

به نام خدا



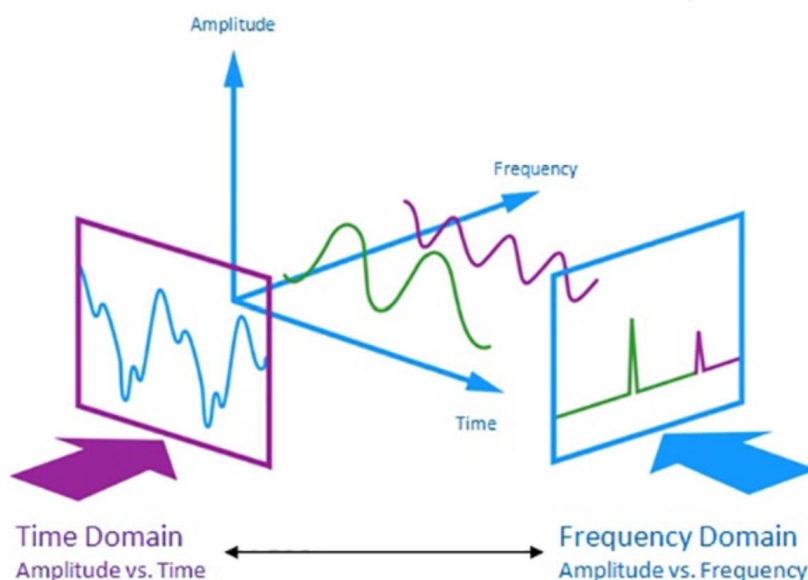
تحقیق اول: فضای زمانی و فرکانسی

نیلوفر ملا ۴۰۱۲۲۹۰۳

استاد: جناب آقای دکتر تقی راد

مقدمه

سیستم‌های دینامیکی، چه در مهندسی برق، چه در مکانیک و دیگر شاخه‌های مهندسی و علم، به طور معمول توسط معادلات دیفرانسیل توصیف می‌شوند. تحلیل این سیستم‌ها می‌تواند در دو حوزه متفاوت انجام شود: حوزه زمان و حوزه فرکانس. تجزیه و تحلیل زمانی و تحلیل فرکانسی دو رویکردی هستند که برای مطالعه رفتار سیستم‌ها از جمله سیستم‌های کنترلی استفاده می‌شوند. حوزه زمان شامل بررسی پاسخ سیستم به سیگنال‌های ورودی در زمان لحظه‌ای است، در حالی که حوزه فرکانس مبتنی بر تجزیه سیستم به توابع سینوسی با فرکانس‌های مختلف است. برای انتقال سیستم‌ها به حوزه فرکانس، معمولاً از تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه استفاده می‌شود. عملکرد یک سیستم کنترلی از روی مشخصه‌های حوزه زمانی‌اش، پاسخ آن را به طرز واقع‌گرایانه‌تری در عمل مشخص می‌کند ولی به دلایلی از جمله: دشوار بودن بیان تحلیلی برای پاسخ زمانی سیستم‌های کنترلی با مرتبه بالا به دلیل عدم وجود روش واحد برای رسیدن به سیستمی با مشخصات مناسب، بیشتر سیگنال‌هایی که باید پردازش شوند یا در اصل سینوسی‌اند و یا می‌توان آن‌ها را با مؤلفه‌های سینوسی نمایش داد و اهمیت حوزه فرکانس در طرح و تحلیل سیستم‌های مخابراتی، بایستی به تجزیه و تحلیل سیستم‌ها در حوزه فرکانس نیز بپردازیم.



حوزه زمان

در تحلیل سیستم‌ها در حوزه زمان، روابط بین ورودی و خروجی سیستم به‌طور مستقیم در طول زمان محاسبه و بررسی می‌شود و سیگنال‌های ورودی و خروجی به صورت تابعی از زمان نمایش داده می‌شوند. برای مثال، معادلات دیفرانسیل زمان-پیوسته و تفاضلی زمان-گسسته از جمله ابزارهای اصلی این تحلیل‌ها هستند. تجزیه و تحلیل زمانی بر پاسخ گذرا یک سیستم تاکید می‌کند و اطلاعاتی را در مورد رفتار سیستم در طول زمان، از جمله پایداری، زمان ته‌نشینی و پاسخ به اختلالات ارائه می‌دهد. پارامترهایی مانند مکان‌های قطب و صفر، زمان خیز، زمان اوج، زمان ته‌نشینی، زمان تاخیر، ضریب میرایی، فرکانس طبیعی و فرکانس میرایی در تحلیل حوزه زمان در نظر گرفته می‌شوند. طراحی سیستم‌های کنترل در حوزه زمان اغلب شامل رویکرد آزمون و خطا، تکرار و تنظیم پارامترها برای دستیابی به عملکرد مطلوب است.

