# Математическая статистика

# для специальности ИУ7, 3-й курс, 6-й семестр.

# Вопросы для подготовки к рубежному контролю №2

# Теоретические вопросы

1. **Понятие статистической гипотезы. Постановка задачи проверки статистических гипотез. Понятие критерия проверки гипотез. Ошибки первого и второго рода, вероятности их совершения. Определение уровня значимости и мощности критерия. Общие принципы построения статистических критериев.**

Пусть X — сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. Х.

**Процедуру проверки статистической гипотезы** обычно проводят следующим образом:

* Проверяемую гипотезу называют основной и обозначают H0
* Выдвигают так называемую альтернативную (конкурирующую) гипотезу H1, при этом H0H1 = ∅, но возможно, H0 + H1 не исчерпывают все возможные случаи
* На основании имеющейся выборки принимают решение либо в пользу H0, либо в пользу H1.

Правило, посредством которого принимается решение об истинности H0 и H1, называют **статистическим критерием проверки гипотез**.

**Ошибка I-го рода** — принять конкурирующую гипотезу H1 при истинности основной гипотезы H0. Вероятность совершения такой ошибки

— называют уровнем значимости критерия.

**Ошибка II-го рода** — принять основную гипотезу H0 при истинности конкурирующей гипотезы H1. Вероятность совершения такой ошибки

1- (вероятность не совершения ошибки II-го рода) — называют мощностью критерия.

Конечно, при построении критерия хотелось бы обеспечить условия:  
однако это принципиально невозможно (при фиксированном объеме наблюдений n), поэтому обычно критерии строят исходя из условий:

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Простая и сложная гипотезы. Построить критерий Неймана-Пирсона для проверки двух простых гипотез.**

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. Х.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Статистическая гипотеза называется **простой**, если она однозначно описывает закон распределения сл.в. X (т.е. эта гипотеза однозначно задает функцию распределения сл.в. X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется **сложной**.

**Критерий Неймана-Пирсона** проверки двух простых гипотез.

Пусть:

1. X — сл.в.
2. — неизвестный параметр
3. — функция распределения сл.в. Х (F будет полностью известна, если задать значение неизвестного параметра)

Рассмотрим задачу проверки 2-х простых гипотез:

против , где (т.к. H0H1 = 0)

Рассмотрим статистику:

где — функция правдоподобия случайной выборки .

Очевидно, что "большие" значения статистики φ свидетельствуют в пользу гипотезы H1, а "малые" значения — в пользу гипотезы H0. Поэтому критическое множество в рассматриваемой задаче можно задать в виде:

где — некоторое пороговое значение (константа), которая выбирается из условий:

2. При этом вероятность β совершения ошибки II-го рода при фиксированном α не может быть уменьшена

Замечания:

1) Построенный критерий называют критерием Неймана-Пирсона. Статистику ϕ называют отношением правдоподобия

2) Если X — непрерывная сл.в., а — функция плотности сл.в. X, то вероятность совершения ошибки первого I-го рода может быть записана в виде:

где — функция правдоподобия.

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. С использованием критерия Неймана-Пирсона построить критерий проверки двух простых гипотез H0 = {m=m0}, H1 = {m=m1}, m1 > m0, относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.**

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. Х.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Простая и сложная гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Вероятности их совершения как функции неизвестного параметра при проверке двух сложных гипотез. Понятия размера критерия и функции мощности. Выражение вероятностей ошибок первого и второго рода через функцию мощности. Понятие равномерно наиболее мощного критерия. Равномерно наиболее мощный критерий при проверке гипотез H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0} относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины при известной дисперсии.**

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. Х.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Статистическая гипотеза называется **простой**, если она однозначно описывает закон распределения сл.в. X (т.е. эта гипотеза однозначно задает функцию распределения сл.в. X как функцию своего аргумента). В противном случае статистическая гипотеза называется **сложной**.

P.S. Далее будет использоваться — это промежуток, Власов их ввел, когда пошли сложные параметрические гипотезы, когда у нас не просто равна какому-то числу, а принадлежит промежутку.

**Ошибка I-го рода** — принять конкурирующую гипотезу H1 при истинности основной гипотезы H0. Вероятность совершения такой ошибки

— называют уровнем значимости критерия.

**Ошибка II-го рода** — принять основную гипотезу H0 при истинности конкурирующей гипотезы H1. Вероятность совершения такой ошибки

1- (вероятность не совершения ошибки II-го рода) — называют мощностью критерия.

Величина — называется **размером критерия**.

