10. Vorlesung 27.10.2020

Notiztitel 27.10.2020

Zusammenfassung der Formeln der elementaren Kombinatorik ($k \le n$)

Anordnungen von k aus n Elementen ← mit Reihenfolge

Auswahl von k aus n Elementen ← ohne Reihenfolge

	ohne Wiederh.	mit Wiederh.
Anordnungen *)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	n^k
Auswahl	$\binom{n}{k}$	$\binom{n+k-1}{k}$

} in der Tabelle steht jeweils die Anzahl der Möglichkeiten

6 Elemente auf 4 Plätze anordnen mit Wiederh.: $\underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} \cdot \underline{6} = 6^4$

$\underset{1}{\underline{\times\times}} \;\Big|\; \underset{2}{\underline{\ \times\ }} \;\Big|\; \underset{3}{\underline{\quad}} \;\Big|\; \underset{\dots}{\dots\dots} \;\Big|\; \underset{n}{\underline{\times\times\times}}$

→ Auswahl von 6 aus n mit Wiederholungen

$n-1$ Striche kennzeichnen n Elemente $\hat{=}$ n Plätze

bei Auswahl von Element i wird am Platz des Elements i ein Kreuz eingezeichnet

Bei der Auswahl von k aus n Elementen mit Wiederholungen entsteht ein Muster mit $n-1$ Strichen und k Kreuzen, d.h. es gibt $n-1+k = n+k-1$ Symbole in dem Muster, von denen k Kreuze sind, d.h. aus den $n-1+k$ Symbolen müssen k für Kreuze ausgewählt werden, das ist Auswahl von k aus $n-1+k$ ohne Wiederholungen, also hat man $\binom{n-1+k}{k} = \binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten

*) Spezialfälle bei Anordnungen

a) Permutationen $\hat{=}$ Anordnung von n aus n Elementen ($k=n$);

es gibt $n!$ Möglichkeiten

b) Anordnung von n aus n Elementen, wobei die n Elemente in k Gruppen identischer Elemente (jeweils Anzahl n_i pro Gruppe, $1 \le i \le k$) aufgeteilt sind; es gibt $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ Möglichkeiten

Zahlen in $\mathbb{Q}$ ← Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

① Darstellung $\frac{z}{n}$ ist nicht eindeutig; z und n können gemeinsame Faktoren enthalten; Eindeutigkeit bekommt man durch vollständiges Kürzen dieser Faktoren

$$z = z_1 \cdot k \,, \quad n = n_1 \cdot k \quad \Longrightarrow \quad \frac{z}{n} = \frac{z_1 \cdot \cancel{k}}{n_1 \cdot \cancel{k}} = \frac{z_1}{n_1}$$

② $\mathbb{Q}$ ist die Menge aller Brüche $\frac{z}{n}$; Bruchrechnen: $q_1 = \frac{a}{b}$, $q_2 = \frac{c}{d}$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$q_1 + q_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + c \cdot b}{d \cdot b}$$

„Erweitern“ der Brüche

Bemerkung zur Addition

$$\underbrace{\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 + z_2}{n}}$$

Addition gleichnamiger Brüche (Nenner gleich)

③ Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Zahldarstellung in einem „Stellenwertsystem“ zur Basis 10, z.B.

$$\begin{aligned} 3246 &= 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6 \\ &= 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\ &= \sum_{i=0}^{3} z_i \cdot 10^i \quad \text{mit } z_0 = 6,\ z_1 = 4,\ z_2 = 2,\ z_3 = 3 \end{aligned}$$

allgemein: $\left(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1 a_0\right)_{10} = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i$

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}\,, \quad a_n \neq 0$$

$$23{,}\underbrace{75}_{} = 2\cdot 10 + 3 + \underbrace{\frac{7}{10} + \frac{5}{100}}_{=\frac{75}{100}} = 2\cdot 10^{1} + 3\cdot 10^{0} + 7\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2}$$

<u>allgemein:</u> $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0{,}\, b_1 b_2 \dots b_k)_{10} =$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^{i} + \sum_{j=1}^{k} b_j \cdot 10^{-j}$$

Wie bekommt man aus der Darstellung $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$ (also Darstellung als Bruch) die Dezimaldarstellung? → „schriftliche" Division ganzer Zahlen

gesucht Dezimaldarstellung von $\frac{3406}{26}$

$$\begin{array}{l} 3406 : 26 = 131 \\ \underline{-26} \\ \;\;806 \\ \;\underline{-78} \\ \;\;\;\;26 \\ \;\;\underline{-26} \\ \;\;\;\;\;0 \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} 3406 &= \overbrace{100\cdot 26}^{2600} + 806 \\ 806 &= \overbrace{30\cdot 26}^{780} + 26 \\ 26 &= 1\cdot 26 + 0 \end{aligned}\right\}$$ Division mit Rest

$$\left.\begin{array}{l} 33 : 6 = 5{,}5 \\ \underline{-30} \\ \;\;30 \\ \underline{-30} \\ \;\;\;0 \end{array}\right\} \quad \frac{33}{6} = 5{,}5$$

unendlich viele Nachkommastellen alle identisch = 3

$$\begin{array}{l} 121 : 12 = 10{,}08\overbrace{333\dots} \\ \underline{-12} \\ \;\;1 \\ \underline{-\;0} \\ \;\;10 \\ \underline{-\;\;0} \\ \;\;100 \\ \underline{-\;96} \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\underline{-36} \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\underline{-36} \\ \;\;\;\;40 \\ \;\;\;\;\vdots \end{array}$$

