35. Vorlesung 11.01.2021

Notiztitel 11.01.2021

Am Donnerstag, dem 14.01.2021 gibt es eine 2. Probeklausur (Osca-Portal).

Lösungsvorschläge dazu gibt es am Sonntag, dem 17.01.2021, ab 16:00 Uhr (Osca-Portal).

nur für quadratische Matrizen definiert!

Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix

Typische Schritte des Gauß-Algorithmus im Gauß-Schema

$$
\begin{array}{ccc|c|l}
a_{i1} & \cdots & a_{in} & b_i & \mid \cdot\, a_{i+1\,1} \quad ^{1)} \\
a_{i+1\,1} & \cdots & a_{i+1\,n} & b_{i+1} & \mid \cdot\,(-a_{i1}) \quad ^{2)} \;\; + \\
\hline
a_{i1} & \cdots & a_{in} & b_i & \\
0 & \tilde{a}_{i+1\,2} \cdots & \tilde{a}_{i+1\,n} & \tilde{b}_{i+1} &
\end{array}
$$

soll im nächsten Schritt 0 werden

Für die Determinante bedeutet das:

1) hat keine Auswirkung, Determinante bleibt unverändert
2) Determinante verändert sich um den Faktor $(-a_{i1})$

Auswirkung des Tauschens von Zeilen im Gauß-Schema auf die Determinante

Beispiel:

$$
\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\underline{\underline{E}}| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1
$$

Tauschen von 1. und 2. Zeile

$$
\tilde{\underline{\underline{E}}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{\underline{\underline{E}}}| = +0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}
$$

$$
= -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1
$$

MERKE: Jedes Vertauschen von Zeilen verändert die Determinante um den Faktor -1.

Für eine (obere) Dreiecksmatrix

Hauptdiagonale

$$
\underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ 0 & & & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}
$$

unterhalb der Hauptdiagonalen sind alle Matrixkoeff. $= 0$

gilt: $|\underline{\underline{D}}| = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}\cdot \ldots \cdot a_{nn}$,

d.h. die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente!

Beweisidee (exemplarisch für (3x3)-Matrix)

$$\underline{\underline{D}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow |\underline{\underline{D}}| = + a_{11}\cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}}^{=0} + a_{13}\cdot \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}^{=0}$$

$$= a_{11}\cdot (a_{22}\cdot a_{33} - a_{23}\cdot 0) = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

Beispiel zur Ausnutzung des Gauß-Schemas zur Determinantenberechnung

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{gesucht } |\underline{\underline{A}}| = \det(\underline{\underline{A}})$$

über die Definition: 1. Schritt liefert alternierende gewichtete Summe von 4 (3x3)-Determinanten

2. Schritt liefert für jede der verbleibenden 4 Determinanten eine gewichtete Summe von 3 (2x2)-Determinanten.

Insgesamt: Gewichtete Summe von 12 (2x2)-Determinanten

Alternativ: Gauß-Schema

2	3	−1	4	(−1)
1	1	2	1	
−2	1	1	−3	(−1)
1	2	2	1	
1	1	2	1	$1\cdot(-1)$ $1\cdot 2$ $1\cdot(-2)$
1	2	2	1	+
−2	1	1	−3	+
2	3	−1	4	+
1	1	2	1	$1\cdot(-3)$ $1\cdot(-1)$
0	1	0	0	
0	3	5	−1	
0	1	−5	2	
1	1	2	1	
0	1	0	0	
0	0	5	−1	+
0	0	−5	2	
1	1	2	1	

2-mal Zeilentausch verändert die Determinante um den Faktor $(-1)\cdot(-1) = 1$ also insgesamt nicht!

diese Operationen verändern die Determinante nicht

diese Operationen verändern die Determinante nicht

diese Operation verändert die Determinante nicht

$$\begin{array}{cccc|} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Insgesamt:
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$$

2. Beispiel:

$$\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$ gesucht ist $\det(\underline{\underline{B}}) = |\underline{\underline{B}}|$

$$\begin{array}{ccc|l} 3 & 1 & 2 & |\cdot 2 \quad |\cdot 4 \\ 2 & 3 & 0 & |\cdot(-3) \; \hookleftarrow + \\ 4 & 6 & -1 & |\cdot(-3) \; \hookleftarrow + \\ \hline 3 & 1 & 2 & \\ 0 & -7 & 4 & |\cdot(-2) \\ 0 & -14 & 11 & \hookleftarrow + \\ \hline 3 & 1 & 2 & \\ 0 & -7 & 4 & \\ 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

diese Operationen verändern die Determinante um den Faktor $(-3)\cdot(-3) = 9$

diese Operation verändert die Determinante nicht

Insgesamt: $-63 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-63}{9} = -7 \checkmark$$

Für (3x3)-Determinanten (und nur für die) gilt die

Regel von Sarrus

$$\left.\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = +(-9)+0+24-(-2)-0-24 = -9+2=-7 \checkmark$$

Definition:

Gegeben ist eine $(n\times n)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$.

