, n, objfun, NULL, ub, NULL, colnames);
103     checkStatus(env, status);
104
105     // free memory
106     for (int i = 0; i < n; ++i) {
107         delete[] colnames[i];
108     }
109
110     delete[] objfun;
111     delete[] ub;
112     delete[] ctype;
113     delete[] colnames;
114
115     return 0;
116 }
117
118 int loadAdyacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    edge_size, int partition_size, bool* adjacencyList) {
119
120     // load first restriction
121     int ccnt = 0;                           // new columns being added.
122     int rcnt = edge_size * partition_size; // new rows being added.
123     int nzcnt = rcnt*2;                     // nonzero constraint coefficients being
        added.
124
125     double *rhs = new double[rcnt];         // independent term in restrictions.
126     char *sense = new char[rcnt];           // sense of restriction inequality.
127
128     int *matbeg = new int[rcnt];            // array position where each restriction
        starts in matind and matval.
129     int *matind = new int[rcnt*2];          // index of variables != 0 in restriction
        (each var has an index defined above)
130     double *matval  = new double[rcnt*2]; // value corresponding to index in
        restriction.
131     char **rownames = new char*[rcnt];      // row labels.
132
133     int i = 0;
134     for (int from = 1; from <= vertex_size; ++from) {
135         for (int to = from + 1; to <= vertex_size; ++to) {
136
137             if (!isAdyacent(from, to, vertex_size, adjacencyList)) continue;
138
139             for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
140                 matbeg[i] = i*2;
141
142                 matind[i*2]   = getVertexIndex(from, color, partition_size);
143                 matind[i*2+1] = getVertexIndex(to  , color, partition_size);
144
145                 matval[i*2]   = 1;
146                 matval[i*2+1] = 1;
147
148                 rhs[i] = 1;
149                 sense[i] = 'L';
150                 rownames[i] = new char[40];
151                 sprintf(rownames[i], "%s", colors[color-1]);
152
153                 ++i;
154             }
155         }
156     }
```

```
157
158     // debug flag
159     // status = CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_DATACHECK, CPX_ON);
160
161     // add restriction
162     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
            matval, NULL, rownames);
163     checkStatus(env, status);
164
165     // free memory
166     for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
167         delete[] rownames[i];
168     }
169
170     delete[] rhs;
171     delete[] sense;
172     delete[] matbeg;
173     delete[] matind;
174     delete[] matval;
175     delete[] rownames;
176
177     return 0;
178 }
179
180
181 int loadSingleColorInPartitionRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, vector<vector
        <int>>& partitions, int partition_size) {
182
183     // load second restriction
184     int p = 1;
185     for (std::vector<vector<int> >::iterator it = partitions.begin(); it !=
            partitions.end(); ++it) {
186
187         int size = it->size();                  // current partition size.
188         if (size == 0) continue;                // skip empty partitions.
189
190         int ccnt = 0;                           // new columns being added.
191         int rcnt = 1;                           // new rows being added.
192         int nzcnt = size*partition_size;        // nonzero constraint coefficients
                being added.
193
194         double *rhs = new double[rcnt];         // independent term in restrictions.
195         char *sense = new char[rcnt];           // sense of restriction inequality.
196
197         int *matbeg = new int[rcnt];            // array position where each
                restriction starts in matind and matval.
198         int *matind = new int[nzcnt];           // index of variables != 0 in
                restriction (each var has an index defined above)
199         double *matval  = new double[nzcnt];    // value corresponding to index in
                restriction.
200         char **rownames = new char*[rcnt];      // row labels.
201
202         matbeg[0] = 0;
203         sense[0]  = 'E';
204         rhs[0]    = 1;
205         rownames[0] = new char[40];
206         sprintf(rownames[0], "partition_%d", p);
207
208         int i = 0;
209         for (std::vector<int>::iterator it2 = it->begin(); it2 != it->end(); ++it2) {
210             for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
211                 matind[i] = getVertexIndex(*it2, color, partition_size);
```

