Inhaltsverzeichnis

1 Vorlesung 1 (06.10.2020)

1.1 Definition: Menge, Mengenelemente, leere Menge

1.2 Venn-Diagramme

1.3 Definition: Aussage

1.4 Definition: Aussageverknüpfung

1.5 Beispiele: Verneinung, Konjunktion, Desjunktion, Implikation, Äquivalenz

1. Vorlesung 06.10.2020

Notiztitel 06.10.2020

- Hinweis auf Portfolio-Prüfung (Kleingruppe / edX-Test / Klausur)
  5% 15% 80%
- Hinweis Zugang edX / OSCA-Plattform
- OSCA-Plattform: Medium für alle Infos zur Vorlesung, Übungsaufgaben, Vorlesungsmitschrift, Skript usw.
- Anmeldung zur Kleingruppenübung (eigenständig anmelden im OSCA-Portal)

  Gruppe 1 Kampmann montags 8:00

  Gruppe 2, Gruppe 3 } Meyer donnerstags 12:15

  } 14-tägiger Wechsel
- Hinweis auf das Skript → Inhaltsverzeichnis (Vorlesungsinhalte)

  → Literaturhinweise

1. Mengen und Aussagen

Definitionen regeln, worüber man in der Mathematik spricht!

Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet, die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen Elemente der Menge.

Bemerkung:

1) Mengen werden durch Aufzählung ihrer Elemente zwischen Mengenklammern angegeben, z.B.

$$A = \{ \underbrace{2,\ 7,\ a,\ \text{Katze}}_{\text{Elemente der Menge}} \}$$

Name / Bezeichnung der Menge

Mengenklammern

„ist Element von …"

2) Wenn ein Element a zur Menge A gehört, schreibt $a \in A$

$b \notin A$

↑ „ist nicht Element von ..."

<u>Beispiel</u>: $A = \{2, 7, a, \text{Katze}\}$

$7 \in A$, $b \notin A$, $\text{Katze} \in A$, $z \notin A$

<u>Definition</u>:

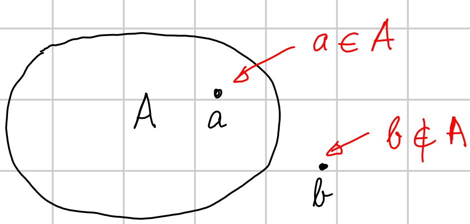
① Es gibt genau eine <u>Menge, die kein Element hat</u>. Diese Menge heißt <u>leere Menge</u>; das Symbol dafür ist $\emptyset$.

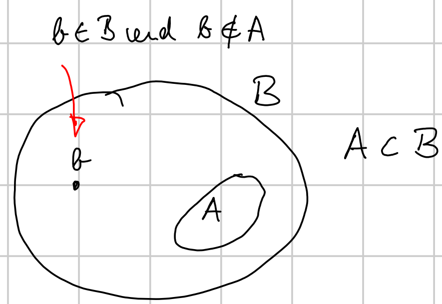
② <u>A ist Teilmenge von B</u> (man schreibt $A \subseteq B$), falls jedes Element von A auch Element von B ist.

<u>A ist echte Teilmenge von B</u> (man schreibt $A \subset B$), falls gilt: $A \subseteq B$ <u>und</u> es gibt mindestens ein $b \in B$ mit $b \notin A$.

③ Es ist $A = B$ (Mengengleichheit), falls gilt: $A \subseteq B$ und $B \subseteq A$, d.h. jedes Element von A gehört auch zu B und jedes Element von B gehört auch zu A.

<u>Venn-Diagramme</u> für Mengen:





<u>Definition</u>:

1) Eine <u>Aussage</u> ist ein sprachlicher Satz, dem eindeutig und unmissverständlich genau einer der beiden <u>Wahrheitswerte</u> „wahr" (w, 1) bzw. „falsch" (f, 0) zugeordnet werden kann.

Aussagen werden (auch) mit Großbuchstaben bezeichnet.

2) Eine Aussage ist eindeutig bestimmt, wenn ihre Wahrheitswerte

festgelegt sind; die Wahrheitswerte „bestimmen" die Aussage.

Beispiele: Frage: Handelt es sich um Aussagen, wenn ja: Welchen Wahrheitswert haben Sie?

a) Merkur ist ein Planet unseres Sonnensystems Aussage, w

b) Für das Produkt 2·3 gilt: $2 \cdot 3 = 7$ Aussage, f

c) Der beste Fußballverein der Welt ist BVB 09 Keine Aussage, persönliche Meinung

d) Sonntags finden an der Hochschule keine Vorlesungen von Prof. Kampmann statt Aussage, w

Definition:

1) Eine Aussagenverknüpfung erzeugt aus einer, zwei oder mehreren Aussagen (Input-Aussagen) eine neue Aussage (Output-Aussage).

2) Die Aussageverknüpfung ist definiert, wenn die Wahrheitswerte der neuen Aussage (Output-Aussage) in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen (Input-Aussagen) feststehen; dies geschieht mittels Wahrheitstafeln / Wahrheitstabellen.

3) Folgende Aussageverknüpfungen bilden unsere Standardverknüpfungen

a) Verneinung ← einstellige Verknüpfung: 1 Input-Aussage

A	$\bar{A}$ $(\neg A)$
w	f
f	w

← $\bar{A}$ oder $\neg A$: nicht A

Input ↑ ↑ Output

b) Konjunktion / und-Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung: 2 Input-Aussagen

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

← $A \wedge B$: A und B; $\wedge$ steht für und

c) Disjunktion / oder-Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

← $A \vee B$: A oder B; $\vee$ steht für oder

d) Implikation / Folgerung / wenn-dann-Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

← $A \Rightarrow B$: wenn A dann B; $\Rightarrow$ steht für wenn...dann...

Prämisse

Folgerung/Schluss

Aus einer falschen Prämisse darf man alles folgern, die Folgerung ist wahr:

beide Implikationen sind „wahr"
- Wenn der Mond fünfeckig ist dann ist 2 eine gerade Zahl
- Wenn der Mond fünfeckig ist dann ist 2 eine ungerade Zahl

e) Äquivalenz / genau dann-wenn-Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

← $A \Leftrightarrow B$: A ist äquivalent zu B

Äquivalenz ist „wahr" { A und B haben denselben Wahrheitswert

Aufgabe: $A \Leftrightarrow B$ kann man über $\wedge$ und $\Rightarrow$ gewinnen! Wie?

2 Vorlesung 2 (07.10.2020)

2.1 Aussagenlogik: Tautologie, XOR, Allquantor, Existenzquantor

2.2 Rechenregeln für Aussageverknüpfung

2.3 Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel)

2.4 Definition: Potenzmenge

2.5 Definition: Rechnen mit Mengen - Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement

2. Vorlesung 07.10.2020

Notiztitel 07.10.2020

Aussagenlogik

2-stellige Verknüpfungen: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

1-stellige Verknüpfung: $\overline{}, \neg$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

genau-dann-wenn

logische Äquivalenz

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

wenn-dann

logische Folgerung

Behauptung: Es gilt $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

Beweis: Aufstellen einer Wahrheitstafel / Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

$\wedge$

✓ ✓

das gilt, wenn in den beiden Spalten dieselbe Verteilung von Wahrheitswerten steht

Bemerkungen:

1) Für die doppelte Verneinung gilt $(\overline{\overline{A}}) = \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ ✓

A	$\overline{A}$	$(\overline{\overline{A}})$	$A \Leftrightarrow (\overline{\overline{A}})$
w	f	w	w
f	w	f	w

✓

2) Aussagen, die immer den Wahrheitswert „w" haben, heißen Tautologie

3) Eine Aussageverknüpfung mit n Input-Aussagen heißt n-stellige (Aussage)verknüpfung

Wieviele voneinander verschiedene 2-stellige Verknüpfungen gibt es?

A	B	$*$
w	w	w/f
w	f	w/f
f	w	w/f
f	f	w/f

$*$ ist eindeutig bestimmt, wenn in jeder der 4 Zeilen ein Wahrheitswert steht

2 Möglichkeiten pro Zeile, damit insgesamt

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Möglichkeiten

2 dieser Möglichkeiten sind

$\boxed{0 \text{ ist die immer falsche Aussage}}$

A	B	$1\!\!1$	XOR	0
w	w	w	f	f
w	f	w	w	f
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

XOR: ausschließendes oder: A oder B ist wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr ist

$\boxed{1\!\!1 \text{ ist die immer wahre Aussage}}$

4) Die Aussagen

a) „Für alle $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\forall x \in M: ...$
$\forall$ heißt Allquantor.

b) „Für (mindestens) ein $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\exists x \in M: ...$
$\exists$ heißt Existenzquantor.

c) „Für genau ein $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\exists!\, x \in M: ...$

„Rechnen" mit Aussagen

Eine Aussageverknüpfung erzeugt aus $1, 2, ..., n$ Input-Aussagen eine neue Aussage; diese Aussage ist festgelegt (wohldefiniert), wenn ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Input-Aussagen feststeht; dies geschieht z.B. über eine Wahrheitstabelle!

Rechenregeln für Aussageverknüpfungen

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die **Rechengesetze der Aussagenlogik**

	Name	und ($\wedge$)	oder ($\vee$)
	Kommutativgesetz	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
	Assoziativgesetz	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
b) $\rightarrow$	Existenz neutraler Elemente	$A \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow A$	$A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$
	Existenz komplementärer Elemente	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{0}$	$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{1}$
a) $\rightarrow$	Distributivgesetze	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
c) $\rightarrow$	DeMorgansche Regeln	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

Bemerkung:

1) Es reichen die 2-stelligen Verknüpfungen $\wedge, \vee$ und die 1-stellige Verknüpfung $\neg, \overline{}$ aus, um $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ und weitere der 16 2-stelligen Verknüpfungen darzustellen (disjunktive/konjunktive

Normalformen → Digitaltechnik) ⇒ Rechengesetze für $\wedge, \vee, \overline{}$ regeln
also alle Aussageverknüpfungen!

2) Exemplarische Beweise der Rechenregeln mittels Wahrheitstafeln

a) 1. Distributivgesetz $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

8 Zeilen ≙ 8 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten bei 3 Inputs

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

$\Leftrightarrow$

b) Existenz neutraler Elemente

$\mathbb{1}$ ← immer wahre Aussage ; $\mathbb{0}$ ← immer falsche Aussage

A	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$A \wedge \mathbb{1}$	$A \vee \mathbb{0}$
w	w	f	w	w
w	w	f	w	w
f	w	f	f	f
f	w	f	f	f

$(A \wedge \mathbb{1}) \Leftrightarrow A$

$(A \vee \mathbb{0}) \Leftrightarrow A$

c) De Morgansche Regeln ← wie verträgt sich Verneinung mit und bzw. oder

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$; $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A \vee B}$
w	w	w	w	f	f	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w	w	w	w

3) Zwei weitere Beispiele

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \lor B)$; $\underbrace{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})}_{\text{Kontraposition}}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \lor B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

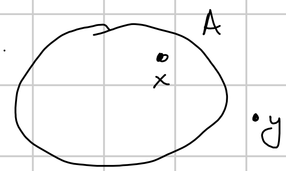
$\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

<u>Mengenlehre</u> $\underbrace{A, B \text{ Mengen}}$: $A \subseteq B$, $A \subset B$, $A = B$, $x \in A$, $x \notin A$

$\emptyset$ leere Menge (einzige Menge ohne Element)

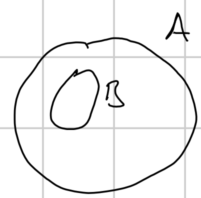
Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen

Venn-Diagramm:



$x \in A$

$y \notin A$



$B \subseteq A$

<u>Bemerkung:</u> „Naive" Mengendefinition (Cantor) kann zu Widersprüchen führen (Russell), z.B.:

Auf einer kleinen Insel gilt für die männlichen Bewohner: Der Dorffriseur rasiert jeden Mann, der sich nicht selbst rasiert, und nur diese. Insbesondere rasiert der Dorffriseur keinen Mann, der sich selbst rasiert; der Dorffriseur ist männlich.

$A = \{x \mid x$ ist männlicher Einwohner der Insel und wird vom Dorffriseur rasiert$\}$

f bezeichnet den Dorffriseur!

Gilt $f \in A$ oder $f \notin A$ ↯ unentscheidbarer Widerspruch

Lösung: Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel)

Unsere <u>pragmatische Lösung:</u>

Alle betrachteten Mengen stammen aus einer (aus dem Zusammenhang ersichtlichen) <u>Allmenge</u> Ω. Jede in diesem Zusammenhang betrachtete Menge A ist also Teilmenge von Ω.

Definition: Ω ist die betrachtete Allmenge

1) Gegeben ist eine Menge A, dann ist die Menge aller Teilmengen von A die Potenzmenge von A, man schreibt

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

2) $\emptyset \subseteq A \;\forall A \subseteq \Omega$; $A \subseteq A \;\forall A \subseteq \Omega$
3) Wenn A endlich viele Elemente hat, ist $|A|$ die Anzahl der Elemente von A

Beispiel: $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \underbrace{A}_{=\{a,b,c\}}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \}$$

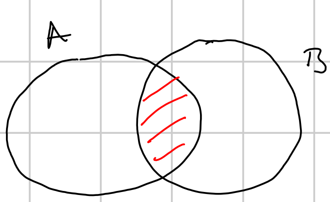
$\rightarrow |A| = 3$, $|\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3$

Später wird gezeigt: $A \subseteq \Omega$ endliche Menge, dann gilt: $n = |A| \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

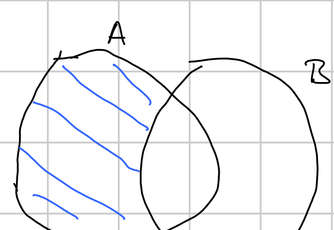
Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

Definition: Gegeben sind die Mengen A und B ($A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$).
Dann ist definiert

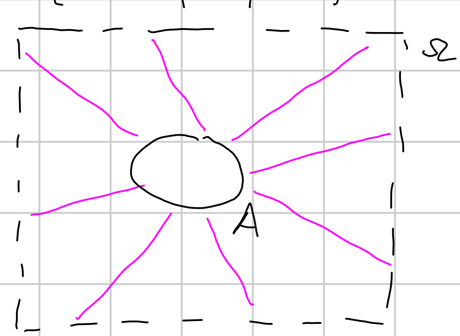
1) die Vereinigung $A \cup B$ durch: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
2) der Durchschnitt $A \cap B$ durch: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
3) die Differenz $A \setminus B$ durch: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$
4) das Komplement $\bar{A}$ durch: $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$



$A \cap B$



$A \setminus B$



$\bar{A} = \Omega \setminus A$

$A \cup B$

Bemerkung: Statt $A \setminus B$ schreibt man auch $A - B$.

3 Vorlesung 3 (12.10.2020)

3.1 Zahlenmengen

3.2 Definition: Aussageform

3.3 Definition: Kartesisches Produkt von Mengen, Tupel

3.4 Zahlenstrahl, Anordnung von Zahlen

3. Vorlesung 12.10.2020

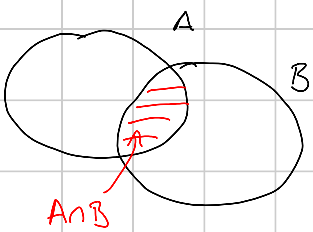
Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

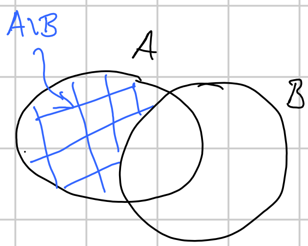
Definition: Gegeben sind die Mengen A und B $(A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega)$.

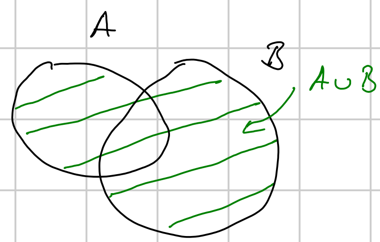
„Allmenge" aus dem Kontext des behandelten Themas

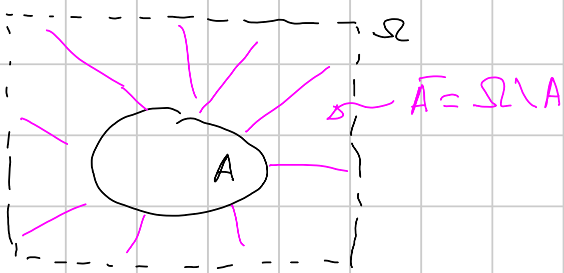
Dann ist definiert

1) die Vereinigung $A \cup B$ durch: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
2) der Durchschnitt $A \cap B$ durch: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
3) die Differenz $A \setminus B$ durch: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$
4) das Komplement $\bar{A}$ durch: $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$









Beispiele und Bemerkung

1) Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ← Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ ← Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$ ← Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$ ← Menge der rationalen Zahlen (Menge der Brüche)

$\frac{z}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ z heißt Zähler, $z \in \mathbb{Z}$

n heißt Nenner, $n \in \mathbb{N}$ ← $n \neq 0$ denn $0 \notin \mathbb{N}$

„man darf nicht durch Null teilen"

$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$ mit $z=-3$, $n=4$

$\frac{128}{31} \in \mathbb{Q}$ mit $z=128$, $n=31$

$5 = \frac{5}{1}$ mit $z=5$, $n=1$

$\underbrace{-8 = \frac{-8}{1} \text{ mit } z=-8,\ n=1}$

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \dots \leftarrow$ die Darstellung $q = \frac{z}{n}$ für $q \in \mathbb{Q}$ ist nicht eindeutig

vollständig gekürzte Form: Zähler und Nenner haben keinen gemeinsamen Faktor mehr

$\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{7 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{7} \leftarrow$ vollständig gekürzte Form

„Kürzen" des gemeinsamen Faktors

2) $A = \{-2, -1, 0, 3, 5, 7\}$
$B = \{-3, -1, 3, 6\}$
$C = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -5, -2, 0\}$
dann gilt

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{-1, 3\}$

$A \setminus B = \{-2, 0, 5, 7\}$

$B \setminus A = \{-3, 6\}$

in der Regel (d.h. ausser in wenigen Ausnahmefällen) gilt $A \setminus B \neq B \setminus A$

$C \setminus B = C$ hier auch $B \setminus C = B$

$A \cap C = \{0, -2\}$, $B \cap C = \emptyset$

A enthält nur ganze Zahlen, also aus dem Kontext: $\Omega = \mathbb{Z}$

$\bar{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{\dots -4, -3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$

„Rechenregeln" für Mengenoperationen

Mengenoperationen sind über aussagenlogische Verknüpfungen definiert, z.B.

$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$

daher folgt: Die „Rechenregeln" für Mengenoperationen folgen aus den „Rechenregeln" der Aussagenlogik

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die **Rechengesetze der Mengenlehre**

Name	Durchschnitt ($\cap$)	Vereinigung ($\cup$)
Kommutativgesetz	$A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$	$A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$
Assoziativgesetz	$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$
Existenz neutraler Elemente	$A \cap \Omega \Leftrightarrow A$	$A \cup \emptyset \Leftrightarrow A$
Existenz komplementärer Elemente	$A \cap \overline{A} \Leftrightarrow \emptyset$	$A \cup \overline{A} \Leftrightarrow \Omega$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
DeMorgansche Regeln	$\overline{A \cap B} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

Beweisidee:

Vereinigung $\cup$, $\cap$ Durchschnitt } Mengenoperationen

oder, und — Verknüpfungen der Aussagenlogik

a) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x \in A) \vee \big((x \in B) \wedge (x \in C)\big)$

Distributivgesetz der Aussagenlogik

$\Leftrightarrow \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge \big((x \in A) \vee (x \in C)\big)$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Merke: Mengengleichheit $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\Leftrightarrow \big((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\big)$

b) $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \leftarrow x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

$\Leftrightarrow \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)}$

DeMorgansche Regel der Aussagenlogik

$\Leftrightarrow \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)}$

$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})$

$\Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$

Angabe von Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente ist bei großen endlichen Mengen insbesondere aber bei Mengen mit unendlich vielen Elementen unpraktisch bzw. unmöglich, daher braucht man

Definition:

Eine Aussageform ist ein sprachlicher Satz, der einen oder mehrere

Platzhalter (eine oder mehrere Variablen) enthält, und zu Aussage wird, sobald man die Platzhalter (Variablen) durch konkrete Elemente der Definitionsmenge D (Grundmenge) der Aussageform ersetzt.

Beispiele:

1) $A(n) \hat{=}$ „n ist ohne Rest durch 3 teilbar", $D = \mathbb{N}$

Variable

$A(5) \hat{=}$ „5 ist ohne Rest durch 3 teilbar" ← Aussage, Wahrheitswert: f

2) $B(n_1, n_2) \hat{=}$ „das Produkt $n_1 \cdot n_2$ ist eine ungerade Zahl",

2 Variable

$$D = \{ (n_1, n_2) \mid n_1 \in \mathbb{N} \wedge n_2 \in \mathbb{N} \}$$

Was ist das? → siehe unten: Kartesisches Produkt

$B(3,6) \hat{=}$ „das Produkt $3 \cdot 6$ ist eine ungerade Zahl" ← Aussage, Wahrheitswert: f

$B(5,7) \hat{=}$ „das Produkt $5 \cdot 7$ ist eine ungerade Zahl" ← Aussage, Wahrheitswert: w

3) $G \subseteq \mathbb{Z}$ mit $G = \{ z \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k}_{} \}$ Menge der geraden Zahlen

damit ist die Bedeutung von ... eindeutig geklärt

$$= \{ \dots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots \}$$

Aussageform

3) $S = \{ s \mid$ s ist im WS 2021 an der HS Osnabrück als Studierende(r) eingeschrieben $\}$, $D =$ Menge aller Menschen

Die Aussageform, die eine Menge beschreibt, nennt man auch charakterisierende Eigenschaft der Menge.
Mengen kann man also durch Aufzählung aller Elemente oder durch ihre charakterisierende Eigenschaft beschreiben.

Definition (Kartesisches Produkt von Mengen)

1) Gegeben sind zwei Mengen A, B (mit $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$).
Dann ist das Kartesische Produkt $A \times B$ definiert durch
$$A \times B = \{ (a,b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$
dabei heißt (a,b) geordnetes Paar (2-Tupel) mit festgelegten Komponenten

(a, b): a – 1. Komponente, b – 2. Komponente

Für alle 2-Tupel / geordneten Paare (a,b) aus $A \times B$ gilt:
1. Komponente a kommt aus der 1. Menge A
2. Komponente b kommt aus der 2. Menge B

2) Gegeben sind die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(n \in \mathbb{N})$; es gilt $A_i \neq \emptyset$ für $i \in \{1,2,\dots,n\}$
Dann ist das (n-fache) Kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ definiert durch
$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1,2,\dots,n\} \}$$
dabei heißt $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ auch n-Tupel
a_i steht in der i-ten Komponente von $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ für $i \in \{1,2,\dots,n\}$;
i-te Komponente a_i kommt aus der i-ten Menge A_i für $i \in \{1,2,\dots,n\}$.

Beispiele:

1) $\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3\} \\ B = \{a, b\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\} \\ B \times A = \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\} \end{array}}$

$(a,1) \neq (1,a) \Rightarrow A \times B \neq B \times A$

Das Kartesische Produkt von Mengen ist nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der „Faktoren" (also der beteiligten Mengen) ist relevant!

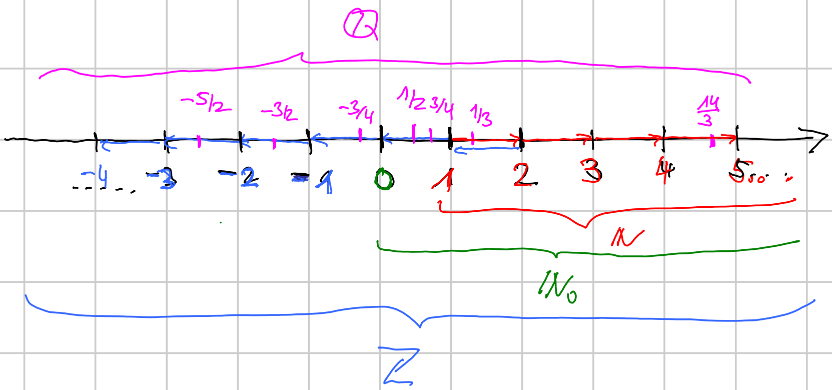
2) Für die Mengen aus 1) gilt:

$\left.\begin{array}{l} |A| = 3 \quad \text{Anzahl der Elemente in } A \\ \text{Anzahl der Elemente in } B \quad |B| = 2 \end{array}\right\} \; |A \times B| = |B \times A| = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$

allgemein $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ für endliche Mengen A und B

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$ für endliche Mengen A_i; $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

Grafische Veranschaulichung der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$



Zahlenstrahl: Horizontale Gerade mit aufsteigenden äquidistanten Punkten

Zahlenstrahl = gerichtete Gerade $\Rightarrow$ Anordnung der Zahlen in $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$,

nämlich: $a < b \Leftrightarrow$ Punkt zu a auf Zahlenstrahl liegt links vom Punkt zu b auf dem Zahlenstrahl

a kleiner b

$a = b \Leftrightarrow$ Punkt zu a auf dem Zahlenstrahl ist identisch mit dem Punkt zu b auf dem Zahlenstrahl

a gleich b

$a > b \Leftrightarrow b < a$

a größer b

4 Vorlesung 4 (13.10.2020)

4.1 Beipiele Relationen + Kartesisches Produkt

4.2 Definition: reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch: Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation

4.3 Definition: Äquivalenzklasse

4. Vorlesung 13.10.2020

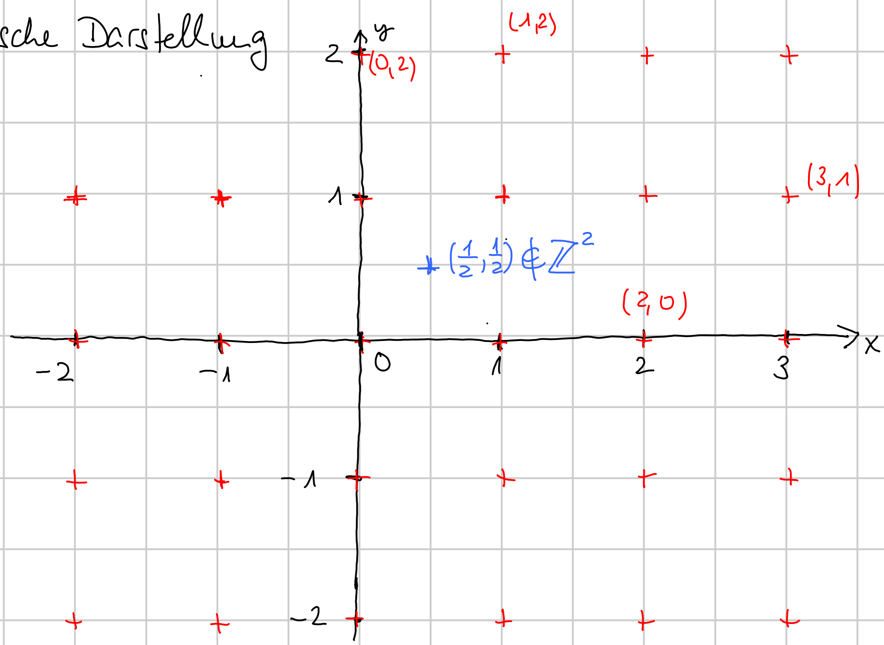
Notiztitel 13.10.2020

Beispiel: Kartesisches Produkt von Mengen

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \}$$

$(-1,4) \in \mathbb{Z}^2$, $(7,0) \in \mathbb{Z}^2$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \notin \mathbb{Z}^2$

grafische Darstellung



$\mathbb{Z}^2$ ist die Menge der „Gitterpunkte" in der Zahlenebene, die durch die beiden Zahlenstrahlen gegeben ist

Definition:

1) Gegeben sind die Mengen A und B ($A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$).
Jede Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt (2-stellige) Relation über A, B.
Für $A = B$: $R \subseteq A \times A = A^2$ heißt (2-stellige) Relation über A.

2) Gegeben sind die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ ($A_i \neq \emptyset \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\}$).
Jede Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ heißt (n-stellige) Relation über $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Für $A_1 = A_2 = \dots = A_n$: $R \subseteq A_1 \times A_1 \times \dots \times A_1 = A_1^n$ heißt (n-stellige) Relation über A_1

Beispiele:

1) M = Menge aller Menschen

R 2-stellige Relation über M ist gegeben durch

$R = \{ (m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1 \text{ ist Vater von } m_2 \}$ ← „Vater-Relation"

2) P = Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball

$\tilde{R}$ 2-stellige Relation über P ist gegeben durch

$\tilde{R} = \{ (f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2 \}$

„Fußballer-Relation"

3) $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ist definiert durch

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y \}$ ← „Kleiner-Relation"

K ist eine 2-stellige Relation über $\mathbb{Z}$

4) Man <u>definiert</u> für $a, b \in \mathbb{Z}$:

Kleiner-gleich

$a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$

$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$

größer-gleich

$KG \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ist definiert durch

$KG = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y \}$ ← „Kleiner-Gleich-Relation"

KG ist eine 2-stellige Relation über $\mathbb{Z}$

<u>Definition:</u>

1) Eine 2-stellige Relation R über A, $A \neq \emptyset$, heißt Äquivalenzrelation, falls gilt:

a) R ist reflexiv, d.h. $(a,a) \in R \ \forall a \in A$

b) R ist transitiv, d.h. $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

c) R ist symmetrisch, d.h. $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

2) Eine 2-stellige Relation über A, $A \neq \emptyset$, heißt Ordnungsrelation, falls gilt:

$(a,a) \in R \ \forall a \in A$

a) R ist reflexiv, b) R ist transitiv

Ausgangsvoraussetzung für Prüfung auf Antisymmetrie

c) R ist antisymmetrisch, d.h. $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

d.h. für $a \neq b$ ist niemals $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$

Beispiele:

1) $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist definiert durch $G = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y\}$ ← „Gleich-Relation"

Es gilt: $\forall x \in \mathbb{Z}: x = x \Rightarrow (x,x) \in G \; \forall x \in \mathbb{Z}$, G ist reflexiv

$(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow (x,z) \in G$, G ist transitiv

$(x,y) \in G \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow (y,x) \in G$, G ist symmetrisch

Insgesamt: Die „Gleich-Relation" G über $\mathbb{Z}$ ist eine Äquivalenzrelation

2) $KG \subseteq \mathbb{Z}^2$ mit $KG = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$ ← „Kleiner-Gleich-Relation"

Es gilt:

$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in KG \Rightarrow x \leq y \\ (y,x) \in KG \Rightarrow y \leq x\end{array}\right\}$ falls $(x,y) \in KG$ und $(y,x) \in KG$ gilt, hat man

$x \leq y \leq x \Leftrightarrow x = y$

d.h. KG ist antisymmetrisch

$\forall x \in \mathbb{Z}: \underbrace{x \leq x}_{} \Rightarrow (x,x) \in KG$, KG ist reflexiv

$(x < x) \vee (x = x)$ ← das wahre Aussage solange einer der Inputs $x<x$ / $x=x$ wahr ist

$\forall (x,y) \in KG, (y,z) \in KG$:

$\left.\begin{array}{l}(x,y) \in KG \Rightarrow x \leq y \\ (y,z) \in KG \Rightarrow y \leq z\end{array}\right\} \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x,z) \in KG$,

KG ist transitiv

Insgesamt: Die „Kleiner-Gleich-Relation" KG über $\mathbb{Z}$ ist eine Ordnungsrelation

3) Welche der oben definierten Eigenschaften haben die folgenden Relationen

a) $R = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1$ ist Vater von $m_2\}$ ← „Vater-Relation"

(M: Menge aller Menschen)

b) $\tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1$ ist im selben Verein unter Vertrag wie $f_2\}$

(P: Menge aller Profifußballer im DFB)

c) $K = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$ ← „Kleiner-Relation" zu a) R ist weder reflexiv, noch transitiv, noch symmetrisch

niemand ist sein eigener Vater

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow$ a ist Großvater von c nicht Vater

niemand kann sein eigenes Kind sein

zu b) $\tilde{R}$ ist Äquivalenzrelation, denn

$(f,f) \in \tilde{R} \; \forall f \in P \Rightarrow \tilde{R}$ ist reflexiv

jeder Fußballer gehört zu einem Verein

$(f_1,f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow f_1$ ist im selben Verein wie f_2

$(f_2,f_3) \in \tilde{R} \Rightarrow f_2$ ist im selben Verein wie f_3

$\Rightarrow f_1$ ist im selben Verein wie f_3

$\Rightarrow \tilde{R}$ ist transitiv

$(f_1,f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow f_1$ ist im selben Verein wie f_2

$\Rightarrow f_2$ ist im selben Verein wie f_1

$\Rightarrow (f_2,f_1) \in \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R}$ ist symmetrisch

zu c) $K = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$

$x < x$ ist falsche Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,x) \notin K \; \forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow K$ ist nicht reflexiv

ein konkretes Gegenbeispiel reicht aus

für $(1,1)$ gilt $1<1$ nicht! Damit ist $(1,1) \notin K$

K ist nicht reflexiv

$(x,y) \in K \Rightarrow x < y$

$(y,z) \in K \Rightarrow y < z$

$\Rightarrow x<y<z \Rightarrow x<z \Rightarrow (x,z) \in K$

$\Rightarrow K$ ist transitiv

$(x,y) \in K \Rightarrow x < y \Rightarrow y < x$ ist falsche Aussage

$\Rightarrow (y,x) \notin K \Rightarrow K$ ist nicht symmetrisch

Es gibt keine $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(x,y) \in K \wedge (y,x) \in K$, denn $x<y$ und $y<x$ ist immer eine falsche Aussage!) Ausgangssituation für Antisymmetrie ist nie erfüllt!

Definition:

Gegeben ist eine (2-stellige) Äquivalenzrelation R über A. Dann gilt:

1) Falls $(a,b) \in R$ ist, sagt man a und b sind äquivalent.

2) Für $a \in A$ ist die Menge

$$[a] = \bar{a} = \{ b \in A \mid (a,b) \in R \}$$

$$= \{ b \in A \mid a \text{ und } b \text{ sind äquivalent} \}$$

die <u>Äquivalenzklasse</u> zu a (bezüglich der Relation R)

3) Für $(a,b) \in R$, also a und b sind äquivalent, wird häufig ein eigenes „Rechenzeichen" eingeführt, z.B. $a \sim b$.

Beispiel:

Wir betrachten die Zahl $m = 5 \in \mathbb{Z}$ und folgende Relation R:

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad a \equiv b \iff 5$ ist echter Teiler von $b - a$

$\uparrow$ a ist äquivalent zu b / a ist kongruent zu b

Bemerkung: 5 ist echter Teiler von $b - a \iff \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z}: \; b - a = k \cdot 5}_{b-a \text{ ist ein Vielfaches von } 5}$

a) $R = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b \}$ ist eine Äquivalenzrelation

<u>reflexiv</u>: $\quad a - a = 0 = 0 \cdot 5 \Rightarrow (a,a) \in R$ oder $a \equiv a$

<u>symmetrisch</u>: $\quad a \equiv b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: \; b - a = k \cdot 5$

$$\Rightarrow \quad a - b = -(b - a) = -k \cdot 5 = (-k) \cdot 5$$

$\Rightarrow$ auch $a - b$ ist ein Vielfaches von 5

$\Rightarrow b \equiv a$

<u>transitiv</u>: $\quad a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: \; b - a = k \cdot 5 \wedge c - b = l \cdot 5$

$$\Rightarrow \quad c - a = (c \overbrace{- b) + (b}^{=0} - a)$$

$$= l \cdot 5 + k \cdot 5 = (l + k) \cdot 5$$

$\Rightarrow$ auch $c - a$ ist ein Vielfaches von 5

$\Rightarrow c \equiv a$

b) Äquivalenzklassen dieser Relation $a \equiv b \Leftrightarrow b-a = k\cdot 5$

$[0] = \bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 0 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = b = k \cdot 5 \}$
$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0 \}$

$[1] = \bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 1 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 1 = k \cdot 5 \}$
$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1 \}$

Aufgabe zur 5. Vorlesung: a) Finden Sie die weiteren Äquivalenzklassen
b) Finden Sie die Äquivalenzklassen der Fußballer-Relation (sprachlich beschreiben!)

5 Vorlesung 5 (14.10.2020)

5.1 Beipiele Äquivalenzklasse

5.2 Definition: vollständige Mengenpartition

5.3 Satz: Aquivalenzklassen bilden vollständige Mengenpartition

5.4 Definition: Verknüpfung

5.5 Definition: Abbildung, Funktion, Bild, Graph, Urbild

5.6 grafische Veranschaulichtung der reellen Zahlen

1) $R = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = k \cdot 5\}$

für $(a,b) \in R$ schreiben wir $a \equiv b$

4. Vorlesung: Nachweis R ist Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen: $[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b\}$ (andere Schreibweise für $[a]$ ist $\bar{a}$)

$[0] = \bar{0} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0\}$

$[1] = \bar{1} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 1 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1\}$

$[2] = \bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 2 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 2\}$

$[3] = \bar{3} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 3 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 3\}$

$[4] = \bar{4} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 4 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 4\}$

es existiert ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Darstellung von b gegeben ist

$[5] = \bar{5} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 5 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 5 = \overbrace{(k+1)}^{=\tilde{k}} \cdot 5\}$

$= \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \tilde{k} \cdot 5 + 0\} = [0]$

Für $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ gilt also

$[i] = \bar{i}$ ist die Menge aller ganzen Zahlen, die beim Teilen (ganzzahligen Teilen) durch 5 den Rest i lassen.

$[0] = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\}$

$[1] = \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\}$ $\quad -9 = \overbrace{(-2)}^{k} \cdot 5 + 1$

$[2] = \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\}$

$[3] = \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\}$

$[4] = \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\}$

$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4]$, $[i] \cap [j] = \emptyset$ für $i \neq j$

2) Fußballer-Relation (aus der 4. Vorlesung)

Eine Äquivalenzklasse dieser Relation ist ein Verein im deutschen Profifußball

$\leftarrow$ Jeder Verein (als Menge seiner Spieler) ist eine Äquivalenzklasse

↳ $\left\{\begin{array}{l} P = \text{Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball} \\ \tilde{R} \text{ 2-stellige Relation über } P \text{ ist gegeben durch} \\ \tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2\} \end{array}\right.$

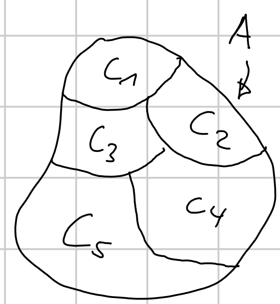
↳ „Fußballer-Relation“

Definition: Gegeben ist eine Menge A $(A \neq \emptyset)$. $\mathcal{P}(A)$ ist dann die Potenzmenge von A (Menge aller Teilmengen von A).
Ein Mengensystem $B \subseteq \mathcal{P}(A)$ (also eine Menge von Teilmengen von A) heißt <u>vollständige Mengenpartition von A</u>, wenn gilt:

1) $C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad \forall C_1, C_2 \in B$ mit $C_1 \neq C_2$

2) $\bigcup\limits_{C_i \in B} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \ldots \cup C_N = A$

$B = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\}$



Bemerkung: Wenn $B = \{C_1, C_2, \ldots, C_N\} \subseteq \mathcal{P}(A)$ eine vollständige Mengenpartition von A ist, gilt: Jedes Element von A gehört zu genau einer Menge C_i aus B.

Satz: Gegeben ist eine Menge A, $A \neq \emptyset$. $R \subseteq A \times A$ ist eine Äquivalenzrelation über A. Dann gilt:
Die Äquivalenzklassen dieser Relation bilden eine vollständige Mengenpartition von A, d.h. $\bigcup\limits_{a \in A} [a] = A$.

Beweis:

1) Für jedes $a \in A$ gilt $a \in [a]$, denn R ist reflexiv $(a,a) \in R$,
damit ist $\bigcup\limits_{a \in A} [a] = A$

2) Augenommen $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x \in [a] \cap [b]$ d.h.

$$\underbrace{x \in [a]}_{(a,x) \in R} \wedge \underbrace{x \in [b]}_{(b,x) \in R} \Rightarrow \underbrace{(a,x) \in R \wedge (b,x) \in R}_{R \text{ ist symmetrisch}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a,x)\in R \wedge (x,b)\in R}_{R \text{ ist transitiv}}$$

$$\Rightarrow (a,b)\in R$$

$$\Rightarrow a\in[b],\ b\in[a]$$

$$\Rightarrow [a]=[b]$$

Verknüpfung von Relationen

Definition: A, B, C sind nichtleere Mengen.

