:::{list-table} :header-rows: 1 :align: center :widths: 90 10

- ▪ Fondamenti di programmazione

  Canale A-L - Prof. Sterbini

  AA 25-26 - Lezione 16

  - :::{image}attachment:5a837f06-202c-4c6e-9259-dd7a6dc01c97.png :width: 200px ::: :::

In [1…

```
#%load_ext nb_mypy
```

RECAP:

- Colori come oggetti (con matematica dei colori)
- Immagini come matrici di Colori
- Filtri come oggetti che generano il colore del nuovo pixel
- Figure geometriche come oggetti con metodi di disegno

METODOLOGIA di analisi Object Oriented

- Si individuano le strutture dati necessarie (**class**)
- con i loro **attributi** (informazioni "personali" di ciascun dato)
  - se una informazione è identica e comune a tutti gli individui la posso mettere come **attributo di classe**
- si definisce la loro inizializzazione (`__init__`) con gli argomenti necessari
- i **metodi** fondamentali (operazione sui dati o che calcolano valori a partire dagli attributi)
  - se vogliamo creare l'oggetto in altri modi possiamo definire un **@classmethod**

Ogni volta che vogliamo aggiungere una funzionalità ci dobbiamo chiedere quale oggetto deve essere "responsabile" (oppure "conosce le informazioni") per calcolarla

Metafora dell'ufficio

- E' un po' come voler organizzare un ufficio con persone che hanno **tipi di mansioni** diverse
  - ciascuno ha le sue informazioni e si cerca di non assegnarle a più uffici (classi)
  - gli scambi tra impiegati devono essere minimi

Ereditarietà (Specializzazione/ Riuso e Ampliamento delle funzionalita)

Se si vede che diverse classi condividono dei comportamenti/attributi comuni

- definiamo una super-classe che contiene l'implementazione comune dei metodi o gli attributi comuni
- nelle sottoclassi che ereditano da questa mettiamo solo gli attributi diversi ed i metodi diversi
  - per chiamare i metodi della superclasse si usa `super().metodo(argomenti)`

Esempio: tutti gli animali visualizzati in un gioco hanno una posizione, una icona, un verso ... l'insieme degli attributi e metodi comuni può essere messo nella classe Animale da cui ereditano Cane, Gatto, Cavallo, Ornitorinco ....

Esempio: Una gerarchia di figure realizzata con TURTLE graphics

Usiamo la libreria **turtle** che ci permette di disegnare sullo schermo con comandi semplici

In [2…

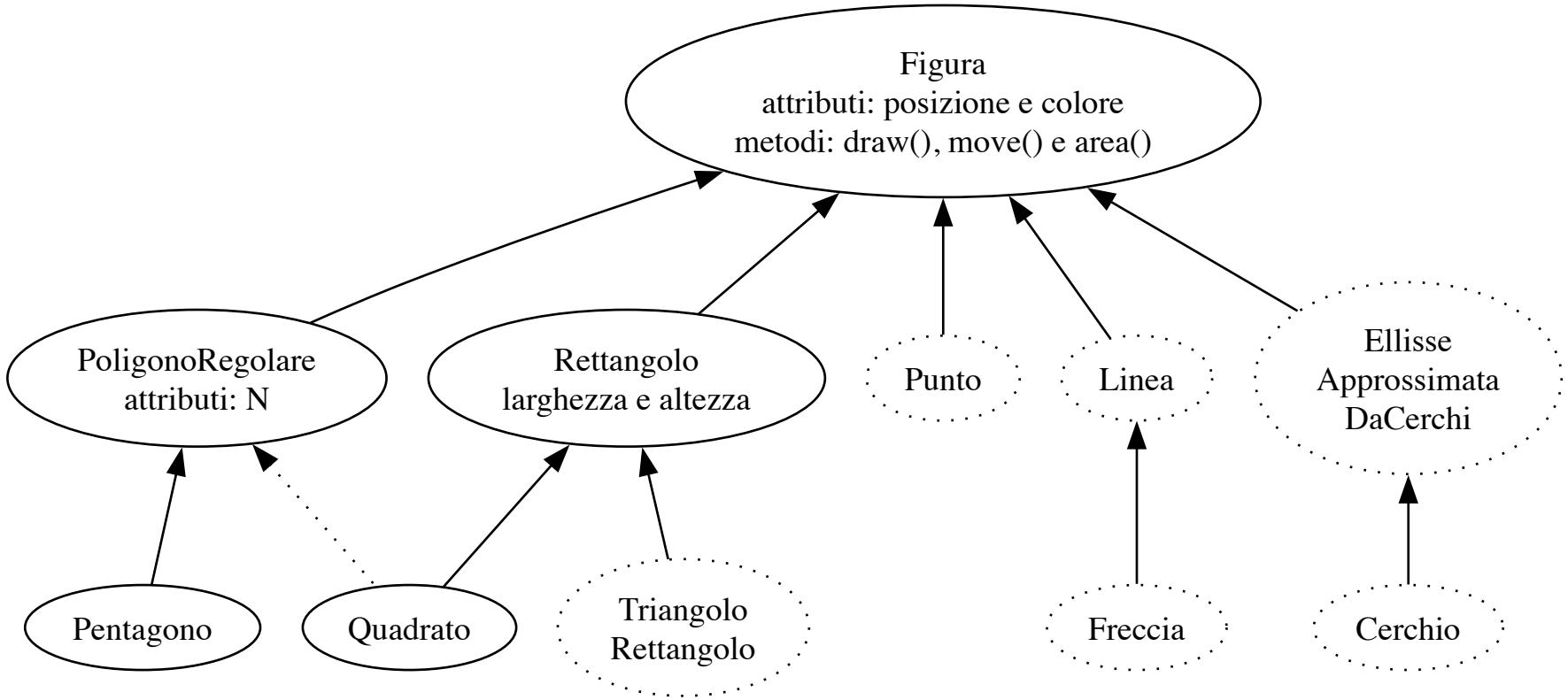
```
from pygraphviz import AGraph
G = AGraph(directed=True, rankdir='TD')
G.edge_attr['dir'] = 'back'
G.add_node('Figura',label='Figura\nattributi: posizione e colore\nmetodi: draw(), move() e area()')
G.add_node('PoligonoRegolare',label='PoligonoRegolare\nattributi: N')
G.add_node('Rettangolo',label='Rettangolo\nlarghezza e altezza')
G.add_nodes_from(['Punto','Linea','Freccia','Ellisse\nApprossimata\nDaCerchi','Cerchio',
                  'Triangolo\nRettangolo'],style='dotted')
G.add_edges_from([('Figura','Punto'),('Figura','Linea'),('Figura','PoligonoRegolare'),
```

```
    ('Figura','Rettangolo'),('Figura','Ellisse\nApprossimata\nDaCerchi'),
    ('Linea','Freccia'),('Rettangolo','Quadrato'),('PoligonoRegolare','Pentagono'),
    ('Rettangolo','Triangolo\nRettangolo'),('Ellisse\nApprossimata\nDaCerchi','Cerchio'),])
G.add_edge('PoligonoRegolare','Quadrato', style='dotted')
G.layout('dot')
```

