Abbildung / Funktion

Gegeben sind Mengen D, W $(D \neq \emptyset, W \neq \emptyset)$.

Die 2-stellige Relation $f \subseteq D \times W$ heißt **Abbildung**, falls gilt:

$\forall x \in D \; \exists!\, y \in W : (x,y) \in f$, man schreibt dann $y = f(x)$.

Wenn gilt $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$, nennt man f eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen (Variablen).

D heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge

W heißt Wertebereich / Wertemenge

$\mathrm{Graph}(f) = \{(x,y) \in D \times W \mid (x,y) \in f\} = \{(x,y) \in D \times W \mid y = f(x)\}$

ist der Graph von f (bei Funktionen heißt der Graph auch Funktionskurve)

$\mathrm{Bild}(f) = \{y \in W \mid \exists x \in D : (x,y) \in f\} = \{(x,y) \in D \times W \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$

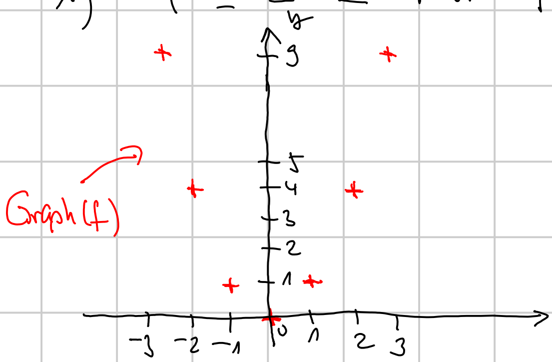
heißt Bild von f.

Das Urbild von y unter f ist $U_f(y) = \{x \in D \mid (x,y) \in f\}$
$= \{x \in D \mid y = f(x)\}$

Beispiele:

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ es ist $D = \mathbb{Z}$ und $W = \mathbb{Z}$

1) $f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f = \{(x,x^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$



$(0,0) \in f$ denn $f(0) = 0^2 = 0$

$(1,1) \in f$ denn $f(1) = 1^2 = 1$

$(-1,1) \in f$ denn $f(-1) = (-1)^2 = 1$

$(3,9) \in f$ denn $f(3) = 9$

$(-3,9) \in f$ denn $f(-3) = 9$

$\mathrm{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq 0\}$

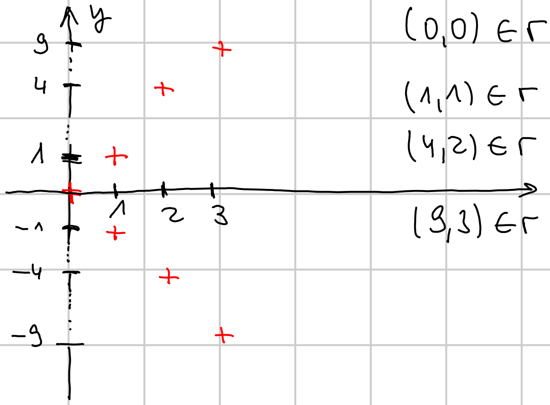
$U_f(16) = \{-4, 4\}$ denn $f(-4) = (-4)^2 = 16$ und $f(4) = 4^2 = 16$

$U_f(2) = \emptyset$ denn es gilt $(\sqrt{2})^2 = 2$ d.h. $f(\sqrt{2}) = 2$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$

$U_f(-5) = \emptyset$ denn für kein $x \in \mathbb{Z}$ gilt $x^2 = -5$, $U_f(0) = \{0\}$ denn nur $0^2 = 0$

2) Die 2-stellige Relation $r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ist gegeben durch