- چالش‌ها

- پیچیدگی معادلات دیفرانسیل: حل معادلات دیفرانسیل برای سیستم‌های غیرخطی یا سیستم‌های چند ورودی و چند خروجی بسیار پیچیده است.
- پاسخ‌های ناپایدار و نوسانی: تشخیص پایداری و نوع پاسخ سیستم، مانند پاسخ نوسانی یا میرا، در حوزه زمان مشکل‌تر است.
- مقیاس‌های زمانی مختلف: برای تحلیل دقیق رفتار سیستم‌ها، نیاز به تحلیل رفتار آن‌ها در مقیاس‌های زمانی مختلف داریم که در حوزه زمان می‌تواند دشوار باشد.

حوزه فرکانس

نمایش سیستم‌ها در حوزه فرکانس به وسیله تغییر تابع زمانی به یک تابع فرکانسی امکان‌پذیر است. این کار با استفاده از ابزارهای ریاضی مانند تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه انجام می‌شود. تحلیل فرکانسی شامل تجزیه و تحلیل چگونگی پاسخ سیستم به فرکانس‌های مختلف سیگنال‌های ورودی است و سیگنال‌های ورودی و خروجی به عنوان تابع فرکانس نمایش داده می‌شوند. تحلیل دامنه فرکانس بر پاسخ حالت پایدار تمرکز می‌کند و شامل تبدیل‌های لاپلاس، توابع انتقال و تکنیک‌های تحلیل پاسخ فرکانسی است. این تحلیل اطلاعاتی در مورد بهره سیستم، تغییر فاز، فرکانس‌های تشدید و رفتار وابسته به فرکانس ارائه می‌دهد. پارامترهایی مانند پهنای باند، بیش از حد پیک رزونانس، فرکانس تشدید، حاشیه فاز و حاشیه بهره در تحلیل حوزه فرکانس در نظر گرفته

می شوند. طراحی سیستم‌های کنترل در حوزه فرکانس اغلب شامل استفاده از جبران کننده‌هایی مانند $lead$, lag , $lead-lag$ برای شکل‌دهی به پاسخ فرکانسی و برآوردن مشخصات موردنظر است.

-ویژگی‌های نمایش سیستم‌ها در حوزه فرکانس و مشخصه های آن

- پاسخ فرکانسی سیستم: در حوزه فرکانس، رفتار سیستم در برابر فرکانس‌های مختلف سیگنال ورودی به خوبی مشخص می شود. سیستم‌ها معمولاً دارای فیلترهای فرکانسی هستند که برخی فرکانس‌ها را تضعیف و برخی دیگر را تقویت می کنند. به همین دلیل، تحلیل در حوزه فرکانس برای فهم بهتر رفتار سیگنال‌های دوره‌ای و نوسانی مفید است.
- پایداری و نوسانات: با نمایش سیستم‌ها در حوزه فرکانس، ابزارهایی مانند مکان هندسی ریشه‌ها و نمودار بود به کمک مهندسین می آیند تا پایداری سیستم را بررسی کنند. در حوزه فرکانس، تحلیل پایداری سیستم‌ها ساده‌تر است و می توان به سرعت فهمید که آیا سیستم پایدار است یا ناپایدار.
- ساده سازی معادلات: نمایش معادلات دیفرانسیل سیستم در حوزه فرکانس به عنوان یک معادله جبری ساده‌تر است. به جای حل معادلات دیفرانسیل پیچیده در حوزه زمان، معادلات جبری ساده‌ای در حوزه فرکانس به دست می آیند که حل آن‌ها ساده‌تر است.
- نمودارهای نیکویی و بود: یکی از ابزارهای مفید در تحلیل سیستم‌ها در حوزه فرکانس، استفاده از نمودارهای نیکویی (Nyquist) و بود (Bode) است. این نمودارها رفتار سیستم را به وضوح در برابر تغییرات فرکانس نمایش می دهند. این نوع تحلیل به ویژه برای بررسی بهره و فاز سیستم مفید است.
- آنالیز فیلترها و سیستم‌های فیلترینگ: بسیاری از سیستم‌ها به عنوان فیلتر فرکانسی عمل می کنند که فرکانس‌های خاصی از سیگنال ورودی را عبور داده و برخی دیگر را تضعیف می کنند. تحلیل این سیستم‌ها در حوزه فرکانس بسیار ساده‌تر و قابل فهم‌تر است.
- اوج تشدید (M_p): بیشترین مقدار $|M(j\omega)|$ را اوج تشدید می گویند. به طور کلی مقدار M_p نشانه‌ای از پایداری نسبی یک سیستم کنترلی حلقه بسته است.
- فرکانس تشدید: به فرکانسی که در آن اوج تشدید رخ می دهد، فرکانس تشدید می گویند.
- پهنای باند: بنا به تعریف، فرکانسی است که در آن مقدار $|M(j\omega)|$ به ۷۰٪ مقدارش در فرکانس صفر برسد.

