Математическая статистика

для специальности ИУ7, 3-й курс, 6-й семестр.

Вопросы для подготовки к рубежному контролю №2

Теоретические вопросы

1. **Понятие статистической гипотезы. Постановка задачи проверки статистических гипотез. Понятие критерия проверки гипотез. Ошибки первого и второго рода, вероятности их совершения. Определение уровня значимости и мощности критерия. Общие принципы построения статистических критериев.**

Пусть X — сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. X.

Процедуру проверки статистической гипотезы обычно проводят следующим образом:

- Проверяемую гипотезу называют основной и обозначают H_0
- Выдвигают так называемую альтернативную (конкурирующую) гипотезу H_1, при этом $H_0H_1 = \varnothing$, но возможно, $H_0 + H_1$ не исчерпывают все возможные случаи
- На основании имеющейся выборки $\vec{x} \in \chi_n$ принимают решение либо в пользу H_0, либо в пользу H_1.

Правило, посредством которого принимается решение об истинности H_0 и H_1, называют **статистическим критерием проверки гипотез**.

Ошибка I-го рода — принять конкурирующую гипотезу H_1 при истинности основной гипотезы H_0. Вероятность совершения такой ошибки

$$\alpha = P\{\vec{X} \in W | H_0\}$$

α — называют уровнем значимости критерия.

Ошибка II-го рода — принять основную гипотезу H_0 при истинности конкурирующей гипотезы H_1. Вероятность совершения такой ошибки

$$\beta = P\{\vec{X} \notin W \mid H_1\}$$

1-β (вероятность не совершения ошибки II-го рода) — называют мощностью критерия.

Конечно, при построении критерия хотелось бы обеспечить условия:

$$\begin{cases} \alpha \to min \\ \beta \to min \end{cases}$$

однако это принципиально невозможно (при фиксированном объеме наблюдений n), поэтому обычно критерии строят исходя из условий:

$$\begin{cases} \alpha = const \\ \beta \to min \end{cases}$$

2. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Простая и сложная гипотезы. Построить критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез.

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. X.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Статистическая гипотеза называется **простой**, если она однозначно описывает закон распределения сл.в. X (т.е. эта гипотеза однозначно задает функцию распределения сл.в. X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется **сложной**.

Критерий Неймана-Пирсона проверки двух простых гипотез.

Пусть:

1) X — сл.в.
2) θ — неизвестный параметр
3) $F(x,\theta)$ — функция распределения сл.в. X (F будет полностью известна, если задать значение неизвестного параметра)

Рассмотрим задачу проверки 2-х простых гипотез:

$H_0 = \{\theta = \theta_0\}$ против $H_1 = \{\theta = \theta_1\}$, где $\theta_0 \neq \theta_1$ (т.к. $H_0H_1 = 0$)

Рассмотрим статистику:

$$\varphi(\vec{X}) = \frac{L(\vec{x},\theta_1)}{L(\vec{x},\theta_0)}$$

где $L(\vec{x},\theta)$ — функция правдоподобия случайной выборки $\vec{X}$.

Очевидно, что "большие" значения статистики φ свидетельствуют в пользу гипотезы H_1, а "малые" значения — в пользу гипотезы H_0. Поэтому критическое множество в рассматриваемой задаче можно задать в виде:

$$W = \{\vec{x} : \varphi(\vec{x}) \geq C_\varphi\}$$

где C_φ — некоторое пороговое значение (константа), которая выбирается из условий:

1) $\alpha = P\{\varphi(\vec{x}) \geq C_\varphi | H_0\}$
2) При этом вероятность β совершения ошибки II-го рода при фиксированном α не может быть уменьшена

Замечания:

1) Построенный критерий называют критерием Неймана-Пирсона. Статистику φ называют отношением правдоподобия
2) Если X — непрерывная сл.в., а $f(t,\theta)$ — функция плотности сл.в. X, то вероятность совершения ошибки первого I-го рода может быть записана в виде:

$$\alpha = P\{\vec{X} \in W \mid H_0\} = \left|\vec{X} = \{X_1, \dots, X_n\} - \text{сл. выборка}\right| =$$
$$= \left|\mathrm{f}_{\vec{X}}(t_1, \dots, t_n, \theta) = \mathrm{f}(t_1, \theta) \cdot \dots \cdot \mathrm{f}(t_n, \theta) = \mathrm{L}\big((t_1, \dots, t_n), \theta\big) = \mathrm{L}\big(\vec{t}, \theta\big)\right| =$$
$$= \int\limits_W \dots \int \mathrm{L}\big(\vec{t}, \theta\big)|_{\theta = \theta_0 (\text{при ист−ти } H_0)} d\vec{t} = \int \mathrm{L}\big(\vec{t}, \theta_0\big) d\vec{t}$$

где $\mathrm{L}\big(\vec{t}, \theta\big)$ — функция правдоподобия.

3. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. С использованием критерия Неймана-Пирсона построить критерий проверки двух простых гипотез H0 = {m=m0}, H1 = {m=m1}, m1 > m0, относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. X.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

4. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Вероятности их совершения как функции неизвестного параметра при проверке двух сложных гипотез. Понятия размера критерия и функции мощности. Выражение вероятностей ошибок первого и второго рода через функцию мощности. Понятие равномерно наиболее мощного критерия. Равномерно наиболее мощный критерий при проверке гипотез H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0} относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. X.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Статистическая гипотеза называется **простой**, если она однозначно описывает закон распределения сл.в. X (т.е. эта гипотеза однозначно задает функцию распределения сл.в. X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется **сложной**.

P.S. Далее будет использоваться $\mathit{\Theta}$ — это промежуток, Власов их ввел, когда пошли сложные параметрические гипотезы, когда у нас θ не просто равна какому-то числу, а принадлежит промежутку.

Ошибка I-го рода — принять конкурирующую гипотезу H_1 при истинности основной гипотезы H_0. Вероятность совершения такой ошибки

$$\alpha(\theta) = P\left\{\vec{X} \in W \middle| \theta \in \mathit{\Theta}_0\right\}$$

α — называют уровнем значимости критерия.

Ошибка II-го рода — принять основную гипотезу H_0 при истинности конкурирующей гипотезы H_1. Вероятность совершения такой ошибки

$$\beta(\theta) = P\left\{\vec{X} \notin W \ \middle| \theta \in \mathit{\Theta}_1\right\}$$

1-β (вероятность не совершения ошибки II-го рода) — называют мощностью критерия.

Величина $\alpha = sup\, \alpha(\theta),\ \theta \in \mathit{\Theta}_0$ — называется **размером критерия**.

Функцией мощности критерия называется ф-ция $\mathrm{M}(\theta) = P\left\{\vec{\mathrm{X}} \in \mathrm{W} \middle| \theta\right\}$ (менее жаргонный вариант $\mathrm{M}(a) = P\left\{\vec{\mathrm{X}} \in \mathrm{W} \middle| \theta = a\right\}$).

Выражение вероятностей ошибок первого и второго рода через функцию мощности:

$$\mathrm{M}(\theta) = \begin{cases} \alpha(\theta), & \theta \in \mathit{\Theta}_0 \\ 1 - \beta(\theta), & \theta \in \mathit{\Theta}_1 \end{cases}$$

$$\mathrm{M}(\theta) = P\left\{\vec{\mathrm{X}} \in \mathrm{W} \middle| \theta\right\} = 1 - P\left\{\vec{X} \notin W \ \middle| \theta\right\} = \left|\theta \in \mathit{\Theta}_1\right| = 1 - \beta(\theta)$$

Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно по всем возможным критериям при всех $\theta \in \mathit{\Theta}_1$, называется **равномерно наиболее мощным**.

