Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н. Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

ОТЧЕТ

по Лабораторной работе №2

по курсу «Математическая статистика»

на тему: «Интервальные оценки»

Студент группы ИУ7-63Б ______________ (Подпись, дата) Паламарчук А. Н. (Фамилия И.О.)

Преподаватель ______________ (Подпись, дата) Саркисян П. С. (Фамилия И.О.)

Москва — 2025 г.

Содержание

1 Задание

1.1 Цель работы

Цель работы: построение гистограммы и эмпирической функции распределения.

1.2 Содержание работы

1) Для выборки объема n из нормальной генеральной совокупности X реализовать в виде программы на ЭВМ

   a) вычисление точечных оценок $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $S^2(\vec{X}_n)$ математического ожидания MX и дисперсии DX соответственно;

   b) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\mu}(\vec{X}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{X}_n)$ для γ – доверительного интервала для математического ожидания MX;

   c) вычисление нижней и верхней границ $\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$, $\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n)$ для γ-доверительного интервала для дисперсии DX;

2) вычислить $\hat{\mu}$ и S^2 для выборки из индивидуального варианта;

3) для заданного пользователем уровня доверия γ и N – объёма выборки из индивидуального варианта:

   a) на координатной плоскости Oyn построить прямую $y = \hat{\mu}(\vec{x_N})$, также графики функций $y = \hat{\mu}(\vec{x}_n)$, $y = \underline{\mu}(\vec{x}_n)$ и $y = \overline{\mu}(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N;

   b) на другой координатной плоскости Ozn построить прямую $z = S^2(\vec{x_N})$, также графики функций $z = S^2(\vec{x}_n)$, $z = \underline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ и $z = \overline{\sigma}^2(\vec{x}_n)$ как функций объема n выборки, где n изменяется от 1 до N.

2 Теоретическая часть

2.1 Определение γ – доверительного интервала

Пусть $\vec{X}_n$ — *случайная выборка объема* n из *генеральной совокупности* X с функцией распределения $F(x;\theta)$, зависящей от параметра θ, значение которого неизвестно. Предположим, что для параметра θ построен интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right)$, где $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ являются функциями случайной выборки $\vec{X}_n$, такими, что выполняется равенство

$$\mathbf{P}\left\{\underline{\theta}(\vec{X}_n) < \theta < \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right\} = \gamma. \tag{2.1}$$

В этом случае интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{X}_n), \overline{\theta}(\vec{X}_n)\right)$ называют интервальной оценкой для параметра θ с коэффициентом доверия γ (или, сокращенно, γ – доверительной интервальной оценкой), а $\underline{\theta}(\vec{X}_n)$ и $\overline{\theta}(\vec{X}_n)$ соответственно нижней и верхней границами интервальной оценки.

Интервал $\left(\underline{\theta}(\vec{x}_n), \overline{\theta}(\vec{x}_n)\right)$ называют доверительным интервалом для параметра θ с коэффициентом доверия γ или γ-доверительным интервалом.

2.2 Границы γ – доверительного интервала

Пусть $\vec{X}_n$ — случайная выборка объема n из генеральной совокупности X, распределенной по нормальному закону с параметрами μ и σ^2.

2.3 Оценка для математического ожидания

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} - \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \tag{2.2}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = \overline{X} + \frac{S(\vec{X}_n)}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \tag{2.3}$$

где $\overline{X}$ — оценка мат. ожидания, n — число опытов, $S(\vec{X}_n)$ — точечная оценка дисперсии случайной выборки $\vec{X}_n$, $t_{1-\alpha}(n-1)$ — квантиль уровня $1-\alpha$ для распределения Стьюдента с $n-1$ степенями свободы, α — величина, равная $\dfrac{(1-\gamma)}{2}$.

2.4 Оценка для дисперсии

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \tag{2.4}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = \frac{S(\vec{X}_n)(n-1)}{\chi^2_{\alpha}(n-1)}, \tag{2.5}$$

где: n — объем выборки, $\chi^2_\alpha(n-1)$ — квантиль уровня α для распределения χ^2 с $n-1$ степенями свободы, α — величина, равная $\frac{(1-\gamma)}{2}$.

