21. Vorlesung 30.11.2020

Notiztitel 30.11.2020

Lineare Gleichungssysteme n Gleichungen mit k Unbekannten $(n \le k)$

Beispiel:
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 0\cdot x_1 \quad 2x_2 - x_3 + 0\cdot x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Vektor der Unbekannten

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Vektor der rechten Seite}$$

→ **Koeffizientenmatrix** $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{1 \le i \le 3,\ 1 \le j \le 4}$ ← 3 Gleichungen, 4 Unbekannte

Warum heißt so ein Gleichungssystem linear?

1. Antwort: Die Unbekannte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ (im Beispiel x_1, x_2, x_3, x_4) kommen linear, d.h. als Faktoren in 1. Potenz darin vor!

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_3^1 \quad x_4^1$ ← 1. Potenz (nicht als z.B. x_2^2 oder $\sqrt{x_2}$ usw.)

2. Antwort: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ ist Lösung von $2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$,

dann gilt: Auch $s \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} sx_1 \\ sx_2 \\ sx_3 \\ sx_4 \end{pmatrix}$ für $s \in \mathbb{R}$ ist Lösung dieser Gleichung,

denn $2\cdot(s\cdot x_1) - (s\cdot x_2) + 5(s\cdot x_3) + (s\cdot x_4) = s \cdot \underbrace{\left(2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4\right)}_{=0} = s\cdot 0 = 0$.

Wenn $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$ eine weitere Lösung ist, d.h. es gilt auch $2u_1 - u_2 + 5u_3 + u_4 = 0$,

dann ist auch $\vec{x} + \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ x_3 + u_3 \\ x_4 + u_4 \end{pmatrix}$ eine Lösung dieser Gleichung, denn

$$2(x_1+u_1)-(x_2+u_2)+5(x_3+u_3)+(x_4+u_4)=$$
$$\underbrace{(2x_1-x_2+5x_3+x_4)}_{=0}+\underbrace{(2u_1-u_2+5u_3+u_4)}_{=0}=0$$

Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen und Vektoren, Rechenoperationen für diese Matrizen und Vektoren

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

Gegeben: a_{ij}, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le k$ und b_i, $1 \le i \le n$

Gesucht: x_j, $1 \le j \le k$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \leftarrow$$

Koeffizientenmatrix (rechteckiges Zahlenschema mit n Zeilen und k Spalten)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} \leftarrow$$

Vektor der Unbekannten (eine Spalte mit k Zahlen $\hat{=}$ Matrix mit k Zeilen und 1 Spalte)

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftarrow$$

Vektor der rechten Seite (eine Spalte mit n Zahlen $\hat{=}$ Matrix mit n Zeilen und 1 Spalte)

Rechenoperationen für Vektoren

1) Für einen Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ mit m Komponenten (m Zeilen, 1 Spalte)

und $s \in \mathbb{R}$ ist definiert: $s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ s \cdot a_m \end{pmatrix}$

2) Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ mit m Komponenten (für beide!)

ist $\vec{a}+\vec{b}$ definiert: $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{pmatrix}$

__Beispiel:__

① $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow 5\cdot\vec{a} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3}\cdot\vec{a} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/3\\2/3\\1\end{pmatrix}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1-4\\2+1\\3+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\\5\end{pmatrix}$

② $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}$ ↯ __nicht__ definiert, denn $\vec{a}$ hat 3 Komponenten, $\vec{b}$ hat jedoch 4 Komponenten

__Bemerkung:__

1) Falls $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beide m Komponenten haben, ist auch $\vec{a}-\vec{b}$ definiert durch $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a} + (-1)\cdot\vec{b}$, z.B. mit $m=3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a}-\vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \underbrace{(-1)\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-b_1\\-b_2\\-b_3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a_1+(-b_1)\\a_2+(-b_2)\\a_3+(-b_3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

direkt rechnet man: Komponentenweise subtrahieren!

2) __Definition:__

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ mit jeweils m Komponenten, außerdem sind gegeben N reelle Zahlen $s_1, s_2, \dots, s_N \in \mathbb{R}$. Dann ist die __Linearkombination der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$ mit Koeffizienten $s_1, s_2, \dots, s_N$__ gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{N} s_i\cdot\vec{a}_i = s_1\vec{a}_1 + s_2\vec{a}_2 + \dots + s_N\vec{a}_N$$

Statt Linearkombination sagt man auch __gewichtete Summe der Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$__

mit Gewichten $s_1, s_2, \ldots, s_N$.

