

## Inhaltsverzeichnis

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1 Vorlesung 1 (06.10.2020)</b>   | <b>7</b>  |
| 1.1 Definition: Menge, Mengenelemente, leere Menge . . . . .  | 7         |
| 1.2 Venn-Diagramme . . . . .  | 7         |
| 1.3 Definition: Aussage . . . . .   | 7         |
| 1.4 Definition: Aussageverknüpfung . . . . .  | 7         |
| 1.5 Beispiele: Verneinung, Konjunktion, Disjunktion, Implikation, Äquivalenz . . . . .                            | 7         |
| <b>2 Vorlesung 2 (07.10.2020)</b>   | <b>12</b> |
| 2.1 Aussagenlogik: Tautologie, XOR, Allquantor, Existenzquantor . . . . .   | 12        |
| 2.2 Rechenregeln für Aussageverknüpfung . . . . .   | 12        |
| 2.3 Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel) . . . . .   | 12        |
| 2.4 Definition: Potenzmenge . . . . .   | 12        |
| 2.5 Definition: Rechnen mit Mengen - Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement . . . . .                   | 12        |
| <b>3 Vorlesung 3 (12.10.2020)</b>   | <b>19</b> |
| 3.1 Zahlenmengen . . . . .  | 19        |
| 3.2 Definition: Aussageform . . . . .   | 19        |
| 3.3 Definition: Kartesisches Produkt von Mengen, Tupel . . . . .  | 19        |
| 3.4 Zahlenstrahl, Anordnung von Zahlen . . . . .  | 19        |
| <b>4 Vorlesung 4 (13.10.2020)</b>   | <b>26</b> |
| 4.1 Beispiele Relationen + Kartesisches Produkt . . . . .   | 26        |
| 4.2 Definition: reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch: Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation . . . . . | 26        |
| 4.3 Definition: Äquivalenzklasse . . . . .  | 26        |
| <b>5 Vorlesung 5 (14.10.2020)</b>   | <b>33</b> |
| 5.1 Beispiele Äquivalenzklasse . . . . .  | 33        |
| 5.2 Definition: vollständige Mengenpartition . . . . .  | 33        |
| 5.3 Satz: Äquivalenzklassen bilden vollständige Mengenpartition . . . . .   | 33        |
| 5.4 Definition: Verknüpfung . . . . .   | 33        |
| 5.5 Definition: Abbildung, Funktion, Bild, Graph, Urbild . . . . .  | 33        |
| 5.6 grafische Veranschaulichung der reellen Zahlen . . . . .  | 33        |
| <b>6 Vorlesung 6 (19.10.2020)</b>   | <b>40</b> |
| 6.1 Beispiele Abbildung, Funktion . . . . .   | 40        |
| 6.2 Zahlensysteme . . . . .   | 40        |
| 6.3 Peano-Axiome (natürliche Zahlen definieren) . . . . .   | 40        |

|   |           |
|---|-----------|
| 6.4 Rechenregeln in den natürlichen Zahlen . . . . .                    | 40        |
| 6.5 Definition: Endliche Summe . . . . .                                | 40        |
| 6.6 5. Peano-Axiom / Induktionsaxiom / vollständige Induktion . . . . . | 40        |
| <b>7 Vorlesung 7 (20.10.2020)</b>                                       | <b>47</b> |
| 7.1 Beispiele Vollständige Induktion . . . . .                          | 47        |
| 7.2 Definition durch Rekursion + Beispiele . . . . .                    | 47        |
| 7.3 Binomialkoeffizient . . . . .                                       | 47        |
| <b>8 Vorlesung 8 (21.10.2020)</b>                                       | <b>54</b> |
| 8.1 Binomialkoeffizienten und Fakultät . . . . .                        | 54        |
| 8.2 Eigenschaften Binomialkoeffizient . . . . .                         | 54        |
| 8.3 Pascalsches Dreieck . . . . .                                       | 54        |
| 8.4 1. Binomische Formel (+ 1. allgemeine Binomische Formel) . . . . .  | 54        |
| 8.5 2. Binomische Formel (+ 2. allgemeine Binomische Formel) . . . . .  | 54        |
| 8.6 Wiederholung: Ordnungsrelation, Vollständige Induktion . . . . .    | 54        |
| <b>9 Vorlesung 9 (26.10.2020)</b>                                       | <b>62</b> |
| 9.1 Rechenregeln für Potenzen . . . . .                                 | 62        |
| 9.2 3. Binomische Formel (+ 3. allgemeine Binomische Formel) . . . . .  | 62        |
| 9.3 Elementares Multiplikationsprinzip . . . . .                        | 62        |
| 9.4 Elementare Kombinatorik (Anordnung, Auswahl) . . . . .              | 62        |
| <b>10 Vorlesung 10 (27.10.2020)</b>                                     | <b>69</b> |
| 10.1 Zusammenfassung Elementare Kombinatorik . . . . .                  | 69        |
| 10.2 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen . . . . .                     | 69        |
| 10.3 Rechenregeln in den reellen Zahlen . . . . .                       | 69        |
| 10.4 Bemerkung: Was ist ein Körper, Anordnungsaxiom . . . . .           | 69        |
| <b>11 Vorlesung 11 (28.10.2020)</b>                                     | <b>76</b> |
| 11.1 Rechenregeln der Anordnung . . . . .                               | 76        |
| 11.2 Intervalle als Mengen . . . . .                                    | 76        |
| 11.3 unendlich-Symbol . . . . .   | 76        |
| 11.4 Definition: Term . . . . .   | 76        |
| 11.5 Definition: Betrag einer reellen Zahl . . . . .                    | 76        |
| 11.6 erste Rechenregeln für den Betrag . . . . .                        | 76        |
| 11.7 Betrag, Ungleichung und Intervalle . . . . .                       | 76        |
| <b>12 Vorlesung 12 (02.11.2020)</b>                                     | <b>83</b> |
| 12.1 Anordnung, Ungleichung und Intervalle . . . . .                    | 83        |

|   |            |
|---|------------|
| 12.2 Potenzen und Wurzeln in den reellen Zahlen . . . . .                       | 83         |
| 12.3 Rechenregeln für Wurzeln . . . . .   | 83         |
| 12.4 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen . . . . . | 83         |
| 12.5 pq-Formel . . . . .  | 83         |
| <b>13 Vorlesung 13 (03.11.2020)</b>   | <b>90</b>  |
| 13.1 Linearfaktoren des quadratischen Polynoms . . . . .                        | 90         |
| 13.2 Mitternachtsformel . . . . .   | 90         |
| 13.3 Quadratische Ungleichungen . . . . .                                       | 90         |
| 13.4 Definition: Logarithmus . . . . .  | 90         |
| 13.5 Rechenregeln für Logarithmen . . . . .                                     | 90         |
| 13.6 Zahldarstellungen (umrechnung) . . . . .                                   | 90         |
| <b>14 Vorlesung 14 (04.11.2020)</b>   | <b>97</b>  |
| 14.1 Beispiel: Zahldarstellungen (umrechnung) . . . . .                         | 97         |
| 14.2 Brüche in anderen Zahldarstellungen . . . . .                              | 97         |
| 14.3 Zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag . . . . .                       | 97         |
| 14.4 Rechenregeln für den Betrag . . . . .                                      | 97         |
| 14.5 Beweisidee Dreiecksungleichung . . . . .                                   | 97         |
| 14.6 Definition: Verknüfungen auf Mengen . . . . .                              | 97         |
| 14.7 Definition: Gruppe, Halbgruppe, abelsche Gruppe . . . . .                  | 97         |
| 14.8 Definition: Ring, Ring mit Eins, Kommutativer Ring mit Eins . . . . .      | 97         |
| 14.9 Definition: Körper . . . . .   | 97         |
| <b>15 Vorlesung 15 (16.11.2020)</b>   | <b>105</b> |
| 15.1 5 Körperaxiome + Beispiele . . . . .                                       | 105        |
| 15.2 Definition: Ganzzahlige Teiler . . . . .                                   | 105        |
| 15.3 Definition: Primzahl . . . . .   | 105        |
| 15.4 Definition: Gemeinsame Teiler / Größter gemeinsamer Teiler . . . . .       | 105        |
| 15.5 Division mit Rest . . . . .  | 105        |
| <b>16 Vorlesung 16 (17.11.2020)</b>   | <b>111</b> |
| 16.1 Wiederholung Teilermengen, Primzahl, gemeinsame Teiler . . . . .           | 111        |
| 16.2 Definition: ggT, Division mit Rest, Teilerfremd . . . . .                  | 111        |
| 16.3 Beweis: Division mit Rest . . . . .  | 111        |
| 16.4 Euklidischer Algorithmus . . . . .   | 111        |
| 16.5 Lemma von Bézout . . . . .   | 111        |
| <b>17 Vorlesung 17 (18.11.2020)</b>   | <b>117</b> |

