Aussagenlogik

2-stellige Verknüpfungen: $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$

1-stellige Verknüpfung: $\overline{}, \neg$

A	B	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

genau-dann-wenn
logische Äquivalenz

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

wenn-dann
logische Folgerung

Behauptung: Es gilt $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

Beweis: Aufstellen einer Wahrheitstafel/Wahrheitstabelle

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f
f	w	w	f	f	f
f	f	w	w	w	w

✓ ✓

das gilt, wenn in den beiden Spalten dieselbe Verteilung von Wahrheitswerten steht

Bemerkungen:

1) Für die doppelte Verneinung gilt $\overline{(\overline{A})} = \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$. ✓

A	$\overline{A}$	$\overline{(\overline{A})}$	$A \Leftrightarrow \overline{(\overline{A})}$
w	f	w	w
f	w	f	w

✓

2) Aussagen, die immer den Wahrheitswert „w" haben, heißen Tautologie

3) Eine Aussageverknüpfung mit n Input-Aussagen heißt n-stellige (Aussage)verknüpfung

Wieviele voneinander verschiedene 2-stellige Verknüpfungen gibt es?

A	B	$*$
w	w	w/f
w	f	w/f
f	w	w/f
f	f	w/f

$*$ ist eindeutig bestimmt, wenn in jeder der 4 Zeilen ein Wahrheitswert steht

2 Möglichkeiten pro Zeile, damit insgesamt $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$ Möglichkeiten

2 dieser Möglichkeiten sind

A	B	$\mathbb{1}$	XOR	$\mathbb{0}$
w	w	w	f	f
w	f	w	w	f
f	w	w	w	f
f	f	w	f	f

$\boxed{\mathbb{0} \text{ ist die immer falsche Aussage}}$

XOR: ausschließendes oder: A oder B ist wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr ist

$\boxed{\mathbb{1} \text{ ist die immer wahre Aussage}}$

4) Die Aussagen

a) „Für alle $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\forall x \in M: ...$

$\forall$ heißt <u>Allquantor</u>.

b) „Für (mindestens) ein $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\exists x \in M: ...$

$\exists$ heißt <u>Existenzquantor</u>.

c) „Für genau ein $x \in M$ gilt ..." wird abgekürzt durch: $\exists! x \in M: ...$

„Rechnen" mit Aussagen

Eine <u>Aussageverknüpfung</u> erzeugt aus $1, 2, ..., n$ Input-Aussagen eine neue Aussage; diese Aussage ist festgelegt (wohldefiniert), wenn ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der Input-Aussagen feststeht; dies geschieht z.B. über eine Wahrheitstabelle!

Rechenregeln für Aussageverknüpfungen

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die **Rechengesetze der Aussagenlogik**

Name	und ($\wedge$)	oder ($\vee$)
Kommutativgesetz	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
Assoziativgesetz	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
b) → Existenz neutraler Elemente	$A \wedge \mathbf{1} \Leftrightarrow A$	$A \vee \mathbf{0} \Leftrightarrow A$
Existenz komplementärer Elemente	$A \wedge \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{0}$	$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow \mathbf{1}$
a) → Distributivgesetze	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
c) → DeMorgansche Regeln	$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$	$\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$

<u>Bemerkung:</u>

1) Es reichen die 2-stelligen Verknüpfungen $\wedge, \vee$ und die 1-stellige Verknüpfung $\neg, \overline{}$ aus, um $\Rightarrow, \Leftrightarrow$ und weitere der 16 2-stelligen Verknüpfungen darzustellen (disjunktive/konjunktive

Normalformen → Digitaltechnik) ⇒ Rechengesetze für $\wedge, \vee, \overline{}$ regeln

also alle Aussageverknüpfungen!

2) Exemplarische Beweise der Rechenregeln mittels Wahrheitstafeln

a) 1. Distributivgesetz $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

8 Zeilen ≙ 8 möglichen Kombinationen von Wahrheitswerten bei 3 Inputs

A	B	C	$B \vee C$	$A \wedge (B \vee C)$	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$(A \wedge B) \vee (A \vee C)$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	w	w	f	w
w	f	w	w	w	f	w	w
w	f	f	f	f	f	f	f
f	w	w	w	f	f	f	f
f	w	f	w	f	f	f	f
f	f	w	w	f	f	f	f
f	f	f	f	f	f	f	f

$\Leftrightarrow$

b) Existenz neutraler Elemente

$\mathbb{1}$ ← immer wahre Aussage ; $\mathbb{0}$ ← immer falsche Aussage

A	$\mathbb{1}$	$\mathbb{0}$	$A \wedge \mathbb{1}$	$A \vee \mathbb{0}$
w	w	f	w	w
w	w	f	w	w
f	w	f	f	f
f	w	f	f	f

$(A \wedge \mathbb{1}) \Leftrightarrow A$

$(A \vee \mathbb{0}) \Leftrightarrow A$

c) De Morgansche Regeln ← wie verträgt sich Verneinung mit und bzw. oder

$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \bar{A} \vee \bar{B}$; $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \bar{A} \wedge \bar{B}$

