3. Vorlesung 12.10.2020

Notiztitel 12.10.2020

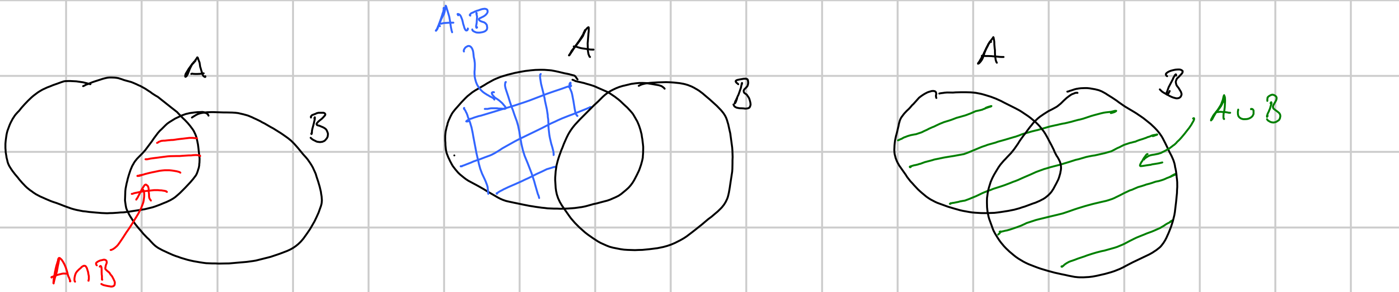
Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

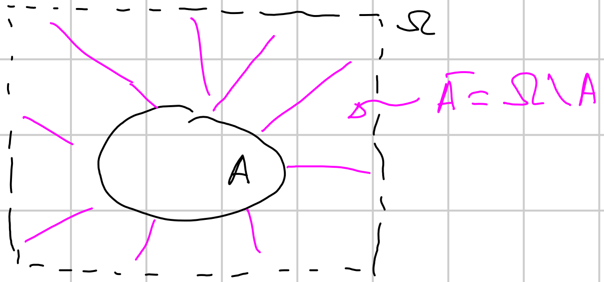
Definition: Gegeben sind die Mengen A und B ($A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$).

Ω: „Allmenge“ aus dem Kontext des behandelten Themas

Dann ist definiert

1) die Vereinigung $A \cup B$ durch: $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$
2) der Durchschnitt $A \cap B$ durch: $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$
3) die Differenz $A \setminus B$ durch: $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$
4) das Komplement $\bar{A}$ durch: $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$





Beispiele und Bemerkung

1) Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ← Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ ← Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{Z} = \{\dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ ← Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \{\frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\}$ ← Menge der rationalen Zahlen (Menge der Brüche)

$\frac{z}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ z heißt Zähler, $z \in \mathbb{Z}$

n heißt Nenner, $n \in \mathbb{N}$ ← $n \neq 0$ denn $0 \notin \mathbb{N}$

„man darf nicht durch Null teilen“

$-\frac{3}{4} = \frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$ mit $z = -3$, $n = 4$

$\frac{128}{31} \in \mathbb{Q}$ mit $z = 128$, $n = 31$

$5 = \frac{5}{1}$ mit $z = 5$, $n = 1$

$-8 = \frac{-8}{1}$ mit $z = -8$, $n = 1$

Es gilt: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \dots$ ← die Darstellung $q = \frac{z}{n}$ für $q \in \mathbb{Q}$ ist nicht eindeutig

vollständig gekürzte Form: Zähler und Nenner haben keinen gemeinsamen Faktor mehr

$$\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot \cancel{5}}{7 \cdot \cancel{5}} = \frac{3}{7}$$ ← vollständig gekürzte Form

„Kürzen" des gemeinsamen Faktors

2) $A = \{-2, -1, 0, 3, 5, 7\}$
$B = \{-3, -1, 3, 6\}$
$C = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -5, -2, 0\}$
dann gilt

$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 5, 6, 7\}$

$A \cap B = \{-1, 3\}$

$A \setminus B = \{-2, 0, 5, 7\}$

$B \setminus A = \{-3, 6\}$

in der Regel (d.h. ausser in wenigen Ausnahmefällen) gilt $A \setminus B \neq B \setminus A$

$C \setminus B = C$ hier auch $B \setminus C = B$

$A \cap C = \{0, -2\}$, $B \cap C = \emptyset$

A enthält nur ganze Zahlen, also aus dem Kontext: $\Omega = \mathbb{Z}$

$\bar{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{\dots -4, -3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$

„Rechenregeln" für Mengenoperationen

Mengenoperationen sind über aussagenlogische Verknüpfungen definiert, z.B.

