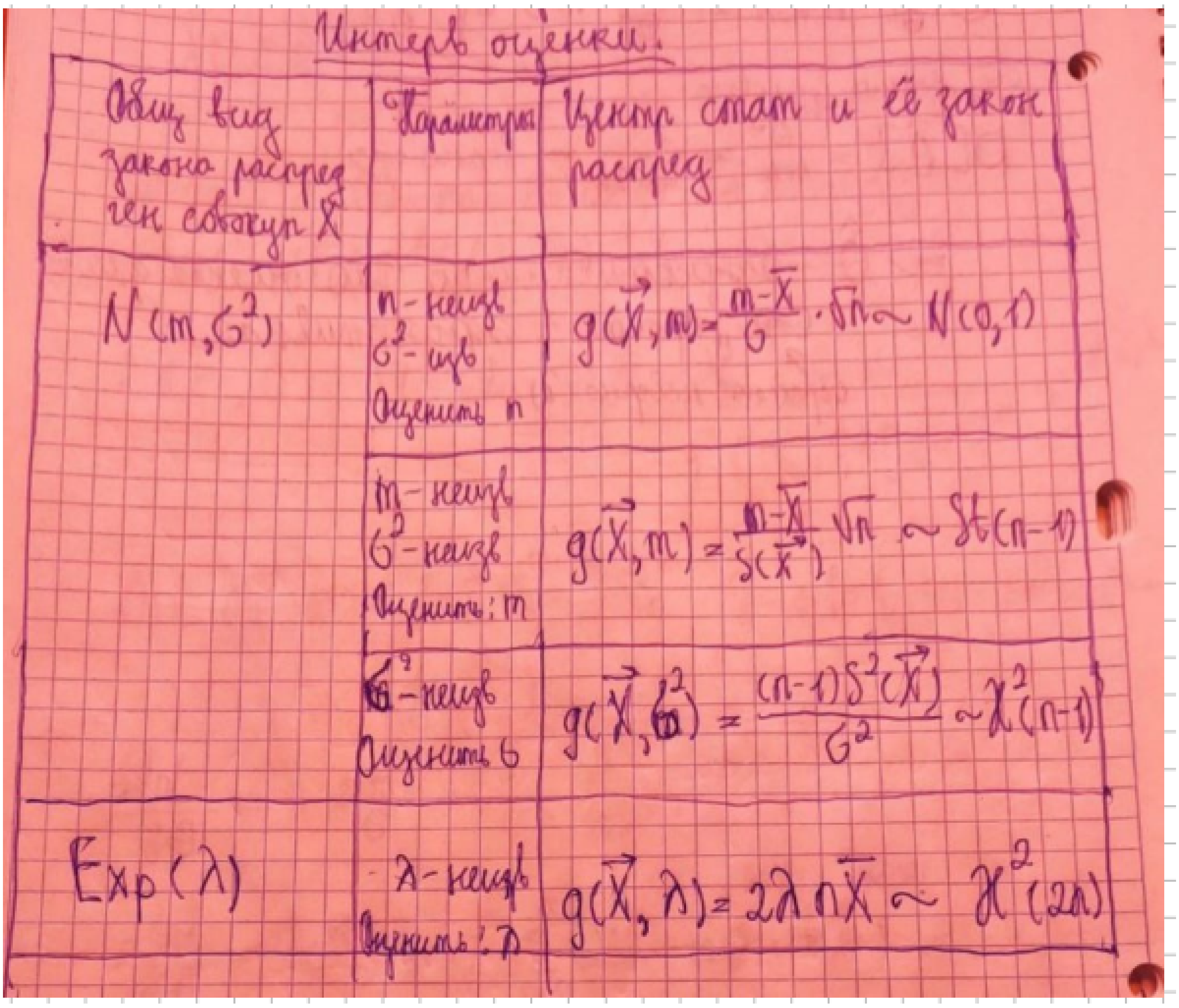
Рк1: типы задач, а также особенности их решения и формализации

Тип задач 1.

Общее

Для них характерен y-доверительный интервал (вероятность).

Таблица:



Интерв оценки.