|   |            |
|---|------------|
| 17.1 Teilen mit Rest . . . . .  | 117        |
| 17.2 Teilen und Äquivalenzrelationen, Restmengen . . . . .                          | 117        |
| 17.3 Rechenoperationen in $Z_m$ , Körper?, kommutativer Ring mit Eins? . . . . .    | 117        |
| <b>18 Vorlesung 18 (23.11.2020)</b>   | <b>124</b> |
| 18.1 Restklassen mit Primzahlen sind Körper + Beispiel . . . . .                    | 124        |
| 18.2 simultane Kongruenzen . . . . .  | 124        |
| 18.3 chinesischer Restsatz . . . . .  | 124        |
| <b>19 Vorlesung 19 (24.11.2020)</b>   | <b>131</b> |
| 19.1 Chinesischer Restsatz: Beweis, Beispiel . . . . .                              | 131        |
| 19.2 Allgemeiner chinesischer Restsatz . . . . .                                    | 131        |
| 19.3 RSA: Anwendung von modularer Arithmetik . . . . .                              | 131        |
| <b>20 Vorlesung 20 (25.11.2020)</b>   | <b>137</b> |
| 20.1 Prinzip der RSA-Verschlüsselung . . . . .                                      | 137        |
| 20.2 Eulersche-phi-Funktion . . . . .   | 137        |
| 20.3 Satz von Euler . . . . .   | 137        |
| 20.4 'kleiner' Satz von Fermat . . . . .  | 137        |
| 20.5 Beweis: RSA-Algorithmus . . . . .  | 137        |
| 20.6 Beweis: Satz von Euler . . . . .   | 137        |
| 20.7 Einführung: Lineare Gleichungssysteme . . . . .                                | 137        |
| <b>21 Vorlesung 21 (30.11.2020)</b>   | <b>144</b> |
| 21.1 Rechenoperationen für Vektoren . . . . .                                       | 144        |
| 21.2 Definition: Linearkombination/Gewichtete Summe . . . . .                       | 144        |
| 21.3 Definition: Vektorraum . . . . .   | 144        |
| 21.4 Einführung in Gauß-Algorithmus (Rücksubstitution) . . . . .                    | 144        |
| <b>22 Vorlesung 22 (01.12.2020)</b>   | <b>152</b> |
| 22.1 Gauß-Algorithmus . . . . .   | 152        |
| <b>23 Vorlesung 23 (02.12.2020)</b>   | <b>158</b> |
| 23.1 Zusammenfassung lösen von LGS / Gauß-Algorithmus . . . . .                     | 158        |
| 23.2 Definition Rang von Matrizen und linearen Gleichungssystemen . . . . .         | 158        |
| 23.3 Folgerungen aus Lösungstheorie (spezielle Lösung, allgemeine Lösung) . . . . . | 158        |
| 23.4 in-/homogene lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsstruktur . . . . .     | 158        |
| 23.5 Beispiele spezielle/allgemeine Lösungen . . . . .                              | 158        |
| <b>24 Vorlesung 24 (07.12.2020)</b>   | <b>164</b> |

|  |            |
|--|------------|
| 24.1 Zusammenfassung LGS: Lösen, Lösungsstruktur . . . . .                                     | 164        |
| 24.2 Vektoren und Vektorräume: Rechenoperationen, Pfeile . . . . .                             | 164        |
| <b>25 Vorlesung 25 (08.12.2020)</b>  | <b>170</b> |
| 25.1 Äquivalenz von Pfeilen, Punkte und Vektorsicht . . . . .                                  | 170        |
| 25.2 Rechenregeln von Vektoren . . . . .   | 170        |
| 25.3 Definition: Vektorraum . . . . .  | 170        |
| 25.4 Definition: Erzeugendensystem, linear unabhängig, Basis eines Vektorraums . . . . .       | 170        |
| <b>26 Vorlesung 26 (09.12.2020)</b>  | <b>177</b> |
| 26.1 Zusammenfassung: Erzeugendensystem, Basis . . . . .                                       | 177        |
| 26.2 Definition: Dimension eines Vektorraums . . . . .   | 177        |
| 26.3 Definition: Skalarprodukt, Betrag . . . . .   | 177        |
| 26.4 Bemerkung: Orthonormalbasis . . . . .   | 177        |
| 26.5 Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag . . . . .                                       | 177        |
| 26.6 Einführung: Parameterdarstellung einer Geraden . . . . .                                  | 177        |
| <b>27 Vorlesung 27 (14.12.2020)</b>  | <b>185</b> |
| 27.1 Parameterdarstellung: Gerade & Ebene . . . . .  | 185        |
| 27.2 Orthogonalität von Vektoren/Ebenen . . . . .  | 185        |
| 27.3 Definition: Vektorprodukt . . . . .   | 185        |
| 27.4 Definition: Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor . . . . .                              | 185        |
| <b>28 Vorlesung 28 (15.12.2020)</b>  | <b>192</b> |
| 28.1 Beispiele zur Parameterdarstellung von Ebenen: Punkt auf Ebene, Schnittpunkt Ebene/Gerade | 192        |
| 28.2 Eigenschaften/Rechenregeln des Vektorprodukt . . . . .                                    | 192        |
| 28.3 Koordinatendarstellung einer Ebene (Wandlung zu und von Parameterdarstellung) . . . . .   | 192        |
| 28.4 Beispiel Koordinatendarstellung einer Ebene -> Schnittpunkt mit Gerade . . . . .          | 192        |
| <b>29 Vorlesung 29 (16.12.2020)</b>  | <b>199</b> |
| 29.1 Geometrie im rechtwinkligen Dreieck . . . . .   | 199        |
| 29.2 Skalarprodukt in der Geometrie . . . . .  | 199        |
| 29.3 Vektorprodukt in der Geometrie (Drei-Finger-Regel) . . . . .                              | 199        |
| <b>30 Vorlesung 30 (21.12.2020)</b>  | <b>206</b> |
| 30.1 Deutung von Skalarprodukt und Vektorprodukt in der Geometrie . . . . .                    | 206        |
| 30.2 Beispielaufgaben Ebenen und Geraden im Raum (Schnittgeraden, Senkrechte durch Punkt) .    | 206        |
| <b>31 Vorlesung 31 (22.12.2020)</b>  | <b>212</b> |
| 31.1 Definition: Matrix . . . . .  | 212        |

|  |            |
|--|------------|
| 31.2 Rechenoperationen für Matrizen . . . . .                                  | 212        |
| <b>32 Vorlesung 32 (04.01.2021)</b>  | <b>220</b> |
| 32.1 Beispiele Matrixprodukt . . . . .   | 220        |
| 32.2 Rechenregeln für Matrixprodukt . . . . .                                  | 220        |
| 32.3 transponierte Matrix . . . . .  | 220        |
| 32.4 quadratische Matrix, Nullmatrix, Einheitsmatrix . . . . .                 | 220        |
| 32.5 Definition: Determinante einer Matrix (2x2-Matrix) . . . . .              | 220        |
| 32.6 Definition: invertierbare/inverse Matrix . . . . .                        | 220        |
| <b>33 Vorlesung 33 (05.01.2021)</b>  | <b>228</b> |
| 33.1 Bestimmen der Inversen Matrix (im Allgemeinen und 2x2-Matrizen) . . . . . | 228        |
| 33.2 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2) . . . . .               | 228        |
| <b>34 Vorlesung 34 (06.01.2021)</b>  | <b>234</b> |
| 34.1 (forts.) Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2) . . . . .      | 234        |
| 34.2 Definition: Determinante einer Matrix (nxn-Matrix) . . . . .              | 234        |
| 34.3 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (nxn) . . . . .               | 234        |
| 34.4 Beispiele für Determinanten . . . . .                                     | 234        |
| <b>35 Vorlesung 35 (11.01.2021)</b>  | <b>240</b> |
| 35.1 Matrixmanipulationen und die Determinante . . . . .                       | 240        |
| 35.2 Regel von Sarrus (3x3-Determinante) . . . . .                             | 240        |
| 35.3 Definition: Eigenvektor / Eigenwert . . . . .                             | 240        |
| <b>36 Vorlesung 36 (12.01.2021)</b>  | <b>247</b> |
| 36.1 Geometrische Deutung von Eigenvektor/Eigenwert . . . . .                  | 247        |
| 36.2 Beispiele Eigenvektor/Eigenwert . . . . .                                 | 247        |
| <b>37 Vorlesung 37 (13.01.2021)</b>  | <b>254</b> |
| 37.1 Definition: Diagonalmatrix . . . . .                                      | 254        |
| 37.2 Definition: Potenzen von Matrix/Diagonalmatrix . . . . .                  | 254        |
| 37.3 Beispiel für Matrix-Potenzen . . . . .                                    | 254        |

## 1 Vorlesung 1 (06.10.2020)

- 1.1 **Definition: Menge, Mengenelemente, leere Menge**
- 1.2 **Venn-Diagramme**
- 1.3 **Definition: Aussage**
- 1.4 **Definition: Aussageverknüpfung**
- 1.5 **Beispiele: Verneinung, Konjunktion, Desjunktion, Implikation, Äquivalenz**

- Hinweis auf Portfolio-Prüfung (Kleingruppe / edX-Test / Klausur)
 

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| 5% | 15% | 80% |
|----|-----|-----|
- Hinweis Zugang edX / OSCA-Plattform
- OSCA-Plattform: Medium für alle Infos zur Vorlesung, Übungsaufgaben, Vorlesungsmitschrift, Skript usw.
- Anmeldung zur Kleingruppenübung (eigenständig anmelden im OSCA-Portal)
 

|          |                         |   |                    |
|----------|-------------------------|---|--------------------|
| Gruppe 1 | Kampmann montags 8:00   | } | 14-tägiger Wechsel |
| Gruppe 2 | Meyer donnerstags 12:15 |   |                    |
| Gruppe 3 |                         |   |                    |
- Hinweis auf das Skript → Inhaltverzeichnis (Vorlesungsinhalte)  
→ Literaturhinweise

## 1. Mengen und Aussagen

Definitionen regeln, worüber man in der Mathematik spricht!

### Definition:

Eine Menge ist die Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen. Mengen werden mit Großbuchstaben bezeichnet, die Objekte, die zu einer Menge gehören, heißen Elemente der Menge.

### Bemerkung:

- 1) Mengen werden durch Aufzählung ihrer Elemente zwischen Mengenklammern angegeben, z.B.

$$A = \{ 2, 7, a, \text{Katze} \}$$

Name / Bezeichnung  
der Menge ↑      ↑      ↑      Mengenklammern

↓ „ist Element von...“

- 2) Wenn ein Element a zur Menge A gehört, schreibt  $a \in A$

$b \notin A$

„ist nicht Element von...“

Beispiel:  $A = \{2, 7, a, \text{Katze}\}$

$7 \in A$ ,  $b \notin A$ ,  $\text{Katze} \in A$ ,  $z \notin A$

Definition:

① Es gibt genau eine Menge, die kein Element hat.

