M a t h e m a t i k 1 f ü r I n f o r m a t i k

Kleingruppenübung

Blatt 04

Kampmann/Meyer HS Osnabrück, Fakultät I.u.I.

★

Erinnern Sie sich an folgende Begriffe, Sachverhalte und Sätze: Ungleichugen, Betrag, algebraische Strukturen, Rechnen mit Restklassen.

★

1. Aufgabe: Bestimmen Sie alle $r, s, t \in \mathbb{R}$, für die die folgenden Betrags(un)gleichungen erfüllt sind. Geben Sie jeweils den Definitionsbereich an.

a) $|3r - 6| = r + 2$

b) $2 > |s - 3|$

c) $\frac{1}{|t+1|} \geq 6$

2. Aufgabe: Körper der reellen Zahlen

a) Die Körperaxiome sagen direkt nichts über $a \cdot 0$ für $a \in \mathbb{R}$ aus. Folgern Sie aus den Körperaxiomen, dass $a \cdot 0 = 0$ gilt.

b) Die Körperaxiome definieren $-a$ als inverses Element bezüglich der Addition zu a. Direkt sagen die Axiome aber nichts über $(-1) \cdot a$ für $a \in \mathbb{R}$ aus. Folgern Sie aus den Körperaxiomen, dass $(-1) \cdot a = -a$ gilt.

c) Die Körperaxiome für $\mathbb{R}$ garantieren die Existenz eines neutralen Elements der Addition (genannt 0) mit $a + 0 = a \; \forall a \in \mathbb{R}$ und eines neutralen Elements der Multiplikation (genannt 1) mit $a \cdot 1 = a \; \forall a \in \mathbb{R}$. Warum muss gelten $0 \neq 1$, d.h. warum müssen die beiden neutralen Elemente verschieden voneinander sein? Geben Sie eine Begründung an.

3. Aufgabe: Gegeben ist die Menge $M = \{a, b, c, d\}$ mit zwei Verknüpfungen $\star$ und $\circ$. Die Verknüpfungen sind durch die nachfolgenden Tabellen definiert.

$\star$	a	b	c	d
a	d	c	a	b
b	c	b	b	b
c	a	b	c	d
d	b	b	d	c

$\circ$	a	b	c	d
a	b	d	a	c
b	c	b	d	a
c	d	a	c	b
d	a	c	b	d

(1) Welche dieser Verknüpfungen ist kommutativ? (Antwort mit Begründung!)

(2) $(M, \star)$ ist eine Gruppe. Bestimmen Sie das neutrale Element und geben Sie zu jedem Element das zugehörige inverse Element an. (Antwort mit Begründung!) Rechnen Sie nach, dass $a \star (b \star c) = (a \star b) \star c$ ist.

(3) Begründen Sie, warum $(M, \circ)$ keine Gruppe ist.

4. Aufgabe: Betrachten Sie $(\mathbb{N}_0, \circ)$ mit der Verknüpfung $\circ\colon \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ definiert durch $a \circ b = |a - b|$ für $a, b \in \mathbb{N}_0$.

(1) Zeigen Sie, dass $0 \in \mathbb{N}_0$ das neutrale Element der Verknüpfung $\circ$ ist und das jedes Element $a \in \mathbb{N}_0$ bezüglich der Verknüpfung $\circ$ zu sich selbst invers ist.

(2) Ist die Verknüpfung kommutativ? (Antwort mit Begründung!)

(3) Berechnen Sie $2 \circ (3 \circ 4)$ und $(2 \circ 3) \circ 4$.

(4) Ist $(\mathbb{N}_0, \circ)$ eine Gruppe? (Antwort mit Begründung!)

5. Aufgabe: Gegeben ist die Menge $\mathbb{Z}_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ bisher „unbekannter“ Zahlen, für die folgende Addition $+$ und Multiplikation $\bullet$ definiert ist.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

$\bullet$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

a) Geben Sie zu folgenden Körperaxiomen ein konkretes Beispiel mit Zahlen aus $\mathbb{Z}_5$ an:
Assoziativgesetz der Addition, Kommutativgesetz der Multiplikation, Distributivgesetz.

b) Lösen Sie die Gleichung $\bar{3} \bullet (\bar{2} \bullet x + \bar{1}) + \bar{2} = \bar{1} - \bar{2} \bullet x$ in $\mathbb{Z}_5$. Geben Sie bei jedem Rechenschritt an, welches Körperaxiom Sie zur Umformung benutzen.

c) Potenzen sind in Z wie in $\mathbb{R}$ definiert. Insbesondere ist z.B. $\bar{2}^0 = \bar{1}$. Berechnen Sie die Potenzen $\bar{2}^n$ für $n = 1, 2, \ldots, 7$. Was fällt Ihnen auf?

6. Aufgabe: $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$ ist ein Körper. Damit ist auch die erste binomische Formel in $(\mathbb{Z}_{17}, +, \cdot)$ gültig, also $(\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + \bar{2} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b}^2$. Prüfen Sie die Gültigkeit für die folgenden beiden Beispiele:

(a) $(\overline{12} + \bar{9})^2$

(b) $(\overline{11} + \bar{5})^2$