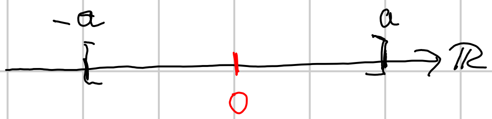
WICHTIG: Im Rahmen der Portfolio-Prüfung zu Mathematik 1 werden 3 edX-Tests angeboten! Zwei von drei Test muss man mitmachen um Punkte (maximal 15%) für die Gesamtprüfung zu erwerben.
Der 1. Test wird freigeschaltet vom 18.11.2020 12:00 Uhr bis 15.11.2020 18:00 Uhr im edX-Portal. Nach dem Anmelden (Einloggen) zum Test hat man individuell 60 Minuten Bearbeitungszeit.

Anordnung, Ungleichungen, Intervalle in $\mathbb{R}$

(1) Für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ hat die Ungleichung $|x| \leq a$ die Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$

$[-a,a]$ ist ein symmetrisch um $0 \in \mathbb{R}$ gelegenes Intervall

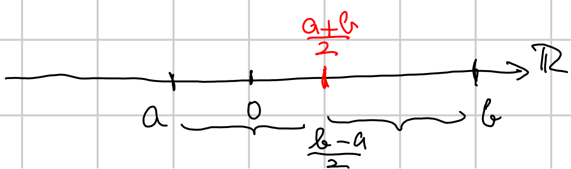
$$|x| \leq a \Leftrightarrow \underbrace{|x - 0| \leq a}_{\text{Menge aller } x \in \mathbb{R}\text{, deren Abstand von } 0 \text{ kleiner oder gleich } a \text{ ist}}$$



(2) $|x - b| \leq a$ hat als Lösungsmenge $\underbrace{\mathbb{L} = [b - a, b + a]}_{\text{Menge aller } x \in \mathbb{R}\text{, deren Abstand von } b \text{ kleiner oder gleich } a \text{ ist}}$, $a \in \mathbb{R}, a > 0$

(3) Behauptung: Es gilt $[a, b] = \left\{x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \left|x - \frac{a+b}{2}\right| \leq \frac{b-a}{2}\right\}$ für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b > a$

„geometrische" Lösung:



$[a,b]$ ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand von $\frac{a+b}{2}$ kleiner oder gleich $\frac{b-a}{2}$ ist

„rechnerische" Lösung: Mit Fallunterscheidung; $a, b \in \mathbb{R}$, $b > a$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \le \frac{b-a}{2}$$

1. Fall $\quad x \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow \overbrace{x - \frac{a+b}{2} \geq 0}^{x \in [\frac{a+b}{2}, +\infty)}$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \le \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow x - \frac{a+b}{2} \le \frac{b-a}{2} \quad \Big| + \frac{a+b}{2}$$

$$\Longleftrightarrow x \le \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$$

$$\Longleftrightarrow x \le \frac{b-a+a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

$$\Longleftrightarrow x \le b \Longleftrightarrow x \in (-\infty, b]$$

$$\mathbb{L}_1 = [\tfrac{a+b}{2}, +\infty) \cap (-\infty, b] = [\tfrac{a+b}{2}, b]$$

2. Fall $\quad x < \frac{a+b}{2} \Rightarrow \overbrace{x - \frac{a+b}{2} < 0}^{x \in (-\infty, \frac{a+b}{2})}$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \le \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-\left(x - \frac{a+b}{2}\right) \le \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x + \frac{a+b}{2} \le \frac{b-a}{2} \quad \Big| - \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \le \frac{b-a}{2} - \frac{a+b}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \le \frac{b-a-(a+b)}{2} \Longleftrightarrow$$

$$-x \le \frac{b-a-a-b}{2} = \frac{-2a}{2} = -a \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$\Longleftrightarrow x \geq a \Longleftrightarrow x \in [a, +\infty)$$

$$\mathbb{L}_2 = [a, +\infty) \cap (-\infty, \tfrac{a+b}{2}) = [a, \tfrac{a+b}{2})$$

insgesamt: $\quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = [a, \tfrac{a+b}{2}) \cup [\tfrac{a+b}{2}, b] = [a, b]$

Potenzen und Wurzeln in $\mathbb{R}$

① Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist $\underbrace{a^0 = 1 \text{ und } a^n = a \cdot a^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$

Rekursive Definition der n-ten Potenz a^n für $a \neq 0$

Es gilt: $\quad a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal}}$ Produkt von a mit a n-mal

② $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\quad 0^0$ ist nicht definiert

③ $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$, $\quad \frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \Rightarrow \frac{1}{a^k} = a^{-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$; $\quad$ Bezeichnungen $\quad a^n$ ← n Exponent (der Potenz), ← a Basis (der Potenz)

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

↑ allg. binomische Formel

④ <u>Definition</u> (n-te Wurzel)

a) Für $n \in \mathbb{N}$, n gerade (d.h. $n = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$), ist definiert:

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, ist $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte nicht negative

↑ lies: n-te Wurzel a

Lösung der Gleichung $x^n = a$.

⌈ $\sqrt[2]{4} = 2$ denn 2 ist die nicht negative Lösung von $x^2 = 4$

statt $\sqrt[2]{a}$ schreibt man einfach $\sqrt{a}$.