$r = \{ (x^2, x) \mid x \in \mathbb{Z} \}$



$(0,0) \in r$

$(1,1) \in r \wedge (1,-1) \in r$

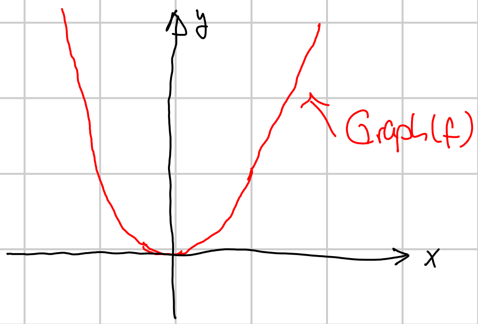
$(4,2) \in r \wedge (4,-2) \in r$

$(9,3) \in r \wedge (9,-3) \in r$

$\Big\}$ r ist 2-stellige Relation aber keine Abbildung/Funktion denn z.B. zu 1 gibt es $y_1 = -1$ und $y_2 = 1$ mit $(1,-1) \in r$ und $(1,1) \in r$

3) $\underbrace{f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \text{ mit } (x,y) \in f \iff y = x^2}$

das definiert die Funktion $f : \underset{D}{\mathbb{R}} \to \underset{W}{\mathbb{R}}$ mit $y = f(x) = x^2$



$\text{Bild}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0 \}$

$U_f(0) = \{0\}$, $U_f(2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

$U_f(-4) = \emptyset$ denn $x^2 = -4$ hat keine Lösung $x \in \mathbb{R}$

Zahlsystem: Das System der reellen Zahlen

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Start mit $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$: natürliche Zahlen und natürliche Zahlen mit 0

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$; $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Axiomatische Einführung von $\mathbb{N}_0$ (Peano-Axiome)

gültige (als richtig gesetzte) mathematische Aussagen

für Peano $0 \in \mathbb{N}$

1. 0 ist eine natürliche Zahl (alternativ: 1 ist eine natürliche Zahl)
2. Jede natürliche Zahl n hat einen Nachfolger, der n' genannt wird, 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl, der Nachfolger der 0 heißt 1, also $0' = 1$,
3. $n + 0 = n$ und $n + m' = (n + m)'$ und damit: $n' = (n + 0)' = n + 0' = n + 1$ und $n + m$ ist der m-fache Nachfolger von n, also: $n + m = ((\ldots(n+1)+1)+1)+\ldots)+1)$,

   0 ist neutrales Element der Addition
4. $n \cdot 0 = 0$ und $n \cdot m' = n \cdot m + n$.

4 von 5 Peano-Axiomen

Das Axiomensystem von Peano liefert die natürlichen Zahlen mit 0, also unsere Menge $\mathbb{N}_0$, und die Addition und die Multiplikation in der Menge $\mathbb{N}_0$. Addition und Multiplikation sind Rechenoperationen, d.h. besondere Abbildungen (Funktionen), nämlich

$$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x,y) \to x+y$$

$$\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x,y) \to x \cdot y$$

Es gelten folgende Rechenregeln in $\mathbb{N}_0$

Name	Addition (+)	Multiplikation (·)
Kommutativgesetz	$a+b=b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativgesetz	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Existenz neutraler Elemente	$a+0=a$	$a \cdot 1 = a$
Distributivgesetze	$a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$	$(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$

neutrales Element der Addition: 0 Null
neutrales Element der Multiplikation: 1 Eins
Distributivgesetz regelt das „Zusammenspiel" von Addition und Multiplikation.

Bemerkung:

1) Die Peano-Axiome führen die Addition (inklusive 0 als neutralem Element) in $\mathbb{N}_0$ ein!
$0 \notin \mathbb{N}$ heißt: In $\mathbb{N}$ gibt es kein neutrales Element der Addition!

2) Multiplikation ist eine wiederholte Addition des selben Elements, z.B.

$$3 \cdot 5 = \underbrace{5+5+5}_{\text{3-fache Addition des Elements } 5 \in \mathbb{N}_0}$$

$$n \cdot m = \underbrace{m+m+\ldots+m}_{n\text{-mal}}$$

3) Potenzen: Für $\underbrace{a \in \mathbb{N}}_{a \neq 0}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ ist definiert:

$a^0 = 1$ ← 0-te Potenz von $a \neq 0$ ist immer 1
$a^1 = a$ ← 1-te Potenz von $a \neq 0$ ist immer a

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a \cdot a \\ &\vdots \\ a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\text{-mal Faktor } a} \end{aligned}\right\} \text{2-te, n-te Potenz ist das 2-fache/n-fache Produkt von } a \text{ mit sich selbst}$$