In [3…

```
G
```

Out[3…



In [4…

```
# Tutte le Figure hanno:
# - posizione
# - colore
# - un metodo che le disegna (che per default non fa nulla)
# - un metodo che ne calcola l'area (per default 0)

# Ciascuna specifica figura
# - ha dei parametri specifici (raggio, lati, cateti, fuochi, retta e fuoco, ...)
# - ha il suo metodo specifico che la disegna
# - ha il suo metodo specifico che ne calcola l'area
```

```
# definiamo la gerarchia di classi:
# Figura
#   Punto
#   Linea
#       Freccia
#   Rettangolo
#       Quadrato
#       TriangoloRettangolo
#   PoligonoRegolare
#       Triangolo
#       Pentagono
#   EllisseApprossimataDaCerchi
#       Cerchio
```

In [5…
```
import turtle
t = turtle.Turtle()
turtle.colormode(255)
```

Una Figura ha posizione, direzione, spessore, colore, campitura

- deve calcolare l'area
- deve sapersi disegnare
- la si può spostare

In [6…
```
class Figura:
    def __init__(self, x, y, colore, direzione=0, spessore=1, campitura=None):
        self._x = x
        self._y = y
        self._colore = colore
        self._direzione = direzione
        self._spessore = spessore
        self._campitura = campitura

    def area(self):
        "metodo da implementare nelle sottoclassi"
```

```
        raise NotImplementedError("Il metodo 'area' non è stato implementato")

    def draw(self, turtle):
        """
        setup iniziale che temina le operazioni precedenti, si posiziona nel punto giusto
        setta direzione, dimensione della penna, colore della linea e colore di riempimento
        """
        turtle.end_fill()
        turtle.up()
        turtle.goto(self._x,self._y)
        turtle.setheading(self._direzione)
        turtle.color(self._colore)
        turtle.pensize(self._spessore)
        turtle.down()
        if self._campitura:
            turtle.fillcolor(self._campitura)
            turtle.begin_fill()

    def move(self, x, y):
        "per spostarsi basta cambiare la posizione"
        self._x = x
        self._y = y
```

In [7…

```
#help(turtle)
```

Un Rettangolo è una Figura con larghezza ed altezza

In [8…

```
class Rettangolo(Figura):
    def __init__(self, x, y, colore, larghezza, altezza,
                 direzione=0, spessore=1, campitura=None):
        "creo un nuovo rettangolo"
        # riuso l'inizializzazione della mia superclasse per
        # gli attributi che già sa gestire
        super().__init__(x, y, colore, direzione, spessore, campitura)
        # gestisco qui gli attributi aggiuntivi
        self._larghezza = larghezza
```

```
        self._altezza = altezza

    def area(self):
        "calcolo l'area del rettangolo"
        return self._larghezza * self._altezza

    def draw(self, turtle):
        """
        Disegno il rettangolo con la tartaruga fornita come parametro.
        """
        super().draw(turtle)
        turtle.forward(self._larghezza)
        turtle.left(90)
        turtle.forward(self._altezza)
        turtle.left(90)
        turtle.forward(self._larghezza)
        turtle.left(90)
        turtle.forward(self._altezza)
        turtle.left(90)
        turtle.end_fill()
```

un Quadrato è un Rettangolo con lati uguali

In [9…

```
class Quadrato(Rettangolo):
    "un Quadrato è un Rettangolo con lati uguali"
    def __init__(self, x, y, lato, colore,
                 direzione=0, spessore=1, campitura=None):
        # delego al Rettangolo di disegnarsi
        super().__init__(x, y, colore, lato, lato, # lati uguali
                         direzione, spessore, campitura )
```