Gegeben sind die 2-stelligen Relationen $R_1 \subseteq A\times B$ und $R_2 \subseteq B\times C$

Dann ist die Verknüpfung $R_1 \circ R_2 \subseteq A\times C$ definiert durch:

$$(a,c)\in R_1\circ R_2 \Leftrightarrow \exists x\in B:\ (a,x)\in R_1 \wedge (x,c)\in R_2$$

A = Menge der Nachnamen der Studierenden der HS OS

B = Menge der zulässigen Matrikelnummern der HS OS

C = Menge der Studiengänge der HS OS

$R_1 \subseteq A\times B$ ← Zuordnung des Namens eines Studierenden zur Matrikelnr.

Name	Matr.-Nr
- - - -	- - - -
Schmidt	12345
Meier	36111
Schulze	21224
⋮	⋮

$R_2 \subseteq B\times C$ ← Zuordnung von Matrikelnr. zu Studiengang

Matrikel-Nr.	Studiengang
- - - - -	- - - - -
12345	Elektrot.
36111	Medieninf.
21224	Gartenbau
- - - - -	- - - - -

$R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ $\quad$ $\left.\begin{array}{l}(\text{Schmidt}, \underline{12345}) \in R_1 \\ (\underline{12345}, \text{Elektrot.}) \in R_2\end{array}\right\}$ $(\text{Schmidt}, \text{Elektrot.}) \in R_1 \circ R_2$

Name	Studiengang
-----	-----
Schmidt	Elektrot.
Meier	Medieninf.
Schulze	Gartenbau
----	-----

<u>Abbildungen und Funktionen</u> (als Relationen mit bestimmten Zusatzeigenschaften)

<u>Definition:</u>

Gegeben sind die Mengen D und W $(D \neq \emptyset, W \neq \emptyset)$.

a) Eine <u>Abbildung</u> $f: D \to W$ ist eine 2-stellige Relation $f \subseteq D \times W$ über D und W mit folgender Eigenschaft:

$\underline{\forall x \in D \; \exists! \, y \in W: (x,y) \in f}$, man schreibt dafür $y = f(x)$

Zu jedem $x \in D$ gibt es <u>genau ein</u> $y \in W$ mit $(x,y) \in f$ oder $y = f(x)$;

dem $x \in D$ wird mittels f genau ein $y \in W$ zugeordnet

Die Menge D heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge der Abbildung;

die Menge W heißt Wertebereich / Wertemenge der Abbildung

b) Wenn gilt: $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ nennt man die Abbildung $f: D \to W$ eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen

c) Für eine Abbildung $f: D \to W$ ist definiert

$\underline{\text{Bild}(f)} = \{ y \in W \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f \subseteq D \times W) \}$

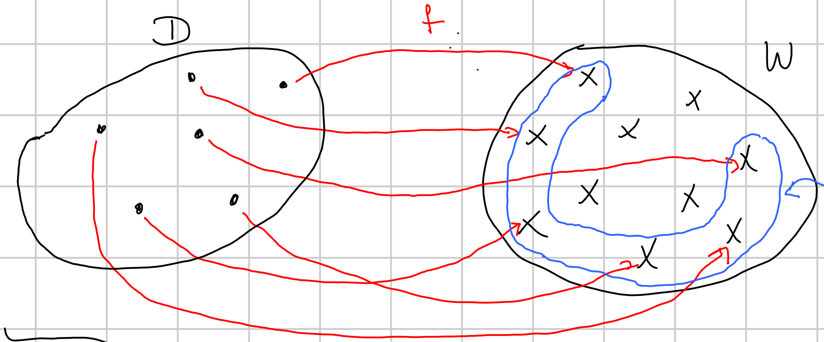
$\text{Graph}(f) = \{ (x,y) \in D \times W \mid y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f) \}$

ist der <u>Graph von f</u> $(D \subseteq \mathbb{R}, W \subseteq \mathbb{R}:$ Graph $\hat{=}$ Funktionskurve$)$

Für $y \in W$ ist $U_f(y) = \{ x \in D \mid y = f(x) \; (\text{d.h. } (x,y) \in f) \}$

das Urbild von y unter f

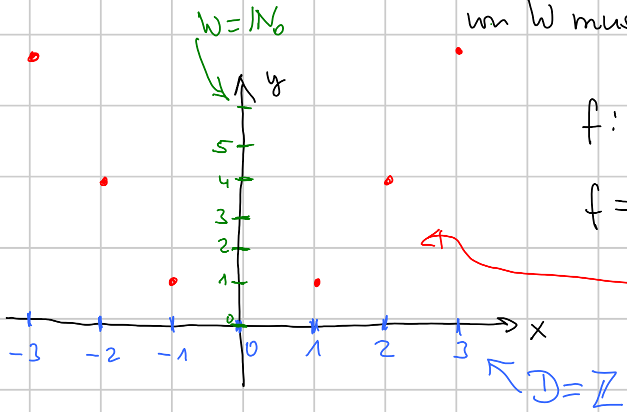
$f: D \to W$



Bild(f)
Elemente von W, bei denen ein Pfeil endet, die also wirklich als Wert der Abbildung vorkommen

$\forall x \in D$ heißt: von jedem Element in D geht ein Pfeil aus

$\exists!\, y \in W : (x,y) \in f$
Jeder Pfeil endet bei genau einem Element aus W
Achtung: Nicht bei jedem Element von W muss ein Pfeil enden



$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$

$f = \{(z, z^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0\}$ also $f(z) = z^2$

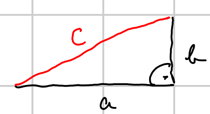
$\text{Graph}(f) = \{(z, z^2) \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Was ist $\mathbb{R}$?

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ → grafische Veranschaulichung: Zahlenstrahl

$\ell \mathrel{\hat{=}}$ Länge der Diagonalen im Quadrat mit Kantenlänge 1

Im rechtwinkligen Dreieck gilt nach Pythagoras



$c^2 = a^2 + b^2$

Zu ℓ gibt es einen Punkt auf dem Zahlenstrahl, d.h. ℓ ist eine auf dem Zahlenstrahl repräsentierte Zahl, mit Pythagoras folgt $\ell^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.
Wir nennen die Zahl ℓ Wurzel aus 2, geschrieben $\ell = \sqrt{2}$

Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, d.h. $\sqrt{2}$ gehört zu einer Zahlenmenge (repräsentiert auf dem Zahlenstrahl), die neu ist; das ist $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen;
es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Beweis zu $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: Widerspruchsbeweis (man nimmt das Gegenteil der Behauptung als wahr an und leitet daraus einen offensichtlichen Widerspruch ab, d.h. das

Gegenteil der Behauptung muss falsch sein, die ursprüngliche Behauptung ist also wahr)

Angenommen $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ $\Rightarrow$ es gibt $z \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ mit $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$ in vollständig gekürzter Form, d.h. z und n haben keine gemeinsamen Faktoren mehr:

$\sqrt{2} = \frac{z}{n} \Rightarrow 2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow z^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow$ 2 ist Teiler von $z^2 = z \cdot z$

$\Rightarrow$ 2 ist Teiler von z, d.h.

es gibt $k \in \mathbb{Z}$ mit $z = k \cdot 2$

damit gilt $2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow 2n^2 = z^2 = (k \cdot 2)^2 = 4k^2$

$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow$ 2 ist Teiler von $n^2 = n \cdot n$

$\Rightarrow$ 2 ist ein Teiler von n $\lightning$

Widerspruch dazu, dass z und n keine gemeinsamen Faktoren haben!

6 Vorlesung 6 (19.10.2020)

6.1 Beipiele Abbildung, Funktion

6.2 Zahlensysteme

6.3 Peano-Axiome (natürliche Zahlen definieren)

6.4 Rechenregeln in den natürlichlen Zahlen

6.5 Definition: Endliche Summe

6.6 5. Peano-Axiom / Induktionsaxiom / vollständige Induktion

6. Vorlesung 19.10.2020

Notiztitel 19.10.2020

Abbildung / Funktion

Gegeben sind Mengen D, W $(D \neq \emptyset, W \neq \emptyset)$.

Die 2-stellige Relation $f \subseteq D \times W$ heißt Abbildung, falls gilt:

$\forall x \in D \; \exists! y \in W: (x,y) \in f$, man schreibt dann $y = f(x)$.

Wenn gilt $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$, nennt man f eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen (Variablen).

D heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge

W heißt Wertebereich / Wertemenge

$\text{Graph}(f) = \{(x,y) \in D \times W \mid (x,y) \in f\} = \{(x,y) \in D \times W \mid y = f(x)\}$

ist der Graph von f (bei Funktionen heißt der Graph auch Funktionskurve)

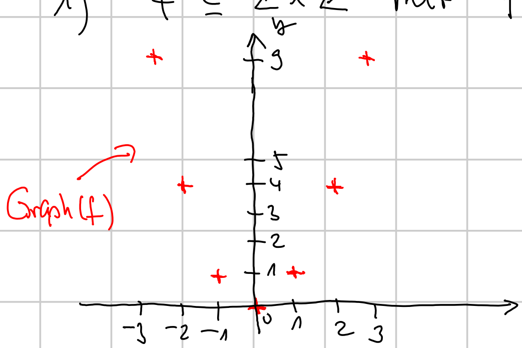
$\text{Bild}(f) = \{y \in W \mid \exists x \in D: (x,y) \in f\} = \{(x,y) \in D \times W \mid \exists x \in D: y = f(x)\}$

heißt Bild von f.

Das Urbild von y unter f ist $U_f(y) = \{x \in D \mid (x,y) \in f\}$
$= \{x \in D \mid y = f(x)\}$

Beispiele:

1) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $\overbrace{f = \{(x,x^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\}}^{f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \text{ es ist } D = \mathbb{Z} \text{ und } W = \mathbb{Z}} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$



$(0,0) \in f$ denn $f(0) = 0^2 = 0$

$(1,1) \in f$ denn $f(1) = 1^2 = 1$

$(-1,1) \in f$ denn $f(-1) = (-1)^2 = 1$

$(3,9) \in f$ denn $f(3) = 9$

$(-3,9) \in f$ denn $f(-3) = 9$

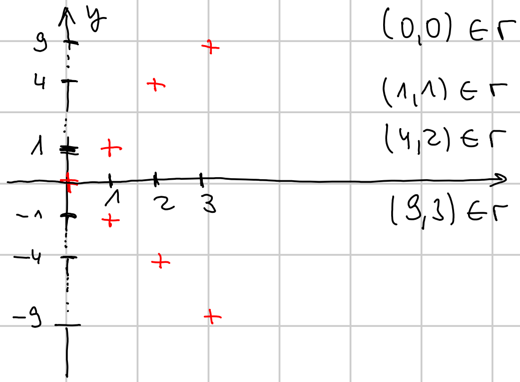
$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq 0\}$

$U_f(16) = \{-4, 4\}$ denn $f(-4) = (-4)^2 = 16$ und $f(4) = 4^2 = 16$

$U_f(2) = \emptyset$ denn es gilt $(\sqrt{2})^2 = 2$ d.h. $f(\sqrt{2}) = 2$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

$U_f(-5) = \emptyset$ denn für kein $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 = -5$, $U_f(0) = \{0\}$ denn nur $0^2 = 0$

2) Die 2-stellige Relation $r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist gegeben durch
$r = \{ (x^2, x) \mid x \in \mathbb{Z} \}$

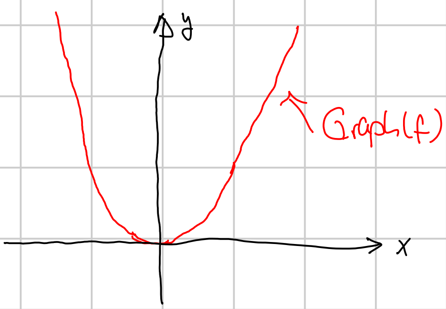


$(0,0) \in r$

$(1,1) \in r \wedge (1,-1) \in r$
$(4,2) \in r \wedge (4,-2) \in r$
$(9,3) \in r \wedge (9,-3) \in r$

r ist 2-stellige Relation aber keine Abbildung/Funktion denn z.B. zu 1 gibt es $y_1 = -1$ und $y_2 = 1$ mit $(1,-1) \in r$ und $(1,1) \in r$

3) $\underbrace{f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } (x,y) \in f \iff y = x^2}$
das definiert die Funktion $f: \underset{D}{\mathbb{R}} \to \underset{W}{\mathbb{R}}$ mit $y = f(x) = x^2$



$\text{Bild}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$
$U_f(0) = \{0\}$, $U_f(2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$
$U_f(-4) = \emptyset$ denn $x^2 = -4$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$

Zahlsystem: Das System der reellen Zahlen
$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Start mit $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$: natürliche Zahlen und natürliche Zahlen mit 0
$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
Axiomatische Einführung von $\mathbb{N}_0$ (Peano-Axiome)
gültige (als richtig gesetzte) mathematische Aussagen

für Peano $0 \in \mathbb{N}$

1. 0 ist eine natürliche Zahl (alternativ: 1 ist eine natürliche Zahl)
2. Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger, der n' genannt wird, 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl, der Nachfolger der 0 heißt 1, also $0' = 1$,
   0 ist neutrales Element der Addition
3. $n + 0 = n$ und $n + m' = (n + m)'$ und damit: $n' = (n + 0)' = n + 0' = n + 1$ und $n + m$ ist der m-fache Nachfolger von n, also: $n + m = ((\dots(n + 1) + 1) + 1) + \dots) + 1)$,
4. $n \cdot 0 = 0$ und $n \cdot m' = n \cdot m + n$.

4 von 5 Peano-Axiomen

Das Axiomensystem von Peano liefert die natürlichen Zahlen mit 0, also unsere Menge $\mathbb{N}_0$, und die Addition und die Multiplikation in der Menge $\mathbb{N}_0$. Addition und Multiplikation sind Rechenoperationen, d.h. besondere Abbildungen (Funktionen), nämlich

$$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x,y) \to x+y$$

$$\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x,y) \to x \cdot y$$

Es gelten folgende Rechenregeln in $\mathbb{N}_0$

Name	Addition (+)	Multiplikation (·)
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

neutrales Element der Addition: 0 Null
neutrales Element der Multiplikation: 1 Eins
Distributivgesetz regelt das „Zusammenspiel" von Addition und Multiplikation.

Bemerkung:

1) Die Peano-Axiome führen die Addition (inklusive 0 als neutralem Element) in $\mathbb{N}_0$ ein!
$0 \notin \mathbb{N}$ heißt: In $\mathbb{N}$ gibt es kein neutrales Element der Addition!

2) Multiplikation ist eine wiederholte Addition des selben Elements, z.B.

$$3 \cdot 5 = \underbrace{5+5+5}_{\text{3-fache Addition des Elements } 5 \in \mathbb{N}_0}$$

$$n \cdot m = \underbrace{m+m+\dots+m}_{n\text{-mal}}$$

3) Potenzen: Für $\underbrace{a \in \mathbb{N}}_{a \neq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert:

$a^0 = 1$ ← 0-te Potenz von $a \neq 0$ ist immer 1

$a^1 = a$ ← 1-te Potenz von $a \neq 0$ ist immer a

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal Faktor } a} \end{aligned}\right\} \text{2-te, n-te Potenz ist das 2-fache/n-fache Produkt von } a \text{ mit sich selbst}$$

Definition:

Gegeben sind $u \in \mathbb{N}_0$, $o \in \mathbb{N}_0$ mit $u \leq o$ und Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $u \leq i \leq o$,

$i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die zugehörige <u>endliche Summe</u> mit unterer Grenze u und oberer Grenze o definiert durch

$$\sum_{i=u}^{o} a_i = a_u + a_{u+1} + a_{u+2} + \dots + a_o$$

$\sum$ heißt Summenzeichen, i heißt Laufindex, a_i sind die Summanden der Summe; für $u = o$ gilt $\sum_{i=u}^{u} a_i = a_u$

<u>Beispiele:</u>

1) $u = 3,\ o = 9,\quad a_i = 2i+1$ für $3 \leq i \leq 9,\ i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=u}^{o} a_i = \sum_{i=3}^{9} (2i+1) = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$= a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_9$$

2) $u = 0,\ o = 10,\quad a_i = i$ für $0 \leq i \leq 10,\ i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

3) $$\sum_{i=5}^{5} \underbrace{(i^2 - i + 2)}_{= a_i} = a_5 = 22$$

<u>5. Peano-Axiom</u>: Induktionsaxiom $\hat{=}$ Axiom der <u>vollständigen Induktion</u>

Gegeben ist eine Aussageform $A(n)$ für $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $n \in \mathbb{N}$).

Dann gilt: $A(n)$ ist <u>wahr für alle</u> $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $n \in \mathbb{N}$)

falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

(1) <u>Induktionsanfang</u>

$A(0)$ ist wahr (bzw. $A(1)$ ist wahr)

d.h. die Aussageform $A(n)$ liefert eine wahre Aussage für die erste betrachtete nat. Zahl 0 bzw. 1

(2) <u>Induktionsschritt:</u> Für $n = k$

$$\underbrace{A(k) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsannahme}} \Rightarrow \underbrace{A(k+1) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsbehauptung}}$$

das ist die „Beweisarbeit“: Zeige, dass $A(k+1)$ wahr ist, wenn $A(k)$ wahr ist d.h. wenn die Aussageform $A(n)$ für $n=k$ eine wahre Aussage liefert, dann liefert $A(n)$ auch für die nachfolgende Zahl $n=k+1$ eine wahre Aussage.

Beispiele:

1) Summenformel vom „kleinen Gauß":

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$,

$A(n)$: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: Man muss nachrechnen, dass $A(1)$ wahr ist $(n=1)$

$\sum_{i=1}^{1} i = 1$ (nach Def. einer endlichen Summe mit oberer Grenze = unterer Grenze)

$$\underbrace{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}_{n=1} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

insgesamt $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ d.h. $A(1)$ ist wahr

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für $n=k$ ist $A(k)$ wahr, also

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$ ← das darf im weiteren Beweis als wahr benutzt werden

Induktionsbehauptung: Für $n=k+1$ ist $A(k+1)$ ebenfalls wahr, also

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$$ ✓ ← es muss gezeigt/bewiesen/nachgerechnet werden, dass dieses $=$ auch wahr ist

$\uparrow n=k+1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)$$

Beweis: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1)$

Induktionsvoraussetzung → $= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\cdot(k+1)+2(k+1)}{2}$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$$ ✓ das ist genau das, was gezeigt werden sollte

Bemerkung:

a) $$\sum_{i=1}^{50} i = \frac{50\cdot 51}{2} = \frac{50\cdot(50+1)}{2} = \frac{50^2+50}{2} = \frac{2500+50}{2} = 1275$$

b) $$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101 = 5050$$

Gauß:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = S \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = S \end{array}\right\} +$$

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{= 100\cdot 101} = 2S$$

$$\Rightarrow\ 2S = 100\cdot 101 \Rightarrow S = \frac{100\cdot 101}{2}$$

7 Vorlesung 7 (20.10.2020)

7.1 Beipiele Vollständige Induktion

7.2 Definition durch Rekursion + Beispiele

7.3 Binomialkoeffizient

Vollständige Induktion

Eine Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$, falls gilt:

① Induktionsanfang $A(1)$ bzw. $A(0)$ ist wahr, d.h. die Aussage gilt für $n=1$ bzw. $n=0$

② Induktionsschluß $A(k)$ ist wahr $\Rightarrow A(k+1)$ ist wahr, d.h. man zeigt: Wenn die Aussage für $n=k$ wahr ist, dann ist sie auch für $n=k+1$ wahr

Beispiele: Gestern (19.10.) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

① $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a) Induktionsanfang $n=1$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \\ &\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} \checkmark$$

b) Induktionsschritt

Induktionsvor.: $A(k)$ ist wahr, d.h. $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}}_{\text{das darf beim Beweis als wahr benutzt werden}}$

Induktionsbeh.: $A(k+1)$ ist wahr, d.h.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)\cdot(2(k+1)+1)}{6} = \frac{(k+1)\cdot(k+2)(2k+3)}{6}}_{\text{das muss im Beweis gezeigt (nachgerechnet) werden!}} \checkmark$$

Beweis: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right)}_{\text{Induktionsvor.}} + (k+1)^2$

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[k\cdot(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2k^2 + 7k + 6\right]}{6}$$

$(k+2)\cdot(2k+3) =$
$2k^2 + 3k + 4k + 6 =$
$2k^2 + 7k + 6$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6} \checkmark$$

(2) $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$; dann gilt: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

a) Induktionsanfang: $n=0$; $A(0)$ ist wahr muss gezeigt werden

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 \\[2ex] \displaystyle\frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1\end{array}\right\} \sum_{i=0}^{0} q^i = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} \checkmark$$

A(0) ist wahr!

b) Induktionsschritt

Induktionsvor.: A(k) ist wahr, d.h. $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}}_{\text{das darf beim Beweis als wahr benutzt werden}}$

Induktionsbeh.: A(k+1) ist wahr, d.h.

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{(k+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}}_{\text{das muss im Beweis gezeigt (nachgerechnet) werden}} \checkmark$$

Beweis: $\displaystyle\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right)}_{\text{Induktionsvor.}} + q^{k+1}$

$$= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1}$$

$$= \frac{1-q^{k+1} + (1-q)\,q^{k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-\cancel{q^{k+1}} + \cancel{q^{k+1}} - q^{k+2}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q} \checkmark$$

„Anwendungen": a) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right) - q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$

$$= \frac{1-q^{n+1} - (1-q)\cdot 1}{1-q}$$

$$= \frac{\cancel{1}-q^{n+1}-\cancel{1}+q}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} = q\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

b) $1+2+4+8+16+\dots+2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1$

$q=2$

c) $\sum_{i=5}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i}_{} - \sum_{i=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right) - 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^5}\right)$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{2^{10}} - \cancel{2} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{1024}$$

3 A endliche Menge mit $|A|=n$ Elementen $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A)$ hat 2^n Elemente
also $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ ($\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ Menge aller Teilmengen von A)
$\uparrow$ Potenzmenge

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: A hat $n=1$ Element, also $A=\{a\}$
$\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, A\}$ mit $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1$,
die Aussage ist für $n=1$ wahr!

Induktionsschritt:

Induktionsvor.: Für $n=k$ ist die Aussage wahr, d.h.

$\underbrace{|A|=k \text{ Elemente} \Rightarrow |P(A)| = 2^k \text{ Elemente}}$

das darf beim Beweis als wahr verwendet werden

Induktionsbeh.: Für $n=k+1$ ist die Aussage ebenfalls wahr, d.h.

$\underbrace{|A|=k+1 \text{ Elemente} \Rightarrow |P(A)| = 2^{k+1} \text{ Elemente}}$ ✓

das muss im Beweis nachgerechnet/bewiesen werden

Beweis:

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ A hat $k+1$ Elemente

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\} = \underbrace{\{\tilde{B} \mid \tilde{B} \subseteq A \wedge (a_{k+1} \notin \tilde{B})\}}_{M_1} \cup \underbrace{\{\tilde{B} \cup \{a_{k+1}\} \mid \tilde{B} \in M_1\}}_{M_2}$$

alle Teilmengen von A, die das Element a_{k+1} nicht enthalten $\longrightarrow M_1$

M_2: Teilmengen von A, die a_{k+1} enthalten

$|P(A)| = |M_1| + |M_2| = 2 \cdot |M_1|$ denn M_2 enthält alle $\tilde{B}$ aus M_1 vereinigt mit $\{a_{k+1}\}$ und keine weiteren Teilmengen von A

In M_1 sind alle Teilmengen von $A \setminus \{a_{k+1}\}$, es gilt $|A \setminus \{a_{k+1}\}| = k$

$\Rightarrow |M_1| = |P(A \setminus \{a_{k+1}\})| = 2^k$

insgesamt: $|P(A)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ ✓

„Rückgriff" auf vorherige Gegebenheit

Definition durch Rekursion

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert, wenn man angegeben hat

Definition durch Rekursion

1. Anker/Anfang: a_1 bzw. a_0 ist gegeben
2. Bildungsgesetz: $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ mit Funktionsvorschrift f für $n \geq 1$ bzw. $n \geq 0$

Beispiele für Definition durch Rekursion

(1) Fakultät von n für $n \in \mathbb{N}_0$ (geschrieben als $n!$) ← lies: n Fakultät

Anker: $0! = 1$ Bildungsgesetz: $\underbrace{(n+1)!}_{a_{n+1}} = \underbrace{(n+1)\cdot n!}_{f(a_n) = (n+1)\cdot a_n}$

Konkret:

$0! = 1$

$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$

$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$

$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

insgesamt

$n!$ ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

(2) Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zahlen ist definiert durch

Anker: $x_0 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$

Bildungsgesetz: $\underbrace{x_{n+1}}_{a_{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}_{f(a_n)}$

$x_0 = \frac{3}{2}$

$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+8}{6} = \frac{17}{12}$

$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right)$

Es gilt: Je größer n wird um so besser nähert sich x_n an $\sqrt{2}$ an!

	A (x_n)	B ($\frac{1}{2}(x_n+\frac{2}{x_n})$)	C	D
1 ($n=0$)	1,5	1,41666667		1,41421356 ($\sqrt{2}$)
2 ($n=1$)	1,41666667	1,41421569		
3 ($n=2$)	1,41421569	1,41421356		
4	1,41421356	1,41421356		
5	1,41421356	1,41421356		
6	1,41421356	1,41421356		
7	1,41421356	1,41421356		
8	1,41421356	1,41421356		
9	1,41421356	1,41421356		
10	1,41421356	1,41421356		
11	1,41421356	1,41421356		
12	1,41421356	1,41421356		
13	1,41421356	1,41421356		

Berechnung mit EXCEL

Hinweis: Mit $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für $a > 0$ bekommt man Näherungen für $\sqrt{a}$

③ Binomialkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq n$

↳ Bezeichnung $\underbrace{\binom{n}{k} \leftarrow \text{lies: } n \text{ über } k}_{\text{Binomialkoeffizient } n \text{ über } k}$

Es ist definiert: Anker $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$

Bildungsgesetz $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$ für $k, n \in \mathbb{N}$

$$\left.\begin{array}{l}
\binom{0}{0} = 1, \; \binom{n}{0} = 1 \\
\binom{1}{0} = 1, \; \underbrace{\binom{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \binom{1-1}{1-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 1 \cdot \binom{0}{0} = 1 \cdot 1 = 1 \\
\binom{2}{0} = 1, \; \underbrace{\binom{2}{1} = \frac{2}{1} \cdot \binom{2-1}{1-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 2 \cdot \binom{1}{0} = 2 \cdot 1 = 2 \\
\underbrace{\binom{2}{2} = \frac{2}{2} \cdot \binom{2-1}{2-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 1 \cdot \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 = 1
\end{array}\right\} \text{diese Rekursion liefert alle Binomialkoeffizienten}$$

direkte Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{cases} \binom{0}{0} = 1, \; \binom{n}{0} = 1 \; \forall \; n \in \mathbb{N} \\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N}; \; k \leq n \end{cases}$$

↳ Es folgt sofort: $\binom{0}{0} = 1, \; \binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \; (n-1)!} = \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = n$$

8 Vorlesung 8 (21.10.2020)

8.1 Binomialkoeffizienten und Fakultät

8.2 Eigenschaften Binomialkoeffizient

8.3 Pascalsches Dreieck

8.4 1. Binomische Formel (+ 1. allgemeine Binomische Formel)

8.5 2. Binomische Formel (+ 2. allgemeine Binomische Formel)

8.6 Wiederholung: Ordnungsrelation, Vollständige Induktion

Binomialkoeffizienten und Fakultät

Fakultät für Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$: $0! = 1$, $\underbrace{n! = n \cdot (n-1)! \text{ für } n \geq 1}_{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

$\underbrace{n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{\text{Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis } n}$

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$: $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$

n über k

$k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{für } n \geq 1, k \leq n$$

Beispiele:

(1) $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

(2) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot \overbrace{\cancel{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{4!}}{\underbrace{1 \cdot 2}_{2!} \cdot \cancel{4!}} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$

$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,(11-3)!} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3}_{3!} \cdot \cancel{8!}} = \frac{11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \overset{3}{\cancel{9}}}{1 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3}} = 165$

(3) allgemein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}$$

Weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

(1) Symmetrie: Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(2) Additivität : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ ✓

Beweis (durch Nachrechnen)

(1) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (\cancel{n}-\cancel{n}+k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$

(2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Brüche zur Addition „gleichnamig" machen, d.h. auf denselben Nenner bringen (Hauptnenner)

$$= \frac{k \cdot n!}{\underbrace{k \cdot (k-1)!}_{k!} \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!\,(n-k+1)}{k! \cdot \underbrace{(n-k)! \cdot (n-k+1)}_{(n-k+1)!}}$$

$$= \frac{k \cdot n! + n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

$$= \frac{n! \cdot \overbrace{[k + (n-k+1)]}^{n+1}}{k! \cdot (n+1-k)!}$$

$$= \frac{\overbrace{n! \cdot (n+1)}^{=(n+1)!}}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k} \checkmark$$

Was leisten Binomialkoeffizienten?

Rechenregeln in $\mathbb{N}_0$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1\} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Rechenregeln in $\mathbb{Z}$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$
neu → Existenz additiv inv. Elemente	$a+(-a)=0$ ← neu	

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\},$$ z heißt Zähler, n heißt Nenner

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ ist als Nenner verboten: Durch 0 kann man nicht teilen!

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b)+(a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c)+(b \cdot c)$
neu → Existenz inverser Elemente	$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$ ← neu

Wir berechnen für $a, b \in \mathbb{Q}$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

Distributivgesetz

$$\overset{\downarrow}{=} \underbrace{(a+b)\cdot a} + \underbrace{(a+b)\cdot b}$$

$$\overset{\downarrow}{=} a^2 + \underbrace{b\cdot a} + a\cdot b + b^2$$

Kommutativgesetz

$$\overset{\downarrow}{=} a^2 + \underbrace{a\cdot b + a\cdot b} + b^2 = a^2 + 2\,a\cdot b + b^2$$

Distributivgesetz $a\cdot b\cdot \underbrace{(1+1)}_{2}$

Die oben angegebenen Rechenregeln liefern die

1. Binomische Formel $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Damit erhält man auch die „Binomische Formel" für $(a+b)^3$, nämlich

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2$$

$$= (a+b)\cdot(a^2 + 2ab + b^2)$$

Anwendung der Rechenregeln

$$\overset{\downarrow}{=} a^3 + 2a^2b + ab^2 + b\cdot a^2 + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

Binomial Koeffizienten sind Faktoren in den Binomischen Formeln!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2$$

$$= \underbrace{\binom{2}{0}}_{1}\cdot a^2 + \underbrace{\binom{2}{1}}_{2}\cdot a\cdot b + \underbrace{\binom{2}{2}}_{1} b^2$$

$$= \binom{2}{0}\cdot a^{2-0}\cdot \underbrace{b^0}_{=1} + \binom{2}{1} a^{2-1}\cdot b^1 + \binom{2}{2} \underbrace{a^{2-2}}_{=a^0=1}\cdot b^2$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k}\cdot b^k$$

Behauptung: $\quad (a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}\cdot b^k$

Wir rechnen aus

$$\overset{\downarrow}{=} \binom{3}{0} a^3\cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2\cdot b + \binom{3}{2} a\cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0\cdot b^3$$

$$= 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

Symmetrie

$$\binom{3}{2} \overset{\downarrow}{=} \binom{3}{3-2} = \binom{3}{1} = 3$$

Allgemein gilt:

Satz (allgemeine binomische Formel): $(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{für } n \geq 2$$

Potenzen von a „runterzählen" — Potenzen von b „raufzählen"

Ausnutzen der Symmetrie und Additivität der Binomialkoeffizienten liefert das Pascalsche Dreieck

Additivität

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Symmetrie-Achse

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

2. binomische Formel aus der Schule: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Wie bekommt man allgemein $(a-b)^n$ für $n \geq 2$?

Wir wissen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\Rightarrow \quad (a-b)^n = (a + (-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot \underbrace{(-b)^k}_{=(-1)^k \cdot b^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k$$

„Vorzeichen" ist abwechselnd + und −

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{\text{alternierendes Vorzeichen}}$

$\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxxxx}}_{\text{alternierende Summe}}$

Satz (allgemeine 2. binomische Formel)

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \,, \quad n \geq 2$$

Vorschau auf die nächste Vorlesung: Was ist mit der sog. 3. binomische Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$?

„Wiederholung": Ordnungsrelation, Beispiel zur vollständigen Induktion

① A Menge, $A \neq \emptyset$; die zweistellige Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Ordnungsrelation, falls gilt:

a) R ist reflexiv, also $(a,a) \in R \; \forall a \in A$

b) R ist transitiv, also $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

c) R ist antisymmetrisch, also $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

② Die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow \underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : b = k \cdot a}$$

d.h. a ist ein (echter) Teiler von b
oder b ist ein Vielfaches von a

Man schreibt statt $(a,b) \in R$ auch $a | b$
↑ lies: teilt

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist eine Ordnungsrelation

a) reflexiv: $a = 1 \cdot a \;\; \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a | a$ also $(a,a) \in R$

b) transitiv: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow a | b \wedge b | c$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \underbrace{b = k \cdot a} \wedge \exists l \in \mathbb{N} : c = l \cdot b$

$\Rightarrow c = l \cdot b = l \cdot (k \cdot a) = \underbrace{(l \cdot k)}_{\in \mathbb{N}} \cdot a$

$\Rightarrow c = m \cdot a$ für $m = l \cdot k \in \mathbb{N} \Rightarrow a | c \Rightarrow (a,c) \in R$

c) antisymmetrisch: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N} : b = k \cdot a \wedge \exists l \in \mathbb{N} : a = l \cdot b$

$$\Rightarrow \quad b = k \cdot a = k \cdot (l \cdot b) = (k \cdot l) \cdot b$$

$$\Rightarrow \quad b = (k \cdot l) \cdot b \quad \text{mit } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad k \cdot l = 1 \quad \text{mit } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \quad k = 1 \wedge l = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \cdot a = a \wedge a = 1 \cdot b = b \Rightarrow a = b$$

③ Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$7 \mid 2^{3n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induktionsanfang: $n = 1$

$$2^{3 \cdot 1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 = 1 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid 7 = 2^3 - 1$$

für $n = 1$ ist die Behauptung wahr!

Induktionsschluß:

Induktionsvor.: Die Behauptung ist wahr für $n = k$, also

$$7 \mid 2^{3k} - 1 \Rightarrow \exists\, l \in \mathbb{N}: 2^{3k} - 1 = 7 \cdot l$$

das darf beim Beweis als wahre Aussage benutzt werden!

Induktionsbehauptung: Die Behauptung ist wahr für $n = k+1$, also

$$7 \mid 2^{3(k+1)} - 1 \Rightarrow \exists\, m \in \mathbb{N}: 2^{3 \cdot (k+1)} - 1 = 7 \cdot m \quad ✓$$

das muss gezeigt werden!

Beweis:

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)} - 1 &= 2^{3k+3} - 1 \\ &= 2^{3k} \cdot 2^3 - 1 \\ &= (2^{3k} - 1 + 1) \cdot 2^3 - 1 \\ &= (2^{3k} - 1) \cdot 2^k + 1 \cdot 2^3 - 1 \\ &= (2^{3k} - 1) \cdot 2^k + 7 \end{aligned}$$

Induktionsvor.:
$2^{3k} - 1 = 7 \cdot l$

$$\overset{\downarrow}{=} \quad 7 \cdot l \cdot 2^k + 7 = 7 \cdot \underbrace{(2^k \cdot l + 1)}_{= m} = 7 \cdot m$$

$$\Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1 = 7 \cdot m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \Rightarrow 7 \mid 2^{3(k+1)} - 1 \quad ✓$$

9 Vorlesung 9 (26.10.2020)

9.1 Rechenregeln für Potenzen

9.2 3. Binomische Formel (+ 3. allgemeine Binomische Formel)

9.3 Elementares Multiplikationsprinzip

9.4 Elementare Kombinatorik (Anordnung, Auswahl)

9. Vorlesung 26.10.2020

Verallgemeinerte binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \longrightarrow (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Symmetrie

Binomialkoeffizienten $\longrightarrow$ Pascalsches Dreieck

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 3 & & 3 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

. . . . . usw. . . . .

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ Additivität

„3. binomische Formel"

$$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 \longrightarrow \underbrace{a \neq b: \quad \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b}$$

Gibt es eine Formel für $\frac{a^n - b^n}{a-b} = ?$

Für $a \neq b$ gilt:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{\cancel{a^n}\cdot\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{\cancel{a}\cdot\left(1 - \frac{b}{a}\right)}$$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$\frac{b}{a} = q$

$a \neq b \Rightarrow q \neq 1$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

7. Vorlesung

$$= a^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} q^i\right)$$

$$= a^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^i \cdot b^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Rechenregeln für Potenzen: $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

$\frac{1}{a} = a^{-1}$ für $a \neq 0$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^n \cdot a^{-k} = a^{n-k}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(0^0 ist nicht definiert)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} \cdot a^{-i} \cdot b^{i}.$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i}$$

Insgesamt bekommt man die „verallgemeinerte 3. Binomische Formel"

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i} \quad ; \quad a \neq b$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i} \right) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$\frac{x^6 - 64}{x-2} = \frac{x^6 - 2^6}{x-2} \overset{\text{Formel mit } a=x,\ b=2,\ n=6}{=} \sum_{i=0}^{5} x^{5-i} \cdot 2^{i}$$

$$= x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$$

Weitere „Anwendungen" von Fakultät und Binomialkoeffizienten:

Elementare Kombinatorik

→ Lehre von der Anzahl der Möglichkeiten endliche Mengen anzuordnen oder Auswahlen von Elementen zu treffen

Elementares Multiplikationsprinzip

1) Gegeben sind die Mengen A_1 mit $n_1 = |A_1|$ Elementen und die Menge A_2 mit $n_2 = |A_2|$ Elementen $\Rightarrow$
$A_1 \times A_2 = \{ (a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2 \}$ hat $n_1 \cdot n_2$ Elemente, also
$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$

2) Gegeben sind die Mengen A_i mit $n_i := |A_i|$ Elementen, $1 \leq i \leq N \Rightarrow$
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N = \{ (a_1, a_2, \dots, a_N) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq N \}$ hat $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_N$ Elemente, also
$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_N|$

Beispiel: $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ Menge mit drei verschiedenen Hosen
$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ Menge mit vier verschiedenen T-Shirts
$S = \{s_1, s_2\}$ Menge mit zwei verschiedenen Paare Schuhe

$$\Rightarrow H \times T \times S = \{(h, t, s) \mid h \in H \wedge t \in T, s \in S\}$$

Menge der möglichen „Kombinationen" von Hose, T-Shirt, Schuhe

$$\Rightarrow |H \times T \times S| = |H| \cdot |T| \cdot |S| = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

(1) Anordnung: a) k von n Elementen ($k \leq n$) werden mit Beachtung der Reihenfolge angeordnet; (Anordnung → ohne Wiederholung!)

Anzahl möglicher Anordnungen ist $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl möglicher Besetzungen → $n \quad n-1 \quad n-2 \quad n-k+1$

Plätze → $\sqcup_{P_1} \quad \sqcup_{P_2} \quad \sqcup_{P_3} \ldots \quad \sqcup_{P_k}$ ← numerierte Reihenfolge $\Big\}\ n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots (n-k+1) \cdot \overbrace{\cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{=(n-k)!}}{\underbrace{\cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}_{=(n-k)!}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

b) Wenn man n von n Elementen mit Reihenfolge anordnet, nennt man dies <u>Permutation</u> von n Elementen; die <u>Anzahl der Permutationen</u> ist $n!$ (Formel von oben mit $k=n$ liefert

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!\ )$$

c) Anordnung von n aus n Elementen, wobei es Gruppen gleicher Elemente gibt: n_1 Elemente vom Typ 1 (T_1)
n_2 Elemente vom Typ 2 (T_2)
$\vdots$
n_k Elemente vom Typ k (T_k)

$\Big\}\ n_1 + n_2 + \cdots + n_k \leq n$

Die Elemente in den Mengen T_i sind ununterscheidbar

Es gibt $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ mögliche Anordnungen

Bsp. $\underbrace{\text{KAMPMANN}}_{n=8} \rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1 = \{K\},\ n_1 = 1 \\ T_2 = \{A, A\},\ n_2 = 2 \\ T_3 = \{M, M\},\ n_3 = 2 \\ T_4 = \{P\},\ n_4 = 1 \\ T_5 = \{N, N\},\ n_5 = 2 \end{array}\right\} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 8$

Diese 8 Buchstaben des Namens KAMPMANN, kann man

auf $\dfrac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \dfrac{8 \cdot 7!}{8} = 7! = 5040$

$8!$ ← alle Buchstaben unterscheidbar

2 ununterscheidbare A's

2 ununterscheidbare M's

ununterscheidbare N's

KAMPMANN
KAMPMANN
} bei unterscheidbaren A's 2 Möglichkeiten

KAMPMANN ← bei ununterscheidbaren A's 1 Möglichkeit

② Auswahl von k aus n Elementen (Reihenfolge spielt keine Rolle)

mit Reihenfolge → $\dfrac{n!}{(n-k)!}$ Mögliche Anordnungen von k Elementen aus n

diese k Elemente können auf $k!$ Arten umsortiert werden; Reihenfolge spielt keine Rolle, d.h. alle diese $k!$ Umsortierungen ergeben nur 1 Möglichkeit

$\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$ ← ohne Reihenfolge

Aus n Elementen kann man ohne Beachtung der Reihenfolge auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten k Elemente auswählen ($k \leq n$).