- سرعت قطع: آهنگ قطع برابر است با شیب فرکانسی که در آن نسبت اندازه بیش از فرکانس قطع کاهش یابد.
- حد بهره: معیاری است از پایداری نسبی و بنا به تعریف مقدار بهره‌ای است که میتوان به سیستم اضافه کرد تا همچنان پایدار بماند و از معکوس اندازه تابع تبدیل حلقه باز در فرکانس گذر فاز محاسبه میشود.
- حد فاز: معیاری است از پایداری نسبی و بنا به تعریف مقدار فازی است که میتوان به سیستم اضافه کرد تا همچنان پایدار بماند.
- محل قطب‌ها در سیستم حلقه بسته، پایداری سیستم را مشخص می‌کند.
- محل قطب‌ها و (صفرهای سیستم) در حوزه فرکانس رفتار گذرا و دائمی سیستم را مشخص می‌کنند.
- تحلیل و طراحی در سیستم‌های کنترل خطی اساسا در حوزه فرکانس انجام می‌شود.
- انتخاب نوع کنترلگر و بهره‌های آن با نگاه فرکانسی تعیین می‌شود.
- پایداری مطلق و نسبی در حوزه فرکانس تعریف می‌شود.

مزایای حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان

- فهم بهتر رفتار نوسانی: در حوزه زمان، تحلیل رفتار نوسانی سیستم‌ها پیچیده و دشوار است. اما در حوزه فرکانس، این رفتار به‌وضوح با مشاهده پاسخ فرکانسی سیستم قابل بررسی است.
- ابزارهای قوی‌تر برای تحلیل پایداری: ابزارهایی مانند تحلیل مکان هندسی ریشه‌ها (Root Locus) و نمودارهای بود و نیکویی ابزارهای قدرتمندی هستند که در حوزه فرکانس می‌توانند به‌خوبی برای تحلیل پایداری و کنترل سیستم‌ها به کار روند.
- ساده‌سازی حل معادلات: در حوزه زمان، حل معادلات دیفرانسیل پیچیده نیازمند تلاش زیادی است. اما در حوزه فرکانس، این معادلات به معادلات جبری تبدیل می‌شوند که حل آن‌ها ساده‌تر است.
- تحلیل سیگنال‌های پریودیک و فرکانسی: سیستم‌هایی که با سیگنال‌های نوسانی یا پریودیک سروکار دارند، در حوزه فرکانس به‌مراتب ساده‌تر و دقیق‌تر تحلیل می‌شوند. این ویژگی به ویژه در سیستم‌های مخابراتی و الکترونیکی که با سیگنال‌های فرکانسی سروکار دارند بسیار حائز اهمیت است.
- مدیریت بهتر منابع و طراحی سیستم‌ها: در بسیاری از سیستم‌ها، مدیریت منابع مانند توان یا نویز در فرکانس‌های مختلف اهمیت دارد. با تحلیل در حوزه فرکانس، می‌توان به‌راحتی تشخیص داد که در چه

فرکانس‌هایی توان مصرفی بالا است یا نویز بیشتر وجود دارد و بر این اساس طراحی سیستم بهینه‌سازی شود.

