

## Lösung linearer Gleichungssysteme

Gauß-Algorithmus  $\begin{cases} \text{1. Stufe: Vorwärtselimination} \quad \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \\ \text{2. Stufe: Rücksubstitution} \quad \textcircled{1} \rightarrow \textcircled{2} \end{cases}$

 $\textcircled{1}$  Rücksubstitution

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen, Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten

a) Lineares GLS in „Dreiecksform“ ist durch Rücksubstitution lösbar

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \rightarrow 2x_1 = 1 - 3x_2 - x_3 = 1 - 13 - \frac{1}{3} = -12 - \frac{1}{3} = -\frac{37}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{37}{6} \\ x_2 - x_3 &= 4 \rightarrow x_2 = 4 + x_3 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{13}{3} \\ 3x_3 &= 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Hauptdiagonale  $\downarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -37/6 \\ 13/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen; Anzahl Zeilen < Anzahl Spalten

b) Lineares GLS in „Trapezform“ ist durch Rücksubstitution lösbar

mit Hilfe freier Parameter

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \rightarrow 2x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - 5 + \frac{5}{2}t + t = -4 + \frac{7}{2}t \Rightarrow x_1 = -2 + \frac{7}{4}t \\ 2x_2 + 5x_3 &= 10 \rightarrow x_3 = t : 2x_2 = 10 - 5x_3 = 10 - 5t \Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}t \end{aligned}$$

$\uparrow$  freier Parameter

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen abhängig vom Parameter  $t \in \mathbb{R}$  (für jedes  $t$  gibt es eine zulässige Lösung)  $\Rightarrow$

Lösungsmenge:

$$\begin{aligned} L &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{4}t \\ 5 - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{4}t \\ 5 - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

## offene Frage:

- 1) Wie kommt man von einem allg. linearen GLS zu einem System in Dreiecks- oder Treppform mit derselben Lösungsmenge?
- 2) Wie kann man entscheiden, ob für die Lösungsmenge  $L$  eines linearen GLS gilt:  $L = \emptyset$  oder  $L = \{ \vec{a} \}$  oder  $L = \{ s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + \dots \mid s_1, s_2, \dots \in \mathbb{R} \}$
- Keine Lösung      genau eine Lösung      unendlich viele Lösungen
- Antworte liefert

## ② Vorwärtselimination

Jedes lineare GLS kann durch (mehrmaliges) Anwenden elementarer Umformungen (das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern) in ein System in Dreiecks- oder Treppform überführt werden.

Dieses System hat die selbe Lösungsmenge, die dann durch Rücksubstitution berechnet werden kann.

### elementare Umformungen sind

- ① Vertauschen von Gleichungen  $\rightarrow$  Vertauschen von Zeilen in der Koeffizientenmatrix + Vektor der rechten Seite
- ② Multiplikation von Gleichungen mit reellen Faktor  $s \neq 0$   $\rightarrow$  Multiplikation einer Zeile in der Koeffizientenmatrix + Komponente im Vektor der rechten Seite mit  $s \neq 0$
- ③ Bilden sog. Linearkombinationen  $\rightarrow$  Ersetzen der  $i$ -ten Zeile/ $i$ -ten Komponente der rechten Seite durch das  $s$ -fache dieser  $i$ -ten Zeile +  $i$ -te Komponente der rechten Seite ( $s \neq 0$ ) plus dem  $t$ -fachen ( $t \neq 0$ ) einer anderen  $k$ -ten Zeile +  $k$ -ten Komponente der rechten Seite

Ziel: Durch Anwendung von ①, ②, ③ ein System in Dreiecks-/Treppform zu erzeugen!

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \end{aligned}$$

Koeffizientenmatrix  $\rightarrow$  Gauß-Schema

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	Vektor der rechten Seite
3	-5	1	-1	1
0	2	-1	0	0
1	1	1	-5	-2

$1 \cdot (-3)$

---

3	-5	1	-1	1
0	2	-1	0	0
0	-8	-2	14	7

$1 \cdot 4$

---

3	-5	1	-1	1
0	2	-1	0	0
0	0	-6	14	7

Ende der Vorwärtselimination: System in Treppenform

Rücksubstitution

$-6x_3 + 14x_4 = 7 \leftarrow$  freies Parameter  $x_4 = t$

$\rightarrow -6x_3 = 7 - 14t \Rightarrow x_3 = -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t$

$2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t$

$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$

$3x_1 = 1 + 5x_2 - x_3 + x_4$

$= 1 - \frac{35}{12} + \frac{35}{6}t + \frac{7}{6} - \frac{7}{3}t + t$

$= \frac{12 - 35 + 14}{12} + \frac{35 - 14 + 6}{6}t$

$= -\frac{9}{12} + \frac{27}{6}t \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{4} + \frac{9}{2}t$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t$

Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \\ -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t \\ -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Warum verändern die elementaren Umformungen die Lösungsmenge nicht?

① Vertauschen von Gleichungen ✓

② Multiplikation mit  $s \neq 0$ :

$$\left[ \begin{array}{l} x_1, \dots, x_n \text{ löst} \\ s \neq 0 \end{array} \right. \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \leftarrow i\text{-te Gleichung}$$

$$\xrightarrow{\quad} s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = s \cdot b_i$$

$$= a_{i1}(sx_1) + a_{i2}(s \cdot x_2) + \dots + a_{in}(s \cdot x_n) = s \cdot b_i$$

d.h. wenn  $x_1, \dots, x_n$  Lösung der  $i$ -ten Gleichung ist, löst  $sx_1, \dots, sx_n$  diese  $i$ -te Gleichung mit rechter Seite  $s \cdot b_i$

$\left[ \begin{array}{l} s=0 \end{array} \right.$  erzeugt aus  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$  die wahre aber nutzlose Aussage  $0 = 0$

③ Linearkombination

$$\left. \begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \quad \leftarrow i\text{-te Gleichung} \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \quad \leftarrow j\text{-te Gleichung} \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{↯ lösen} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Rightarrow \\ s \neq 0 \\ t \neq 0 \end{array} \quad s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + t \cdot (a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = sb_i + tb_j$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow \underline{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcl} x + y + z & = & 1 \\ -3x + 2y - z & = & 2 \\ -5x + 5y - z & = & \alpha \quad \leftarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{array}$$

- 1) Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist dieses lineare GLS lösbar?
- 2) Für diese(s)  $\alpha$  Lösungsmenge bestimmen

Gauß-Schema

x	y	z	
1	1	1	1 1.3 1.5
-3	2	-1	2 $\downarrow +$
-5	5	-1	$\alpha \leftarrow$
1	1	1	1
0	5	2	5 1.(-2)
0	10	4	5 + $\alpha \downarrow +$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 5 \end{array} \quad \text{Ende der Vorwärtselimination}$$

$L = \emptyset$  falls  $\alpha \neq 5$  ist, denn in der letzten Gleichung steht

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \alpha - 5$$

für  $\alpha \neq 5$  ist  $\alpha - 5 \neq 0$  jedoch  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}!$

Für  $\alpha = 5$  haben wir

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Trapezform} \\ \rightarrow x = 1 - y - z = 1 - 1 + \frac{2}{5}t - t \Rightarrow x = -\frac{3}{5}t \\ \uparrow \text{ (circled)} \quad z = t, \quad 5y = 5 - 2t \Rightarrow \\ y = 1 - \frac{2}{5}t \end{array}$$

ist immer wahr  $\rightarrow$

$$L(\alpha = 5) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}t \\ 1 - \frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad L(\alpha \neq 5) = \emptyset$$