24. Vorlesung 07.12.2020

Notiztitel 07.12.2020

2. edX-Test Mittwoch 16.12 (12:00 Uhr) bis Donnerstag 17.12. (18:00 Uhr)

4 Aufgaben, 60 Minuten Bearbeitungszeit ab Start des Tests!

Bemerkungen und Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

1) Ablauf: a) Vorwärtselimination überführt das System in Dreiecks-/Trapezform (Zeilenstufenform)

b) System lösbar, wenn $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$, sonst $\mathbb{L} = \emptyset$

c) Bei Lösbarkeit: Anzahl Unbekannte $- rg(\underline{\underline{A}}) = s \neq 0$

$\Rightarrow$ Rücksubstitution mit s freien Parametern (nur mit freien Parametern läuft die Rücksubstitution.

Anzahl Unbekannte $- rg(\underline{\underline{A}}) = 0 \Rightarrow$

Lösung eindeutig (Rücksubstitution läuft ohne freie Parameter)

2) Beispiel:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 &= 7 \\ 5x_1 + 15x_2 + 2x_3 &= \alpha \quad \leftarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 15 & 2 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{ccc|cl} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 & \mid \cdot(-2) \quad \mid \cdot(-5) \\ 2 & 6 & 5 & 7 & \leftarrow + \\ 5 & 15 & 2 & \alpha & \leftarrow + \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & -3 & 3 & \mid \cdot(-6) \\ 0 & 0 & -18 & \alpha-10 & \leftarrow + \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & -3 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-28 & \end{array}$$

$\rightarrow rg(\underline{\underline{A}}) = 2 = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$ nur für $\alpha = 28$

$\Rightarrow$ System nur lösbar für $\alpha = 28$, sonst $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $\alpha = 28$ gilt

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

erst hier freie Variable notwendig $x_2 = t$

$x_1 = 2 - 3x_2 - 4x_3 = 2 - 3t + 4 \Rightarrow x_1 = 6 - 3t$

$-3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = -1$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha = 28 \text{ hat man } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

3) Struktur der Lösungsmenge eines lin. GLS.

Im Beispiel bei 2) hat man für $\alpha = 28$:

$$\mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_s} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{x} \in \mathbb{L}$ hat also die Darstellung $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_h$, dabei gilt folgende

Behauptung: $\vec{x}_s$ ist eine (sogenannte spezielle) Lösung des inhomogenen Systems $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, d.h. also $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_s = \vec{b}$

$\vec{x}_h$ ist die allgemeine Lösung (mit freien Parametern) des zugehörigen homogenen Systems $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Beweis: a) Durch Nachrechnen

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 15 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 28 \end{pmatrix}}^{\vec{b}} \left[= \overbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \alpha \end{pmatrix}}^{\vec{b}} \text{ für } \alpha = 28 \right]$$

b) Für $\vec{b} = \vec{0}$ (rechte Seite nur Nullen) endet das Gauß-Schema zur Vorwärtselimination bei

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\rightarrow x_2 = t, \; x_1 = -3t$

$\rightarrow x_3 = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_h \, \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Allgemein: $rg(\underline{A}) = rg(\underline{A}|\vec{b})$, $l = \text{Anzahl Unbekannte} - rg(\underline{A}) \neq 0$

$\Rightarrow$ Lösungen mit l freien Parametern $t_1, t_2, \ldots, t_l$

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x}_s + \underbrace{t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_l\vec{x}_l}_{=\vec{x}_h} \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq l \right\}$$

Es gilt: $\underline{A} \cdot \vec{x}_s = \vec{b} \leftarrow \vec{x}_s$ ist eine spezielle Lösung des gegebenen lin. GLS

$\mathbb{L}_h = \left\{ \vec{x}_h = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_l\vec{x}_l \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq s \right\}$

ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen GLS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x}_h$ heißt allgemeine Lösung des homogenen lin. GLS.

4) a) Für zwei verschiedene Lösungen des homogenen lin. GLS $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$,
also $\vec{x}_{h1} = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \cdots + t_l\vec{x}_l$ und $\vec{x}_{h2} = \tilde{t}_1\vec{x}_1 + \tilde{t}_2\vec{x}_2 + \cdots + \tilde{t}_l\vec{x}_l$
gilt:

Auch jede <u>Linearkombination</u> $\alpha \cdot \vec{x}_{h1} + \beta \cdot \vec{x}_{h2}$ löst $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) $\vec{x}_1$ löst das inhom. lin. GLS $\underline{A} \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1$
$\vec{x}_2$ löst das inhom. lin. GLS $\underline{A} \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2$
} Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ identisch, rechte Seiten verschieden $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$

Jede <u>Linearkombination</u> $\alpha\vec{x}_1 + \beta\vec{x}_2$ löst $\underline{A} \cdot \vec{x} = \alpha\vec{b}_1 + \beta\vec{b}_2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Vektoren und Vektorräume</u>

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ $\leftarrow$ Vektor mit n Komponenten

2 Rechenoperationen $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$

$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_n \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$

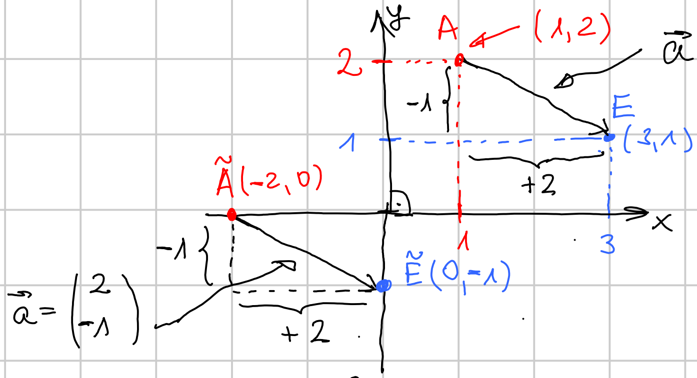
} Komponenten-weise definierte Rechenoperationen

