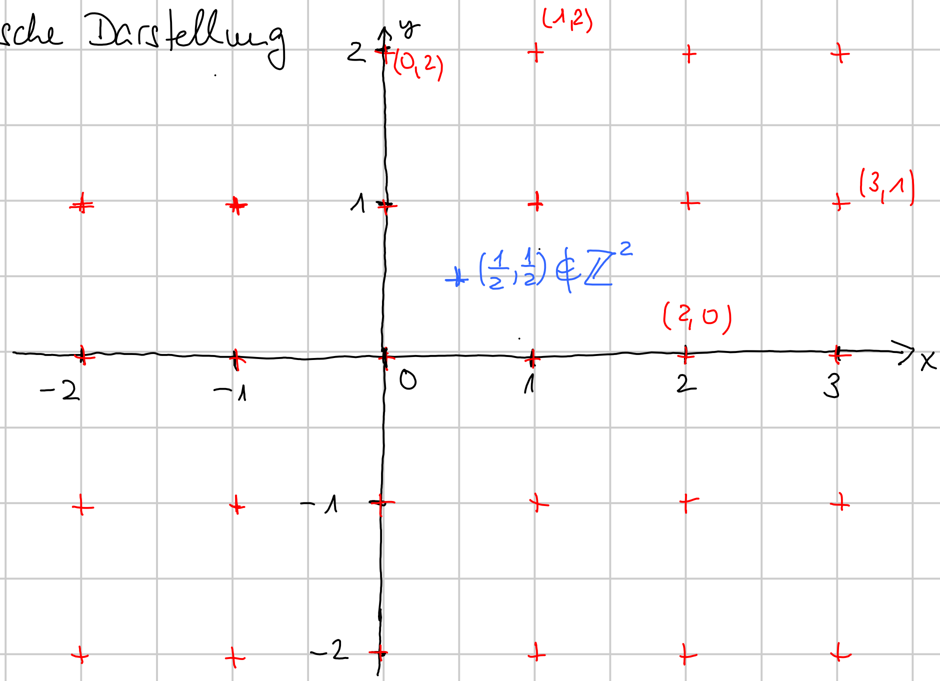
4. Vorlesung 13.10.2020

<u>Beispiel:</u> Kartesisches Produkt von Mengen

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z} \}$$

$$(-1,4) \in \mathbb{Z}^2, \quad (7,0) \in \mathbb{Z}^2, \quad \left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{4}\right) \notin \mathbb{Z}^2$$

grafische Darstellung



$\mathbb{Z}^2$ ist die Menge der „Gitterpunkte" in der Zahlenebene, die durch die beiden Zahlenstrahlen gegeben ist

<u>Definition:</u>

1) Gegeben sind die Mengen A und B $(A \neq \emptyset, B \neq \emptyset)$.
Jede Teilmenge $R \subseteq A \times B$ heißt (2-stellige) Relation über A, B.
Für $A = B$: $R \subseteq A \times A = A^2$ heißt (2-stellige) Relation über A.

2) Gegeben sind die Mengen $A_1, A_2, \dots, A_n$ $(A_i \neq \emptyset \ \forall i \in \{1,2,\dots,n\})$.
Jede Teilmenge $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ heißt (n-stellige) Relation über $A_1, A_2, \dots, A_n$.
Für $A_1 = A_2 = \dots = A_n$: $R \subseteq A_1 \times A_1 \times \dots \times A_1 = A_1^n$ heißt (n-stellige) Relation über A_1

<u>Beispiele:</u>

1) M = Menge aller Menschen
R 2-stellige Relation über M ist gegeben durch
$R = \{ (m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1 \text{ ist Vater von } m_2 \}$ ⟵ „Vater-Relation"

2) P = Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball

$\tilde{R}$ 2-stellige Relation über P ist gegeben durch

$\tilde{R} = \{ (f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2 \}$

„Fußballer-Relation"

3) $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ist definiert durch

$K = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y \}$ ← „Kleiner-Relation"