Un PoligonoRegolare è una Figura con N lati uguali

In [1…

```
import math
class PoligonoRegolare(Figura):
    "Costruisco un poligono regolare"
```

```
    def __init__(self, x, y, lato, N, colore,
                 direzione=0, spessore=1, campitura=None):
        # delego alla Figura l'inizializzazione delle info che sa gestire
        super().__init__(x, y, colore, direzione, spessore, campitura)
        # e gestisco solo gli attributi in più
        self._N = N
        self._lato = lato

    def draw(self, turtle):
        # per prima cosa mi posiziono e inizializzo penna e colori
        super().draw(turtle)
        # poi disegno il poligono
        angolo_esterno = 360/self._N         # se N sono i lati
        for _ in range(self._N):             # per N volte
            turtle.forward(self._lato)       # disegno il lato
            turtle.left(angolo_esterno)      # e svolto a sinistra
        turtle.end_fill()                    # se c'è campitura coloro l'interno

    def area(self):
        """area del poligono regolare A=(N*L**2)/(4*tan(pi/N))
            vedi https://it.wikipedia.org/wiki/Poligono_regolare
        """
        N = self._N
        L = self._lato
        return (N*L**2)/(4*math.tan(math.pi/N))
```

un Pentagono è un PoligonoRegolare con 5 lati

In [1…

```
class Pentagono(PoligonoRegolare):
    "un Pentagono è un PoligonoRegolare con 5 lati"
    def __init__(self, x, y, lato, colore, direzione=0, spessore=1, campitura=None):
        # delego al PoligonoRegolare di disegnarsi
        super().__init__(x, y, lato, 5, colore, direzione, spessore, campitura)
```

In [1…

```
t.clear()

r = Rettangolo(50, 100, colore=(255,0,0), larghezza=200, altezza=100,
```

```
                direzione=45, spessore=5, campitura=(255,255,0))
p = PoligonoRegolare(-100, -100, lato=50, N=7, colore=(0,0,255),
                     direzione=20, spessore=4, campitura=(255,0,0) )
q = Quadrato(  100, 100, lato=90, colore=(0,255,0), direzione=-30, spessore=10)
f = Pentagono(-100, 200, lato=50, colore=(0,0,255), direzione=60,  spessore=20)
qq = PoligonoRegolare(-100, 100, lato=50, N=4, colore=(255,0,255), direzione=20, spessore=4)

r.draw(t)

r.move(-200,-100)

r.draw(t)

p.draw(t)

q.draw(t)

f.draw(t)

qq.draw(t)

print('rettangolo',r.area(), 'quadrato',q.area(), 'pentagono',f.area(), 'quadrato',qq.area())
```

```
rettangolo 20000 quadrato 8100 pentagono 4301.193501472418 quadrato 2500.0000000000005
```

In [1…

```
t.clear()
t.hideturtle()
```

ECCETERA (Linea, Freccia, EllisseApprossimataDaCerchi, Cerchio ...)

PAUSA

RICORSIONE E PROBLEMI RICORSIVI

i Frattali (insieme di Mandelbrot)

I frattali sono tra noi

Sono composti da **parti più piccole** che hanno la **stessa struttura del tutto**

Disegnamo un albero frattale

cos'è un albero frattale?

- ha un tronco che regge due rami
- i rami sono inclinati a sinistra e a destra del tronco
- ciascun ramo ha la **stressa struttura** di un albero ma leggermente **più piccolo**
- un albero di **livello <= zero è una foglia**

Problemi e Soluzioni ricorsive

Una funzione **è ricorsiva se chiama se' stessa** (principio di induzione).

Un problema ammette una soluzione ricorsiva se:

- SAPPIAMO COME rimpicciolire la dimensione del problema da risolvere (**riduzione**)
- esiste almeno un problema che ha una soluzione elementare (**caso base**)
- è sempre possibile, applicando ripetutamente la riduzione, arrivare ad uno dei casi base (**convergenza**)

- SAPPIAMO COME ottenere la soluzione del problema iniziale dalle soluzioni dei sottoproblemi (**composizione**)

Albero: cerchiamo le proprietà del problema ricorsivo

- Un albero di livello <= 0 è una foglia (cerchietto) (**caso base**)
- Un albero con N livelli è formato da: (**ricomposizione**)
  - un tronco lungo X
  - un **albero con N-1 livelli** inclinato a sinistra, con tronco 80% di X (**riduzione**)
  - un **albero con N-2 livelli** inclinato a destra, con tronco 70% di X (**riduzione**)
- sottraendo 1 o 2 ad N si arriva sempre ad un valore <= 0 (**convergenza**)

Questa è una definizione **ricorsiva**: i due rami sono due alberi! abbiamo **riduzione, caso base, convergenza e ricomposizione**!

Mi serve uno strumento di disegno:

- col modulo **turtle** posso tracciare movimenti relativi alla tartaruga
- col modulo **random** posso generare colori casuali

In [1…

```
# Per disegnare un albero frattale uso una tartaruga e dei numeri casuali
import turtle
from random import randint      # generatore di interi casuali
turtle.colormode(255)           # setto i colori in modalità RGB
t = turtle.Turtle()             # creo una tartaruga
t.penup()                       # alzo la penna
t.left(90)                      # giro verso l'alto
t.back(200)                     # mi posiziono in basso
t.pensize(5)                    # con penna cicciotta
t.speed(0)                      # e velocità alta
#help(turtle)                   # see also      (oppure 'pydoc turtle')
```

funzione che disegna un albero

In [1…

```
def albero(t, tronco, angolo, livelli):
    '''disegno un albero con un certo tronco iniziale e # di livelli
```

```
    Argomenti:
        t:       la tartaruga a cui dare i comandi
        tronco:  lunghezza del tronco
        angolo:  inclinazione dei rami rispetto al tronco
        livelli: quanti livelli di rami disegnare
    '''
    if livelli <= 0:       # se caso base
        draw_leaf(t)       # disegno la "foglia"
    else:                  # altrimenti caso ricorsivo
        # disegno il tronco (e mi sposto alla sua fine)
        draw_trunk(t, tronco)
        # mi giro a sinistra
        t.left(angolo)
        # disegno il ramo sinistro, più piccolo 80% e con un livello di meno
        albero(t, tronco * 0.8, angolo, livelli-1)
        # mi giro a destra
        t.right(angolo*2)
        # disegno il ramo destro, più piccolo 70% e con due livelli in meno
        albero(t, tronco * 0.7, angolo, livelli-2)
        # torno nella direzione iniziale
        t.left(angolo)
        # torno alla base del tronco
        t.back(tronco)
```

