31. Vorlesung 22.12.2020

Matrizen

Definition: Gegeben sind $n \cdot K$ reelle Zahlen a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le K$.
Dann ist das (rechteckige) Zahlenschema mit n Zeilen und K Spalten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nK} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le K}}$$

die zugehörige $(n \times K)$-Matrix. Die Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißen Elemente/Koeffizienten der Matrix.

$M(n \times K) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}}$ ist eine (reelle) $(n \times K)$-Matrix$\}$ bezeichnet die Menge aller $(n \times K)$-Matrizen. Bei a_{ij} ist der 1. Index i der „Zeilenindex", der 2. Index j ist der „Spaltenindex".

Bemerkung: Die Menge $M(n \times K)$ wird manchmal auch als $\mathbb{R}^{n \times K}$ oder $\mathbb{R}^{(n,K)}$ bezeichnet.

Rechenoperationen für Matrizen

(1) Auf der Menge $M(n \times K)$ ist eine Addition und eine Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ definiert, nämlich

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le K}} \; ; \; \underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le K}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le K}}$$

$$s \in \mathbb{R}, \quad s \cdot \underline{\underline{A}} = (s a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le K}}$$

Kurz: Addition und Multiplikation mit s ist komponentenweise definiert.

In jeder Komponente wird mit reellen Zahlen gerechnet, daher „erbt" man die Rechenregeln, genauer:

a) $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$ Kommutativgesetz

b) $\underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}}$ Assoziativgesetz

c) Die „Nullmatrix" $\underline{\underline{0}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$

ist das neutrale Element der Addition: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$

d) Zu $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k)$ ist $-\underline{\underline{A}} = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$ die inverse Matrix

bezgl. der Addition: $\underline{\underline{A}} + (-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

Bemerkung: $(M(n \times k), +)$ ist eine Gruppe!

e) $s \cdot (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = (s \cdot \underline{\underline{A}}) + (s \cdot \underline{\underline{B}})$, $s \in \mathbb{R}$ „Distributivgesetz"

f) $s \cdot (t \cdot \underline{\underline{A}}) = (s \cdot t) \cdot \underline{\underline{A}} = t \cdot (s \cdot \underline{\underline{A}}) \quad \forall\, t, s \in \mathbb{R}$

g) $1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$, $0 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$, $-\underline{\underline{A}} = (-1) \cdot \underline{\underline{A}}$

Bemerkung: $M(n \times k)$ mit der Addition und der Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum.

Beispiele:

① $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2)$

$$5 \cdot \underline{\underline{A}} - 3 \cdot \underline{\underline{B}} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 0 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6 & -5-3 \\ 5-3 & 0-6 \\ 20-3 & 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & -6 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}$$

② $M(2 \times 2) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}} \text{ ist } (2 \times 2)\text{-Matrix} \}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ ist Linearkombination der Matrizen $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$;

es gilt außerdem

$$\underline{\underline{0}} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} = \underbrace{s_1 \cdot \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}s_1 & s_2\\ s_3 & s_4\end{pmatrix} \iff s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge s_3 = 0 = s_4 = 0,$$

d.h. $\overbrace{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{11}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{12}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{21}}, \overbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{22}}$ sind <u>linear unabhängig</u>.

<u>Insgesamt</u>: Der Vektorraum der (2×2)-Matrizen $M(2\times 2)$ hat die Matrizen $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ als <u>Basis</u> (die sog. Standardbasis von $M(2\times 2)$). $M(2\times 2)$ ist ein 4-dimensionaler Vektorraum.

<u>Allgemein</u>: $M(n\times k) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}} \text{ ist } (n\times k)\text{-Matrix}\}$ ist ein Vektorraum der Dimension $n \cdot k$ (mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$).

Die Matrizen $\underline{\underline{E}}_{ij}$ mit 1 als Wert für den Koeffizienten in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und 0 sonst bilden die Standardbasis dieses Vektorraums.

