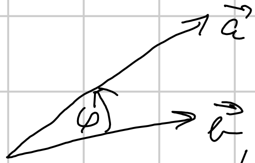
Skalarprodukt / Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad : \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

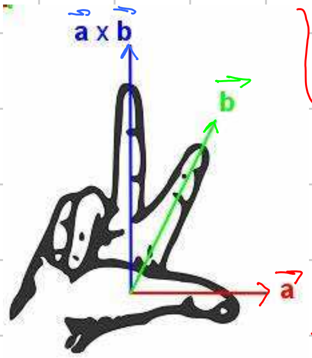


geometrische Deutung $\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$ (*)

$0 \leq \varphi \leq \pi \; (0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2,$$

geometrische Deutung: $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$



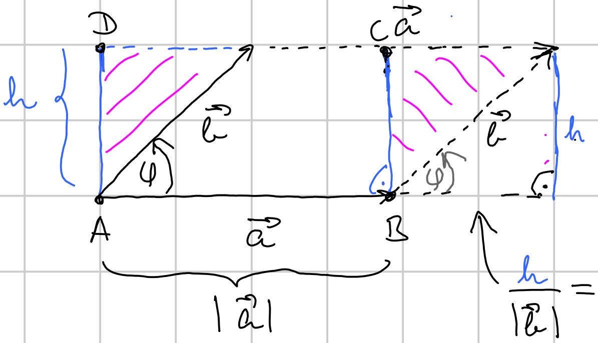
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ bilden ein Rechtssystem: 3-Finger-Regel der rechten Hand

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi)$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}| \left(1 - \cos^2(\varphi)\right) \leftarrow \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

$$= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$$

$$\Rightarrow \boxed{|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)}$$



$\leftarrow$ Parallelogramm erzeugt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$: P

Fläche (P) = Fläche (R) = $|\vec{a}| \cdot h$

$\frac{h}{|\vec{b}|} = \sin(\varphi) \Rightarrow h = |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$

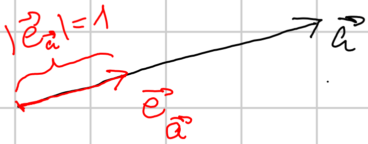
insgesamt: Fläche (P) $= |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$

MERKE: $|\vec{a} \times \vec{b}|$ entspricht dem Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ erzeugten Parallelogramms; die Richtung des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ bestimmt die Drei-Finger-Regel der rechten Hand!

Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$ ($\in \mathbb{R}^3$, geht völlig analog für $\in \mathbb{R}^n$), $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow$

$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ der Einheitsvektor in Richtung $\vec{a}$, also $|\vec{e}_{\vec{a}}| = 1$

und $\vec{e}_{\vec{a}}$ zeigt in dieselbe Richtung wie $\vec{a}$:



<u>Beispiele:</u>

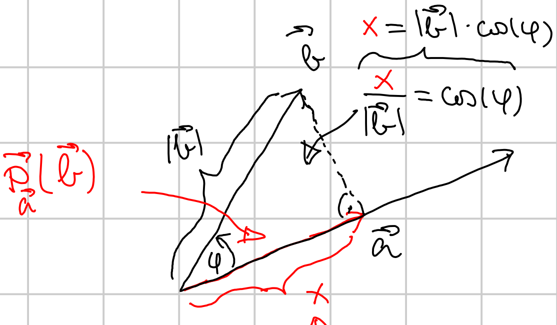
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{5} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \Rightarrow$$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}} \cdot \vec{a}$$



Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$: $\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b})$

$$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = x \cdot \vec{e}_{\vec{a}} = x \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$|\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b})| \hat{=}$ Länge der Projektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$

Nach (*) gilt: $\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \cancel{|\vec{b}|} \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot \cancel{|\vec{b}|}} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}}$$

Beispiele:

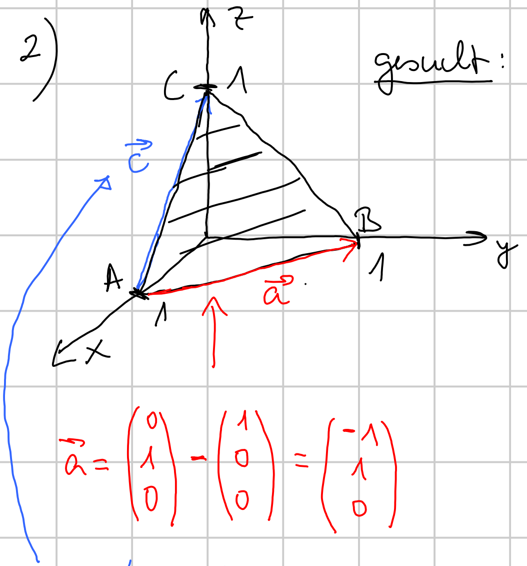
1) $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}: \qquad \vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|^2}\cdot\vec{a} = \frac{2}{14}\vec{a} = \frac{1}{7}\vec{a} = \begin{pmatrix}1/7\\2/7\\3/7\end{pmatrix}$

