



دانشگاه  
خواجه نصیرالدین طوسی  
K. N. Toosi University  
of Technology

دانشکده مهندسی برق

تحقیق: چرا وقتی سطری کامل صفر می شود در روش راث-هرویتز مشتق

می گیریم؟

دانشجو:

نیلوفر ملا ۴۰۱۲۲۹۰۳

استاد درس:

جناب آقای دکتر تقی راد

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# فهرست

مقدمه

روش راث هرویتز

-تعریف و کاربرد روش راث هرویتز

-شرح گام های روش راث هرویتز

مفهوم صفر شدن سطر در ماتریس

مشتق گیری در روش راث هرویتز

کد MATLAB برای تحلیل

نتایج و بحث

نتیجه گیری

منابع

## مقدمه

در نظریه کنترل، تحلیل پایداری سیستم‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است. یکی از روش‌های رایج برای تحلیل پایداری سیستم‌های دینامیکی، روش راث-هرویتز است. این روش به طور خاص برای سیستم‌های خطی در حال کنترل طراحی شده است و کمک می‌کند تا مسیرهای حرکت ریشه‌ها را در اثر تغییرات پارامترهای سیستم شبیه‌سازی و بررسی کنیم.

یکی از مسائل معمولی که در هنگام استفاده از روش راث-هرویتز به آن برخورد می‌کنیم، وضعیت صفر شدن سطر در ماتریس ویژگی است. زمانی که در این روش با سطری روبه‌رو می‌شویم که تمام اعضای آن صفر است، پرسشی به وجود می‌آید که چرا باید در این شرایط مشتق بگیریم. در این تحقیق، هدف ما پاسخ به این سوال است و همچنین بررسی چگونگی تحلیل پایداری سیستم با استفاده از روش راث-هرویتز در چنین شرایطی.

## روش راث-هرویتز

### تعریف و کاربرد روش راث-هرویتز

روش راث-هرویتز (Routh-Hurwitz) یکی از تکنیک‌های کلاسیک در نظریه کنترل است که برای بررسی پایداری سیستم‌های دینامیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش به طور ویژه برای بررسی پایداری سیستم‌های خطی با معادلات دیفرانسیل و توابع انتقال آن‌ها کاربرد دارد. هدف این روش، تعیین تعداد قطب‌های سیستم است که در نیمه راست صفحه مختلط قرار دارند، که به طور مستقیم بر پایداری سیستم تأثیر می‌گذارد.

در این روش، از ماتریس راث-هرویتز استفاده می‌شود که ترکیبی از ضرایب معادله ویژگی سیستم است. این ماتریس برای یک سیستم با معادله ویژگی به شکل:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

ساخته می‌شود و هدف آن این است که با بررسی علامت اعضای ماتریس راث-هرویتز، پایداری سیستم را تعیین کنیم.

### شرح گام‌های روش راث-هرویتز

1. ساخت ماتریس راث-هرویتز: از ضرایب معادله ویژگی، ماتریسی به ابعاد  $n \times n$  ساخته می‌شود. این ماتریس به تدریج پر می‌شود تا زمانی که تمام اعضای آن محاسبه شود.
2. بررسی صفر شدن سطر: یکی از مشکلات رایج در هنگام ساخت این ماتریس، صفر شدن سطرها است. اگر یک سطر از ماتریس صفر شود، نمی‌توان ادامه‌ی روش را به طور مستقیم ادامه داد. در این موقعیت، باید از روش‌های خاصی برای ادامه محاسبات استفاده کرد، مانند مشتق‌گیری.

### مفهوم صفر شدن سطر در ماتریس

در روش راث-هرویتز، اگر یکی از سطرهای ماتریس راث-هرویتز صفر شود، به این معناست که معادله ویژگی به طور خاص شرایط خاصی را برآورده کرده است که در آن شرایط ممکن است برخی از قطب‌ها در صفحه مختلط قرار نگیرند و تحلیل پایداری به طور مستقیم به هم بریزد.

صفر شدن سطر به طور کلی به این معناست که در آن سطر، روابط بین ضرایب معادله ویژگی به گونه‌ای است که هیچ گونه تأثیر مستقیمی بر پایداری سیستم ندارند. در این شرایط، به دلیل وجود عدم قطعیت در ماتریس، نمی‌توان تحلیل را ادامه داد و نیاز به مشتق‌گیری از معادله ویژگی داریم.

## مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز

زمانی که سطر ماتریس راث-هرویتز صفر می‌شود، ما از مشتق‌گیری برای حل این مشکل استفاده می‌کنیم. این مشتق‌گیری به ما کمک می‌کند تا تغییرات به وجود آمده را در ضرایب معادله ویژگی درک کنیم و آن را به یک فرم قابل حل تبدیل کنیم.