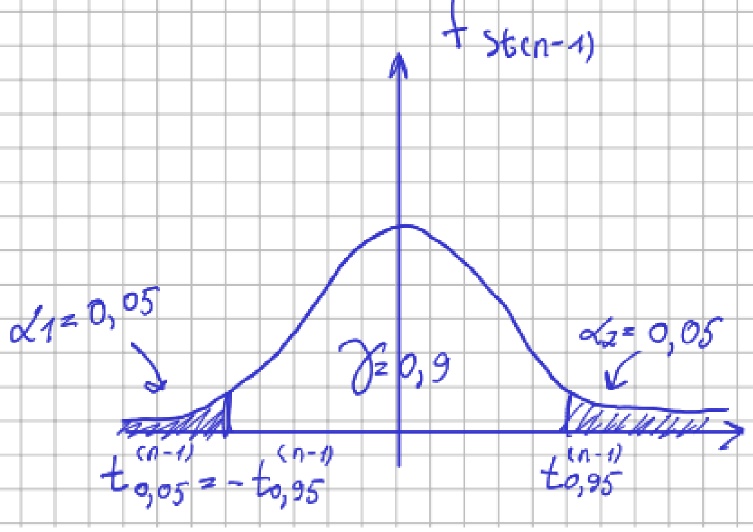
Общ вид закона распред ген совокуп X	Параметры	Центр стат и её закон распред
$N(m, \sigma^2)$	m - неизв σ^2 - изв Оценить m	$g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{\sigma} \cdot \sqrt{n} \sim N(0,1)$
	m - неизв σ^2 - неизв Оценить: m	$g(\vec{X}, m) = \frac{m - \bar{X}}{S(\vec{X})} \sqrt{n} \sim St(n-1)$
	σ^2 - неизв Оценить σ	$g(\vec{X}, \sigma^2) = \frac{(n-1) S^2(\vec{X})}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
$Exp(\lambda)$	λ - неизв Оценить: λ	$g(\vec{X}, \lambda) = 2\lambda n \bar{X} \sim \chi^2(2n)$

Как решать:

1. Пусть X - случайная величина, принимающая значения, равные …
2. Записать формулу центральной статистики (выбираем с учетом того, что хотим найти)
3. Ищем Альфу = (1 - y) / 2 = …
4. Рисуем график (Стьюдент и Нормальное распределение — по центру, X-распределение справа) Ось x и ось fN
5. Пишем P{квантиль < статистика < квантиль} В случае статистики (2n)будет <=
6. Выводим P{одно-сюда < то, что нужно найти < другое-туда} = y
7. Находим одно-сюда, другое-туда

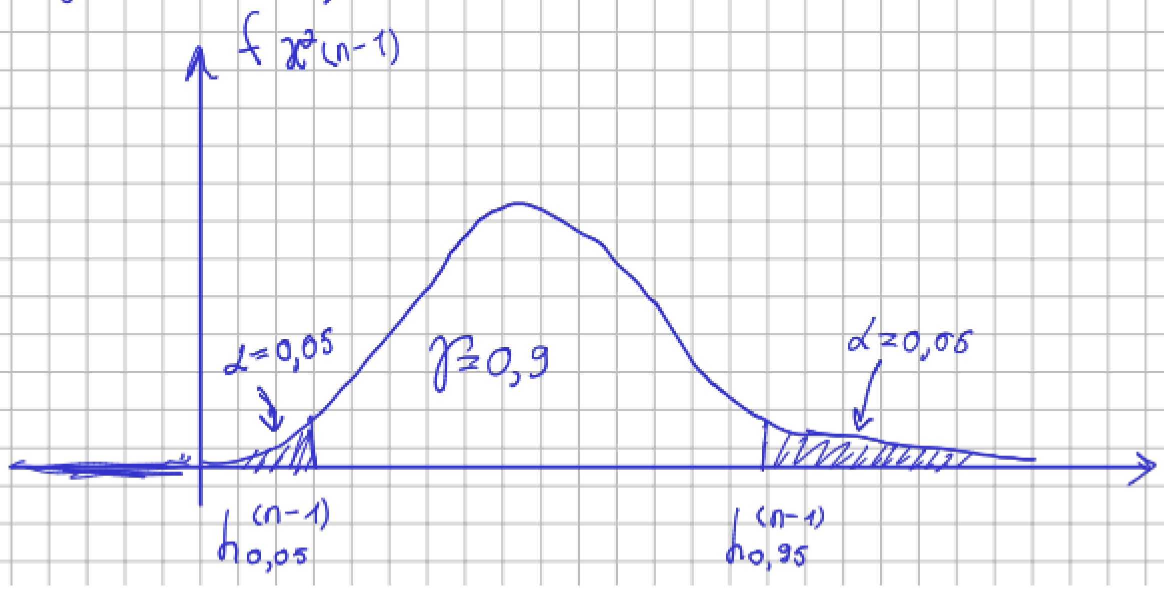
Виды графиков:

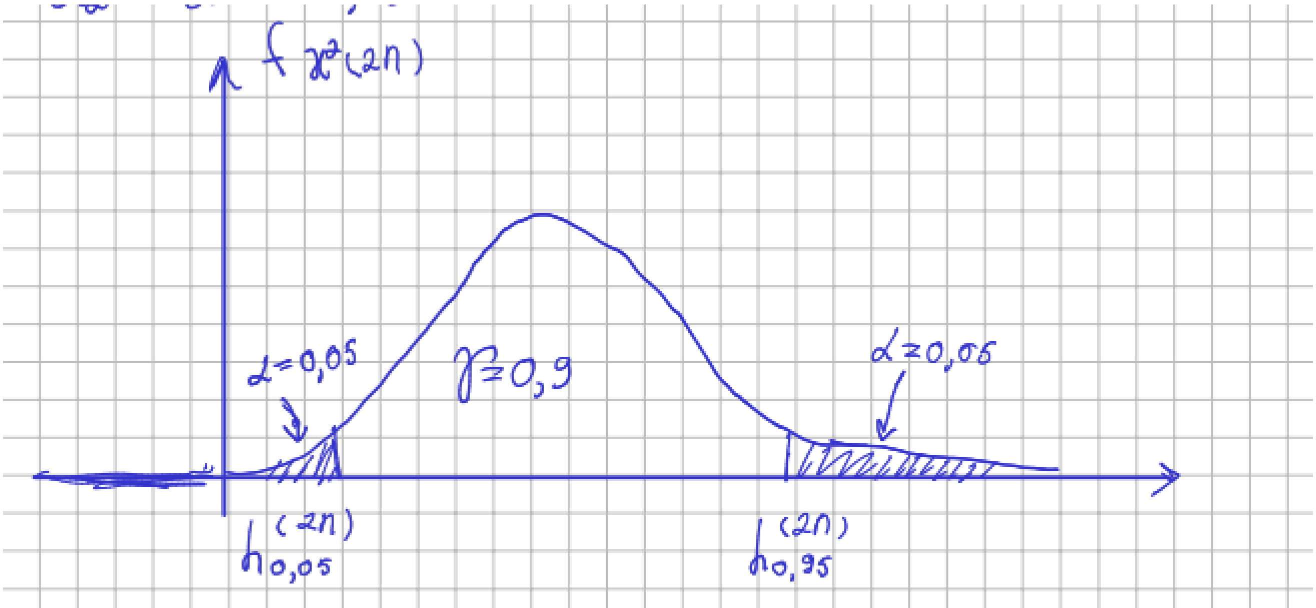
Положим $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$:



