Investigación Operativa

Trabajo Práctico

2do. cuatrimestre 2015

Fecha de entrega: 10/12/2015

Introducción

El problema de *coloreo de grafos* ha sido ampliamente estudiado y aparece en numerosas aplicaciones de la vida real, como por ejemplo en problemas de *scheduling, asignación de frecuencias, secuenciamiento,* etc. Formalmente, el problema puede ser definido de la siguiente forma: Dado un grafo $G = (V, E)$ con $n = |V|$ vértices y $m = |E|$ aristas, un *coloreo* de G consiste en una asignación de *colores* o *etiquetas* a cada vértice $p \in V$ de forma tal que todo par de vértices $(p, q) \in E$ poseen colores distintos. El problema de coloreo de grafos consiste en encontrar un coloreo que utilice la menor cantidad posible de colores distintos.

A partir de diferentes aplicaciones, surgieron variaciones o generalizaciones de este problema, como el problema de *coloreo particionado de grafos.* En este problema el conjunto V se encuentran dividido en una partición $V_1, \ldots, V_k$, y el objetivo es asignar un color a sólo un vértice de cada partición, de manera tal que dos vértices adyacentes no reciban el mismo color, minimizando la cantidad de colores utilizados.

Enunciado

El trabajo consiste en:

1. Desarrollar un modelo de Programación Lineal Entera para el problema de *coloreo particionado de grafos* basado en las variables:

$$x_{pj} = \begin{cases} 1 & \text{si el color } j \text{ es asignado al vértice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$w_j = \begin{cases} 1 & \text{si } x_{pj} = 1 \text{ para algún vértice } p \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2. Implementar un algoritmo *Branch and Bound.*

3. Considerar las siguientes desigualdades:

   Desigualdad 1 *Sea $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ y sea K una clique maximal de G. La desigualdad clique están definida por*

   $$\sum_{p \in K} x_{pj_0} \leq w_{j_0}$$

   Desigualdad 2 *Sea $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ y $C_{2k+1} = v_1, \ldots, v_{2k+1}, k \geq 2$, un agujero de longitud impar. La desigualdad odd-hole esta definida por*

   $$\sum_{p \in C_{2k+1}} x_{pj_0} \leq k w_{j_0}$$

   (a) Demostrar que ambas familias de desigualdades son válidas para *CP*.

   (b) Implementar una heurística de separación para cada familia.

   (c) Implementar un algoritmo de *Planos de Corte* que incorpore ambas familias de desigualdades. Analizar el comportamiento de las mismas para grafos con distintas densidades de aristas y tamaño de partición, en términos de las mejoras obtenidas en la relajación lineal.

4. Teniendo en cuenta los dos puntos anteriores, implementar un algoritmo *Cut and Branch.*

5. Comparar los algoritmos de los puntos 2. y 4. en términos de tiempo de ejecución y cantidad de nodos recorridos. Expermientar con distintas estrategias de recorrido del árbol de enumeración y selección de variable de *branching.*

Instancias de prueba:

- Instancias aleatorias con diferentes densidades de aristas y cantidad de conjuntos en la partición.

- http://mat.gsia.cmu.edu/COLOR/instances.html. Son instancias del problema de coloreo de grafos, generar las particiones de manera aleatoria.