D.h. auch:

Eine Menge M mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen, denn die Teilmenge mit k Elementen geschieht durch Auswahl von k aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge!

M mit $|M| = n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$, d.h. M hat 2^n Teilmengen

M hat Teilmengen mit 0 Elementen → $\emptyset$ genau $1 = \binom{n}{0}$

T

M hat Teilmengen mit 1 Element $\rightarrow \binom{n}{1} = n$; $\{m_1\}, \{m_2\}, \dots \{m_n\}$

⋮

M hat Teilmengen mit k Elemente $\rightarrow \binom{n}{k}$

$\rightarrow$ Zusammen

$$\underbrace{2^n}_{\text{Anzahl aller Teilmenge}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Anzahl der k-Elementigen Teilmengen $k = 0, 1, 2, \dots, n$

<u>Bemerkung:</u> $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ — Herleitung über Kombinatorik

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$(a+b)^n$ mit $a = 1$, $b = 1$

. <u>Rechenregeln für endliche Summen</u> $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $u \le k \le o$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=u}^{o} (s \cdot a_k + t \cdot b_k) = s \cdot \left(\sum_{k=u}^{o} a_k \right) + t \left(\sum_{k=u}^{o} b_k \right) \leftarrow \text{Linearität(sregel)}$$

<u>Beispiel:</u> Aus der 6. Vorlesung $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Aus der 7. Vorlesung: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Mit Hilfe der Linearität bekommt man.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \checkmark$$

Beweis ohne vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \dots + 1}_{n\text{-mal}} = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i-1) = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i \right)} - n$$

6. Vorlesung

$$= \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2 \checkmark$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left(2i^2-i-1\right) = \underset{\downarrow}{\overset{i=0}{-1}} + \underset{\downarrow}{\overset{i=1}{0}} + \underset{\downarrow}{\overset{i=2}{5}} + \underset{\downarrow}{\overset{i=3}{14}} + \dots + \underset{\downarrow}{\overset{i=n}{\left(2n^2-n-1\right)}}$$

Mit Linearität folgt:

$$\sum_{i=0}^{n}(2i^2-i-1) = 2\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i^2\right)}_{} - \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i\right)}_{} - \sum_{i=0}^{n} 1$$

6.17. Vorlesung

$$= 2\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) - 6(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left[2n(2n+1) - 3n - 6\right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)\cdot\left[4n^2 - n - 6\right]}{6}$$

10 Vorlesung 10 (27.10.2020)

10.1 Zusammenfassung Elementare Kombinatorik

10.2 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

10.3 Rechenregeln in den reellen Zahlen

10.4 Bemerkung: Was ist ein Körper, Anordnungsaxiom

10. Vorlesung 27.10.2020

Notiztitel 27.10.2020

Zusammenfassung der Formeln der elementaren Kombinatorik ($k \le n$)

Anordnungen von k aus n Elementen ← mit Reihenfolge

Auswahl von k aus n Elementen ← ohne Reihenfolge

	ohne Wiederh.	mit Wiederh.
Anordnungen *)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Auswahl	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

in der Tabelle steht jeweils die Anzahl der Möglichkeiten

6 Elemente auf 4 Plätze anordnen mit Wiederh.: $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$

$\underset{1}{\underline{\ XX\ }}\ |\ \underset{2}{\underline{\ X\ }}\ |\ \underset{3}{\underline{\ \ }}\ |\ \ldots\ldots\ |\ \underset{n}{\underline{\ XXX\ }}$

Auswahl von 6 aus n mit Wiederholungen

$n-1$ Striche kennzeichnen n Elemente $\hat{=}$ n Plätze

bei Auswahl von Element i wird am Platz des Elements i ein Kreuz eingezeichnet

Bei der Auswahl von k aus n Elementen mit Wiederholungen entsteht ein Muster mit $n-1$ Strichen und k Kreuzen, d.h. es gibt $n-1+k = n+k-1$ Symbole in dem Muster, von denen k Kreuze sind, d.h. aus den $n-1+k$ Symbolen müssen k für Kreuze ausgewählt werden, das ist Auswahl von k aus $n-1+k$ ohne Wiederholungen, also hat man $\binom{n-1+k}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten

*) Spezialfälle bei Anordnungen

a) Permutationen $\hat{=}$ Anordnung von n aus n Elementen ($k=n$), es gibt $n!$ Möglichkeiten

b) Anordnung von n aus n Elementen, wobei die n Elemente in k Gruppen identischer Elemente (jeweils Anzahl n_i pro Gruppe, $1 \le i \le k$) aufgeteilt sind; es gibt $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ Möglichkeiten

Zahlen in $\mathbb{Q}$ ← Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

① Darstellung $\frac{z}{n}$ ist nicht eindeutig; z und n können gemeinsame Faktoren enthalten; Eindeutigkeit bekommt man durch vollständiges Kürzen dieser Faktoren

$$z = z_1 \cdot k, \quad n = n_1 \cdot k \implies \frac{z}{n} = \frac{z_1 \cdot \cancel{k}}{n_1 \cdot \cancel{k}} = \frac{z_1}{n_1}$$

② $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Brüche $\frac{z}{n}$; Bruchrechnen: $q_1 = \frac{a}{b}$, $q_2 = \frac{c}{d}$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$q_1 + q_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b}$$

$$= \frac{ad + c \cdot b}{d \cdot b}$$

„Erweitern" der Brüche

Bemerkung zur Addition

$$\underbrace{\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 + z_2}{n}}_{}$$

Addition gleichnamiger Brüche (Nenner gleich)

③ Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Zahldarstellung in einem „Stellenwertsystem" zur Basis 10, z.B.

$$3246 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6$$
$$= 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$
$$= \sum_{i=0}^{3} z_i \cdot 10^i \quad \text{mit } z_0 = 6,\ z_1 = 4,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3$$

allgemein: $\left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_{10} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad a_n \neq 0$$

$$23{,}75 = 2\cdot 10 + 3 + \underbrace{\frac{7}{10} + \frac{5}{100}}_{=\frac{75}{100}} = 2\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 + 7\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}$$

allgemein: $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_k)_{10} =$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, 10^i + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot 10^{-j}$$

Wie bekommt man aus der Darstellung $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$ (also Darstellung als Bruch) die Dezimaldarstellung? $\rightarrow$ „schriftliche" Division ganzer Zahlen

gesucht Dezimaldarstellung von $\frac{3406}{26}$

$$\begin{array}{l} 3406 : 26 = 131 \\ -26 \\ \overline{\ \ 806} \\ \ -78 \\ \overline{\ \ \ \ 26} \\ \ \ -26 \\ \overline{\ \ \ \ \ 0} \end{array}$$

$\leftarrow 3406 = \overbrace{100\cdot 26}^{2600} + 806$

$\leftarrow 806 = \overbrace{30\cdot 26}^{780} + 26$

$\leftarrow 26 = 1\cdot 26 + 0$

Division mit Rest

$$\begin{array}{l} 33 : 6 = 5{,}5 \\ -30 \\ \overline{\ \ 30} \\ -30 \\ \overline{\ \ \ 0} \end{array} \qquad \frac{33}{6} = 5{,}5$$

$$\begin{array}{l} 121 : 12 = 10{,}08\overbrace{333\dots}^{\text{unendlich viele Nachkommastellen alle identisch} = 3} \\ -12 \\ \overline{\ \ \ 1} \\ \ -0 \\ \overline{\ \ 10} \\ \ -0 \\ \overline{\ 100} \\ \ -96 \\ \overline{\ \ \ 40} \\ \ -36 \\ \overline{\ \ \ \ 40} \\ \ -36 \\ \overline{\ \ \ \ 40} \\ \ \ \ \vdots \end{array}$$

$= 10{,}08\overline{3}$ ← Periodenstrich

lies: 10,08 3 Periode

Zahlen unter dem Periodenstrich werden unendlich oft in identischer Anordnung wiederholt

$\frac{121}{12} = 10{,}08\overline{3}$ ← periodische Dezimalzahl

$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\} \;\hat{=}\; \text{Menge aller Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen}}$

Beispiel:

$$0,\overline{3} = 0,3333\ldots \in \mathbb{Q}$$

$$12,45\overline{12} = 12,4512121212\ldots \in \mathbb{Q}$$

Wie bekommt man die Darstellung $\frac{z}{n}$?

$$10x = 3,\overline{3} = 3,\cancel{3333}\ldots$$
$$x = 0,\overline{3} = 0,\cancel{3333}\ldots$$
$-$

$$9x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$100x = 1245,12\cancel{12121212}$$
$$x = 12,45\cancel{12121212}\ldots$$
$-$

$$99x = \underbrace{1245,12 - 12,45}$$

bessere Variante

$$10000x = 124512,\cancel{121212}\ldots$$
$$100x = 1245,\cancel{121212}\ldots$$
$-$

$$9900x = 124512 - 1245$$

$$\Rightarrow x = \frac{124512-1245}{9900}$$

$$= \frac{123267}{9900}$$

$$\begin{array}{r} 124512 \\ -\ 1245 \\ \hline 123267 \end{array}$$

Zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gehört ein Punkt auf dem Zahlenstrahl; wir haben aber schon einen weiteren Punkt auf dem Zahlenstrahl gefunden, der zu $\sqrt{2}$ gehört und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$ reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \hat{=}$ Menge aller Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder mit unendlich vielen aber periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen <u>oder</u> mit unendlich vielen aber <u>nicht periodisch</u> wiederkehrenden Nachkommastellen

Die „Rechenregeln" in $\mathbb{R}$ entsprechen den Regeln in $\mathbb{Q}$, d.h. es gelten die 5 Körperaxiome

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
1) Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a\cdot b = b\cdot a$
2) Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3) Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a\cdot 1 = a$
4) Distributivgesetze	$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$	$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$
5) Existenz inverser Elemente	$\forall a\ \exists(-a): a+(-a)=0$	$\forall a\neq 0\ \exists \frac{1}{a}=a^{-1}: a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=1$

↑ Symmetriebruch bei den Regeln zwischen Addition und Multiplikation

Bemerkung:

1) Wenn man auf einer Menge M eine Rechenoperation $+$ und eine Rechenoperation $\cdot$ erklären kann, die diesen 5 Axiomen genügen, nennt man $(M, +, \cdot)$ einen Körper.

2) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper!

Zu den 5 Körperaxiomen für $\mathbb{R}$ (damit auch für $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) kommt zusätzlich das Anordnungsaxiom, nämlich

Anordnungsaxiom: Für zwei reelle Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine der folgenden drei Alternativen:

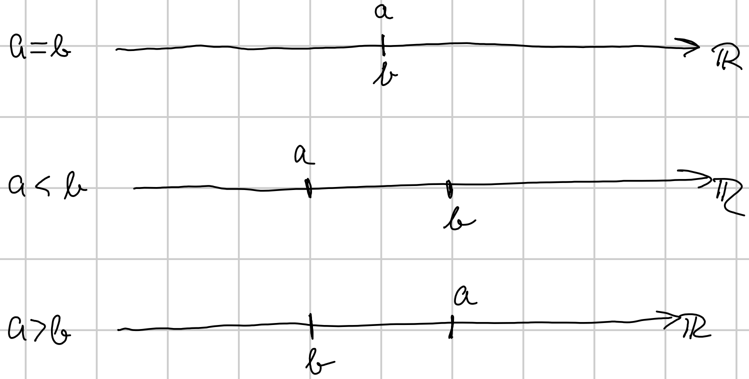
① $a < b$

② $a = b$

③ $a > b$

Das Anordnungsaxiom garantiert, dass man zwei reelle Zahlen immer eindeutig in Relation zueinander setzen kann (immer miteinander vergleichen kann mit eindeutigem Ergebnis!)

Auf $\mathbb{R}$ gibt es zwei Rechenoperationen und die Anordnung.



Anordnung durch Position auf dem Zahlenstrahl

Wie vertragen sich Anordnung und Rechenoperationen?

Es gilt:

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$
$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } c > 0$$
$$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } c > 0$$

11 Vorlesung 11 (28.10.2020)

11.1 Rechenregeln der Anordnung

11.2 Intervalle als Mengen

11.3 unendlich-Symbol

11.4 Definition: Term

11.5 Definition: Betrag einer reellen Zahl

11.6 erste Rechenregeln für den Betrag

11.7 Betrag, Ungleichung und Intervalle

11. Vorlesung 28.10.2020

Anordnung auf $\mathbb{R}$ und Rechenregeln der Anordnung

Anordnung $\longrightarrow$ Position auf dem Zahlenstrahl

Anordnungsaxiom: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine der folgenden drei Alternativen: ① $a < b$, ② $a = b$, ③ $a > b$

Rechenregeln: Zusammenspiel von Rechenoperationen und Anordnung

1) $a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

„Addition bewahrt die Anordnung"

2) $a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R},\ c > 0$

„Multiplikation mit Zahlen > 0 bewahrt Anordnung"

Bemerkung:

a) $a > b \Leftrightarrow b < a$ also auch $a > b \Rightarrow a + c > b + c \ \forall c \in \mathbb{R}$

$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \ \forall c \in \mathbb{R},\ c > 0$

b) $a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b)$
$a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b)$ $\Big\}$ die Rechenregeln 1) und 2) gelten analog für $\leq$ und $\geq$

c) $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist die Menge der nicht negativen reellen Zahlen

$\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ ist die Menge der negativen reellen Zahlen

d) Intervalle als Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist definiert

① $(a, b) =]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(a < x) \wedge (x < b)}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{a < x < b}\}$

ist das offene Intervall mit Grenzen a und b

Es gilt: $a \notin (a, b)$; $b \notin (a, b)$

② $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ ist das abgeschlossene Intervall mit Grenzen a und b. Es gilt: $a \in [a,b]$; $b \in [a,b]$

③ Halboffene Intervalle

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

④ Für $a = b$ gilt $(a,b) = (a,a) = \emptyset$; $[a,b] = [a,a] = \{a\}$;
für $b < a$ ist (a,b) und $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ nicht definiert.

e) Abschluss der Anordnung in $\mathbb{R}$

Zur Vervollständigung der Anordnung definiert man die Symbole $+\infty$ und $-\infty$; es gilt:

① $+\infty \notin \mathbb{R}$, $-\infty \notin \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Rechenoperationen für $+\infty$ und $-\infty$ sind nicht definiert

② $$\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}: \ (-\infty < x) \wedge (x < +\infty)}_{\text{in diesem Sinn gilt: } \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)}$$

Konsequenzen aus den Rechenregeln für die Anordnung

$a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c > 0$

1) $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

denn: $a < 0 \underset{\underset{c=-a}{\uparrow}}{\Rightarrow} a + (-a) < 0 + (-a) \Rightarrow 0 < -a \Rightarrow -a > 0$

analog gilt: $a > 0 \Rightarrow -a < 0$; $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$; $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

2) Für a, b mit $a < b$ und $c < 0$ gilt: $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

analog gilt: $a > b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ | $a \leq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

$a \geq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

denn: $c<0 \Rightarrow (-c)>0$ also $a<b \Rightarrow a\cdot(-c) < b\cdot(-c)$

$$\Rightarrow -a\cdot c < -b\cdot c \quad | + a\cdot c$$

$$\Rightarrow 0 < a\cdot c - b\cdot c \quad | + b\cdot c$$

$$\Rightarrow b\cdot c < a\cdot c$$

Zusammengefasst: $a<b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c > b\cdot c$

Definition:

1) Ein Term besteht aus syntaktisch korrekt gebildeten Wörtern oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik, d.h. ein Term ist ein sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann.

2) Eine Gleichung ist eine Aussage über die Gleichheit (Äquivalenz) zweier Terme, $T_1 = T_2$. Das Symbol $=$ heißt Gleichheitszeichen.

3) Eine Ungleichung ist eine Aussage zum Größenvergleich zweier Terme, z.B. $T_1 < T_2$, oder $T_1 \geqq T_2$. Die Symbole $<, >, \leq, \geq$ heißen Ungleichheitszeichen.

Definition: (Betrag einer reellen Zahl)

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

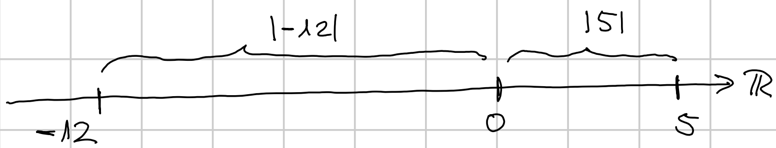
lies: Betrag von a, oder a Betrag

aus der Def. des Betrags folgt: Wenn man den „Betrag auflöst" muss man immer zwei Fälle betrachten, nämlich
1. Fall: Term im Betrag ≥ 0
2. Fall: Term im Betrag < 0

Beispiele:

$|5| = 5$ denn $5 \geq 0$

$|-12| = 12$ denn $-12 < 0$ und $|-12| = -(-12) = 12$



Bemerkung:

1) $|a|$ gibt den Abstand von a zur 0 auf dem Zahlenstrahl an; $|a|$ ist also ein Abstandsmass, damit: $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$; es gilt sogar $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2) Erste Rechenregeln für den Betrag:

a) $|a| \geq 0 \;\forall a \in \mathbb{R}$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

<u>Bsp.:</u> $a = 7,\ b = -5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12$

$a + b = 2 \Rightarrow |a+b| = 2$

$\Big\}\ 2 \leq 12,\ |a+b| \leq |a| + |b|$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)

3) Betrag, Ungleichung und Intervalle

a) Gegeben ist die Ungleichung $|x| < 5$, gesucht ist die <u>Lösungsmenge</u> $\mathbb{L}$ dieser Ungleichung, also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$.

$|x| < 5 \Rightarrow$ <u>1. Fall:</u> $\underbrace{x \geq 0:\quad |x| < 5 \Leftrightarrow x < 5}_{\text{im 1. Fall gilt also}}$

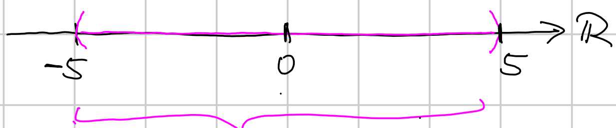
$0 \leq x < 5 \Leftrightarrow x \in [0, 5) = \mathbb{L}_1$

<u>2. Fall:</u> $x < 0:\quad |x| < 5 \Leftrightarrow -x < 5 \quad |\cdot(-1)$

$\underbrace{\Leftrightarrow x > -5}_{\text{im 2. Fall gilt also}}$

$-5 < x < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 0) = \mathbb{L}_2$

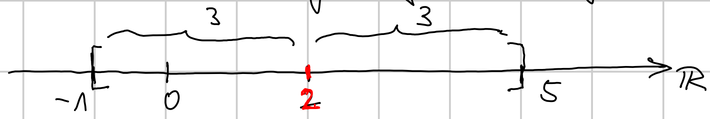
<u>insgesamt:</u> $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-5, 5)$



alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand zu 0 auf dem Zahlenstrahl kleiner 5 ist: $|x| < 5 \Leftrightarrow |x - 0| < 5$

b) Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow \underbrace{|x - 2| \leq 3}$

$\mathbb{L} = [-1, 5]$



alle $x \in \mathbb{R}$ mit Abstand ≤ 3 von $2 \in \mathbb{R}$

Rechnerische Lösung: $|x-2| \leq 3$

1. Fall: $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2,+\infty)$

$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow x-2 \leq 3 \quad |+2$

$\Leftrightarrow x \leq 5$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 5]$

$\mathbb{L}_1 = [2,+\infty) \cap (-\infty,5] = [2,5]$

2. Fall: $x-2<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -(x-2) \leq 3$

$\Leftrightarrow -x+2 \leq 3$

$\Leftrightarrow -x \leq 1 \quad |\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \in [-1,+\infty)$

$\mathbb{L}_2 = (-\infty, 2) \cap [-1,+\infty) = [-1,2)$

insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = [-1,2) \cup [2,5] = [-1,5]$

c) $|2x+4| < 2$ ← gesucht ist die Lösungsmenge dieser Ungleichung

Variante 1: Fallunterscheidung zum Auflösen des Betrags

1. Fall: $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-2,+\infty)$

$|2x+4| < 2 \Leftrightarrow 2x+4 < 2 \quad |-4$

$\Leftrightarrow 2x < -2 \quad |\cdot\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1)$

$\mathbb{L}_1 = [-2,+\infty) \cap (-\infty,-1) = [-2,-1)$

2. Fall: $2x+4<0 \Leftrightarrow 2x<-4 \Leftrightarrow x<-2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)$

$|2x+4|<2 \Leftrightarrow -(2x+4) < 2$

$\Leftrightarrow -2x-4 < 2 \quad |+4$

$\Leftrightarrow -2x < 6 \quad |\cdot(-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow x > -3$

$\Leftrightarrow x \in (-3,+\infty)$

$\mathbb{L}_2 = (-3,+\infty) \cap (-\infty,-2) = (-3,-2)$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = (-3,-2) \cup [-2,-1) = (-3,-1)$

Variante 2: Anwendung von Rechenregeln und „Geometrie" (Anschauung)

$|2x+4|<2 \Leftrightarrow |2\cdot(x+2)| < 2$

$\Leftrightarrow |2| \cdot |x+2| < 2$ $\quad |a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

$\Leftrightarrow 2 \cdot |x+2| < 2 \quad |\cdot\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |x+2| < 1$

$\Leftrightarrow |x-(-2)| < 1$ ← alle x, deren Abstand von −2 kleiner 1 ist

$\Leftrightarrow x \in (-3,-1)$

d) Ungleichungen (ohne Betrag)

Gesucht ist die Lösungsmenge von $\frac{x+1}{x-1} \geq 5$

$D = \mathbb{R}\setminus\{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

$\frac{x+1}{x-1} \geq 5 \quad | \cdot (x-1)$

1. Fall $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$

2. Fall $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$

1. Fall: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq 5 &\Leftrightarrow x+1 \geq 5\cdot(x-1) \\
&\Leftrightarrow x+1 \geq 5x-5 \quad | -5x-1 \\
&\Leftrightarrow -4x \geq -6 \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow x \leq \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \tfrac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_1 = \left(-\infty, \tfrac{3}{2}\right] \cap (1,+\infty) = \left(1, \tfrac{3}{2}\right]$

2. Fall $x-1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq 5 &\Leftrightarrow x+1 \leq 5\cdot(x-1) \\
&\Leftrightarrow x+1 \leq 5x-5 \quad | -5x-1 \\
&\Leftrightarrow -4x \leq -6 \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow x \geq \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right)
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_2 = \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left(1, \tfrac{3}{2}\right] \cup \emptyset = \left(1, \tfrac{3}{2}\right]$

12 Vorlesung 12 (02.11.2020)

12.1 Anordnung, Ungleichung und Intervalle

12.2 Potenzen und Wurzeln in den reellen Zahlen

12.3 Rechenregeln für Wurzeln

12.4 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen

12.5 pq-Formel

12. Vorlesung 02.11.2020

Notiztitel 02.11.2020

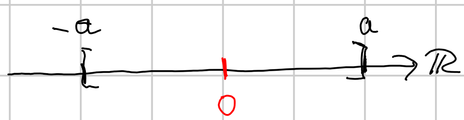
WICHTIG: Im Rahmen der Portfolio-Prüfung zu Mathematik 1 werden 3 edX-Tests angeboten! Zwei von drei Test muss man mitmachen um Punkte (maximal 15%) für die Gesamtprüfung zu erwerben.
Der 1. Test wird freigeschaltet vom 18.11.2020 12:00 Uhr bis 15.11.2020 18:00 Uhr im edX-Portal. Nach dem Anmelden (Einloggen) zum Test hat man individuell 60 Minuten Bearbeitungszeit.

Anordnung, Ungleichungen, Intervalle in $\mathbb{R}$

(1) Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ hat die Ungleichung $|x| \leq a$ die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$

$[-a,a]$ ist ein symmetrisch um $0 \in \mathbb{R}$ gelegenes Intervall

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \underbrace{|x - 0| \leq a}_{\text{Menge aller } x \in \mathbb{R}\text{, deren Abstand von } 0 \text{ kleiner oder gleich } a \text{ ist}}$$

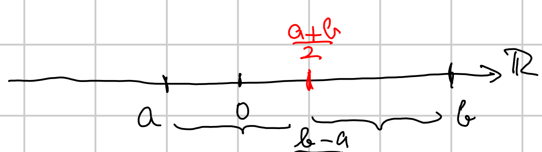


(2) $|x - b| \leq a$ hat als Lösungsmenge $\underbrace{\mathbb{L} = [b-a, b+a]}_{\text{Menge aller } x \in \mathbb{R}\text{, deren Abstand von } b \text{ kleiner oder gleich } a \text{ ist}}$, $a \in \mathbb{R}, a > 0$

(3) Behauptung: Es gilt $[a,b] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}\right\}$

für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$

„geometrische" Lösung:



$[a,b]$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von $\frac{a+b}{2}$ kleiner oder gleich $\frac{b-a}{2}$ ist

„rechnerische" Lösung: Mit Fallunterscheidung; $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

1. Fall $\quad x \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \underbrace{x - \frac{a+b}{2} \geq 0}_{x \in \left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right)}$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \quad \Big| + \frac{a+b}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \leq \frac{b-a+a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \leq b \Longleftrightarrow x \in (-\infty, b]$$

$$\mathbb{L}_1 = \left[\frac{a+b}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, b] = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$$

2. Fall $\quad x < \frac{a+b}{2} \Rightarrow \underbrace{x - \frac{a+b}{2} < 0}_{x \in \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)}$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x + \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \quad \Big| - \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a}{2} - \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a-(a+b)}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a-a-b}{2} = \frac{-2a}{2} = -a \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x \geq a \Longleftrightarrow x \in [a, +\infty)$$

$$\mathbb{L}_2 = [a, +\infty) \cap \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right) = \left[a, \frac{a+b}{2}\right)$$

insgesamt: $\quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right) \cup \left[\frac{a+b}{2}, b\right] = [a, b]$

Potenzen und Wurzeln in $\mathbb{R}$

① Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist $\underbrace{a^0 = 1 \text{ und } a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Rekursive Definition der n-ten Potenz a^n für $a \neq 0$

Es gilt: $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ Produkt von a mit a n-mal

② $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0^0$ ist nicht definiert

③ $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, $\quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \Rightarrow \frac{1}{a^k} = a^{-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$; Bezeichnungen a^n: $n \leftarrow$ Exponent (der Potenz), $a \leftarrow$ Basis (der Potenz)

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$
↳ allg. binomische Formel

④ <u>Definition</u> (n-te Wurzel)

a) Für $n \in \mathbb{N}$, n gerade (d.h. $n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$), ist definiert:
Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, ist $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte nicht negative
↳ lies: n-te Wurzel a
Lösung der Gleichung $x^n = a$.

⌈ $\sqrt[2]{4} = 2$ denn 2 ist die nicht negative Lösung von $x^2 = 4$

statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man einfach $\sqrt{a}$.

<u>Bezeichnung</u>: $\sqrt[n]{a}$
Wurzelexponent
Radikand ⌋

b) Für $n \in \mathbb{N}$, n ungerade (d.h. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$) ist definiert:

$\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x^n = a$.
↳ lies: n-te Wurzel von a

⌈ $\sqrt[3]{-8} = -2$ denn -2 ist die eindeutig bestimmte Lösung von $x^3 = -8$: $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = (-2)^3 = -8$

$\sqrt[3]{64} = 4$ denn $4^3 = 64$, d.h. 4 ist die eindeutig bestimmte Lösung von $x^3 = 64$ ⌋

<u>Bemerkung</u>:

① Wenn n gerade ist und $a > 0$ hat $x^n = a$ die beiden Lösungen $x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ denn
$x_1^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$ nach Definition [MERKE: $(\sqrt[n]{a})^n = a$]

$$x_2^n = (-\sqrt[n]{a})^n = ((-1)\cdot\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{(-1)^n}_{=+1 \text{ für } n \text{ gerade}} \cdot (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

② $\sqrt[n]{0} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[1]{a} = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

③ <u>Darstellung von $\sqrt[n]{a}$ als Potenz:</u>

Gesucht α mit $\sqrt[n]{a} = a^\alpha$ ← Darstellung von $\sqrt[n]{a}$ als Potenz

Falls es ein solches α gibt, erhält man mit den Rechenregeln für Potenzen

$$a^1 = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^\alpha)^n = a^{\alpha\cdot n}$$

$\Rightarrow$ es muss gelten: $\alpha\cdot n = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Es gilt also: } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

④ <u>Rechenregeln für Wurzeln</u> (Existenz der Wurzeln wird vorausgesetzt)

$$\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

<u>Bemerkung:</u> Im <u>Regelfall</u> gilt

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$\sqrt{25} = 5$, $\underbrace{\sqrt{25}}_{5} = \sqrt{16+9} \neq 4+3 = \sqrt{16}+\sqrt{9}$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/k} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{n\cdot k}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (a^k)^{1/n} = a^{k\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot k} = (a^{\frac{1}{n}})^k = (\sqrt[n]{a})^k$$

<u>Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}$</u>

① $x^2 = a$:
- $\mathbb{L} = \emptyset$ für $a < 0$
- $\mathbb{L} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ für $a > 0$
- $\mathbb{L} = \{0\}$ für $a = 0$

<u>denn:</u> $x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow x\cdot x > 0\cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

$x < 0 \Rightarrow x\cdot x > 0\cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

$\Big\}\ x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$0^2 = 0\cdot 0 = 0$

<u>Es gilt:</u> $x^2 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ <u>sogar</u> $x^2 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge 0^2 = 0$

d.h. $x^2 = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$

② Wir hatten definiert $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$,

es gilt eine andere Darstellung für $|x|$, nämlich $|x| = \sqrt{x^2}$

$\ulcorner$ $4 = |-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}$ $\lrcorner$

③ Für $a \geq 0$ gilt: $x^2 \leq a \iff |x| \leq \sqrt{a}$
$\iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

d.h. die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 \leq a$ für $a \geq 0$ ist das Intervall $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

④ Quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$

In ① haben wir gesehen: Für $a \in \mathbb{R}$ gibt es als Lösungsmengen von $x^2 = a$ drei Möglichkeiten, nämlich $\mathbb{L} = \emptyset$ falls $a < 0$ ist, $\mathbb{L} = \{0\}$ falls $a = 0$, $\mathbb{L} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ falls $a > 0$ ist.

allgemeine quadratische Gleichung $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ mit $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Wegen $a_2 \neq 0$ kann man durch a_2 teilen und erhält
$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

setzt man $\frac{a_1}{a_2} = p \in \mathbb{R}$ und $\frac{a_0}{a_2} = q \in \mathbb{R}$ hat man die quadratische Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$

Zur Lösung macht man die sog. quadratische Ergänzung

$(x+b)^2 = x^2 + 2b x + b^2$

$x^2 + p x = x^2 + 2bx$

Γ $b = \frac{p}{2}$

$$x^2 + px + q = 0 \iff$$
$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + q = 0 \iff$$
$$\underbrace{\left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}\ \underbrace{- \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{=0} \ldots$$

$$\left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right) - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \iff$$
$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \iff$$

damit erhält man $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \longleftarrow \tilde{x}^2 = a$ mit $a = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\tilde{x} = \left(x+\frac{p}{2}\right)$

1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Longrightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Longrightarrow \mathbb{L} = \{\tilde{x} = 0\} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

$\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2}$

3. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Longrightarrow \mathbb{L} = \left\{\tilde{x}_1 = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ \tilde{x}_2 = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

$$= \left\{x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},\ x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$$

Beispiel: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$p = -5,\ q = 6 \Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} > 0$

$\Longrightarrow$ es gibt 2 Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Es gilt: $(x - x_1)\cdot(x - x_2) = (x-2)\cdot(x-3) = x^2 - 5x + 6$

oder $x^2 - 5x + 6 = 0 \Longleftrightarrow (x-2)\cdot(x-3) = 0$

13 Vorlesung 13 (03.11.2020)

13.1 Linearfaktoren des quadratischen Polynoms

13.2 Mitternachtsformel

13.3 Quadratische Ungleichungen

13.4 Definition: Logarithmus

13.5 Rechenregeln für Logarithmen

13.6 Zahldarstellungen (umrechnung)

quadr. Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$

„formale" Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

→ 1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

→ 2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

→ 3. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

Im 3. Fall hat man mit $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - x\cdot x_2 - x\cdot x_1 + x_1\cdot x_2$$
$$= x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1\cdot x_2$$

es ist $x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$

$$x_1\cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$

mit $a = -\frac{p}{2}$

$b = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q$$

damit folgt $(x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{= -p}x + \underbrace{x_1\cdot x_2}_{= q} = x^2 + p\cdot x + q$

Linearfaktoren des quadratischen Polynoms

Quadratische Gleichung in allgemeiner Form: $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$$0 = a_2x^2 + a_1x + a_0 = \underset{\neq 0}{a_2}\cdot\underbrace{\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2}\right)}_{= 0}$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2}x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \xrightarrow[\frac{a_1}{a_2} = p;\ \frac{a_0}{a_2} = q]{} x^2 + px + q = 0$$

„formale" Lösung $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

mit $\frac{p}{2} = \frac{a_1}{2a_2}$, $q = \frac{a_0}{a_2}$: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2|a_2|}$$

<u>insgesamt</u> $\quad x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2|a_2|} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$

→ <u>1. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$.

→ <u>2. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{a_1}{2a_2}\right\}$

→ <u>3. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_2}\right\}$

<u>Quadratische Ungleichungen</u>: (12. Vorlesung): $x^2 \le a$ für $a \in \mathbb{R}, a > 0$

$\Rightarrow |x| \le \sqrt{a} \Rightarrow$

$x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$$x^2 + px + q \le a$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \le a$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)}_{y}^2 \le \underbrace{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{b \ge 0}$$

$y^2 \le b$

$b < 0 \quad \mathbb{L} = \emptyset$

$b > 0 \quad \mathbb{L} = [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$

$\left(x + \frac{p}{2}\right) = y \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \Rightarrow$

$x \in \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{b}, -\frac{p}{2} + \sqrt{b}\right]$

$\mathbb{L} \neq \emptyset$ ✓ für $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ge 0$

$\mathbb{L} = \emptyset$ ✓ für $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

insbesondere gilt: $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$ ✓ falls $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ ist und

$\mathbb{L} = \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$ falls $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$.

<u>Bemerkung</u>: $x^2 \le a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$x^2 < a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$x^2 \ge a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$= (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty)$

$x^2 > a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$
$= (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, +\infty)$

Logarithmen

Definition: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ ist der Logarithmus von a zur Basis b definiert als

$$x = \log_b(a) \iff b^x = a$$

($\log_b(a)$ ist die Zahl x, die als Exponent $b^x = a$ ergibt)

Beispiele: a) $\log_{10}(1000) = 3$ denn $10^3 = 1000$

$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ denn $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

$\log_5(125) = 3$ denn $5^3 = 5^2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$

b) Die Lösung der Gleichung $2^x = 8$ ist $\underbrace{x = \log_2(8) = 3}_{2^3 = 8}$

MERKE: $x = \log_b(a)$ ist die Lösung der Gleichung $b^x = a$

Bemerkung:

1) Logarithmus zur Basis 10 $\rightarrow$ 10er Logarithmus: $\log_{10}(a) = \lg(a) = \log(a)$
Logarithmus zur Basis 2 $\rightarrow$ 2er Logarithmus: $\log_2(a) = \operatorname{ld}(a)$
logarithmus dualis

Logarithmus zur Basis e $\rightarrow$ Logarithmus zur Basis e $\hat{=}$ natürlicher Logarithmus: $\log_e(a) = \ln(a)$
logarithmus naturalis

$e \in \mathbb{R}$

$e = 2,\underbrace{7182818\ldots}$

unendlich viele nicht periodische Nachkommastellen

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2) Rechenregeln für Logarithmen (folgen aus den Regeln für Potenzen)

Da die Regeln für jede zulässige Basis $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ gleich sind, schreiben wir jetzt einfach log statt $\log_b$.

a) $\log(a_1 \cdot a_2) = \log(a_1) + \log(a_2)$ $\longrightarrow$ Beweis:

b) $\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \log(a_1) - \log(a_2)$

c) $\log(a_1^\alpha) = \alpha \cdot \log(a_1)$

linke Seite

$x = \log_b(a_1 \cdot a_2) \Leftrightarrow b^x = a_1 \cdot a_2$

rechte Seite

$x = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \Rightarrow$

$b^x = b^{\log_b(a_1) + \log_b(a_2)}$

$= \underbrace{b^{\log_b(a_1)}}_{a_1} \cdot \underbrace{b^{\log_b(a_2)}}_{a_2} = a_1 \cdot a_2$

3) Umrechnung von Logarithmen

gesucht $x = \log_b(a)$ bekannt ist $\log_{\tilde{b}}$ Logarithmus zur Basis $\tilde{b}$

d.h. $\log_{\tilde{b}}(a)$ und $\log_{\tilde{b}}(b)$ sind bekannt

$$x = \log_b(a) \Leftrightarrow b^x = a \quad | \log_{\tilde{b}}(\ldots)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\tilde{b}}(b^x) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\overset{c)}{\Leftrightarrow} x \cdot \log_{\tilde{b}}(b) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}$$

insgesamt: $$\boxed{\log_b(a) = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}}$$

Beispiel: $\log_{10}(35) = \frac{\ln(35)}{\ln(10)}$, $\ln(35) = \frac{\log_{10}(35)}{\log_{10}(e)}$

Rückblick auf Zahldarstellungen

Dezimalsystem → Basis 10 : $273{,}12 = 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2}$

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b^j \cdot 10^{-j}}$$

c-adisches System → Basis $c > 0$:

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot c^i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b^j \cdot c^{-j}}$$

$c = 2$ → Dualsystem , $c = 16$ → Hexadezimalsystem

$$
\left.
\begin{aligned}
1357 &= 135 \cdot 10 + 7 \\
135 &= 13 \cdot 10 + 5 \\
13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\
1 &= 0 \cdot 10 + 1
\end{aligned}
\right\} 1357
$$

← Teilen mit Rest durch 10

Für die Zahldarstellung c-adischen System gilt: Teilen mit Rest durch c;

z.B. Dualsystem $c = 2$: Gegeben 135 im Dezimalsystem $(135)_{10}$;

gesucht 135 im Dualsystem $(135)_2$

$$
\left.
\begin{aligned}
135 : 2 &= \overbrace{67 \cdot 2}^{134} + 1 \\
67 : 2 &= 33 \cdot 2 + 1 \\
33 : 2 &= 16 \cdot 2 + 1 \\
16 : 2 &= 8 \cdot 2 + 0 \\
8 : 2 &= 4 \cdot 2 + 0 \\
4 : 2 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 : 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 : 2 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}
\right\} (10000111)_2
$$

← Teilen mit Rest durch 2

Probe: $(10000111)_2 =$

$1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^7 =$

$1 + 2 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 128 = 135$ ✓

$c = 5$: Gegeben $(232)_{10}$, gesucht 232 zur Basis 5

Teilen mit Rest durch 5 liefert

$$
\left.
\begin{aligned}
232 : 5 &= 46 \cdot 5 + 2\\
46 : 5 &= 9 \cdot 5 + 1\\
9 : 5 &= 1 \cdot 5 + 4\\
1 : 5 &= 0 \cdot 5 + 1
\end{aligned}
\right\}
$$

$(232)_{10} = (1412)_5$

<u>Probe:</u> $(1412)_5 =$

$2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 2 + 5 + 100 + 125 = 232$

<u>Frage:</u> Was ist $(0,25)_{10}$ im System zur Basis 2 ?

$\hookrightarrow 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

$(0,25)_{10} = (0,01)_2$

Wie geht das generell bei Zahlen mit Nachkommastellen ?

14 Vorlesung 14 (04.11.2020)

14.1 Beispiel: Zahldarstellungen (umrechnung)

14.2 Brüche in anderen Zahldarstellungen

14.3 Zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag

14.4 Rechenregeln für den Betrag

14.5 Beweisidee Dreiecksungleichung

14.6 Definition: Verknüfungen auf Mengen

14.7 Definition: Gruppe, Halbgruppe, abelsche Gruppe

14.8 Definition: Ring, Ring mit Eins, Kommutativer Ring mit Eins

14.9 Definition: Körper

14. Vorlesung 04.11.2020

Notiztitel 04.11.2020

<u>Zahldarstellung:</u> Basis b ($b=10$, $b=2$, $b=16$)

Dualsystem ($b=2$), Dezimalsystem ($b=10$), Hexadezimalsystem ($b=16$)

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, c_1 c_2 \dots c_k)_b = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i + \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot b^{-j}$$

Umrechnung ganzer Zahlen aus Dezimalsystem in ein anderes System durch „Division mit Rest"

<u>Beispiel:</u> $(327)_{10}$ gesucht Darstellung im Dualsystem

$$\begin{aligned}
327 &= 163 \cdot 2 + 1 \\
163 &= 81 \cdot 2 + 1 \\
81 &= 40 \cdot 2 + 1 \\
40 &= 20 \cdot 2 + 0 \\
20 &= 10 \cdot 2 + 0 \\
10 &= 5 \cdot 2 + 0 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}$$

$(101000111)_2 = (327)_{10}$

<u>Probe:</u>

$1 + 2 + 2^2 + 2^6 + 2^8 = 1 + 2 + 4 + 64 + 256 = 327$ ✓

Wie kann man Brüche umrechnen?