Diese Menge heißt leere Menge; das Symbol dafür ist  $\emptyset$ .

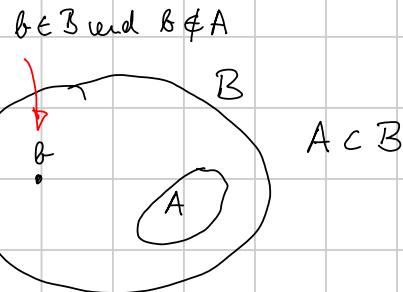
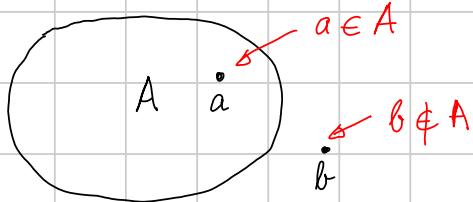
②  $A$  ist Teilmenge von  $B$  (man schreibt  $A \subseteq B$ ), falls jedes Element von  $A$  auch Element von  $B$  ist.

$A$  ist echte Teilmenge von  $B$  (man schreibt  $A \subset B$ ), falls gilt:

$A \subseteq B$  und es gibt mindestens ein  $b \in B$  mit  $b \notin A$ .

③ Es ist  $A = B$  ( Mengengleichheit), falls gilt:  $A \subseteq B$  und  $B \subseteq A$ , d.h. jedes Element von  $A$  gehört auch zu  $B$  und jedes Element von  $B$  gehört auch zu  $A$ .

Venn-Diagramme für Mengen:



Definition:

1) Eine Äu<sup>n</sup>rage ist ein sprachlicher Satz, dem eindeutig und unmissverständlich genau einer der beiden Wahrheitswerte „wahr“ (w, 1) bzw. „falsch“ (f, 0) zugeordnet werden kann.

Äu<sup>n</sup>agen werden (auch) mit Großbuchstaben bezeichnet.

2) Eine Äu<sup>n</sup>age ist eindeutig bestimmt, wenn ihre Wahrheitswerte

festgelegt sind; die Wahrheitswerte „bestimmen“ die Ausage.

Beispiele: Frage: Handelt es sich um Aussagen, wenn ja: Welchen Wahrheitswert haben Sie?

- Merkur ist ein Planet unseres Sonnensystems **Aussage, w**
- Für das Produkt  $2 \cdot 3$  gilt:  $2 \cdot 3 = 7$  **Aussage, f**
- Der beste Fußballverein der Welt ist BVB OSG **Keine Aussage, persönliche Meinung**
- Sonntags finden an der Hochschule keine Vorlesungen in Prof. Kampmann statt **Aussage, w**

Definition:

- Eine Aussageverknüpfung erzeugt aus einer, zwei oder mehreren Aussagen (Input-Aussagen) eine neue Aussage (Output-Aussage).
- Die Aussageverknüpfung ist definiert, wenn die Wahrheitswerte der neuen Aussage (Output-Aussage) in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der beteiligten Aussagen (Input-Aussagen) feststehen; dies geschieht mittels Wahrheitstafeln / Wahrheitstabellen.
- Folgende Aussageverknüpfungen bilden unsere Standardverknüpfungen

a) Verneinung  $\neg$  einfellige Verknüpfung: 1 Input - Aussage

| A | $\bar{A} (\neg A)$ |
|---|--------------------|
| w | f                  |
| f | w                  |

Input      ↗      Output

b) Konjunktion / und-Verknüpfung  $\wedge$  zweifellige Verknüpfung: 2 Input - Aussagen

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| w | w | w            |
| w | f | f            |
| f | w | f            |
| f | f | f            |

c) Disjunktion / oder - Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung

| A | B | $A \vee B$ | $\leftarrow A \vee B : A \text{ oder } B; \vee \text{ steht f\"ur oder}$ |
|---|---|------------|--|
| w | w | w          |  |
| w | f | w          |  |
| f | w | w          |  |
| f | f | f          |  |

d) Implikation / Folgerung | wenn-dann-Verknüpfung ← zweistellige Verknüpfung

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $\leftarrow A \Rightarrow B : \text{ wenn } A \text{ dann } B; \Rightarrow \text{ steht für wenn...dann...}$ |
|---|---|-------------------|--|
| w | w | w                 |  |
| w | f | f                 |  |
| f | w | w                 | $\uparrow$ Folgerung/Schluss<br>$\downarrow$ Prämisse  |
| f | f | w                 |  |

Aus einer falschen Prämisse darf man alles folgern, die  
Folgerung ist wahr:

beide Implikationen sind wahr { Wenn der Mond fünfeckig ist dann ist 2 eine gerade Zahl  
{ Wenn der Mond fünfeckig ist dann ist 2 eine ungerade Zahl

e) Äquivalent / genau dann - wenn - Verknüpfung  $\Leftrightarrow$  zweistellige Verknüpfung

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| w | w | w                     |
| w | f | f                     |
| f | w | f                     |
| f | f | w                     |

$\Leftarrow A \Leftrightarrow B : A \text{ ist äquivalent zu } B$

Äquivalent ist  $\left\{ \begin{array}{l} \text{A und B haben den} \\ \text{„wahr“ Wahrheitswert} \end{array} \right.$

Äquivalenz ist { A und B haben denselben  
„wahr“ Wahrheitswert

Aufgabe:  $A \Leftrightarrow B$  Kann man über  $\wedge$  und  $\Rightarrow$  gewinnen! Wie?

## 2 Vorlesung 2 (07.10.2020)

- 2.1 Aussagenlogik: Tautologie, XOR, Allquantor, Existenzquantor
- 2.2 Rechenregeln für Aussageverknüpfung
- 2.3 Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel)
- 2.4 Definition: Potenzmenge
- 2.5 Definition: Rechnen mit Mengen - Vereinigung, Durchschnitt, Differenz, Komplement

Aussagenlogik2-stellige Verknüpfungen:  $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 1-stellige Verknüpfung:  $\neg, \top$ 

| A | B | $\Leftrightarrow$ | A | B |
|---|---|-------------------|---|---|
| w | w | w                 |   |   |
| w | f | f                 |   |   |
| f | w | f                 |   |   |
| f | f | w                 |   |   |

genau-dann-wenn  
logische Äquivalenz

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| w | w | w                 |
| w | f | f                 |
| f | w | w                 |
| f | f | w                 |

wenn-dann  
logische  
Folgerung

Behauptung: Es gilt  $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B \wedge B \Rightarrow A)$

Beweis: Aufstellen einer Wahrheitstafel/Wahrheitstabelle

des gilt,

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|---|---|-------------------|-------------------|--|-----------------------|
| w | w | w                 | w                 | w  | w                     |
| w | f | f                 | w                 | f  | f                     |
| f | w | w                 | f                 | f  | f                     |
| f | f | w                 | w                 | w  | w                     |

wenn in den  
beiden Spalten  
dieselbe Verteilung  
von Wahrheitswerten  
steht

Bemerkungen:

1) Für die doppelte Verneinung gilt  $(\overline{\overline{A}}) = \neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ .

| A | $\overline{A}$ | $(\overline{\overline{A}})$ | $A \Leftrightarrow (\overline{\overline{A}})$ |
|---|----------------|-----------------------------|---|
| w | f              | w                           | w   |
| f | w              | f                           | w   |

2) Aussagen, die immer den Wahrheitswert „w“ haben, heißen Tautologie

3) Eine Aussageverknüpfung mit  $n$  Input-Aussagen heißt  $n$ -stellige (Aussage)verknüpfung

Wieviele voneinander verschiedene 2-stellige Verknüpfungen

gibt es?

| A | B | *   |
|---|---|-----|
| w | w | w/f |
| w | t | w/t |
| t | w | w/t |
| t | t | w/w |

\* ist eindeutig bestimmt, wenn in jeder der 4 Zeilen ein Wahrheitswert steht  
2 Möglichkeiten pro Zeile, damit insgesamt  
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16$  Möglichkeiten

2 dieser Möglichkeiten sind

| A | B | $\perp$ | XOR | $\top$ |
|---|---|---------|-----|--------|
| w | w | w       | f   | f      |
| w | f | w       | w   | f      |
| f | w | w       | w   | f      |
| f | f | w       | f   | f      |

$\top$  ist die immer Wahr Aussage

$\perp$  ist die immer Falsche Aussage  
 $\wedge$ : A oder B ist wahr, wenn genau eine der beiden Aussagen wahr ist

$\vee$ : Ausschließendes oder:  $\perp$  ist die immer wahr Aussage

#### 4) Die Aussagen

a) „Für alle  $x \in M$  gilt ...“ wird abgekürzt durch:  $\forall x \in M: \dots$

$\forall$  heißt Allquantor.

b) „Für (mindestens) ein  $x \in M$  gilt ...“ wird abgekürzt durch:  $\exists x \in M: \dots$

$\exists$  heißt Existenzquantor.

c) „Für genau ein  $x \in M$  gilt ...“ wird abgekürzt durch:  $\exists! x \in M: \dots$

„Rechnen“ mit Aussagen

Eine Aussageverknüpfung erzeugt aus  $1, 2, \dots, n$  Input-Aussagen

eine neue Aussage; diese Aussage ist festgelegt (wohldefiniert), wenn

ihre Wahrheitswerte in Abhängigkeit von den Wahrheitswerten der

Input-Aussagen feststellt; dies geschieht z.B. über eine Wahrheitstabelle!