In [1…

```
# devo definire come disegnare il tronco e la foglia
def draw_trunk(t, lunghezza):
    'Disegno un tratto di colore casuale'
    # cambio colore a caso
    R = randint(100, 200)
    G = randint(100, 200)
    B = randint(100, 200)
    t.color(R,G,B)
    # abbasso la penna
    t.pendown()
    # mi muovo in avanti di lunghezza pixel
    t.forward(lunghezza)
    # alzo la penna
```

```
    t.penup()
    # NOTA: ora sono all'estremo opposto del tronco
```

In [1…
```
def draw_leaf(t):
    'disegno una foglia col colore corrente'
    # abbasso la penna
    t.pendown()
    # disegno un pallino
    t.dot()
    # alzo la penna
    t.penup()
```

In [1…
```
## Vediamo se funziona :-)
t.clear() # pulisco il foglio
albero(t,100,30,10)
```

In [1…
```
## Vediamo se funziona :-)
t.clear() # pulisco il foglio
albero(t,100,20,9)
```

Esempio classico: il fattoriale

DEF: il fattoriale di un numero N intero positivo è il prodotto dei numeri da 1 a N positivo

- come ridurre il problema? **diminuisco N di 1**
- quale soluzione semplice conosco? **F(1) = 1**
- come ottengo F(N) da F(N-1)? **lo moltiplico per N**
- il passo di riduzione converge al caso base? **Sì, sottraendo 1 a N alla fine si arriva ad 1** (se N>0)

Esempio classico: fattoriale(N)

proprietà	esempio
caso base	`F(1) = 1`

proprietà	esempio
riduzione	`F(N) -> F(N-1)`
convergenza	`N, N-1, ..... 1`
composizione	`F(N) = N*F(N-1)`

Schema di soluzione ricorsiva generica

```
def risolvi_ricorsivamente(problema):
    if is_caso_base(problema):
        return soluzione nota
    else:
        sottoproblema  = riduzione(problema)
        sottosoluzione = risolvi_ricorsivamente(sottoproblema)
        soluzione      = composizione(sottosoluzione)
        return soluzione
```

In [2…

```
from rtrace import trace

@trace(pause=True)
def fattoriale(N : int) -> int :
    if N==1:                        # caso base
        return 1                    # soluzione nota
    else:
        return N*fattoriale(N-1)    # riduzione e composizione

fattoriale.trace(5)
```

```
-------------------- Starting recursion --------------------
--------------------- Ending recursion ---------------------
Num calls: 5
```

Out[2…

```
120
```

Altro caso classico: i coniglietti di Fibonacci

- Una coppia di conigli il primo mese è giovane e non prolifica
- dal secondo mese in poi fa una coppia di coniglietti ogni mese

Ad ogni mese il numero di coppie si ottiene sommando:

- i nuovi coniglietti che nascono dalle coppie adulte (quelle di 2 mesi prima, già adulte)
- e le coppie correnti (presenti 1 mese prima)

Soluzione iterativa (simulando le coppie)

- F(0)=0
- F(1)=1
- ...
- F(N)=F(N-1)+F(N-2)

Soluzione ricorsiva

Se osserviamo il problema dal punto di vista dell'anno N:

- **caso base**: 0 coppia se N==0
- **caso base**: 1 coppia se N==1 (erano troppo giovani)
- **riduzione del problema**: Per calcolare F(N) ci servono F(N-1) ed F(N-2)
- **composizione della soluzione**: F(N) = F(N-1) + F(N-2)

In [2…

```
@trace(pause=True)
def fibonacci(N : int) -> int :
    if N < 2:            # casi base
        return 1         # soluzione conosciuta
    else:
        return fibonacci(N-1) + fibonacci(N-2)  # riduzione e composizione

fibonacci.trace(4)
```

```
------------------- Starting recursion -------------------
-------------------- Ending recursion --------------------
Num calls: 9
```

Out[2… 5

METODO: le 4 proprietà vi guidano per affrontare un problema ricorsivo sconosciuto:

- trovate il **caso base**
- confrontate **problemi** di dimensioni diverse per capire come fare la "riduzione"
- confrontate **soluzioni** di dimensioni diverse per capire come calcolare la "soluzione"
- **verificate che** applicando più volte il passo di riduzione **si arrivi sempre ad un caso base** (convergenza)
  - altrimenti aumentate i casi base

INFO INTERESSANTE

E' sempre possibile simulare un ciclo con una ricorsione

E' sempre possibile simulare una ricorsione con uno o più cicli (e se necessario una pila/stack)

- Iacopini Bohm

Conigli di Fibonacci

Soluzione iterativa (non ricorsiva)