```
212                 matval[i] = 1;
213                 ++i;
214             }
215         }
216 
217         // add restriction
218         int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg,
                matind, matval, NULL, rownames);
219         checkStatus(env, status);
220 
221         // free memory
222         delete[] rownames[0];
223         delete[] rhs;
224         delete[] sense;
225         delete[] matbeg;
226         delete[] matind;
227         delete[] matval;
228         delete[] rownames;
229 
230         ++p;
231     }
232 
233     return 0;
234 }
235 
236 int loadSymmetryBreaker(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size) {
237 
238     int ccnt = 0;                           // new columns being added.
239     int rcnt = partition_size - 1;          // new rows being added.
240     int nzcnt = 2*rcnt;                     // nonzero constraint coefficients being
            added.
241 
242     double* rhs = new double[rcnt];         // independent term in restrictions.
243     char *sense = new char[rcnt];           // sense of restriction inequality.
244 
245     int *matbeg = new int[rcnt];            // array position where each restriction
            starts in matind and matval.
246     int *matind = new int[rcnt*2];          // index of variables != 0 in restriction
            (each var has an index defined above)
247     double *matval  = new double[rcnt*2];   // value corresponding to index in
            restriction.
248     char **rownames = new char*[rcnt];      // row labels.
249 
250     int i = 0;
251     for (int color = 0; color < partition_size - 1; ++color) {
252         matbeg[i] = i*2;
253         matind[i*2]   = color;
254         matind[i*2+1] = color + 1;
255         matval[i*2]   = -1;
256         matval[i*2+1] = 1;
257 
258         rhs[i] = 0;
259         sense[i] = 'L';
260         rownames[i] = new char[40];
261         sprintf(rownames[i], "%s", "symmetry_breaker");
262 
263         ++i;
264     }
265 
266 
267     // add restriction
```

```
268     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
            matval, NULL, rownames);
269     checkStatus(env, status);
270 
271     // free memory
272     for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
273         delete[] rownames[i];
274     }
275 
276     delete[] rhs;
277     delete[] sense;
278     delete[] matbeg;
279     delete[] matind;
280     delete[] matval;
281     delete[] rownames;
282 
283     return 0;
284 }
285 
286 int loadCuttingPlanes(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int edge_size,
        int partition_size,
287                       bool* adjacencyList, int iterations, int load_limit, int
                          select_cuts) {
288 
289     printf("Finding Cutting Planes.\n");
290 
291     // calculate runtime
292     double inittime, endtime;
293     int status = CPXgettime(env, &inittime);
294 
295     int n = partition_size + (vertex_size*partition_size);
296 
297     double *sol = new double[n];
298     int i = 1;
299     int unsatisfied_restrictions = 0;
300     while (i <= iterations) {
301 
302         printf("Iteration %d\n", i);
303 
304         // solve LP
305         status = CPXlpopt(env, lp);
306         checkStatus(env, status);
307 
308         status = CPXgetx(env, lp, sol, 0, n - 1);
309         checkStatus(env, status);
310 
311         // print relaxation result
312         // for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
313         //  for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
314         //      int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
315         //      if (sol[index] == 0) continue;
316         //      cout << "x" << id << "_" << color << " = " << sol[index] << endl;
317         //  }
318         // }
319 
320         if (select_cuts == 0 || select_cuts == 2) unsatisfied_restrictions +=
            maximalCliqueFamillyHeuristic(env, lp, vertex_size, edge_size,
            partition_size, adjacencyList, sol, load_limit);
321         if (select_cuts == 1 || select_cuts == 2) unsatisfied_restrictions +=
            oddholeFamillyHeuristic(env, lp, vertex_size, edge_size, partition_size,
            adjacencyList, sol, load_limit);
322 
```