Definition:

Gegeben sind $u \in \mathbb{N}_0$, $o \in \mathbb{N}_0$ mit $u \leq o$ und Zahlen $a_i \in \mathbb{R}$, $u \leq i \leq o$,

$i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die zugehörige <u>endliche Summe</u> mit unterer Grenze u und oberer Grenze o definiert durch

$$\sum_{i=u}^{o} a_i = a_u + a_{u+1} + a_{u+2} + \cdots + a_o$$

$\sum$ heißt Summenzeichen, i heißt Laufindex, a_i sind die Summanden der Summe; für u = o gilt $\sum_{i=u}^{u} a_i = a_u$

<u>Beispiele:</u>

1) $u = 3, o = 9, \quad a_i = 2i+1$ für $3 \leq i \leq 9, i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=u}^{o} a_i = \sum_{i=3}^{9} (2i+1) = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$$= a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_9$$

2) $u = 0, o = 10, \quad a_i = i$ für $0 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

3) $$\sum_{i=5}^{5} \underbrace{(i^2 - i + 2)}_{= a_i} = a_5 = 22$$

<u>5. Peano-Axiom</u>: Induktionsaxiom ≙ Axiom der vollständigen Induktion

Gegeben ist eine Aussageform A(n) für $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $n \in \mathbb{N}$).

Dann gilt: A(n) ist <u>wahr für alle</u> $n \in \mathbb{N}_0$ (bzw. $n \in \mathbb{N}$)

falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

1 <u>Induktionsanfang</u>

A(0) ist wahr (bzw. A(1) ist wahr)

d.h. die Aussageform A(n) liefert eine wahre Aussage für die erste betrachtete nat. Zahl 0 bzw. 1

2 <u>Induktionsschritt:</u> Für n = k

$\underbrace{A(k) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsannahme}} \overset{?}{\Longrightarrow} \underbrace{A(k+1) \text{ wahr}}_{\text{Induktionsbehauptung}}$

das ist die „Beweisarbeit": Zeige, dass A(k+1) wahr ist, wenn A(k) wahr ist d.h. wenn die Aussageform $A(n)$ für $n=k$ eine wahre Aussage liefert, dann liefert $A(n)$ auch für die nachfolgende Zahl $n=k+1$ eine wahre Aussage.

Beispiele:

1) Summenformel vom „Kleinen Gauß":
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$,

$A(n)$: Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

Induktionsanfang: Man muss nachrechnen, dass $A(1)$ wahr ist $(n=1)$

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1$$ (nach Def. einer endlichen Summe mit oberer Grenze = unterer Grenze)

$$\underbrace{\frac{n\cdot(n+1)}{2}}_{n=1} = \frac{1\cdot(1+1)}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1$$

insgesamt $\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ d.h. $A(1)$ ist wahr

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für $n=k$ ist $A(k)$ wahr, also

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k\cdot(k+1)}{2}$$ ← das darf im weiteren Beweis als wahr benutzt werden

Induktionsbehauptung: Für $n=k+1$ ist $A(k+1)$ ebenfalls wahr, also

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2} \checkmark$$ ← es muss gezeigt/bewiesen/nachgerechnet werden, dass dieses = auch wahr ist

$\uparrow n=k+1$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\right)$$

Beweis: $$\sum_{i=1}^{k+1} i = \Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i}\Big) + (k+1)$$

Induktionsvoraussetzung →

$$= \frac{k\cdot(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k\cdot(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)}{2} = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)}{2}$$ ✓ das ist genau das, was gezeigt werden sollte

Bemerkung:

a) $$\sum_{i=1}^{50} i = \frac{50\cdot 51}{2} = \frac{50\cdot(50+1)}{2} = \frac{50^2+50}{2} = \frac{2500+50}{2} = 1275$$

b) $$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{100\cdot 101}{2} = 50\cdot 101 = 5050$$

Gauß:

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = S \\ 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = S \end{array}\right\} +$$

$$\underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{= 100\cdot 101} = 2S$$

$$\Rightarrow 2S = 100\cdot 101 \Rightarrow S = \frac{100\cdot 101}{2}$$