M a t h e m a t i k 1 f ü r I n f o r m a t i k

Kleingruppenübung

Blatt 02

Kampmann/Meyer HS Osnabrück, Fakultät I.u.I.

★

Erinnern Sie sich an folgende Begriffe, Sachverhalte und Sätze: Relationen, Abbildungen, Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen, endliche Summen, vollständige Induktion

★

1. Aufgabe: Gegeben sind die Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und die Relation $R \subseteq A \times A$ mit $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (4, 5), (5, 3), (5, 6), (6, 6)\}$

   (a) Ist R reflexiv, symmetrisch, transitiv, antisymmetrisch?

   (b) Ergänzen Sie R durch passende Elemente $(a_1, a_2) \in A \times A$ so, dass R eine Äquivalenzrelation ist und bestimmen Sie die Äquivalenzklassen zu $\overline{3} = [3]$ und $\overline{6} = [6]$.

2. Aufgabe: Gegeben ist die Menge M aller Menschen.

   (a) Die Relation $F \subseteq M \times M$ ist definiert durch $(a, b) \in F \Leftrightarrow$ a und b gehören zur selben Familie.

   (b) Die Relation $B \subseteq M \times M$ ist definiert durch $(a, b) \in B \Leftrightarrow$ a ist Bruder von b.

   (c) Die Relation $A \subseteq M \times M$ ist definiert durch $(a, b) \in A \Leftrightarrow$ a ist so alt wie b.

   Welche der angegebenen Relationen ist eine Äquivalenzrelation? (Antwort mit Begründung!). Wie sehen die zugehörigen Äquivalenzklassen aus?

3. Aufgabe: Gegeben sind folgende Mengen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{a, b, c\}$ und die Relationen

   $R_1 = \{(1, a); (2, b); (3, c); (4, b); (5, b)\} \subseteq A \times B$,

   $R_2 = \{(a, 1); (a, 2); (a, 3); (a, 4); (a, 5)\} \subseteq B \times A$,

   $R_3 = \{(1, b); (3, c)\} \subseteq A \times B$

Wir machen folgende
Definition:
Gegeben sind die (zweistelligen) Relationen $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$.
Dann ist die Verknüpfung $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$ definiert durch: $(a, c) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists x \in B : (a, x) \in R_1 \wedge (x, c) \in R_2$.

a) Bilden Sie (falls diese Relationen definiert sind) die Verknüpfungen: $R_4 = R_1 \circ R_2$, $R_5 = R_2 \circ R_1$, $R_6 = R_3 \circ R_2$ und $R_7 = R_2 \circ R_3$

b) Welche der 7 Relationen ist eine Funktion? (Antwort mit Begründung!).

4. Aufgabe: Gegeben ist die Menge $M = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$. Betrachten Sie die Relation $T = \{(x, y) \in M \times M | \text{x ist Teiler von y}\}$

(a) Untersuchen Sie, ob T eine Äquivalenzrelation oder Ordnungsrelation ist.

(b) Begründen Sie, warum T keine Funktion ist.

(c) Geben Sie eine Teilmenge $\tilde{T}$ von T an, die eine Funktion ist.

5. Aufgabe: (a) Geben Sie die Zahlen $a_i = \dfrac{1}{i^2 + 1}$. Berechnen Sie folgende Summen $\sum\limits_{i=-2}^{3} a_i$ und $\sum\limits_{i=1}^{4} i \cdot a_i$.

(b) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} (5k + 1)$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (2 - k)$ und (möglichst geschickt!) $\sum\limits_{i=11}^{100} i$.

(c) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=0}^{10} (k + 4 \cdot 2^k)$.

(d) Schreiben Sie die Summe $101 + 202 + 303 + 404 + \ldots + 909 + 1010$ in Summenschreibweise, also in der Form $\sum\limits_{i=u}^{o} a_i$, und berechnen Sie den Wert der Summe.

(e) Berechnen Sie $\sum\limits_{k=1}^{5} (2 \cdot k - 1)$ (siehe auch Aufgabe 6 (c)).

6. Aufgabe: Beweisen Sie mit vollständiger Induktion:

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $11 | 10^{2n} - 1$.

(b) $\forall n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $11 | 10^{2n+1} + 1$.

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2 \cdot k - 1) = n^2$.

(d) $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ gilt: $2^n \geq n^2$.