5. Vorlesung 14.10.2020

Notiztitel 14.10.2020

1) $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b-a = k \cdot 5\}$

für $(a,b) \in R$ schreiben wir $a \equiv b$

4. Vorlesung: Nachweis R ist Äquivalenzrelation

<u>Äquivalenzklassen</u>: $[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b\}$ (andere Schreibweise für $[a]$ ist $\bar{a}$)

$$[0] = \bar{0} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-0 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0\}$$
$$[1] = \bar{1} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-1 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1\}$$
$$[2] = \bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-2 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 2\}$$
$$[3] = \bar{3} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-3 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 3\}$$
$$[4] = \bar{4} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-4 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 4\}$$

es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Darstellung von b gegeben ist

$$[5] = \bar{5} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b-5 = k\cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k\cdot 5 + 5 = \overbrace{(k+1)}^{=\tilde{k}} \cdot 5\}$$
$$= \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \tilde{k} \cdot 5 + 0\} = [0]$$

Für $i \in \{0,1,2,3,4\}$ gilt also

$[i] = \bar{i}$ ist die <u>Menge</u> aller <u>ganzen Zahlen</u>, die beim Teilen (ganzzahligen Teilen) durch 5 den Rest i lassen.

$$[0] = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \ldots\}$$
$$[1] = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \ldots\} \qquad -9 = \overbrace{(-2)}^{k} \cdot 5 + 1$$
$$[2] = \{\ldots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \ldots\}$$
$$[3] = \{\ldots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\}$$
$$[4] = \{\ldots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4], \quad [i] \cap [j] = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

2) Fußballer-Relation (aus der 4. Vorlesung)

Eine <u>Äquivalenzklasse dieser Relation</u> ist ein <u>Verein</u> im deutschen Profifußball

$\leftarrow$ Jeder Verein (als Menge seiner Spieler) ist eine Äquivalenzklasse

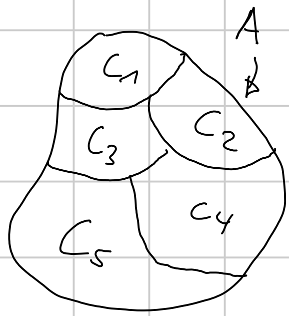
$\hookrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P = \text{Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball} \\ \tilde{R} \quad \text{2-stellige Relation über } P \text{ ist gegeben durch} \\ \tilde{R} = \{ (f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2 \} \\ \quad \text{„Fußballer-Relation"} \end{array} \right.$

<u>Definition:</u> Gegeben ist eine Menge A ($A \neq \emptyset$). $\mathcal{P}(A)$ ist dann die Potenzmenge von A (Menge aller Teilmengen von A).
Ein Mengensystem $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(A)$ (also eine Menge von Teilmengen von A) heißt <u>vollständige Mengenpartition von A</u>, wenn gilt:

1) $C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad \forall C_1, C_2 \in \mathcal{B}$ mit $C_1 \neq C_2$

2) $\bigcup_{C_i \in \mathcal{B}} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_N = A$

$\mathcal{B} = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$



<u>Bemerkung:</u> Wenn $\mathcal{B} = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine vollständige Mengenpartition von A ist, gilt: Jedes Element von A gehört zu genau einer Menge C_i aus $\mathcal{B}$.

<u>Satz:</u> Gegeben ist eine Menge A, $A \neq \emptyset$. $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation über A. Dann gilt:
Die Äquivalenzklassen dieser Relation bilden eine vollständige Mengenpartition von A, d.h. $\bigcup_{a \in A} [a] = A$.

<u>Beweis:</u>
1) Für jedes $a \in A$ gilt $a \in [a]$, denn R ist reflexiv $(a,a) \in R$, damit ist $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

2) Augenommen $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in [a] \cap [b]$ d.h.

$$\underbrace{x \in [a]}_{(a,x) \in R} \wedge \underbrace{x \in [b]}_{(b,x) \in R} \Rightarrow \underbrace{(a,x) \in R \wedge (b,x) \in R}_{R \text{ ist symmetrisch}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a,x) \in R \wedge (x,b) \in R}_{R \text{ ist transitiv}}$$

$$\Rightarrow (a,b) \in R$$

$$\Rightarrow a \in [b],\ b \in [a]$$

$$\Rightarrow [a] = [b]$$

Verknüpfung von Relationen

Definition: A, B, C sind nichtleere Mengen.
Gegeben sind die 2-stelligen Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$
Dann ist die Verknüpfung $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ definiert durch:

$$(a,c) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists x \in B : (a,x) \in R_1 \wedge (x,c) \in R_2$$

A = Menge der Nachnamen der Studierenden der HS OS
B = Menge der zulässigen Matrikelnummern der HS OS
C = Menge der Studiengänge der HS OS

$R_1 \subseteq A \times B$ ← Zuordnung des Namens eines Studierenden zur Matrikelnr.

Name	Matr.-Nr
- - - -	- - - -
Schmidt	12345
Meier	36111
Schulze	21224
⋮	⋮

$R_2 \subseteq B \times C$ ← Zuordnung von Matrikelnr. zu Studiengang

Matrikel-Nr.	Studiengang
- - - - -	- - - - -
12345	Elektrot.
36111	Medieninf.
21224	Gartenbau
- - - - -	- - - - -

$R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$

$(\text{Schmidt}, 12345) \in R_1$
$(12345, \text{Elektrot.}) \in R_2$ $\Big\}$ $(\text{Schmidt}, \text{Elektrot.}) \in R_1 \circ R_2$

Name	Studiengang
-----	----
Schmidt	Elektrot.
Meier	Medieninf.
Schulze	Gartenbau
----	-----

Abbildungen und Funktionen (als Relationen mit bestimmten Zusatzeigenschaften)