$t_{0,95}$ – квантиль уровня 0,95 распред $St(n-1)$

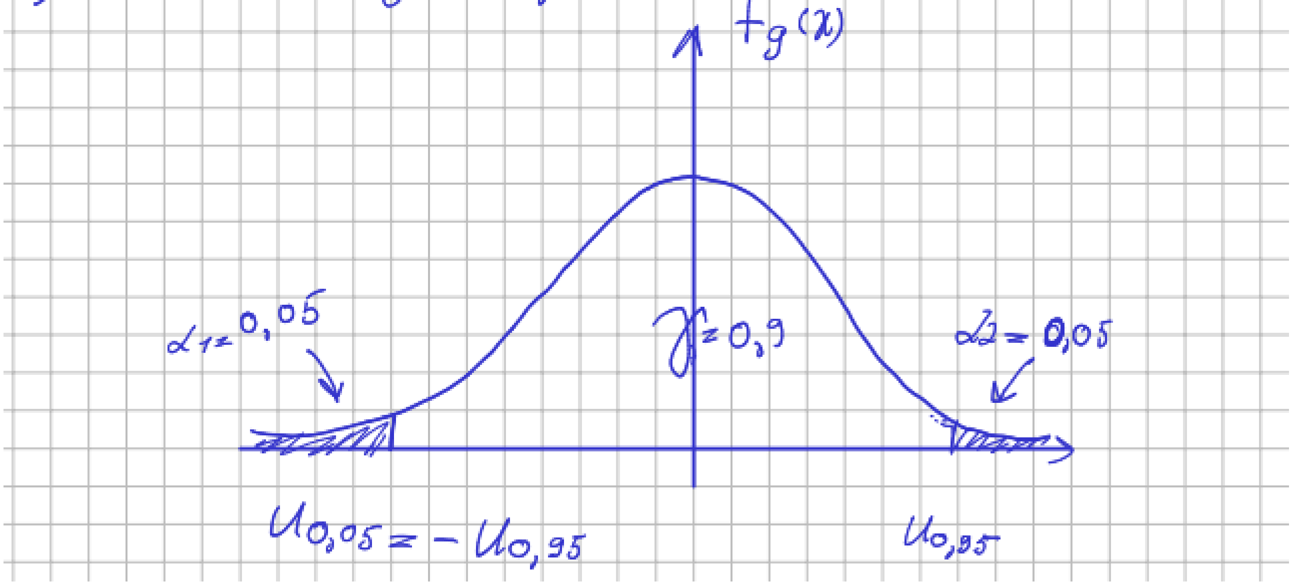
$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0{,}05$$





$h_{\alpha}^{(2n)}$ – квантиль уровня α распределения $\chi^2(2n)$

2) $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0,05$



Конкретные примеры

Задача 3. Для определения поражающей способности x зенитно-ракетного комплекса было проведено $n = 10$ испытаний, в результате которых получено, что $\bar{x}_n = 0,85$, $\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x}_n)^2 = 22,5\cdot 10^{-3}$. Для $\gamma = 0,9$ построить γ-доверительные интервалы для среднего значения и среднеквадратического отклонения рассматриваемой вероятности. Распределение контролируемого признака считать нормальным.

Двухэтапное решение: сначала ищем m, затем б.

Задача 3. *Для определения кучности стрельбы из некоторого оружия было проведено $n = 50$ выстрелов по плоской мишени. Построить γ-доверительный интервал для среднеквадратичного отклонения расстояния от места попадания пули до центра мишени, если $\bar{x} = 4$ см. Принять $\gamma = 0,9$, распределение контролируемого признака считать экспоненциальным.*

Двухэтапное решение: сначала ищем Л, затем б: 1/Л, 1/л.

от номинального не более чем на 2г.

3. Для определения глубины озера в данном месте было проведено $n = 10$ измерений с использованием эхолота, в результате чего получено $\overline{x}_n = 7.12$ м. Принимая распределение контролируемого признака нормальным, построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ для глубины озера в данном месте, если известно, что среднеквадратичное отклонение показаний эхолота составляет $\sigma = 10$ см.

Немного длиннее формализация:

E - сл вел, принимающая значения, равные ошибке измерения эхолота

E ~ N (0, б^2), где б = 0.1

X = a + E - сл вел, принимающая значения, равные показателям эхолота

X ~ N (mx, бx^2), где б = 0.1, где mx = M[a+E] = a, бx^2 = D[a+E]= б^2

Подсказка: когда вы видите фразу про ошибку, пытайтесь сделать так, чтобы основная формулировка в итоге совпадала с параметрами ошибки или была к ним близка

чайной величины. ... построения точечной оценки. Привести ...

2. Известно, что частота зубочелюстных аномалий у детей ... 15 лет составляет 61.1%. Какое число детей указанной группы с такой аномалией ... с вероятностью 0.95 после проверки 1000 пациентов?