Wurzelexponent

<u>Bezeichnung</u>: $\sqrt[n]{a}$

Radikand ⌋

b) Für $n \in \mathbb{N}$, n ungerade (d.h. $n = 2k+1$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$) ist

definiert:

$\forall a \in \mathbb{R}$ ist $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung $x^n = a$.

↑ lies: n-te Wurzel von a

⌈ $\sqrt[3]{-8} = -2$ denn -2 ist die eindeutig bestimmte Lösung

von $x^3 = -8$: $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$

$\sqrt[3]{64} = 4$ denn $4^3 = 64$, d.h. 4 ist die eindeutig bestimmte

Lösung von $x^3 = 64$ ⌋

<u>Bemerkung</u>:

① Wenn n gerade ist und $a > 0$ hat $x^n = a$ die beiden Lösungen

$x_1 = \sqrt[n]{a}$ und $x_2 = -\sqrt[n]{a}$ denn

$x_1^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$ nach Definition [MERKE: $(\sqrt[n]{a})^n = a$]

$$x_2^n = (-\sqrt[n]{a})^n = ((-1)\cdot\sqrt[n]{a})^n = \underbrace{(-1)^n}_{=+1 \text{ für } n \text{ gerade}} \cdot (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

② $\sqrt[n]{0} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[1]{a} = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$

③ Darstellung von $\sqrt[n]{a}$ als Potenz:

Gesucht α mit $\sqrt[n]{a} = a^\alpha$ ← Darstellung von $\sqrt[n]{a}$ als Potenz

Falls es ein solches α gibt, erhält man mit den Rechenregeln für Potenzen

$$a^{1} = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^\alpha)^n = a^{\alpha \cdot n}$$

$\Rightarrow$ es muss gelten: $\alpha \cdot n = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$.

$$\boxed{\text{Es gilt also: } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

④ Rechenregeln für Wurzeln (Existenz der Wurzeln wird vorausgesetzt)

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Bemerkung: Im Regelfall gilt

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$\sqrt{25} = 5$, $\underbrace{\sqrt{25}}_{5} = \sqrt{16+9} \neq 4+3 = \sqrt{16} + \sqrt{9}$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = \left(a^{1/n}\right)^{1/k} = a^{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{n\cdot k}} = \sqrt[n\cdot k]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (a^k)^{1/n} = a^{k\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{1}{n}\cdot k} = (a^{\frac{1}{n}})^k = (\sqrt[n]{a})^k$$

Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}$

① $x^2 = a$:
- $\mathbb{L} = \emptyset$ für $a < 0$
- $\mathbb{L} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ für $a > 0$
- $\mathbb{L} = \{0\}$ für $a = 0$

denn: $x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

$x < 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0$

$\Big\}$ $x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$

$0^2 = 0 \cdot 0 = 0$

Es gilt: $x^2 \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ sogar $x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge 0^2 = 0$

d.h. $x^2 = 0$ hat nur die Lösung $x = 0$

(2) Wir hatten definiert $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$,

es gilt eine andere Darstellung für $|x|$, nämlich $|x| = \sqrt{x^2}$

$\lceil\ 4 = |-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}\ \rfloor$

(3) Für $a \geq 0$ gilt: $x^2 \leq a \iff |x| \leq \sqrt{a}$

$\iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

d.h. die Lösungsmenge der Ungleichung $x^2 \leq a$ für $a \geq 0$ ist das Intervall $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

(4) Quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$

In (1) haben wir gesehen: Für $a \in \mathbb{R}$ gibt es als Lösungsmengen von $x^2 = a$ drei Möglichkeiten, nämlich $\mathbb{L} = \emptyset$ falls $a < 0$ ist, $\mathbb{L} = \{0\}$ falls $a = 0$, $\mathbb{L} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ falls $a > 0$ ist.

allgemeine quadratische Gleichung $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ mit $a_2 \in \mathbb{R}$, $a_2 \neq 0$
$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Wegen $a_2 \neq 0$ kann man durch a_2 teilen und erhält

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

setzt man $\frac{a_1}{a_2} = p \in \mathbb{R}$ und $\frac{a_0}{a_2} = q \in \mathbb{R}$ hat man die quadratische Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$

Zur Lösung macht man die sog. quadratische Ergänzung

$(x+b)^2 = x^2 + 2b x + b^2$

$x^2 + p x = x^2 + 2b x$

$\lfloor\ b = \frac{p}{2}$

$$x^2 + px + q = 0 \iff$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + q = 0 \iff$$

$$\underbrace{\left(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}\ \underbrace{- \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2}_{=0} + q = 0 \iff$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \iff$$

damit erhält man $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \leftarrow \tilde{x}^2 = a$ mit $a = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

$\tilde{x} = \left(x + \frac{p}{2}\right)$

<u>1. Fall:</u> $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

<u>2. Fall:</u> $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\tilde{x} = 0\} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

$\tilde{x} = 0 \Leftrightarrow x + \frac{p}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2}$

<u>3. Fall:</u> $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\tilde{x}_1 = -\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,\ \tilde{x}_2 = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

$$= \left\{x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,,\ x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$$

<u>Beispiel:</u> $x^2 - 5x + 6 = 0$

$p = -5,\ q = 6 \Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 6 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} > 0$

$\Rightarrow$ es gibt 2 Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Es gilt: $(x - x_1)\cdot(x - x_2) = (x-2)\cdot(x-3) = x^2 - 5x + 6$

oder $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3) = 0$