Calcoliamo anno per anno il numero di coppie

In [2…

```
#  0 1 1 2 3 5 8 13 21
```

```python
def fibonacci_iter(N : int) -> int :
    "Costruisco la lista di numeri di Fibonacci e torno l'N-esimo"
    coppie = [0, 1]
    for i in range(N):
        coppie.append(coppie[-1] + coppie[-2])
    print(coppie)
    return coppie[-1]

print(fibonacci_iter(70))
# MA ATTENZIONE!!!
# E' sufficiente ricordasi SOLO i DUE mesi precedenti per ottenere il successivo!
```

```
[0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711,
28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465
, 14930352, 24157817, 39088169, 63245986, 102334155, 165580141, 267914296, 433494437, 701408733, 1134903
170, 1836311903, 2971215073, 4807526976, 7778742049, 12586269025, 20365011074, 32951280099, 53316291173,
86267571272, 139583862445, 225851433717, 365435296162, 591286729879, 956722026041, 1548008755920, 250473
0781961, 4052739537881, 6557470319842, 10610209857723, 17167680177565, 27777890035288, 44945570212853, 7
2723460248141, 117669030460994, 190392490709135, 308061521170129]
308061521170129
```

In [3…

```python
# Mi ricordo SOLO i DUE mesi precedenti
def fibonacci_iter2(N : int) -> int :
    "Simulo la sequenza ma ricordo solo gli ultimi 2 valori"
    corrente, precedente = 1, 0           # casi iniziali
    for i in range(N):                    # ripeto N volte
        corrente, precedente = corrente+precedente, corrente
    return corrente

print(fibonacci_iter2(7))
```

```
21
```

Riusciamo a simulare questo ciclo con la ricorsione?

- posso usare le variabili di stato come argomenti della funzione

- ad ogni chiamata aggiorno i valori e decremento N
- quando N==0 torno il valore corrente

In [3…

```python
# definiamo una funzione di appoggio che inizializza le variabili di stato
def fibonacci_ric_efficiente(N : int):
    # inizialmente i valori sono 0 e 1
    return _fibonacci_ric_efficiente(N, 1, 0) # funzione ricorsiva

# simuliamo l'allevamento anno per anno scendendo da N a 0 con la ricorsione
# - convertiamo le variabili di stato del ciclo in argomenti della funzione
@trace()
def _fibonacci_ric_efficiente(N : int, corrente : int, precedente : int):
    if N == 0:
        return corrente
    else:
        corrente, precedente = corrente+precedente, corrente
        return _fibonacci_ric_efficiente(N-1, corrente, precedente)

# oppure potevamo dare dei valori di default appropriati alle "variabili di stato"

_fibonacci_ric_efficiente.trace(7, 1, 0)
fibonacci(7)
```

```
------------------- Starting recursion -------------------
 entering       _fibonacci_ric_efficiente(7, 1, 0)
|-- entering    _fibonacci_ric_efficiente(6, 1, 1)
|--|-- entering _fibonacci_ric_efficiente(5, 2, 1)
|--|--|-- entering      _fibonacci_ric_efficiente(4, 3, 2)
|--|--|--|-- entering   _fibonacci_ric_efficiente(3, 5, 3)
|--|--|--|--|-- entering        _fibonacci_ric_efficiente(2, 8, 5)
|--|--|--|--|--|-- entering     _fibonacci_ric_efficiente(1, 13, 8)
|--|--|--|--|--|--|-- entering  _fibonacci_ric_efficiente(0, 21, 13)
|--|--|--|--|--|--|-- exiting   _fibonacci_ric_efficiente(0, 21, 13)    returns 21
|--|--|--|--|--|-- exiting      _fibonacci_ric_efficiente(1, 13, 8)     returns 21
|--|--|--|--|-- exiting         _fibonacci_ric_efficiente(2, 8, 5)      returns 21
|--|--|--|-- exiting    _fibonacci_ric_efficiente(3, 5, 3)      returns 21
|--|--|-- exiting       _fibonacci_ric_efficiente(4, 3, 2)      returns 21
|--|-- exiting  _fibonacci_ric_efficiente(5, 2, 1)      returns 21
|-- exiting     _fibonacci_ric_efficiente(6, 1, 1)      returns 21
 exiting        _fibonacci_ric_efficiente(7, 1, 0)      returns 21
------------------- Ending recursion --------------------
Num calls: 8
```

Out[3… 21

Invece che usare la ricorsione per simulare "in avanti"

Usiamo la ricorsione classica per calcolare "all'indietro"

In [3…

```python
# proviamo invece a lavorare in uscita dalla ricorsione
# - ciascuna chiamata ritorna la coppia *corrente, precedente*
# ovvero calcoliamo F(N) -> corrente, precedente
# - nel caso base la coppia è           1, 0
# - da corrente, precedente del mese prima (N-1) posso calcolare quelli di N
@trace()
def fibonacci_efficiente(N : int ) -> tuple[int,int] :
    if N == 0:
        return 1, 0        # all'inizio ci sono 0 ed 1 coppia
    else:
        # ottengo i due valori del mese precedente (F(N-1) e F(N-2))
```

```
        corrente, precedente = fibonacci_efficiente(N-1)
        # calcolo i due valori per questo mese     (F(N)   e F(N-1))
        return corrente+precedente, corrente

print(fibonacci_efficiente(5)[0])

fibonacci_efficiente.trace(7)
```

```
8
------------------- Starting recursion -------------------
 entering       fibonacci_efficiente(7,)
|-- entering    fibonacci_efficiente(6,)
|--|-- entering fibonacci_efficiente(5,)
|--|--|-- entering      fibonacci_efficiente(4,)
|--|--|--|-- entering   fibonacci_efficiente(3,)
|--|--|--|--|-- entering        fibonacci_efficiente(2,)
|--|--|--|--|--|-- entering     fibonacci_efficiente(1,)
|--|--|--|--|--|--|-- entering  fibonacci_efficiente(0,)
|--|--|--|--|--|--|-- exiting   fibonacci_efficiente(0,)        returns (1, 0)
|--|--|--|--|--|-- exiting      fibonacci_efficiente(1,)        returns (1, 1)
|--|--|--|--|-- exiting         fibonacci_efficiente(2,)        returns (2, 1)
|--|--|--|-- exiting    fibonacci_efficiente(3,)        returns (3, 2)
|--|--|-- exiting       fibonacci_efficiente(4,)        returns (5, 3)
|--|-- exiting  fibonacci_efficiente(5,)        returns (8, 5)
|-- exiting     fibonacci_efficiente(6,)        returns (13, 8)
 exiting        fibonacci_efficiente(7,)        returns (21, 13)
------------------- Ending recursion --------------------
Num calls: 8
```

Out[3… (21, 13)

Altro esempio: Massimo Comun Divisore di x, y interi positivi

Ovvero dobbiamo trovare quel'intero **M** tale che:

- **$x = M*k$**
- **$y = M*j$**
- con **$k,j>=1$** (e senza fattori comuni)

Quali sono le proprieta di x ed y?

