دانشگاه
خواجه نصیرالدین طوسی
K. N. Toosi University
of Technology

دانشکده مهندسی برق

تحقیق: مکان هندسی ریشه ها برای سیستم های دارای تاخیر

دانشجو:

نیلوفر ملا ۴۰۱۲۲۹۰۳

استاد درس:

جناب آقای دکتر تقی راد

بسم الله الرحمن الرحیم

فهرست

مقدمه

در نظریه کنترل، پایداری و عملکرد سیستم‌های دینامیکی عمدتاً با موقعیت قطب‌های آن‌ها تعیین می‌شود. برای سیستم‌های بدون تاخیر، روش‌های سنتی مانند **ریشه‌های مکانیکی** (Root Locus)اطلاعات ارزشمندی در مورد نحوه حرکت قطب‌های سیستم به هنگام تغییر پارامترهای سیستم فراهم می‌کنند. اما برای سیستم‌های دارای تاخیر، رفتار قطب‌ها پیچیده‌تر می‌شود. تاخیرهای زمانی که در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی (مانند شبکه‌های ارتباطی، سیستم‌های مکانیکی، سیستم‌های زیستی) وجود دارند، می‌توانند باعث بی‌ثباتی و تأثیرات زیادی بر روی دینامیک سیستم شوند.

این مقاله به بررسی **مکان هندسی ریشه‌ها** برای سیستم‌های دارای تاخیر پرداخته و تحلیلی با استفاده از روش ریشه‌های مکانیکی ارائه می‌دهد. تمرکز اصلی این تحقیق بر روی درک نحوه تأثیرگذاری تاخیر زمانی بر حرکت ریشه‌ها و پایداری سیستم است. هدف ما ارائه یک مطالعه جامع در مورد رفتار قطب‌های سیستم‌های دارای تاخیر و نمایش این مفاهیم با استفاده از شبیه‌سازی‌های MATLAB است.

پیش زمینه نظری

سیستم های دارای تاخیر

یک **سیستم دارای تاخیر**، سیستمی است که در آن خروجی در یک زمان خاص به وضعیت‌های گذشته نیز بستگی دارد. این سیستم‌ها معمولاً با معادلات دیفرانسیل با اعضای تأخیری مدل می‌شوند که به صورت زیر هستند:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$$

که در آن:

- $x(t)$بردار حالت است،
- Aماتریس سیستم است،
- Bماتریس ورودی است،
- τتاخیر زمانی است.

تاخیرهای زمانی باعث شیفت فاز و در بعضی موارد منجر به رفتار نوسانی یا بی‌ثباتی سیستم می‌شوند.

روش ریشه های مکانیکی

ریشه‌های مکانیکی یک روش گرافیکی است که در سیستم‌های کنترل برای تعیین پایداری سیستم به هنگام تغییر پارامترها (معمولاً یک گین) استفاده می‌شود. این روش بر اساس معادله ویژگی سیستم است:

$$\det(sI-A)=0$$

در مورد سیستم‌های دارای تاخیر، این معادله پیچیده‌تر می‌شود به دلیل وجود اعضای تأخیری که بر روی قطب‌های سیستم تأثیر می‌گذارند.

مکان هندسی ریشه ها

تحلیل عمومی برای سیستم های دارای تاخیر

مقدار تاخیر باعث تغییرات زیادی در ریشه‌های مکانیکی سیستم می‌شود. برخلاف سیستم‌های بدون تاخیر که قطب‌های آن‌ها به صورت پیش‌بینی‌شده حرکت می‌کنند، ریشه‌های سیستم‌های دارای تاخیر مسیرهای پیچیده‌تری در صفحه مختلط دارند.

برای یک سیستم دارای تاخیر، معادله ویژگی به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$\det (sI - A) + e^{(- \tau s)} = 0$$

عضو $e^{(- \tau s)}$ پیچیدگی اضافی ایجاد می‌کند. با افزایش تاخیر، قطب‌ها ممکن است به سمت‌های غیرمنتظره حرکت کنند که باعث بی‌ثباتی سیستم می‌شود. مکان هندسی ریشه‌ها می‌تواند تغییر کند و حالت‌های نوسانی جدیدی به وجود بیاید.