```
323             if (unsatisfied_restrictions == 0) break;
324 
325             unsatisfied_restrictions = 0;
326             ++i;
327         }
328 
329         status = CPXgettime(env, &endtime);
330         double elapsed_time = endtime-inittime;
331         cout << "Time taken to add cutting planes: " << elapsed_time << endl;
332 
333         return 0;
334     }
335 
336     int maximalCliqueFamillyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
        edge_size, int partition_size,
337                                       bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit) {
338 
339         printf("Generating clique familly.\n");
340 
341         int loaded = 0;
342 
343         vector<tuple<double, int, set<int> > > clique_familly;
344 
345         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
346 
347             for (int id = 1; id <= vertex_size; id++) {
348 
349                 if (sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)] == 0) continue;
350 
351                 double sum = sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)];
352                 set<int> clique;
353                 clique.insert(id);
354                 for (int id2 = id + 1; id2 <= vertex_size; ++id2) {
355                     if (sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)] == 0) continue;
356 
357                     if (adyacentToAll(id2, vertex_size, adjacencyList, clique)) {
358                         clique.insert(id2);
359                         sum += sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)];
360                     }
361                 }
362                 if (clique.size() > 2 && sum > sol[color-1] + TOL) {
363                     if (cliqueNotContained(clique, color, clique_familly)) {
364                         double score = sum - sol[color-1];
365                         clique_familly.push_back(tuple<double, int, set<int> >(score,
                            color,clique));
366                     }
367                 }
368             }
369         }
370 
371         sort(clique_familly.begin(), clique_familly.end(), greater<tuple<double, int, set
            <int> > >());
372 
373         //print the familly
374         for (vector<tuple<double, int, set<int> > >::const_iterator it = clique_familly.
            begin();
375              it != clique_familly.end() && loaded < load_limit; ++loaded, ++it) {
376 
377             loadUnsatisfiedCliqueRestriction(env, lp, partition_size, get<2>(*it), get
                <1>(*it));
378             cout << "Score: " << get<0>(*it) << " - ";
```

```
379         for (set<int>::iterator it2 = get<2>(*it).begin(); it2 != get<2>(*it).end();
                ++it2) {
380             cout << *it2 << " ";
381         }
382         cout << endl;
383     }
384
385     printf("Loaded %d/%d unsatisfied clique restrictions! (all colors)\n", loaded, (
            int) clique_familly.size());
386
387     return loaded;
388 }
389
390 int loadUnsatisfiedCliqueRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int partition_size
        , const set<int>& clique, int color) {
391
392     int ccnt = 0;
393     int rcnt = 1;
394     int nzcnt = clique.size() + 1;
395
396     double rhs = 0;
397     char sense = 'L';
398
399     int matbeg = 0;
400     int* matind    = new int[clique.size() + 1];
401     double* matval = new double[clique.size() +1];
402     char **rowname = new char*[rcnt];
403     rowname[0] = new char[40];
404     sprintf(rowname[0], "unsatisfied_clique");
405
406     matind[0] = color - 1;
407     matval[0] = -1;
408
409     int i = 1;
410     for (set<int>::iterator it = clique.begin(); it != clique.end(); ++it) {
411         matind[i] = getVertexIndex(*it, color, partition_size);
412         matval[i] = 1;
413         ++i;
414     }
415
416     // add restriction
417     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, &rhs, &sense, &matbeg, matind
            , matval, NULL, rowname);
418     checkStatus(env, status);
419
420     // free memory
421     delete[] matind;
422     delete[] matval;
423     delete rowname[0];
424     delete rowname;
425
426     return 0;
427 }
428
429 int oddholeFamillyHeuristic(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
        edge_size, int partition_size,
430                             bool* adjacencyList, double* sol, int load_limit) {
431
432     printf("Generating oddhole familly.\n");
433
434     int loaded = 0;
435
```