$= 10{,}08\overline{3}$ ← Periodenstrich

<u>lies:</u> 10,08 3 Periode

Zahlen unter dem Periodenstrich werden unendlich oft in identischer Anordnung wiederholt

$\frac{121}{12} = 10{,}08\overline{3}$ ← periodische Dezimalzahl

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \;\middle|\; z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\} \hat{=}$ Menge aller Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen

Beispiel:

$0,\overline{3} = 0,3333\ldots \in \mathbb{Q}$

$12,45\overline{12} = 12,45121212\ldots \in \mathbb{Q}$

Wie bekommt man die Darstellung $\frac{z}{n}$?

$$\left.\begin{aligned} 10x &= 3,\overline{3} = 3,\cancel{3333}\ldots \\ x &= 0,\overline{3} = 0,\cancel{3333}\ldots \end{aligned}\right\} -$$

$$9x = 3 \implies x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\left.\begin{aligned} 100x &= 1245,12\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12} \\ x &= 12,45\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12}\ldots \end{aligned}\right\} -$$

$$\underbrace{99x = 1245,12 - 12,45}_{}$$

bessere Variante

$$\left.\begin{aligned} 10\,000x &= 124512,\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12}\ldots \\ 100x &= 1245,\cancel{12}\,\cancel{12}\,\cancel{12}\ldots \end{aligned}\right\} -$$

$$9900x = 124512 - 1245$$

$$\implies x = \frac{124512-1245}{9900}$$

$$= \frac{123267}{9900}$$

$$\begin{array}{r} 124512 \\ -\quad 1245 \\ \hline 123267 \end{array}$$

Zu jedem $q \in \mathbb{Q}$ gehört ein Punkt auf dem Zahlenstrahl; wir haben aber schon einen weiteren Punkt auf dem Zahlenstrahl gefunden, der zu $\sqrt{2}$ gehört und $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \implies$ reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \triangleq$ Menge aller Dezimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen oder mit unendlich vielen aber periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen oder mit unendlich vielen aber nicht periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen

Die „Rechenregeln" in $\mathbb{R}$ entsprechen den Regeln in $\mathbb{Q}$, d.h. es gelten die 5 Körperaxiome

Name	Addition $(+)$	Multiplikation $(\cdot)$
1) Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
2) Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
3) Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a\cdot 1=a$
4) Distributivgesetze	$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$	$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c)$
5) Existenz inverser Elemente	$\forall a\ \exists (-a): a+(-a)=0$	$\forall a\neq 0\ \exists \frac{1}{a}=a^{-1}: a\cdot\frac{1}{a}=a\cdot a^{-1}=1$

↑ Symmetriebruch bei den Regeln zwischen Addition und Multiplikation

Bemerkung:

1) Wenn man auf einer Menge M eine Rechenoperation $+$ und eine Rechenoperation $\cdot$ erklären kann, die diesen 5 Axiomen genügen, nennt man $(M,+,\cdot)$ einen Körper.

2) $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ und $(\mathbb{R},+,\cdot)$ sind Körper!

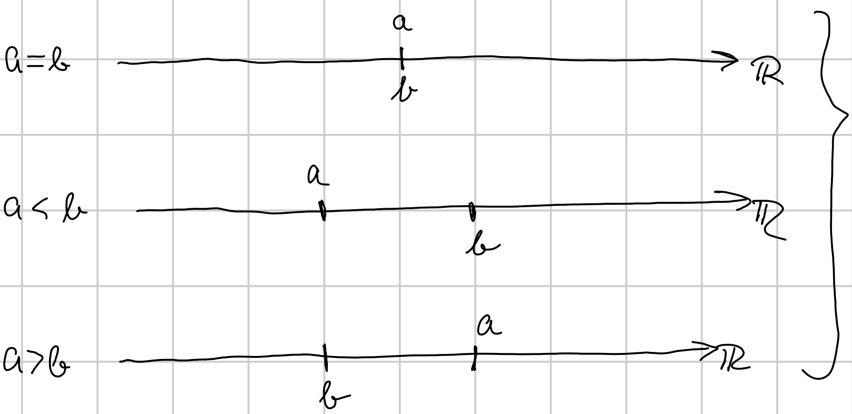
Zu den 5 Körperaxiomen für $\mathbb{R}$ (damit auch für $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$) kommt zusätzlich das Anordnungsaxiom, nämlich

Anordnungsaxiom: Für zwei reelle Zahlen $a,b\in\mathbb{R}$ gilt immer genau eine der folgenden drei Alternativen:

1. $a<b$
2. $a=b$
3. $a>b$

Das Anordnungsaxiom garantiert, dass man zwei reelle Zahlen immer eindeutig in Relation zueinander setzen kann (immer miteinander vergleichen kann mit eindeutigem Ergebnis!)

Auf $\mathbb{R}$ gibt es zwei Rechenoperationen und die Anordnung.



Anordnung durch Position auf den Zahlenstrahl

Wie vertragen sich Anordnung und Rechenoperationen?

Es gilt:

$a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$a > b \Rightarrow a+c > b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$

$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$