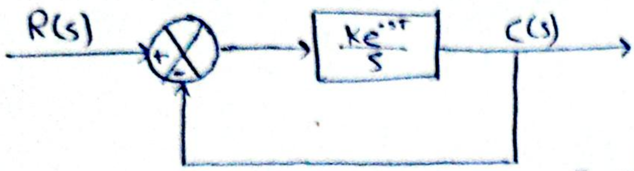
تمرین شماره ۱ کنترل خطی   نیلوفر رملا   ۴۰۱۲۲۹۰۳

۱. حد بهره و حد فاز سیستم شکل زیر را بدست آورده، شرایط پایداری سیستم را بیان کنید.



$$G(s) = \frac{Ke^{-sT}}{s} \longrightarrow T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{Ke^{-sT}}{s}}{1+\frac{Ke^{-sT}}{s}}$$

حلقه باز سیستم

$$= \frac{Ke^{-sT}}{s+Ke^{-sT}}$$ حلقه بسته سیستم

حد فاز و حد بهره $\longrightarrow s = j\omega \longrightarrow G(j\omega) = \frac{Ke^{-j\omega T}}{j\omega}$

$|G(j\omega)| = \frac{K}{\omega}$ Phase: $-\omega T - 90^\circ$ فاز و اندازه تابع تبدیل سیستم حلقه بسته و باز

$-\omega T - 90^\circ = -180^\circ$

$\omega_{pc} T = 90^\circ \longrightarrow \omega_{pc} = \frac{\pi}{2T}$ $|G(j\omega_{pc})| = \frac{K}{\omega_{pc}} = \frac{K}{\frac{\pi}{2T}} = \frac{2KT}{\pi}$

$$GM = \frac{1}{|G(j\omega_{pc})|} = \frac{\pi}{2KT}$$

$|G(j\omega_{pc})| = \frac{K}{\omega_{pc}} = 1 \longrightarrow \omega_{pc} = K$

phase: $-\omega T - 90^\circ = -KT - 90^\circ \longrightarrow PM = -180^\circ - (-KT - 90^\circ) = 90^\circ - KT$

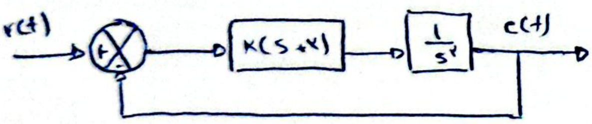
برای تعیین شرایط پایداری از معیار نایکوئیست یا تحلیل فرکانسی استفاده می کنیم:

پایداری حلقه بسته برقرار است اگر نمودار نایکوئیست $G(j\omega)$ صفر نقطه را در -۱ در صفحه مختلط محصور نکند. با توجه به حد فاز و حد بهره های بدست آمده شرط پایداری را می توانیم بصورت $KT < \frac{\pi}{2}$ تعریف کنیم.

تأخیر زمانی T باعث کاهش فاز می شود. این کاهش فاز در فرکانس خاصی $(\omega = \frac{\pi}{2T})$ باعث عبور نمودار نایکوئیست از -۱ می شود.

در واقع مقادیر K و T نمی توانند به ازای تمامی شرایط و مقادیر برقرار باشند.

۲- در سیستم زیر بهره K را چگونه تنظیم کنیم تا $PM = 45^\circ$ باشد؟



$G(s) = K(s+2) \times \frac{1}{s^2}$ $L(s) = \frac{K(s+2)}{s^2}$ تابع تبدیل سیستم حلقه باز

$PM = 180^\circ + \angle L(s) = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \longrightarrow |L(j\omega_c)| = 1$

$|L(j\omega)| = \frac{K\sqrt{\omega^2+4}}{\omega^2} \longrightarrow \frac{K\sqrt{\omega_c^2+4}}{\omega_c^2} = 1$ $K\sqrt{\omega_c^2+4} = \omega_c^2$

$\Rightarrow K^2(\omega_c^2+4) = \omega_c^4 \longrightarrow K^2\omega_c^2 + 4K^2 = \omega_c^4 \longrightarrow \omega_c^4 - K^2\omega_c^2 - 4K^2 = 0$ $\omega_c^2 = x$ تغییر متغیر

$$\Rightarrow \omega_c = \sqrt{\frac{K^2+\sqrt{K^4+16K^2}}{2}}$$

$$\angle L(j\omega) = \angle \frac{K(j\omega+2)}{(j\omega)^2} = \angle(j\omega+2) - 2\angle(j\omega)$$

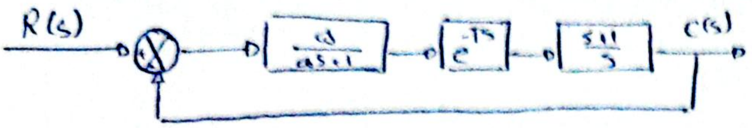
$$\angle L(j\omega_c) = \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) - 180^\circ$$

$45^\circ = 180^\circ + \angle L(j\omega_c) \longrightarrow \angle L(j\omega_c) = -135^\circ$

$\arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) - 180^\circ = -135^\circ \longrightarrow \arctan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 45^\circ \longrightarrow \tan(45^\circ) = 1 = \frac{\omega_c}{2} \longrightarrow \omega_c = 2$

$\frac{K\sqrt{\omega_c^2+4}}{\omega_c^2} = 1 \longrightarrow \frac{K\sqrt{2^2+4}}{4} = 1 \longrightarrow \frac{K\sqrt{8}}{4} = 1 \longrightarrow K 2\sqrt{2} = 4 \longrightarrow K = \sqrt{2}$

۳- سیستم کنترل شکل زیر را در نظر بگیرید. برای $T=2s$ نمودار بودی تابع تبدیل سیستم را رسم کنید. در متلب نیز رسم کرده و مقادیر حاشیه بهره و فاز را به دست آورده و در مورد پایداری بحث کنید.