```
436     vector<tuple<double, int, set<int> > > path_familly; // dif, color, path
437
438     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
439
440         for (int id = 1; id <= vertex_size; id++) {
441
442             if (sol[getVertexIndex(id, color, partition_size)] == 0) continue;
443
444             double sum = 0;
445             set<int> path;
446             path.insert(id);
447             for (int id2 = id + 1; id2 <= vertex_size; ++id2) {
448                 if (sol[getVertexIndex(id2, color, partition_size)] == 0) continue;
449
450                 if (isAdyacent(*(--path.end()), id2, vertex_size, adjacencyList)) {
451                     path.insert(id2);
452                 }
453
454             }
455
456             while (path.size() >= 3 && (path.size() %2 == 0 ||
457                 !isAdyacent(*path.begin(), *(--path.end()), vertex_size,
                        adjacencyList))) {
458                 path.erase(--path.end());
459             }
460
461             for (set<int>::iterator it = path.begin(); it != path.end(); ++it) {
462                 sum += sol[getVertexIndex(*it, color, partition_size)];
463             }
464
465             int k = (path.size() - 1) / 2;
466             if (path.size() > 2 && sum > k*sol[color-1] + TOL) {
467                 double score = sum - k*sol[color-1];
468                 path_familly.push_back(tuple<double, int, set<int> >(score,color,path
                        ));
469             }
470         }
471     }
472
473     sort(path_familly.begin(), path_familly.end(), greater<tuple<double, int, set<int
            > > >());
474
475     //print the familly
476     for (vector<tuple<double, int, set<int> > >::const_iterator it = path_familly.
            begin();
477          it != path_familly.end() && loaded < load_limit; ++loaded, ++it) {
478          loadUnsatisfiedOddholeRestriction(env, lp, partition_size, get<2>(*it), get
                <1>(*it));
479          cout << "Score: " << get<0>(*it) << " - ";
480          for (set<int>::iterator it2 = get<2>(*it).begin(); it2 != get<2>(*it).end();
                ++it2) {
481              cout << *it2 << " ";
482          }
483          cout << endl;
484     }
485
486     printf("Loaded %d/%d unsatisfied oddhole restrictions! (all colors)\n", loaded, (
            int) path_familly.size());
487
488     return loaded;
489 }
490
```

```
491 int loadUnsatisfiedOddholeRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int
    partition_size, const set<int>& path, int color) {
492
493     int ccnt = 0;
494     int rcnt = 1;
495     int nzcnt = path.size() + 1;
496
497     double rhs = 0;
498     char sense = 'L';
499
500     int matbeg = 0;
501     int* matind    = new int[path.size() + 1];
502     double* matval = new double[path.size() +1];
503     char **rowname = new char*[rcnt];
504     rowname[0] = new char[40];
505     sprintf(rowname[0], "unsatisfied_oddhole");
506
507     int k = (path.size() - 1) / 2;
508
509     matind[0] = color - 1;
510     matval[0] = -k;
511
512     int i = 1;
513     for (set<int>::iterator it = path.begin(); it != path.end(); ++it) {
514         matind[i] = getVertexIndex(*it, color, partition_size);
515         matval[i] = 1;
516         ++i;
517     }
518
519     // add restriction
520     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, &rhs, &sense, &matbeg, matind
        , matval, NULL, rowname);
521     checkStatus(env, status);
522
523     // free memory
524     delete[] matind;
525     delete[] matval;
526     delete rowname[0];
527     delete rowname;
528
529     return 0;
530 }
531
532 int loadAdyacencyColorRestriction(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
    partition_size)  {
533
534     // load third restriction
535     int ccnt = 0;                              // new columns being added.
536     int rcnt = vertex_size * partition_size; // new rows being added.
537     int nzcnt = rcnt*2;                        // nonzero constraint coefficients being
         added.
538
539     double *rhs = new double[rcnt];            // independent term in restrictions.
540     char *sense = new char[rcnt];              // sense of restriction inequality.
541
542     int *matbeg = new int[rcnt];               // array position where each restriction
         starts in matind and matval.
543     int *matind = new int[rcnt*2];             // index of variables != 0 in
        restriction (each var has an index defined above)
544     double *matval  = new double[rcnt*2];      // value corresponding to index in
        restriction.
545     char **rownames = new char*[rcnt];         // row labels.
```