<u>Beispiel:</u> $\frac{1}{8}$ Darstellung im Dezimalsystem (10er-System) also $0, c_1 c_2 \dots c_k$

$$\begin{array}{rl}
 & 1 : 8 = 0{,}125 \\
 & \underline{0} \\
10 \cdot & 10 \\
 & \underline{8} \\
10 \cdot & 20 \\
 & \underline{16} \\
10 \cdot & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}
\qquad \frac{1}{8} = (0{,}125)_{10}$$

$\frac{1}{8}$ Darstellung im Dualsystem (2er-System) als $0, c_1 c_2 \dots c_k$

Es ist: $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = (0{,}001)_2$

$$
\begin{array}{l}
1 : 8 = 0{,}001 \\
\quad \underline{0} \\
2\cdot \leftarrow 1 \quad 2 \\
\quad \underline{0} \\
2\cdot \leftarrow 2 \quad 4 \\
\quad \underline{0} \\
2\cdot \leftarrow 4 \quad 8 \\
\quad \underline{8} \\
\quad 0
\end{array}
\Bigg\} \quad \frac{1}{8} = (0{,}125)_{10} = (0{,}001)_2
$$

Ein zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag

1) Beispiel für eine quadratische Ungleichung:

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung $x\cdot(x+1) \leq 0$

$$x\cdot(x+1) \leq 0 \iff x^2 + x \leq 0$$

Quadratische Erg.

$$\iff x^2 + \underbrace{2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x}_{=x} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{=0} \leq 0$$

$$\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$\sqrt{\ldots}$

$$\iff \sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\tfrac{1}{4}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\iff \left|x+\tfrac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$|x| \leq a \iff x \in [-a, a]$

$$\iff x + \tfrac{1}{2} \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\iff -\tfrac{1}{2} \leq x + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$

$$\iff -1 \leq x \leq 0$$

$$\iff x \in [-1, 0] \implies \mathbb{L} = [-1, 0]$$

2) Rechenregeln für $|x|$ also für den Betrag:

Aus der 11. Vorlesung haben wir

Erste „Rechenregeln" für den Betrag

a) $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bsp.: $a = 7,\ b = -5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12$

$a + b = 2 \Rightarrow |a+b| = 2$

$\left.\right\}$ $2 \leq 12$, $|a+b| \leq |a| + |b|$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)
↳ jetzt: 14. Vorlesung

Beweisidee zur Dreiecksungleichung

1) Es gilt $|x| = \sqrt{x^2}$ also $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 = |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2$$

2) Es gilt: $|a| = \sqrt{a^2} \Rightarrow |a|^2 = a^2$

$|b| = \sqrt{b^2} \Rightarrow |b|^2 = b^2$.

3) Es gilt auch: $a \leq |a| \ \forall a \in \mathbb{R}$, denn

1. Fall: $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$a \leq a \Leftrightarrow a \leq |a|$

2. Fall $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ also

$a < 0 < -a \Rightarrow a < -a$

$\Rightarrow a < |a|$

damit ist $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$ und

$2 \cdot a \cdot b \leq 2 \cdot |a| \cdot |b|$

4) Insgesamt: $(a+b)^2 \leq |a|^2 + 2 \cdot a \cdot b + |b|^2$

$\leq |a|^2 \cdot 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$

↑ 1. bin. Formel

also: $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$$\Rightarrow |a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2} = |a| + |b|$$

Welche allgemeinen Strukturen stecken hinter unseren Zahlsystem?
↳ algebraische Strukturen

Es geht um „Rechnen" in einer Menge von Objekten!

Definition:

Gegeben ist eine Menge M, $M \neq \emptyset$, eine Verknüpfung auf M (Rechenoperation auf M) ist eine Abbildung $\otimes: M \times M \to M$, d.h. jedem Tupel $(a,b) \in M$ wird genau ein Element $a \otimes b \in M$ zugeordnet.

Beispiele: $M = \mathbb{Z}$, $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \quad (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to a+b \in \mathbb{Z}$

$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \quad (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Definiton:
Gegeben ist eine Menge $M, M \neq \emptyset$ und eine Verknüpfung (Rechenoperation) $\otimes : M \times M \to M$.

1) $(M, \otimes)$ ist eine **Halbgruppe**, wenn gilt
Assoziativgesetz: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a,b,c \in M$

2) $(M, \otimes)$ ist eine **Gruppe**, wenn gilt
Assoziativgesetz: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a,b,c \in M$
Existenz eines neutralen Elements: $\exists n \in M : a \otimes n = a, \forall a \in M$
Existenz inverser Elemente: $\forall a \in M \, \exists a^{-1} \in M : a \otimes a^{-1} = n$,
gilt **zusätzlich** das
Kommutativgesetz: $a \otimes b = b \otimes a, \forall a,b \in M$
heißt $(M, \otimes)$ **abelsche Gruppe**.

Beispiele: 1) $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe, denn
$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: \quad a + (b+c) = (a+b)+c$
$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist auch eine Halbgruppe, denn
$\forall a,b,c \in \mathbb{N}: \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, denn es gibt kein neutrales Element der Addition $(0 \notin \mathbb{N})$

3) $(\mathbb{N}, \cdot)$ besitzt mit $1 \in \mathbb{N}$ das neutrale Element der Multiplikation; $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist aber keine Gruppe, denn es gibt z.B. zur $2 \in \mathbb{N}$ kein

inverses Element bezüglich der Multiplikation

$\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$

4) $(\mathbb{Z},+)$ ist eine abelsche Gruppe, denn

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$0 \in \mathbb{Z}: \quad a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$, 0 ist neutrales Element

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z}$ mit $a+(-a)=0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$,

$-a$ ist das inverse Element zu a

$a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$

5) $(\mathbb{Z},\cdot)$ ist keine Gruppe, denn (wie bei $(\mathbb{N},\cdot)$) z.B. $2 \in \mathbb{Z}$ hat bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ kein inverses Element: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Definition:
Gegeben sind eine Menge $M, M \neq \emptyset$ und **zwei** Verknüpfungen (Rechenoperationen)

$\oplus : M \times M \to M$ und $\otimes : M \times M \to M$.

$(M,\oplus,\otimes)$ ist ein **Ring**, falls gilt:

1) $(M,\oplus)$ ist eine **abelsche Gruppe** ← bezüglich $\oplus$

2) $(M,\otimes)$ ist eine **Halbgruppe** ← bezüglich $\otimes$

3) Es gilt das **Distributivgesetz**: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \; \forall a,b,c \in M$. ← „Verträglichkeit" der beiden Verknüpfungen

bezogen auf $\otimes$

Hat $(M,\otimes)$ zusätzlich ein **neutrales Element**, nennt man $(M,\oplus,\otimes)$ einen **Ring mit Eins.** Gilt in einem Ring mit Eins zusätzlich in $(M,\otimes)$ das **Kommutativgesetz**, nennt man $(M,\oplus,\otimes)$ einen **kommutativen Ring mit Eins.**

Beispiel: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein Ring, denn $(\mathbb{Z},+)$ ist eine abelsche Gruppe und $(\mathbb{Z},\cdot)$ ist eine Halbgruppe ($a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$) und wir haben das Distributivgesetz

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, denn wegen $a=a\cdot 1 \; \forall a \in \mathbb{Z}$, ist $1 \in \mathbb{Z}$ das neutrale Element (Eins-

element) der Multiplikation und $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$

3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Kommutativer Ring mit Eins,
außerdem gilt: $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \ \exists \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q \cdot \frac{1}{q} = 1$
also zu $q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$ gibt es $\frac{1}{q}$ als inverses Element bezüglich der Multiplikation:
$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dann gilt $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

Definition: Eine Menge M, $M \neq \emptyset$, mit zwei Verknüpfungen
$\oplus : M \times M \to M$ und $\otimes : M \times M \to M$ heißt Körper, falls gilt
1) $(M, \oplus, \otimes)$ ist ein Kommutativer Ring mit Eins
2) $e \in M$ ist das neutrale Element in $(M, \oplus)$ also
$a \oplus e = e \oplus a = a \ \forall a \in M$, dann ist $M^* = M \setminus \{e\}$
und $(M^*, \otimes)$ ist eine Kommutative (abelsche) Gruppe.

Beispiele: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Weitere Beispiele: $M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ Menge mit 4 Elementen
$\oplus : M \times M \to M$ ist durch folgende Tabelle definiert

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Hauptdiagonale.

$\bar{0}$ ist das neutrale Element bezüglich $\oplus$ in M: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \ \forall \bar{a} \in M$

Verknüpfungstabelle ist spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen $\Rightarrow$
$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \ \forall \bar{a}, \bar{b} \in M$,
$\oplus$ ist Kommutativ
(Assoziativgesetz gilt auch)

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{0}$ ist bezgl. $\oplus$ invers zu $\bar{0}$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{1} + \bar{3} = \bar{0} \Rightarrow \bar{3} \text{ ist bzgl. } \oplus \text{ invers zu } \bar{1} \text{ und} \\ \qquad\qquad \bar{1} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{1} \text{ also ist } \bar{1} \text{ invers zu } \bar{3} \text{ bezgl. } \oplus \\ \bar{2} + \bar{2} = \bar{0} \Rightarrow \bar{2} \text{ ist bezgl. } \oplus \text{ invers zu } \bar{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} (M, \oplus) \text{ ist eine} \\ \text{abelsche Gruppe} \end{array}$$

15 Vorlesung 15 (16.11.2020)

15.1 5 Körperaxiome + Beispiele

15.2 Definition: Ganzzahlige Teiler

15.3 Definition: Primzahl

15.4 Definition: Gemeinsame Teiler / Größter gemeinsamer Teiler

15.5 Division mit Rest

Aus der 14. Vorlesung:

Definition: Eine Menge M, $M \neq \emptyset$, mit zwei Verknüpfungen $\oplus: M \times M \to M$ und $\otimes: M \times M \to M$ heißt **Körper**, falls gilt

1) $(M, \oplus, \otimes)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins
2) $e \in M$ ist das neutrale Element in $(M, \oplus)$ also $a \oplus e = e \oplus a = a \; \forall a \in M$, denn ist $M^* = M \setminus \{e\}$ und $(M^*, \otimes)$ ist eine kommutative (abelsche) Gruppe.

Merke: Ein Körper $(M, \oplus, \otimes)$ ist gekennzeichnet durch die 5 Körperaxiome, nämlich

Name	$\oplus$	$\otimes$
Assoziativgesetz	$a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$	$a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$
Kommutativgesetz	$a \oplus b = b \oplus a$	$a \otimes b = b \otimes a$
Distributivgesetz	$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$	
Existenz neutraler Elemente	$\exists!\, 0 \in M: a \oplus 0 = a \; \forall a \in M$	$\exists!\, 1 \in M: a \cdot 1 = a \; \forall a \in M$
Existenz inverser Elemente	$\forall a \in M \; \exists (-a) \in M: a + (-a) = 0$	$\forall a \in M \setminus \{0\} \; \exists a^{-1} \in M: a \cdot a^{-1} = 1$

Beispiele:

① $K = \{0, 1\}$ mit $\oplus: K \times K \to K$

Verknüpfungstabelle

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

Kommutativ $\hat{=}$ Spiegeln an der Diagonale lässt die Tabelle gleich!

$\odot: K \times K \to K$

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$K = \{0, 1\}$ mit $\oplus, \odot$ laut Verknüpfungstabelle ist der kleinste mögliche Körper (Hinweis: 4. Übung $\Rightarrow$ $0 \neq 1$ in einem Körper)

② $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ sind Körper.

③ $K = \{0, 1, a, b\}$ mit folgenden Verknüpfungen

$\oplus : K \times K \to K$

$\oplus$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

Spiegelsymmetrisch zur Diagonalen, also Kommutativ, 0 neutrales Element für $\oplus$, in jeder Zeile steht genau einmal die 0, d.h. zu jedem Element gibt es genau ein inverses Element bezüglich $\oplus$

$\odot : K \times K \to K$

$\odot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

$K^* = K \setminus \{0\}$ mit $\odot$

in jeder Zeile steht genau einmal die 1, d.h. zu jedem Element $\neq 0$ gibt es genau ein inverses Element bezüglich $\odot$!

Spiegelsymmetrisch zur Diagonalen also Kommutativ, 1 neutrales Element für $\odot$

Exemplarische (an einem Beispiel) des Distributivgesetzes

$$a \odot (b \oplus 1) = a \odot a = b$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot 1) = 1 \oplus a = b$$

$\Rightarrow$ $\underbrace{a \odot (b \oplus 1) = b = (a \odot b) \oplus (a \odot 1)}$ das Distributivgesetz ist erfüllt!

Elementare Zahlentheorie

$\to$ Zahlentheorie beschäftigt sich mit $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$ und Rechenoperationen für diese Mengen

Definition:

Gegeben sind $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Dann gilt:

① <u>a teilt b</u> (geschrieben $a \mid b$), falls gilt: $\exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a$.
Man sagt dann auch: b ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von a

② $\tilde{T}(b) = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \mid b\}$ <u>Teilermenge von b</u> / Menge aller (ganzzahligen) Teiler von b

Beispiele:

① $5 \mid 15$ denn $15 = 3 \cdot 5$

$5 \mid -50$ denn $-50 = (-10) \cdot 5$

$5 \nmid 7$ denn $7 \neq k \cdot 5 \ \forall k \in \mathbb{Z}$

↳ $\nmid$ steht für „teilt nicht (ganzzahlig)"

← „Spiegelsymmetrie"

② $\tilde{T}(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\} \subseteq [-12, 12]$

↳ denn $12 = (-3) \cdot (-4) = k \cdot (-4)$ mit $k = -3$

Es gilt folgende Symmetrie: $a \in \tilde{T}(12) \Leftrightarrow (-a) \in \tilde{T}(12)$

③ $\tilde{T}(7) = \{-7, -1, 1, 7\}$

Es gilt folgender Satz: $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0$

1) $\tilde{T}(b) = \tilde{T}(-b)$

2) $a \in \tilde{T}(b) \Leftrightarrow (-a) \in \tilde{T}(b)$

es ist ausreichend alle Überlegungen zur (ganzzahligen) Teilbarkeit für $a, b \in \mathbb{N}$ durchzuführen

Beweisidee:

1) $a \in T(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow \exists -k \in \mathbb{Z} : -b = (-k) \cdot a$

$\Leftrightarrow a \in T(-b)$

2) $a \in T(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a \quad | \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow b = (-k) \cdot (-a)$

$\Leftrightarrow (-a) \in T(b)$

Ab jetzt: $T(b) = \tilde{T}(b) \cap \mathbb{N}$ ← wir betrachten nur nicht negative Teiler

↳ $T(b) = \{ a \in \mathbb{N} \mid b = k \cdot a \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \}$

↳ $T(7) = \tilde{T}(7) \cap \mathbb{N} = \{1, 7\}$

Definition: $p \in \mathbb{N}$ heißt Primzahl, falls gilt $T(p) = \{1, p\}$, d.h.

p hat (außer 1 und p) keine ganzzahligen Teiler!

<u>Bemerkung:</u> 2 ist die <u>einzige</u> gerade Primzahl

<u>Es gilt:</u> $\forall b \in \mathbb{Z}$ ist $\tilde{T}(b) \subseteq [-|b|, |b|]$ und $\overbrace{\tilde{T}(b) \cap \mathbb{N}}^{=T(b)} \subseteq [1, |b|]$

Im Intervall $[-|b|, |b|]$ liegen <u>nur endlich viele ganze Zahlen</u>, d.h. <u>$\tilde{T}(b)$ ist eine endliche Menge</u>!

$\underbrace{T(a,b) = T(a) \cap T(b)}_{\text{Menge der gemeinsamen Teiler von } a \text{ und } b}$; es gilt $T(a) \cap T(b) \subseteq T(b)$ und $T(a) \cap T(b) \subseteq T(a)$

$\Rightarrow$ $T(a,b)$ ist als Teilmenge endlicher Mengen ebenfalls eine endliche Menge

$\Rightarrow$ jede endliche Menge (Menge mit endlich vielen Zahlen als Element) kann nach Größe der Zahlen sortiert werden und es gibt ein größtes Element in $T(a,b)$.

<u>Definition:</u>

Das größte Element in $T(a,b) = T(a) \cap T(b)$ heißt <u>größter gemeinsamer Teiler von a und b</u>, man schreibt dafür <u>$ggT(a,b)$</u>.

<u>Beispiel:</u> $\tilde{T}(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$\tilde{T}(8) = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$

$\to \tilde{T}(12) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \underline{\underline{T(12)}}$

$\to \tilde{T}(8) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 4, 8\} = \underline{\underline{T(8)}}$

$\Rightarrow T(12,8) = T(12) \cap T(8) = \{1, 2, 4\} \Rightarrow ggT(8,12) = 4$

Gibt es einen Algorithmus zur Berechnung von $ggT(a,b)$ <u>ohne</u> $T(a)$ und $T(b)$ einzeln zu ermitteln, $T(a,b) = T(a) \cap T(b)$ zu bilden, die Zahlen in $T(a,b)$ der Größe nach anzuordnen und dann das größte

Element anzugeben? Antwort: Ja $\Rightarrow$ euklidischer Algorithmus

Vorbereitung: Division mit Rest

Gegeben sind $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ dann existieren $k \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}_0$ mit $\underbrace{b = k \cdot a + m}$; $\underbrace{0 \leq m < |b|}_{\text{Reste sind immer nicht negativ}}$

$\hookrightarrow$ (ganzzahliges) Teilen von b durch a mit Rest m

Beispiel: $a = 8, b = 21 \Rightarrow 21 = \underset{k=2}{2} \cdot 8 + \underset{m=5}{5}$

$a = 8, b = -27 \Rightarrow -27 = \underset{k=-4}{(-4)} \cdot 8 + \underset{m=5}{5}$

Behauptung: $ggT(a,b) = ggT(a,m)$ falls gilt $b = k \cdot a + m$, $0 \leq m < |b|$

Beweisidee: $ggT(a,b)$ ist das größte Element in $T(a,b) = T(a) \cap T(b)$

$ggT(a,m)$ ist das größte Element in $T(a,m) = T(a) \cap T(m)$

Wir zeigen (morgen) $\underbrace{\boxed{T(a,b) = T(a,m)}}$

da die Mengen gleich sind,

sind die größten Elemente in beiden Mengen gleich!

16 Vorlesung 16 (17.11.2020)

16.1 Wiederholung Teilermengen, Primzahl, gemeinsame Teiler

16.2 Definition: ggT, Division mit Rest, Teilerfremd

16.3 Beweis: Division mit Rest

16.4 Euklidischer Algorithmus

16.5 Lemma von Bézout

16. Vorlesung 17.11.2020

Notiztitel 17.11.2020

Aus der 15. Vorlesung

$b \in \mathbb{Z}$, Teilermenge von b: $\tilde{T}(b) = \{a \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot a$ für ein $k \in \mathbb{Z}\}$

$a \in \tilde{T}(b) \Rightarrow -a \in \tilde{T}(b)$ ← „Symmetrie" der Teilermenge $\tilde{T}(b)$

Für alle $a \in \tilde{T}(b)$ gilt: $-|b| \le a \le |b| \Rightarrow \tilde{T}(b)$ ist eine endliche Menge.

$\tilde{T}(b) = \tilde{T}(-b)$ denn: $b = k \cdot a \Rightarrow -b = (-k) \cdot a$

→ es reicht aus bei Fragen zur Teilbarkeit in $\mathbb{Z}$ die positiven Zahlen zu betrachten also Teilbarkeit in $\mathbb{N}$ zu diskutieren!

$T(b) = \{a \in \mathbb{N} \mid b = k \cdot a\} \subseteq \mathbb{N}$

↑ $b \in \mathbb{N}$

$p \in \mathbb{N}$ ist Primzahl $\Longleftrightarrow T(p) = \{1, p\}$

Gegeben $a, b \in \mathbb{N}$: $T(a,b) = T(a) \cap T(b)$

↑ Menge der gemeinsamen Teiler von a und b

$T(a,b)$ ist eine endliche Menge, da $T(a)$ und $T(b)$ endliche Mengen sind. In einer endlichen Menge von Zahlen gibt es immer ein größtes (maximales) Element.

Definition:

Der größte gemeinsame Teiler $ggT(a,b)$ ist definiert als

$$ggT(a,b) = \max\{x \mid x \in T(a,b)\}$$

Zur Berechnung des ggT dient der euklidische Algorithmus basierend auf (ganzzahlige) Division mit Rest.

Gegeben sind $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dann existieren $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $b = k \cdot a + r$; $0 \le r < |a|$. r ist der Rest beim (ganzzahligen) Dividieren von b durch a!

Euklidischer Algorithmus als Anwendung des Satzes über Division mit Rest:

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b = k \cdot a + r$ nach Division mit Rest gilt: $\underbrace{ggT(a,b) = ggT(a,r)}$

zum Beweis zeigen wir, dass die Teilermengen $T(a,b)$ und $T(a,r)$ gleich sind, dann sind auch die größten Elemente dieser Mengen gleich!

$t \in T(a,b) \Rightarrow t \mid a \wedge t \mid b \Rightarrow a = n \cdot t,\ b = \tilde{n} \cdot t$ für $n, \tilde{n} \in \mathbb{Z}$.

Mit $b = k \cdot a + r$ folgt $r = b - k \cdot a = \tilde{n} t - k \cdot n \cdot t = \underbrace{(\tilde{n} - k \cdot n)}_{\in \mathbb{Z}} \cdot t$

$\Rightarrow t \mid r \wedge t \mid a \Rightarrow t \in T(a,r)$

$\rightarrow$ damit: $T(a,b) \subseteq T(a,r)$

$t \in T(a,r) \Rightarrow t \mid a \wedge t \mid r \Rightarrow a = m \cdot t \wedge r = \tilde{m} \cdot t$ für $m, \tilde{m} \in \mathbb{Z}$.

Mit $b = k \cdot a + r$ folgt $b = k \cdot m \cdot t + \tilde{m} \cdot t = \underbrace{(k \cdot m + \tilde{m})}_{\in \mathbb{Z}} \cdot t$

$\Rightarrow t \mid b \wedge t \mid a \Rightarrow t \in T(a,b)$

$\rightarrow$ damit: $T(a,r) \subseteq T(a,b)$

insgesamt: $T(a,r) = T(a,b)$

Gesucht $ggT(a,b)$, dann: Führe Division mit Rest aus

$a \leq b$

$$b = k \cdot a + r$$

$$\Rightarrow \boxed{ggT(a,b) = ggT(a,r)}$$

und wiederhole diesen Schritt bis $r = 0$ ist; der letzte von 0 verschiedene Rest in der Schrittfolge ist der gesuchte $ggT(a,b)$!

Beispiel: 1) $ggT(426, 54)$

$$426 = \underbrace{7 \cdot 54}_{378} + 48 \quad \leftarrow ggT(426,54) = ggT(54,48)$$
$$54 = 1 \cdot 48 + 6 \quad \leftarrow ggT(54,48) = ggT(48,6)$$
$$48 = 8 \cdot 6 + 0 \quad \leftarrow \text{Rest } r = 0 \text{ Algorithmus endet}$$

(letzter von 0 verschiedener Rest:) $6 = ggT(426, 54)$

2) $ggT(1312, 251)$

$$1312 = \underbrace{5 \cdot 251}_{1255} + 57 \quad \leftarrow ggT(1312, 251) = ggT(251, 57)$$
$$251 = \underbrace{4 \cdot 57}_{228} + 23 \quad \leftarrow ggT(251,57) = ggT(57,23)$$
$$57 = \underbrace{2 \cdot 23}_{46} + 11 \quad \leftarrow ggT(57,23) = ggT(23,11)$$
$$23 = 2 \cdot 11 + 1 \quad \leftarrow ggT(23,11) = ggT(11,1)$$
$$11 = 11 \cdot 1 + 0 \quad \leftarrow \text{Rest } r = 0 \text{ Algorithmus endet}$$

(letzter von 0 verschiedener Rest) $1 = ggT(1312, 251)$

Definition: Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ heißen teilerfremd, falls gilt $ggT(a,b) = 1$, d.h. $T(a,b) = \{1\}$

Beispiel: 1312 und 251 sind teilerfremd!

Beweis zum Teilen mit Rest

Gegeben sind $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, dann existieren $k \in \mathbb{Z}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ mit $b = k \cdot a + r$; $0 \leq r < |a|$. r ist der Rest beim (ganzzahligen) Dividieren von b durch a!

1) Wegen $T(b) = T(-b)$ reicht es aus, den Satz für $a, b \in \mathbb{N}$ zu beweisen!

2) Es reicht aus $a < b$ anzunehmen, denn für $a = b$ hat man $b = 1 \cdot b + 0 = 1 \cdot a + 0 = k \cdot a + r$ mit $k = 1$, $r = 0 < a$
$b = a$

3) Es reicht aus $a \geq 2$ zu betrachten, denn

für $a = 1$ gilt $\quad b = b \cdot 1 + 0 = b \cdot a + 0 = k \cdot a + r$ mit $k = b, r = 0 < a = 1$

$a = 1$

4) Zu beweisen bleibt: Für $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq a \geq 2$ gilt:

Es existiren $k, r \in \mathbb{N}_0$ mit $b = k \cdot a + r$, $0 \leq r < a$

Beweis durch vollständige Induktion bezogen auf $b \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang $b = 2$: $\quad 2 = 1 \cdot 2 + 0$

$a = 2$, $\quad r = 0$, $0 \leq r < a$

Induktionschritt:

Induktionsvoraussetzung: Aussage ist wahr für $b = u$ also

$u = k \cdot a + r$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq r < a$

Induktionsbehauptung: Aussage ist auch wahr für $u + 1$ also

$u + 1 = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r}$ für ein $\tilde{k} \in \mathbb{N}$, $0 \leq \tilde{r} < a$

Beweis: $\quad u + 1 = (k \cdot a + r) + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\underbrace{0 \leq r < a}$

Induktionsvor.

$r < a$, $r \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N}$ also $r \leq a - 1$

$= k \cdot a + (r + 1)$

1. Fall: $r + 1 < a \Rightarrow \tilde{k} = k$, $\tilde{r} = r + 1$: $u + 1 = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r}$ mit $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \tilde{r} < a$

2. Fall $\quad r + 1 = a \Rightarrow u + 1 = k \cdot a + \underbrace{(r + 1)}$

$= k \cdot a + a$

$= \underbrace{(k + 1)}_{\tilde{k}} \cdot a = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r}$ mit $\tilde{k} = k + 1$ und $\tilde{r} = 0$

$0 \leq \tilde{r} < a$

Beispiel: $\quad ggT(125, 13) = 1$ denn 13 ist Primzahl also $T(13) = \{1, 13\}$ und $13 \nmid 125$

Der euklidische Algorithmus liefert

$125 = \overbrace{9 \cdot 13}^{117} + 8$

$13 = 1 \cdot 8 + 5$

$8 = 1 \cdot 5 + 3$

$5 = 1 \cdot 3 + 2$

$3 = 1 \cdot 2 + 1$ $\quad ggT(125, 13) = 1$ letzter von 0 verschiedener Rest

$$2 = 2\cdot 1 + 0$$ ← Rest 0, Algorithmus endet

„Umkehrung ≙ Rückwärtsrechnung" in diesem Algorithmus

$$
\begin{aligned}
1 = ggT(125,13) &= 3 - 1\cdot 2 \\
&= 3 - 1\cdot(5 - 1\cdot 3) = (-1)\cdot 5 + 2\cdot 3 \\
&= (-1)\cdot 5 + 2\cdot(8 - 1\cdot 5) = 2\cdot 8 - 3\cdot 5 \\
&= 2\cdot 8 - 3\,(13 - 1\cdot 8) = (-3)\cdot 13 + 5\cdot 8 \\
&= (-3)\cdot 13 + 5\,(125 - 9\cdot 13) \\
&= \underbrace{5}_{s}\cdot 125 \underbrace{-48}_{t}\cdot 13 = s\cdot 125 + t\cdot 13
\end{aligned}
$$

d.h. es gibt $s \in \mathbb{Z}$ (hier $s=5$) und $t \in \mathbb{Z}$ (hier $t=-48$) mit
$ggT(125,13) = s\cdot 125 + t\cdot 13$

Lemma von Bézout:

Gegeben sind $a,b \in \mathbb{Z}$; dann existieren Zahlen $s,t \in \mathbb{Z}$ mit

$$ggT(a,b) = s\cdot a + t\cdot b$$

Beweisidee: euklidischen Algorithmus „umkehren ≙ rückwärts rechnen"
math. exakt ist Beweis mit vollständiger Induktion (siehe Skript)

Beispiel: $ggT(378, 45)$

$$
\left.
\begin{aligned}
378 &= \underbrace{8\cdot 45}_{360} + 18 \\
45 &= \underbrace{2\cdot 18}_{36} + 9 \\
18 &= 2\cdot 9 + 0
\end{aligned}
\right\} \Rightarrow ggT(378,45) = 9
$$

$$
\begin{aligned}
9 &= 45 - 2\cdot 18 \\
&= 45 - 2\cdot(378 - 8\cdot 45) \\
&= (-2)\cdot 378 + 17\cdot 45 = s\cdot 378 + t\cdot 45 \text{ mit } s=-2 \text{ und } t=17.
\end{aligned}
$$

17 Vorlesung 17 (18.11.2020)

17.1 Teilen mit Rest

17.2 Teilen und Äquivalenzrelationen, Restemengen

17.3 Rechenoperationen in Z_m, Körper?, kommutativer Ring mit Eins?

Heute (18.11.) 12:00 Uhr bis morgen (19.11.) 18:00 Uhr 1. edX-Test!

$$b, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underbrace{b = k \cdot m + r \quad \text{mit} \quad 0 \leq r < |m|}_{\text{Division mit Rest}}$$

speziell mit $m \in \mathbb{N}$ (also $m \geq 1$): $b = k \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$

r ist der Rest, der beim ganzzahligen Teilen von b durch m entsteht

Bezeichnung: Gauß: r heißt Modul von b bezüglich m und schreibt dafür $r = b \bmod m$ ← Rest, der beim Teilen von b durch m bleibt

also $r = b \bmod m \Longleftrightarrow b = k \cdot m + r$ mit $\underbrace{0 \leq r < m}$ → $r \in \mathbb{N}_0$

als Rest r kommen nur die Zahlen $0, 1, 2, \dots, m-1$ in Frage (denn falls $r = m + l$ für ein $l \in \mathbb{N}_0$ gilt: $b = k \cdot m + r = k \cdot m + (m + l) = (k+1) \cdot m + l \Rightarrow l = b \bmod m$)

Die möglichen Reste $0, 1, 2, \dots, m-1$ beim ganzzahligen Teilen durch m liefern uns folgende Mengen:

$$\overline{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + 0 \}$$

$$\overline{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + 1 \}$$

$$\vdots$$

$$\overline{m-1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + (m-1) \}$$

Beispiel: $m = 3 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \overline{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 \} \\ \quad = \{ \dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \} \\ \overline{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 + 1 \} \\ \quad = \{ \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \\ \quad \hookrightarrow -2 = (-1) \cdot 3 + 1 \\ \overline{2} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 + 2 \} \\ \quad = \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \} \end{cases}$$

$\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathbb{Z}$

$\overline{0} \cap \overline{1} = \emptyset$

$\overline{1} \cap \overline{2} = \emptyset$

$\overline{2} \cap \overline{0} = \emptyset$

Teilen durch m ($m \in \mathbb{N}$) und Äquivalenzrelationen

Die zweistellige Relation $R_m \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$ ist definiert durch:

$$(a,b) \in R_m \Leftrightarrow m \mid b-a \Leftrightarrow b-a = k \cdot m \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$$

Behauptung:

1) R_m ist eine Äquivalenzrelation
2) Für $m \in \mathbb{N}$ sind die Äquivalenzklassen gerade die Mengen $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}$

Beweis:

1) reflexiv, symmetrisch, transitiv

- reflexiv $\to (a,a) \in R_m$
- symmetrisch $\to (a,b) \in R_m \Rightarrow (b,a) \in R_m$
- transitiv $\to (a,b) \in R_m \wedge (b,c) \in R_m \Rightarrow (a,c) \in R_m$

a) reflexiv: $(a,a) \in R_m \; \forall a \in \mathbb{Z}$, denn $a-a = 0 = 0 \cdot m$
$\Rightarrow m \mid a-a$

b) symmetrisch: $(a,b) \in R_m \Rightarrow b-a = k \cdot m$
$\Rightarrow a-b = (-k) \cdot m$
$\Rightarrow m \mid a-b \Rightarrow (b,a) \in R_m$

c) transitiv: $(a,b) \in R_m \wedge (b,c) \in R_m \Rightarrow$
$b-a = k \cdot m \wedge c-b = \tilde{k} \cdot m \Rightarrow$
$c-a = (c-b)+(b-a)$
$= \tilde{k} \cdot m + k \cdot m = (\tilde{k}+k) \cdot m$
$\Rightarrow m \mid c-a \Rightarrow (a,c) \in R_m$

2) zugehörige Äquivalenzklassen

$\overline{a}$ ist Äquivalenzklasse zu a in $R_m \Rightarrow$

$\overline{a} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid (a,b) \in R_m \}$
$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b-a = k \cdot m \}$
$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + a \}$ ← Menge aller ganzen Zahlen, die beim Teilen durch m den Rest a lassen

Beim Teilen durch m gibt es die Reste $0, 1, 2, \dots, m-1$

mit den Mengen $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1} \Rightarrow \overline{a} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

<u>Definition:</u> Für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$ ist definiert
$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ die Menge der Äquivalenzklassen der Relation R_m. Für $\overline{k} \in \mathbb{Z}_m$ gilt also: Jede Zahl in $\overline{k}$ lässt beim Teilen durch m den Rest k ($0 \leq k \leq m-1$).

<u>Rechenoperationen in $\mathbb{Z}_m$:</u>

<u>Beispiel:</u> $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{1} \leftarrow b = k \cdot 5 + 1 \\ \overline{2} \leftarrow \tilde{b} = \tilde{k} \cdot 5 + 2 \end{array}\right\} \quad b + \tilde{b} = (k + \tilde{k}) \cdot 5 + 1 + 2 = \overbrace{(k+\tilde{k})}^{l} \cdot 5 + 3 = l \cdot 5 + 3$$

$$\Rightarrow b + \tilde{b} \in \overline{3}$$

Repräsentanten von $\overline{1}, \overline{2}$

$$\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{2} \leftarrow \tilde{b} = \tilde{k} \cdot 5 + 2 \\ \overline{4} \leftarrow b = k \cdot 5 + 4 \end{array}\right\} \quad b + \tilde{b} = \overbrace{(k+\tilde{k})}^{l} \cdot 5 + 2 + 4 = l \cdot 5 + 6 = l \cdot 5 + (5+1)$$

$$= (l+1) \cdot 5 + 1$$

Repräsentanten von $\overline{2}, \overline{4}$ $\quad \Rightarrow b + \tilde{b} \in \overline{1}$

$$\overline{2} + \overline{4} \; (= \overline{6}) = \overline{1}$$

$\hookrightarrow 6 = 1 \cdot 5 + 1 \Rightarrow \overline{6} = \overline{1}$

Strich über l heißt: Bestimme den Rest von l beim Teilen durch m

<u>Addition in $\mathbb{Z}_m$</u> ist definiert durch

$$\overline{l}, \overline{k} \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow \overline{l} + \overline{k} = \underbrace{\overline{(l+k) \bmod m}} = \overline{l+k}$$

Rest, der beim Teilen von $l+k$ durch m bleibt

$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$ ist eine endliche Menge, die Addition kann man dann in einer Verknüpfungstabelle darstellen

<u>Beispiel:</u> $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$+$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$

$\overline{0}$ ist das neutrale Element der Addition in $\mathbb{Z}_5$, das inverse Element zu $\overline{1}$ bez. der Addition in $\mathbb{Z}_5$ ist $\overline{4}$, denn $\overline{1}+\overline{4}=\overline{0}$, ebenso: $\overline{2}+\overline{3}=\overline{0}$, $\overline{3}+\overline{2}=\overline{0}$, $\overline{4}+\overline{1}=\overline{0}$

Verknüpfungstafel spiegelsymmetrisch zur Diagonale $\}$ $\overline{k}+\overline{\ell}=\overline{\ell}+\overline{k}$

diese Verknüpfung (Addition) ist kommutativ

$\overline{3}+(\overline{4}+\overline{2}) = \overline{3+(4+2)} = \overline{(3+4)+2} = (\overline{3}+\overline{4})+\overline{2}$

Assoziativgesetz in $\mathbb{Z}$

Für die Addition in $\mathbb{Z}_5$ gilt auch das Assoziativgesetz!

insgesamt: $(\mathbb{Z}_5, +)$ ist eine abelsche (kommutative) Gruppe

allgemein: $(\mathbb{Z}_m, +)$ ist eine abelsche (kommutative) Gruppe für $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$

Assoziativgesetz gilt (s.o. Rechnen in $\mathbb{Z}$)

Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$ ist definiert durch: $\overline{k}\cdot\overline{\ell} = \overline{k\cdot\ell}$

Beispiel: $\mathbb{Z}_5$; die Multiplikation regelt folgende Verknüpfungstabelle

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

$\overline{1}$ ist das neutrale Element bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \setminus \{\overline{0}\} = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$ ← in jeder Zeile der Teiltabelle steht genau einmal $\overline{1}$, d.h. jedes $\overline{k} \in \mathbb{Z}_5^*$ hat bezügl. der Multiplikation ein inverses Element, z.B. $\overline{3}\cdot\overline{2}=\overline{1}$

Spiegelsymmetrie zur Diagonale

die Multiplikation in $\mathbb{Z}_5$ ist kommutativ

Distributivgesetz: $\overline{k}\cdot(\overline{\ell}+\overline{m}) = \overline{k\cdot(\ell+m)} = \overline{(k\cdot\ell)+(k\cdot m)} = \overline{(k\cdot\ell)}+\overline{(k\cdot m)}$

Distributivgesetz in $\mathbb{Z}$

$= \overline{k}\cdot\overline{\ell}+\overline{k}\cdot\overline{m}$

insgesamt $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ ist ein Körper (endlicher Körper mit 5 Elementen)

Beispiel: $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Es gibt kein $\bar{k} \in \mathbb{Z}_4$ mit $\bar{2} \cdot \bar{k} = \bar{1}$
d.h. zu $\bar{2} \in \mathbb{Z}_4$ gibt es bezgl. der Multiplikation kein inverses Element
$\mathbb{Z}_4^* = \mathbb{Z}_4 \setminus \{\bar{0}\}$ ist keine Gruppe

$\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$ ist kein Körper sondern (nur) ein kommutativer Ring mit Eins!

allgemein: $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Frage: Wann hat $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$ ein inverses Element bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$? Wann ist $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ein Körper?

Satz:
Für $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$ gilt: $\bar{k}$ hat ein inverses Element bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$, falls $ggT(k, m) = 1$ ist (d.h. k und m sind teilerfremd).

Beweisidee: Angenommen $ggT(k, m) = 1$, dann gibt es nach dem Lemma von Bézout ganze Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit
$1 = s \cdot k + t \cdot m$, damit gilt für die Reste beim Teilen durch m

$$\bar{1} = \overline{s \cdot k + t \cdot m} = \bar{s} \cdot \bar{k} + \bar{t} \cdot \bar{m} \quad \leftarrow \bar{m} = \bar{0} \text{ in } \mathbb{Z}_m$$
$$= \bar{s} \cdot \bar{k} + \bar{t} \cdot \bar{0} \quad \leftarrow \bar{t} \cdot \bar{0} = \bar{0}$$
$$= \bar{s} \cdot \bar{k}$$

Es gilt also $\bar{1} = \bar{s} \cdot \bar{k}$ d.h. $\bar{s}$ ist das inverse Element zu $\bar{k}$ bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}_m$.

Beispiel: $\mathbb{Z}_{42}$; gesucht ist die Inverse bezgl. der Multiplikation zu $\overline{5}$ in $\mathbb{Z}_{42}$ (falls es sie gibt).

↳ Inverse existiert, falls $ggT(42,5) = 1$ ist

$$42 = 8 \cdot 5 + 2$$
$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \leftarrow ggT(42,5) = 1$$
$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Anwendung des Lemmas von Bézout:

Reste beim Teilen durch 42 bilden!

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\ &= 5 - 2 \cdot (42 - 8 \cdot 5) \\ &= 17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \overline{1} &= \overline{17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42} \\ &= \overline{17} \cdot \overline{5} + \overline{(-2)} \cdot \underbrace{\overline{42}}_{=\overline{0}} \\ &= \overline{17} \cdot \overline{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\overline{17}$ ist die Inverse zu $\overline{5}$ bezgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}_{42}$.