تفاوت اصلی نمایش فوریه و لاپلاس

تبدیل‌های فوریه و لاپلاس از ابزارهای اساسی در تحلیل سیستم‌ها و سیگنال‌ها هستند که هر یک کاربردهای متفاوتی در مهندسی دارند. این تبدیل‌ها به ما کمک می‌کنند که سیستم‌ها را از حوزه زمان به حوزه فرکانس یا حوزه مختلط منتقل کرده و ویژگی‌های آن‌ها را در شرایط مختلف بررسی کنیم. هرچند این دو تبدیل شباهت‌های زیادی دارند، اما تفاوت‌های کلیدی میان آن‌ها وجود دارد که هر یک را برای شرایط خاصی مناسب می‌کند.

- تبدیل فوریه: تحلیل سیستم‌های پایدار و فرکانسی

تبدیل فوریه عمدتاً برای تحلیل سیستم‌های پایدار و پریودیک به کار می‌رود. این تبدیل یک سیگنال زمانی را به مولفه‌های فرکانسی آن تجزیه می‌کند و نشان می‌دهد که یک سیگنال در چه فرکانس‌هایی بیشترین انرژی را دارد. در مهندسی، از تبدیل فوریه برای تحلیل سیستم‌های مخابراتی، سیگنال‌های صوتی و تصویری، و سیستم‌های الکترونیکی که در آن‌ها سیگنال‌ها به صورت پایدار و مداوم تعریف می‌شوند، استفاده می‌شود.

- ویژگی‌ها:

- تبدیل فوریه بر اساس تابع‌های سینوسی و کسینوسی عمل می‌کند که طبیعت تکراری دارند.
- این تبدیل برای سیگنال‌های پریودیک و پایدار بسیار مناسب است، زیرا به خوبی فرکانس‌های مشخص و ثابت را استخراج می‌کند.
- خروجی تبدیل فوریه یک طیف فرکانسی است که نشان می‌دهد چگونه انرژی سیگنال در فرکانس‌های مختلف توزیع شده است.

- شهود مهندسی:

فرض کنید یک سیستم ورودی سینوسی دریافت می‌کند. تبدیل فوریه این ورودی را به چندین موج سینوسی در فرکانس‌های مختلف تقسیم کرده و مشخص می‌کند که چگونه سیستم به هر یک از این فرکانس‌ها واکنش

نشان می‌دهد. از این رو، این تبدیل بیشتر زمانی استفاده می‌شود که هدف بررسی رفتار سیستم در برابر سیگنال‌های پایدار و فرکانس‌های خاص باشد.

- تبدیل لاپلاس: تحلیل سیستم‌های گذرا و ناپایدار

تبدیل لاپلاس یک ابزار بسیار قدرتمندتر و عمومی‌تر است که برای تحلیل سیستم‌های ناپایدار و گذرا به کار می‌رود. برخلاف فوریه که تنها بر تحلیل فرکانس‌های ثابت متمرکز است، تبدیل لاپلاس علاوه بر فرکانس، نرخ رشد یا میرایی سیستم‌ها را نیز در نظر می‌گیرد. این ویژگی تبدیل لاپلاس را برای تحلیل سیستم‌های دینامیکی و ناپایدار ایده‌آل می‌کند.

- ویژگی‌ها:

- تبدیل لاپلاس می‌تواند رفتار سیستم‌ها در مقابل سیگنال‌های گذرا یا لحظه‌ای را تحلیل کند.
- این تبدیل امکان مدل‌سازی رفتارهای نمایی، رشد یا زوال سیستم را فراهم می‌کند.
- از تبدیل لاپلاس می‌توان برای تحلیل سیستم‌های کنترل، مدل‌سازی دینامیک سیستم‌ها و بررسی پاسخ‌های زمانی و فرکانسی استفاده کرد.

- شهود مهندسی:

فرض کنید یک سیستم به یک ورودی پله‌ای یا یک ضربه ناگهانی پاسخ می‌دهد. در چنین حالتی، تبدیل لاپلاس می‌تواند واکنش سیستم را در طول زمان تحلیل کند. این تبدیل به مهندسین کمک می‌کند تا بفهمند که آیا یک سیستم به سرعت به حالت تعادل می‌رسد یا اینکه پاسخ‌های ناپایدار دارد. در نتیجه، لاپلاس برای سیستم‌هایی که با ورودی‌های گذرا مواجه‌اند، مانند سیستم‌های کنترلی، ایده‌آل است.