#### Rechengesetze für Aussageverknüpfungen

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die Rechengesetze der Aussagenlogik

| Name                                  | und ( $\wedge$ )   | oder ( $\vee$ )  |
|---------------------------------------|--|--|
| Kommutativgesetz                      | $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$                                | $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$                                    |
| Assoziativgesetz                      | $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$          | $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$                  |
| <b>b)</b> Existenz neutraler Elemente | $A \wedge 1 \Leftrightarrow A$   | $A \vee 0 \Leftrightarrow A$   |
| Existenz komplementärer Elemente      | $A \wedge A \Leftrightarrow 0$   | $A \vee A \Leftrightarrow 1$   |
| <b>a)</b> Distributivgesetze          | $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$   | $A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$     |
| <b>c)</b> DeMorgansche Regeln         | $\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$ | $\overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$ |

Remerkung:

1) Es reichen die 2-stelligen Verknüpfungen  $\wedge, \vee$  und die

1-stellige Verknüpfung  $\perp, \top$  aus, um  $\Rightarrow, \Leftarrow$  und weitere

der 1b 2-stelligen Verknüpfungen darzustellen (disjunktive/Konjunktive

Normformen  $\rightarrow$  Digitaltechnik)  $\Rightarrow$  Rechengesetze für  $A, V, \neg$  regeln  
also alle Ausgangsknäpfungen!

2) Exemplarische Beweise der Rechengesetze mittels Wahrheitstafeln

a) 1. Distributivgesetz  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

| $A$   | $B$ | $C$ | $B \vee C$ | $A \wedge (B \vee C)$ | $A \wedge B$ | $A \wedge C$ | $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ |
|---|-----|-----|------------|-----------------------|--------------|--------------|----------------------------------|
| 8 Zeilen $\Leftrightarrow$<br>8 möglichen<br>Kombinationen<br>an Wahrheits-<br>werten bei<br>3 Inputs | w   | w   | w          | w                     | w            | w            | w                                |
|   | w   | w   | t          | w                     | w            | f            | w                                |
|   | w   | f   | w          | w                     | t            | w            | w                                |
|   | w   | f   | t          | t                     | t            | t            | w                                |
|   | f   | w   | w          | w                     | f            | f            | f                                |
|   | f   | w   | t          | w                     | f            | f            | f                                |
|   | t   | f   | w          | w                     | t            | t            | t                                |
|   | t   | f   | t          | t                     | t            | t            | t                                |

b) Existenz neutraler Elemente

$1 \leftarrow$  immer wahre Ausgabe;  $0 \leftarrow$  immer falsche Ausgabe

| $A$ | $1$ | $0$ | $A \wedge 1$ | $A \vee 0$ |
|-----|-----|-----|--------------|------------|
| w   | w   | f   | w            | w          |
| w   | w   | f   | w            | w          |
| f   | w   | f   | f            | f          |
| f   | w   | f   | f            | f          |

$(A \wedge 1) \Leftrightarrow A$

$(A \vee 0) \Leftrightarrow A$

c) DeMorgan'sche Regeln  $\leftarrow$  wie verträgt sich Verneinung mit und bzw. odr

$$\overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}; \quad \overline{A \vee B} \Leftrightarrow \overline{A} \wedge \overline{B}$$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \vee B$ | $\overline{A}$ | $\overline{B}$ | $\overline{A \wedge B}$ | $\overline{A \vee B}$ | $\overline{\overline{A \wedge B}}$ | $\overline{\overline{A \vee B}}$ |
|-----|-----|--------------|------------|----------------|----------------|-------------------------|-----------------------|------------------------------------|----------------------------------|
| w   | w   | w            | w          | f              | f              | f                       | f                     | f                                  | f                                |
| w   | t   | f            | w          | f              | t              | f                       | w                     | w                                  | t                                |
| f   | w   | f            | w          | w              | f              | w                       | w                     | w                                  | w                                |
| t   | t   | f            | w          | w              | w              | w                       | w                     | w                                  | w                                |

3) zwei weitere Beispiele

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{A} \vee B) ; \quad (A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\bar{B} \Rightarrow \bar{A})$$

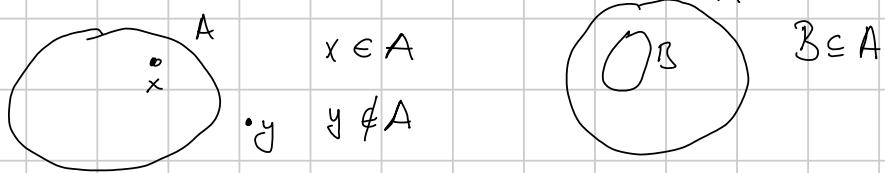
Kontraposition

| A | $\bar{B}$ | $\bar{A}$ | $\bar{B}$ | $A \Rightarrow B$ | $\bar{A} \vee B$ | $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ |
|---|-----------|-----------|-----------|-------------------|------------------|-------------------------------|
| w | w         | f         | f         | w                 | w                | w                             |
| w | +         | f         | w         | f                 | f                | +                             |
| f | w         | w         | f         | w                 | w                | w                             |
| f | f         | w         | w         | w                 | w                | w                             |

Mengenlehre  $A, B$  Mengen:  $A \subseteq B, A \subset B, A = B, x \in A, x \notin A$   
 $\emptyset$  leere Menge (einzige Menge ohne Element)

Zusammenfassung bestimmter, wohlunterschiedener Objekte zu einem Ganzen

Venn-Diagramm:



Bemerkung: „Naive“ Mengendefinition (Cantor) kann zu Widersprüchen führen (Russeln), z.B.:

Auf einer kleinen Insel gilt für die männlichen Bewohner: Der Dorffriseur rasiert jeden Mann, der sich nicht selbst rasiert, und nur diese.

Insbesondere rasiert der Dorffriseur keinen Mann, der sich selbst rasiert; der Dorffriseur ist männlich.

$A = \{x \mid x \text{ ist männlicher Einwohner der Insel und wird vom Dorffriseur rasiert}\}$

f bezeichnet den Dorffriseur!

Gilt  $f \in A$  oder  $f \notin A$  ↗ unentscheidbarer Widerspruch

Lösung: Axiomatische Mengenlehre (Zermelo-Fraenkel)

Unsere pragmatische Lösung:

Alle betrachteten Mengen stammen aus einer (aus dem Zusammenhang erreichlichen) Allmengen  $\mathcal{U}$ . Jede in diesem Zusammenhang betrachtete Menge A

ist also Teilmenge von  $\Omega$ .

Definition:  $\Omega$  ist die betrachtete Allmenge

1) Gegeben ist eine Menge  $A$ , dann ist die Menge aller Teilmengen von  $A$  die Potenzmenge von  $A$ , man schreibt



$$\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$$

2)  $\emptyset \subseteq A \quad \forall A \subseteq \Omega ; \quad A \subseteq A \quad \forall A \subseteq \Omega$

3) Wenn  $A$  endlich viele Elemente hat, ist  $|A|$  die Anzahl der Elemente von  $A$

Beispiel:  $A = \{a, b, c\}$

$$\mathcal{P}(A) = \{ \emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\} \}$$

$\uparrow$   
 $= \{a, b, c\}$

$$\rightarrow |A|=3, \quad |\mathcal{P}(A)|=8=2^3$$

Später wird gezeigt:  $A \subseteq \Omega$  endliche Menge, dann gilt:  $n=|A| \Rightarrow |\mathcal{P}(A)|=2^n$

Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

Definition: Gegeben sind die Mengen  $A$  und  $B$  ( $A \subseteq \Omega, B \subseteq \Omega$ ).

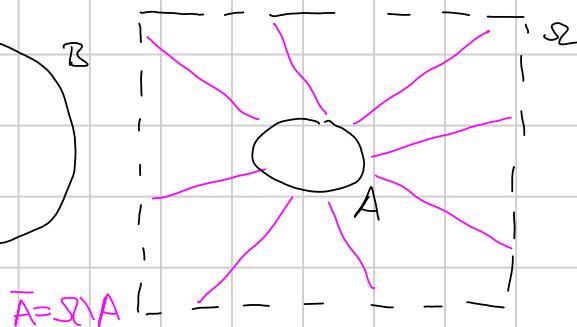
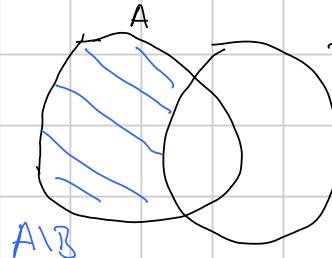
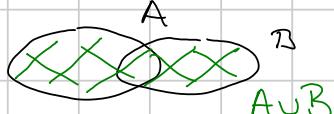
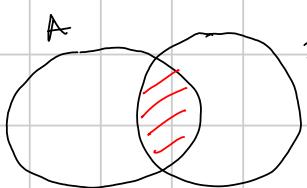
Dann ist definiert

1) die Vereinigung  $A \cup B$  durch:  $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

2) die Durchschnitt  $A \cap B$  durch:  $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

3) die Differenz  $A \setminus B$  durch:  $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

4) das Komplement  $\bar{A}$  durch:  $\bar{A} = \Omega \setminus A = \{x \in \Omega \mid x \notin A\}$



Bemerkung: Statt  $A \setminus B$  schreibt man auch  $A - B$ .

### **3 Vorlesung 3 (12.10.2020)**

**3.1 Zahlenmengen**

**3.2 Definition: Aussageform**

**3.3 Definition: Kartesisches Produkt von Mengen, Tupel**

**3.4 Zahlenstrahl, Anordnung von Zahlen**

## Verknüpfungen von Mengen (Rechnen mit Mengen)

Definition: Gegeben sind die Mengen A und B ( $A \subseteq \mathcal{S}, B \subseteq \mathcal{S}$ ).