Проверка гипотез

Пусть $X \sim N(m, \sigma^2)$, где m — неизвестно, σ^2 — известно

Рассмотрим задачу проверки гипотез

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$, (H_0 — простая, H_1 — сложная)

Решение:

1) Ранее рассматривалась задача проверки двух простых гипотез
   $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m = m_1\}$, где $m_0 < m_1$
   При этом критическое множество имело вид:
   $$\mathrm{W} = \left\{\vec{x} \in \chi_n : \sum_{i=1}^{n} x_i \geq n m_0 + \delta u_{1-\alpha}\sqrt{n}\right\} \ (*)$$
2) Т.к. построенное ранее критическое множество фактически не зависит от m_1 (при условии, что $m_0 < m_1$), то построенный ранее критерий является равномерно **наиболее мощным** для решения текущей задачи. Поэтому в рассматриваемой задаче критическое множество также определяется соотношением (*)

5. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез
(а) H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0};
(б) H0 = {m =m0}, H1 = {m < m0};
(в) H0 = {m=m0}, H1 = {m ≠ m0}
относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины в случае *известной* дисперсии.

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. X.

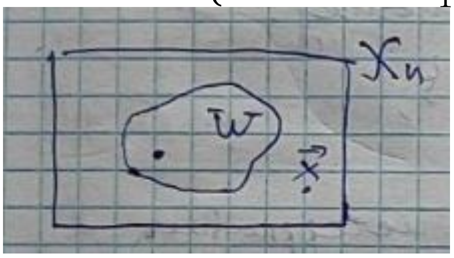
Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Правило, посредством которого принимается решение об истинности H_0 и H_1, называют **статистическим критерием проверки гипотез**.

Статистический критерий обычно задается с использованием критического множества $W \subseteq \chi_n$. При этом само решающее правило имеет вид:

$$\vec{x} \in W \Rightarrow \begin{cases} \text{отклонить } H_0 \\ \text{принять } H_1 \end{cases}$$

$$\vec{x} \in \chi_n \backslash W \Rightarrow \begin{cases} \text{принять } H_0 \\ \text{отклонить } H_1 \end{cases}$$



Описание построения критериев проверки гипотез:
$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m **неизвестно**, σ **известно**

а)

Проверка гипотезы
$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{m_0 - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : T(\vec{x}) \leq -u_{1-\alpha}\}$$

где $u_{1-\alpha}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

б)

Проверка гипотезы

$H_0 = \{m = \ m_0\}$ против $H_1 = \{m < m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) \ = \frac{m_0 - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W \ = \ \{\vec{x} \ \in \chi_n : T(\vec{x}) \geq u_{1-\alpha}\}$$

где $u_{1-\alpha}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

с)

Проверка $H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m \neq m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) \ = \frac{m_0 - \bar{X}}{\sigma}\sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W \ = \ \{\vec{x} \ \in \chi_n : |T(\vec{x})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$$

где $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантиль стандартного нормального распределения.

6. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез
(а) H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0};
(б) H0 = {m =m0}, H1 = {m < m0};
(в) H0 = {m=m0}, H1 = {m ≠ m0}
относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины в случае *неизвестной* дисперсии.

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

$X \sim N(m, \sigma^2)$, где m **неизвестно**, σ **неизвестно**

а)

Проверка гипотезы

$H_0 = \{m = \ m_0\}$ против $H_1 = \{m > m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) \ = \frac{m_0 - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : T(\vec{x}) \le -t_{1-\alpha}^{(n-1)}\}$$

где $t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

б)

Проверка гипотезы

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m < m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{m_0 - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : T(\vec{x}) \ge t_{1-\alpha}^{(n-1)}\}$$

где $t_{1-\alpha}^{(n-1)}$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

с)

Проверка гипотезы

$H_0 = \{m = m_0\}$ против $H_1 = \{m \ne m_0\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}) = \frac{m_0 - \bar{X}}{S(\vec{X})}\sqrt{n} \sim St(n-1)$$

Критическое множество имеет вид:

$$W = \{\vec{x} \in \chi_n : |T(\vec{x})| \ge t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}\}$$

где $t_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n-1)}$ — квантиль распределения Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

7. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез**
(а) H0 = {m1 = m2}, H1 = {m1 > m2};
(б) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 < m2};
(в) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 ≠ m2}
относительно значений m1 и m2 математических ожиданий двух независимых нормальных случайных величин в случае *__известных__* значений дисперсии.