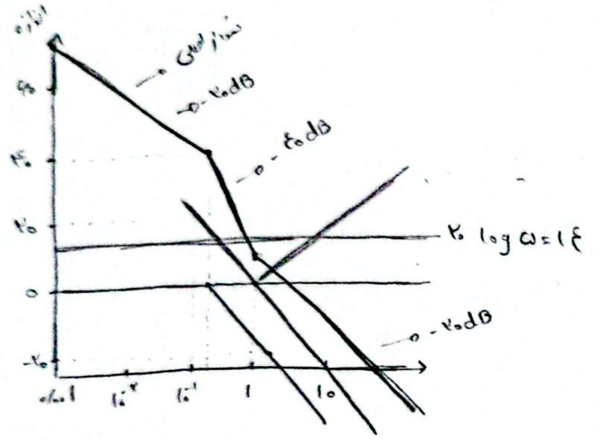


$$L(s)=\frac{5}{5s+1}e^{-Ts}\times\frac{s+1}{s}\longrightarrow T=2\longrightarrow L(s)=\frac{5(s+1)e^{-2s}}{s(5s+1)}$$

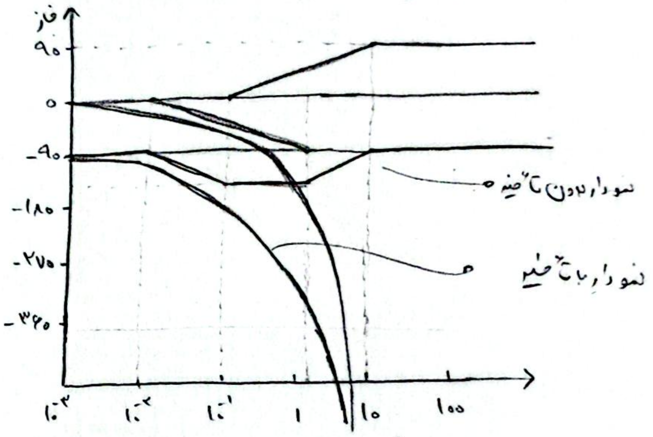
$$s=j\omega\longrightarrow L(j\omega)=\frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)}$$

$$20\log|L(j\omega)|=20\log\left|\frac{5(j\omega+1)e^{-2j\omega}}{j\omega(5j\omega+1)}\right|$$ یا $$L=20\log 5+20\log\sqrt{\omega^2+1}-20\log\omega-20\log\sqrt{(5\omega)^2+1}$$

$$\tan^{-1}\frac{1}{\omega}-2\omega-\tan^{-1}\frac{\omega}{0}-\tan^{-1}\frac{5\omega}{1}=-90-2\omega-\tan^{-1}\frac{5\omega}{1}+\tan^{-1}\frac{1}{\omega}$$



$|e^{-Ts}|$ برابر ۱ می‌باشد، نمودار اندازه بود برحسب log ← ۰ ← سیستم تأخیر در اندازه تأثیر ندارد.



شرایط پایداری ← سیستم تأخیر زمانی دارد که ممکن است باعث ناپایداری شود.

- برای بررسی ناپایداری، حاشیه فاز و بهره بررسی می‌شوند:
- اگر حاشیه فاز مثبت باشد، سیستم پایدار است.
- اگر حاشیه بهره کمتر از ۰ دسی‌بل باشد، سیستم ناپایدار است.

۴- حد فاز و حد بهره سیستم با تابع تبدیل حلقه باز $GH(s)=\frac{4a^2}{(s+a)^2}$ و $a>0$ چقدر است؟

$$GH(s)=\frac{4a^2}{(s+a)^2}\;;\quad a>0\qquad s=j\omega\longrightarrow\frac{4a^2}{(j\omega+a)^2}=GH(j\omega)$$

$$GH(j\omega)=\frac{4a^2}{(a-j\omega)^2}\longrightarrow|GH(j\omega)|=\frac{4a^2}{|a-j\omega|^2}=\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}$$

$$\angle GH(j\omega)=\angle(a-j\omega)^2=-2\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\frac{4a^2}{(a^2+\omega^2)^2}=1\longrightarrow(a^2+\omega^2)^2=4a^2\longrightarrow a^2+\omega^2=2a\longrightarrow\omega^2=2a-a^2\qquad\omega_{gc}=\sqrt{2a-a^2}$$

$$-2\arctan\left(\frac{\omega_{pc}}{a}\right)=-180^\circ\longrightarrow\arctan\left(\frac{\omega_{pc}}{a}\right)=90^\circ\longrightarrow\omega_{pc}=\infty$$

$$\angle GH(j\omega_{gc})=-2\tan^{-1}\left(\frac{\omega_{gc}}{a}\right)=-2\arctan\left(\frac{\sqrt{2a-a^2}}{a}\right)\longrightarrow PM=180^\circ+\angle GH(j\omega_{gc})$$

از طرفی در واقع حد بهره تعریف نشده است، زیرا هیچ فرکانسی وجود ندارد که زاویه سیستم به ۱۸۰- برسد.

بی‌نهایت و نامحدود