8. Vorlesung 21.10.2020

Notiztitel 21.10.2020

Binomialkoeffizienten und Fakultät

Fakultät für Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$: $0! = 1$, $\underbrace{n! = n\cdot(n-1)! \text{ für } n \geq 1}$

$\underbrace{n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$

Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis n

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$: $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$

n über k $\longrightarrow \binom{n}{k}$

$k \leq n$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} \quad \text{für } n \geq 1,\ k \leq n$$

Beispiele:

(1) $\binom{0}{0} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!} = 1$

(2) $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} = \frac{6!}{2!\,4!} = \frac{6\cdot 5\cdot \overbrace{\cancel{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}}^{4!}}{\underbrace{1\cdot 2}_{2!}\cdot\cancel{4!}} = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15$

$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3!\,(11-3)!} = \frac{11!}{3!\,8!} = \frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot\cancel{8!}}{\underbrace{1\cdot 2\cdot 3}_{3!}\cdot\cancel{8!}} = \frac{11\cdot\cancelto{5}{10}\cdot\cancelto{3}{9}}{1\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}} = 165$

(3) allgemein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}$$

Weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

(1) Symmetrie: Es gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

(2) Additivität: $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ ✓

Beweis (durch Nachrechnen)

(1) $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(\cancel{n}-\cancel{n}+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \binom{n}{k}$

(2) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\cdot(n-(k-1))!} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

$$= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Brüche zur Addition „gleichnamig" machen, d.h. auf denselben Nenner bringen (Hauptnenner)

$$= \frac{k \cdot n!}{\underbrace{k \cdot (k-1)!}_{k!} \cdot (n-k+1)!} + \frac{n! \, (n-k+1)}{k! \cdot \underbrace{(n-k)! \cdot (n-k+1)}_{(n-k+1)!}}$$

$$= \frac{k \cdot n! + n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!}$$

$$= \frac{n! \cdot \overbrace{[k + (n-k+1)]}^{n+1}}{k! \cdot (n+1-k)!}$$

$$= \frac{\overbrace{n! \cdot (n+1)}^{=(n+1)!}}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1)-k)!} = \binom{n+1}{k} \checkmark$$

Was leisten Binomialkoeffizienten?

Rechenregeln in $\mathbb{N}_0$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1\} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$

Rechenregeln in $\mathbb{Z}$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
neu → Existenz additiv inv. Elemente	$a+(-a)=0$ ← neu	

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$, z heißt Zähler, n heißt Nenner

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$ ist als Nenner verboten: Durch 0 kann man nicht teilen!

Rechenregeln in $\mathbb{Q}$

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$
neu → Existenz inverser Elemente	$a+(-a)=0$	$a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$ ← neu

Wir berechnen für $a, b \in \mathbb{Q}$

$$(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b)$$

Distributivgesetz
$$\overset{\downarrow}{=} \underbrace{(a+b)\cdot a} + \underbrace{(a+b)\cdot b}$$
$$\overset{\downarrow}{=} a^2 + \underbrace{b\cdot a} + a\cdot b + b^2$$

Kommutativgesetz
$$\overset{\downarrow}{=} a^2 + \underbrace{a\cdot b + a\cdot b} + b^2 = a^2 + 2\,a\cdot b + b^2$$

Distributivgesetz $a\cdot b\cdot \underbrace{(1+1)}_{2}$

Die oben angegebenen Rechenregeln liefern die

<u>1. Binomische Formel</u> $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Damit erhält man auch die „Binomische Formel" für $(a+b)^3$, nämlich

$$(a+b)^3 = (a+b)\cdot(a+b)^2$$
$$= (a+b)\cdot(a^2+2ab+b^2)$$

Anwendung der Rechenregeln
$$\overset{\downarrow}{=} a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{b\cdot a^2} + \underline{2ab^2} + b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

Binomialkoeffizienten sind Faktoren in den Binomischen Formeln!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1\cdot a^2 + 2\cdot a\cdot b + 1\cdot b^2$$

$$= \underbrace{\binom{2}{0}}_{1}\cdot a^2 + \underbrace{\binom{2}{1}}_{2}\cdot a\cdot b + \underbrace{\binom{2}{2}}_{1} b^2$$

$$= \binom{2}{0}\cdot a^{2-0}\cdot \underbrace{b^0}_{=1} + \binom{2}{1} a^{2-1}\cdot b^1 + \binom{2}{2} \underbrace{a^{2-2}}_{=a^0=1}\cdot b^2$$

$$= \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k} a^{2-k}\cdot b^k$$

Behauptung: $(a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k}\cdot b^k$

Wir rechnen aus
$$\overset{\downarrow}{=} \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} a\cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0\cdot b^3$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\cdot\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

Symmetrie
$$\binom{3}{2} \overset{\downarrow}{=} \binom{3}{3-2} = \binom{3}{1} = 3$$

$$= 1\cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1\,b^3$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

Allgemein gilt:

Satz (allgemeine binomische Formel): $(a+b)^0 = 1$, $(a+b)^1 = a+b$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{für } n \geq 2$$

Potenzen von a „runterzählen“ — Potenzen von b „raufzählen“

Ausnutzen der Symmetrie und Additivität der Binomialkoeffizienten liefert das Pascalsche Dreieck

Additivität

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \binom{0}{0} & & & & & \\
 & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & \\
 & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & \\
 & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & \\
 & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & \\
\binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Symmetrie-Achse

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

2. binomische Formel aus der Schule: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Wie bekommt man allgemein $(a-b)^n$ für $n \geq 2$?