- se **x==y** allora **k==j==1** e **M=x** (ecco un buon **caso base**!)
- altrimenti proviamo a sottrarre il minore dal maggiore
  - **$z = x-y = M*(k-j)$** quindi **ANCHE z E' MULTIPLO M!!!**
    e inoltre z è più piccolo di x (ecco la nostra **riduzione**!)
    - ad ogni passo si riduce la somma k+j di almeno j (il più piccolo)
    - sottraendo un numero più piccolo non si può andare nei negativi nè sullo 0
  - a forza di sottrarre arriveremo per forza a j=k=1 ovvero al caso base (ed ecco la **convergenza**)
  - una volta trovato **M** abbiamo la soluzione di ciascun caso **più grande** (**ricomposizione**)

Ottimizzazione: invece di sottrarre y da x calcoliamone il resto -> algoritmo di **Euclide**

In [2…

```
# Sfruttiamo la definizione ricorsiva del problema
# per dare una implementazione ricorsiva
@trace()
def GCD(x : int, y : int) -> int :
    # FIXME: controllare che siano  interi E positivi
    if x == y:
        return x
    else:
        if x>y:
            return GCD(x-y, y)
        else:
            return GCD(y-x, x)
```

```
GCD.trace(108, 64)
```

```
------------------- Starting recursion -------------------
 entering       GCD(108, 64)
|-- entering    GCD(44, 64)
|--|-- entering GCD(20, 44)
|--|--|-- entering      GCD(24, 20)
|--|--|--|-- entering   GCD(4, 20)
|--|--|--|--|-- entering        GCD(16, 4)
|--|--|--|--|--|-- entering     GCD(12, 4)
|--|--|--|--|--|--|-- entering  GCD(8, 4)
|--|--|--|--|--|--|--|-- entering       GCD(4, 4)
|--|--|--|--|--|--|--|-- exiting        GCD(4, 4)       returns 4
|--|--|--|--|--|--|-- exiting   GCD(8, 4)       returns 4
|--|--|--|--|--|-- exiting      GCD(12, 4)      returns 4
|--|--|--|--|-- exiting         GCD(16, 4)      returns 4
|--|--|--|-- exiting    GCD(4, 20)      returns 4
|--|--|-- exiting       GCD(24, 20)     returns 4
|--|-- exiting  GCD(20, 44)     returns 4
|-- exiting     GCD(44, 64)     returns 4
 exiting        GCD(108, 64)    returns 4
-------------------- Ending recursion --------------------
Num calls: 9
```

Out[2… 4

In [2…

```
## Non è difficile farne una versione iterativa

def GCD_iter(x : int, y : int) -> int :
    while x != y:
        if x > y:
            x -= y
        else:
            y -= x
    return x

print(GCD_iter(75,45))
```

```
15
```

Esempio: Check se una stringa/lista è palindroma (si legge uguale in senso inverso)

soluzioni iterative

- rovescio e confronto
- scandisco gli indici degli elementi agli estremi e li confronto

In [2…
```python
from typing import Sequence
## Rovescio e confronto
def palindromaP_iter1(sequenza : Sequence):
    rovesciata = sequenza[::-1]
    return rovesciata == sequenza

# leggermente inefficiente, costruisco una nuova sequenza e confronto 2N elementi
# (potrei confrontarne solo N)
palindromaP_iter1('amoRoma')
```

Out[2… True

In [2…
```python
## Versione iterativa 2

def palindromaP_iter2(sequenza : Sequence ) -> bool :
    for i in range(len(sequenza)//2):
        print('comparing', sequenza[i], sequenza[-i-1], sequenza[i] == sequenza[-i-1])
        if sequenza[i] != sequenza[-i-1]:
            return False
    return True

palindromaP_iter2('amoRoma')
#palindromaP_iter([1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1])
```

```
comparing a a True
comparing m m True
comparing o o True
```

Out[2… True

In [3…
```python
def palindromaP_iter3(sequenza):
    inizio = 0
    fine   = len(sequenza)-1
    while inizio < fine:
        print('comparing', sequenza[inizio], sequenza[fine], sequenza[inizio] == sequenza[fine])
        if sequenza[inizio] != sequenza[fine]:
            return False
        inizio += 1
        fine   -= 1
    return True

palindromaP_iter3([1, 2, 3, 4,  5, 4, 3, 2, 1])
```

```
comparing 1 1 True
comparing 2 2 True
comparing 3 3 True
comparing 4 4 True
```

Out[3… True

soluzione ricorsiva

- **casi base**: ogni sequenza di lunghezza 0 o 1 è palindroma
- se è lunga 2 o più elementi il primo e l'ultimo devono essere uguali
- se non lo sono NON è palindroma (altro **caso base**)
- se lo sono deve essere palindromo anche il resto, tolto primo ed ultimo carattere
  - (togliere i 2 caratteri = **riduzione**)
  - a forza di togliere 2 caratteri si arrivarà sempre a 1 o 0 (**convergenza**)
  - la stringa è palindroma se sono uguali primo e ultimo AND la sottostringa è palindroma (**costruzione della soluzione dalla sottosoluzione** + calcolo locale)