Probe:

$$17 \cdot 5 = 85 = 2 \cdot 42 + 1 \Rightarrow \overline{17} \cdot \overline{5} = \overline{1}$$

18 Vorlesung 18 (23.11.2020)

18.1 Restklassen mit Primzahlen sind Körper + Beispiel

18.2 simultane Kongruenzen

18.3 chinesischer Restsatz

18. Vorlesung 23.11.2020

Notiztitel 23.11.2020

Bemerkungen zur 3. Übung

zur 6. Aufgabe: Finden Sie Binome bzw. berechnen Sie mit geeigneten Binomen

(a5) 99^2

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 1\cdot 100 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

zur 1. Aufgabe: c) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$ $\leftarrow$ $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$ $\quad a=1, b=1, n=10$

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1^{10-i} \cdot 1^i$$

$$= (\underset{a}{1} + \underset{b}{1})^{10} = 2^{10} = 1024$$

siehe z.B. 8. Vorlesung

d) $$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad a=1 \quad b=1$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= (1-1)^n = 0^n = 0$$

„stures" Einsetzen

a) $\sum_{n=4}^{7} \binom{n}{n-2} = \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ dann ausrechnen

2. Variante: Symmetrie von Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ also } \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-(n-2)} = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{n=4}^{7} \binom{n}{n-2} = \sum_{n=4}^{7} \binom{n}{2} = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$$

$$= \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}$$

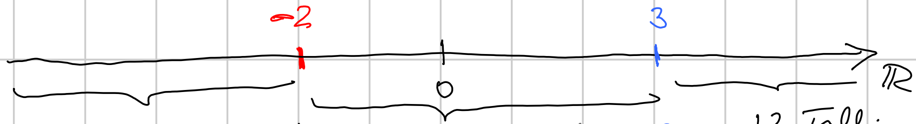
$$= 6 + 10 + 15 + 21 = 52$$

zu Aufgabe 4d: $|x+2| = |x-3|$

Vorzeichenwechsel bei -2 Vorzeichenwechsel bei $+3$

Welche Fälle muss man bei der Fallunterscheidung betrachten!

$\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup [-2, 3) \cup [3, +\infty)$



1. Fall: $x < -2$

d.h. $x \in (-\infty, -2)$

$x < -2 \Rightarrow x+2 < 0 \wedge x-3 < 0$

$|x+2| = |x-3|$ auflösen der Beträge

$-(x+2) = -(x-3)$

$-x-2 = -x+3 \quad | +x+2$

$0 = 5$ ↯

$\mathbb{L}_1 = \emptyset$

2. Fall: $-2 \leq x < 3$

d.h. $x \in [-2, 3)$ ✓

$x+2 \geq 0 \wedge x-3 < 0$

$|x+2| = |x-3|$

$x+2 = -(x-3)$

$x+2 = -x+3 \quad | +x-2$

$2x = 1$

$x = \frac{1}{2} \in [-2, 3)$ ✓

$\mathbb{L}_2 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

3. Fall: $x \geq 3$

d.h. $x \in [3, +\infty)$

$x+2 \geq 0 \wedge x-3 \geq 0$

$|x+2| = |x-3|$

$x+2 = x-3 \quad | -x-2$

$0 = -5$ ↯

$\mathbb{L}_3 = \emptyset$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

zu Aufgabe 3: Berechnung von Quadratzahlen natürlicher Zahlen, wenn die letzte Ziffer eine 5 ist!

$\underbrace{156}_{n\cdot(n+1)} \cdot 100 + 25$

$125^2 = 15625$

↳ $n = 12$, $n\cdot(n+1) = 12 \cdot 13$

↳ $12 \cdot 10 + 5$

$\underbrace{72}_{n\cdot(n+1)} \cdot 100 + 25$

$85^2 = 7225$

↳ $n = 8$, $n\cdot(n+1) = 8 \cdot 9$

↳ $8 \cdot 10 + 5$

Warum geht das?

$a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a\,5 = z$ gesucht z^2

$$z = a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 5 = \underbrace{(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1)}_{n} \cdot 10 + 5$$

$$\Rightarrow \quad z = n \cdot 10 + 5 \quad \Rightarrow \quad z^2 = (n \cdot 10 + 5)^2$$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\stackrel{\downarrow}{=} (n \cdot 10)^2 + 2 \cdot (n \cdot 10) \cdot 5 + 5^2$$

$$= \underbrace{n^2 \cdot 100 + n \cdot 100}_{} + 25$$

$$= \underbrace{(n^2 + n)}_{} \cdot 100 + 25$$

$$= n \cdot (n+1) \cdot 100 + 25 \quad ✓$$

Weiter in der Vorlesung: Rechnen in $\mathbb{Z}_m = \{\bar{k} \mid 0 \le k \le m-1\}$

↑ Restklassen beim (ganzz.) Teilen durch m

Aus der 17. Vorlesung ist bekannt:

a) $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit 1

b) $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$ hat ein inverses Element bezüglich der Multiplikation (also ein $\bar{l} \in \mathbb{Z}_m$ mit $\bar{k} \cdot \bar{l} = \bar{l} \cdot \bar{k} = \bar{1}$), falls k und m teilerfremd sind, d.h. $ggT(k, m) = 1$

$\Rightarrow$ $p \in \mathbb{N}$ Primzahl $\Rightarrow ggT(k, p) = 1 \;\; \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$ ist ein Körper, d.h. es gelten die 5 Körperaxiome (wie in $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$)

Beispiel: $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$ 13 ist Primzahl $\Rightarrow (\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$ ist ein Körper

a) Berechnen Sie das inverse Element bezüglich der Multiplikation von $\overline{11} \in \mathbb{Z}_{13}$

b) $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$ ist ein Körper also gelten binomische Formeln! Rechnen Sie dies mal für $(\bar{5} + \bar{7})^2$

zu a) zunächst euklid. Algorithmus für $ggT(11, 13) = 1$

$13 = 1 \cdot 11 + 2$

$11 = 5 \cdot 2 + 1$ ← $1 = ggT(11, 13)$

$2 = 2 \cdot 1 + 0$

„Rückwärtsrechnen" (Lemma von Bezout) → es gibt $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $1 = ggT(11, 13) = s \cdot 11 + t \cdot 13$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 \\ &= 11 - 5 \cdot (13 - 1 \cdot 11) \\ &= (-5) \cdot 13 + 6 \cdot 11 \end{aligned}\right\}$$

in $\mathbb{Z}_{13}$ gilt also

$$\bar{1} = \overline{(-5) \cdot 13 + 6 \cdot 11} = \overline{(-5)} \cdot \underbrace{\overline{13}}_{= \bar{0}} + \bar{6} \cdot \overline{11} = \bar{6} \cdot \overline{11}$$

$\Rightarrow$ die inverse Zahl zu $\overline{11}$ in $\mathbb{Z}_{13}$ bezüglich der Multiplikation ist $\overline{6}$

Probe: $\overline{6}\cdot\overline{11} = \overline{66} = \overline{65}+\overline{1} = \overline{5}\cdot\underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}}+\overline{1} = \overline{1}$

$\hookrightarrow 65 = 5\cdot 13$

zu b) $(\overline{5}+\overline{7})^2 = \overline{12}^2 = \overline{12}\cdot\overline{12} = \overline{12\cdot 12} = \overline{(12)^2} = \overline{144} = \overline{143}+\overline{1}$

$= \overline{11}\cdot\underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}} + \overline{1} = \overline{1}.$

$\overline{5}^2 + \overline{2}\cdot\overline{5}\cdot\overline{7} + \overline{7}^2 = \overline{25} + \overline{5}\cdot\overline{14} + \overline{49} = \overline{12}+\overline{5}+\overline{10}$

$\overline{25} = \overline{12}$, $\overline{14} = \overline{1}$, $\overline{49} = \overline{10}$

$= \overline{27} = \overline{2}\cdot\underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}}+\overline{1} = \overline{1}$

$\overline{14} = \overline{1}\cdot\underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}}+\overline{1} = \overline{1}$

$\overline{49} = \overline{39+10} = \overline{3}\cdot\underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}}+\overline{10} = \overline{10}$

$(\overline{5}+\overline{7})^2 = \overline{5}^2 + \overline{2}\cdot\overline{5}\cdot\overline{7} + \overline{7}^2$

$\overline{25} = \underbrace{\overline{13}}_{=\overline{0}}+\overline{12} = \overline{12}$

Merke: Potenzieren ist wiederholtes Multiplizieren mit dem selben Faktor

also gilt für $\overline{k}\in\mathbb{Z}_m$: $\overline{k}^n = \overline{(k^n)}$

Einführung in „simultane Kongruenzen"

a) Bemerkung zu Bezeichnungen:

$\overline{k}\in\mathbb{Z}_m \Rightarrow \overline{k} = \{b\in\mathbb{Z} \mid b$ hat beim Teilen durch m den Rest $k\}$

$= \{b\in\mathbb{Z} \mid m \mid b-k$ d.h. m teilt $b-k\}$

$= \{b\in\mathbb{Z} \mid (k,b)\in R_m\}$

Äquivalenzrelation aus der 17. Vorlesung

statt $(k,b)\in R_m$ sagt man auch „k ist kongruent zu b modulo m"

und schreibt dafür $k \equiv b \mod m$

$\equiv$ ist kongruent zu

b) Was sind „simultane Kongruenzen"?

Beispiel: Nikolaus verteilt Geschenke. Wenn er in jeden Haushalt 3 Geschenke abgibt, hat er zum Schluß 2 Geschenke übrig. Wenn er in jeden Haushalt 5 Geschenke abgibt, hat zum Schluß 4 Geschenke übrig.

Wieviele Geschenke hat der Nikolaus mindestens dabei? Gibt es weitere mögliche Anzahlen von Geschenken?

Geschenkesack vom Nikolaus

3 Geschenke / 2 Rest : $S_1 = \{2, 5, 8, 11, 14, \underbrace{17, 20, 23, 26}_{15 = 3\cdot 5}, 29, \underbrace{\dots}_{15} 44 \}$

5 Geschenke / 4 Rest : $S_2 = \{4, 9, 14, \underbrace{19, 24}_{15 = 3\cdot 5}, 29, \underbrace{34, \dots}_{15} 44 \}$

Der Nikolaus hat mindestens 14 Geschenke dabei, weitere Möglichkeiten sind $x_k = 14 + k \cdot 3 \cdot 5$, $\tilde{x} = 14$ ist kleinste positive Lösung!

$\overline{x} = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_3$ $\leftarrow$ $x \equiv 2 \mod 3$

$\overline{x} = \overline{4}$ in $\mathbb{Z}_5$ $\leftarrow$ $x \equiv 4 \mod 5$

2 „simultane Kongruenzen"

Allgemein gilt:

Satz (chinesischer Restsatz für zwei simultane Kongruenzen):
Die simultanen Kongruenzen

$$\overline{x} = \overline{n} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_1} \text{ und } \overline{x} = \overline{k} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_2}$$

sind lösbar, wenn gilt: $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$.

Es gilt dann: $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$ ist **eine** Lösung, falls gilt $\overline{a} \cdot \overline{m_2} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$ und $\overline{b} \cdot \overline{m_1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$.

Weitere (positive) Lösungen sind $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2$ für $i \in \mathbb{Z}$ (solange $x \geq 0$ gilt).

Bemerkung:

a) $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$ heißt m_1 und m_2 sind teilerfremd

b) $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$ mit $\overline{a} \cdot \overline{m_2} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$ und $\overline{b} \cdot \overline{m_1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$ ist nicht immer sofort die kleinste pos. Lösung sondern auf jeden Fall 1 Lösung von den unendlich vielen Möglichkeiten $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2$, $i \in \mathbb{Z}$

c) Wie sieht das in unserem Beispiel aus:

$n = 2$, $m_1 = 3$
$k = 4$, $m_2 = 5$

gesucht in $\mathbb{Z}_3$: $\overline{a}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{5} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_3$

gesucht in $\mathbb{Z}_5$: $\bar{b}$ mit $\bar{b} \cdot \bar{3} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_5$

$\bar{b} \cdot \bar{3} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_5$ $\Rightarrow$ Lösung durch „Hingucken" $\bar{b} = \bar{2}$

$\underbrace{\bar{a} \cdot \bar{5} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_3 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{2} = \bar{1}}_{\bar{5} = \bar{2} \text{ in } \mathbb{Z}_3}$ in $\mathbb{Z}_3$ $\Rightarrow$ Lösung durch „Hingucken" $\bar{a} = \bar{2}$

<u>also</u>: $x_0 = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 20 + 24 = 44$

19 Vorlesung 19 (24.11.2020)

19.1 Chinesischer Restsatz: Beweis, Beispiel

19.2 Allgemeiner chinesischer Restsatz

19.3 RSA: Anwendung von modularer Arithmetik

Allgemein gilt:

Satz (chinesischer Restsatz für zwei simultane Kongruenzen):
Die simultanen Kongruenzen

$$\overline{x} = \overline{n} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_1} \text{ und } \overline{x} = \overline{k} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_2}$$

sind lösbar, wenn gilt: $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1$.

Es gilt dann: $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$ ist **eine** Lösung, falls gilt $\overline{a} \cdot \overline{m_2} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$ und $\overline{b} \cdot \overline{m_1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$.

Weitere (positive) Lösungen sind $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2$ für $i \in \mathbb{Z}$ (solange $x \geq 0$ gilt).

Beweis: ① $\mathrm{ggT}(m_1, m_2) = 1 \Rightarrow$ (euklid. Algor. & Lemma von Bézout)

es existiert $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$ mit $\overline{a} \cdot \overline{m_2} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$; a)

es existiert $\overline{b}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$ mit $\overline{b} \cdot \overline{m_1} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$ b)

② Bilde $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$ mit a, b aus ①, dann gilt

(2.1) in $\mathbb{Z}_{m_1}$:

$$\overline{x_0} = \overline{n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1} = \overline{n} \cdot \underbrace{\overline{a} \cdot \overline{m_2}}_{\overset{a)}{=} \overline{1}} + \overline{k} \cdot \underbrace{\overline{b} \cdot \overline{m_1}}_{= \overline{0}} = \overline{n} \checkmark$$

(2.2) in $\mathbb{Z}_{m_2}$:

$$\overline{x_0} = \overline{n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1} = \overline{n} \cdot \overline{a} \cdot \underbrace{\overline{m_2}}_{= \overline{0}} + \overline{k} \cdot \underbrace{\overline{b} \cdot \overline{m_1}}_{\overset{b)}{=} \overline{1}} = \overline{k} \checkmark$$

Beispiel: Lösen Sie folgende simultane Kongruenzen

$\overline{x} = \overline{10}$ in $\mathbb{Z}_{101}$ $\rightarrow$ $x \equiv 10 \mod 101$
$\overline{x} = \overline{11}$ in $\mathbb{Z}_{47}$ $\rightarrow$ $x \equiv 11 \mod 47$
} alternative Schreibweise

Geben Sie auch die kleinste pos. Zahl x an, die die gegebenen simultanen Kongruenzen löst.

① $\mathrm{ggT}(101, 47)$ bestimmen

$101 = 2 \cdot 47 + 7$
$47 = 6 \cdot 7 + 5$
$7 = 1 \cdot 5 + 2$
$5 = 2 \cdot 2 + \boxed{1}$ $\leftarrow$ $\mathrm{ggT}(101, 47) = 1$
$2 = 2 \cdot 1 + 0$

$\Rightarrow$ Problem lösbar

② Lemma von Bézout anwenden und Inverse (bzgl. Mult.) bestimmen

$$\begin{aligned}1 &= 5-2\cdot 2\\ &= 5-2\cdot(7-1\cdot 5)\\ &= (-2)\cdot 7+3\cdot 5\\ &= (-2)\cdot 7+3\cdot(47-6\cdot 7)\\ &= 3\cdot 47-20\cdot 7\\ &= 3\cdot 47-20\cdot(101-2\cdot 47)\\ &= (-20)\cdot 101+43\cdot 47\end{aligned}$$

(2.1) In $\mathbb{Z}_{47}$ gilt

$$\bar{1} = \overline{(-20)\cdot 101+43\cdot 47} = \overline{(-20)}\cdot\overline{101}+\overline{43}\cdot\underbrace{\overline{47}}_{=\bar{0}} = \overline{(-20)}\cdot\overline{101}$$

Inverse zu $\overline{101}$ in $\mathbb{Z}_{47}$ ist $\overline{(-20)} = \overline{(-20+47)} = \overline{27}$ ← b

(2.2) In $\mathbb{Z}_{101}$ gilt

$$\bar{1} = \overline{(-20)\cdot 101+43\cdot 47} = \overline{(-20)}\cdot\underbrace{\overline{101}}_{=\bar{0}}+\overline{43}\cdot\overline{47} = \overline{43}\cdot\overline{47}$$

Inverse zu $\overline{47}$ in $\mathbb{Z}_{101}$ ist $\overline{43}$ ← a

③ Insgesamt: $x_0 = a\cdot 47\cdot 10+b\cdot 101\cdot 11$
$= 43\cdot 47\cdot 10+27\cdot 101\cdot 11 \overset{!}{=} 50207$

$x_0 = 50207$ ist eine Lösung der geg. simultanen Kongruenzen

Weitere Lösungen sind $x = x_0+k\cdot 47\cdot 101$ mit $k\in\mathbb{Z}$, mit $k=-10$ erhält man $x = 50207-47470 = 2737$ als kleinste positive Lösung!

Bemerkung:
$\bar{x} = \bar{n}_1$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$ → a_1 mit $\bar{a}_1\cdot\bar{m}_2 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$
$\bar{x} = \bar{n}_2$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$ → a_2 mit $\bar{a}_2\cdot\bar{m}_1 = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$

⇒ $x = n_1\cdot a_1\cdot m_2+n_2\cdot a_2\cdot m_1$ löst die simultanen Kongruenzen

$$= n_1\cdot a_1\cdot\frac{m_2\cdot m_1}{m_1}+n_2\cdot a_2\cdot\frac{m_2\cdot m_1}{m_2}$$

$$= n_1\cdot a_1\cdot\frac{M}{m_1}+n_2\cdot a_2\cdot\frac{M}{m_2}$$ ← $M = m_1\cdot m_2$

$\bar{a}_1\cdot\overline{\left(\frac{M}{m_1}\right)} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_1}$

$\bar{a}_2\cdot\overline{\left(\frac{M}{m_2}\right)} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_2}$

$$= \sum_{i=1}^{2} n_i\cdot a_i\cdot\frac{M}{m_i} \quad\text{mit } \bar{a}_i\cdot\overline{\left(\frac{M}{m_i}\right)} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_i}$$

andere Darstellung des chin. Restsatzes für 2 Kongruenzen

Diese Darstellung liefert sofort folgende Verallgemeinerung

Satz (Chin. Restsatz für mehrere simultane Kongruenzen)

Die k simultanen Kongruenzen

$$\bar{x} = \bar{n}_i \text{ in } \mathbb{Z}_{m_i} \quad 1 \le i \le k$$

sind lösbar, falls gilt $ggT(m_i, m_j) = 1$ für $i \ne j$, $1 \le i, j \le k$.

Es gilt dann

$$x_0 = \sum_{i=1}^{k} n_i \cdot a_i \cdot \frac{M}{m_i} \quad \text{ist eine Lösung}$$

mit $M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ und $\bar{a}_i \cdot \left(\overline{\frac{M}{m_i}}\right) = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{m_i}$, $1 \le i \le k$.

Weitere Lösungen sind $x = x_0 + l \cdot M$ für $l \in \mathbb{Z}$.

(Beispiel: siehe Skript S. 66/67)

Anwendung modularer Arithmetik (= Rechnen mit Restklassen):

Algorithmen zur Verschlüsselung von Daten!

hier: Grundidee des RSA - Algorithmus (asymmetrische Verschlüsselung)

Rivest, Shamir, Adelman

Sender und Empfänger der Daten haben verschiedene Schlüssel

Empfänger (E) hat einen „privaten" Schlüssel und einen „öffentlichen" Schlüssel

Sender (S) kennt (erhält) den öffentlichen Schlüssel des Empfänger E

S verschlüsselt seine Daten mit dem öffentl. Schlüssel von E und sendet diese (verschlüsselten) Daten an E.

Nur E kann mit seinem (geheim gehaltenen) privaten Schlüssel die verschlüsselten Daten von S entschlüsseln.

Damit ist der Ablauf des Verfahrens klar aber wie/warum funktioniert das?

Konkretes Beispiel (Skript S. 68-72)

Sender (S) ist Student und möchte Empfänger E (Prof. K) verschlüsselt mitteilen das MATHE sein Lieblingsfach ist!

① Kodierung des Wortes MATHE in Zahlen

Text	A	B	C	...	Z
Zahl	1	2	3		26

$\Rightarrow$ MATHE $\to$ 13|1|20|8|5

Sender (S) will die Zahlenfolge 13|1|20|8|5 verschlüsselt senden

② Schlüsselgenerierung (Ist vor ① gelaufen)

Der Empfänger E nimmt eine sehr große natürliche Zahl N, die das Produkt zweier sehr großer Primzahlen ist: $N = p \cdot q$

p, q Primzahlen (mit mehreren hundert Dezimalstellen)

N ist dann (momentan) auch mit den leistungsfähigsten Computern nicht in (endlicher) angemessener Zeit in das Produkt $p \cdot q$ faktorisierbar!

Empfänger E hat $N = p \cdot q$; er nimmt $\tilde{N} = (p-1)\cdot(q-1)$ und rechnet in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$: Er bestimmt zunächst e mit $0 < e < \tilde{N}$ und $ggT(e, \tilde{N}) = 1$

$\Rightarrow$ e hat in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$ ein inverses Element bezgl. der Multiplikation d;

der Empfänger berechnet d mit $\bar{d} \cdot \bar{e} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$.

Der „öffentliche" Schlüssel des Empfängers ist (N, e).

Der „private" Schlüssel des Empfängers ist (N, d).

Bei hinreichend großem N kann niemand (kein Supercomputer) in (endlicher) angemessener Zeit aus (N, e) den Schlüssel (N, d) berechnen!

Konkretes Beispiel

Empfänger E wählt $N = 33 = 3 \cdot 11$ also $p = 3$, $q = 11$

Empfänger E berechnet $\tilde{N} = (p-1)\cdot(q-1) = 2 \cdot 10 = 20$

E rechnet also in $\mathbb{Z}_{20}$, er wählt $e = 7$ mit $ggT(7, 20) = 1$

und bestimmt d mit $\bar{d} \cdot \bar{e} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{20}$: Es ist $\bar{1} = \bar{7} \cdot \bar{3}$ in $\mathbb{Z}_{20}$

$\Rightarrow d = 3$, $\bar{d} = \bar{3}$ in $\mathbb{Z}_{20}$

„öffentlicher" Schlüssel ist $(33, 7)$, „privater" Schlüssel ist $(33, 3)$

③ Sender will 13|1|20|8|5 mit dem „öffentlichen" Schlüssel verschlüsseln.

Für die zu verschlüsselnde Ziffernfolge $a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0$ muss gelten: $ggT(a_i, N) = 1$

hier im Beispiel: ggT(33,13) = 1, ggT(33,1) = 1, ggT(20,33) = 1, ggT(8,33) = 1, ggT(5,33) = 1

Der Sender S rechnet mit dem „öffentlichen" Schlüssel $(N,e) = (33,7)$ in $\mathbb{Z}_{33}$ und zwar

$$\overline{13}^7 = \overline{62748517} = \overline{7} \quad \text{denn } 62748517 = 1901470 \cdot 33 + 7$$

$$\overline{1}^7 = \overline{1} \quad \text{denn } 1^7 = 1 = 0 \cdot 33 + 1$$

$$\overline{20}^7 = \overline{1280000000} = \overline{26} \quad \text{denn } 1280000000 = 38787878 \cdot 33 + 26$$

$$\overline{8}^7 = \overline{2097152} = \overline{2} \quad \text{denn } 2097152 = 63550 \cdot 33 + 2$$

$$\overline{5}^7 = \overline{78125} = \overline{14} \quad \text{denn } 78125 = 2367 \cdot 33 + 14$$

$\Rightarrow$ Sender verschlüsselt 13|1|20|8|5 in 7|1|26|2|14

(4) Empfänger E bekommt die Ziffernfolge 7|1|26|2|14 und entschlüsselt mit seinem „privaten" Schlüssel $(N,d) = (33,3)$ und zwar durch Rechnung in $\mathbb{Z}_{33}$:

$$\overline{7}^3 = \overline{343} = \overline{13} \quad \text{denn } 343 = 10 \cdot 33 + 13$$

$$\overline{1}^3 = \overline{1} \quad \text{denn } 1 = 0 \cdot 33 + 1$$

$$\overline{26}^3 = \overline{17567} = \overline{20} \quad \text{denn } 17567 = 532 \cdot 33 + 20$$

$$\overline{2}^3 = \overline{8} \quad \text{denn } 8 = 0 \cdot 33 + 8$$

$$\overline{14}^3 = \overline{2744} = \overline{5} = 2744 = 83 \cdot 33 + 5$$

$\Rightarrow$ Empfänger nimmt 13|1|20|8|5 als entschlüsselte Nachricht, dekodieren mit Buchstabentabelle liefert: MATHE

Theorie dazu (warum funktioniert dieses Verfahren): Vorlesung morgen!

20 Vorlesung 20 (25.11.2020)

20.1 Prinzip der RSA-Verschlüsselung

20.2 Eulersche-phi-Funktion

20.3 Satz von Euler

20.4 'kleiner' Satz von Fermat

20.5 Beweis: RSA-Algorithmus

20.6 Beweis: Satz von Euler

20.7 Einführung: Lineare Gleichungssysteme

Prinzip der RSA-Verschlüsselung

Empfänger: $N = p \cdot q$ Produkt zweier sehr großer Primzahlen,
er rechnet in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$ mit $\tilde{N} = (p-1)\cdot(q-1)$ folgendes aus:
er bestimmt e mit $1 < e < \tilde{N}$ und $ggT(e, \tilde{N}) = 1 \Rightarrow$
e hat in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$ eine Inverse bezüglich der Multiplikation,
er berechnet diese Inverse, d.h. er löst $\bar{e} \cdot \bar{d} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$
öffentlicher Schlüssel ist (N, e)
private Schlüssel ist (N, d)

Sender: Er kennt den öffentlichen Schlüssel (N, e).
Er kodiert den zu verschlüsselnden Text in eine Zahlenfolge $a_1 a_2 \ldots a_k$ mit $ggT(a_i, N) = 1$, $1 \le i \le k$
Für jede Zahl a_i $(1 \le i \le k)$ berechnet er in $\mathbb{Z}_N$ die Zahl $\overline{A_i} = \overline{a_i^e}$;
die Zahlenfolge $A_1 A_2 \ldots A_k$ ist dann die verschlüsselte Nachricht!

Empfänger: Er bekommt die Zahlenfolge $A_1 A_2 \ldots A_k$ und berechnet mit dem privaten Schlüssel (N, d) in $\mathbb{Z}_N$ die Zahlen $\overline{A_i^d}$;
es gilt $\overline{A_i^d} = a_i$, d.h. aus $A_1 A_2 \ldots A_k$ wird wieder $a_1 a_2 \ldots a_k$.

Warum funktioniert das?

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert

a) $\Phi(n) = \{ k \in \mathbb{N} \mid 1 \le k < n \wedge ggT(k, n) = 1 \}$
Das ist die Menge der zu n teilerfremden nat. Zahlen kleiner als n.

b) Die Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) = |\Phi(n)| \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Elemente in der Menge $\Phi(n)$; diese Funktion heißt Eulersche-phi-Funktion.

Beispiele:

$n = 18 \Rightarrow \Phi(18) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}$, $\varphi(18) = |\Phi(18)| = 6$

$n = 21 \Rightarrow \Phi(21) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}$, $\varphi(21) = 12$

$n = 7 \Rightarrow \Phi(7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\varphi(7) = 6 = 7-1$

$n = 3 \Rightarrow \Phi(3) = \{1, 2\}$, $\varphi(3) = 2 = 3-1$

$\rightarrow 12 = \varphi(21) = \varphi(3\cdot 7) = \underbrace{\varphi(3)}_{=2} \cdot \underbrace{\varphi(7)}_{=6}$

Bemerkung:

1) $p \in \mathbb{N}$ Primzahl $\Rightarrow \varphi(p) = p-1$ denn $\Phi(p) = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$

2) $p, q \in \mathbb{N}$ beide Primzahlen $\Rightarrow \varphi(p\cdot q) = \varphi(p)\cdot\varphi(q) = (p-1)\cdot(q-1)$

Satz von Euler:

Gegeben sind $a, N \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a, N) = 1$, d.h. a und N sind teilerfremd.

Dann gilt

$$a^{\varphi(N)} \equiv 1 \bmod N \quad \text{anders formuliert:} \quad \boxed{\overline{a^{\varphi(N)}} = \overline{1} \text{ in } \mathbb{Z}_N}$$

Folgerung daraus ist der „Kleine" Satz von Fermat, nämlich:

Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ gilt $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p \iff a^p \equiv a \bmod p$

(p Primzahl $\Rightarrow \varphi(p) = p-1$, dann ist nach dem Satz von Euler $a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$)

Beweisidee zum RSA-Algorithmus

öffentlicher Schlüssel (N, e) mit $N = p\cdot q$ p und q Primzahlen

$\varphi(N) = \varphi(p\cdot q) = (p-1)\cdot(q-1) = \tilde{N}$ und $\bar{e}\cdot\bar{d} = \bar{1}$ in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}} = \mathbb{Z}_{\varphi(N)}$

privater Schlüssel (N, d) mit diesem d

Klartext als Zahl: a mit $ggT(a, N) = 1$, verschlüsselt wird a in

$\overline{a^e} \in \mathbb{Z}_N$ (Rest von a^e beim Teilen durch N): $\bar{A} = \overline{a^e}$, A wird gesendet zur Entschlüsselung wird berechnet:

$\overline{A}^d \in \mathbb{Z}_N$ berechnet; es ist

$$\overline{A}^d = \overline{(a^e)}^d = \overline{a^{ed}} \text{ in } \mathbb{Z}_N$$

Es gilt $\overline{e} \cdot \overline{d} = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_{\tilde{N}} = \mathbb{Z}_{\varphi(N)}$, d.h. $e \cdot d$ hat Rest 1 beim Teilen durch $\varphi(N)$; es gibt also ein $i \in \mathbb{N}$ mit $e \cdot d = i \cdot \varphi(N) + 1$

$\Rightarrow$

$\overline{a^{ed}}$ in $\mathbb{Z}_N$ ist $\overline{a^{i \cdot \varphi(N)+1}}$ in $\mathbb{Z}_N$ und damit: $\overline{a^{ed}} = \overline{a^{i \cdot \varphi(N)+1}}$

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{a^{e \cdot d}}}_{\overline{A}^d} = \overline{a^{i \cdot \varphi(N)}} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot \Big(\underbrace{\overline{a^{\varphi(N)}}}_{= \overline{1} \text{ nach Satz von Euler}}\Big)^i = \overline{a} \cdot \overline{1}^i = \overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a}$$

insgesamt gilt: $\overline{A}^d = \overline{a}$ in $\mathbb{Z}_N$.

<u>Beweisidee zum Satz von Euler</u> $a, N \in \mathbb{N}$ mit $ggT(a, N) = 1$

Behauptung $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \bmod N$ $\left(\overline{a^{\varphi(N)}} = \overline{1} \text{ in } \mathbb{Z}_N \right)$

Setze $l = \varphi(N)$, dann ist $\Phi(N) = \{k_1, k_2, \ldots, k_l\}$ mit $ggT(k_i, N) = 1$ für $1 \leq i \leq l$; d.h. $\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_l}$ in $\mathbb{Z}_N$ haben inverse Elemente bezgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}_N$.

Für die Zahlen $a \cdot k_i$ $(1 \leq i \leq n)$ gilt auch $ggT(a \cdot k_i, N) = 1$, d.h. auch $\overline{a \cdot k_1}, \overline{a \cdot k_2}, \ldots, \overline{a \cdot k_l}$ in $\mathbb{Z}_N$ haben inverse Elemente bezgl. der Multiplikation in $\mathbb{Z}_N$.

Für $\mathbb{Z}_N^* = \{ \overline{k} \in \mathbb{Z}_N \mid \text{es gibt } \overline{l} \in \mathbb{Z}_N \text{ mit } \overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{1} \}$

$$= \{ \overline{k} \in \mathbb{Z}_N \mid ggT(k, N) = 1 \} = \{ \overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_l} \};$$

es ist aber auch $\overline{a \cdot k_1}, \overline{a \cdot k_2}, \ldots, \overline{a \cdot k_l} \in \mathbb{Z}_N^* = \{ \overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_l} \}$

$\overline{a \cdot k_1}, \overline{a \cdot k_2}, \ldots, \overline{a \cdot k_l}$ ist nur eine andere Sortierung (eine Permutation) der Zahlen $\overline{k_1}, \overline{k_2}, \ldots, \overline{k_l}$ und damit in $\mathbb{Z}_N$:

$$\overline{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot \ldots \cdot k_\ell} = \overline{(a k_1)\cdot(a k_2)\cdot \ldots \cdot (a k_\ell)} \iff$$

ggT$(k_i, N) = 1$

$$\overline{\cancel{k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdots k_\ell}} = \overline{a^\ell \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdots k_\ell} = (\overline{a^\ell})\cdot(\overline{\cancel{k_1 \cdot k_2 \cdots k_\ell}})$$

nach Kürzen hat man $\quad \bar{1} = \overline{a^\ell}$ in $\mathbb{Z}_N$ also $\bar{1} = \overline{a^{\varphi(N)}}$ in $\mathbb{Z}_N$

Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Definition: (Wir betrachten nur die Fälle $n \leq k$)

Gegeben sind $n \cdot k$ reelle Zahlen a_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k)$ und n reelle Zahlen b_i $(1 \leq i \leq n)$.

① Gesucht sind die Werte der k Unbekannten x_j $(1 \leq j \leq k)$ mit

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1k}\cdot x_k & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2k}\cdot x_k & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nk}\cdot x_k & = & b_n
\end{array}\right\}$$

in Kurzform

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\cdot x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

also Lösungen dieses linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen für k Unbekannte.

② Die Zahlen a_{ij}, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq k$ heißen Koeffizienten des linearen Gleichungssystems; die Zahlen b_i, $1 \leq i \leq n$ heißen rechte Seite des linearen Gleichungssystems und die gesuchten Zahlen x_j, $1 \leq j \leq k$ heißen Unbekannte des linearen Gleichungssystems.

Beispiele:

①
$$\left.\begin{array}{r}
3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\
2x_2 - x_3 \quad = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2
\end{array}\right\}$$

$0\cdot x_1$ $\quad$ $0\cdot x_4$

lineares Gleichungssystem mit $n = 3$ Gleichungen und $k = 4$ Unbekannten x_1, x_2, x_3, x_4
rechte Seite: $b_1 = 1$, $b_2 = 0$, $b_3 = -2$

Koeffizienten $a_{11}=3,\ a_{12}=-5,\ a_{13}=1,\ a_{14}=-1$

$a_{21}=0,\ a_{22}=2,\ a_{23}=-1,\ a_{24}=0$

$a_{31}=1,\ a_{32}=1,\ a_{33}=1,\ a_{34}=-5$

(2) $$\left.\begin{aligned} 5x-2y&=0\\ -2x+3y&=0 \end{aligned}\right\}$$ $n=2$ Gleichungen für $k=2$ Unbekannte nämlich x und y, formal

Unbekannte $x_1=x,\ x_2=y$

Koeffizienten: $a_{11}=5,\ a_{12}=-2,\ a_{21}=-2,\ a_{22}=3$

rechte Seite: $b_1=0,\ b_2=0$

Bemerkung: $n\le k$ heißt: Wir betrachten nur lineare Gleichungssysteme mit weniger Gleichungen als Unbekannte ($n<k$) oder genau soviele Gleichungen wie Unbekannte ($n=k$).

Definition:

(1) Die $n\cdot k$ Koeffizienten $a_{ij},\ 1\le i\le n,\ 1\le j\le k$ eines lin. GLS bilden die Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ des lin. GLS; das ist ein rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und k Spalten, nämlich

j heißt Spaltenindex ($1\le j\le k$)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le k}}$$

i heißt Zeilenindex ($1\le i\le n$)

(2) Die k Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_k$ bilden den Vektor der Unbekannten, nämlich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

(Ein solcher Vektor $\vec{x}$ kann auch als Matrix mit k Zeilen und 1 Spalte interpretiert werden)

③ Die n Zahlen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bilden den <u>Vektor der rechten Seite</u>, nämlich

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(Ein solcher Vektor $\vec{b}$ kann auch als Matrix mit n Zeilen und 1 Spalte interpretiert werden)

<u>Beispiel:</u>

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

21 Vorlesung 21 (30.11.2020)

21.1 Rechenoperationen für Vektoren

21.2 Definition: Linearkombination/Gewichtete Summe

21.3 Definition: Vektorraum

21.4 Einführung in Gauß-Algorithmus (Rücksubstitution)

21. Vorlesung 30.11.2020

Notiztitel 30.11.2020

Lineare Gleichungssysteme $\quad$ n Gleichungen mit k Unbekannten ($n \leq k$)

Beispiel:
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 0\cdot x_1 \quad 2x_2 - x_3 + 0\cdot x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Vektor der Unbekannten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Vektor der rechten Seite}$$

→ Koeffizientenmatrix $\quad \underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3,\ 1 \leq j \leq 4} \leftarrow$ 3 Gleichungen, 4 Unbekannte

Warum heißt so ein Gleichungssystem linear?

1. Antwort: Die Unbekannten $x_1, x_2, \dots, x_k$ (im Beispiel x_1, x_2, x_3, x_4) kommen linear, d.h. als Faktoren in 1. Potenz darin vor!

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$
$$\uparrow x_1^1 \quad \uparrow x_2^1 \quad \uparrow x_3^1 \quad \uparrow x_4^1 \leftarrow \text{1. Potenz (nicht als z.B. } x_2^2 \text{ oder } \sqrt{x_2} \text{ usw.)}$$

2. Antwort: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ist Lösung von $2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$,

dann gilt: Auch $s \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ sx_3 \\ sx_4 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ ist Lösung dieser Gleichung,

denn $2\cdot(s\cdot x_1) - (s\cdot x_2) + 5(s\cdot x_3) + (s\cdot x_4) = s\cdot \underbrace{(2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4)}_{=0} = s\cdot 0 = 0$.

Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ eine weitere Lösung ist, d.h. es gilt auch $2u_1 - u_2 + 5u_3 + u_4 = 0$,

dann ist auch $\vec{x} + \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ x_3 + u_3 \\ x_4 + u_4 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Gleichung, denn

$$2(x_1+u_1) - (x_2+u_2) + 5(x_3+u_3) + (x_4+u_4) =$$

$$\underbrace{(2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4)}_{=0} + \underbrace{(2u_1 - u_2 + 5u_3 + u_4)}_{=0} = 0$$

Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen und Vektoren, Rechenoperationen für diese Matrizen und Vektoren

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{array}\right\} \Rightarrow$$

Gegeben: a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$ und b_i, $1 \le i \le n$

Gesucht: x_j, $1 \le j \le k$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \leftarrow$$ Koeffizientenmatrix (rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und k Spalten)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \leftarrow$$ Vektor der Unbekannten (eine Spalte mit k Zahlen $\hat{=}$ Matrix mit k Zeilen und 1 Spalte)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftarrow$$ Vektor der rechten Seite (eine Spalte mit n Zahlen $\hat{=}$ Matrix mit n Zeilen und 1 Spalte)

Rechenoperationen für Vektoren

1) Für einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ mit m Komponenten (m Zeilen, 1 Spalte)

und $s \in \mathbb{R}$ ist definiert: $s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ s \cdot a_m \end{pmatrix}$

2) Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ mit m Komponenten (für beide!)

ist $\vec{a} + \vec{b}$ definiert: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{pmatrix}$

Beispiel:

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow 5\cdot\vec{a} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\cdot\vec{a} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-4\\2+1\\3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\5\end{pmatrix}$

(2) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}$ ↯ nicht definiert, denn $\vec{a}$ hat 3 Komponenten, $\vec{b}$ hat jedoch 4 Komponenten

Bemerkung:

1) Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beide m Komponenten haben, ist auch $\vec{a}-\vec{b}$ definiert durch $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-1)\cdot\vec{b}$, z.B. mit $m=3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

direkt rechnet man: Komponentenweise subtrahieren!