```
546
547     int i = 0;
548     for (int v = 1; v <= vertex_size; ++v) {
549         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
550             matbeg[i] = i*2;
551
552             matind[i*2]   = getVertexIndex(v, color, partition_size);
553             matind[i*2+1] = color-1;
554
555             matval[i*2]   = 1;
556             matval[i*2+1] = -1;
557
558             rhs[i] = 0;
559             sense[i] = 'L';
560             rownames[i] = new char[40];
561             sprintf(rownames[i], "color_res");
562
563             ++i;
564         }
565     }
566
567     // add restriction
568     int status = CPXaddrows(env, lp, ccnt, rcnt, nzcnt, rhs, sense, matbeg, matind,
        matval, NULL, rownames);
569     checkStatus(env, status);
570
571     // free memory
572     for (int i = 0; i < rcnt; ++i) {
573         delete[] rownames[i];
574     }
575
576     delete[] rhs;
577     delete[] sense;
578     delete[] matbeg;
579     delete[] matind;
580     delete[] matval;
581     delete[] rownames;
582
583     return 0;
584 }
585
586 int solveLP(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int edge_size, int vertex_size, int
    partition_size) {
587
588     printf("\nSolving MIP.\n");
589
590     int n = partition_size + (vertex_size*partition_size); // amount of total
        variables
591
592     // calculate runtime
593     double inittime, endtime;
594     int status = CPXgettime(env, &inittime);
595     checkStatus(env, status);
596
597     // solve LP
598     status = CPXmipopt(env, lp);
599     checkStatus(env, status);
600
601     status = CPXgettime(env, &endtime);
602     checkStatus(env, status);
603
604     // check solution state
```

```
605     int solstat;
606     char statstring[510];
607     CPXCHARptr p;
608     solstat = CPXgetstat(env, lp);
609     p = CPXgetstatstring(env, solstat, statstring);
610     string statstr(statstring);
611     if (solstat != CPXMIP_OPTIMAL && solstat != CPXMIP_OPTIMAL_TOL &&
612         solstat != CPXMIP_NODE_LIM_FEAS && solstat != CPXMIP_TIME_LIM_FEAS) {
613         // printf("Optimization failed.\n");
614         cout << "Optimization failed: " << solstat << endl;
615         exit(1);
616     }
617
618     double objval;
619     status = CPXgetobjval(env, lp, &objval);
620     checkStatus(env, status);
621
622     // get values of all solutions
623     double *sol = new double[n];
624     status = CPXgetx(env, lp, sol, 0, n - 1);
625     checkStatus(env, status);
626
627     int nodes_traversed = CPXgetnodecnt(env, lp);
628
629     // write solutions to current window
630     cout << "Optimization result: " << statstring << endl;
631     cout << "Time taken to solve final LP: " << (endtime - inittime) << endl;
632     cout << "Colors used: " << objval << endl;
633     cout << "Nodes traversed: " << nodes_traversed << endl;
634     for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
635         if (sol[color-1] == 1) {
636             cout << "w_" << color << " = " << sol[color-1] << " (" << colors[color-1]
                        << ")" << endl;
637         }
638     }
639
640     for (int id = 1; id <= vertex_size; ++id) {
641         for (int color = 1; color <= partition_size; ++color) {
642             int index = getVertexIndex(id, color, partition_size);
643             if (sol[index] == 1) {
644                 cout << "x_" << id << " = " << colors[color-1] << endl;
645             }
646         }
647     }
648
649     delete[] sol;
650
651     return 0;
652 }
653
654 int convertVariableType(CPXENVptr& env, CPXLPptr& lp, int vertex_size, int
        partition_size, char vtype) {
655
656     int n = partition_size + (vertex_size*partition_size);
657     int* indices = new int[n];
658     char* xctype = new char[n];
659
660     for (int i = 0; i < n; i++) {
661         indices[i] = i;
662         xctype[i]  = vtype;
663     }
664     CPXchgctype(env, lp, n, indices, xctype);
```