K ist eine 2-stellige Relation über $\mathbb{Z}$

4) Man definiert für $a, b \in \mathbb{Z}$:

kleiner-gleich

$a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$

$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$

größer-gleich

$KG \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$ ist definiert durch

$KG = \{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y \}$ ← „Kleiner-Gleich-Relation"

KG ist eine 2-stellige Relation über $\mathbb{Z}$

Definition:

1) Eine 2-stellige Relation R über A, $A \neq \emptyset$, heißt Äquivalenzrelation, falls gilt:

a) R ist reflexiv, d.h. $(a,a) \in R \ \forall a \in A$

b) R ist transitiv, d.h. $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

c) R ist symmetrisch, d.h. $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$

2) Eine 2-stellige Relation über A, $A \neq \emptyset$, heißt Ordnungsrelation, falls gilt:

$(a,a) \in R \ \forall a \in A$

a) R ist reflexiv, b) R ist transitiv

Ausgangsvoraussetzung für Prüfung auf Antisymmetrie

c) R ist antisymmetrisch, d.h. $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

d.h. für $a \neq b$ ist niemals $(a,b) \in R$ und $(b,a) \in R$

Beispiele:

1) $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist definiert durch $G = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y\}$ ← „Gleich-Relation"

Es gilt: $\forall x \in \mathbb{Z}: x = x \Rightarrow (x,x) \in G \; \forall x \in \mathbb{Z}$, G ist reflexiv

$(x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow (x,z) \in G$, G ist transitiv

$(x,y) \in G \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow (y,x) \in G$, G ist symmetrisch

Insgesamt: Die „Gleich-Relation" G über $\mathbb{Z}$ ist eine Äquivalenzrelation

2) $KG \subseteq \mathbb{Z}^2$ mit $KG = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$ ← „Kleiner-Gleich-Relation"

Es gilt:

$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in KG \Rightarrow x \leq y \\ (y,x) \in KG \Rightarrow y \leq x \end{array}\right\}$ falls $(x,y) \in KG$ und $(y,x) \in KG$ gilt, hat man $x \leq y \leq x \Leftrightarrow x = y$

d.h. KG ist antisymmetrisch

$\forall x \in \mathbb{Z}: \underbrace{x \leq x}_{} \Rightarrow (x,x) \in KG$, KG ist reflexiv

$(x < x) \vee (x = x)$ ← das wahre Aussage solange einer der Inputs $x < x$ / $x = x$ wahr ist

$\forall (x,y) \in KG, (y,z) \in KG$:

$\left.\begin{array}{l} (x,y) \in KG \Rightarrow x \leq y \\ (y,z) \in KG \Rightarrow y \leq z \end{array}\right\} \Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x,z) \in KG$,

KG ist transitiv

Insgesamt: Die „Kleiner-Gleich-Relation" KG über $\mathbb{Z}$ ist eine Ordnungsrelation

3) Welche der oben definierten Eigenschaften haben die folgenden Relationen

a) $R = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1 \text{ ist Vater von } m_2\}$ ← „Vater-Relation"

(M: Menge aller Menschen)

b) $\tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2\}$

(P: Menge aller Profifußballer im DFB)

c) $K = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$ ← „Kleiner-Relation" zu a) R ist weder reflexiv, noch transitiv, noch symmetrisch

niemand ist sein eigener Vater

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow$ a ist Großvater von c nicht Vater

niemand kann sein eigenes Kind sein

zu b) $\tilde{R}$ ist Äquivalenzrelation, denn

$(f,f) \in \tilde{R} \; \forall f \in P \Rightarrow \tilde{R}$ ist reflexiv

jeder Fußballer gehört zu einem Verein

$(f_1,f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow$ f_1 ist im selben Verein wie f_2