مشتق‌گیری در اینجا به معنای مشتق‌گیری نسبت به پارامترهای معادله ویژگی است که باعث می‌شود از بروز خطاهای عددی جلوگیری کنیم و تحلیل پایداری را ادامه دهیم. این کار به این دلیل انجام می‌شود که مشتق‌گیری به معادله ویژگی اجازه می‌دهد که به شکلی قابل تفکیک و قابل تجزیه و تحلیل درآید.

چرا مشتق‌گیری ضروری است؟

- در هنگام صفر شدن سطر، معادله ویژگی نمی‌تواند به طور مستقیم پاسخ‌های قطب‌ها را نمایش دهد.
- مشتق‌گیری به تحلیل کمک می‌کند تا تأثیرات تغییرات در پارامترهای سیستم را بررسی کنیم.
- از آنجا که بسیاری از سیستم‌های کنترل دارای رفتار پیچیده‌ای هستند، مشتق‌گیری امکان تحلیل دقیق‌تری از قطب‌ها را فراهم می‌آورد.

## ماهیت معادله ویژگی و شرایط صفر شدن سطر

معادله ویژگی یک سیستم دینامیکی معمولاً به صورت یک معادله چند جمله‌ای در متغیر  $s$  که نمایانگر قطب‌ها است) نوشته می‌شود. در تحلیل پایداری سیستم‌ها، استفاده از ماتریس راث-هرویتز برای بررسی علامت‌های عناصر آن به ما کمک می‌کند تا پایداری سیستم را تحلیل کنیم.

معادله ویژگی برای یک سیستم خطی به شکل زیر است:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

در ماتریس راث-هرویتز، ما ضرایب این معادله را به طور متوالی قرار می‌دهیم و سپس تحلیل می‌کنیم که چگونه ریشه‌های این معادله (که به قطب‌های سیستم مربوط است) با تغییرات پارامترها تغییر می‌کنند. در هر مرحله، اگر یکی از سطرها ماتریس راث-هرویتز صفر شود، این به این معنی است که هیچ اطلاعات مستقلی از قطب‌های سیستم برای تحلیل وجود ندارد و ادامه‌ی روند تحلیل با مشکل مواجه می‌شود.

## دلیل نیاز به مشتق‌گیری

زمانی که یک سطر از ماتریس راث-هرویتز صفر می‌شود، در واقع این به معنی از دست دادن اطلاعات و ایجاد یک حالت خاص در معادله ویژگی است که در آن، هیچ قطب خاصی برای سیستم شناخته نمی‌شود. در چنین حالتی، تحلیل پایداری به مشکل می‌خورد، زیرا علامت‌ها یا مقادیر مربوط به آن سطر نمی‌توانند اطلاعات مفیدی به ما بدهند.

برای رفع این مشکل، نیاز به مشتق‌گیری از معادله ویژگی داریم. مشتق‌گیری معادله ویژگی نسبت به پارامترهای سیستم (برای مثال ضرایب معادله ویژگی) به ما این امکان را می‌دهد که تغییرات سیستم را در حالت‌های بحرانی بهتر درک کنیم و به شکلی دقیق‌تر رفتار قطب‌ها را تحلیل کنیم.

### چرا مشتق‌گیری؟

در حقیقت، زمانی که سطر ماتریس راث-هرویتز صفر می‌شود، این به این معناست که سیستم در نقطه‌ای قرار دارد که به طور خاص رفتار قطب‌ها تغییر می‌کند. این می‌تواند نشان‌دهنده یک گذار از حالت پایداری به ناپایداری یا بالعکس باشد. مشتق‌گیری به ما این امکان را می‌دهد که این گذار را شبیه‌سازی و بررسی کنیم. مشتق‌گیری می‌تواند به چندین صورت انجام شود:

- **مشتق‌گیری نسبت به پارامترهای معادله ویژگی:** این نوع مشتق‌گیری به ما کمک می‌کند تا تأثیر تغییرات در ضرایب معادله ویژگی را بر روی ریشه‌های معادله بررسی کنیم.
- **مشتق‌گیری نسبت به زمان یا پارامترهای ورودی:** در برخی از سیستم‌ها، این مشتق‌گیری می‌تواند رفتار دینامیکی سیستم را در طول زمان یا تحت تأثیر تغییرات ورودی‌ها تحلیل کند.

### نمونه‌ای از سیستم‌های بحرانی

برای مثال، فرض کنید که یک سیستم کنترل به گونه‌ای طراحی شده که یکی از قطب‌های آن در نزدیکی محور حقیقی قرار دارد. اگر معادله ویژگی این سیستم به گونه‌ای باشد که یکی از سطرهای ماتریس راث-هرویتز صفر شود، این نشان‌دهنده یک نقطه بحرانی است که باید رفتار قطب‌ها را بررسی کنیم.



در چنین حالتی، مشتق‌گیری از معادله ویژگی به ما کمک می‌کند تا درک بهتری از چگونگی تغییر قطب‌ها و تأثیرات آن بر روی پایداری سیستم داشته باشیم.