Dann ist definiert

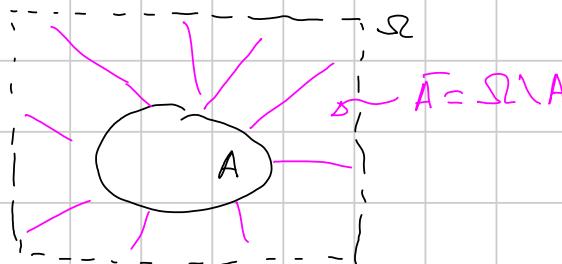
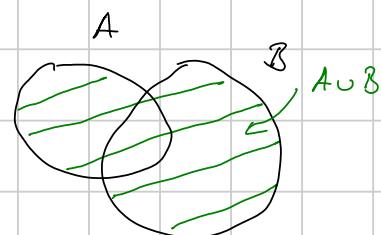
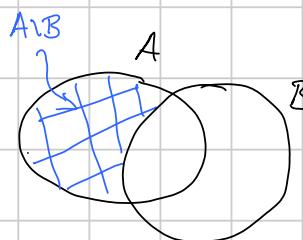
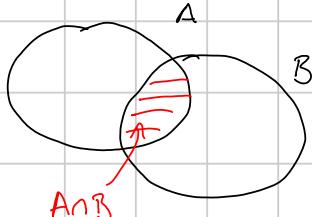
↑  
"Menge aus  
dem Kontext des behandelten  
Themas"

1) die  Vereinigung  $A \cup B$   durch:  $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

2) der  Durchschnitt  $A \cap B$   durch:  $(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

3) die  Differenz  $A \setminus B$   durch:  $(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B)$

4) das  Komplement  $\bar{A}$   durch:  $\bar{A} = \mathcal{S} \setminus A = \{x \in \mathcal{S} \mid x \notin A\}$



## Beispiele und Bemerkungen

### 1) Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \leftarrow$  Menge der natürlichen Zahlen

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \leftarrow$  Menge der natürlichen Zahlen mit Null

$\mathbb{Z} = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \leftarrow$  Menge der ganzen Zahlen

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\} \leftarrow$  Menge der rationalen Zahlen (Menge der Brüche)

$\frac{z}{n} \in \mathbb{Q} \Rightarrow z \text{ heißt Zähler, } z \in \mathbb{Z}$

$n \text{ heißt Nenner, } n \in \mathbb{N} \leftarrow n \neq 0 \text{ denn } 0 \notin \mathbb{N}$

"man darf nicht durch Null teilen"

$$-\frac{3}{4} = -\frac{3}{4} \in \mathbb{Q} \text{ mit } z = -3, n = 4$$

$$\frac{128}{31} \in \mathbb{Q} \text{ mit } z = 128, n = 31$$

$$\left. \begin{array}{l} 5 = \frac{5}{1} \text{ mit } z = 5, n = 1 \\ -8 = \frac{-8}{1} \text{ mit } z = -8, n = 1 \end{array} \right\}$$

Es gilt:  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

$(\frac{1}{2}) = \frac{2}{4} = \frac{8}{16} \dots \leftarrow \text{die Darstellung } q = \frac{z}{n} \text{ für } q \in \mathbb{Q} \text{ ist nicht eindeutig}$

vollständig gekürzte Form: Zähler und Nenner haben keinen gemeinsamen Faktor mehr

$$\frac{15}{35} = \frac{3 \cdot 5}{7 \cdot 5} = \frac{3}{7} \leftarrow \text{vollständig gekürzte Form}$$

„Kürzen“ des gemeinsamen Faktors

$$\left. \begin{array}{l} A = \{-2, -1, 0, 3, 5, 7\} \\ B = \{-3, -1, 3, 6\} \\ C = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -5, -2, 0\} \end{array} \right\} \text{ dann gilt}$$

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{-1, 3\}$$

$$\left. \begin{array}{l} A \setminus B = \{-2, 0, 5, 7\} \\ B \setminus A = \{-3, 6\} \end{array} \right\} \text{ in der Regel (d.h. außer in wenigen Ausnahmefällen)} \quad \text{gilt} \quad A \setminus B \neq B \setminus A$$

$$C \setminus B = C \text{ hier und } B \setminus C = B$$

$$A \cap C = \{0, 2\}, B \cap C = \emptyset$$

→ A enthält nur ganze Zahlen, also aus dem Kontext:  $\mathbb{S} = \mathbb{Z}$

$$\bar{A} = \mathbb{Z} \setminus A = \{\dots, -4, -3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, \dots\}$$

### „Rechenregeln“ für Mengenoperationen

Mengenoperationen sind über aussagenlogische Verknüpfungen definiert, z.B.

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$$

daher folgt: Die „Rechenregeln“ für Mengenoperationen folgen aus den „Rechenregeln“ der Aussagenlogik

Die folgende tabellarische Übersicht zeigt die **Rechengesetze der Mengenlehre**

| Name                             | Durchschnitt ( $\cap$ )  | Vereinigung ( $\cup$ )   |
|----------------------------------|--|--|
| Kommutativgesetz                 | $A \cap B \Leftrightarrow B \cap A$                            | $A \cup B \Leftrightarrow B \cup A$                            |
| Assoziativgesetz                 | $A \cap (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cap C$          | $A \cup (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cup C$          |
| Existenz neutraler Elemente      | $A \cap \Omega \Leftrightarrow A$                              | $A \cup \emptyset \Leftrightarrow A$                           |
| Existenz komplementärer Elemente | $A \cap \bar{A} \Leftrightarrow \emptyset$                     | $A \cup \bar{A} \Leftrightarrow \Omega$                        |
| Distributivgesetze               | $A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |
| DeMorgansche Regeln              | $A \cap \bar{B} \Leftrightarrow A \cup \bar{B}$                | $A \cup \bar{B} \Leftrightarrow A \cap \bar{B}$                |

Beweisidee: Vereinigung  $\cup$  Durchschnitt  $\cap$  Mengenoperationen Verknüpfungen der oder und Ausagenlogik

a)  $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B \cap C)$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \vee ((x \in B) \wedge (x \in C))$$

Distributivgesetz der Ausagenlogik  $\Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B)) \wedge ((x \in A) \vee (x \in C))$

$$\Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C)$$

$$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Merke: Mengengleichheit  $A = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

$$\Leftrightarrow ((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$$

b)  $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \leftarrow x \in (A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$

$$\Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$$

DeMorgansche Regel

der Ausagenlogik

$$\Leftrightarrow (\overline{x \in A}) \vee (\overline{x \in B})$$

$$\Leftrightarrow (x \notin A) \vee (x \notin B)$$

$$\Leftrightarrow (x \in \bar{A}) \vee (x \in \bar{B})$$

$$\Leftrightarrow x \in (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Angabe von Mengen durch Aufzählung ihrer Elemente ist bei großen endlichen Mengen insbesondere aber bei Mengen mit unendlich vielen Elementen unpraktisch bzw. unmöglich, daher braucht es eine

Definition:

Eine Ausageform ist ein sprachlicher Satz, der einen oder mehrere

Platzhalter (eine oder mehrere Variablen) enthält, wird zu Aussage wird, sobald man die Platzhalter (Variablen) durch konkrete Elemente der Definitionsmenge D (Grundmenge) der Aussageform ersetzt.

Beispiele:

1)  $A(n) \hat{=} „n \text{ ist ohne Rest durch } 3 \text{ teilbar}"$ ,  $D = \mathbb{N}$   
 ↑  
 Variable

$A(5) \hat{=} „5 \text{ ist ohne Rest durch } 3 \text{ teilbar}" \leftarrow \text{Aussage, Wahrheitswert: f}$

2)  $B(n_1, n_2) \hat{=} „\text{das Produkt } n_1 \cdot n_2 \text{ ist eine ungerade Zahl}"$ ,  
 ↑↑  
 2 Variable

$$D = \{(n_1, n_2) \mid n_1 \in \mathbb{N} \wedge n_2 \in \mathbb{N}\}$$

Was ist das? → Siehe unten: Kartesisches Produkt

$B(3, 6) \hat{=} „\text{das Produkt } 3 \cdot 6 \text{ ist eine ungerade Zahl}" \leftarrow \text{Aussage, Wahrheitswert: f}$

$B(5, 7) \hat{=} „\text{das Produkt } 5 \cdot 7 \text{ ist eine ungerade Zahl}" \leftarrow \text{Aussage, Wahrheitswert: w}$

3)  $G \subseteq \mathbb{Z}$  mit  $G = \{z \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}: z = 2 \cdot k\}$  Menge der geraden Zahlen  
 ↓ damit ist die Bedeutung von ... eindeutig geklärt  
 $= \{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$

3)  $S = \{\lambda \mid \lambda \text{ ist im WS 2021 an der HS Osnabrück als Studierender(r) eingeschrieben}\}, D = \text{Menge aller Menschen}$

Die Aussageform, die eine Menge beschreibt, nennt man auch charakterisierende Eigenschaft der Menge.

Mengen kann man also durch Anfählung aller Elemente oder durch ihre charakterisierende Eigenschaft beschreiben.

## Definition (Kartesisches Produkt von Mengen)

1) Gegeben sind zwei Mengen  $A, B$  (mit  $A \neq \emptyset$  und  $B \neq \emptyset$ ).

Dann ist das Kartesische Produkt  $A \times B$  definiert durch

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \}$$

dabei heißt  $(a, b)$  geordnetes Paar ( $2$ -Tupel) mit festgelegten Komponenten  
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ 1. \text{ Komponente} \\ \downarrow \\ 2. \text{ Komponente} \end{array}$

Für alle  $2$ -Tupel / geordneten Paare  $(a, b)$  aus  $A \times B$  gilt:

1. Komponente  $a$  kommt aus der 1. Menge  $A$

2. Komponente  $b$  kommt aus der 2. Menge  $B$

2) Gegeben sind die Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ); es gilt  $A_i \neq \emptyset$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Dann ist das ( $n$ -fache) Kartesische Produkt  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  definiert durch

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i \text{ für } i \in \{1, 2, \dots, n\} \}$$

dabei heißt  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ein  $n$ -Tupel

$a_i$  steht in der  $i$ -ten Komponente von  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ;

$i$ -te Komponente  $a_i$  kommt aus der  $i$ -ten Menge  $A_i$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

## Beispiele:

$$\begin{aligned} 1) \quad A &= \{1, 2, 3\} & \Rightarrow A \times B &= \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\} \\ &B = \{a, b\} & B \times A &= \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\} \\ (a, 1) &\neq (1, a) & \Rightarrow A \times B &\neq B \times A \end{aligned}$$

Das Kartesische Produkt von Mengen ist nicht kommutativ, d.h. die Reihenfolge der „Faktoren“ (also der beteiligten Mengen) ist relevant!

