Fortsetzung: Eigenschaften der Determinante von $\underline{\underline{A}} \in M(2\times 2)$

(4) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$s \in \mathbb{R}$; $s \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} s\cdot a & s\cdot b \\ s\cdot c & s\cdot d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(s\cdot\underline{\underline{A}}) = \underbrace{s^2 a d - s^2 c b}_{s^2\cdot(ad-bc)} = s^2 \cdot \det(\underline{\underline{A}})$

$$\boxed{\text{Es gilt: } \det(s\cdot\underline{\underline{A}}) = s^2 \cdot \det(\underline{\underline{A}})}$$

Definition: Determinante einer $(n\times n)$-Matrix

Die Determinante wird „rekursiv" definiert.

(1) Anker/Start:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2\times 2) \Rightarrow \underbrace{\det(\underline{\underline{A}}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

$$= + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = + a_{11} \cdot |\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12} \cdot |\underline{\underline{A}}_{12}|$$

$\underline{\underline{A}}_{11} = (a_{22})$

$\underline{\underline{A}}_{12} = (a_{21})$

(2) Zwischenschritt:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \overset{+}{a_{11}} & \overset{-}{a_{12}} & \overset{+}{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M(3\times 3)$$

Für $1 \le i,j \le 3$ ist $\underline{\underline{A}}_{ij}$ die Matrix, die entsteht, wenn man in $\underline{\underline{A}}$ die i-te Zeile und j-te Spalte streicht, d.h. $\underline{\underline{A}}_{ij} \in M(2\times 2)$.

Damit definiert man

$$\det(\underline{\underline{A}}) = + a_{11} \cdot |\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12} \cdot |\underline{\underline{A}}_{12}| + a_{13} \cdot |\underline{\underline{A}}_{13}|$$

$$= + a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

③ Allgemein:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} {\color{red}+1} & {\color{red}-1} \; \dots & {\color{red}(-1)^{1+n}} \end{array}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n) \implies$$

$(-1)^{1+1}$ $(-1)^{1+2}$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} \, a_{1j} \cdot |\underline{\underline{A}}_{1j}|$$

$$= + a_{11} \cdot |\underline{\underline{A}}_{11}| - a_{12} \cdot |\underline{\underline{A}}_{12}| + a_{13} \cdot |\underline{\underline{A}}_{13}| - \dots (-1)^{1+n} \cdot |\underline{\underline{A}}_{1n}|$$

Bemerkung: Mit dieser Definition wird die Berechnung der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix (rekursiv) schrittweise zurückgeführt auf die bekannte Berechnung der Determinante von (2×2)-Matrizen!

Beispiele:

①
$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}) = + 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{(2-6)}_{-4} - 6 \cdot \underbrace{(3+2)}_{5} + 1 \cdot \underbrace{(-9-2)}_{-11} = -49$$

②
$$\underline{\underline{B}} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & - \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \in M(4 \times 4)$$

$$\det(\underline{\underline{B}}) = + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{= \det(\underline{\underline{A}}) \text{ aus ①}} - 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_{=0} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-49) - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -49 - (-12) = -49 + 12 = -37$$

Nebenrechnung:

$$\begin{vmatrix} \overset{+}{0} & \overset{-}{2} & \overset{+}{6} \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \underbrace{+0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 \cdot (3-0) + 6 \cdot (-1-0) = -12$$

Eigenschaften der Determinante einer $(n \times n)$-Matrix

Determinanten von $(n\times n)$-Matrizen ergeben sich rekursiv aus Determinanten von (2×2)-Matrizen $\Rightarrow$ die Determinante von $(n \times n)$-Matrizen „erbt" alle Eigenschaften der Determinante von (2×2)-Matrizen, nämlich

① $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

② $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n) \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

$\underline{\underline{A}}$ hat zwei identische Spalten(vektoren)

Wegen ① gilt dann auch: $\underline{\underline{A}}$ hat zwei identische Zeilen $\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

③ a) $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_n)$ und $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots s \cdot \vec{a}_i \dots \vec{a}_n)$ mit $s \in \mathbb{R}$

i-ter Spaltenvektor

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det(\underline{\underline{A}})$

i-te Spalte

$\vec{a}_i$ wird ersetzt durch $s\vec{u} + t\cdot\vec{v}$

b) $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)$ und $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots s\vec{u} + t\vec{v} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)$

mit $s, t \in \mathbb{R}$

i-te Spalte   i-te Spalte

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det\left((\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{u} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)\right) + t \cdot \det\left((\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{v} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)\right)$

④ $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) \Rightarrow s \cdot \underline{\underline{A}} = (s\vec{a}_1\ s\vec{a}_2 \dots s\vec{a}_n)$ für $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \det(s\cdot \underline{\underline{A}}) = s^n \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

Beispiele und Folgerungen

① $$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12 \checkmark$$ (siehe Nebenrechnung oben)

Es gilt $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}^t) = -1\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(2\cdot 3 + 6) = -12 \checkmark$$

② ein Schritt im Gauß-Algorithmus liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$$ neue 2. Zeile $= (-4)\cdot 1.$ Zeile $+ 1 \cdot 2.$ Zeile

1	2	3	$\cdot(-4)$
4	1	1	$\leftarrow +$
2	-1	2	
1	2	3	
0	-7	-11	
2	-1	2	

Determinante bleibt gleich!

Eigenschaft ③ und Eigenschaft ① liefern

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-4)\cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{=0} + 1\cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 identische Zeilen! Eigenschaft ②

Probe:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3\cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= +1\cdot \underbrace{(2+1)}_{=3} - 2\cdot \underbrace{(8-2)}_{=6} + 3\cdot \underbrace{(-4-2)}_{=-6} = -27 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \overset{①}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & -11 & 2 \end{vmatrix} = +1\cdot \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-14-11) + 2\cdot(-22+21) = -25-2 = -27 \checkmark$$

③

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Algorithmus liefert}]{\text{ein Schritt im Gauß-}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ → neue 2. Zeile = 1 · 1. Zeile − 3 · 2. Zeile

3	1	0	↑+
1	1	4	1·(−3)
2	2	−1	
3	1	0	
0	−2	−12	
2	2	−1	

Determinante erhält Faktor (−3)

aus den Eigenschaften ①, ② und ③ der Determinante folgt

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \underbrace{\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}}_{=0} - 3 \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2 identische Zeilen

$$= (-3) \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \cdot \det\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (-1-8) - 1 \cdot (-1-8) = -18 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 + 24) - (0 + 24) = 54$$

$$\Bigg\} \; -\frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 12 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 54 = -18 \checkmark$$