In [3…
```python
@trace()
def palindromaP(sequenza : Sequence ) -> bool :
    "predicato che verifica se una sequenza è palindroma"
    if len(sequenza) < 2:
        return True
```

```
    if sequenza[0] != sequenza[-1]:
        return False
    else:
        return palindromaP(sequenza[1:-1])

palindromaP.trace('amoRoma')

# un po' inefficiente perchè crea tante sottosequenze
```

```
------------------- Starting recursion -------------------
 entering       palindromaP('amoRoma',)
|-- entering    palindromaP('moRom',)
|--|-- entering palindromaP('oRo',)
|--|--|-- entering      palindromaP('R',)
|--|--|-- exiting       palindromaP('R',)       returns True
|--|-- exiting  palindromaP('oRo',)     returns True
|-- exiting     palindromaP('moRom',)   returns True
 exiting        palindromaP('amoRoma',) returns True
-------------------- Ending recursion --------------------
Num calls: 4
```

Out[3… True

In [3…

```
# versione che usa gli indici inizio e fine e non crea sottostringhe
@trace()
def _palindromaP2(sequenza : Sequence, inizio : int, fine : int ) -> bool :
    if inizio >= fine:
        return True
    if sequenza[inizio] != sequenza[fine]:
        return False
    return _palindromaP2(sequenza, inizio+1, fine-1)

def palindromaP2(sequenza):
    return palindromaP2(sequenza, 0, len(sequenza)-1)


_palindromaP2.trace('amoRoma', 0, 6)
```

```
------------------ Starting recursion ------------------
 entering       _palindromaP2('amoRoma', 0, 6)
|-- entering    _palindromaP2('amoRoma', 1, 5)
|--|-- entering _palindromaP2('amoRoma', 2, 4)
|--|--|-- entering      _palindromaP2('amoRoma', 3, 3)
|--|--|-- exiting       _palindromaP2('amoRoma', 3, 3)  returns True
|--|-- exiting  _palindromaP2('amoRoma', 2, 4)  returns True
|-- exiting     _palindromaP2('amoRoma', 1, 5)  returns True
 exiting        _palindromaP2('amoRoma', 0, 6)  returns True
------------------- Ending recursion -------------------
Num calls: 4
```

Out[3… True

Esploriamo un albero di directory: cerchiamo tutti i file .txt e la loro dimensione

- una directory contiene files (caso base) e sottodirectory (caso ricorsivo)
- ogni volta che esaminiamo una sottodirectory abbiamo un problema simile a quello iniziale, e più piccolo
- a forza di scendere arriveremo in una sottodirectory che contiene solo file (convergenza)
- i file trovati nelle sottodirectory vanno raccolti assieme a quelli della dir iniziale (composizione)

Per esaminare directory e files si usa la libreria **`os`**

In [4…

```python
import os

@trace()
def cerca_file_sizes(directory : str) -> dict[str, int] :
    "cerco tutti i file '.py' e ne ritorno le dimensioni"
    risultato = {}
    for nome in os.listdir(directory):
        # ignoro file e dir che iniziano per '.' oppure '_'
        if nome[0] in '_.': continue
        # costruisco il path completo del file
        fullname = directory + '/' + nome
        # se sono nel caso ricorsivo (una directory)
        if os.path.isdir(fullname):
```

```
            trovati = cerca_file_sizes(fullname)
            # aggiorno il dizionario con ciò che ho trovato nella sottodirectory
            risultato.update(trovati)
        # altrimenti se è un file che finisce con 'txt'
        elif nome.endswith('.py'):
            size = os.path.getsize(fullname)     # ne trovo le dimensioni
            risultato[fullname] = size
    return risultato

cerca_file_sizes.trace('../lezione16')
```

```
------------------- Starting recursion -------------------
 entering       cerca_file_sizes('../lezione16',)
|-- entering    cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi',)
|--|-- entering cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/42',)
|--|-- exiting  cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/42',)   returns {'../lezione16/esercizi/42/immag
ini.py': 983, '../lezione16/esercizi/42/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/42/test.py': 1430,
'../lezione16/esercizi/42/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/42/program.py': 2523}
|--|-- entering cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/75',)
|--|-- exiting  cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/75',)   returns {'../lezione16/esercizi/75/solut
ion.py': 2724, '../lezione16/esercizi/75/immagini.py': 983, '../lezione16/esercizi/75/testlib.py': 4336,
'../lezione16/esercizi/75/test.py': 2889, '../lezione16/esercizi/75/png.py': 100229, '../lezione16/eserc
izi/75/program.py': 3817}
|--|-- entering cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/lezione09',)
|--|-- exiting  cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/lezione09',)    returns {'../lezione16/esercizi/
lezione09/esercizi immagini 2.py': 4695, '../lezione16/esercizi/lezione09/png.py': 100229, '../lezione1
6/esercizi/lezione09/images.py': 3384}
|--|-- entering cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/esercizi immagini',)
|--|-- exiting  cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/esercizi immagini',)    returns {'../lezione16/e
sercizi/esercizi immagini/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/images.py': 3384,
'../lezione16/esercizi/esercizi immagini/esercizi immagini.py': 5949}
|--|-- entering cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/13',)
|--|-- exiting  cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi/13',)   returns {'../lezione16/esercizi/13/immag
ini.py': 981, '../lezione16/esercizi/13/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/13/test.py': 1210,
'../lezione16/esercizi/13/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/13/program.py': 2662}
|-- exiting     cerca_file_sizes('../lezione16/esercizi',)      returns {'../lezione16/esercizi/42/immag
ini.py': 983, '../lezione16/esercizi/42/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/42/test.py': 1430,
'../lezione16/esercizi/42/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/42/program.py': 2523, '../lezione16/es
ercizi/75/solution.py': 2724, '../lezione16/esercizi/75/immagini.py': 983, '../lezione16/esercizi/75/tes
tlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/75/test.py': 2889, '../lezione16/esercizi/75/png.py': 100229,
'../lezione16/esercizi/75/program.py': 3817, '../lezione16/esercizi/lezione09/esercizi immagini 2.py': 4
695, '../lezione16/esercizi/lezione09/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/lezione09/images.py': 3384
, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/ima
ges.py': 3384, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/esercizi immagini.py': 5949, '../lezione16/eserc
izi/13/immagini.py': 981, '../lezione16/esercizi/13/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/13/test.p
y': 1210, '../lezione16/esercizi/13/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/13/program.py': 2662}
 exiting       cerca_file_sizes('../lezione16',)       returns {'../lezione16/rtrace.py': 2334, '../lez
ione16/albero_con_cloni.py': 2291, '../lezione16/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/42/immagini.p
```