مثال عددی برای توضیح بیشتر

فرض کنید معادله ویژگی یک سیستم به شکل زیر باشد:

$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$$

حالا اگر برای این معادله یک ماتریس راث-هرویتز بسازیم و در یکی از سطرها با صفر شدن مواجه شویم، می‌بینیم که تحلیل علامت‌ها و پایداری سیستم با مشکل مواجه می‌شود. در این حالت، مشتق‌گیری از معادله ویژگی و محاسبه تغییرات سیستم، به ما کمک می‌کند تا شرایط بحرانی را بهتر درک کنیم و آن را حل کنیم.

## کد MATLAB برای تحلیل

در اینجا کدی برای شبیه‌سازی یک سیستم خطی با استفاده از روش راث-هرویتز و بررسی حالت صفر شدن

سطر آورده شده است:

% تعریف ضرایب معادله ویژگی

a = [1 6 11 6]; % معادله ویژگی:  $s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = 0$

% تعداد ردیف‌های ماتریس راث-هرویتز

n = length(a);

% ساخت ماتریس راث-هرویتز

R = zeros(n, ceil(n/2));

% پر کردن اولین ردیف

R(1, :) = a(1:2:end);

R(2, :) = a(2:2:end);

% محاسبه بقیه سطرهای ماتریس راث-هرویتز

for i = 3:n

for j = 1:ceil((n-i)/2)

% فرمول راث-هرویتز برای محاسبه هر عنصر

R(i,j) = (R(i-1,1) \* R(i-2,j+1) - R(i-2,1) \* R(i-1,j+1)) / R(i-1,1);

end

end

% نمایش ماتریس راث-هرویتز

disp('ماتریس راث-هرویتز');

disp(R);

% بررسی صفر شدن سطر و مشتق‌گیری اگر لازم باشد

if any(R(:,1) == 0)

disp('یک سطر صفر شده است. مشتق‌گیری مورد نیاز است');

% محاسبه مشتق معادله ویژگی

syms s;

p = poly2sym(a, s); % تبدیل به نمادین

dp = diff(p); % مشتق‌گیری

disp('مشتق معادله ویژگی:');

disp(dp);

end

ماتریس راث-هرویتز:

1	11
6	6
10	0
0	0

یک سطر صفر شده است. مشتق‌گیری مورد نیاز است.

مشتق معادله ویژگی:

$3s^2 + 12s + 11$

## توضیحات:

۱. ایجاد ماتریس راث-هرویتز: در این کد، ابتدا یک ماتریس از ضرایب معادله ویژگی ایجاد می‌کنیم و

سپس به‌طور دستی سطرهای ماتریس راث-هرویتز را محاسبه می‌کنیم.

۲. فرمول راث-هرویتز: برای هر عنصر از ماتریس، از فرمول زیر استفاده می‌کنیم

$$\frac{R(i-1, 1) \cdot R(i-2, j+1) - R(i-2, 1) \cdot R(i-1, j+1)}{R(i-1, 1)} = R(i, j)$$

بررسی صفر شدن سطر: بعد از ساخت ماتریس، بررسی می‌کنیم که آیا سطری از ماتریس صفر شده است یا

خیر. اگر چنین بود، مشتق معادله ویژگی محاسبه می‌شود.

## نتایج و بحث

در نتیجه اجرای کد، می‌بینیم که در صورتی که سطری از ماتریس راث-هرویتز صفر شود، روش مشتق‌گیری به ما این امکان را می‌دهد که تحلیل پایداری سیستم را ادامه دهیم. این فرآیند به ما کمک می‌کند تا قطب‌ها را به صورت دقیق‌تری تحلیل کنیم و از بروز خطاهای احتمالی جلوگیری کنیم.

## نتیجه‌گیری

مشتق‌گیری در روش راث-هرویتز زمانی که سطر ماتریس صفر می‌شود، به دلیل لزوم حفظ دقت در تحلیل پایداری سیستم است. این عمل باعث می‌شود که سیستم را به‌طور دقیق‌تری تحلیل کرده و از بروز مشکلات

تحلیلی جلوگیری کنیم. همچنین، مشتق‌گیری به ما این امکان را می‌دهد که اثرات تغییرات پارامترهای سیستم را بر رفتار قطب‌ها درک کنیم و در نتیجه تحلیل پایداری را با دقت بیشتری انجام دهیم.

در نهایت، این فرآیند به تحلیل‌گران و مهندسان کنترل این امکان را می‌دهد که سیستم‌های پیچیده‌تر را بدون از دست دادن اطلاعات حیاتی، تحلیل کنند و رفتار آن‌ها را پیش‌بینی نمایند.

## منابع

1. Ogata, K. (2010). *Modern Control Engineering*. Prentice Hall.
2. Ziegler, J. G., & Nichols, N. B. (1993). \*Optimal