Definition:

Gegeben sind die Mengen D und W ($D \neq \emptyset$, $W \neq \emptyset$).

a) Eine Abbildung $f: D \to W$ ist eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times W$ über D und W mit folgender Eigenschaft:

$\forall x \in D \; \exists! y \in W: (x,y) \in f$, man schreibt dafür $y = f(x)$

Zu jedem $x \in D$ gibt es genau ein $y \in W$ mit $(x,y) \in f$ oder $y = f(x)$;
dem $x \in D$ wird mittels f genau ein $y \in W$ zugeordnet

Die Menge D heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge der Abbildung;
die Menge W heißt Wertebereich / Wertemenge der Abbildung

b) Wenn gilt: $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ nennt man die Abbildung $f: D \to W$ eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen

c) Für eine Abbildung $f: D \to W$ ist definiert

$\text{Bild}(f) = \{ y \in W \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f \subseteq D \times W) \}$

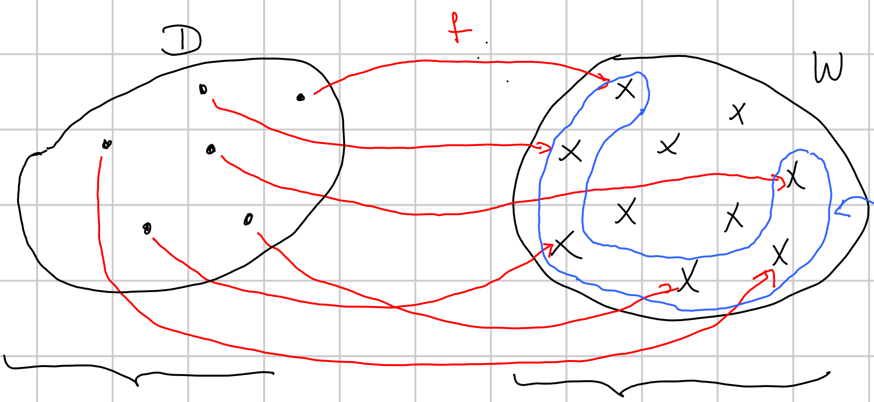
$\text{Graph}(f) = \{ (x,y) \in D \times W \mid y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f) \}$

ist der Graph von f ($D \subseteq \mathbb{R}, W \subseteq \mathbb{R}$: Graph $\hat{=}$ Funktionskurve)

Für $y \in W$ ist $U_f(y) = \{ x \in D \mid y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f) \}$

das Urbild von y unter f

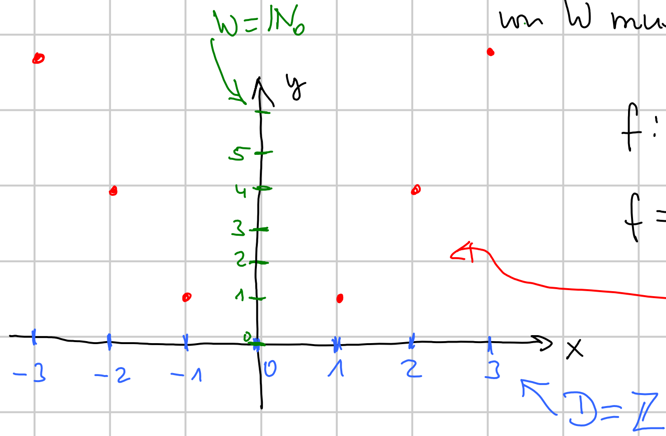
$f: D \to W$



Bild(f)
Elemente von W, bei denen ein Pfeil endet, die also wirklich als Wert der Abbildung vorkommen

$\forall x \in D$ heißt: von jedem Element in D geht ein Pfeil aus

$\exists!\, y \in W : (x,y) \in f$
Jeder Pfeil endet bei genau einem Element aus W
Achtung: Nicht bei jedem Element von W muss ein Pfeil enden



$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

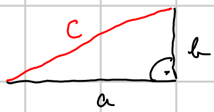
$f = \{(z, z^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0\}$ also $f(z) = z^2$

$\mathrm{Graph}(f) = \{(z, z^2) \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Was ist $\mathbb{R}$? $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ → grafische Veranschaulichung: Zahlenstrahl

$l \mathrel{\hat=}$ Länge der Diagonalen im Quadrat mit Kantenlänge 1

Im rechtwinkligen Dreieck gilt nach Pythagoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Zu l gibt es einen Punkt auf dem Zahlenstrahl, d.h. l ist eine auf dem Zahlenstrahl repräsentierte Zahl, mit Pythagoras folgt $l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
Wir nennen die Zahl l Wurzel aus 2, geschrieben $l = \sqrt{2}$

Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2}$ gehört zu einer Zahlenmenge (repräsentiert auf dem Zahlenstrahl), die neu ist; das ist $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen; es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Beweis zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: Widerspruchsbeweis (man nimmt das Gegenteil der Behauptung als wahr an und leitet daraus einen offensichtlichen Widerspruch ab, d.h. das

Gegenteil der Behauptung muss falsch sein, die ursprüngliche Behauptung ist also wahr)

Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ es gibt $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$ in vollständig gekürzter Form, d.h. z und n haben keine gemeinsamen Faktoren mehr:

$\sqrt{2} = \frac{z}{n} \Rightarrow 2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow z^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow$ 2 ist Teiler von $z^2 = z \cdot z$

$\Rightarrow$ 2 ist Teiler von z, d.h.

es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k \cdot 2$

damit gilt $2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = z^2 = (k \cdot 2)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow$ 2 ist Teiler von $n^2 = n \cdot n$

$\Rightarrow$ 2 ist ein Teiler von n $\lightning$

Widerspruch dazu, dass z und n keine gemeinsamen Faktoren haben!