quadr. Gleichung in Normalform $x^2 + px + q = 0$

„formale" Lösung $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

→ 1. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

→ 2. Fall: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

→ 3. Fall $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

Im 3. Fall hat man mit $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$:

$$(x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - x\cdot x_2 - x\cdot x_1 + x_1\cdot x_2$$

$$= x^2 - (x_1 + x_2)\cdot x + x_1 \cdot x_2$$

es ist $x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)\cdot\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$ mit $a = -\frac{p}{2}$, $b = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q$$

damit folgt $(x - x_1)\cdot(x - x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{=-p}x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{=q} = x^2 + p\cdot x + q$

Linearfaktoren des quadratischen Polynoms

Quadratische Gleichung in allgemeiner Form: $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, $a_2 \neq 0$, $a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$$0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \underset{\neq 0}{a_2} \cdot \underbrace{\left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2}\right)}_{=0}$$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \xrightarrow[\frac{a_1}{a_2} = p;\ \frac{a_0}{a_2} = q]{} x^2 + px + q = 0$$

„formale" Lösung $\quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

mit $\frac{p}{2} = \frac{a_1}{2a_2}$, $q = \frac{a_0}{a_2}$: $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2|a_2|}$$

<u>insgesamt</u> $\quad x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2|a_2|} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$

→ <u>1. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$.

→ <u>2. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{a_1}{2a_2}\right\}$

→ <u>3. Fall</u>: $a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}\right\}$

<u>Quadratische Ungleichungen</u>: (12. Vorlesung): $x^2 \le a$ für $a \in \mathbb{R}, a > 0$

$\Rightarrow |x| \le \sqrt{a} \Rightarrow$

$x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$$x^2 + px + q \le a$$

$b < 0 \quad \mathbb{L} = \emptyset$

$y^2 \le b \quad b > 0 \quad \mathbb{L} = [-\sqrt{b}, \sqrt{b}]$

$(x + \frac{p}{2}) = y \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \Rightarrow$

$x \in [-\frac{p}{2} - \sqrt{b}, -\frac{p}{2} + \sqrt{b}]$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \le a$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)}_{y}{}^2 \le \underbrace{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{b \ge 0}$$

$\mathbb{L} \neq \emptyset$ ✓ für $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \ge 0$

$\mathbb{L} = \emptyset$ ✓ für $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

insbesondere gilt: $\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$ ✓ falls $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$ ist und

$\mathbb{L} = \left[-\frac{p}{2} - \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right]$ falls $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0$.

<u>Bemerkung</u>: $x^2 \le a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$x^2 < a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$x^2 \ge a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$= (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty)$

$x^2 > a$, $a > 0$ hat Lösungsmenge $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$
$= (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, +\infty)$

Logarithmen

Definition: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ ist der Logarithmus von a zur Basis b definiert als

$$x = \log_b(a) \iff b^x = a$$

($\log_b(a)$ ist die Zahl x, die als Exponent $b^x = a$ ergibt)

Beispiele: a) $\log_{10}(1000) = 3$ denn $10^3 = 1000$

$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$ denn $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$

$\log_5(125) = 3$ denn $5^3 = 5^2 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$

b) Die Lösung der Gleichung $2^x = 8$ ist $\underbrace{x = \log_2(8) = 3}_{2^3 = 8}$

MERKE: $x = \log_b(a)$ ist die Lösung der Gleichung $b^x = a$

Bemerkung:

1) Logarithmus zur Basis 10 $\rightarrow$ 10er Logarithmus: $\log_{10}(a) = \lg(a) = \log(a)$
Logarithmus zur Basis 2 $\rightarrow$ 2er Logarithmus: $\log_2(a) = \operatorname{ld}(a)$
logarithmus dualis

Logarithmus zur Basis e $\rightarrow$ Logarithmus zur Basis e $\hat{=}$ natürlicher Logarithmus: $\log_e(a) = \ln(a)$
logarithmus naturalis

$e \in \mathbb{R}$

$e = 2{,}\underbrace{7182818\ldots}$
unendlich viele nicht periodische Nachkommastellen

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

2) Rechenregeln für Logarithmen (folgen aus den Regeln für Potenzen)