3 Практическая часть

3.1 Результаты расчетов

Индивидуальный вариант №14

Результаты расчетов для выборки приведены на формулах (3.1), (3.2), (3.3), (3.4), (3.5), (3.6).

$$\hat{\mu} = 3.096281 \tag{3.1}$$

$$S^2 = 1.248040 \tag{3.2}$$

$$\underline{\mu}(\vec{X}_n) = 2.927930 \tag{3.3}$$

$$\overline{\mu}(\vec{X}_n) = 3.264632 \tag{3.4}$$

$$\underline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = 1.021816 \tag{3.5}$$

$$\overline{\sigma}^2(\vec{X}_n) = 1.564865 \tag{3.6}$$

На рисунке 3.1 представлены точечная оценка математического ожидания $\hat{\mu}(\vec{x}_n)$ и границы $\underline{\mu}(\vec{x}_n)$, $\overline{\mu}(\vec{x}_n)$ γ – доверительного интервала в зависимости от объёма выборки n. Горизонтальная линия соответствует оценке $\hat{\mu}(\vec{x}_N)$ для полной выборки.

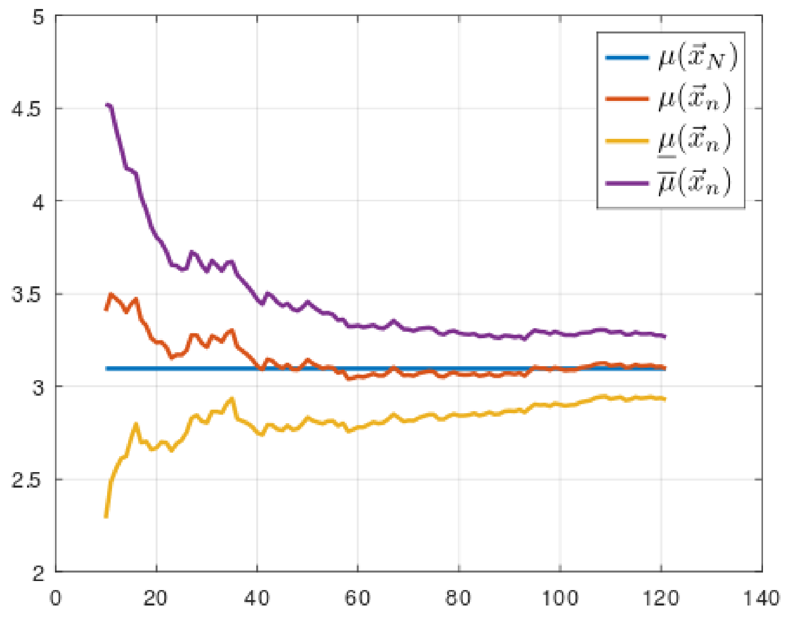

Рисунок 3.1 – График оценки μ

На рисунке 3.2 изображены точечная оценка дисперсии $S^2(\vec{x}_n)$ и границы $\underline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$, $\overline{\sigma^2}(\vec{x}_n)$ γ – доверительного интервала. Пунктирные линии демонстрируют изменение интервала при увеличении объёма данных, а горизонтальная линия — оценку $S^2(\vec{x}_N)$ для всей выборки.

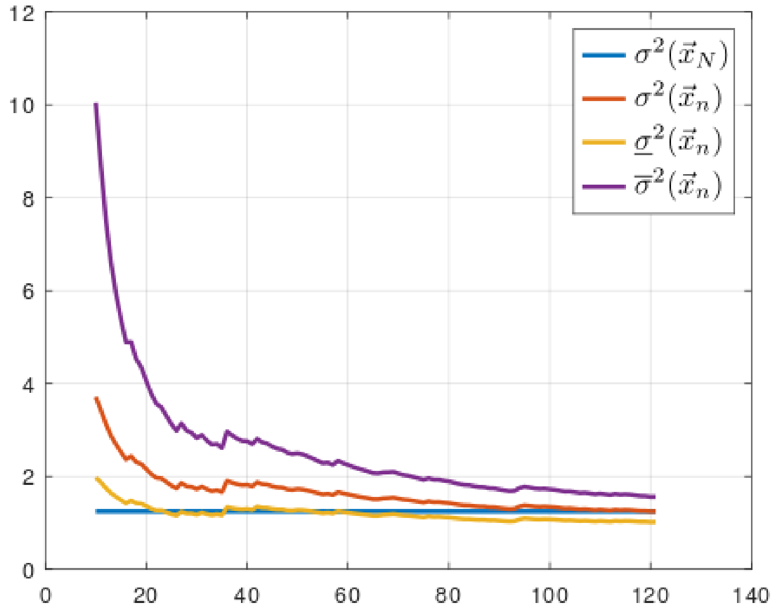

Рисунок 3.2 – График оценки σ^2