2) Für die Mengen aus 1) gilt:

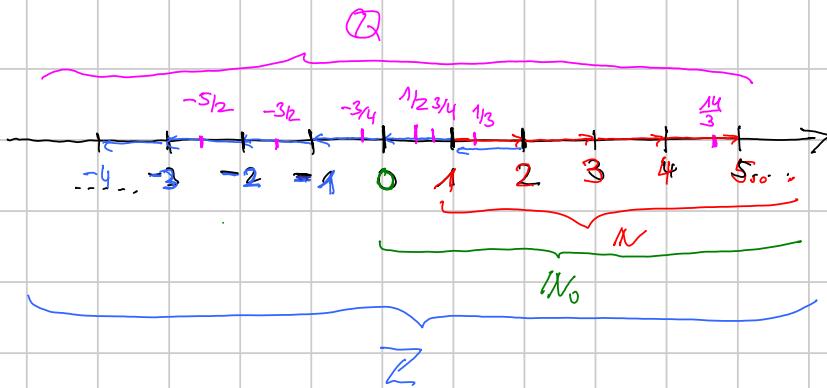
$$\left. \begin{array}{l} |A| = 3 \\ \uparrow \text{Anzahl der Elemente in } A \\ |B| = 2 \end{array} \right\} |A \times B| = |B \times A| = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = 6$$

allgemein  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$  für endliche Mengen  $A$  und  $B$

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n| \text{ für endliche Mengen}$$

$$A_i; i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Grafische Veranschaulichung der Zahlenmengen  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$



Zahlenstrahl: Horizontale Gerade mit aufsteigenden äquidistanten Punkten

Zahlenstrahl = gerichtete Gerade  $\Rightarrow$  Anordnung der Zahlen in  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ,

natürlich:  $a < b \Leftrightarrow$  Punkt zu  $a$  auf Zahlenstrahl liegt links vom Punkt zu  $b$  auf dem Zahlenstrahl  
 $a$  kleiner  $b$   $\xrightarrow{\quad}$

$a = b \Leftrightarrow$  Punkt zu  $a$  auf dem Zahlenstrahl ist identisch mit dem Punkt zu  $b$  auf dem Zahlenstrahl  
 $a$  gleich  $b$   $\xrightarrow{\quad}$

$a > b \Leftrightarrow b < a$   
 $a$  größer  $b$   $\xrightarrow{\quad}$

## 4 Vorlesung 4 (13.10.2020)

4.1 Beispiele Relationen + Kartesisches Produkt

4.2 Definition: reflexiv, transitiv, symmetrisch, antisymmetrisch: Äquivalenzrelation, Ordnungsrelation

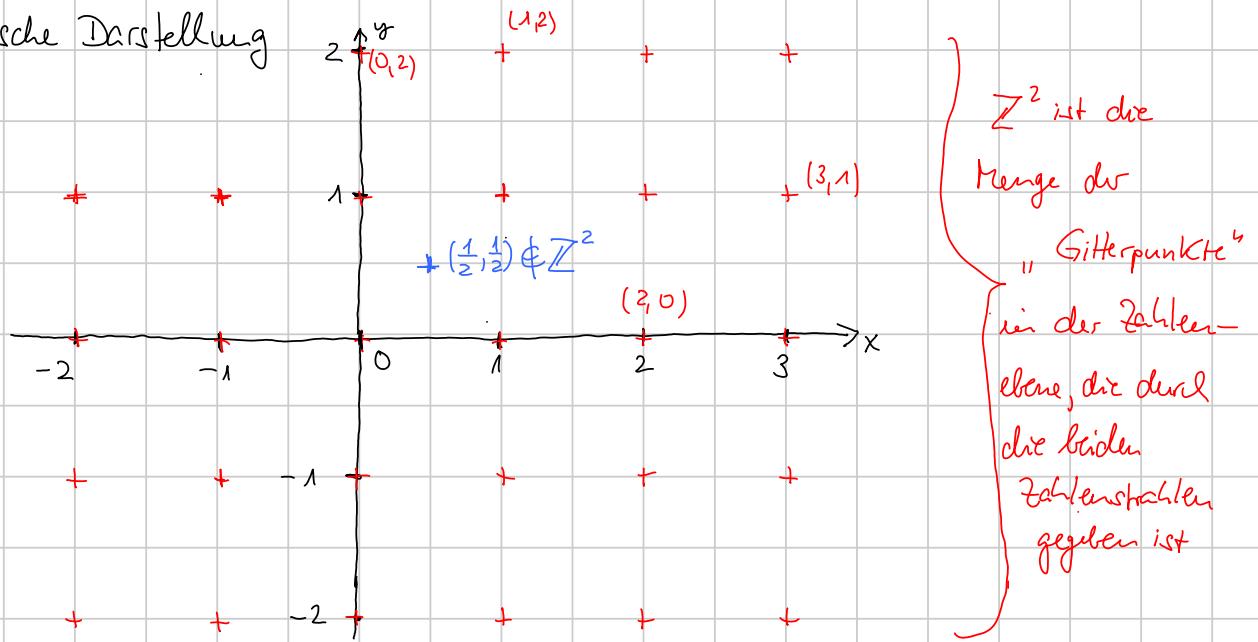
4.3 Definition: Äquivalenzklasse

Beispiel: Kartesisches Produkt von Mengen

$$\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \in \mathbb{Z} \wedge y \in \mathbb{Z}\}$$

$$(-1, 4) \in \mathbb{Z}^2, \quad (7, 0) \in \mathbb{Z}^2, \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \notin \mathbb{Z}^2$$

grafische Darstellung



Definition:

1) Gegeben sind die Mengen  $A$  und  $B$  ( $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ ).

Jede Teilmenge  $R \subseteq A \times B$  heißt (2-stellige) Relation über  $A, B$ .

Für  $A = B$ :  $R \subseteq A \times A = A^2$  heißt (2-stellige) Relation über  $A$ .

2) Gegeben sind die Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_n$  ( $A_i \neq \emptyset \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ).

Jede Teilmenge  $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$  heißt ( $n$ -stellige) Relation über  $A_1, A_2, \dots, A_n$ .

Für  $A_1 = A_2 = \dots = A_n$ :  $R \subseteq A_1 \times A_1 \times \dots \times A_1 = A_1^n$  heißt ( $n$ -stellige) Relation über  $A_1$ .

Beispiele:

1)  $M = \text{Menge aller Menschen}$

$R$  2-stellige Relation über  $M$  ist gegeben durch

$$R = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1 \text{ ist Vater von } m_2\} \quad \text{„Vater-Relation“}$$

2)  $P$  = Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball

$\tilde{R}$  2-stellige Relation über  $P$  ist gegeben durch

$$\tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2\}$$

↑ „Fußballer-Relation“

3)  $K \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  ist definiert durch

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\} \leftarrow \text{„Kleiner-Relation“}$$

$K$  ist eine 2-stellige Relation über  $\mathbb{Z}$

↑ Kleiner-gleich

4) Man definiert für  $a, b \in \mathbb{Z}$ :  $a \leq b \iff (a < b) \vee (a = b)$

$$a \geq b \iff (a > b) \vee (a = b)$$

↑ größer-gleich

$KG \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^2$  ist definiert durch

$$KG = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\} \leftarrow \text{„Kleiner-Gleich-Relation“}$$

$KG$  ist eine 2-stellige Relation über  $\mathbb{Z}$

Definition:

1) Eine 2-stellige Relation  $R$  über  $A$ ,  $A \neq \emptyset$ , heißt Äquivalenzrelation, falls gilt:

a)  $R$  ist reflexiv, d.h.  $(a, a) \in R \quad \forall a \in A$

b)  $R$  ist transitiv, d.h.  $(a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

c)  $R$  ist symmetrisch, d.h.  $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

2) Eine 2-stellige Relation über  $A$ ,  $A \neq \emptyset$ , heißt Ordnungsrelation,

falls gilt:  $\downarrow (a, a) \in R \quad \forall a \in A$

a)  $R$  ist reflexiv, b)  $R$  ist transitiv

Ausgangsheraussetzung  
für Prüfung auf Antisymmetrie

c)  $R$  ist antisymmetrisch, d.h.  $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

d.h. für  $a \neq b$  ist niemals  $(a, b) \in R$  und  $(b, a) \in R$

Beispiele:

1)  $G \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ist definiert durch  $G = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x = y\}$  ← „Gleich-Relation“

Es gilt:  $\forall x \in \mathbb{Z}: x = x \Rightarrow (x, x) \in G \quad \forall x \in \mathbb{Z}, G$  ist reflexiv

$(x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \Rightarrow (x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow x = z$

$\Rightarrow (x, z) \in G, G$  ist transitiv

$(x, y) \in G \Rightarrow x = y \Rightarrow y = x \Rightarrow (y, x) \in G, G$  ist symmetrisch

Zusammen: Die „Gleich-Relation“  $G$  über  $\mathbb{Z}$  ist eine Äquivalenzrelation

2)  $KG \subseteq \mathbb{Z}^2$  mit  $KG = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x \leq y\}$  ← „Kleiner-Gleich-Relation“

Es gilt:

$(x, y) \in KG \Rightarrow x \leq y \}$  falls  $(x, y) \in KG$  und  $(y, x) \in KG$  gilt, hat man  
 $(y, x) \in KG \Rightarrow y \leq x \}$   $x \leq y \leq x \Leftrightarrow x = y$   
d.h.  $KG$  ist antisymmetrisch

$\forall x \in \mathbb{Z}: \underbrace{x \leq x}_{(x < x) \vee (x = x)} \Rightarrow (x, x) \in KG, KG$  ist reflexiv

↑  $(x < x) \vee (x = x)$  ← das wahre Ausrufe solange einer der Inputs  $x < x / x = x$  wahr ist

$\forall (x, y) \in KG, (y, z) \in KG:$

$(x, y) \in KG \Rightarrow x \leq y \}$   $\Rightarrow x \leq y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow (x, z) \in KG,$   
 $(y, z) \in KG \Rightarrow y \leq z \quad KG$  ist transitiv

Zusammen: Die „Kleiner-Gleich-Relation“  $KG$  über  $\mathbb{Z}$  ist eine Ordnungsrelation

3) Welche der oben definierten Eigenschaften haben die folgenden Relationen

↓ Menge aller Menschen

a)  $R = \{(m_1, m_2) \in M \times M \mid m_1 \text{ ist Vater von } m_2\}$  ← „Vater-Relation“  
↓ Menge aller Professoren im DFB

b)  $\tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2\}$

c)  $K = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y\}$  ← „Kleiner-Relation“

zu a)  $R$  ist weder reflexiv, noch transitiv, noch symmetrisch

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\ \text{niemand ist sein} \quad (a,b) \in R_1 \quad \text{niemand kann} \\ \text{eigener Vater} \quad (b,c) \in R \Rightarrow \quad \text{sein eigenes Kind sein} \\ \text{a ist Großvater von c} \\ \text{nicht Vater} \end{array}$$

zu b)  $\tilde{R}$  ist Äquivalenzrelation, denn

$$(f, f) \in \tilde{R} \quad \forall f \in P \Rightarrow \tilde{R} \text{ ist reflexiv}$$

↑ jeder Fußballer gehört  
zu seinem Verein

$$(f_1, f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow f_1 \text{ ist im selben Verein wie } f_2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f_1 \text{ ist im selben Verein} \\ \text{wie } f_2$$

$$(f_2, f_3) \in \tilde{R} \Rightarrow f_2 \text{ ist im selben Verein wie } f_3 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Rightarrow f_2 \text{ ist im selben Verein wie } f_3$$

$\Rightarrow \tilde{R}$  ist transitiv

$$(f_1, f_2) \in \tilde{R} \Rightarrow f_1 \text{ ist im selben Verein wie } f_2$$

$\Rightarrow f_2 \text{ ist im selben Verein wie } f_1$

$$\Rightarrow (f_2, f_1) \in \tilde{R} \Rightarrow \tilde{R} \text{ ist symmetrisch}$$

zu c)  $K = \{ (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid x < y \}$

$x < x$  ist falsche Aussage  $\forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x) \notin K \quad \forall x \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow K$  ist nicht reflexiv

ein konkretes Gegenbeispiel reicht aus

↑ für  $(1, 1)$  gilt  $1 < 1$  nicht! Damit ist  $(1, 1) \notin K$

$K$  ist nicht reflexiv

$$\begin{array}{c} \{(x, y) \in K \mid x < y\} \\ (y, z) \in K \Rightarrow y < z \end{array} \Rightarrow x < y < z \Rightarrow x < z \Rightarrow (x, z) \in K$$

$\Rightarrow K$  ist transitiv

$(x, y) \in K \Rightarrow x < y \Rightarrow y < x$  ist falsche Aussage

$\Rightarrow (y, x) \notin K \Rightarrow K$  ist nicht symmetrisch

Es gibt keine  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  mit  $(x, y) \in K \wedge (y, x) \in K$ , dann  $x < y$  und  $y < x$

ist immer eine falsche Aussage! Ausgangshypothese für Antisymmetrie ist nie erfüllt!

### Definition:

Gegeben ist eine (2-stellige) Äquivalenzrelation  $R$  über  $A$ . Dann gilt:

1) Falls  $(a, b) \in R$  ist, sagt man  $a$  und  $b$  sind äquivalent.

2) Für  $a \in A$  ist die Menge

$$[a] = \overline{a} = \{b \in A \mid (a, b) \in R\}$$

$$= \{b \in A \mid a \text{ und } b \text{ sind äquivalent}\}$$

die Äquivalenzklasse zu  $a$  (bezügl. der Relation  $R$ )

3) Für  $(a, b) \in R$ , also  $a$  und  $b$  sind äquivalent, wird häufig ein eigenes „Rechenzeichen“ eingeführt, z.B.  $a \equiv b$ .

### Beispiel:

Wir betrachten die Zahl  $m = 5 \in \mathbb{Z}$  und folgende Relation  $R$ :

Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  gilt  $a \equiv b \Leftrightarrow 5$  ist echter Teiler von  $b-a$

$\uparrow$   
 $a$  ist äquivalent zu  $b$  /  $a$  ist Kongruent zu  $b$

Bemerkung:  $5$  ist echter Teiler von  $b-a \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b-a = k \cdot 5$

a)  $R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a \equiv b\}$  ist eine Äquivalenzrelation

$b-a$  ist ein Vielfaches von  $5$

reflexiv:  $a-a=0=0 \cdot 5 \Rightarrow (a, a) \in R$  oder  $a \equiv a$

symmetrisch:  $a \equiv b \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z}: b-a=k \cdot 5$

$$\Rightarrow a-b = -(b-a) = -k \cdot 5 = (-k) \cdot 5$$

$\Rightarrow$  und  $a-b$  ist ein Vielfaches von  $5$

$$\Rightarrow b \equiv a$$

transitiv:  $a \equiv b \wedge b \equiv c \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}: b-a=k \cdot 5 \wedge c-b=l \cdot 5$

$$\Rightarrow c-a = (\cancel{c-\cancel{b}}^{\stackrel{\equiv}{=}} + \cancel{b-a})$$

$$= l \cdot 5 + k \cdot 5 = (l+k) \cdot 5$$

$\Rightarrow$  und  $c-a$  ist ein Vielfaches von  $5$

$$\Rightarrow c \equiv a$$

b) Äquivalenzklassen dieser Relation  $a \equiv b \Leftrightarrow b-a = k \cdot 5$

$$[0] = \bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 0 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = b = k \cdot 5 \}$$
$$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0 \}$$

$$[1] = \bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid 1 \equiv b \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b - 1 = k \cdot 5 \}$$
$$= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1 \}$$

Aufgabe zur 5. Vorlesung: a) Finden Sie die weiteren Äquivalenzklassen

b) Finden Sie die Äquivalenzklassen der Fußballer-Relation (sprachlich beschreiben!)

## 5 Vorlesung 5 (14.10.2020)

**5.1 Beispiele Äquivalenzklasse**

**5.2 Definition: vollständige Mengenpartition**

**5.3 Satz: Äquivalenzklassen bilden vollständige Mengenpartition**

**5.4 Definition: Verknüpfung**

**5.5 Definition: Abbildung, Funktion, Bild, Graph, Urbild**

**5.6 grafische Veranschaulichung der reellen Zahlen**

$$1) R = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \exists k \in \mathbb{Z}: b - a = k \cdot 5\}$$

für  $(a, b) \in R$  schreiben wir  $a \equiv b$

4. Vorlesung: Nachweis  $R$  ist Äquivalenzrelation

Äquivalenzklassen:  $[a] = \{b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b\}$  (andere Schreibweise für  $[a]$  ist  $\bar{a}$ )

$$\begin{aligned} [0] &= \bar{0} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 0 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 0\} \\ [1] &= \bar{1} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 1 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 1\} \\ [2] &= \bar{2} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 2 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 2\} \\ [3] &= \bar{3} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 3 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 3\} \\ [4] &= \bar{4} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 4 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 4\} \end{aligned}$$

} es existiert ein  $k \in \mathbb{Z}$ , so dass die Darstellung nur  $b$  gegeben ist

$$\begin{aligned} [5] &= \bar{5} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b - 5 = k \cdot 5\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 5 + 5 = \underbrace{(k+1)}_{\text{= } \tilde{k}} \cdot 5\} \\ &= \{b \in \mathbb{Z} \mid b = \tilde{k} \cdot 5 + 0\} = [0] \end{aligned}$$

Für  $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$  gilt also

� ganzzahlige Teiler

$[i] = \bar{i}$  ist die Menge aller ganzen Zahlen, die beim Teilen durch 5 den Rest  $i$  lassen.

$$\begin{aligned} [0] &= \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, \dots\} \\ [1] &= \{\dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, \dots\} \quad -9 = \underbrace{(-2)}_k \cdot 5 + 1 \\ [2] &= \{\dots, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, \dots\} \\ [3] &= \{\dots, -12, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots\} \\ [4] &= \{\dots, -11, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{Z} = [0] \cup [1] \cup [2] \cup [3] \cup [4], \quad [i] \cap [j] = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

2) Fußballer-Relation (aus der 4. Vorlesung)

Eine Äquivalenzklasse dieser Relation ist ein Verein im deutschen Profifußball



� jeder Verein (als Menge seiner Spieler) ist eine Äquivalenzklasse

$P = \text{Menge aller Profifußballer im deutschen Fußball}$   
 $\tilde{R} \text{ 2-stellige Relation über } P \text{ ist gegeben durch}$   
 $\tilde{R} = \{(f_1, f_2) \in P \times P \mid f_1 \text{ ist im selben Verein unter Vertrag wie } f_2\}$   
 ↑ „Fußballer-Relation“

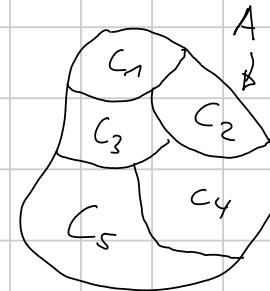
Definition: Gegeben ist eine Menge  $A (A \neq \emptyset)$ .  $P(A)$  ist dann die Potenzmenge von  $A$  (Menge aller Teilmengen von  $A$ ).