Wir wissen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\Rightarrow \quad (a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot \underbrace{(-b)^k}_{=(-1)^k \cdot b^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

„Vorzeichen“ ist abwechselnd + und −

alternierendes Vorzeichen

alternierende Summe

Satz (allgemeine 2. binomische Formel)

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \,, \quad n \geq 2$$

Vorschau auf die nächste Vorlesung: Was ist mit der sog. 3. binomischen Formel $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$?

„Wiederholung": Ordnungsrelation, Beispiel zur vollständigen Induktion

① A Menge, $A \neq \emptyset$; die zweistellige Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Ordnungsrelation, falls gilt:

a) R ist reflexiv, also $(a,a) \in R \; \forall a \in A$

b) R ist transitiv, also $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

c) R ist antisymmetrisch, also $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Longrightarrow a = b$

② Die Relation $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist gegeben durch

$$(a,b) \in R \iff \underbrace{\exists k \in \mathbb{N} : b = k \cdot a}$$

d.h. a ist ein (echter) Teiler von b
oder b ist ein Vielfaches von a

Man schreibt statt $(a,b) \in R$ auch $a \mid b$

$\uparrow$ lies: teilt

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist eine Ordnungsrelation

a) reflexiv: $a = 1 \cdot a \;\; \forall a \in \mathbb{N} \Longrightarrow a \mid a$ also $(a,a) \in R$

b) transitiv: $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Longrightarrow a \mid b \wedge b \mid c$

$\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : \underbrace{b = k \cdot a} \wedge \exists l \in \mathbb{N} : c = l \cdot b$

$\Longrightarrow c = l \cdot b = l \cdot (k \cdot a) = \underbrace{(l \cdot k)}_{\in \mathbb{N}} \cdot a$

$\Longrightarrow c = m \cdot a$ für $m = l \cdot k \in \mathbb{N} \Rightarrow a \mid c \Longrightarrow (a,c) \in R$

c) antisymmetrisch: $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

$\Longrightarrow \exists k \in \mathbb{N} : b = k \cdot a \wedge \exists l \in \mathbb{N} : a = l \cdot b$

$\Rightarrow \quad b = k \cdot a = k \cdot (l \cdot b) = (k \cdot l) \cdot b$

$\Rightarrow \quad b = (k \cdot l) \cdot b \quad \text{mit } k, l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad k \cdot l = 1 \text{ mit } k, l \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad k = 1 \wedge l = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 1 \cdot a = a \wedge a = 1 \cdot b = b \Rightarrow a = b$

(3) Beweisen Sie mit <u>vollständiger Induktion</u>, dass gilt:

$$7 \mid 2^{3n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Induktionsanfang</u>: $n = 1$

$$2^{3 \cdot 1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 = 1 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid 7 = 2^3 - 1$$

für $n = 1$ ist die Behauptung wahr!

<u>Induktionsschluß</u>:

<u>Induktionsvor.</u>: Die Behauptung ist wahr für $n = k$, also

$$\underbrace{7 \mid 2^{3k} - 1 \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} : 2^{3k} - 1 = 7 \cdot l}_{\text{das darf beim Beweis als wahre Aussage benutzt werden!}}$$

<u>Induktionsbehauptung</u>: Die Behauptung ist wahr für $n = k+1$, also

$$\underbrace{7 \mid 2^{3(k+1)} - 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : 2^{3 \cdot (k+1)} - 1 = 7 \cdot m}_{\text{das muss gezeigt werden!}} \quad ✓$$

<u>Beweis</u>:

$$\begin{aligned}
2^{3(k+1)} - 1 &= 2^{3k+3} - 1 \\
&= 2^{3k} \cdot 2^3 - 1 \\
&= (2^{3k} - 1 + 1) \cdot 2^3 - 1 \\
&= (2^{3k} - 1) \cdot 2^k + 1 \cdot 2^3 - 1 \\
&= (2^{3k} - 1) \cdot 2^k + 7 \\
&\overset{\downarrow}{=} 7 \cdot l \cdot 2^k + 7 = 7 \cdot \underbrace{(2^k \cdot l + 1)}_{=m} = 7 \cdot m
\end{aligned}$$

Induktionsvor.: $2^{3k} - 1 = 7 \cdot l$

$\Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1 = 7 \cdot m$ für ein $m \in \mathbb{N} \Rightarrow 7 \mid 2^{3(k+1)} - 1$ ✓