**Функцией мощности критерия** называется ф-ция (менее жаргонный вариант ).

Выражение вероятностей ошибок первого и второго рода через функцию мощности:

Критерий, который при заданном размере α максимизирует функцию мощности одновременно по всем возможным критериям при всех , называется **равномерно наиболее мощным**.

Проверка гипотез

Пусть , где m — неизвестно, — известно

Рассмотрим задачу проверки гипотез

против , ( — простая, — сложная)

Решение:

1. Ранее рассматривалась задача проверки двух простых гипотез

против , где

При этом критическое множество имело вид:

1. Т.к. построенное ранее критическое множество фактически не зависит от (при условии, что ), то построенный ранее критерий является равномерно **наиболее мощным** для решения текущей задачи. Поэтому в рассматриваемой задаче критическое множество также определяется соотношением (\*)
2. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез**

**(a) H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0};**

**(б) H0 = {m =m0}, H1 = {m < m0};**

**(в) H0 = {m=m0}, H1 = {m ≠ m0}**

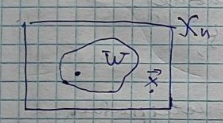
**относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины в случае *известной* дисперсии.**

Пусть X – сл.в. закон распределения, которой неизвестен (известен не полностью). **Статистической гипотезой** называют ∀ утверждение о законе распределения сл.в. Х.

Если статистическая гипотеза является утверждением о значениях параметров закона распределения, общий вид которого известен, то такая статистическая гипотеза называется **параметрической**. В противном случае статистическая гипотеза называется **непараметрической**.

Правило, посредством которого принимается решение об истинности H0 и H1, называют **статистическим критерием проверки гипотез**.

Статистический критерий обычно задается с использованием критического множества . При этом само решающее правило имеет вид:



Описание построения критериев проверки гипотез:

, где m **неизвестно**, σ **известно**

**a)**

Проверка гипотезы

против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль стандартного нормального распределения.

**б)**

Проверка гипотезы

против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль стандартного нормального распределения.

**с)**

Проверка против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль стандартного нормального распределения.

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез**

**(a) H0 = {m = m0}, H1 = {m > m0};**

**(б) H0 = {m =m0}, H1 = {m < m0};**

**(в) H0 = {m=m0}, H1 = {m ≠ m0}**

**относительно значения m математического ожидания нормальной случайной величины в случае *неизвестной* дисперсии.**

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

, где m **неизвестно**, σ **неизвестно**

**a)**

Проверка гипотезы

против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль распределения Стьюдента с степенями свободы.

**б)**

Проверка гипотезы

против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль распределения Стьюдента с степенями свободы.

**с)**

Проверка гипотезы

против

Используем статистику:

Критическое множество имеет вид:

где — квантиль распределения Стьюдента с степенями свободы.

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез**

**(a) H0 = {m1 = m2}, H1 = {m1 > m2};**

**(б) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 < m2};**

**(в) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 ≠ m2}**

**относительно значений m1 и m2 математических ожиданий двух независимых нормальных случайных величин в случае *известных* значений дисперсии.**

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

, — **неизвестны**

, — **известны**

Рассматриваем задачи проверки гипотез:

a) против

б) против

в) против

Рассмотрим сл.в. , тогда . Сформулируем формулировки эквивалентные задачам:

a) против

б) против

в) против

где

Используем статистику:

где — объем выборки , — объем выборки .

T — является линейной комбинацией нормальных сл.в. T сама имеет нормальное распределение.

Математическое ожидание:

При истинности ():

Дисперсия:

При истинности статистика .

Критические множества имеют вид:

a) ,

б) ,

в) ,

где , — квантили стандартного нормального распределения.

1. **Понятие статистической гипотезы и параметрической статистической гипотезы. Понятие критерия проверки гипотез и его задание с использованием критического множества. Описать построение критериев проверки гипотез**

**(a) H0 = {m1 = m2}, H1 = {m1 > m2};**

**(б) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 < m2};**

**(в) H0 = {m1 =m2}, H1 = {m1 ≠ m2}**

**относительно значений m1 и m2 математических ожиданий двух независимых нормальных случайных величин в случае *неизвестных (но совпадающих)* значений дисперсии.**

Начало вопроса — см. вопрос 5

Описание построения критериев проверки гипотез:

, — **неизвестны**

, — **неизвестны (но совпадают)**

Рассматриваем задачи проверки гипотез:

a) против

б) против

в) против

Используем статистику:

где — объем выборки , — объем выборки .

Критические множества имеют вид:

a)

б)

в)

где , — квантили распределения Фишера с степенями свободы