1) Ein Vektor $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, $\vec{v}\neq\vec{0}$ heißt Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$, falls es eine reelle Zahl $\lambda\in\mathbb{R}$ gibt mit

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}=\lambda\cdot\vec{v}$$

2) Die Zahl λ aus Teil 1) heißt Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$.

Bemerkung:

1) Wenn $\vec{v}$ Eigenvektor von $\underline{\underline{A}}$ zum Eigenwert λ ist, hat die Multiplikation $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}$ die „Wirkung" den Vektor $\vec{v}$ auf $\lambda\cdot\vec{v}$ zu „Strecken".

2) Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}\in M(n\times n)$?

$$\underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}=\lambda\vec{v} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}-\lambda\cdot\vec{v}=\vec{0}, \quad \underline{\underline{E}}\cdot\vec{v}=\vec{v} \text{ mit } \underline{\underline{E}}=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & 1 & \\ 0 & & \ddots & 1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\vec{v}-\lambda\cdot\underline{\underline{E}}\cdot\vec{v}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underbrace{(\underline{\underline{A}}-\lambda\underline{\underline{E}})}_{(n\times n)\text{-Matrix}}\vec{v}=\vec{0}}$$

$\leftarrow$ λ ist Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$, wenn dieses homogene lin. GLS. Lösungen $\vec{v}\neq\vec{0}$ hat; diese Lösungen $\vec{v}\neq\vec{0}$ sind die Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ zum Eigenwert λ.

3) Erinnerung: Ein homogenes lin. GLS $\tilde{\underline{\underline{A}}}\cdot\vec{x}=\vec{0}$ hat nur die Lösung $\vec{x}=\vec{0}$ genau dann, wenn $rg(\tilde{\underline{\underline{A}}})=n \Leftrightarrow$ am Ende der Vorwärtselimination nach Gauß hat man im linken Teil des Gauß-Schemas eine obere Dreiecksmatrix

ohne Nullzeilen, d.h. alle n Hauptdiagonalelemente sind $\neq 0 \Leftrightarrow$
Produkt der Hauptdiagonalelemente $\neq 0 \Leftrightarrow |\underline{\underline{\tilde{A}}}| = \det(\underline{\underline{\tilde{A}}}) \neq 0$

MERKE: $\underline{\underline{\tilde{A}}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit $\underline{\underline{\tilde{A}}} \in M(n \times n)$ ist eindeutig lösbar mit $\vec{x} = \vec{0}$ falls gilt $rg(\underline{\underline{\tilde{A}}}) = n \Leftrightarrow \det(\underline{\underline{\tilde{A}}}) \neq 0$.

Damit folgt: $\underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}}_{\underline{\underline{\tilde{A}}} \cdot \vec{v} = \vec{0}}$ hat nur dann Lösungen $\vec{v} \neq 0$, wenn

mit $\underline{\underline{\tilde{A}}} = \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$ gilt: $rg(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) < n \Leftrightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$

Insgesamt: $\lambda \in \mathbb{R}$ ist Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$ falls gilt: $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$;
jede Lösung $\vec{v} \neq \vec{0}$ von $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ ist dann Eigenvektor zum Eigenwert λ, d.h.

1. Schritt: Bestimme $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$
λ ist dann Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$

2. Schritt: Löse für dieses λ (also diesen Eigenwert) das homogene lin. GLS $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$. Jede Lösung $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Beispiel:

(1) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & +1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ← gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$

1. Schritt: $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 3 & +1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & +1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$0 \stackrel{!}{=} \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & +1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2$$
$$= 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$

mit (p,q)-Formel: $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$
$$= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 = 1 \,, \; \lambda_2 = 4$

2. Schritt: Zu $\lambda_1 = 1$ löse $(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ und
zu $\lambda_2 = 4$ löse $(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

a) $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

v_1	v_2		
2	1	0	$\cdot(-1)$
2	1	0	$\leftarrow$
2	1	0	
0	0	0	

$\rightarrow v_2 = t \,, \; v_1 = -\frac{1}{2} t \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$

Zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$ gehören die Eigenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \; t \neq 0$

b) $\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 4\underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

v_1	v_2		
-1	1	0	$\cdot 2$
2	-2	0	$\leftarrow$
-1	1	0	
0	0	0	

$\rightarrow v_2 = t \,, \; v_1 = t \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$

Zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$ gehören die Eigenvektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \; t \neq 0$