3. Для определения давления, создаваемого ядерным взрывом определенной мощности на расстоянии R от эпицентра, в эпоху, предшествовавшую появлению ламповых ЭВМ в СССР, советские физики использовали следующий прием. На окружности радиуса R, описанной около эпицентра взрыва, расставлялись кирпичи, а после взрыва по дальности их отлета рассчитывалось искомое давление. Сколько нужно взять кирпичей для эксперимента, чтобы с вероятностью $\gamma = 0.95$ вычисленное среднее расстояние отлета отличалось от теоретического не более, чем на 0.1σ, если σ – среднеквадратичное отклонение этого расстояния? Распределение контролируемого признака считать нормальным.

№ вопроса	1	2	3	Σ = max	min
Баллы	12	11	11	34	20

3. Для определения напряжения в электросети поселка N было проведено $n = 50$ измерений, в результате которых получено $\overline{x}_n = 192$ В, $S^2(\vec{x}_n) = 400$ В^2. Считая распределение контролируемого признака нормальным, построить доверительный интервал уровня $\gamma = 0.9$ для среднего значения напряжения в сети.

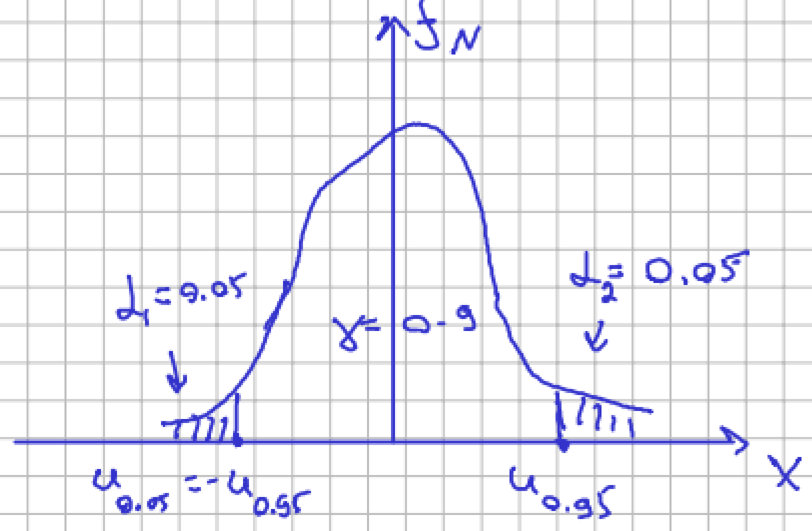
интервала для скалярного параметра.

2. Средняя насыпная плотность картофеля при температуре 20°C составляет 670 кг/м^3 при среднеквадратичном отклонении 4 кг/м^3, а объем багажника седана Volkswagen Polo (модельного ряда 2014 года) равен 460 л. В каких пределах с вероятностью 0.9 заключена масса картофеля, который можно загрузить в 100 таких седанов?

Хштрих = V * p

Далее по формуле:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1-\gamma}{2} = 0.05$$



$$P\left\{-u_{0.95} \le \frac{m - \bar{x}}{\sigma}\sqrt{n} \le u_{0.95}\right\} = 0.9$$

Тип задач 2.

Общее

1. Записать теорему Муавра-Лапласа (в скобках успех конкретной задачи)

По теореме Муавра-Лапласа:

Пусть 1) проводится n = 100 >> 1 экспериментов по схеме Бернулли с вероятностью успеха p = 0.1 (q = 1 - p = 0.9)

2) k - общее число успехов среди n испытаний (кол-во)

Тогда

$$P\{k_1 \le k \le k_2\} \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \text{ где}$$

$$x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}, \quad i = \overline{1,2}$$

Конкретные примеры

Задача 3. Вероятность того, что случайно выбранный студент факультета сдаст сессию без "троек", равна 0,1. Оценить вероятность того, что среди $n = 100$ наудачу выбранных студентов этого факультета доля хорошистов будет заключена в интервале $(0,05; 0,2)$.