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\\-b_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1+(-b_1)\\a_2+(-b_2)\\a_3+(-b_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

2) Definition:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ mit jeweils m Komponenten, außerdem sind gegeben N reelle Zahlen $s_1, s_2, \dots, s_N \in \mathbb{R}$. Dann ist die Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ mit Koeffizienten $s_1, s_2, \dots, s_N$ gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{N} s_i \cdot \vec{a}_i = s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots + s_N\vec{a}_N$$

Statt Linearkombination sagt man auch gewichtete Summe der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$

mit Gewichten $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

Beispiel:
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = 2, s_2 = -1, s_3 = 5$$

Die Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mit Koeffizienten s_1, s_2, s_3 ist

$$\sum_{i=1}^{3} s_i \cdot \vec{a}_i = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + s_3 \vec{a}_3$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4-30 \\ 6-5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Da wir bei $s \cdot \vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ komponentenweise rechnen, d.h. in jeder Komponente Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ (also mit reellen Zahlen) ausführen, übertragen sich folgende Rechenregeln für reelle Zahlen

$$\left\{\begin{array}{ll} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} & \text{Kommutativgesetz} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} & \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{0} \text{ ist der Vektor mit allen Komponenten} = 0 & \text{Existenz eines neutralen Elements der Addition} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}, & \text{Existenz von } -\vec{a}, \text{ dem inversen Elemente zu } \vec{a} \text{ bezüglich der Addition} \end{array}\right.$$

→ Die Menge der Vektoren mit m Komponenten ist bezüglich der Addition Gruppe sogar eine abelsche, d.h. kommutative, Gruppe

Für die Multiplikation mit reellen Zahlen gilt:

$$(*) \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \cdot \vec{b}) \\ (s+t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} \end{array}\right\} \text{„Distributivgesetze"} \\ t \cdot (s \cdot \vec{a}) = (t \cdot s) \cdot \vec{a} = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = s(t \vec{a}) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \forall s, t \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren mit } m \text{ Komponenten} \end{array}$$

Definition:

Eine Menge V von Objekten, für die eine Addition $+$ erklärt ist, so dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für die eine Multiplikation mit reellen Zahlen s erklärt ist, die den Regeln (*) genügt, nennt man einen Vektorraum, die Elemente von V heißen Vektoren.

Beispiel: $V = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \;\middle|\; a_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le m \right\}$ mit

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} \text{ und } s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \\ \vdots \\ s a_m \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

ist ein Vektorraum.

4) Rechenoperation für Matrizen und Vektoren: Produkt „Matrix mal Vektor"

Definition:
Gegeben ist eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit n Zeilen und k Spalten und ein Vektor $\vec{v}$ mit k Komponenten (d.h. Spaltenanzahl der Matrix = Komponentenanzahl des Vektors), dann und nur dann ist das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \cdots + a_{1k} v_k \\ a_{21} v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{2k} v_k \\ \vdots \\ a_{n1} v_1 + a_{n2} v_2 + \cdots + a_{nk} v_k \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$ ist damit ein Vektor mit n Komponenten.

Beispiel:

1) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; ↯ \; \left[= \begin{pmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + ?\cdot 3 \\ \\ \\ \end{pmatrix} \right.$$

nicht definiert

3)
$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k = b_n \end{array} \iff \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus

Beispiel:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ \quad\quad 2x_2 - x_3 \quad\quad = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Gauß-Algorithmus ist ein zweistufiger Algorithmus, er besteht aus

1. Stufe: Vorwärtselimination

2. Stufe: Rücksubstitution

basierend auf zwei Erkenntnissen von Gauß, nämlich

2. Stufe: Es gibt lineare Gleichungssysteme, die durch Rücksubstitution (Rückwärtseinsetzen) lösbar sind, nämlich z.B.

System mit Dreiecksgestalt

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \checkmark \\ \qquad\quad x_2 + 5x_3 = 5 \checkmark \\ \qquad\qquad\quad 3x_3 = 6 \checkmark \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Lösen durch Rücksubstitution

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \longrightarrow 3x_1 = 4 - 2x_2 + x_3 = 4 - 2\cdot(-5) + 2 = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{3}$$

$$x_2 + 5x_3 = 5 \longrightarrow x_2 + 5\cdot x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 5\cdot x_3 = 5 - 5\cdot 2 = -5$$

$$3x_3 = 6 \longrightarrow x_3 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\underline{A}\cdot\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16/3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 16/3 + 2\cdot(-5) - 1\cdot 2 \\ 0\cdot 16/3 + 1\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 0\cdot 16/3 + 0\cdot(-5) \cdot 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \checkmark \\ 5 \checkmark \\ 6 \checkmark \end{pmatrix}$$

Für morgen:

$$\begin{matrix} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{matrix}$$

? ← Kann man dafür durch Rücksubstitution Lösungen finden?

22 Vorlesung 22 (01.12.2020)

22.1 Gauß-Algorithmus

22. Vorlesung 01.12.2020

Notiztitel 01.12.2020

Lösung linearer Gleichungssysteme

→ Gauß-Algorithmus

1. Stufe: Vorwärtselimination ← ②

2. Stufe: Rücksubstitution ← ①

① Rücksubstitution

↓ unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen, Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten

a) Lineares GLS in „Dreiecksform" ist durch Rücksubstitution lösbar

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 4 \\ 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$2x_1 = 1 - 3x_2 - x_3 = 1 - 13 - \frac{1}{3} = -12 - \frac{1}{3} = -\frac{37}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{37}{6}$

$x_2 = 4 + x_3 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{13}{3}$

$x_3 = \frac{1}{3}$

Hauptdiagonale

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -37/6 \\ 13/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

↓ unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen; Anzahl Zeilen < Anzahl Spalten

b) Lineares GLS in „Trapezform" ist durch Rücksubstitution lösbar mit Hilfe freier Parameter

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned}$$

$2x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - 5 + \frac{5}{2}t + t = -4 + \frac{7}{2}t \Rightarrow x_1 = -2 + \frac{7}{4}t$

$x_3 = t$: $2x_2 = 10 - 5x_3 = 10 - 5t \Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}t$

↑ freier Parameter

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen abhängig vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ (für jedes t gibt es eine zulässige Lösung) ⇒

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{4}t \\ 5 - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2 + 7/4\,t \\ 5 - 5/2\,t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

offene Fragen:

1) Wie kommt man von einem allg. linearen GLS zu einem System in Dreiecks- oder Trapezform mit derselben Lösungsmenge?

2) Wie kann man entscheiden, ob für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen GLS gilt: $\underbrace{\mathbb{L} = \emptyset}_{\text{keine Lösung}}$ oder $\underbrace{\mathbb{L} = \{\vec{a}\}}_{\text{genau eine Lösung}}$ oder $\underbrace{\mathbb{L} = \{s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots \mid s_1, s_2, \dots \in \mathbb{R}\}}_{\text{unendlich viele Lösungen}}$

→ Antworten liefert

② Vorwärtselimination

Jedes lineare GLS kann durch (mehrmaliges) Anwenden elementarer Umformungen (das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern) in ein System in Dreiecks- oder Trapezform überführt werden. Dieses System hat dieselbe Lösungsmenge, die dann durch Rücksubstitution berechnet werden kann.

elementare Umformungen sind

① Vertauschen von Gleichungen ✓ → Vertauschen von Zeilen in der Koeffizientenmatrix + Vektor der rechten Seite

② Multiplikation von Gleichungen mit reellem Faktor $s \neq 0$ → Multiplikation einer Zeile in der Koeffizientenmatrix + Komponente im Vektor der rechten Seite mit $s \neq 0$

③ Bilden sog. Linearkombinationen von Gleichungen, d.h. Ersetzen der i-ten Gleichung durch das s-fache dieser i-ten Gleichung $(s \neq 0)$ plus dem t-fachen ($t \neq 0$) einer anderen k-ten Gleichung des geg. linearen GLS → Ersetzen der i-ten Zeile / i-ten Komponente der rechten Seite durch das s-fache dieser i-ten Zeile + i-te Komponente der rechten Seite $(s \neq 0)$ plus dem t-fachen $(t \neq 0)$ einer anderen k-ten Zeile + k-ten Komponente der rechten Seite

Ziel: Durch Anwendung von ①, ②, ③ ein System in Dreiecks-/Trapezform zu erzeugen!

Bsp.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \quad | \cdot(-3) \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix — Vektor der rechten Seite

Gauß-Schema

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & -2 \end{array} \quad | \cdot(-3)$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \quad | \cdot 4 \\ -8x_2 - 2x_3 + 14x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \quad | \cdot 4 \\ 0 & -8 & -2 & 14 & 7 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -6x_3 + 14x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & 7 \end{array}$$

Ende der Vorwärtselimination: System in Treppenform

Rücksubstitution

$-6x_3 + 14x_4 = 7$ ← freier Parameter $x_4 = t$

$$-6x_3 = 7 - 14t \Rightarrow x_3 = -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t$$

$$2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t$$

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 = 1 + 5x_2 - x_3 + x_4$$

$$= 1 - \frac{35}{12} + \frac{35}{6}t + \frac{7}{6} - \frac{7}{3}t + t$$

$$= \frac{12 - 35 + 14}{12} + \frac{35 - 14 + 6}{6}t$$

$$= -\frac{9}{12} + \frac{27}{6}t \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{12} + \frac{9}{6}t$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t$$

Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/4 + 3/2\,t \\ -7/12 + 7/6\,t \\ -7/6 + 7/3\,t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/4 \\ -7/12 \\ -7/6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/6 \\ 7/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Warum verändern die elementaren Umformungen die Lösungsmenge nicht?

① Vertauschen von Gleichungen ✓

② Multiplikation mit $s \neq 0$:

$x_1, \dots, x_k$ löst $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k = b_i$ ← i-te Gleichung

$s \neq 0$

$$\longrightarrow \quad s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k) = s \cdot b_i$$

$$= a_{i1}(sx_1) + a_{i2}(s \cdot x_2) + \dots + a_{ik}(s \cdot x_k) = s \cdot b_i$$

d.h. wenn $x_1, \dots, x_k$ Lösung der i-ten Gleichung ist, löst $sx_1, \dots, sx_k$ diese i-te Gleichung mit rechter Seite $s \cdot b_i$

$s = 0$ erzeugt aus $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k = b_i$ die wahre aber nutzlose Aussage $0 = 0$

③ <u>Linearkombination</u>

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k = b_i$ ← i-te Gleichung

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots a_{jk}x_k = b_j$ ← j-te Gleichung

$\Big\}$ $x_1, x_2, \dots, x_k$ ← lösen

$s \neq 0$, $t \neq 0$

$$\Rightarrow \quad s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k) + t \cdot (a_{j1}x_1 + \dots a_{jk}x_k) = sb_i + tb_j$$

<u>Beispiel:</u>

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ -5x + 5y - z &= \alpha \quad \leftarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \iff \underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dieses lineare GLS lösbar?

2) Für diese(s) α Lösungsmenge bestimmen

Gauß-Schema

x	y	z		
1	1	1	1	$\cdot 3$ $\quad \cdot 5$
−3	2	−1	2	← +
−5	5	−1	α	← +
1	1	1	1	
0	5	2	5	$\cdot(-2)$
0	10	4	$5+\alpha$	← +

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \end{array}\right)$$

Ende der Vorwärtselimination

$\mathbb{L}=\emptyset$ falls $\alpha \neq 5$ ist, denn in der letzten Gleichung steht

$$0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = \alpha - 5$$

für $\alpha \neq 5$ ist $\alpha - 5 \neq 0$ jedoch $0\cdot x + 0\cdot y + 0\cdot z = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}$!

Für $\alpha = 5$ haben wir

Trapezform

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ist immer wahr $\longrightarrow$ $0 \quad 0 \quad 0 \mid 0$

$\longrightarrow x = 1 - y - z = 1 - 1 + \frac{2}{5}t - t \Rightarrow x = -\frac{3}{5}t$

$\longrightarrow z = t$, $5y = 5 - 2t \Rightarrow$

$y = 1 - \frac{2}{5}t$

$$\mathbb{L}(\alpha=5) = \left\{ \begin{pmatrix} -3/5\, t \\ 1 - 2/5\, t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{L}(\alpha \neq 5) = \emptyset$$

23 Vorlesung 23 (02.12.2020)

23.1 Zusammenfassung lösen von LGS / Gauß-Algorithmus

23.2 Definition Rang von Matrizen und linearen Gleichungssystemen

23.3 Folgerungen aus Lösungstheorie (spezielle Lösung, allgemeine Lösung)

23.4 in-/homogene lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsstruktur

23.5 Beispiele spezielle/allgemeine Lösungen

Zusammenfassung Lineare Gleichungssysteme, n Gleichungen, k Unbekannte, $n \le k$

$$\underbrace{\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{array}\right\}}$$

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij} x_j = b_i \ ; \ 1 \le i \le n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}.$$

Gauß-Schema zur Lösung

$$\begin{array}{c|ccccc|c|c} & x_1 & x_2 & \dots & x_k & & \\ \hline \underline{\underline{A}} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_1 & \vec{b} \\ & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & b_n & \end{array}$$

Vorwärtselimination

Hauptdiagonale

$$\begin{array}{c|cccc|c} \tilde{\underline{\underline{A}}} & \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{1k} & \tilde{b}_1 \\ & & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2k} & \tilde{b}_2 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \tilde{a}_{\ell\ell} \dots & \tilde{a}_{\ell k} & \tilde{b}_\ell \\ & & & & & \tilde{b}_{\ell+1} \\ & & & & & \tilde{b}_n \end{array}$$

Ende der Vorwärtselimination

Lösung startet mit Vorwärtselimination;
Ziel: Mit elementaren Umformungen wird das System überführt in ein neues System mit derselben Lösungsmenge; das neue System hat Dreiecks- bzw. Trapez-form

Am Ende der Vorwärtselimination kann man eindeutig entscheiden, ob das System keine Lösung hat ($\mathbb{L} = \emptyset$) oder genau eine Lösung hat ($\mathbb{L} = \{\vec{x}_0\}$) oder unendlich viele Lösungen mit s freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_s$ ($\mathbb{L} = \{\vec{x}_0 + \sum_{i=1}^{s} t_i \vec{x}_i \mid t_i \in \mathbb{R}\}$):

Definition:
1) Der Rang der Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen von $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ am Ende der Vorwärtselimination.
Nicht-Nullzeile $\hat{=}$ Elemente der Zeile sind nicht alle gleich Null!
2) Der erweiterte Rang des lin. GLS ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen im kompletten Gauß-Schema $\tilde{\underline{\underline{A}}} | \tilde{\vec{b}}$ am Ende der Vorwärtselimination.
3) Für den Rang von $\underline{\underline{A}}$ schreibt man $rg(\underline{\underline{A}})$; für den erweiterten Rang schreibt man $rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$

Es gilt:
1) $\mathbb{L} = \emptyset$ falls $rg(\underline{\underline{A}}) \neq rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$
2) $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b}) \Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar mit $s = k - rg(\underline{\underline{A}})$ freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_s$ in der Lösung ($k \hat{=}$ Anzahl der Unbekannten)

Falls $\mathbb{L} \neq \emptyset$ ist, berechnet man die Lösung durch Rücksubstitution mit $\tilde{\underline{A}}$ und $\tilde{\vec{b}}$ am Ende der Vorwärtselimination!

Beispiel (siehe 22. Vorlesung), $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ -5x + 5y - z &= \alpha \end{aligned} \xrightarrow{\text{Gauß-Schema}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

	x	y	z		
$\underline{A}$	1	1	1	1	$\vec{b}$; $\vert\cdot 3$ $\vert\cdot 5$
	-3	2	-1	2	$\leftarrow +$
	-5	5	-1	α	$\leftarrow +$
	1	1	1	1	
	0	5	2	5	$\vert\cdot(-2)$
	0	10	4	$\alpha+5$	$\leftarrow +$
$\tilde{\underline{A}}$	1	1	1	1	$\tilde{\vec{b}}$
	0	5	2	5	
	0	0	0	$\alpha-5$	

Vorwärtselim. mit elementaren Umformungen

Ende der Vorwärtselimination

$rg(\underline{A}) = 2$ denn $\tilde{\underline{A}}$ hat 2 Nicht-Nullzeilen

$rg(\underline{A}|\vec{b}) = 2$, wenn $\alpha = 5$ ist, denn dann hat auch $\tilde{\underline{A}}|\tilde{\vec{b}}$ 2 Nicht-Nullzeilen

$rg(\underline{A}|\vec{b}) = 3$, wenn $\alpha \neq 5$ ist, denn dann ist $\alpha - 5 \neq 0$ und $\tilde{\underline{A}}|\tilde{\vec{b}}$ hat 3 Nicht-Nullzeilen

Also: Das GLS ist lösbar für $\alpha = 5$, für $\alpha \neq 5$ gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $\alpha = 5$ gibt es unendlich viele Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien

$k=3$, Anzahl der Unbek.

$rg(\underline{A})$

Parametern, man erhält mit $\alpha = 5$ am Ende der Vorwärtselimination

x	y	z	
1	1	1	1
0	5	2	5
0	0	0	0

$\rightarrow x = 1 - y - z = \frac{2}{5}t - t = -\frac{3}{5}t$

zum Start der Rücksubstitution setze $z = t$ ← 1 freier Parameter

$5y = 5 - 2t \Rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}t$

$$\Rightarrow \mathbb{L}(\alpha=5) = \left\{ \begin{pmatrix} -3/5\, t \\ 1 - 2/5\, t \\ t \end{pmatrix} \middle|\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Folgerungen aus der Lösungstheorie

1) Gegeben ist $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}=\vec{b}$; ein lineares GLS mit n Gleichungen für k Unbekannte $n \le k$, es gilt immer:

$$rg(\underline{\underline{A}}) \le n \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl freier Parameter } s = k - rg(\underline{\underline{A}}) \ge k-n \ge 0$$

$s=0$ (also kein freier Parameter) und damit eindeutige Lösbarkeit erreicht man nur, wenn $k = n = rg(\underline{\underline{A}})$ ist, d.h. Anzahl Gleichungen muß gleich der Anzahl der Unbekannten sein und $rg(\underline{\underline{A}})$ muss maximal also auch gleich n sein! In allen anderen Fällen ist entweder $\mathbb{L}=\emptyset$ oder $\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente mit s freien Parametern!

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Behauptung: $\vec{x}_p$ löst $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}=\vec{b}$, d.h. $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}_p=\vec{b}$, denn:

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 0 \\ -3\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ -5\cdot 0 + 5\cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\vec{x}_h = t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die allgemeine Lösung von $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}=\vec{0}$, denn

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}=\vec{0} \xrightarrow{\text{Gauß-Schema}}$$

$$\begin{array}{r|ccc|c|l}
 & x & y & z & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & |\cdot 3 \;|\cdot 5 \\
\underline{\underline{A}} & -3 & 2 & -1 & 0 & + \\
 & -5 & 5 & -1 & 0 & + \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 5 & 2 & 0 & |\cdot(-2) \\
 & 0 & 10 & 4 & 0 & + \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
\tilde{\underline{\underline{A}}} & 0 & 5 & 2 & 0 & \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\end{array}
\qquad \vec{b}=\vec{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$rg(\underline{\underline{A}})=2$

$\underbrace{rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{0}) = 2}$

System Lösbar mit $1 = 3-2$ freien Parametern

$\rightarrow x = -y - z = \frac{2}{5}t - t = 3/5\, t$

zum Start der Rücksubstitution

$z = t \Rightarrow y = -\frac{2}{5}t$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5\, t \\ -2/5\, t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition: Gegeben ist ein lineares GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, n Gleichungen mit k Unbekannten $(n \leq k)$.

1) Falls $\vec{b} = \vec{0}$, also $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, ist, spricht man vom homogenen linearen Gleichungssystem

2) Falls $\vec{b} \neq \vec{0}$, also mindestens ein $b_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, ist, spricht man von inhomogenen linearen Gleichungssystem

3) Wenn man ein inhomogenes lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, hat, ist $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ das zugehörige homogene lineare GLS.

Es gilt folgender

Satz: (Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme)

1) Ein homogenes lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat immer mindestens eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$ $(x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_k = 0)$

2) Ist bei einem homogenen lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = 0$
$s = k - rg(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, dann hat man Lösungen mit s freien Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_s$. Die Lösungsmenge ist

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \vec{x}_h = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \cdots + t_s \vec{x}_s \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq s \right\}$$

$\vec{x}_h = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \cdots + t_s \vec{x}_s$ nennt man auch die allgemeine Lösung des homogenen lin. GLS.

3) Das inhomogene lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist nur lösbar, wenn $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$ ist. Ist $s = k - rg(\underline{\underline{A}}) > 0$, dann hat man Lösungen mit s freien Parametern, die Lösungsmenge hat die Form

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x}_p + \underbrace{t_1 \vec{x}_1 + \cdots + t_s \vec{x}_s}_{\vec{x}_h} \;\middle|\; t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dabei gilt: $\vec{x}_h$ ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{x}_p$ ist eine spezielle/partikuläre

Lösung des inhomogenen GLS, also gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_p = \vec{b}$.

Beispiele:

1) $2x + y - z = 4$ ← $n = 1$ Gleichung für $k = 3$ Unbekannte

lin. GLS mit n Gleichungen für k Unbekannte $n \le k$

Gauß-Schema

x	y	z	
2	1	−1	4

← zum Start der Rücksubstitution setze $z = t_1, y = t_2$ (2 freie Parameter)

$\hookrightarrow 2x = 4 - y + z = 4 - t_2 + t_1 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2} t_2 + \frac{1}{2} t_1$

$\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = 1$, $\text{rg}(\underline{\underline{A}} | \vec{b}) = 1$

$\Rightarrow$ System lösbar mit

$3 - 1 = 2$ freien Parametern

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2} t_2 + \frac{1}{2} t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} \middle| \; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\hookrightarrow = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + \underbrace{t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h}$$

2)
$$\underbrace{\begin{aligned} 5x - 6y + z &= 1 \\ -x + 2y - z &= 2 \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -6 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Gauß-Schema →

x	y	z		
5	−6	1	1	
−1	2	−1	2	$I \cdot 5$ +
5	−6	1	1	$5x = 1 + 6y - z$
0	4	−4	11	$z = t$, $y = \frac{11}{4} + t$

$\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = \text{rg}(\underline{\underline{A}} | \vec{b}) = 2$

Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien Parameter

$5x = 1 + \frac{33}{2} + 6t - t = \frac{35}{2} + 5t$

$\Rightarrow x = \frac{7}{2} + t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 7/2 + t \\ 11/4 + t \\ t \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

24 Vorlesung 24 (07.12.2020)

24.1 Zusammenfassung LGS: Lösen, Lösungsstruktur

24.2 Vektoren und Vektorräume: Rechenoperationen, Pfeile

24. Vorlesung 07.12.2020

Notiztitel 07.12.2020

2. edX-Test Mittwoch 16.12 (12:00 Uhr) bis Donnerstag 17.12. (18:00 Uhr)

4 Aufgaben, 60 Minuten Bearbeitungszeit ab Start des Tests!

Bemerkungen und Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

1) Ablauf: a) Vorwärtselimination überführt das System in Dreiecks-/Trapezform (Zeilenstufenform)

b) System lösbar, wenn $rg(\underline{A}) = rg(\underline{A}|\vec{b})$, sonst $\mathbb{L} = \emptyset$

c) Bei Lösbarkeit: Anzahl Unbekannte $- rg(\underline{A}) = s \neq 0$

$\Rightarrow$ Rücksubstitution mit s freien Parametern (nur mit freien Parametern läuft die Rücksubstitution.

Anzahl Unbekannte $- rg(\underline{A}) = 0 \Rightarrow$

Lösung eindeutig (Rücksubstitution läuft ohne freie Parameter)

2) Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 15x_2 + 2x_3 &= \alpha \quad \leftarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 15 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \quad 1\cdot(-2) \quad 1\cdot(-5) \\ 2 & 6 & 5 & 7 \leftarrow + \\ 5 & 15 & 2 & \alpha \leftarrow + \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \quad 1\cdot(-6) \\ 0 & 0 & -18 & \alpha - 10 \leftarrow + \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 28 \end{array}$$

$\rightarrow rg(\underline{A}) = 2 = rg(\underline{A}|\vec{b})$ nur für $\alpha = 28$

$\Rightarrow$ System nur lösbar für $\alpha = 28$, sonst $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $\alpha = 28$ gilt

x_1	x_2	x_3	
1	3	4	2
0	0	−3	3
0	0	0	0

erst hier freie Variable notwendig $\boxed{x_2 = t}$

$x_1 = 2 - 3x_2 - 4x_3 = 2 - 3t + 4 \Rightarrow \boxed{x_1 = 6 - 3t}$

$-3x_3 = 3 \Rightarrow \boxed{x_3 = -1}$

$\Rightarrow$ Für $\alpha = 28$ hat man $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Struktur der Lösungsmenge eines lin. GLS.

Im Beispiel bei 2) hat man für $\alpha = 28$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_s} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{x} \in \mathbb{L}$ hat also die Darstellung $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h$, dabei gilt folgende

Behauptung: $\vec{x}_s$ ist eine (sogenannte spezielle) Lösung des inhomogenen Systems $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, d.h. also $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_s = \vec{b}$

$\vec{x}_h$ ist die allgemeine Lösung (mit freien Parametern) des zugehörigen homogenen Systems $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Beweis: a) Durch Nachrechnen

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 15 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 28 \end{pmatrix}}^{\vec{b}} \left[= \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}}^{\vec{b}} \text{ für } \alpha = 28 \right]$$

b) Für $\vec{b} = \vec{0}$ (rechte Seite nur Nullen) endet das Gauß-Schema zur Vorwärtselimination bei

x_1	x_2	x_3	
1	3	4	0
0	0	−3	0
0	0	0	0

$\rightarrow x_2 = t, \; x_1 = -3t$

$\rightarrow x_3 = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \; \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Allgemein: $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$, l = Anzahl Unbekannte $- rg(\underline{\underline{A}}) \neq 0$

$\Rightarrow$ Lösungen mit l freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_l$

$$\mathbb{L} = \{ \vec{x}_s + \underbrace{t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_l\vec{x}_l}_{=\vec{x}_h} \mid t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq l \}$$

Es gilt: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_s = \vec{b}$ $\leftarrow$ $\vec{x}_s$ ist eine spezielle Lösung des gegebenen lin. GLS

$\mathbb{L}_h = \{ \vec{x}_h = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_l\vec{x}_l \mid t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq s \}$

ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x}_h$ heißt allgemeine Lösung des homogenen lin. GLS.

4) a) Für zwei verschiedene Lösungen des homogenen lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, also $\vec{x}_{h1} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_l\vec{x}_l$ und $\vec{x}_{h2} = \tilde{t}_1\vec{x}_1 + \tilde{t}_2\vec{x}_2 + \dots + \tilde{t}_l\vec{x}_l$ gilt:

Auch jede Linearkombination $\alpha \cdot \vec{x}_{h1} + \beta \cdot \vec{x}_{h2}$ löst $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{x}_1$ löst das inhom. lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1$

$\vec{x}_2$ löst das inhom. lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2$

} Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ identisch, rechte Seiten verschieden $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$

Jede Linearkombination $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ löst $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Vektoren und Vektorräume

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ $\leftarrow$ Vektor mit n Komponenten

2 Rechenoperationen $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

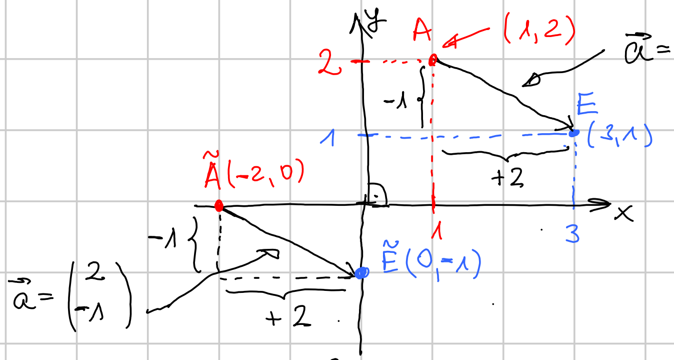
$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_n \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

} Komponentenweise definierte Rechenoperationen

2) Spezialfälle $n=2$, $n=3$

a) $n=2$ → Koordinatensystem mit 2 Achsen (x-Achse/y-Achse) orthogonal zueinander definiert Punkte in der Zahlenebene

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



2 Punkte im $\mathbb{R}^2$, nämlich $A(1,2)$ und $E(3,1)$ definieren den gerichteten Pfeil $\overrightarrow{AE}$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt E.

$$P = \{\overrightarrow{AE} \mid A, E \text{ Punkte im } \mathbb{R}^2\}$$

$$R \subseteq P \times P = \{(\overrightarrow{A_1E_1}, \overrightarrow{A_2E_2}) \mid x_{E_1} - x_{A_1} = x_{E_2} - x_{A_2} \wedge y_{E_1} - y_{A_1} = y_{E_2} - y_{A_2}\}$$

↳ R ist eine Äquivalenzrelation auf $P \times P$.

Im Beispiel:
$$\overrightarrow{A_1E_1} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{E_1} - x_{A_1} = 3-1 = 2 \\ y_{E_1} - y_{A_1} = 1-2 = -1 \end{array}$$

$$\overrightarrow{A_2E_2} = \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{E_2} - x_{A_2} = 0-(-2) = 2 \\ y_{E_2} - y_{A_2} = -1-0 = -1 \end{array}$$

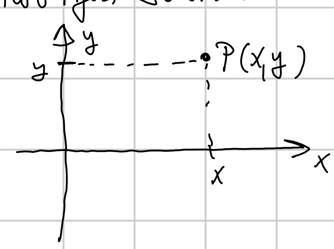
$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}}) \in R$ oder $\overrightarrow{AE}$ ist äquivalent zu $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}}$.

Ein Vektor
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$ ist eine Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation R, d.h. der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ repräsentiert alle Pfeile $\overrightarrow{AE}$ mit $x_E - x_A = a_1$ und $y_E - y_A = a_2$.

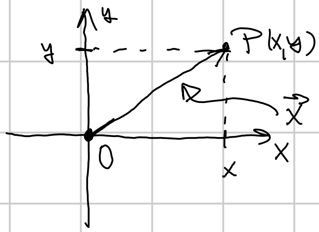
Die äquivalenten Pfeile sind parallel zueinander, gleichgerichtet und gleich lang!

Die Menge $\mathbb{R}^2$ (Zahlenebene) kann man aus zwei gleichwertigen Seiten betrachten, nämlich a) Punktesicht

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



b) Vektorsicht:

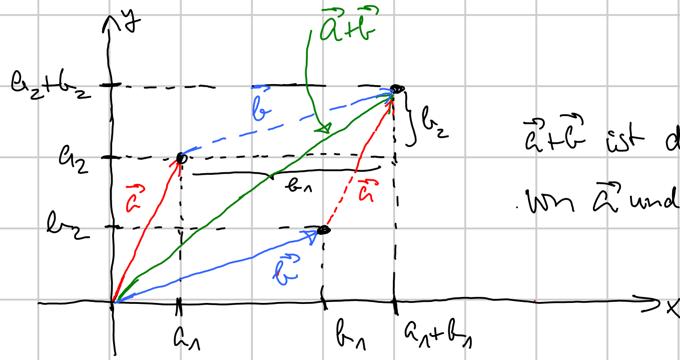


0 Koordinatenursprung $O(0,0)$, Pfeil $\overrightarrow{OP}$ wird repräsentiert durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

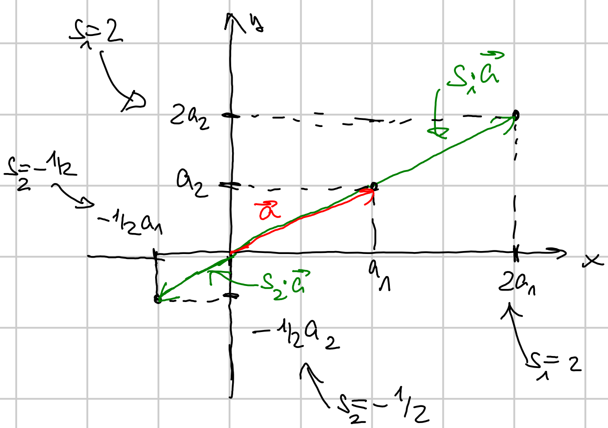
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$$

→ Rechenoperationen $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \end{pmatrix}, \ s \in \mathbb{R}$$



$\vec{a}+\vec{b}$ ist die Hauptdiagonale in dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramms



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix}$

$s > 0$ Richtung bleibt erhalten

$s < 0$ Richtung kehrt um

$|s| > 1$ Streckung des Pfeils

$|s| < 1$ Stauchung des Pfeils

25 Vorlesung 25 (08.12.2020)

25.1 Äquivalenz von Pfeilen, Punkte und Vektorsicht

25.2 Rechenregeln von Vektoren

25.3 Definition: Vektorraum

25.4 Definition: Erzeugendensystem, linear unabhängig, Basis eines Vektorraums

25. Vorlesung 08.12.2020

Notiztitel 08.12.2020

<u>Vektoren</u>: Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachten wir Pfeile $\overrightarrow{AE}$ vom Anfangspunkt A zum Endpunkt E.

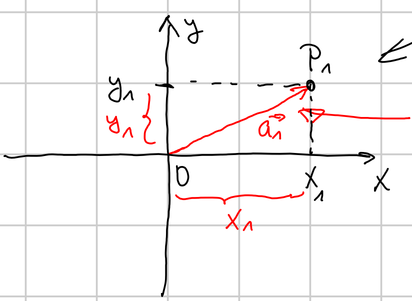
Zwei Pfeile $\overrightarrow{A_1E_1}$ und $\overrightarrow{A_2E_2}$ sind <u>äquivalent</u>, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x_{E_1} - x_{A_1} = x_{E_2} - x_{A_2} \\ y_{E_1} - y_{A_1} = y_{E_2} - y_{A_2}\end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^2 \\ z_{E_1} - z_{A_1} = z_{E_2} - z_{A_2}\end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$

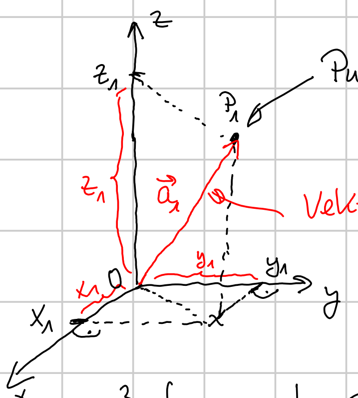
ist die <u>Äquivalenzklasse</u> aller Pfeile $\overrightarrow{AE}$ mit

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x_E - x_A = a_1 \\ y_E - y_A = a_2\end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^2 \\ z_E - z_A = a_3\end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^3$$



} äquivalente Sichten auf $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^2$ kann sowohl als <u>Menge von Punkten</u> als auch als <u>Menge von Vektoren</u> aufgefasst werden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$$



} äquivalente Sichten auf $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3$ kann sowohl als <u>Menge von Punkten</u> als auch als <u>Menge von Vektoren</u> aufgefasst werden

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>$n > 3$</u> $\Rightarrow$ keine Anschauung mehr für Punkte und Pfeile aber abstrahiert gilt das analog, also:

$$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n \} \leftarrow \text{Punktesicht}$$

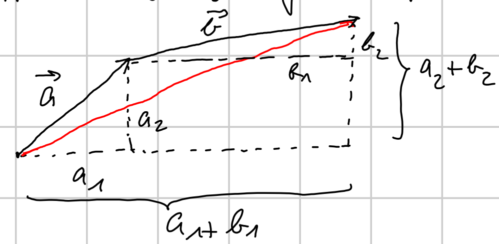
$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le n \right\} \leftarrow \text{Vektorsicht}$$

Rechenoperationen für Vektoren

a) Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

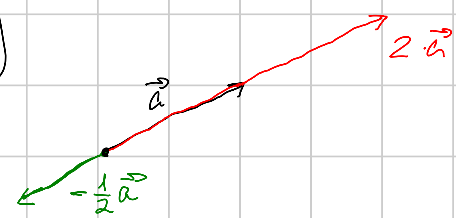
im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ entstanden aus „Hintereinanderhängen von Pfeilen"



b) Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \\ \vdots \\ s a_n \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ entstanden aus „Streckung/Stauchung mit/ohne Richtungsumkehr von Pfeilen"



Da bei Addition und Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^n$ komponentenweise gerechnet wird, übertragen sich Rechenregeln aus $\mathbb{R}$, nämlich

a) in Bezug auf die Addition

- Assoziativgesetz $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Kommutativgesetz $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Existenz eines neutralen Elements $\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \longrightarrow \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0$ für $1 \le i \le n$
- Existenz eines inversen Elements $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \longrightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

$\longrightarrow$ $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche (kommutative) Gruppe

b) in Bezug auf die Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

(*)

$$s \cdot (t \cdot \vec{a}) = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = t \cdot (s \cdot \vec{a}), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \vec{b}), \quad (s + t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \vec{a}$$

speziell: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Allgemein definiert man

Definition:

Gegeben ist eine Menge V mit einer <u>Addition</u> und einer <u>Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$</u>. Wenn $(V,+)$ eine abelsche Gruppe ist und bezüglich der Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ die Regeln $(*)$ gelten, sagt man <u>V ist ein (reeller) Vektorraum</u> oder auch V ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.
Die Elemente von V nennt man <u>Vektoren</u> (dieses Vektorraums)

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ sind reelle Vektorräume!

Bemerkung und Beispiel

1) Gegeben ist das homogene lin. GLS

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ -6x + 3y - 3z &= 0 \\ -x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}^{\underline{A}} \cdot \overbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}^{\vec{x}} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{0}}$$

$$\begin{array}{ccc|c|l} x & y & z & & \\ \hline 2 & -1 & +1 & 0 & \mid \cdot 3 \quad \mid \cdot (+\tfrac{1}{2}) \\ -6 & 3 & -3 & 0 & \leftarrow + \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \leftarrow + \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$rg(\underline{A}) = 1$

$2 = 3 - 1$ freie Parameter werden benötigt

2 freie Parameter

$\boxed{z = t,\ y = s}$, $\quad 2x = y - z = s - t$

$$\boxed{x = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t}$$

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Behauptung:</u> $\mathbb{L}_h$ mit der üblichen Vektoraddition und der <u>Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$</u> ist ein <u>Vektorraum</u>, d.h. für zwei Lösungen $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{L}_h$ gilt $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathbb{L}_h$ und für $\vec{x}_1 \in \mathbb{L}_h$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt auch $r \cdot \vec{x}_1 \in \mathbb{L}_h$ (siehe 24. Vorlesung 4b)!)

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + a_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ hat eine 1 in der i-ten Komponente, alle anderen Komponenten sind 0!

Daraus gewinnt man folgende Begriffe

<u>Definition:</u>

Gegeben ist ein Vektorraum V.

(1) Die Menge $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ heißt <u>Erzeugendensystem</u> von V, falls gilt

Für jeden Vektor $\vec{a} \in V$ gibt es reelle Zahlen $t_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq k$ mit

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{v}_i = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k$$

<u>Beispiel:</u> $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein Erzeugendensystem, denn für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$

(2) Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ heißen <u>linear unabhängig</u>, falls gilt

$$\vec{0} = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k \iff t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_k = 0$$

d.h. die einzige Möglichkeit mit den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ den Nullvektor $\vec{0}$ zu erzeugen, besteht darin alle Koeffizienten $t_1, t_2, \dots$ $\dots t_k$ gleich 0 zu setzen!

Vektoren die <u>nicht linear unabhängig</u> sind, heißen <u>linear abhängig</u>.

<u>Bemerkung + Beispiel:</u>

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3 = t_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t_3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t_1=0, t_2=0, t_3=0$

b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ sind linear unabhängig falls das homogene lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $t_1, t_2, \dots, t_k$ gegeben durch $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \dots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$ nur die Lösung $t_1=0, t_2=0, \dots, t_k=0$ hat!

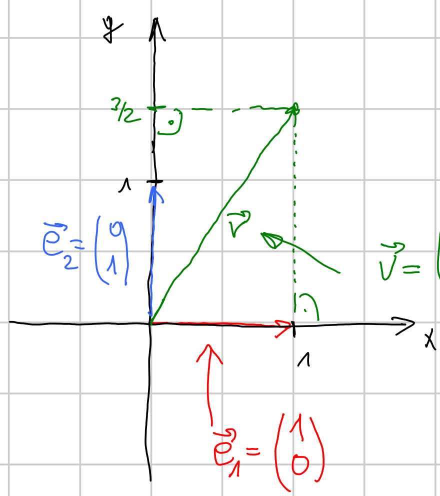
(3) Die Menge $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ heißt Basis des Vektorraums V, falls gilt: B ist ein Erzeugendensystem und die Vektoren in B sind linear unabhängig.