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

$X \sim N(m_1, {\sigma_1}^2)$

$Y \sim N(m_2, {\sigma_2}^2)$

m_1, m_2 — **неизвестны**
σ_1, σ_2 — **известны**

Рассматриваем задачи проверки гипотез:
а) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 > m_2\}$
б) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 < m_2\}$
в) $H_0 = \{m_1 = m_2\}$ против $H_1 = \{m_1 \neq m_2\}$

Рассмотрим сл.в. $Z = X - Y$, тогда $MZ = MX - MY = m_1 - m_2$. Сформулируем формулировки эквивалентные задачам:
а) $H_0 = \{m = 0\}$ против $H_1 = \{m > 0\}$
б) $H_0 = \{m = 0\}$ против $H_1 = \{m < 0\}$
в) $H_0 = \{m = 0\}$ против $H_1 = \{m \neq 0\}$
где $m = MZ$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) = \frac{\vec{X}_{n_1} - \vec{Y}_{n_2}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n_1} + \frac{\sigma^2}{n_2}}} \sim N(0, 1)$$

где n_1 — объем выборки $\vec{X}$, n_2 — объем выборки $\vec{Y}$.
Т — является линейной комбинацией нормальных сл.в. ⇒ Т сама имеет нормальное распределение.

Математическое ожидание:

$$M[T] = \frac{(MX - MY)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

При истинности H_0 ($m_1 = m_2$):
$M[T] = 0$

Дисперсия:

$$D[T] = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} * (DX + DY) = \frac{1}{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} * \left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right) = 1$$

При истинности H_0 статистика $T \sim N(0, 1)$.

Критические множества имеют вид:
а) $W = \{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq u_{1-\alpha}\}$, $m > 0$
б) $W = \{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \leq -u_{1-\alpha}\}$, $m < 0$
в) $W = \{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : |T(\bar{x}, \bar{y})| \geq u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}$, $m \neq 0$

где $u_{1-\alpha}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ — квантили стандартного нормального распределения.

8. Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез
(а) H0 = {m1 = m2}, H1 = {m1 > m2};
(б) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 < m2};
(в) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 ≠ m2}
относительно значений m1 и m2 математических ожиданий двух независимых нормальных случайных величин в случае *неизвестных (но совпадающих)* значений дисперсии.

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

$X \sim N(m_1, {\sigma_1}^2)$
$Y \sim N(m_2, {\sigma_2}^2)$
m_1, m_2 — **неизвестны**
σ_1, σ_2 — **неизвестны (но совпадают)**

Рассматриваем задачи проверки гипотез:
а) $H_0 = \{\ \sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\ \sigma_1 > \sigma_2\}$
б) $H_0 = \{\ \sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\ \sigma_1 < \sigma_2\}$
в) $H_0 = \{\ \sigma_1 = \sigma_2\}$ против $H_1 = \{\ \sigma_1 \neq \sigma_2\}$

Используем статистику:

$$T(\vec{X}_{n_1}, \vec{Y}_{n_2}) \ = \ \frac{max\{S_1^2(\vec{X}_{n_1}), S_2^2(\vec{Y}_{n_2})\}}{min\{S_1^2(\vec{X}_{n_1}), S_2^2(\vec{Y}_{n_2})\}} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

где n_1 — объем выборки $\vec{X}$, n_2 — объем выборки $\vec{Y}$.

Критические множества имеют вид:
а) $W = \{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}\}$
б) $W = \{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}\ \}$
в) $W = \left\{\vec{x}, \vec{y} \in \chi_n : T(\vec{x}, \vec{y}) \geq f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1, n_2-1)}\right\}$
где $f_{1-\alpha}^{(n_1-1, n_2-1)}$, $f_{1-\frac{\alpha}{2}}^{(n_1-1, n_2-1)}$ — квантили распределения Фишера с $(n_1 - 1, n_2 - 1)$ степенями свободы