تاثیر تاخیر بر حرکت ریشه ها

عضو تاخیر $e^{(-\tau s)}$ تأثیر زیادی بر ریشه‌های مکانیکی دارد. این تأثیرات می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- **تاخیر فازی**: تاخیر باعث ایجاد تأخیر فاز می‌شود که باعث می‌شود قطب‌ها از محور حقیقی دورتر شوند.
- **بی‌ثباتی**: اگر تاخیر به اندازه کافی بزرگ باشد، ممکن است باعث شود قطب‌ها به نیمه راست صفحه مختلط منتقل شوند که منجر به بی‌ثباتی سیستم می‌شود.
- **رفتار نوسانی**: برای مقادیر خاصی از تاخیر، سیستم ممکن است به دلیل تعامل پیچیده قطب‌ها، نوسانی رفتار کند.

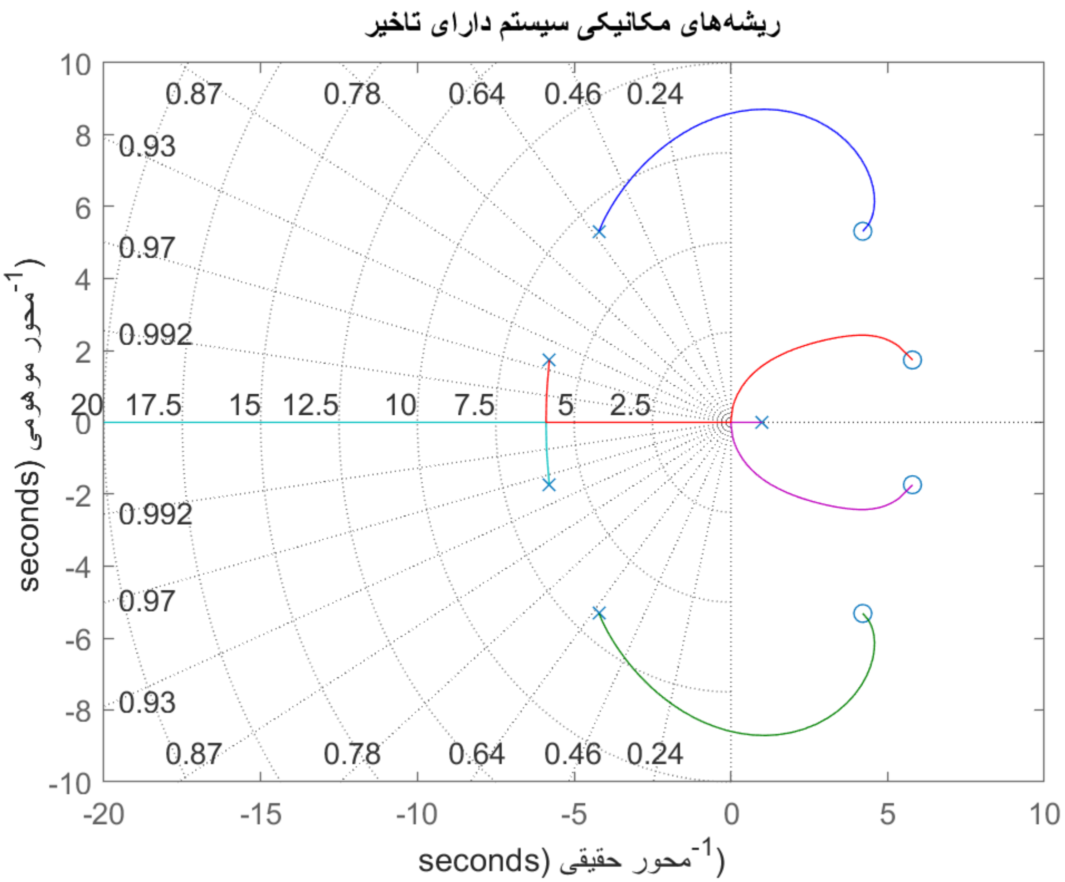
مسیر دقیق حرکت ریشه‌ها بستگی به پارامترهای سیستم، از جمله تاخیر τ دارد و می‌تواند با استفاده از نمودار ریشه‌های مکانیکی تحلیل شود.