Beispiel: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, man nennt diese Basis die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

$B = \{\vec{e}_i \mid 1 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

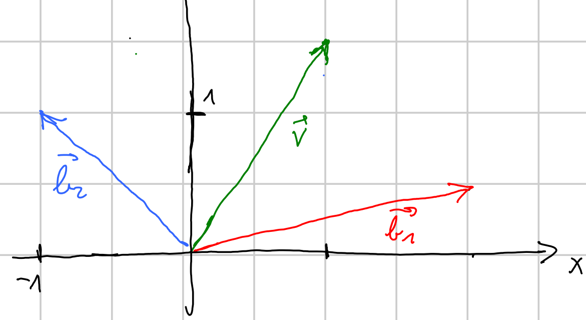
Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^2$



Man sagt: Die Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ „spannt das Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ auf".

$$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\ 3/2\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{e}_1 + \tfrac{3}{2}\cdot\vec{e}_2$$



Behauptung: $B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}2\\ 1/2\end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\ +1\end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \Big\}$

ist ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$

Beweis: Zu zeigen ist

1) $\mathcal{B}$ ist Erzeugendensystem: Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist das lin. GLS. $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$ lösbar

2) Vektoren in $\mathcal{B}$ sind linear unabhängig: Das hom. lineare GLS $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{0}$ hat nur die Lösung $t_1 = 0, t_2 = 0$

$\Leftarrow$ Jedes lin. GLS der Form $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$ mit bel. $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist eindeutig lösbar

$$\underbrace{t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + \underbrace{t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \overset{\underline{B}}{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ dieses Gleichungssystem muss eindeutig lösbar sein!

Diese lin. Gleichungssysteme sind genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt $rg(\underline{\underline{B}}) = 2$ ist; die Matrix $\underline{\underline{B}}$ hat die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ als Spalten(vektoren)!

$\downarrow$ Gauß-Schema

	t_1	t_2		
$\underline{\underline{B}}$	2	-1	v_1	$\downarrow +$
	$1/2$	1	v_2	$\mid \cdot (-4)$
	2	-1	v_1	
	0	-5	$v_1 - 4v_2$	

$2t_1 = v_1 + t_2 = \frac{4}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2 \Longrightarrow t_1 = \frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2$

$t_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2$

2 Nicht-Nullzeilen $\Rightarrow rg(\underline{\underline{B}}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^2$

Probe: $$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \underbrace{\left(\tfrac{2}{5}v_1 + \tfrac{2}{5}v_2\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \left(-\tfrac{1}{5}v_1 + \tfrac{4}{5}v_2\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\text{weiter: morgen } 8^{00} \text{ Uhr!}}$$

26 Vorlesung 26 (09.12.2020)

26.1 Zusammenfassung: Erzeugendensystem, Basis

26.2 Definition: Dimension eines Vektorraums

26.3 Definition: Skalarprodukt, Betrag

26.4 Bemerkundg: Orthonormalbasis

26.5 Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag

26.6 Einführung: Parameterdarstellung einer Geraden

26. Vorlesung 09.12.2020

Notiztitel 09.12.2020

Aus der 25. Vorlesung:

$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \right\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$

$\hookrightarrow$ jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h. es gibt $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\vec{v} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2}$ ✓

operativ / zur Berechnung: t_1, t_2 sind Lösungen dieses linearen GLS!

Wir hatten berechnet:

$$\underbrace{\left(\tfrac{2}{5} v_1 + \tfrac{2}{5} v_2\right)}_{t_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-\tfrac{1}{5} v_1 + \tfrac{4}{5} v_2\right)}_{t_2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{4}{5} v_1 + \tfrac{1}{5} v_1 + \cancel{\tfrac{4}{5} v_2} - \cancel{\tfrac{4}{5} v_2} \\ \cancel{\tfrac{1}{5} v_1} - \cancel{\tfrac{1}{5} v_1} + \tfrac{1}{5} v_2 + \tfrac{4}{5} v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \checkmark$$

Zusammenfassung

V Vektorraum, $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ Basis:

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k$ sind linear unabhängig $\to$

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ ist Erzeugendensystem $\to$

operativ/rechnerisch

$\Rightarrow$ das lin. GLS $t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k = \vec{0}$ für die Unbekannten $t_1, t_2, \dots, t_k$ hat nur die Lösung $t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_k = 0$

$\Rightarrow$ für jeden Vektor $\vec{v} \in V$ hat das lin. GLS $t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k = \vec{v}$ für die Unbekannten $t_1, t_2, \dots, t_k$ eine Lösung

Bemerkung: Wenn $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ eine Basis von V ist, ist die Darstellung $\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k$ eines Vektors $\vec{v} \in V$ eindeutig bestimmt.

Beweisidee: Angenommen $\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_k \vec{b}_k$ und $\vec{v} = s_1 \vec{b}_1 + s_2 \vec{b}_2 + \dots + s_k \vec{b}_k \implies \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (t_1 - s_1)\vec{b}_1 + (t_2 - s_2)\vec{b}_2 + \dots + (t_k - s_k)\vec{b}_k$

B Basis $\implies$ es gibt nur die Lösung $t_1 - s_1 = 0, t_2 - s_2 = 0, \dots, t_k - s_k = 0$

also $t_1 = s_1, t_2 = s_2, \dots, t_k = s_k$.

Definition:

Gegeben ist ein Vektorraum V. Die Dimension von V ist die Anzahl der Basisvektoren von V, man schreibt dafür $\dim(V) =$ Anzahl Basisvektoren

Bemerkung:

$\mathbb{R}^2$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \dim(\mathbb{R}^2) = 2$

$\mathbb{R}^3$, $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \to \dim(\mathbb{R}^3) = 3$

$\mathbb{R}^n$, $B = \{ \vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n \} \to \dim(\mathbb{R}^n) = n$

$$\hookrightarrow \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$ ← nur i-te Komponente gleich 1

Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ / speziell im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Definition:

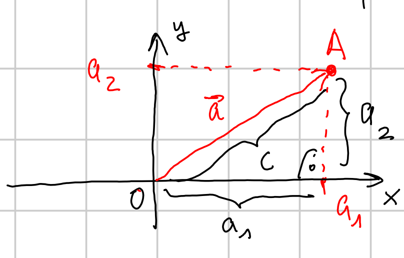
1) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt definiert

als $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$

2) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist der Betrag von $\vec{a}$ definiert als

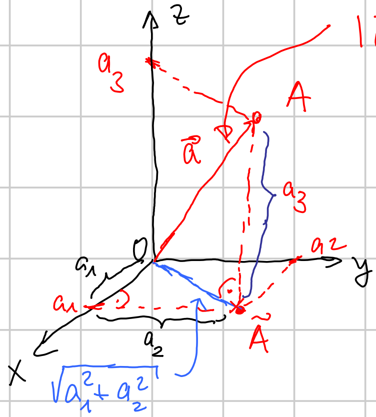
$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$$

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ haben Skalarprodukt und Betrag eine direkte geometrische Bedeutung, nämlich:



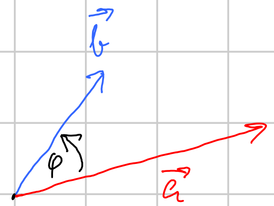
$\vec{a}$ repräsentiert den Pfeil $\overrightarrow{OA}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ist die Länge des Pfeils (man sagt auch einfach Länge des Vektors): Nach Pythagoras gilt $a_1^2 + a_2^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



$|\vec a|^2 = a_3^2 + \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2 \Rightarrow$

$|\vec a| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ ist die Länge des Pfeils $\overrightarrow{OA}$ (die Länge des Vektors $\vec a$)



φ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec a$ und $\vec b$ mit $0 \le \varphi \le \pi$ $(0^\circ \le \varphi \le 180^\circ)$, dann gilt:

$$\langle \vec a, \vec b\rangle = |\vec a| \cdot |\vec b| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec a, \vec b\rangle}{|\vec a|\cdot|\vec b|} \quad \text{für } \vec a, \vec b \in \mathbb{R}^{2(3)} \setminus \{\vec 0\}$$

als <u>Verallgemeinerung</u> sagt man: Auch im $\mathbb{R}^n$ gibt es den Winkel φ zwischen $\vec a$ und $\vec b$ mit

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec a, \vec b\rangle}{|\vec a|\cdot|\vec b|} \quad \text{für } \vec a, \vec b \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec 0\}$$

<u>Beispiele:</u>

1) $\vec a = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec a| = \sqrt{3^2+4^2+(-2)^2} = \sqrt{29}$

$|\vec b| = \sqrt{1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{3}$

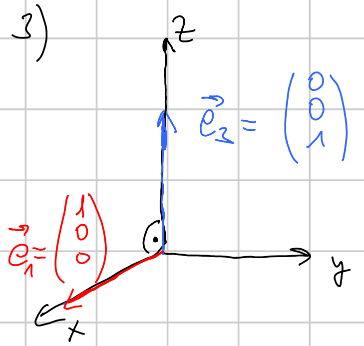
$\langle \vec a, \vec b\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\cdot 1 + 4\cdot(-1) + (-2)\cdot 1 = -3$

2) $\vec v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow |\vec v_1| = \sqrt{1^2+0^2+2^2+3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec v_2| = \sqrt{(-1)^2+3^2+0^2+2^2} = \sqrt{14}$

$\langle \vec v_1, \vec v_2\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1\cdot(-1) + 0\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot 2 = 5$

3)



Winkel φ zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_3$ ist $90°$ ($\frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß); es gilt $\cos(90°) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ also muss

$$\frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \cos(\varphi) = 0 \checkmark \text{ sein!}$$

Wir haben:
$$|\vec{e}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$
$$|\vec{e}_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$
$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \checkmark$$

Bemerkung:

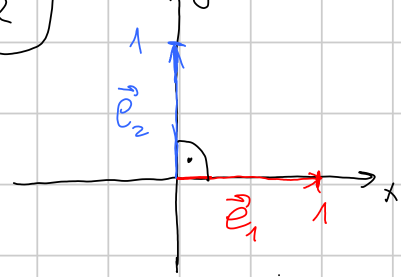
1) Eine Basis $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ heißt Orthonormal Basis, wenn gilt: Alle Basisvektoren haben Betrag 1, also $|\vec{b}_i| = 1$ für $1 \leq i \leq n$, und sie erfüllen $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ (man sagt dann auch $\vec{b}_i$ steht senkrecht/ist orthogonal auf/zu $\vec{b}_j$)

2) Die Standardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ mit

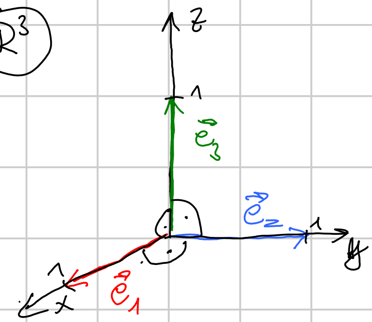
$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{nur } i\text{-te Komponente } 1, \text{ alle anderen Komponenten } 0$$

ist eine Orthonormalbasis! Speziell

$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{R}^3$



$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$

$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0$

Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag

↳ Rechnen mit Vektoren (also Vektoraddition und die Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$)

Es gilt: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

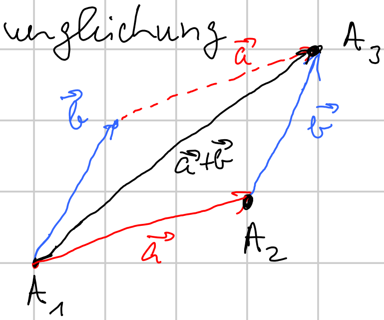
① * $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ Kommutativgesetz für das Skalarprodukt

② * $\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ Distributivgesetz für das Skalarprodukt

③ $\langle s\cdot\vec{a}, \vec{b} \rangle = s\cdot\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, s\cdot\vec{b} \rangle$ für $s \in \mathbb{R}$

④ $|\vec{a}+\vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ Dreiecksungleichung

⑤ $|s\cdot\vec{a}| = |s|\cdot|\vec{a}|$



$|\overline{A_1A_3}| = |\vec{a}+\vec{b}|$ ← Länge der Strecke von A_1 nach A_3

$|\overline{A_1A_3}| \leq |\overline{A_1A_2}| + |\overline{A_2A_3}|$

*) Beweisidee zu diesen Regeln:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \xrightarrow{\text{Kommutativgesetz in } \mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot a_i) = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b}+\vec{c} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\cdot(b_i+c_i) \xrightarrow{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{R}} = \sum_{i=1}^{n} (a_i\cdot b_i + a_i\cdot c_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot b_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot c_i\right)$$

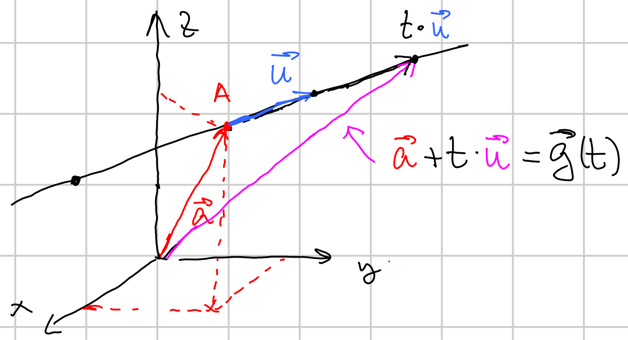
$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

Weitere geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$

1) Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

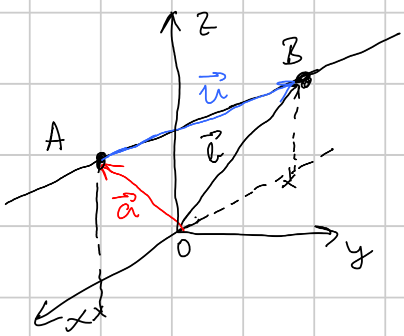
$\vec{a}$ Aufpunktvektor
$\vec{u}$ Richtungsvektor
} $\vec{g}(t) = \vec{a} + t\cdot\vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ heißt Parameterdarstellung der Geraden

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$



<u>Beispiel:</u> Zwei Punkte $A(a_1,a_2,a_3)$ und $B(b_1,b_2,b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ bestimmen genau eine Gerade; gesucht ist <u>eine</u> Parameterdarstellung dieser Geraden

<u>MERKE:</u> Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig!

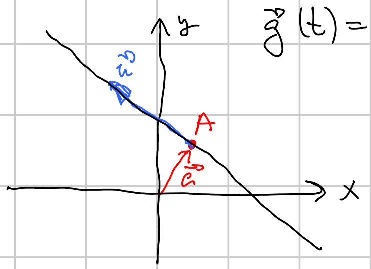


<u>Aufpunkt:</u> A $\Rightarrow$ $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

<u>Richtungsvektor:</u> $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$

$$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

2) Im $\mathbb{R}^2$



$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$ mit $\vec{a},\ \vec{u}\in\mathbb{R}^2$

„gewöhnliche Koordinatendarstellung" einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ ist $y=ax+b$.
Welche Parameterdarstellung gehört zu dieser Geraden? <u>Konkret:</u> $y=-\frac{1}{2}x+3$

$y=t$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}x+y=3$ lin. GLS für die Unbekannten x und y: 2 Unbek., 1 Gleichung: Lösung mit $2-1=1$ freiem Parameter

$\frac{1}{2}x=3-t$

$\boxed{x=6-2t}$

<u>Lösungsmenge:</u>

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}6-2t\\t\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a}}+t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}$$

$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$ $\leftarrow$

27 Vorlesung 27 (14.12.2020)

27.1 Parameterdarstellung: Gerade & Ebene

27.2 Orthogonalität von Vektoren/Ebenen

27.3 Definition: Vektorprodukt

27.4 Definition: Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor

Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Gerade: $\boxed{\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}}$ ← Parameterdarstellung der Gerade

$\vec{u}$: Richtungsvektor

$\vec{a}$: Aufpunkt(vektor)

Beispiel:

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Welcher der Punkte $P_1(2,5,6)$ und $P_2(4,-1,6)$ liegt auf dieser Geraden?

P_i $(i=1,2)$ liegt auf der Geraden, falls es $t_i \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \vec{g}(t_i)$ für $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

a) Gesucht $t \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $(*)$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ also insbesondere $-t = 1 \Rightarrow t = -1$

dann ist aber $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ↯

$(*)$ ist für kein $t \in \mathbb{R}$ erfüllbar

insgesamt P_1 liegt nicht auf der Geraden

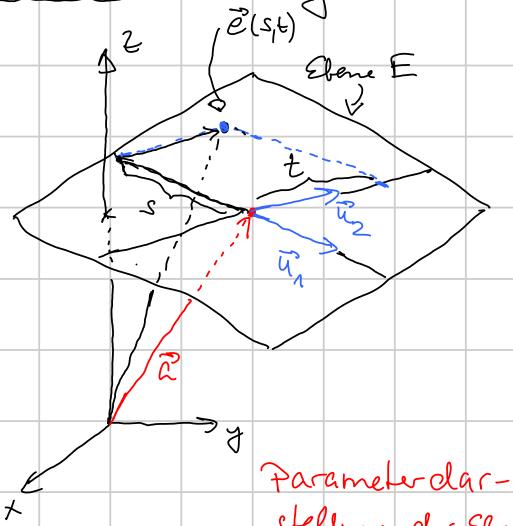
b) Gesucht $t \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ $(**)$

$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ also insbesondere $-t = 3 \Rightarrow t = -3$

und $(-3) \cdot 1 = -3$, $(-3) \cdot (-1) = 3 \Rightarrow (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

für $t = -3$ ist $(**)$ erfüllt, d.h. P_2 liegt auf der Geraden

Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Aufpunktvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$\underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}_{\uparrow} \in \mathbb{R}^3$ Richtungsvektoren

linear unabhängig, d.h.

es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$,

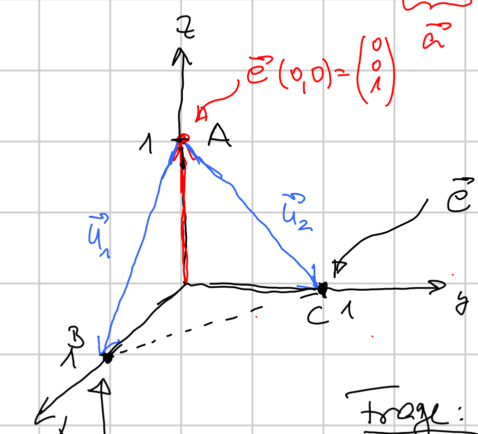
$\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind keine Vielfachen voneinander

dann beschreibt

Parameterdarstellung der Ebene $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2 \; ; \; s,t \in \mathbb{R}}$

die Ebene E.

Beispiel: $\vec{e}(s,t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}$ } Ebene E enthält das Dreieck $\Delta(A,B,C)$



$\vec{e}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{e}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{e}(1,0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Frage: Wann liegt der Punkt $P(b_1, b_2, b_3)$ auf der Ebene $(P \in E)$?

$P \in E \Leftrightarrow$ es gibt $s,t \in \mathbb{R}$ mit

Korrektur:

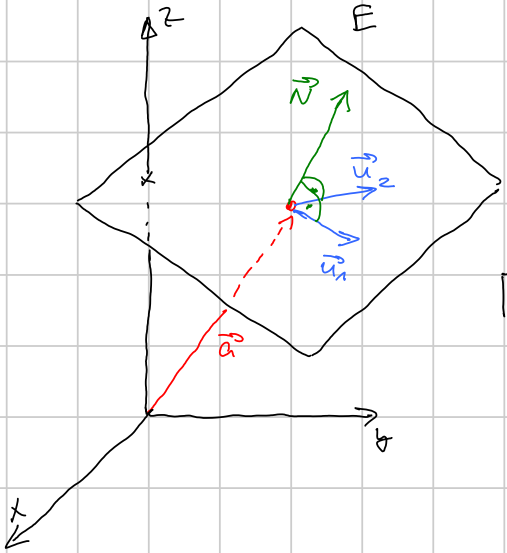
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ das lin. GLS.

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein!



$\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$

$\vec{N}$ steht senkrecht (ist orthogonal) auf der Ebene E $\Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{u}_1$ und $\vec{N} \perp \vec{u}_2$

$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underbrace{\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})}_{\varphi} = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$

$\varphi \leftarrow$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

mit dem Skalarprodukt (siehe 26. Vorlesung)

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \varphi = 90^\circ \, (\pi/2) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0$$

also $$0 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

MERKE: Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \, (\mathbb{R}^2)$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Hier: $\vec{N} \perp \vec{u}_1$ falls gilt: $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$,

$\vec{N} \perp \vec{u}_2$ falls gilt: $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

gilt nur im $\mathbb{R}^3$

Definition: (Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist das

Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ definiert durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bemerkung: Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$ liefert mit 2 Vektoren als Input eine reelle Zahl als Output!

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert mit 2 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ als Input einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Output!

Beispiele:

a)
$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-4)-3\cdot 3\\-(1\cdot(-4)-(-1)\cdot 3)\\1\cdot 3-(-1)\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 3-2\cdot(-4)\\-((-1)\cdot 3-1\cdot(-4))\\(-1)\cdot 2-1\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\-1\\-5\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$$

b) Es gilt allgemein: Das Vektorprodukt ist nicht Kommutativ sondern antikommutativ, d.h. genauer

$$\boxed{\vec{b}\times\vec{a}=-(\vec{a}\times\vec{b})}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-b_1a_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{b}\times\vec{a}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_2a_3-a_2b_3\\a_1b_3-b_1a_3\\b_1a_2-a_1b_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-(a_2b_3-b_2a_3)\\-(a_3b_1-a_1b_3)\\-(a_1b_2-b_1a_2)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-b_1a_2\end{pmatrix}$$

$$=-(\vec{a}\times\vec{b})$$

c) Für $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$ hatten wir $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}$,

Es ist $\langle\vec{a},\vec{a}\times\vec{b}\rangle=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}=1\cdot(-17)+2\cdot 1+3\cdot 5=-17+17=0$

$\Rightarrow\ \vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

Es ist auch $\langle\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}\rangle=\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}=(-1)\cdot(-17)+3\cdot 1+(-4)\cdot 5=20-20=0$

$\Rightarrow\ \vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

Es gilt allgemein für $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$: $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ und $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$.

denn:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \quad \text{also}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

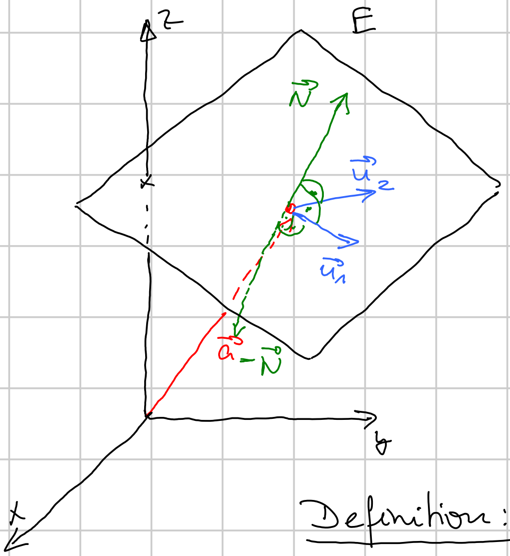
$$= a_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$= \cancel{a_1 a_2 b_3} - \cancel{a_1 a_3 b_2} + \cancel{a_2 a_3 b_1} - \cancel{a_2 a_1 b_3} + \cancel{a_3 a_1 b_2} - \cancel{a_3 a_2 b_1}$$

$$= 0$$

analog erhält man $\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$

Vektorprodukt und Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Ein Kandidat für einen Vektor $\vec{N}$, der senkrecht auf der Ebene E steht ist

$\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$ ← Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren

$-\vec{N} = \vec{u}_2 \times \vec{u}_1$ ist ebenfalls ein Kandidat

Definition:

1) Ein Vektor $\vec{N}$, der senkrecht auf der Ebene E steht, heißt Normalenvektor der Ebene E.

2) Ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E mit $|\vec{n}| = 1$ heißt Normaleneinheitsvektor der Ebene E

3) Wenn $\vec{N}$ ein Normalenvektor der Ebene E ist, dann ist $\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ der zugehörige Normaleneinheitsvektor der Ebene E

Beispiel: Für $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$

also die Ebene $E = \left\{ \vec{e}(s,t) \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$ gilt:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ist ein Normalenvektor

der Ebene E, der zugehörige Normaleneinheitsvektor ist

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

28 Vorlesung 28 (15.12.2020)

28.1 Beispiele zur Parameterdarstellung von Ebenen: Punkt auf Ebene, Schnittpunkt Ebene/Gerade

28.2 Eigenschaften/Rechenregeln des Vektorprodukt

28.3 Koordinatendarstellung einer Ebene (Wandlung zu und von Parameterdarstellung)

28.4 Beispiel Koordinatendarstellung einer Ebene -> Schnittpunkt mit Gerade

28. Vorlesung 15.12.2020

Notiztitel 15.12.2020

Hinweis: a) 16.12. (12:00) – 17.12. (18:00) 2. edX-Test

60 Minuten ab Teststart

b) 18.12. „Weihnachtsprobeklausur" } so sähe die Klausur aus, wenn am 24.12. Klausur wäre

4 Aufgaben für 120 Minuten (2 Std.)

Aus der 27. Vorlesung:

$P \in E \Leftrightarrow$ es gibt $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ das lin. GLS. für die Unbekannten $s, t \in \mathbb{R}$

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein! $\rightarrow$ Was heißt das konkret

$\rightarrow$ Gauß-Schema

	s	t	
$\underline{\underline{A}}$	1	0	b_1
	0	1	b_2
	-1	-1	$b_3 - 1$
	1	0	b_1
	0	1	b_2
	0	-1	$b_3 - 1 + b_1$
	1	0	b_1
	0	1	b_2
	0	0	$b_3 - 1 + b_1 + b_2$

(rechte Spalte der ersten drei Zeilen: $\vec{b}$)

dieses lin. GLS ist nur lösbar, wenn $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$ ist (dann gilt $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$)

Falls $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$ ist folgt: $t = b_2$, $s = b_1$

$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \Rightarrow 1 - b_1 - b_2 = b_3$

Probe:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} \overset{\ddagger}{=} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P(b_1, b_2, b_3) \text{ liegt in } E!$$

Beispiel:

Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Für welches/welche $\alpha \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P(1,2,\alpha)$ in der Ebene E?

→ das lin. GLS $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}$ für die Unbekannten $s,t \in \mathbb{R}$

muss lösbar sein!

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & \alpha-3 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & \alpha+1 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4\alpha-1 \end{array}$$

$1 \cdot 2$, $1 \cdot (-4)$, $+$

$1 \cdot 5$, $1 \cdot 4$, $+$

$t = -1 - 2s = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$s = -\frac{1}{4}$

$\alpha = \frac{1}{4}$

nur lösbar, falls $4\alpha - 1 = 0$ ist, d.h. $\alpha = \frac{1}{4}$

→ Der Punkt $P(1, 2, \frac{1}{4})$ liegt in der Ebene E!

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

Fortsetzung des Beispiels:

1) Gesucht ist ein Normaleneinheitsvektor der gegebenen Ebene E

$$\boxed{\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}} \leftarrow \text{Ebene E}$$

Ein Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ mit $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

$$\underbrace{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}_{=\vec{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 4 \\ -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 4) \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\vec{N}| = \sqrt{(-6)^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{77}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{77}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) Zusätzlich gegeben ist die Gerade g mit Parameterdarstellung

$$\boxed{\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \leftarrow \text{Gerade } g$$

Berechnen Sie (falls vorhanden) den Schnittpunkt S zwischen der Ebene E und der Gerade g!

Ansatz für Schnittpunkt: $\underbrace{\vec{e}(s,t) = \vec{g}(u)}$ s, t, u lösen dieses lineare GLS!

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

Lineares GLS für die Unbekannten s, t, u

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

t	s	u		
1	2	−1	−3	$\cdot 2$ $\quad \cdot(-4)$
−2	0	−1	−1	
4	3	−1	−4	+
1	2	−1	−3	
0	4	−3	−7	$\cdot 5$
0	−5	3	8	$\cdot 4$ +
1	2	−1	−3	
0	4	−3	−7	
0	0	−3	−3	

$t = -3 - 2s + u = -3 + 2 + 1 \Rightarrow t = 0$

$4s = -7 + 3u = -4 \Rightarrow s = -1$

$u = 1 \Rightarrow \vec{g}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓

S(0,1,0) ist der Schnittpunkt!

Für die Probe: s, t bestimmen und in Parameterdarstellung der Ebene einsetzen! $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{e}(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Eigenschaften / Rechenregeln für das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ Anti-Kommutativgesetz

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ Distributivgesetz

3) $(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (s \cdot \vec{b})$ für $s \in \mathbb{R}$

Beweis: Einfach nach Definition des Vektorprodukts nachrechnen!

Koordinatenform der Ebenengleichung

Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$$

d.h. für jeden Punkt $P(x,y,z)$ in E gibt es $s,t \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2 \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene; für $\vec{N}$ gilt

$\vec{N} \perp \vec{u}_1$; d.h. $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ und $\vec{N} \perp \vec{u}_2$, d.h. $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

Wir rechnen jetzt

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle + s \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle}_{=0} + t \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle}_{=0} = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3$$

insgesamt: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \Rightarrow$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$$\hookrightarrow \quad N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = \underbrace{N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3}_{= d}$$

$\Rightarrow$ Koordinatendarstellung der Ebene $\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$ ist

$$\boxed{N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = d \quad \text{mit } d = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle}$$

für einen Normalenvektor $\vec{N}$ der Ebene E

Fortsetzung des Beispiels:

Parameterdarstellung der Ebene E

$$\boxed{\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \text{mit } \vec{N} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6x + 5y + 4z$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 + 5 + 12 = 5$$

$$\boxed{-6x + 5y + 4z = 5}$$

Koordinatendarst. der Ebene E

Frage: Gibt es einen Schnittpunkt dieser Ebene E mit der Geraden g gegeben durch

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Für jeden Punkt $P(x,y,z)$ der Geraden g gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für ein $t \in \mathbb{R}$, also: $x = 2 - t$, $y = -1 + 2t$, $z = 3 + 2t$.

Wenn $P(x,y,z)$ auch zur Ebene E gehört (also Schnittpunkt ist), muss gelten

$$5 = -6x + 5y + 4z = -6\underbrace{(2-t)}_{x} + 5\underbrace{(-1+2t)}_{y} + 4 \cdot \underbrace{(3+2t)}_{z}$$

$$= \cancel{-12} + \cancel{6t} \cancel{-5} + \cancel{10t} + \cancel{12} + \cancel{8t} = -5 + 24t$$

also $5 = -5 + 24t \Rightarrow 24t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt: $\vec{g}\left(\frac{5}{12}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{12} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/12 \\ -2/12 \\ 46/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/12 \\ -1/6 \\ 23/6 \end{pmatrix}$

der Schnittpunkt S ist $S\left(\frac{19}{12} \mid -\frac{1}{6} \mid \frac{23}{6}\right)$.

Weiteres Beispiel: Gegeben ist eine Ebene E in Koordinatendarstellung $2x - 3y + 5z = 4$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung dieser Ebene!

$2x - 3y + 5z = 4$ ← lin. GLS mit 1 Gleichung für 3 Unbekannte also $3-1=2$ freie Parameter!

$2x - 3s + 5t = 4$ ← $z = t$, $y = s$

$2x = 4 + 3s - 5t$

$x = 2 + \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t$

$\Rightarrow$ die allg. Lösung dieses lin. GLS liefert die gewünschte Parameterdarstellung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3/2\,s - 5/2\,t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} = \vec{e}(s,t)$$

29 Vorlesung 29 (16.12.2020)

29.1 Geometrie im rechtwinkligen Dreieck

29.2 Skalarprodukt in der Geometrie

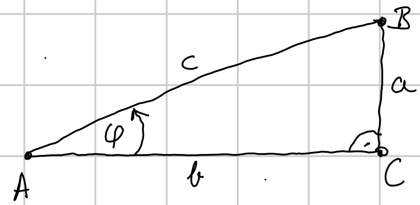
29.3 Vektorprodukt in der Geometrie (Drei-Finger-Regel)

29. Vorlesung 16.12.2020

Notiztitel 16.12.2020

Geometrie und ein zweiter Blick auf Skalarprodukt und Vektorprodukt

Geometrie im rechtwinkligen Dreieck



a, b Katheten des Dreiecks

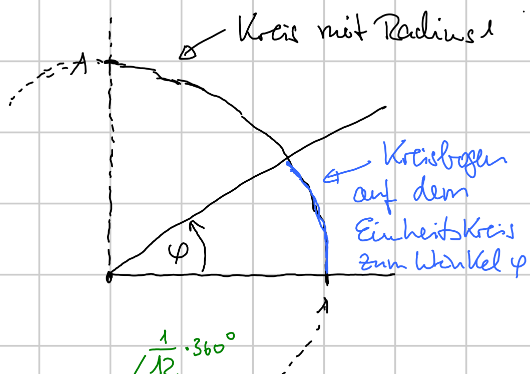
c Hypothenuse

a Gegenkathete zu φ

b Ankathete zu φ

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}, \quad \cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

Messen des Winkels φ



Winkelmessung in Grad

Vollkreis (Kompletter Kreis) $\hat{=}$ $360^\circ \notin \mathbb{R}$

Winkel φ erzeugt Kreisausschnitt also einen Bruchteil des Vollkreises z.B. $\frac{1}{n}$-tel, dann hat φ die Maßzahl $\frac{360^\circ}{n} \notin \mathbb{R}$

$\frac{1}{12} \cdot 360^\circ$

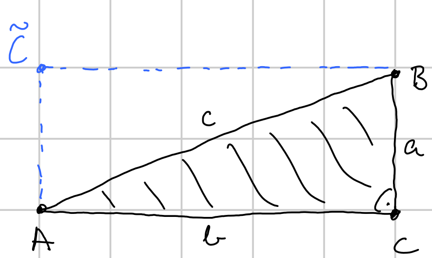
φ°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

$\frac{1}{12} \cdot 2\pi$

Winkelmessung im Bogenmaß

Kreis mit Radius 1 hat Umfang $2\pi \in \mathbb{R}$

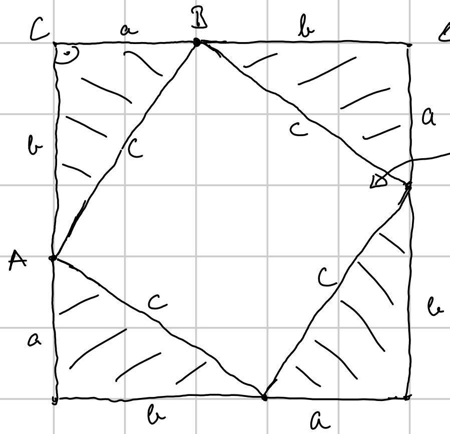
Winkel φ erzeugt Kreisbogen auf dem Umfang, die Maßzahl für den Winkel φ ist die Länge dieses Kreisbogens als Anteil des Gesamtumfangs 2π $\Rightarrow$ $\varphi = \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{R}$ bei $\frac{1}{n}$-tel Anteil



Flächeninhalt des Dreiecks

$$Fl(\Delta(ABC)) = \frac{1}{2} Fl(\square(A, \tilde{C}, B, C)) = \frac{1}{2} a \cdot b$$

$$\Rightarrow Fl(\Delta(ABC)) = \frac{a \cdot b}{2}$$



Fl (großes Quadrat) $= (a+b)^2$

Fl (kleines Quadrat) $= c^2$

Fl (großes Quadrat) =

Fl (kleines Quadrat) + 4 · Fl (Dreieck)

insgesamt

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab} \qquad | -2ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypothenuse c und den Katheten a und b gilt der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ (mit $\frac{a}{c} = \sin(\varphi)$, $\frac{b}{c} = \cos(\varphi)$ im rechtw. Dreieck)

$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ ← trigonometrischer Pythagoras

Typische Werte für $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ liefert eine Wertetabelle

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n/a	0	n/a	0
$\cot\alpha$	n/a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	n/a	0	n/a

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Skalarprodukt

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

Betrag: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n : \quad |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

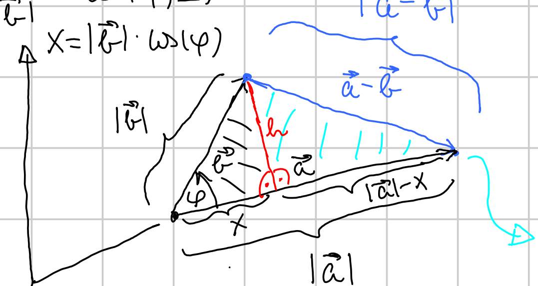
$\rightarrow$ im $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ Konkrete geometrische Bedeutung

$|\vec{a}| \leftarrow$ Vektorlänge $\hat{=}$ Länge des zug. Pfeils

$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)} \leftarrow \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

$\frac{x}{|\vec{b}|} = \cos(\varphi) \Rightarrow$

$x = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$



$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle \Rightarrow$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle \Rightarrow$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \Rightarrow$

$\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2}_{(*)}$

$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = h^2 + (|\vec{a}|-x)^2$

$\rightarrow \frac{h}{|\vec{b}|} = \sin(\varphi) \Rightarrow h^2 = |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$

$\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}|-x)^2}_{①}$

$(|\vec{a}|-x)^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot x + x^2 \qquad x = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$\underbrace{= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi)}_{②}$

damit $|\vec{a}-\vec{b}|^2 \overset{①}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}|-x)^2$

$\overset{②}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cos^2(\varphi)$

$= |\vec{b}|^2 \cdot (\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1 \text{ trig. Pythagoras}}) + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

also $\boxed{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$ (**)

insgesamt

$|\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2 \overset{(*)}{=} |\vec{a}-\vec{b}|^2 \overset{(**)}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$

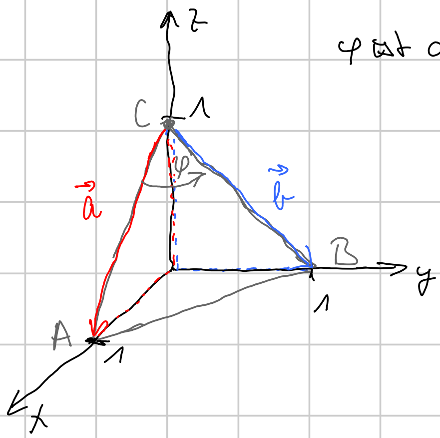
$$\cancel{|\vec a|^2} + \cancel{|\vec b|^2} - 2\langle \vec a, \vec b\rangle = \cancel{|\vec a|^2} + \cancel{|\vec b|^2} - 2\cdot|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos(\varphi) \qquad \Big|\, -|\vec a|^2 - |\vec b|^2$$

$$-2\langle \vec a, \vec b\rangle = -2\,|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos(\varphi) \qquad \Big|\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\langle \vec a, \vec b\rangle = |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec a, \vec b\rangle}{|\vec a|\cdot|\vec b|} \quad \text{für } \vec a \neq \vec 0,\ \vec b \neq \vec 0$$

Beispiel: Berechnen Sie den Winkel φ am Punkt C des Dreiecks!



φ ist der Winkel zwischen

$$\vec a = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec b = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec a| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

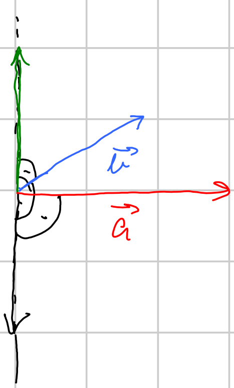
$$|\vec b| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\langle \vec a, \vec b\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec a, \vec b\rangle}{|\vec a|\cdot|\vec b|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{Tabelle}]{} \varphi = \frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$$

Vektorprodukt (nur im $\mathbb{R}^3$ definiert)

$\vec a, \vec b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec 0\}$: Es gilt $\vec a \times \vec b \perp \vec a$ und $\vec a \times \vec b \perp \vec b$

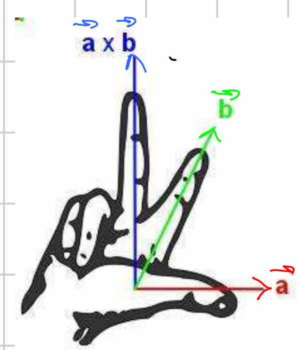


$\vec a \times \vec b$ ist so gerichtet, dass $\vec a, \vec b, \vec a \times \vec b$ ein „Rechtssystem" im Sinne der „Drei-Finger-Regel der rechten Hand":

Daumen $\rightarrow \vec a$

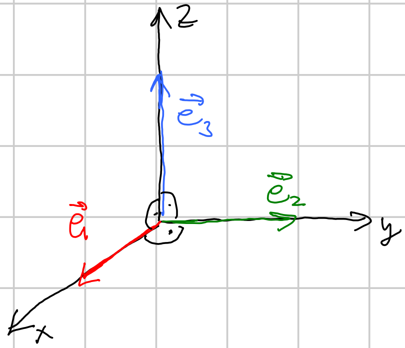
Zeigefinger $\rightarrow \vec b$

Mittelfinger $\rightarrow \vec a \times \vec b$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \quad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_2 a_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:



$$\underbrace{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Standardbasis des } \mathbb{R}^3}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$|\vec{e}_i| = 1$ für $i = 1, 2, 3$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$$

Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ ist eine Orthonormalbasis, d.h. die Basisvektoren haben alle Betrag 1, sie stehen paarweise senkrecht (orthogonal) aufeinander

Außerdem bilden $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ ein Rechtssystem!