$x \in A \cup B \iff (x \in A) \vee (x \in B)$

daher folgt: Die „Rechenregeln" für Mengenoperationen folgen aus den „Rechenregeln" der Aussagenlogik

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die **Rechengesetze der Mengenlehre**

Name	Durchschnitt ($\cap$)	Vereinigung ($\cup$)
Kommutativgesetz	$A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$	$A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$
Assoziativgesetz	$A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$	$A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$
Existenz neutraler Elemente	$A \cap \Omega \Leftrightarrow A$	$A \cup \emptyset \Leftrightarrow A$
Existenz komplementärer Elemente	$A \cap \overline{A} \Leftrightarrow \emptyset$	$A \cup \overline{A} \Leftrightarrow \Omega$
Distributivgesetze	$A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$
DeMorgansche Regeln	$\overline{A \cap B} \Leftrightarrow \overline{A} \cup \overline{B}$	$\overline{A \cup B} \Leftrightarrow \overline{A} \cap \overline{B}$

Beweisidee:

Vereinigung $\cup$, $\cap$ Durchschnitt } Mengenoperationen — Verknüpfungen der Aussagenlogik: oder, und

a) $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cap C)$

$\Leftrightarrow (x \in A) \vee \big((x \in B) \wedge (x \in C)\big)$

Distributivgesetz der Aussagenlogik

$\Leftrightarrow \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge \big((x \in A) \vee (x \in C)\big)$

$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Merke: Mengengleichheit $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$\Leftrightarrow \big((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)\big)$

b) $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \leftarrow x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

$\Leftrightarrow \overline{(x \in A) \wedge (x \in B)}$

DeMorgansche Regel der Aussagenlogik

$\Leftrightarrow \overline{(x \in A)} \vee \overline{(x \in B)}$

$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$

$\Leftrightarrow (x \in \overline{A}) \vee (x \in \overline{B})$

$\Leftrightarrow x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$

Angabe von Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente ist bei großen endlichen Mengen insbesondere aber bei Mengen mit unendlich vielen Elementen unpraktisch bzw. unmöglich, daher braucht man

Definition:

Eine Aussageform ist ein sprachlicher Satz, der einen oder mehrere

Platzhalter (eine oder mehrere Variablen) enthält, und zu Aussage wird, sobald man die Platzhalter (Variablen) durch konkrete Elemente der Definitionsmenge D (Grundmenge) der Aussageform ersetzt.

Beispiele:

1) $A(n) \hat{=}$ „n ist ohne Rest durch 3 teilbar", $D = \mathbb{N}$

Variable

$A(5) \hat{=}$ „5 ist ohne Rest durch 3 teilbar" ← Aussage, Wahrheitswert: f

2) $B(n_1, n_2) \hat{=}$ „das Produkt $n_1 \cdot n_2$ ist eine ungerade Zahl",

2 Variable

$D = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \in \mathbb{N} \wedge n_2 \in \mathbb{N}\}$

Was ist das? → siehe unten: Kartesisches Produkt

$B(3,6) \hat{=}$ „das Produkt $3 \cdot 6$ ist eine ungerade Zahl" ← Aussage, Wahrheitswert: f

$B(5,7) \hat{=}$ „das Produkt $5 \cdot 7$ ist eine ungerade Zahl" ← Aussage, Wahrheitswert: w

3) $G \subseteq \mathbb{Z}$ mit $G = \{z \in \mathbb{Z} \mid \underbrace{\exists k \in \mathbb{Z} : z = 2 \cdot k}\}$ Menge der geraden Zahlen

damit ist die Bedeutung von ... eindeutig geklärt

$= \{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots\}$

Aussageform

3) $S = \{s \mid$ s ist im WS 2021 an der HS Osnabrück als Studierende(r) eingeschrieben$\}$, D = Menge aller Menschen

Die Aussageform, die eine Menge beschreibt, nennt man auch charakterisierende Eigenschaft der Menge.
Mengen kann man also durch Aufzählung aller Elemente oder durch ihre charakterisierende Eigenschaft beschreiben.