<u>Definition</u>:

Gegeben ist die $(n\times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}} \in M(n\times k)$. Dann ist definiert

a) die zugehörige <u>transponierte Matrix</u> $\underline{\underline{A}}^t$ ist die $(k\times n)$-Matrix, die man aus $\underline{\underline{A}}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le k\\ 1\le i\le n}}.$$

b) Die <u>Hauptdiagonale</u> der Matrix $\underline{\underline{A}}$ besteht aus allen Matrixelemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex.

c) Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt <u>quadratisch</u>, wenn $n = k$ ist, d.h. Anzahl Zeilen ist gleich Anzahl Spalten; $M(n \times n) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}}$ ist quadratische Matrix mit n Zeilen und n Spalten $\}$

Beispiele:

(1)
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4)$$

Hauptdiagonale: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 5$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3)$$

Hauptdiagonale

(2)
$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \leftarrow \text{quadratische Matrix}$$

Hauptdiagonale: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 7$

$$\underline{\underline{B}}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Bei quadratischen Matrizen entspricht der „Wechsel" von $\underline{\underline{B}}$ zu $\underline{\underline{B}}^t$ einem Spiegeln an der Hauptdiagonalen.

Weitere Rechenoperationen für Matrizen

(1) Produkt von Matrizen mit Vektoren (→ siehe lineare GLS)

Definition:

Anzahl Spalten von $\underline{\underline{A}}$ = Anzahl Komponenten von $\vec{v}$

Gegeben ist eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$; dann ist für Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} : \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} a_{1j} \cdot v_j \\ \sum_{j=1}^{k} a_{2j} \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} a_{nj} \cdot v_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

„Faustregel": Zeile · Spalte

Mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liefert $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \vec{b}$: $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

das lin. GLS:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Produkt von Matrizen mit Vektoren ist so definiert, dass es zur Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix, Vektor der Unbekannten und Vektor der rechten Seite passt!

2 Produkt Matrix mit Matrix

Bemerkung: Darstellung einer Matrix mittels Spaltenvektoren

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix}}_{\text{Darstellung von } \underline{\underline{A}} \text{ mittels Spaltenvektoren}}$$

$$\underbrace{\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektoren der Matrix } \underline{\underline{A}}}$$

Allgemein: $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k) \Longrightarrow k$ Spaltenvektoren, nämlich $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$,

Definition:

Spaltenanzahl $\underline{\underline{A}}$ = Zeilenanzahl $\underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ und eine $(k \times \ell)$-Matrix $\underline{\underline{B}}$.
Dann (und nur dann) ist das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \left(\vec{b}_1 \; \vec{b}_2 \ldots \vec{b}_\ell \right) = \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1 \;\; \underline{\underline{A}} \vec{b}_2 \; \cdots \; \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_\ell \right)}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}} \in M(n \times \ell)$$

Spaltenvektoren $\vec{b}_j \in \mathbb{R}^k, 1 \le j \le \ell$

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_j \in \mathbb{R}^n, 1 \le j \le \ell$

Beispiel:

① $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3)$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 3)$ ist definiert mit

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 8 & 3 & 34 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3)$$

② $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ $\quad \underline{\underline{B}} \in M(3 \times 3), \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 3) \Rightarrow \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ ist nicht definiert!

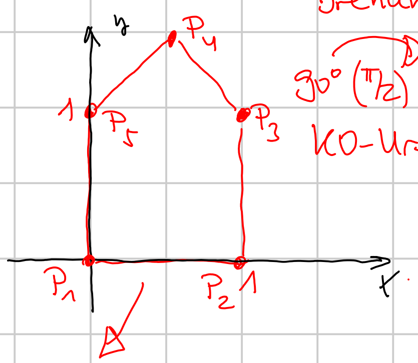
③ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 2)$; $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ beide Produkte sind definiert

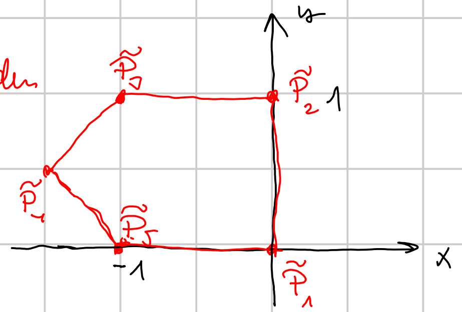
$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

MERKE: Das Matrizenprodukt ist (in der Regel) nicht kommutativ, d.h. $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Anwendungsbeispiel für (2x2)-Matrizen



Drehung um $90°$ $(\pi/2)$ um den KO-Ursprung



$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Drehmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \in M(2 \times 5)$$

$$(2 \times 2) \cdot (2 \times 5)$$

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 & \tilde{P}_3 & \tilde{P}_4 & \tilde{P}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$