$(f_2,f_3) \in \tilde{R} \Rightarrow$ f_2 ist im selben Verein wie f_3

$\Rightarrow$ f_1 ist im selben Verein wie f_3

$\Rightarrow \tilde{R}$ ist transitiv

$(f_1,f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow$ f_1 ist im selben Verein wie f_2

$\Rightarrow$ f_2 ist im selben Verein wie f_1

$\Rightarrow (f_2,f_1) \in \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R}$ ist symmetrisch

zu c) $K = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$

$x < x$ ist falsche Aussage $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x,x) \notin K \; \forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow K$ ist nicht reflexiv

ein konkretes Gegenbeispiel reicht aus

für $(1,1)$ gilt $1 < 1$ nicht! Damit ist $(1,1) \notin K$

K ist nicht reflexiv

$(x,y) \in K \Rightarrow x < y$

$(y,z) \in K \Rightarrow y < z$

$\Rightarrow x < y < z \Rightarrow x < z \Rightarrow (x,z) \in K$

$\Rightarrow K$ ist transitiv

$(x,y) \in K \Rightarrow x < y \Rightarrow y < x$ ist falsche Aussage

$\Rightarrow (y,x) \notin K \Rightarrow K$ ist nicht symmetrisch

Es gibt keine $(x,y) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(x,y) \in K \wedge (y,x) \in K$, denn $x<y$ und $y<x$ ist immer eine falsche Aussage!

Ausgangssituation für Antisymmetrie ist nie erfüllt!

Definition:

Gegeben ist eine (2-stellige) Äquivalenzrelation R über A. Dann gilt:

1) Falls $(a,b) \in R$ ist, sagt man a und b sind äquivalent.
2) Für $a \in A$ ist die Menge
$$[a] = \bar{a} = \{ b \in A \mid (a,b) \in R \}$$
$$= \{ b \in A \mid a \text{ und } b \text{ sind äquivalent} \}$$
die Äquivalenzklasse zu a (bezüglich der Relation R)
3) Für $(a,b) \in R$, also a und b sind äquivalent, wird häufig ein eigenes „Rechenzeichen" eingeführt, z.B. $a \sim b$.

Beispiel:

Wir betrachten die Zahl $m = 5 \in \mathbb{Z}$ und folgende Relation R:

Für $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $\quad a \equiv b \iff 5$ ist echter Teiler von $b - a$

$a \equiv b$: a ist äquivalent zu b / a ist kongruent zu b

Bemerkung: 5 ist echter Teiler von $b-a \iff \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z}: b - a = k \cdot 5}_{b-a \text{ ist ein Vielfaches von } 5}$

a) $R = \{ (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b \}$ ist eine Äquivalenzrelation

reflexiv: $\quad a - a = 0 = 0 \cdot 5 \Rightarrow (a,a) \in R$ oder $a \equiv a$

symmetrisch: $\quad a \equiv b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = k \cdot 5$

$\Rightarrow a - b = -(b-a) = -k \cdot 5 = (-k) \cdot 5$

$\Rightarrow$ auch $a - b$ ist ein Vielfaches von 5

$\Rightarrow b \equiv a$

transitiv: $\quad a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: b - a = k \cdot 5 \wedge c - b = l \cdot 5$

$\Rightarrow c - a = (c \overbrace{- b) + (b}^{=0} - a)$

$= l \cdot 5 + k \cdot 5 = (l + k) \cdot 5$

$\Rightarrow$ auch $c - a$ ist ein Vielfaches von 5

$\Rightarrow c \equiv a$

b) Äquivalenzklassen dieser Relation $a \equiv b \Leftrightarrow b - a = k \cdot 5$

$$[0] = \bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 0 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = b = k \cdot 5 \}$$
$$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0 \}$$

$$[1] = \bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 1 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 1 = k \cdot 5 \}$$
$$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1 \}$$

Aufgabe zur 5. Vorlesung: a) Finden Sie die weiteren Äquivalenzklassen

b) Finden Sie die Äquivalenzklassen der Fußballer-Relation (sprachlich beschreiben!)