اجرای متلب

```
% تعریف پارامترهای سیستم
tau = 1;  % تاخیر زمانی
A = -1;   % ماتریس سیستم برای مدل SISO
B = 1;    % ماتریس ورودی برای مدل SISO
C = 1;    % ماتریس خروجی برای مدل SISO
D = 0;    % ماتریس ورودی-خروجی برای مدل SISO

% ایجاد تابع انتقال برای سیستم بدون تاخیر (با استفاده از تقریب پاده)
s = tf('s');
G = (C / (s + A)) * pade(exp(-tau * s), 4);  % تابع انتقال با تاخیر و تقریب پاده مرتبه 4

% رسم ریشه های مکانیکی
figure;
rlocus(G);
title('ریشه های مکانیکی سیستم دارای تاخیر');
xlabel('محور حقیقی');
ylabel('محور موهومی');
grid on;
```



- کد بالا یک سیستم با تاخیر τ را تعریف می‌کند و سپس تابع انتقال آن را با استفاده از جمله تأخیری e^(- τ s) می‌سازد.
- تقریب پاده یک روش برای جایگزینی تأخیر e^(- τ s) با یک تابع کسری است که می‌تواند به راحتی در محاسبات استفاده شود. این تقریب می‌تواند تأخیر را به صورت یک کسری از چند جمله‌ای نمایش دهد.
- تابع `pade(exp(-tau * s), 4)` تأخیر e^(- τ s) را با یک تقریب پاده مرتبه ۴ جایگزین می‌کند.
- این تقریب پاده یک کسری از چند جمله‌ای است که به سیستم کمک می‌کند تا بتوان ریشه‌های مکانیکی آن را رسم کرد.

- عدد 4 در اینجا مرتبه تقریب پاده است که می‌توانید آن را تغییر دهید تا دقت تقریب افزایش یا کاهش یابد.
- استفاده از تقریب پاده دقت سیستم را تا حدودی کاهش می‌دهد، اما این یک روش استاندارد برای شبیه‌سازی و تحلیل سیستم‌های دارای تأخیر است.

نتایج و بحث

در شبیه‌سازی انجام‌شده، می‌توان مشاهده کرد که چگونه ریشه‌های سیستم با تغییر تاخیر تغییر می‌کنند. برای تاخیرهای کوچک، قطب‌ها مشابه سیستم‌های بدون تاخیر حرکت می‌کنند. اما با افزایش تاخیر، مشاهده می‌کنیم که:

- قطب‌ها از محور حقیقی دورتر می‌شوند.
- سیستم ممکن است برای مقادیری از تاخیر، رفتار نوسانی پیدا کند.
- برای تاخیرهای بزرگ، سیستم بی‌ثبات می‌شود و قطب‌ها به نیمه راست صفحه مختلط منتقل می‌شوند.

این تحلیل نشان می‌دهد که در طراحی سیستم‌ها و کنترل آن‌ها باید به تأثیرات تاخیر توجه ویژه‌ای داشت. تاخیرهای کوچک ممکن است قابل مدیریت باشند، اما تاخیرهای بزرگ می‌توانند سیستم را بی‌ثبات یا نوسانی کنند.

نتیجه گیری

این مطالعه یک تحلیل دقیق از مکان هندسی ریشه‌ها برای سیستم‌های دارای تاخیر با استفاده از روش ریشه‌های مکانیکی ارائه داد. نتایج نشان می‌دهند که تاخیرهای زمانی می‌توانند تأثیر زیادی بر پایداری و دینامیک سیستم‌ها داشته باشند. معرفی تاخیر باعث می‌شود قطب‌ها به طور غیرمنتظره حرکت کنند و احتمال بی‌ثباتی یا رفتار نوسانی سیستم وجود داشته باشد. بنابراین، در طراحی و تحلیل سیستم‌های کنترل باید تاخیرها به دقت مد نظر قرار گیرند.

منابع

- Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall.
- Ibrahim, A. (2014). *Control Systems with Time Delays*. Wiley.
- Khalil, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.