28. Vorlesung 15.12.2020

Hinweis: a) 16.12. (12:00) – 17.12. (18:00) 2. edX-Test
60 Minuten ab Teststart

b) 18.12. „Weihnachtsprobe Klausur"
4 Aufgaben für 120 Minuten (2 Std.)

} So sähe die Klausur aus, wenn am 24.12. Klausur wäre

Aus der 27. Vorlesung:

$P \in E \iff$ es gibt $s, t \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \quad s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\iff$ das lin. GLS. für die Unbekannten $s, t \in \mathbb{R}$

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein! $\longrightarrow$ Was heißt das konkret

$\rightarrow$ Gauß-Schema

$$\begin{array}{cc|l}
s & t & \\
\hline
1 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & b_2 \\
-1 & -1 & b_3 - 1 \\
\hline
1 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & b_2 \\
0 & -1 & b_3 - 1 + b_1 \\
\hline
1 & 0 & b_1 \\
0 & 1 & b_2 \\
0 & 0 & b_3 - 1 + b_1 + b_2
\end{array}$$

(erster Block: $\underline{A}$ links, $\vec{b}$ rechts; Zeilenoperationen: $+$)

dieses lin. GLS ist nur lösbar, wenn $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$ ist (dann gilt $rg(\underline{A}) = rg(\underline{A}|\vec{b})$)

Falls $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$ ist folgt: $t = b_2$, $s = b_1$

$b_1 + b_2 + b_3 = 1 \Rightarrow 1 - b_1 - b_2 = b_3$

Probe:
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P(b_1, b_2, b_3) \text{ liegt in } E\,!$$

Beispiel:

Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

Für welches/welche $\alpha \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt $P(1,2,\alpha)$ in der Ebene E?

$\hookrightarrow$ das lin. GLS $\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\\alpha\end{pmatrix}}$ für die Unbekannten $s,t \in \mathbb{R}$

muss lösbar sein!

$$t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\\alpha\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\\alpha-3\end{pmatrix}$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & \alpha-3 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & \alpha+1 \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4\alpha-1 \end{array}$$

$1\cdot 2$ $\quad 1\cdot(-4)$ $\quad +$

$1\cdot 5$ $\quad 1\cdot 4$ $\quad +$

$t = -1 - 2s = -1 + \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$

$s = -\frac{1}{4}$

$\alpha = \frac{1}{4}$

nur lösbar, falls $4\alpha - 1 = 0$ ist, d.h. $\alpha = \frac{1}{4}$

$\hookrightarrow$ Der Punkt $P(1, 2, \frac{1}{4})$ liegt in der Ebene E!

Probe:

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1/2\\-1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\3/4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1/4\end{pmatrix}$$

Fortsetzung des Beispiels:

1) Gesucht ist ein Normaleneinheitsvektor der gegebenen Ebene E

$$\boxed{\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}} \leftarrow \text{Ebene } E$$

Ein Normaleneinheitsvektor ist $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$ mit $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

$$\underbrace{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}_{=\vec{N}} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(-2)\cdot 3 - 0\cdot 4\\ -(1\cdot 3 - 2\cdot 4)\\ 1\cdot 0 - 2\cdot(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\5\\4\end{pmatrix}, \quad |\vec{N}| = \sqrt{(-6)^2+5^2+4^2} = \sqrt{77}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{77}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) Zusätzlich gegeben ist die Gerade g mit Parameterdarstellung

$$\boxed{\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \leftarrow \text{Gerade } g$$

Berechnen Sie (falls vorhanden) den Schnittpunkt S zwischen der Ebene E und der Gerade g!

s, t, u lösen dieses lineare GLS!