Нужно найти промежутки k1 и k2. 100x0,05, 100x0,2 = 5, 20

1. Постановка задачи идентификации неизвест... случайной величины. Определение точечной оценки. Описать метод ... построения точечной оценки. Привести пример.

2. Известно, что частота зубочелюстных аномалий у детей с гипотиреозом в возрасте от 4 до 15 лет составляет 61.1%. Какое число детей указанной группы с такой аномалией можно ожидать с вероятностью 0.95 после проверки 1000 пациентов?

3. Для определения давления, создаваемого ядерным взрывом определенной мощности на ..., в эпоху, предшествовавшую появлению ламповых ЭВМ в СССР, ... прием. На окружности радиуса R, описанной ... по дальности их отлета ... чтобы с

3. Вероятность p того, что при одном выстреле боец попадет в "десятку", равна 0.7. Оценить вероятность того, что в серии из $n = 30$ выстрелов частота попадания этим бойцом в "десятку" отклонится от p не более чем на $\varepsilon = 0.15$.

X - …количеству детей с зубочелюстными аномалиями

X/n - …частоте зубочелюстных аномалий у детей среди n пациентов

Нужно найти MX = np и DX = npq.

Базовый Муавро-Лаплас

Выразить частоту = x/n

3) Имеем: $\sqrt{npq}$

$$P\left\{\left|\frac{X}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} =$$

Убираем модуль, приводим к двухстороннему виду, находим значения

Тип задач 3.

Общее

! Очень часто мелькают фразы про "ошибку" в условии. Фразы про ошибку характерны для задач первых трех типов, но здесь встречается наиболее часто.

! В этом типе задач левая часть вероятности почти всегда <= правой части. Если это не так, то необходимо написать следующее:

$$P\{|Y_n| > 0,5\sqrt{n}\} = 1 - P\{|Y_n| \le 0,5\sqrt{n}\} =$$

X - сл вел., принимающая значения, равное среднему арифметическому независимых одинаково распределенных случайных величин Yi,i = 1,n

Тогда MX = m, DX = б^2

X - линейная комбинация независимых одинаково распределенных сл величин Yi, i=1,n, то X имеет такое же распределение, следовательно:

MYi = m, DYi = б^2 = …

E понятно из условия, либо его требуется найти

1. Пишем про разницу между величинами, которая меньше либо равна отклонению
2. Домножаем на /б/Vn
3. Для последовательности выполняется ЦПТ
4. Заменяем левую часть вероятности на Zn
5. т.к выполняется ЦПТ, то Zn -> T ~ N(0,1)
6. т.к n >> 1 => Zn ~ N(0,1)
7. 2Ф0(правая часть вероятности)

$$P\{|X-m| \le 0{,}01\} = P\left\{\frac{|X-m|}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} \ominus$$

$$\left.\begin{cases} Y_1, Y_2, \ldots - \text{последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин} \\ \exists\, MY_i = m,\ \exists\, DY_i = \sigma^2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \text{для последов } Y_1, Y_2, \ldots \text{ выполняется ЦПТ}$$

$$\ominus\, P\left\{\underline{|Z_n|} \le \frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \left\{\begin{array}{l}\text{т. к. для Y1, Y2, ... выполняется ЦПТ} \\ \Rightarrow Z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} T \sim N(0,1)\end{array}\right\} \approx$$

$$\approx \left\{\begin{array}{l}\text{т.к. } n \gg 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Z_n \sim N(0,1)\end{array}\right\} = 2\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \ge 0{,}9973$$

$$2\Phi_0\left(\frac{0{,}01\sqrt{n}}{\sqrt{5}}\right) \ge 0{,}9973$$

$$\Phi_0\left(\frac{0{,}01}{\sqrt{5}}\sqrt{n}\right) \ge 0{,}49865$$

Конкретные примеры

Задача 3. Случайная величина является средним арифметическим независимых одинаково распределенных случайных величин, дисперсия каждой из которых равна 5. Сколько нужно взять таких величин, чтобы случайная величина с вероятностью, не меньшей 0,9973, отклонялась от своего математического ожидания не более чем на 0,01?