Eine längere technische Rechnung zeigt: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$, damit folgt (wegen $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$)

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1$

$\sin^2(\varphi) = 1 - \cos^2(\varphi)$

$$\Rightarrow (0 \le \varphi \le \pi) \quad \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)}$$

30 Vorlesung 30 (21.12.2020)

30.1 Deutung von Skalarprodukt und Vektorprodukt in der Geometrie

30.2 Beispielaufgaben Ebenen und Geraden im Raum (Schnittgeraden, Senkrechte durch Punkt)

30. Vorlesung 21.12.2020

Notiztitel 21.12.2020

Skalarprodukt / Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

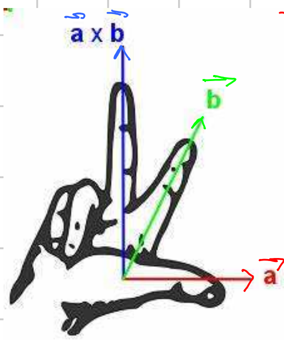
$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$: $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

geometrische Deutung $\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$ (*)

$0 \leq \varphi \leq \pi \; (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$, $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$,

geometrische Deutung : $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$



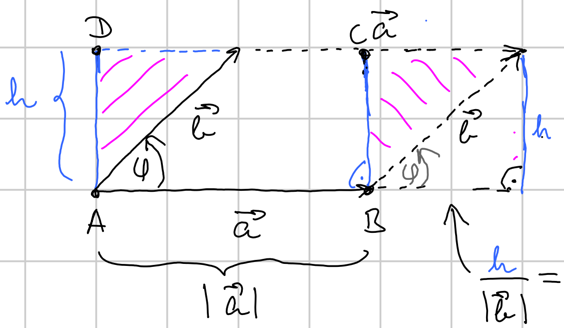
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem: 3-Finger-Regel der rechten Hand

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi)$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}| \left(1 - \cos^2(\varphi)\right)$ ← $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$

$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$

$\Rightarrow \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)}$



← Parallelogramm erzeugt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: P

Fläche (P) = Fläche (R) = $|\vec{a}| \cdot h$

$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin(\varphi) \Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

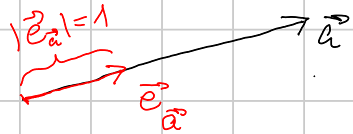
insgesamt: Fläche (P) $= |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

MERKE: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramms; die Richtung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ bestimmt die Drei-Finger-Regel der rechten Hand!

Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ ($\in \mathbb{R}^3$, geht völlig analog für $\in \mathbb{R}^n$), $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$, also $|\vec{e}_{\vec{a}}| = 1$

und $\vec{e}_{\vec{a}}$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$:



Beispiele:

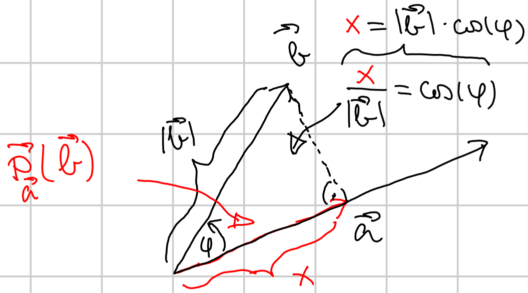
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{5} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \Rightarrow$$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}} \cdot \vec{a}$$



Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b})$

$$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = x \cdot \vec{e}_{\vec{a}} = x \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$|\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b})| \hat{=}$ Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Nach (*) gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \cancel{|\vec{b}|} \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot \cancel{|\vec{b}|}} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}}$$

Beispiele:

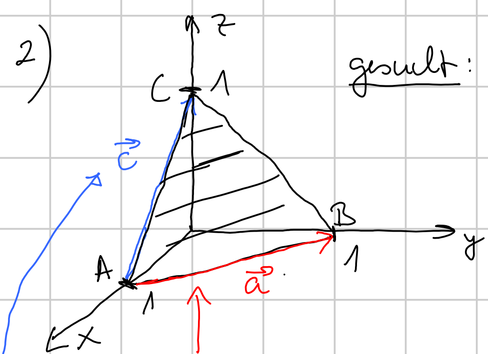
1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \dfrac{2}{14} \vec{a} = \dfrac{1}{7} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$

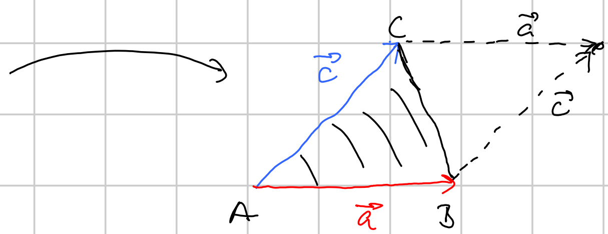
$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 3 = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \\[2ex] |\vec{b}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3 \end{array}\right\} \quad \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

2) gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(A, B, C)$





$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Delta(A,B,C)$ entspricht der Hälfte des von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ erzeugten Parallelogramms

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad Fl(\Delta) = \dfrac{1}{2} \cdot F(P) = \dfrac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{c}| \\[2ex] \vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\[2ex] |\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{3} \end{array}\right\} \quad Fl(\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Beispielaufgaben mit Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

(1) Gegeben sind die Ebenen E_1: $2x + 3y - z = 4$ und

E_2: $\vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie (falls $\neq \emptyset$) die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$.

a) $E_1 \cap E_2$ ist $\emptyset$, falls E_1 und E_2 parallel zueinander aber nicht identisch sind;

b) $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$, falls $E_1 = E_2$ ist, d.h. die Ebenen sind identisch;

c) $E_1 \cap E_2$ ist die Schnittgerade der Ebenen

Genau eine der drei Alternativen a), b), c) tritt ein!

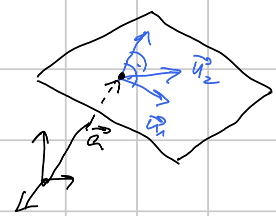
① Für den Anfpunkt $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ von E_2 gilt: $-2 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) - 1 \neq 4 \Rightarrow$

Anfpunkt von E_2 liegt nicht in E_1: $2x + 3y - z = 4$ (Fall b) scheidet aus).

② Normalenvektor zu E_1: $\vec{N}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ Richtungsvektoren

Normalenvektor zu E_2: $\vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}}_{\vec{N}_2 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2}$



$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - (-3)\cdot 0\\ (-1)\cdot 0 - 2\cdot 2\\ 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix} = \vec{N}_2$$

$\vec{N}_2 \neq \lambda\cdot\vec{N}_1 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{N}_1$ und $\vec{N}_2$ sind unterschiedlich gerichtet, die Ebenen E_1 und E_2 sind auch nicht parallel (Fall a) scheidet aus)

③ Schnittgerade ausrechnen

E_1: $2x + 3y - z = 4$ $\qquad E_2$: $\vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\+2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1+2s-t\\-1+s-3t\\1+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2$$

$4 = 2\cdot(1+2s-t) + 3\cdot(-1+s-3t) - (1+2t)$

$4 = -2 + 7s - 13t$

$6 = 7s - 13t \Rightarrow s = \frac{6}{7} + \frac{13}{7}t$

Schnittgerade $\quad \vec{g}(t) = \vec{e}_2\left(\frac{6}{7} + \frac{13}{7}t, t\right) = \begin{pmatrix}1 + 12/7 + 26/7\,t - t\\ -1 + 6/7 + 13/7\,t - 3t\\ 1 + 2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19/7 + 19/7\,t\\ -1/7 - 8/7\,t\\ 1+2t\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}19/7\\-1/7\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}19/7\\-8/7\\2\end{pmatrix}$$

② Gesucht ist die Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, die senkrecht ($\perp$) zur Ebene E mit $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ verläuft.

$$\vec{g}(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \Bigg[\underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{steht senkrecht auf der Ebene}} \Bigg]}_{\vec{g}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Punkt liegt auf der Geraden}}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 - 0\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1) - (-1)\cdot 1 \\ (-1)\cdot 0 - 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

insgesamt $\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) Gegeben ist $E_1: -x+2y-3z=1$ und $E_2: 2x-5y+z=4$.
Berechnen Sie $E_1 \cap E_2$

$rg(\underline{A}) = rg(\underline{A}|\vec{b}) = 2$
System lösbar
mit $1 = 3-2$ freien Parametern

x	y	z		
−1	2	−3	1	$\cdot 2$
2	−5	1	4	+
−1	2	−3	1	
0	−1	−5	6	

$x = 2y - 3z - 1 = 2\cdot(-6-5t) - 3t - 1 \Rightarrow x = -13-13t$

$z = t$, $y = -6-5t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -13-13t \\ -6-5t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ Parameterdarstellung der Schnittgerade

31 Vorlesung 31 (22.12.2020)

31.1 Definition: Matrix

31.2 Rechenoperationen für Matrizen

Matrizen

Definition: Gegeben sind $n \cdot k$ reelle Zahlen a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$.
Dann ist das (rechteckige) Zahlenschema mit n Zeilen und k Spalten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$$

die zugehörige $(n \times k)$-Matrix. Die Zahlen $a_{ij} \in \mathbb{R}$ heißen Elemente/Koeffizienten der Matrix.
$M(n \times k) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}}$ ist eine (reelle) $(n \times k)$-Matrix$\}$ bezeichnet die Menge aller $(n \times k)$-Matrizen. Bei a_{ij} ist der 1. Index i der „Zeilenindex", der 2. Index j ist der „Spaltenindex".

Bemerkung: Die Menge $M(n \times k)$ wird manchmal auch als $\mathbb{R}^{n \times k}$ oder $\mathbb{R}^{(n,k)}$ bezeichnet.

Rechenoperationen für Matrizen

① Auf der Menge $M(n \times k)$ ist eine Addition und eine Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ definiert, nämlich

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \; ; \; \underline{\underline{B}} = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$$

$$s \in \mathbb{R}, \quad s \cdot \underline{\underline{A}} = (s a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$$

Kurz: Addition und Multiplikation mit s ist komponentenweise definiert.
In jeder Komponente wird mit reellen Zahlen gerechnet, daher „erbt" man

die Rechenregeln, genauer:

a) $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$ Kommutativgesetz

b) $\underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}}$ Assoziativgesetz

c) Die „Nullmatrix" $\underline{\underline{O}}$ mit $a_{ij} = 0$ für $1 \le i \le n, 1 \le j \le k$ ist das neutrale Element der Addition: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{O}} = \underline{\underline{A}}$

d) Zu $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k)$ ist $-\underline{\underline{A}} = (-a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}$ die inverse Matrix

bezgl. der Addition: $\underline{\underline{A}} + (-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{O}}$

Bemerkung: $(M(n \times k), +)$ ist eine Gruppe!

e) $s \cdot (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = (s \cdot \underline{\underline{A}}) + (s \cdot \underline{\underline{B}})$, $s \in \mathbb{R}$ „Distributivgesetz"

f) $s \cdot (t \cdot \underline{\underline{A}}) = (s \cdot t) \cdot \underline{\underline{A}} = t \cdot (s \cdot \underline{\underline{A}}) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}$

g) $1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$, $0 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{O}}$, $-\underline{\underline{A}} = (-1) \cdot \underline{\underline{A}}$

Bemerkung: $M(n \times k)$ mit der Addition und der Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum.

Beispiele:

① $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2)$

$$5 \cdot \underline{\underline{A}} - 3 \cdot \underline{\underline{B}} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 0 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6 & -5-3 \\ 5-3 & 0-6 \\ 20-3 & 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & -6 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}$$

② $M(2 \times 2) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}} \text{ ist } (2 \times 2)\text{-Matrix} \}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}}$ ist Linearkombination der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

es gilt außerdem

$$\underline{\underline{0}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix} \iff s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge s_3 = 0 = s_4 = 0,$$

d.h. $\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{11}}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{12}}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{21}}, \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{E}}_{22}}$ sind linear unabhängig.

Insgesamt: Der Vektorraum der (2×2)-Matrizen $M(2\times 2)$ hat die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ als Basis (die sog. Standardbasis von $M(2\times 2)$). $M(2\times 2)$ ist ein 4-dimensionaler Vektorraum.

Allgemein: $M(n\times k) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}}$ ist $(n\times k)$-Matrix$\}$ ist ein Vektorraum der Dimension $n\cdot k$ (mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$).

Die Matrizen $\underline{\underline{E}}_{ij}$ mit 1 als Wert für den Koeffizienten in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und 0 sonst bilden die Standardbasis dieses Vektorraums.

Definition:

Gegeben ist die $(n\times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}} \in M(n\times k)$. Dann ist definiert

a) die zugehörige transponierte Matrix $\underline{\underline{A}}^t$ ist die $(k\times n)$-Matrix, die man aus $\underline{\underline{A}}$ durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le k}} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = (a_{ji})_{\substack{1\le j\le k \\ 1\le i\le n}}$$

b) Die Hauptdiagonale der Matrix $\underline{\underline{A}}$ besteht aus allen Matrixelemente mit gleichem Zeilen- und Spaltenindex.

c) Die Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt quadratisch, wenn $n = k$ ist, d.h. Anzahl Zeilen ist gleich Anzahl Spalten; $M(n \times n) = \{ \underline{A} \mid \underline{A}$ ist quadratische Matrix mit n Zeilen und n Spalten $\}$

Beispiele:

(1)

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4)$$

Hauptdiagonale: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 5$

$$\Rightarrow \underline{A}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3)$$

Hauptdiagonale

(2)

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \leftarrow \text{quadratische Matrix}$$

Hauptdiagonale: $a_{11} = 1$, $a_{22} = 4$, $a_{33} = 7$

$$\underline{B}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Bei quadratischen Matrizen entspricht der „Wechsel" von $\underline{B}$ zu $\underline{B}^t$ einem Spiegeln an der Hauptdiagonalen.

Weitere Rechenoperationen für Matrizen

(1) Produkt von Matrizen mit Vektoren (→ siehe lineare GLS)

Definition:

Anzahl Spalten von $\underline{A}$ = Anzahl Komponenten von $\vec{v}$

Gegeben ist eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{A}$; dann ist für Vektoren $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$ das Produkt $\underline{A} \cdot \vec{v}$ definiert durch:

$$\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} : \quad \underline{A} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{k} a_{1j} \cdot v_j \\ \sum_{j=1}^{k} a_{2j} \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{k} a_{nj} \cdot v_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

„Faustregel": Zeile · Spalte

Mit $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liefert $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \vec{b}$: $\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

das lin. GLS:
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Bemerkung: Das Produkt von Matrizen mit Vektoren ist so definiert, dass es zur Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix, Vektor der Unbekannten und Vektor der rechten Seite passt!

(2) Produkt Matrix mit Matrix

Bemerkung: Darstellung einer Matrix mittels Spaltenvektoren

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 & \vec{a}_4 \end{pmatrix}}_{\text{Darstellung von } \underline{\underline{A}} \text{ mittels Spaltenvektoren}}$$

$$\underbrace{\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektoren der Matrix } \underline{\underline{A}}}$$

Allgemein: $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k) \Rightarrow k$ Spaltenvektoren, nämlich $\quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$

<u>Definition:</u>

Spaltenanzahl $\underline{\underline{A}}$ = Zeilenanzahl $\underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ und eine $(k \times \ell)$-Matrix $\underline{\underline{B}}$.
Dann (und nur dann) ist das <u>Produkt</u> $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \dots \vec{b}_\ell \right) = \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1 \quad \underline{\underline{A}}\, \vec{b}_2 \ \cdots \ \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_\ell \right)}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}} \in M(n \times \ell)$$

Spaltenvektoren $\vec{b}_j \in \mathbb{R}^k, \ 1 \le j \le \ell$

Spaltenvektoren für $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$: $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_j \in \mathbb{R}^n, \ 1 \le j \le \ell$

<u>Beispiel:</u>

① $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3), \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 3)$ ist definiert mit

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 8 & 3 & 34 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3)$$

② $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \qquad \underline{\underline{B}} \in M(3 \times 3), \ \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 3) \Rightarrow \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ ist <u>nicht</u> definiert!

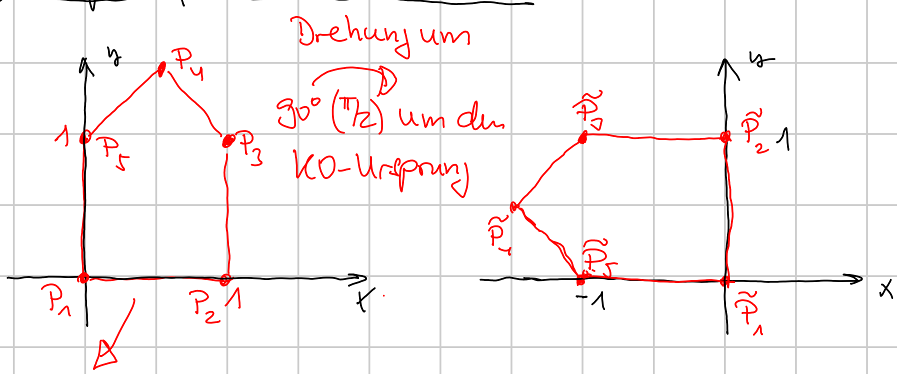
③ $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 2); \ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ beide Produkte sind definiert

$$\left.\begin{aligned} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} \\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} &= \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

MERKE: Das Matrizenprodukt ist (in der Regel) nicht kommutativ, d.h. $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Anwendungsbeispiel für (2x2)-Matrizen



$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Drehmatrix}$$

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \in M(2 \times 5)$$

$$(2 \times 2) \cdot (2 \times 5)$$

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \tilde{P}_1 & \tilde{P}_2 & \tilde{P}_3 & \tilde{P}_4 & \tilde{P}_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

32 Vorlesung 32 (04.01.2021)

32.1 Beispiele Matrixprodukt

32.2 Rechenregeln für Matrixprodukt

32.3 transponierte Matrix

32.4 quadratische Matrix, Nullmatrix, Einheitsmatrix

32.5 Definition: Determinante einer Matrix (2x2-Matrix)

32.6 Definition: invertierbare/inverse Matrix

Definition:

Spaltenanzahl $\underline{\underline{A}}$ = Zeilenanzahl $\underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ und eine $(k \times \ell)$-Matrix $\underline{\underline{B}}$.
Dann (und nur dann) ist das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \dots \vec{b}_\ell \right) = \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1 \quad \underline{\underline{A}}\, \vec{b}_2 \ \cdots \ \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_\ell \right)}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}} \in M(n \times \ell)$$

Spaltenvektoren $\vec{b}_j \in \mathbb{R}^k$, $1 \le j \le \ell$

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_j \in \mathbb{R}^n$, $1 \le j \le \ell$

Beispiele:

(1)
$$\underbrace{\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{(2\times 3)}, \quad \underbrace{\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{(3\times 2)}$$

✓

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ ist definiert,
$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 2)$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Matrixprodukt ist nicht kommutativ!

$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ ist definiert und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(3 \times 3)$

(3×2) (2×3) ✓

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & -13 & -4 \end{pmatrix}$$

(2)
$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B \implies A \cdot B$ ist definiert, $A \cdot B \in M(2 \times 3)$

$\begin{matrix} A & \cdot & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ (2\times 2) & & (2 \times 3) \end{matrix}$

$B \cdot A \implies B \cdot A$ ist <u>nicht</u> definiert!

$\begin{matrix} B & \cdot & A \\ \uparrow & & \uparrow \\ (2\times 3) & & (2 \times 2) \end{matrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für das Matrizenprodukt

Die im Folgenden auftretenden Produkte sollen jeweils definiert sein. Es gilt:

① In der Regel ist $A \cdot B \neq B \cdot A$ (das Matrixprodukt ist nicht kommutativ)

② $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

③ $A \in M(n \times k)$; $B \in M(k \times l) \wedge C \in M(k \times l)$:

$$A \cdot (s \cdot B + t \cdot C) = s \cdot (A \cdot B) + t \cdot (A \cdot C) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

Weitere Beispiele im Umfeld Matrizen und Vektoren

① Erinnerung: Gegeben ist $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k)$,

dann ist die transponierte Matrix A^t definiert durch

$A^t = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le k \\ 1 \le i \le n}}$ (A^t entsteht aus A durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten)

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(3\times 4)} \Longrightarrow \underline{\underline{A}}^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(4\times 3)}$$

$\underline{\underline{A}} \in M(n\times k)$, $\underline{\underline{A}}^t \in M(k\times n) \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^t \in M(n\times n)$ ist definiert

$\underline{\underline{A}}^t \in M(k\times n)$, $\underline{\underline{A}} \in M(n\times k) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t \cdot \underline{\underline{A}} \in M(k\times k)$ ist definiert

$$\underset{(3\times 4)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(4\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & 11 & 0 \\ 11 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}}_{\in M(3\times 3)}$$

(2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ auffassen/deuten als $(n\times 1)$-Matrix

$\Rightarrow \vec{v}^{\,t} = (v_1 \; v_2 \; \dots \; v_n)$ ← $(1\times n)$-Matrix

Als „Matrixprodukt" erhält man

$$\vec{v}^{\,t} \cdot \vec{v} = \underset{(1\times n)}{(v_1 \; v_2 \dots v_n)} \cdot \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = \underbrace{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}_{\in \mathbb{R} \leftarrow \text{„}(1\times 1)\text{-Matrix"}} = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^{\,t} = \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} \cdot \underset{(1\times n)}{(v_1 \; v_2 \dots v_n)} = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & \dots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 & \dots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ v_n v_1 & v_n v_2 & v_n v_3 & \dots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Konkret:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}^t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3^2 + 1^2 + 5^2 = 35 = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \\ 15 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen:

Definition: Eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ heißt quadratisch, wenn gilt Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten.

$M(n \times n) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}}$ hat n Zeilen und n Spalten$\}$ ist die Menge aller quadratischen Matrizen mit n Zeilen und n Spalten.

Beispiele:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2); \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ mit } c_{ij} = i + j: \quad \underline{\underline{C}} \in M(n \times n)$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & n+n \end{pmatrix}$$

Spezielle quadratische Matrizen:

$$\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{O}}_n \in M(n \times n) \text{ mit } \underline{\underline{O}}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Nullmatrix}$$

$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_n \in M(n \times n)$ mit $\underline{\underline{E}}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

Es gilt für $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$: $\quad \underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$, $\quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Quadratische Matrizen und lineare Gleichungssysteme mit quadratischen Matrizen als Koeffizientenmatrix, d.h. Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte.

Einführung: $\underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ also $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

mit $a = a_{11}$, $b = a_{12}$, $c = a_{21}$, $d = a_{22}$.

Das lineare GLS dazu ist $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{l} ax + by = d_1 \\ cx + dy = d_2 \end{array}\right\}$$ 2 lin. Gleichungen für 2 Unbekannte

Gauß-Schema

x	y		
a	b	d_1	$\cdot(-c)$
c	d	d_2	$\cdot a$
a	b	d_1	
0	$ad-bc$	$ad_2 - cd_1$	

$rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{d}) = 2$ falls $ad - bc \neq 0$ ist, dann hat das lin. GLS genau eine Lösung, nämlich

$$y = \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$$

$$ax = d_1 - by = d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$$

$$x = \frac{1}{a} \cdot \left[d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc} \right]$$

Definition:

Für eine (2×2)-Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist die Determinante von $\underline{\underline{A}}$

definiert als $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Aus dem einführenden Beispiel folgt:

(*) Das lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d}$ hat genau eine Lösung, falls $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \neq 0$ ist.

Beispiele:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$|\underline{\underline{A}}| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0, \quad |\underline{\underline{C}}| = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 16 - 18 = -2$$

$$|\underline{\underline{B}}| = (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

Definition:

Die quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ heißt invertierbar, wenn eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$ existiert mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}_n$.
$\underline{\underline{A}}^{-1}$ heißt dann die inverse Matrix zu $\underline{\underline{A}}$.

Einschub: $\underbrace{(1 \times 1)\text{-Matrizen } \underline{\underline{A}} = (a_{11}) \text{ mit } a_{11} \in \mathbb{R}}$

Kurz: $\underline{\underline{A}} = a_{11}$ ← jede reelle Zahl kann als (1×1)-Matrix aufgefasst werden!

$\underline{\underline{A}} = a_{11}$ ist invertierbar, wenn $\underline{\underline{A}}^{-1} = a_{11}^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$ existiert, dann ist
$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{a_{11}} \cdot a_{11} = 1 = \underline{\underline{E}}$; dies ist erfüllt für $a_{11} \neq 0$.

Die (1×1)-Matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{11})$ ist nur invertierbar, wenn $a_{11} \neq 0$ gilt.

Frage: Unter welcher Bedingung sind $(n \times n)$-Matrizen invertierbar?
Wann existiert $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$?

Bemerkung: Aus $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ folgt immer auch $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$.

→ Wie sieht das bei (2×2)-Matrizen aus?

Spezialfall: $\underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ d.h. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Gesucht ist $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$: Ansatz $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}} \iff \underline{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{E}}}$$

$$\iff \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{e}_1} \wedge \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\vec{e}_2}}$$

2 lineare Gleichungssysteme mit <u>identischer</u> Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ aber zwei verschiedenen rechten Seiten, nämlich $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

(*) liefert: Falls $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \neq 0$ ist, sind beide lin. GLS eindeutig lösbar, d.h. es gibt genau eine inverse Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$, dabei ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Lösung von $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ und $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ die Lösung von $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$

33 Vorlesung 33 (05.01.2021)

33.1 Bestimmen der Inversen Matrix (im Allgemeinen und 2x2-Matrizen)

33.2 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2)

33. Vorlesung 05.01.2021

Notiztitel 05.01.2021

<u>Inverse Matrix</u> $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ ist <u>invertierbar</u> $\Leftrightarrow$ es gibt eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$

quadratisch

mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1}} = \underline{\underline{E}}$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = (\vec{a}_1 \; \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_n$

$$\underline{\underline{E}} = (\vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_n$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 \; \underline{\underline{A}} \vec{a}_2 \ldots \underline{\underline{A}} \vec{a}_n)$$

$$= (\vec{e}_1 \; \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n)$$

Für $1 \le i \le n$ ist

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$$

die Spaltenvektoren der Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sind die Lösungen der lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$, diese lin. GLS <u>haben alle dieselbe Koeffizienten-matrix</u> $\underline{\underline{A}}$ nur verschiedene rechte Seiten $\vec{e}_i$ $(1 \le i \le n)$

<u>Beispiel:</u> $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, <u>gesucht</u> $\underline{\underline{A}}^{-1}$

<u>Ansatz</u> $\underline{\underline{A}}^{-1} = (\vec{a}_1 \; \vec{a}_2)$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = (\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 \; \underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2) = \underline{\underline{E}} = (\vec{e}_1 \; \vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1 \wedge \underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2}$$

die Lösungen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dieser beiden lin. GLS liefern die Spaltenvektoren der gesuchten inversen Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$!

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — Gauß-Scheme

x	y	
1	2	1
3	4	0

$1 \cdot (-3)$ +

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ — Gauß-Scheme

x	y	
1	2	0
3	4	1

$1 \cdot (-3)$ +

gemeinsames <u>erweitertes Gauß-Schema</u>

Vorwärtselimi-nation

	x	y			
$\underline{\underline{A}}$	1	2	1	0	$\underline{\underline{E}}$
	3	4	0	1	

$1 \cdot (-3)$ +

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \\ \hline \end{array}$$

Start der Rücksub.

Ende der Vorwärtselimination

$\cdot(-1/2)$ (zweite Zeile)

$\underline{\underline{E}}$ (linker Block), $\underline{\underline{A}}^{-1}$ (rechter Block)

Ende der Rücksub.

1.GLS 2.GLS

Für $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1$ mit $\vec{a}_1 = \binom{x}{y}$

$x = -2$

$y = 3/2$

Für $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$ mit $\vec{a}_2 = \binom{x}{y}$

$x = 1$

$y = -1/2$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Das erweiterte Gauß-Schema liefert

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Probe: Es muss $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ gelten

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aus der 32. Vorlesung und dem Ansatz aus dieser Vorlesung, nämlich: Die Spaltenvektoren $\vec{a}_i$ der Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sind die Lösungen des lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$ $(1 \le i \le n)$, folgt: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert genau dann, wenn die lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$ $(1 \le i \le n)$ eindeutig lösbar sind. Dies tritt ein, wenn beim Rechnen im Gauß-Schema keine Nullzeile erzeugt wird, d.h. $rg(\underline{\underline{A}}) = n$!

MERKE: $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ ist invertierbar $\Longleftrightarrow rg(\underline{\underline{A}}) = n$

Beispiel: Berechnung von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ für $\underline{\underline{A}} \in M(3 \times 3)$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

erweitertes Gauß-Schema

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 12 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$\underline{\underline{A}}$ (linker Block), $\underline{\underline{E}}$ (rechter Block)

$1\cdot 3$ + ; $1 \cdot 2$

$1\cdot(-6)$; $1 \cdot 7$ +

Vorwärtselimination

$rg(\underline{\underline{A}}) = 3$

3 Nicht-Nullzeilen!!

Start der Rücksubst.

$$
\begin{array}{l|ccc|ccc}
49\cdot & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\cdot 7 & 0 & 14 & 7 & 3 & 2 & 0 \\
 & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
+ & 98 & 294 & 0 & 38 & -12 & 14 \\
\cdot(-3) & 0 & 98 & 0 & 10 & 2 & 14 \\
 & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
\cdot\frac{1}{98} & 98 & 0 & 0 & 8 & -18 & -28 \\
\cdot\frac{1}{98} & 0 & 98 & 0 & 10 & 2 & 14 \\
\cdot(-\frac{1}{49}) & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
 & 1 & 0 & 0 & 8/98 & -18/98 & -28/98 \\
 & 0 & 1 & 0 & 10/98 & 2/98 & 14/98 \\
 & 0 & 0 & 1 & 11/49 & 12/49 & -14/49
\end{array}
$$

Ende der Vorwärtselimination

Ende der Rücksub.

$\underline{\underline{E}}$ (linker Block), $\underline{\underline{A}}^{-1}$ (rechter Block)

$$
\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 8/98 & -18/98 & -28/98 \\ 10/98 & 2/98 & 14/98 \\ 11/49 & 12/49 & -14/49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/49 & -9/49 & -14/49 \\ 5/49 & 1/49 & 7/49 \\ 11/49 & 12/49 & -14/49 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix}
$$

Probe: Es muss gelten $\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$

$$
\underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{49}\cdot\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Zurück zu $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2\times 2)$:

$$
\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc
$$ ← siehe 22. Vorlesung

$$
\underbrace{0 \neq ad-bc = \det(\underline{\underline{A}}) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ existiert}}
$$

Berechnung von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ im erweiterten Gauß-Schema:

$$
\begin{array}{cc|cc|l}
a & b & 1 & 0 & \cdot(-c) \\
c & d & 0 & 1 & \cdot(+a) \\
\hline
a & b & 1 & 0 & \\
0 & ad-bc & -c & a & \cdot\frac{1}{ad-bc}
\end{array}
$$

$\underline{\underline{A}}$ (linker Block), $\underline{\underline{E}}$ (rechter Block)

← falls $ad-bc = |A| \neq 0$ ist dies möglich

$$
\begin{array}{l|cc|cc}
+ & a & b & 1 & 0 \\
\cdot(-b) & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \\
\hline
\cdot\frac{1}{a} & a & 0 & 1+\underbrace{\frac{bc}{ad-bc}}_{(*)} & -\frac{ab}{ad-bc} \\
 & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \\
\hline
\underline{\underline{E}} & 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\
 & 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}
\end{array}
\quad \underline{\underline{A}}^{-1}
$$

Start der Rückw.

Ende der Vorwärtsel.

$$(*)\quad 1+\frac{bc}{ad-bc} = \underbrace{\frac{ad-\cancel{bc}}{ad-bc}}_{1} + \frac{\cancel{bc}}{ad-bc} = \frac{ad}{ad-bc}$$

Für $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\det(\underline{\underline{A}}) = ad-bc \neq 0}$ ist

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante von $\underline{\underline{A}} \in M(2\times 2)$:

(1) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = ad-bc$

$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}^t) = ad-cb = ad-bc = \det(\underline{\underline{A}})$

$$\boxed{\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^t)}$$

(2) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \leftarrow$ die beiden Spaltenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ sind identisch

$\det(\underline{\underline{A}}) = a\cdot c - ac = 0$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \text{ hat 2 identische Spaltenvektoren} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0}$$

Wegen $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$ gilt sofort

$$\boxed{\underline{\underline{A}} \text{ hat 2 identische Zeilen} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0}$$

(3) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & s\cdot b_1 + t b_2 \\ c & s\cdot d_1 + t d_2 \end{pmatrix}$ für $s,t \in \mathbb{R}$

der 2. Spaltenvektor von $\underline{\underline{A}}$ ist Linearkombination zweier Vektoren, nämlich

$$\begin{pmatrix} s b_1 + t\cdot b_2 \\ s d_1 + t\cdot d_2 \end{pmatrix} = s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2}$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = a\cdot(s d_1 + t d_2) - (s b_1 + t b_2)\cdot c$$
$$= s\cdot(a d_1 - b_1 c) + t\cdot(a d_2 - b_2 c)$$
$$= s\cdot \begin{vmatrix} \underset{\vec{a}}{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \underset{\vec{b}_1}{\begin{matrix} b_1 \\ d_1 \end{matrix}} \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} \underset{\vec{a}}{\begin{matrix} a \\ c \end{matrix}} & \underset{\vec{b}_2}{\begin{matrix} b_2 \\ d_2 \end{matrix}} \end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} = \left(\vec{a} \quad s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2\right) \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = s\cdot \left|\vec{a} \quad \vec{b}_1\right| + t\cdot \left|\vec{a} \quad \vec{b}_2\right|$, d.h.

„Linearkombination von Spaltenvektoren ergibt dieselbe Linearkombination der Determinanten"

Wegen $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$ gilt das auch für Zeilen, d.h.

„Linearkombination von Zeilen einer Matrix ergibt dieselbe Linearkombination der Determinanten"

34 Vorlesung 34 (06.01.2021)

34.1 (forts.) Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2)

34.2 Definition: Determinante einer Matrix (nxn-Matrix)

34.3 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (nxn)

34.4 Beispiele für Determinanten

34. Vorlesung 06.01.2021

Notiztitel 06.01.2021

Fortsetzung: Eigenschaften der Determinante von $\underline{\underline{A}} \in M(2\times 2)$

(4) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$s \in \mathbb{R}$; $s \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} s\cdot a & s\cdot b \\ s\cdot c & s\cdot d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(s\cdot\underline{\underline{A}}) = \underbrace{s^2 ad - s^2 cb}_{s^2\cdot(ad-bc)} = s^2 \cdot \det(\underline{\underline{A}})$

$$\boxed{\text{Es gilt: } \det(s\cdot\underline{\underline{A}}) = s^2 \cdot \det(\underline{\underline{A}})}$$

Definition: Determinante einer $(n\times n)$-Matrix

Die Determinante wird „rekursiv" definiert.

(1) Anker/Start:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2\times 2) \Rightarrow \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$

$= + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = + a_{11}\cdot|\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12}\cdot|\underline{\underline{A}}_{12}|$

(2) Zwischenschritt:

$\underline{\underline{A}}_{11} = (a_{22})$

$\underline{\underline{A}}_{12} = (a_{21})$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \in M(3\times 3)$$

Für $1 \le i,j \le 3$ ist $\underline{\underline{A}}_{ij}$ die Matrix, die entsteht, wenn man in $\underline{\underline{A}}$ die i-te Zeile und j-te Spalte streicht, d.h. $\underline{\underline{A}}_{ij} \in M(2\times 2)$.

Damit definiert man

$$\det(\underline{\underline{A}}) = + a_{11}\cdot|\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12}\cdot|\underline{\underline{A}}_{12}| + a_{13}\cdot|\underline{\underline{A}}_{13}|$$

$$= + a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

③ Allgemein:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} +1 = (-1)^{1+1} & -1 = (-1)^{1+2} & \dots & (-1)^{1+n} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \in M(n \times n) \implies$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1j} \cdot |\underline{\underline{A}}_{1j}|$$

$$= + a_{11} \cdot |\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12} \cdot |\underline{\underline{A}}_{12}| + a_{13} \cdot |\underline{\underline{A}}_{13}| - \dots (-1)^{1+n} \cdot |\underline{\underline{A}}_{1n}|$$

Bemerkung: Mit dieser Definition wird die Berechnung der Determinante einer (n×n)-Matrix (rekursiv) schrittweise zurückgeführt auf die bekannte Berechnung der Determinante von (2×2)-Matrizen!

Beispiele:

① $$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = +\underbrace{2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} - 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{(2-6)}_{-4} - 6 \cdot \underbrace{(3+2)}_{5} + 1 \cdot \underbrace{(-9-2)}_{-11} = -49$$

② $$\underline{\underline{B}} = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + & - \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in M(4 \times 4)$$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = +\underbrace{1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{= \det(\underline{\underline{A}}) \text{ aus ①}} - \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + \underbrace{0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-49) - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -49 - (-12) = -49 + 12 = -37$$

Nebenrechnung:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 \cdot (3-0) + 6 \cdot (-1-0) = -12$$

Eigenschaften der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix

Determinanten von $(n\times n)$-Matrizen ergeben sich rekursiv aus Determinanten von (2×2)-Matrizen $\Rightarrow$ die Determinante von $(n \times n)$-Matrizen „erbt" alle Eigenschaften der Determinante von (2×2)-Matrizen, nämlich

① $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

② $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \ldots \vec{b} \ldots \vec{b} \ldots \vec{a}_n) \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

$\underline{\underline{A}}$ hat zwei identische Spalten(vektoren)

Wegen ① gilt dann auch: $\underline{\underline{A}}$ hat zwei identische Zeilen $\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

③ a) $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_n)$ und $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \ldots s \cdot \vec{a}_i \ldots \vec{a}_n)$ mit $s \in \mathbb{R}$

i-ter Spaltenvektor

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det(\underline{\underline{A}})$

i-te Spalte

$\vec{a}_i$ wird ersetzt durch $s\vec{u} + t \cdot \vec{v}$

b) $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_i \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_n)$ und $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \ldots \overbrace{s\vec{u} + t\vec{v}} \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_n)$

mit $s,t \in \mathbb{R}$

i-te Spalte $\qquad$ i-te Spalte

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det\left((\vec{a}_1\, \vec{a}_2 \ldots \vec{u} \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_n) \right) + t \cdot \det\left((\vec{a}_1\, \vec{a}_2 \ldots \vec{v} \ldots \vec{a}_j \ldots \vec{a}_n) \right)$

④ $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\, \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n) \Rightarrow s \cdot \underline{\underline{A}} = (s\vec{a}_1\ s\vec{a}_2 \ldots s\vec{a}_n)$ für $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \det(s\cdot \underline{\underline{A}}) = s^n \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

Beispiele und Folgerungen

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12$ ✓ (siehe Nebenrechnung oben)

Es gilt $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}^t) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 3 + 6) = -12 \checkmark$$

ein Schritt im Gauß-Algorithmus liefert

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$ neue 2. Zeile $= (-4)\cdot$ 1. Zeile $+ 1 \cdot$ 2. Zeile

1	2	3	$\cdot(-4)$
4	1	1	$\leftarrow +$
2	-1	2	
1	2	3	
0	-7	-11	
2	-1	2	

Determinante bleibt gleich!

Eigenschaft (3) und Eigenschaft (1) liefern

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-4)\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{=0} + 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

2 identische Zeilen! Eigenschaft (2)

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +1\cdot\underbrace{(2+1)}_{=3} - 2\cdot\underbrace{(8-2)}_{=6} + 3\cdot\underbrace{(-4-2)}_{=-6} = -27 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & -11 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot\begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-14-11) + 2\cdot(-22+21) = -25 - 2 = -27 \checkmark$$

③ $\underline{A} = \begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&4\\2&2&-1\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Algorithmus liefert}]{\text{ein Schritt im Gauß-}} \begin{pmatrix}3&1&0\\0&-2&-12\\2&2&-1\end{pmatrix} \to$ neue 2. Zeile $= 1 \cdot$ 1. Zeile $- 3 \cdot$ 2. Zeile

3	1	0	
1	1	4	$1 \cdot (-3)$
2	2	-1	
3	1	0	
0	-2	-12	
2	2	-1	

Determinante erhält Faktor (-3)

aus den Eigenschaften ①, ② und ③ der Determinante folgt

$$\det\begin{pmatrix}3&1&0\\0&-2&-12\\2&2&-1\end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix}3&1&0\\3&1&0\\2&2&-1\end{pmatrix}}_{=0 \text{ (2 identische Zeilen)}} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&4\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$= (-3) \cdot \det\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&4\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix}3&1&0\\1&1&4\\2&2&-1\end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \cdot \det\begin{pmatrix}3&1&0\\0&-2&-12\\2&2&-1\end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{vmatrix}3&1&0\\1&1&4\\2&2&-1\end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix}1&4\\2&-1\end{vmatrix}} - 1 \cdot \begin{vmatrix}1&4\\2&-1\end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1-8) - 1 \cdot (-1-8) = -18 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix}3&1&0\\0&-2&-12\\2&2&-1\end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix}-2&-12\\2&-1\end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix}0&-12\\2&-1\end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2+24) - (0+24) = 54$$

$$-\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix}3&1&0\\0&-2&12\\2&2&-1\end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 54 = -18 \checkmark$$