Da die Regeln für jede zulässige Basis $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ gleich sind, schreiben wir jetzt einfach log statt $\log_b$.

a) $\log(a_1 \cdot a_2) = \log(a_1) + \log(a_2)$ → Beweis:

b) $\log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \log(a_1) - \log(a_2)$

c) $\log(a_1^\alpha) = \alpha \cdot \log(a_1)$

linke Seite

$x = \log_b(a_1 \cdot a_2) \iff b^x = a_1 \cdot a_2$

rechte Seite

$x = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \implies$

$b^x = b^{\log_b(a_1) + \log_b(a_2)}$

$= \underbrace{b^{\log_b(a_1)}}_{a_1} \cdot \underbrace{b^{\log_b(a_2)}}_{a_2} = a_1 \cdot a_2$

3) Umrechnung von Logarithmen

gesucht $x = \log_b(a)$ bekannt ist $\log_{\tilde{b}}$ Logarithmus zur Basis $\tilde{b}$

d.h. $\log_{\tilde{b}}(a)$ und $\log_{\tilde{b}}(b)$ sind bekannt

$$x = \log_b(a) \iff b^x = a \quad | \log_{\tilde{b}}(\dots)$$

$$\iff \log_{\tilde{b}}(b^x) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\overset{c)}{\iff} x \cdot \log_{\tilde{b}}(b) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\iff x = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}$$

insgesamt:
$$\boxed{\log_b(a) = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}}$$

Beispiel: $\log_{10}(35) = \frac{\ln(35)}{\ln(10)}$, $\ln(35) = \frac{\log_{10}(35)}{\log_{10}(e)}$

Rückblick auf Zahldarstellungen

Dezimalsystem $\to$ Basis 10 : $273{,}12 = 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10^1 + 3\cdot 10^0 + 1\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2}$

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b^j \cdot 10^{-j}}$$

c-adisches System $\to$ Basis $c > 0$:

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_k} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot c^i} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} b^j \cdot c^{-j}}$$

$c = 2 \to$ Dualsystem, $c = 16 \to$ Hexadezimalsystem

$$\left.\begin{aligned} 1357 &= 135 \cdot 10 + 7 \\ 135 &= 13 \cdot 10 + 5 \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3 \\ 1 &= 0 \cdot 10 + 1 \end{aligned}\right\} 1357$$

$\leftarrow$ Teilen mit Rest durch 10

Für die Zahldarstellung c-adischen System gilt: Teilen mit Rest durch c;

z.B. Dualsystem $c = 2$: Gegeben 135 im Dezimalsystem $(135)_{10}$;
gesucht 135 im Dualsystem $(135)_2$

$$\left.\begin{aligned} 135 : 2 &= \overbrace{67 \cdot 2}^{134} + 1 \\ 67 : 2 &= 33 \cdot 2 + 1 \\ 33 : 2 &= 16 \cdot 2 + 1 \\ 16 : 2 &= 8 \cdot 2 + 0 \\ 8 : 2 &= 4 \cdot 2 + 0 \\ 4 : 2 &= 2 \cdot 2 + 0 \\ 2 : 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\ 1 : 2 &= 0 \cdot 2 + 1 \end{aligned}\right\} (1\,0000111)_2$$

$\leftarrow$ Teilen mit Rest durch 2

Probe: $(10000111)_2 =$

$1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^7 =$

$1 + 2 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 128 = 135$ ✓

$c = 5$: Gegeben $(232)_{10}$, gesucht 232 zur Basis 5

Teilen mit Rest durch 5 liefert

$$
\left.\begin{array}{lllll}
232 : 5 &= 46 \cdot 5 &+ 2 \\
46 : 5 &= 9 \cdot 5 &+ 1 \\
9 : 5 &= 1 \cdot 5 &+ 4 \\
1 : 5 &= 0 \cdot 5 &+ 1
\end{array}\right\} \quad (232)_{10} = (1412)_5
$$

Probe: $(1412)_5 =$

$2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 2 + 5 + 100 + 125 = 232$

Frage: Was ist $(0,25)_{10}$ im System zur Basis 2 ?

$\hookrightarrow 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$

$(0,25)_{10} = (0,01)_2$

Wie geht das generell bei Zahlen mit Nachkommastellen ?