см выше

Задача 3. Для контроля работы вакуумной электропечи используют вакуумметр, систематическая ошибка которого равна нулю, а среднеквадратичное отклонение составляет $\sigma =$ $0,5 \cdot 10^{-3}$ Па. Считая, что ошибки измерителя распределены по нормальному закону, найти точность измерения величины вакуума, полученного на основании $n = 500$ замеров, гарантированную с вероятностью (надежностью) $p = 0,95$.

Y - … величине ошибке измерения

MY = my= 0, DY=б^2= (…)^2

X = Y + a - … результатам измерений

MX = M[Y+a] = MY + a = 0 + a = a = mx

DX = D[Y+a] = DY = (…)^2 = бx^2

Xi - …результату i-ого измерения

Тогда $X_i \sim X, \ i=\overline{1,n} \Rightarrow$

$\Rightarrow MX_i = m_x, \ DX_i = \sigma_x^2, \quad i=\overline{1,n}$

$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$P\{|\overline{X}_n - m| > 0{,}5\sigma\}$

Подсказка: Так или иначе стараемся привести к сумме величин, чтобы в итоге она удовлетворяла ЦПТ

Задача 3.
Для исследования теоретического значения высоты подъема воздушного фонарика было закуплено $n = 100$ фонариков. Считая распределение высоты подъема фонарика нормальной случайно величиной, определить с какой вероятностью средняя высота подъема будет больше своего теоретического значения на величину более $0,5\sigma$, если σ – среднеквадратичное отклонение высоты подъема?

Инвертированный знак у вероятности (см ! выше)

1. Сформулировать и доказать первое неравенство Чебышева.
2. Согласно стандарту в 100г цельного коровьего молока должно содержаться 88г воды. Считая, что среднеквадратичное отклонение содержания воды в молоке составляет 5г, найти вероятность того, что после проверки 225 образцов среднее содержание воды будет отличаться от номинального не более чем на 2г.

аналогично второму конкретному примеру

1. Сформулировать и доказать второе неравенство ...
2. ГОСТ 29322-2014 устанавливает, что сетевое напряжение в электических системах в странах-членах МЭК должно составлять 230В ± 10%. Считая, что закон распределения напряжения одинаков для всех источников и имеет среднеквадратичное отклонение 15 В, найти вероятность того, что после проверки величины напряжения в 100 независимых источниках на территории России его наблюденное среднее значение окажется в допустимых границах.

E = 230*0.1 = 23

Тип задач 4.

Общее

ЦЕЛЬ - СТАТИСТИКА ЯЙЦА

a - какое-то полученное значение. Обычно в нем содержится C, которое мы заменяем на значение из условия.

$r = 1 \Rightarrow 1$ уравнение

$$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$$

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$$

$$m_1(\theta) = MX = \int_0^1 x C x^{7\theta}\,dx = \theta\, a$$

$$\theta\, a = \bar{X}$$

$$\theta = \frac{\bar{X}}{a} \qquad \hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{a}$$

Конкретные примеры

территории России его наблюденное среднее значение окажется в допустимых ...

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{7\theta}$, $x \in [0, 1]$, где $C = 7\theta + 1$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

$$f(x) = C x^{7\theta}, \ x \in [0,1], \text{ где } C = 7\theta + 1$$

$r = 1 \Rightarrow 1$ уравнение

$$m_1(\theta) = \hat{m}_1(\vec{X})$$

$$\hat{m}_1(\vec{X}) = \bar{X}$$

$$m_1(\theta) = MX = \int_0^1 x C x^{7\theta}\, dx = \int_0^1 C x^{7\theta+1}\, dx = C\left(\frac{x^{7\theta+2}}{7\theta+2}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= C \cdot \frac{1}{7\theta+2} = \frac{7\theta+1}{7\theta+2}$$

$$\frac{7\theta+1}{7\theta+2} = \bar{X}$$

$$7\theta + 1 = 7\theta\bar{X} + 2\bar{X}$$

$$\theta(7 - 7\bar{X}) = 2\bar{X} - 1 \Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2\bar{X}-1}{7-7\bar{X}}}$$

$$\hat{\theta} = \frac{2\hat{X}-1}{7-7\bar{X}}$$

вероятности и ...