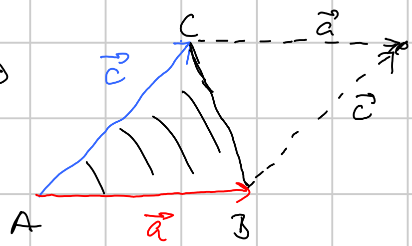
$$|\vec{a}|^2 = 1^2+2^2+3^2 = 14$$

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 1-2+3 = 2$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \dfrac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{b}|^2}\cdot\vec{b} \\[2ex] |\vec{b}|^2 = 1^2+(-1)^2+1^2 = 3 \end{array}\right\} \quad \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{2}{3}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix}2/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$$

2) gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks $\Delta(A,B,C)$





$$\vec{a} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$\Delta(A,B,C)$ entspricht der Hälfte des von $\vec{a}$ und $\vec{c}$ erzeugten Parallelogramms

$$\left.\begin{array}{l} \Longrightarrow \ Fl(\Delta) = \frac{1}{2}\cdot F(P) = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{c}| \\[2ex] \vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1-0\cdot0\\(-1)\cdot0-(-1)\cdot1\\(-1)\cdot0-(-1)\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \\[2ex] |\vec{a}\times\vec{c}| = \sqrt{3} \end{array}\right\} \ Fl(\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Beispielaufgaben mit Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

(1) Gegeben sind die Ebenen $E_1: \ 2x+3y-z=4$ und

$$E_2: \ \vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (falls $\neq \emptyset$) die Schnittmenge $E_1 \cap E_2$.

a) $E_1 \cap E_2$ ist $\emptyset$, falls E_1 und E_2 parallel zueinander aber nicht identisch sind;

b) $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$, falls $E_1 = E_2$ ist, d.h. die Ebenen sind identisch;

c) $E_1 \cap E_2$ ist die <u>Schnittgerade</u> der Ebenen

Genau eine der drei Alternativen a), b), c) tritt ein!

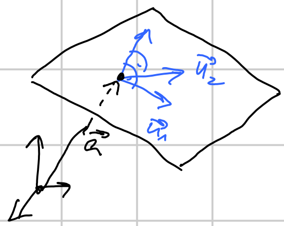
① Für den Aufpunkt $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ von E_2 gilt: $-2 = 2\cdot 1 + 3\cdot(-1) - 1 \neq 4 \Rightarrow$

Aufpunkt von E_2 liegt nicht in E_1: $2x+3y-z=4$. (Fall b) scheidet aus).

② Normalenvektor zu E_1: $\vec{N}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ Richtungsvektoren

Normalenvektor zu E_2: $\vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}}_{\vec{N}_2 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2}$



$$\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot 2 - (-3)\cdot 0\\ (-1)\cdot 0 - 2\cdot 2\\ 2\cdot(-3) - (-1)\cdot 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-4\\-5\end{pmatrix} = \vec{N}_2$$

$\vec{N}_2 \neq \lambda\cdot\vec{N}_1 \ \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{N}_1$ und $\vec{N}_2$ sind unterschiedlich gerichtet, die Ebenen E_1 und E_2 sind auch nicht parallel (Fall a) scheidet aus)

③ <u>Schnittgerade ausrechnen</u>

E_1: $2x+3y-z=4$ $\quad$ E_2: $\vec{e}_2(s,t) = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\+2\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1+2s-t\\-1+s-3t\\1+2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in E_2$$

$4 = 2\cdot(1+2s-t) + 3\cdot(-1+s-3t) - (1+2t)$

$4 = -2 + 7s - 13t$

$6 = 7s - 13t \Rightarrow s = \frac{6}{7} + \frac{13}{7}t$

<u>Schnittgerade</u> $\vec{g}(t) = \vec{e}_2\left(\frac{6}{7} + \frac{13}{7}t, t\right) = \begin{pmatrix}1 + 12/7 + 26/7\,t - t\\ -1 + 6/7 + 13/7\,t - 3t\\ 1 + 2t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}19/7 + 19/7\,t\\ -1/7 - 8/7\,t\\ 1+2t\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}19/7\\-1/7\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}19/7\\-8/7\\2\end{pmatrix}$$

② Gesucht ist die Gerade durch den Punkt $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, die senkrecht ($\perp$) zur Ebene E mit $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ verläuft.

$$\vec{g}(u) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + u \cdot \underbrace{\left[\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right]}_{\text{steht senkrecht auf der Ebene}}$$

$\vec{g}(0) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ← Punkt liegt auf der Geraden

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot1-0\cdot(-1)\\2\cdot(-1)-(-1)\cdot1\\(-1)\cdot0-2\cdot1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

Insgesamt $\vec{g}(u) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$

③ Gegeben ist $E_1: -x+2y-3z=1$ und $E_2: 2x-5y+z=4$.
Berechnen Sie $E_1 \cap E_2$

$rg(\underline{A}) = rg(\underline{A}|\vec{b}) = 2$
System lösbar mit $1 = 3-2$ freien Parametern

x	y	z		
−1	2	−3	1	$\cdot 2$
2	−5	1	4	+
−1	2	−3	1	
0	−1	−5	6	

$x = 2y - 3z - 1 = 2\cdot(-6-5t) - 3t - 1 \Rightarrow x = -13 - 13t$

$z = t$, $y = -6 - 5t$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix}-13-13t\\-6-5t\\t\end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix}-13\\-6\\0\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-13\\-5\\1\end{pmatrix}$ Parameterdarstellung der Schnittgeraden