```
665
666     delete[] indices;
667     delete[] xctype;
668
669     return 0;
670 }
671
672 int setTraversalStrategy(CPXENVptr& env, int strategy) {
673
674     // MIP node selection strategy
675     // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.3.0/ilog.odms.cplex.
        help/Content/Optimization/Documentation/Optimization_Studio/_pubskel/
        ps_refparameterscplex2299.html
676
677     // 0 CPX_NODESEL_DFS           Depth-first search
678     // 1 CPX_NODESEL_BESTBOUND     Best-bound search; default
679     // 2 CPX_NODESEL_BESTEST       Best-estimate search
680     // 3 CPX_NODESEL_BESTEST_ALT   Alternative best-estimate search
681
682     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_NODESEL, strategy);
683
684     return 0;
685 }
686
687 int setBranchingVariableStrategy(CPXENVptr& env, int strategy) {
688
689     // MIP variable selection strategy
690     // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SS9UKU_12.4.0/com.ibm.cplex.zos.
        help/Parameters/topics/VarSel.html
691
692     // -1   CPX_VARSEL_MININFEAS       Branch on variable with minimum infeasibility
693     // 0    CPX_VARSEL_DEFAULT         Automatic: let CPLEX choose variable to branch
          on; default
694     // 1    CPX_VARSEL_MAXINFEAS       Branch on variable with maximum infeasibility
695     // 2    CPX_VARSEL_PSEUDO          Branch based on pseudo costs
696     // 3    CPX_VARSEL_STRONG          Strong branching
697     // 4    CPX_VARSEL_PSEUDOREDUCED   Branch based on pseudo reduced costs
698
699     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_VARSEL, strategy);
700
701     return 0;
702 }
703
704 int setCPLEXConfig(CPXENVptr& env) {
705     // maximize objective function
706     // CPXchgobjsen(env, lp, CPX_MAX);
707
708     // enable/disable screen output
709     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_SCRIND, CPX_OFF);
710
711     // set excecution limit
712     CPXsetdblparam(env, CPX_PARAM_TILIM, 300);
713
714     // measure time in CPU time
715     // CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_CLOCKTYPE, CPX_ON);
716
717     return 0;
718 }
719
720 int setBranchAndBoundConfig(CPXENVptr& env) {
721
722     // CPLEX config
```

```
723     // http://www-01.ibm.com/support/knowledgecenter/SSSA5P_12.2.0/ilog.odms.cplex.
            help/Content/Optimization/Documentation/CPLEX/_pubskel/CPLEX916.html
724
725     // deactivate pre-processing
726     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_PRESLVND, -1);
727     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_REPEATPRESOLVE, 0);
728     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_RELAXPREIND, 0);
729     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_REDUCE, 0);
730     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_LANDPCUTS, -1);
731
732     // disable presolve
733     // CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_PREIND, CPX_OFF);
734
735     // enable traditional branch and bound
736     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_MIPSEARCH, CPX_MIPSEARCH_TRADITIONAL);
737
738     // use only one thread for experimentation
739     // CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_THREADS, 1);
740
741     // do not add cutting planes
742     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_EACHCUTLIM, CPX_OFF);
743
744     // disable gomory fractional cuts
745     CPXsetintparam(env, CPX_PARAM_FRACCUTS, -1);
746
747     return 0;
748 }
749
750
751 int checkStatus(CPXENVptr& env, int status) {
752     if (status) {
753         char buffer[100];
754         CPXgeterrorstring(env, status, buffer);
755         printf("%s\n", buffer);
756         exit(1);
757     }
758     return 0;
759 }
760
761 int main(int argc, char **argv) {
762
763     if (argc != 11) {
764         printf("Usage: %s inputFile solver partitions symmetry_breaker iterations
                select_cuts load_limit custom_config traversal_strategy branching_strategy
                \n", argv[0]);
765         exit(1);
766     }
767
768     int solver = atoi(argv[2]);
769     int partition_size = atoi(argv[3]);
770     bool symmetry_breaker = (atoi(argv[4]) == 1);
771     int iterations = atoi(argv[5]);
772     int select_cuts = atoi(argv[6]);              // 0: clique only, 1: oddhole only,
            2: both
773     int load_limit = atoi(argv[7]);
774     int custom_config = atoi(argv[8]);            // 0: default, 1: custom
775     int traversal_strategy = atoi(argv[9]);
776     int branching_strategy = atoi(argv[10]);
777
778     if (solver == 1) {
779         printf("Solver: Branch & Bound\n");
780     } else {
```