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$\bar{A} \wedge \bar{B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A \vee B}$
w	w	w	w	f	f	f	f	f	f
w	f	f	w	f	w	f	w	w	f
f	w	f	w	w	f	f	w	w	f
f	f	f	f	w	w	w	w	w	w

3) zwei weitere Beispiele

$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$; $\underbrace{(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})}_{\text{Kontraposition}}$

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \Rightarrow B$	$\bar{A} \vee B$	$\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$
w	w	f	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w	w

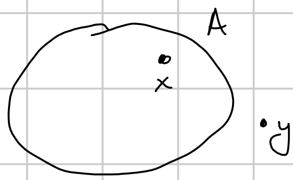
$\Leftarrow$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$

Mengenlehre $\underbrace{A, B \text{ Mengen}}$: $A \subseteq B$, $A \subset B$, $A = B$, $x \in A$, $x \notin A$

$\emptyset$ leere Menge (einzige Menge ohne Element)

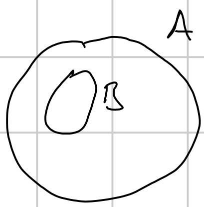
Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen

Venn-Diagramm:



$x \in A$

$y \notin A$



$B \subseteq A$

Bemerkung: „Naive" Mengendefinition (Cantor) kann zu Widersprüchen führen (Russeln), z.B.:

Auf einer kleinen Insel gilt für die männlichen Bewohner: Der Dorffriseur rasiert jeden Mann, der sich nicht selbst rasiert, und nur diese.

Insbesondere rasiert der Dorffriseur keinen Mann, der sich selbst rasiert; der Dorffriseur ist männlich.

$A = \{x \mid x$ ist männlicher Einwohner der Insel und wird vom Dorffriseur rasiert$\}$

f bezeichnet den Dorffriseur!

Gilt $f \in A$ oder $f \notin A$ ↯ unentscheidbarer Widerspruch

Lösung: Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel)

Unsere pragmatische Lösung:

Alle betrachteten Mengen stammen aus einer (aus dem Zusammenhang ersichtlichen) Allmenge Ω. Jede in diesem Zusammenhang betrachtete Menge A ist also Teilmenge von Ω.

Definition: Ω ist die betrachtete Allmenge

1) Gegeben ist eine Menge A, dann ist die Menge aller Teilmengen von A die Potenzmenge von A, man schreibt

$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

2) $\emptyset \subseteq A \ \forall A \subseteq \Omega$; $\quad A \subseteq A \ \forall A \subseteq \Omega$

3) Wenn A endlich viele Elemente hat, ist $|A|$ die Anzahl der Elemente von A

Beispiel: $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, \underbrace{A}_{=\{a,b,c\}}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\} \}$$

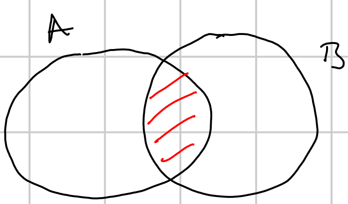
$\Rightarrow |A| = 3, \quad |\mathcal{P}(A)| = 8 = 2^3$

später wird gezeigt: $A \subseteq \Omega$ endliche Menge, dann gilt: $n = |A| \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n$

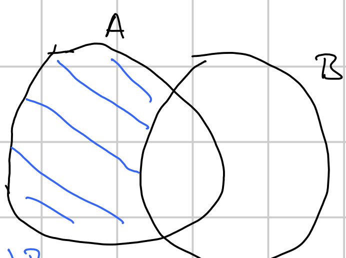
Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

Definition: Gegeben sind die Mengen A und B $(A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega)$.
Dann ist definiert

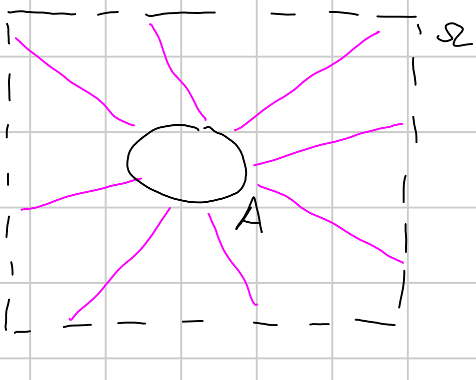
1) die Vereinigung $A \cup B$ durch: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
2) der Durchschnitt $A \cap B$ durch: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
3) die Differenz $A \setminus B$ durch: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$
4) das Komplement $\bar{A}$ durch: $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{ x \in \Omega \mid x \notin A \}$



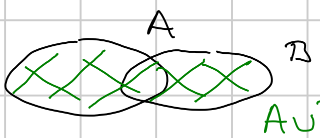
$A \cap B$



$A \setminus B$



$\bar{A} = \Omega \setminus A$



$A \cup B$

Bemerkung: Statt $A \setminus B$ schreibt man auch $A - B$.