2) Spezialfälle $n = 2$, $n = 3$

c) $n = 2$ → Koordinatensystem mit 2 Achsen (x-Achse/y-Achse) orthogonal zueinander definiert Punkte in der Zahlenebene

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



2 Punkte im $\mathbb{R}^2$, nämlich $A(1,2)$ und $E(3,1)$ definieren den gerichteten Pfeil $\overrightarrow{AE}$ mit Anfangspunkt A und Endpunkt E.

$$P = \{ \overrightarrow{AE} \mid A, E \text{ Punkte im } \mathbb{R}^2 \}$$

$$R \subseteq P \times P = \{ (\overrightarrow{A_1E_1}, \overrightarrow{A_2E_2}) \mid x_{E_1} - x_{A_1} = x_{E_2} - x_{A_2} \wedge y_{E_1} - y_{A_1} = y_{E_2} - y_{A_2} \}$$

↳ R ist eine Äquivalenzrelation auf $P \times P$.

Im Beispiel:

$$\overrightarrow{A_1E_1} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{E_1} - x_{A_1} = 3 - 1 = 2 \\ y_{E_1} - y_{A_1} = 1 - 2 = -1 \end{array}$$

$$\overrightarrow{A_2E_2} = \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}} = \overrightarrow{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{array}{l} x_{E_2} - x_{A_2} = 0 - (-2) = 2 \\ y_{E_2} - y_{A_2} = -1 - 0 = -1 \end{array}$$

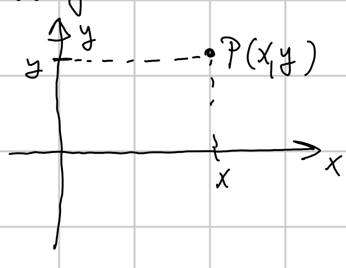
$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}}) \in R$ oder $\overrightarrow{AE}$ ist äquivalent zu $\overrightarrow{\tilde{A}\tilde{E}}$.

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ ist eine Äquivalenzklasse dieser Äquivalenzrelation R, d.h. der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ repräsentiert alle Pfeile $\overrightarrow{AE}$ mit $x_E - x_A = a_1$ und $y_E - y_A = a_2$.

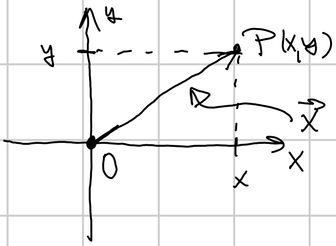
Die äquivalente Pfeile sind parallel zueinander, gleichgerichtet und gleich lang!

Die Menge $\mathbb{R}^2$ (Zahlenebene) kann man aus zwei gleichwertigen Sichten betrachten, nämlich a) Punktesicht

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



b) Vektorsicht:

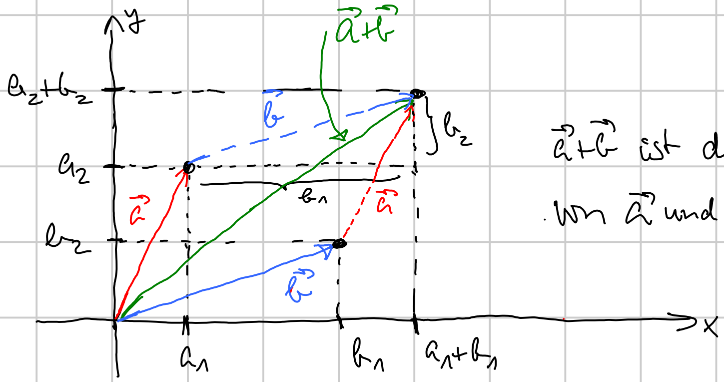


O Koordinatenursprung O(0,0), Pfeil $\overrightarrow{OP}$ wird repräsentiert durch den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$

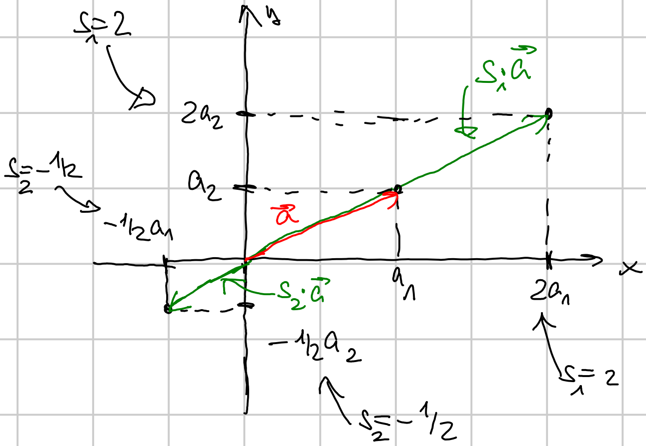
$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$$

→ Rechenoperationen $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}$$



$\vec{a}+\vec{b}$ ist die Hauptdiagonale in dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramms



$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix}$

$s > 0$ Richtung bleibt erhalten

$s < 0$ Richtung kehrt um

$|s| > 1$ Streckung des Pfeils

$|s| < 1$ Stauchung des Pfeils