Beispiel:

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = 2, s_2 = -1, s_3 = 5$$

Die Linearkombination von $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ mit Koeffizienten s_1, s_2, s_3 ist

$$\sum_{i=1}^{3} s_i \cdot \vec{a}_i = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + s_3 \vec{a}_3$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4 - 30 \\ 6 - 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Da wir bei $s \cdot \vec{a}$ und $\vec{a} + \vec{b}$ komponentenweise rechnen, d.h. in jeder Komponente Rechenoperationen in $\mathbb{R}$ (also mit reellen Zahlen) ausführen, übertragen sich folgende Rechenregeln für reelle Zahlen

$$\left\{ \begin{array}{lll} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} & & \text{Kommutativgesetz} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} & & \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, & \vec{0} \text{ ist der Vektor mit allen Komponenten} = 0 & \text{Existenz eines neutralen Elements der Addition} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}, & & \text{Existenz von } -\vec{a} \text{, dem inversen Elemente zu } \vec{a} \text{ bezüglich der Addition} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{Die Menge der Vektoren mit } m \text{ Komponenten ist bezüglich der Addition Gruppe sogar eine abelsche, d.h. kommutative, Gruppe}}$

Für die Multiplikation mit reellen Zahlen gilt:

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \cdot \vec{b}) \\ (s + t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} \end{array} \right\} \text{„Distributivgesetze“} \\ t \cdot (s \cdot \vec{a}) = (t \cdot s) \cdot \vec{a} = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = s (t \vec{a}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \forall s, t \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren mit } m \text{ Komponenten} \end{array}$$

Definition:

Eine Menge V von Objekten, für die eine Addition $+$ erklärt ist, so dass $(V, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für die eine Multiplikation mit reellen Zahlen s erklärt ist, die den Regeln (*) genügt, nennt man einen Vektorraum, die Elemente von V heißen Vektoren.

Beispiel: $V = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \middle| \; a_i \in \mathbb{R}, \; 1 \leq i \leq m \right\}$ mit

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ \vdots \\ a_m+b_m \end{pmatrix} \text{ und } s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_m \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

ist ein Vektorraum.

4) Rechenoperation für Matrizen und Vektoren: Produkt „Matrix mal Vektor"

Definition:

Gegeben ist eine Matrix $\underline{\underline{A}}$ mit n Zeilen und k Spalten und ein Vektor $\vec{v}$ mit k Komponenten (d.h. Spaltenanzahl der Matrix = Komponentenanzahl des Vektors), dann und nur dann ist das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12} \cdot v_2 + \cdots + a_{1k} v_k \\ a_{21}v_1 + a_{22} v_2 + \cdots + a_{2k} v_k \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2} v_2 + \cdots + a_{nk} v_k \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$ ist damit ein Vektor mit n Komponenten.

Beispiel:

1) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 2\cdot 1 + 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

2) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \; \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 1\cdot 1 + 4\cdot 2 \\ 3\cdot 1 - 5\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \; \Big[= \begin{pmatrix} -1\cdot 1 + 2\cdot 2 + ?\cdot 3 \end{pmatrix}$$

nicht definiert

3)
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \;\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nk}x_k &= b_n \end{aligned} \iff \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Lösungsalgorithmus für lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus

Beispiel:
$$\left\{ \begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 \qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Gauß-Algorithmus ist ein zweistufiger Algorithmus, er besteht aus

1. Stufe: Vorwärtselimination
2. Stufe: Rücksubstitution

basierend auf zwei Erkenntnissen von Gauß, nämlich

2. Stufe: Es gibt lineare Gleichungssysteme, die durch Rücksubstitution (Rückwärtseinsetzen) lösbar sind, nämlich z.B.

System mit Dreiecksgestalt
$$\left\{\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 \checkmark \\ x_2 + 5x_3 &= 5 \checkmark \\ 3x_3 &= 6 \checkmark \end{aligned}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Lösen durch Rücksubstitution

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \longrightarrow 3x_1 = 4 - 2x_2 + x_3 = 4 - 2\cdot(-5) + 2 = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{3}$$

$$x_2 + 5x_3 = 5 \longrightarrow x_2 + 5\cdot x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 5 - 5\cdot x_3 = 5 - 5\cdot 2 = -5$$

$$3x_3 = 6 \longrightarrow x_3 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} 16/3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probe:
$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16/3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 16/3 + 2\cdot(-5) - 1\cdot 2 \\ 0\cdot 16/3 + 1\cdot(-5) + 5\cdot 2 \\ 0\cdot 16/3 + 0\cdot(-5) \cdot 3\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \checkmark \\ 5 \checkmark \\ 6 \checkmark \end{pmatrix}$$

Für morgen:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_2 + 5x_3 &= 10 \end{aligned} \quad ?$$
← Kann man dafür durch Rücksubstitution Lösungen finden?