Ansatz für Schnittpunkt: $\vec{e}(s,t) = \vec{g}(u)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineares GLS für die Unbekannten s, t, u

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

t	s	u		
1	2	-1	-3	$\cdot 2$ $\quad \cdot(-4)$
-2	0	-1	-1	+
4	3	-1	-4	+
1	2	-1	-3	
0	4	-3	-7	$\cdot 5$
0	-5	3	8	$\cdot 4$ +
1	2	-1	-3	
0	4	-3	-7	
0	0	-3	-3	

$t = -3 - 2s + u = -3 + 2 + 1 \Rightarrow t = 0$

$4s = -7 + 3u = -4 \Rightarrow s = -1$

$$u = 1 \Rightarrow \vec{g}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

S(0, 1, 0) ist der Schnittpunkt!

Für die Probe: s, t bestimmen und in Parameterdarstellung der Ebene einsetzen!

$$\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

Eigenschaften / Rechenregeln für das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

1) $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$ Anti-Kommutativgesetz

2) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$ Distributivgesetz

3) $(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (s \cdot \vec{b})$ für $s \in \mathbb{R}$

Beweis: Einfach nach Definition des Vektorprodukts nachrechnen!

Koordinatenform der Ebenengleichung

Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$$

d.h. für jeden Punkt $P(x,y,z)$ in E gibt es $s,t \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2 \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene; für $\vec{N}$ gilt

$\vec{N} \perp \vec{u}_1$; d.h. $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ und $\vec{N} \perp \vec{u}_2$, d.h. $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

Wir rechnen jetzt

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle + s \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle}_{=0} + t \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle}_{=0} = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3$$

insgesamt: $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \Rightarrow$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$$N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = \underbrace{N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3}_{= d}$$

$\Rightarrow$ Koordinatendarstellung der Ebene $\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$ ist

$$\boxed{N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = d \quad \text{mit } d = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle}$$

für einen Normalenvektor $\vec{N}$ der Ebene E

Fortsetzung des Beispiels:

Parameterdarstellung der Ebene E

$$\boxed{\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \text{mit } \vec{N} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6x + 5y + 4z$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 + 5 + 12 = 5$$

$$\boxed{-6x + 5y + 4z = 5}$$

Koordinatendarst. der Ebene E

Frage: Gibt es einen Schnittpunkt dieser Ebene E mit der Geraden g gegeben durch

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

Für jeden Punkt $P(x,y,z)$ der Geraden g gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für ein $t \in \mathbb{R}$, also: $x = 2 - t$, $y = -1 + 2t$, $z = 3 + 2t$.

Wenn $P(x,y,z)$ auch zur Ebene E gehört (also Schnittpunkt ist), muss gelten

$$5 = -6x + 5y + 4z = -6\underbrace{(2-t)}_{x} + 5\underbrace{(-1+2t)}_{y} + 4 \cdot \underbrace{(3+2t)}_{z}$$

$$= \cancel{-12} + \cancel{6t} \cancel{-5} + \cancel{10t} + \cancel{12} + \cancel{8t} = -5 + 24t$$

also $5 = -5 + 24t \Rightarrow 24t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt: $\vec{g}\left(\frac{5}{12}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{5}{12} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/12 \\ -2/12 \\ 46/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19/12 \\ -1/6 \\ 23/6 \end{pmatrix}$

der Schnittpunkt S ist $S\left(\frac{19}{12}, -\frac{1}{6}, \frac{23}{6}\right)$.

<u>Weiteres Beispiel:</u> Gegeben ist eine Ebene E in Koordinatendarstellung $2x - 3y + 5z = 4$. Gesucht ist eine Parameterdarstellung dieser Ebene!

$2x - 3y + 5z = 4$ ← lin. GLS mit 1 Gleichung für 3 Unbekannte also $3 - 1 = 2$ freie Parameter!

$2x - 3s + 5t = 4$ ← $z = t$, $y = s$

$2x = 4 + 3s - 5t$

$x = 2 + \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t$

$\Rightarrow$ die allg. Lösung dieses lin. GLS liefert die gewünschte Parameterdarstellung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3/2\,s - 5/2\,t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -5/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} = \vec{e}(s,t)$$

$\vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$