Definition (Kartesisches Produkt von Mengen)

1) Gegeben sind zwei Mengen A, B (mit $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$).
Dann ist das Kartesische Produkt $A \times B$ definiert durch

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

dabei heißt (a, b) <u>geordnetes</u> Paar (2-Tupel) mit festgelegten Komponenten

1. Komponente

2. Komponente

Für alle 2-Tupel / geordneten Paare (a, b) aus $A \times B$ gilt:
1. Komponente a kommt aus der 1. Menge A
2. Komponente b kommt aus der 2. Menge B

2) Gegeben sind die Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \in \mathbb{N})$; es gilt $A_i \neq \emptyset$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$
Dann ist das (n-fache) Kartesische Produkt $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ definiert durch

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1, 2, \ldots, n\} \}$$

dabei heißt $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ and n-Tupel
a_i steht in der i-ten Komponente von $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
i-te Komponente a_i kommt aus der i-ten Menge A_i für $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Beispiele:

1)
$$\left.\begin{array}{l} A = \{1, 2, 3\} \\ B = \{a, b\} \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\} \\ B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\} \end{array}}$$

$$(a, 1) \neq (1, a) \quad \Rightarrow \quad A \times B \neq B \times A$$

Das Kartesische Produkt von Mengen ist <u>nicht</u> kommutativ, d.h. die Reihenfolge der „Faktoren" (also der beteiligten Mengen) ist relevant!

2) Für die Mengen aus 1) gilt:

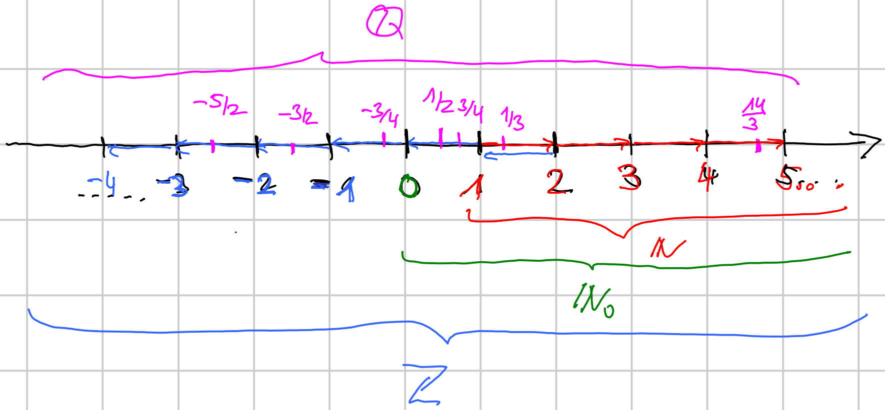
$|A| = 3$
Anzahl der Elemente in A
Anzahl der Elemente in B
$|B| = 2$

$$\left.\begin{array}{l} |A| = 3 \\ |B| = 2 \end{array}\right\} \quad |A \times B| = |B \times A| = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$

allgemein $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ für endliche Mengen A und B

$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_n|$ für endliche Mengen A_i; $i \in \{1,2,\ldots,n\}$

Grafische Veranschaulichung der Zahlenmengen $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$



Zahlenstrahl: Horizontale Gerade mit aufsteigenden äquidistanten Punkten

Zahlenstrahl = gerichtete Gerade $\Rightarrow$ Anordnung der Zahlen in $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$,

nämlich: $a < b \iff$ Punkt zu a auf Zahlenstrahl liegt links vom Punkt zu b auf dem Zahlenstrahl

a kleiner b

$a = b \iff$ Punkt zu a auf dem Zahlenstrahl ist identisch mit dem Punkt zu b auf dem Zahlenstrahl

a gleich b

$a > b \iff b < a$

a größer b