2. Вероятность того, что случайно выбранн... равна 0.1. Оценить вероятность того, что среди $n = 100$ наудачу выбранн... факультета доля хорошистов будет заключена в интервале $(0.05, 0.2)$.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{3\theta}$, $x \in [0, 3]$, где $C = (3\theta+1)/(3^{3\theta+1})$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = \theta^{2-x}\ln\theta$, $x \geqslant 2$. С использованием метода моментов построить точечную оценку параметра θ.

Тут интегрирование по частям. И это все различия.

Тип задач 5.

2. Пусть X – случайная величина, для которой $MX = 3$, $DX = 4$. С использованием второго неравенства Чебышева оценить вероятности событий $\{X \geqslant 7\}$ и $\{0 < X < 9\}$.

Записать неравенство Чебышева

$$P\{|X-MX| \geq \varepsilon\} \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

Подгоняем к Чебышеву-2

а) $P\{X \geq 7\} = P\{X - MX \geq 7 - MX\} \leq P\{|X-MX| \geq 7-MX\} \leq$

$\leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$, где $\varepsilon = 7 - MX \Rightarrow$

$$\Rightarrow P\{X \geq 7\} \leq \frac{DX}{(7-MX)^2}$$

$$P\{X \geq 7\} \leq \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \Rightarrow P\{X \geq 7\} \leq 0.25$$

б) $P\{0 < X < 9\} = P\{0 - MX < X - MX < 9 - MX\} =$

$= P\{-3 < X - MX < 6\} \geq \underline{P\{|X-MX| < 3\}}$ **= 1 - P {|X - MX| >= 3}** $\geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2} \Rightarrow$

Подгоняем под модуль

$$\Rightarrow P\{0 < X < 9\} \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$P\{0 < X < 9\} \geq 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Тип задач 6.

1. Найдем функцию правдоподобия (Умножим **n** раз)

$$L(\vec{X}, \theta) = f(x_1, \theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n, \theta) = \theta^{5-x_1} \ln\theta \cdot \ldots \cdot \theta^{5-x_n} \ln\theta = \theta^{5n - \sum x_i} \cdot (\ln\theta)^n$$

2. Прологарифмируем (каждый компонент полученной ф-ии правдопобия)

$$\ln L(\vec{X}, \theta) = \ln\theta^{5n - \sum x_i} + n\ln(\ln\theta) = (5n - \sum_{i=1}^{n} x_i)\ln\theta + n\ln(\ln\theta) = n(5 - \bar{x}_n)\ln\theta + n\ln(\ln\theta)$$

Обязательно написать сумму Xi и привести их к Xn штрих.

3. Необходимое условие экстремума (Дописать дифференциал, дифференцировать по О)

3) Необходимое условие экстремума

$$\frac{\partial L(\vec{X},\theta)}{\partial\theta} = \frac{n(5-\bar{X}_n)}{\theta} + \frac{n}{\ln\theta\cdot\theta} = 0$$

$$\frac{n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta + n}{\ln\theta\cdot\theta} = 0 \Rightarrow n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta + n = 0$$

Далее система уравнений

$$\begin{cases} n(5-\bar{X}_n)\cdot\ln\theta + n = 0 \\ \theta \neq 0 \\ \ln\theta \neq 0 \end{cases}$$

$$\ln\theta = -\frac{1}{5-\bar{X}_n} \Rightarrow \theta = e^{\frac{1}{\bar{X}_n-5}} \Rightarrow \hat{\theta}(\vec{X}) = e^{\frac{1}{\bar{X}_n-5}}$$

Выражаем О. Записываем статистику О

4. Достаточное условие (двойной дифференциал)

$$\left.\frac{\partial^2 L(\vec{X},\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\hat{\theta}} \overset{?}{<} 0$$

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = Cx^{7\theta}$, $x \in [0, 1]$, где $C = 7\theta + 1$. Построить для параметра θ оценку максимального правдоподобия.

который можно загрузить в 100 таких седанов?

3. Непрерывная случайная величина X имеет функцию плотности $f(x) = \theta^{5-x}\ln\theta$, $x \geqslant 5$. Построить для параметра θ оценку максимального правдоподобия.