```
781         printf("Solver: Cut & Branch\n");
782     }
783
784     /* read graph input file
785      * format: http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html
786      * graph representation chosen in order to load the LP easily.
787      * - vector of edges
788      * - vector of partitions
789      */
790     FILE* fp = fopen(argv[1], "r");
791
792     if (fp == NULL) {
793         printf("Invalid input file.\n");
794         exit(1);
795     }
796
797     char buf[100];
798     int vertex_size, edge_size;
799
800     set<pair<double,int> > edges; // sometimes we have to filter directed graphs
801
802     while (fgets(buf, sizeof(buf), fp) != NULL) {
803         if (buf[0] == 'c') continue;
804         else if (buf[0] == 'p') {
805             sscanf(&buf[7], "%d %d", &vertex_size, &edge_size);
806         }
807         else if (buf[0] == 'e') {
808             int from, to;
809             sscanf(&buf[2], "%d %d", &from, &to);
810             if (from < to) {
811                 edges.insert(pair<double,int>(from, to));
812             } else {
813                 edges.insert(pair<double,int>(to, from));
814             }
815         }
816     }
817
818     // build adyacency list
819     edge_size = edges.size();
820     int adyacency_size = vertex_size*vertex_size - ((vertex_size+1)*vertex_size/2);
821     bool* adjacencyList = new bool[adyacency_size]; // can be optimized even more
            with a bitfield.
822     fill_n(adjacencyList, adyacency_size, false);
823     for (set<pair<double,int> >::iterator it = edges.begin(); it != edges.end(); ++it
        ) {
824         adjacencyList[fromMatrixToVector(it->first, it->second, vertex_size)] = true;
825     }
826
827     // set random seed
828     // srand(time(NULL));
829
830     // asign every vertex to a partition
831     // int partition_size = rand() % vertex_size + 1;
832     vector<vector<int> > partitions(partition_size, vector<int>());
833
834     for (int i = 0; i < vertex_size; ++i) {
835         partitions[i % partition_size].push_back(i+1);
836     }
837
838     // warning: this procedure doesn't guarantee every partition will have an element
        .
839     // for (int i = 1; i <= vertex_size; ++i) {
```

```
840     //  int assign_partition = rand() % partition_size;
841     //  partitions[assign_partition].push_back(i);
842     // }
843
844     // // update partition_size
845     // for (std::vector<vector<int> >::iterator it = partitions.begin(); it !=
            partitions.end(); ++it) {
846     //  if (it->size() == 0) --partition_size;
847     // }
848
849     printf("Graph: vertex_size: %d, edge_size: %d, partition_size: %d\n", vertex_size
            , edge_size, partition_size);
850
851     // start loading LP using CPLEX
852     int status;
853     CPXENVptr env; // pointer to enviroment
854     CPXLPptr lp;   // pointer to the lp.
855
856     env = CPXopenCPLEX(&status); // create enviroment
857     checkStatus(env, status);
858
859     // create LP
860     lp = CPXcreateprob(env, &status, "Instance of partitioned graph coloring.");
861     checkStatus(env, status);
862
863     setCPLEXConfig(env);
864     if (custom_config == 1) setBranchAndBoundConfig(env);
865     setTraversalStrategy(env, traversal_strategy);
866     setBranchingVariableStrategy(env, branching_strategy);
867
868     if (solver == 1) { // pure branch & bound
869         loadObjectiveFunction(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_BINARY);
870     } else {
871         loadObjectiveFunction(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_CONTINUOUS);
872     }
873
874     loadAdyacencyColorRestriction(env, lp, vertex_size, edge_size, partition_size,
            adjacencyList);
875     loadSingleColorInPartitionRestriction(env, lp, partitions, partition_size);
876     loadAdyacencyColorRestriction(env, lp, vertex_size, partition_size);
877
878     if (symmetry_breaker) loadSymmetryBreaker(env, lp, partition_size);
879
880     if (solver != 1) loadCuttingPlanes(env, lp, vertex_size, edge_size,
            partition_size, adjacencyList, iterations, load_limit, select_cuts);
881
882     // write LP formulation to file, great to debug.
883     status = CPXwriteprob(env, lp, "graph.lp", NULL);
884     checkStatus(env, status);
885
886     convertVariableType(env, lp, vertex_size, partition_size, CPX_BINARY);
887
888     solveLP(env, lp, edge_size, vertex_size, partition_size);
889
890     delete[] adjacencyList;
891
892     return 0;
893 }
```