y': 983, '../lezione16/esercizi/42/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/42/test.py': 1430, '../lezi
one16/esercizi/42/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/42/program.py': 2523, '../lezione16/esercizi/7
5/solution.py': 2724, '../lezione16/esercizi/75/immagini.py': 983, '../lezione16/esercizi/75/testlib.p
y': 4336, '../lezione16/esercizi/75/test.py': 2889, '../lezione16/esercizi/75/png.py': 100229, '../lezio
ne16/esercizi/75/program.py': 3817, '../lezione16/esercizi/lezione09/esercizi immagini 2.py': 4695, '../
lezione16/esercizi/lezione09/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/lezione09/images.py': 3384, '../lez
ione16/esercizi/esercizi immagini/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/images.py':
3384, '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/esercizi immagini.py': 5949, '../lezione16/esercizi/13/im
magini.py': 981, '../lezione16/esercizi/13/testlib.py': 4336, '../lezione16/esercizi/13/test.py': 1210,
'../lezione16/esercizi/13/png.py': 100229, '../lezione16/esercizi/13/program.py': 2662, '../lezione16/im
ages.py': 3384, '../lezione16/lezione16.py': 30949}
---------- Ending recursion ----------
Num calls: 7

Out[4…
```
{'../lezione16/rtrace.py': 2334,
 '../lezione16/albero_con_cloni.py': 2291,
 '../lezione16/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/42/immagini.py': 983,
 '../lezione16/esercizi/42/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/42/test.py': 1430,
 '../lezione16/esercizi/42/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/42/program.py': 2523,
 '../lezione16/esercizi/75/solution.py': 2724,
 '../lezione16/esercizi/75/immagini.py': 983,
 '../lezione16/esercizi/75/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/75/test.py': 2889,
 '../lezione16/esercizi/75/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/75/program.py': 3817,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/esercizi immagini 2.py': 4695,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/images.py': 3384,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/images.py': 3384,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/esercizi immagini.py': 5949,
 '../lezione16/esercizi/13/immagini.py': 981,
 '../lezione16/esercizi/13/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/13/test.py': 1210,
 '../lezione16/esercizi/13/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/13/program.py': 2662,
 '../lezione16/images.py': 3384,
 '../lezione16/lezione16.py': 30949}
```

In [4…
```python
## soluzione ricorsiva che raccoglie i file
## in un dizionario fornito come argomento
## che viene aggiornato distruttivamente mano a mano che si esplora

def cerca_file_sizes2(directory : str, dizionario : dict[str, int]) -> None:
    "cerco tutti i file '.py' e ne ritorno le dimensioni"
    for nome in os.listdir(directory):
        # ignoro file e dir che iniziano per '.' oppure '_'
        if nome[0] in '_.': continue
```

```
        fullname = directory + '/' + nome
        # se sono nel caso ricorsivo (una directory)
        if os.path.isdir(fullname):
            cerca_file_sizes2(fullname, dizionario)
        # altrimenti se è un file che finisce con 'txt'
        elif nome.endswith('.py'):
            size = os.path.getsize(fullname)
            dizionario[fullname] = size

D : dict[str,int] = {}
cerca_file_sizes2('../lezione16', D)
D
```

Out[4…


```
{'../lezione16/rtrace.py': 2334,
 '../lezione16/albero_con_cloni.py': 2291,
 '../lezione16/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/42/immagini.py': 983,
 '../lezione16/esercizi/42/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/42/test.py': 1430,
 '../lezione16/esercizi/42/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/42/program.py': 2523,
 '../lezione16/esercizi/75/solution.py': 2724,
 '../lezione16/esercizi/75/immagini.py': 983,
 '../lezione16/esercizi/75/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/75/test.py': 2889,
 '../lezione16/esercizi/75/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/75/program.py': 3817,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/esercizi immagini 2.py': 4695,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/lezione09/images.py': 3384,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/images.py': 3384,
 '../lezione16/esercizi/esercizi immagini/esercizi immagini.py': 5949,
 '../lezione16/esercizi/13/immagini.py': 981,
 '../lezione16/esercizi/13/testlib.py': 4336,
 '../lezione16/esercizi/13/test.py': 1210,
 '../lezione16/esercizi/13/png.py': 100229,
 '../lezione16/esercizi/13/program.py': 2662,
 '../lezione16/images.py': 3384,
 '../lezione16/lezione16.py': 30949}
```