- مقایسه از نظر حوزه‌های کاربردی

الف) حوزه فرکانسی و پاسخ پایدار (فوریه)

تبدیل فوریه به طور خاص برای سیگنال‌هایی که در بازه‌های زمانی طولانی تعریف می‌شوند (بی‌نهایت در زمان) و پاسخ‌های پایدار دارند، بسیار کاربردی است. این تبدیل اجازه می‌دهد که سیستم‌ها از نظر پاسخ به ورودی‌های

سینوسی در فرکانس‌های مختلف تحلیل شوند. سیستم‌هایی مانند مدارهای الکترونیکی خطی یا سیستم‌های مخبراتی که سیگنال‌های پیوسته و تکرارشونده دارند، از این ابزار استفاده می‌کنند.

(ب) حوزه دینامیکی و رفتار گذرا (لاپلاس)

از سوی دیگر، تبدیل لاپلاس ابزار اصلی در تحلیل رفتار گذرا، شروع و پایان سیستم‌هاست. این تبدیل می‌تواند سیگنال‌ها و سیستم‌هایی را که دارای رفتار نمایی هستند و ممکن است در حالت‌های ناپایدار قرار گیرند، تحلیل کند. سیستم‌های کنترل، مدارهای الکتریکی با پاسخ‌های گذرا، و تحلیل پایداری از جمله کاربردهای مهم لاپلاس هستند.

• تفاوت اصلی از دیدگاه مهندسی

- تبدیل فوریه برای تحلیل سیستم‌های پایدار و فرکانسی استفاده می‌شود، و تنها به سیگنال‌های با فرکانس ثابت و پاسخ‌های مداوم سیستم توجه دارد.
- تبدیل لاپلاس به ما امکان می‌دهد که علاوه بر فرکانس، رفتارهای ناپایدار و گذرا را نیز بررسی کنیم. این تبدیل می‌تواند رفتار سیستم‌ها را در برابر سیگنال‌های نمایی، پله‌ای یا ناگهانی تحلیل کند.

نتیجه گیری

توجه به این نکته مهم است که هر دو تجزیه و تحلیل مکمل یکدیگر هستند. تجزیه و تحلیل دامنه زمان برای درک رفتار دینامیکی سیستم مفید است، در حالی که تجزیه و تحلیل دامنه فرکانس به شناسایی ویژگی‌های فرکانس خاص و کنترل کننده‌های طراحی کمک می‌کند که می‌توانند پاسخ سیستم را به فرکانس‌های مختلف شکل دهند. اما نمایش سیستم‌ها در حوزه فرکانس، به‌ویژه با استفاده از ابزارهایی مانند تبدیل لاپلاس و تبدیل فوریه، مزایای چشمگیری نسبت به نمایش در حوزه زمان دارد. تحلیل سیستم‌ها در حوزه فرکانس به ما امکان می‌دهد تا رفتار سیستم‌ها را در برابر سیگنال‌های مختلف به‌طور دقیق‌تر و شفاف‌تر بررسی کنیم. در بسیاری از موارد، حل معادلات پیچیده دیفرانسیل و تحلیل پایداری سیستم‌ها نیز با استفاده از ابزارهای حوزه فرکانس ساده‌تر می‌شود. همچنین، در سیستم‌های مهندسی که با سیگنال‌های نوسانی سروکار دارند، تحلیل در حوزه

فرکانس ابزار اصلی و بسیار کارآمدی برای فهم و بهبود عملکرد سیستم‌ها است. در مورد تبدیل فوریه و لاپلاس هم می‌توان گفت که تبدیل فوریه مانند نگاه کردن به یک سیستم از طریق یک عینک فرکانسی است که همه چیز را در حوزه‌های فرکانسی ثابت مشاهده می‌کند. این ابزار برای سیستم‌هایی که فرکانس‌های ثابت دارند و در طول زمان پایدارند، مناسب است. تبدیل لاپلاس مانند یک ابزار همه‌کاره است که نه تنها فرکانس، بلکه رفتارهای دینامیکی، گذرا و ناپایدار سیستم را نیز در نظر می‌گیرد. این ابزار برای تحلیل دقیق‌تر رفتار سیستم‌های پیچیده و ناپایدار به کار می‌رود. بنابراین، مهندسان باید با توجه به نوع سیستم و سیگنال ورودی، یکی از این دو تبدیل را برای تحلیل مناسب انتخاب کنند.

منابع

- کتاب سیستم‌های کنترل نوشته نورمن نیس

- درسنامه سیگنال‌ها و سیستم‌ها (Signals and Systems) نوشته اپنهایم و ویلسکی

- <https://electropowerco.ir/2023/05/13/time-analysis-compared-frequency-domain-analysis/>