Ein Mengensystem  $B \subseteq P(A)$  (also eine Menge von Teilmengen von  $A$ ) heißt vollständige Mengenpartition von  $A$ , wenn gilt:

$$1) C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad \forall C_1, C_2 \in B \text{ mit } C_1 \neq C_2$$

$$2) \bigcup_{C_i \in B} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots \cup C_N = A$$

$$B = \{C_1, C_2, \dots, C_N\}$$



Bemerkung: Wenn  $B = \{C_1, C_2, \dots, C_N\} \subseteq P(A)$  eine vollständige Mengenpartition von  $A$  ist, gilt: Jedes Element von  $A$  gehört zu genau einer Menge  $C_i$  aus  $B$ .

Satz: Gegeben ist eine Menge  $A, A \neq \emptyset$ .  $R \subseteq A \times A$  ist eine Äquivalenzrelation über  $A$ . Dann gilt:

Die Äquivalenzklassen dieser Relation bilden eine vollständige Mengenpartition von  $A$ , d.h.  $\bigcup_{a \in A} [a] = A$ .

Beweis:

1) Für jedes  $a \in A$  gilt  $a \in [a]$ , denn  $R$  ist reflexiv  $(a, a) \in R$ , damit ist  $\bigcup_{a \in A} [a] = A$

2) Angenommen  $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in [a] \cap [b] \text{ d.h.}$

$$\underbrace{x \in [a]}_{(a, x) \in R} \wedge \underbrace{x \in [b]}_{(b, x) \in R} \Rightarrow \underbrace{(a, x) \in R \wedge (b, x) \in R}_{R \text{ ist symmetrisch}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a, x) \in R \wedge (x, b) \in R}_{R \text{ ist transitiv}}$$

$$\Rightarrow (a, b) \in R$$

$$\Rightarrow a \in [b], b \in [a]$$

$$\Rightarrow [a] = [b]$$

### Verknüpfung von Relationen

Definition: A, B, C sind nichtleere Mengen.

Gegaben sind die 2-stelligen Relationen  $R_1 \subseteq A \times B$  und  $R_2 \subseteq B \times C$

Dann ist die Verknüpfung  $R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$  definiert durch:

$$(a, c) \in R_1 \circ R_2 \Leftrightarrow \exists x \in B : (a, x) \in R_1 \wedge (x, c) \in R_2$$

A = Menge der Namen der Studierenden der HS OS

B = Menge der zulässigen Matrikelnummern der HS OS

C = Menge der Studiengänge der HS OS

$R_1 \subseteq A \times B \leftarrow$  Zuordnung des Namens eines Studierenden zur Matrikelnr.

| Name    | Matr.-Nr. |
|---------|-----------|
| ---     | ---       |
| Schmidt | 12345     |
| Meier   | 36111     |
| Schulze | 21224     |
| :       | :         |

$R_2 \subseteq B \times C \leftarrow$  Zuordnung von Matrikelnr. zu Studiengang

| Matrikel-Nr. | Studiengang |
|--------------|-------------|
| ---          | ---         |
| 12345        | Elektrot.   |
| 36111        | Medieninf.  |
| 21224        | Gartenbau   |
| ---          | ---         |

$$R_1 \circ R_2 \subseteq A \times C$$

$$\left. \begin{array}{l} (\text{Schmidt}, 12345) \in R_1 \\ (12345, \text{Elektrot.}) \in R_2 \end{array} \right\} (\text{Schmidt, Elektrot.}) \in R_1 \circ R_2$$

| Name    | Studiengang   |
|---------|---------------|
| ---     | ----          |
| Schmidt | Elektrot.     |
| Moser   | Medizinteinf. |
| Schulze | Gartenbau     |
| - - -   | ----          |

## Abbildungen und Funktionen (als Relationen mit bestimmten Zusatzeigenschaften)

### Definition:

Gegeben sind die Mengen  $D$  und  $W$  ( $D \neq \emptyset, W \neq \emptyset$ ).

a) Eine Abbildung  $f: D \rightarrow W$  ist eine 2-stellige Relation  $f \subseteq D \times W$  über  $D$  und  $W$  mit folgender Eigenschaft:

$\forall x \in D \exists ! y \in W : (x, y) \in f$ , man schreibt dafür  $y = f(x)$   
 zu jedem  $x \in D$  gibt es genau ein  
 $y \in W$  mit  $(x, y) \in f$  oder  $y = f(x)$ ;  
 dem  $x \in D$  wird mittels  $f$  genau ein  
 $y \in W$  zugeordnet

Die Menge  $D$  heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge der Abbildung;

die Menge  $W$  heißt Wertebereich / Wertemenge der Abbildung

b) Wenn gilt:  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $W \subseteq \mathbb{R}$  nennt man die Abbildung  $f: D \rightarrow W$  eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen

c) Für eine Abbildung  $f: D \rightarrow W$  ist definiert

$$\underline{\text{Bild}(f)} = \{ y \in W \mid \exists x \in D \text{ mit } y = f(x) \text{ (d.h. } (x, y) \in f \subseteq D \times W \text{)} \}$$

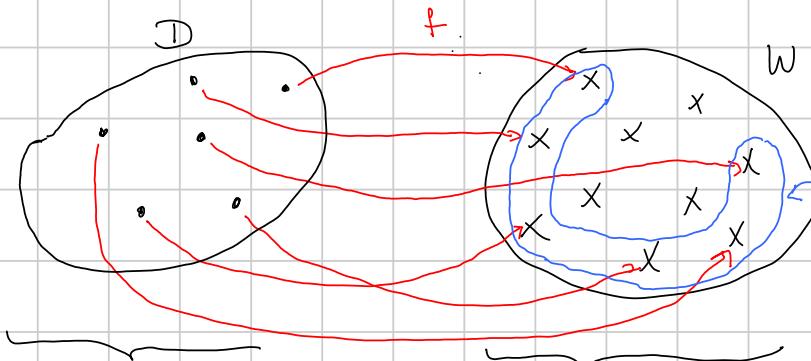
$$\underline{\text{Graph}(f)} = \{ (x, y) \in D \times W \mid y = f(x) \text{ (d.h. } (x, y) \in f \text{)} \}$$

ist der Graph von  $f$  ( $D \subseteq \mathbb{R}, W \subseteq \mathbb{R} : \text{Graph} \hat{=} \text{Funktionskurve}$ )

$$\text{Für } y \in W \text{ ist } \underline{U}_f(y) = \{ x \in D \mid y = f(x) \text{ (d.h. } (x, y) \in f \text{)} \}$$

das Urbild von  $y$  unter  $f$

$f: D \rightarrow W$



Bild( $f$ )

Elemente von  $W$ , bei denen ein Pfeil endet, die also vorkommen

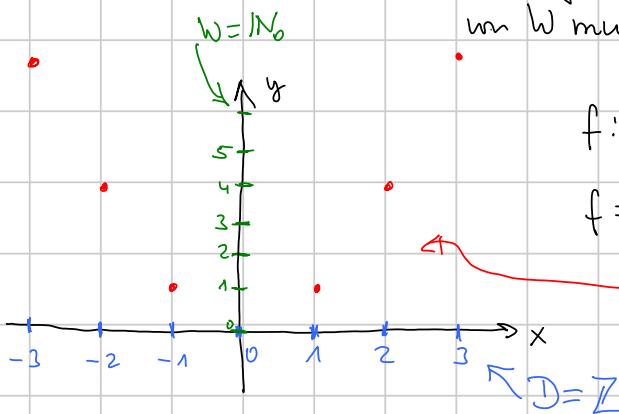
$\forall x \in D$  heißt:

von jedem Element in  $D$  geht ein Pfeil aus

$\exists ! y \in W : (x, y) \in f$

Jeder Pfeil endet bei genau einem Element aus  $W$

Achtung: Nur bei jedem Element von  $W$  muss ein Pfeil enden



$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}_0$

$f = \{(z, z^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}_0\}$  also  $f(z) = z^2$

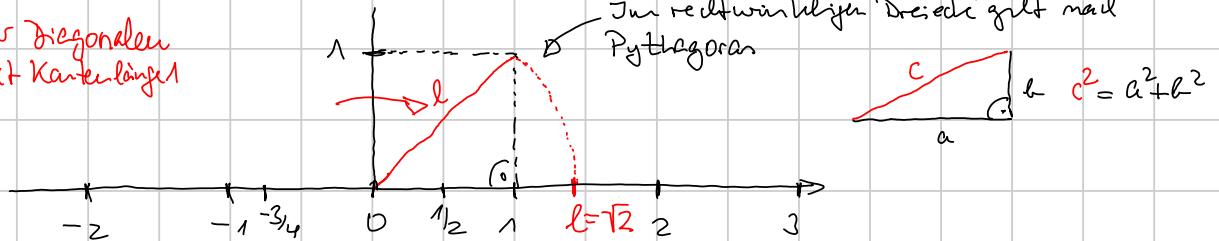
Graph( $f$ ) =  $\{(z, z^2) \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Was ist  $\mathbb{R}$ ?

$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \rightarrow$  grafische Veranschaulichung: Zahlenstrahl

$l \triangleq$  Länge der Diagonalen im Quadrat mit Kantenlängen

Im rechtwinkligen Dreieck gilt nach Pythagoras



Zu  $l$  gibt es einen Punkt auf dem Zahlensstrahl, d.h.  $l$  ist eine auf dem Zahlensstrahl repräsentierte Zahl, mit Pythagoras folgt  $l^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ .

Wir nennen die Zahl  $l$  Wurzel aus 2, geschrieben  $l = \sqrt{2}$

Es gilt  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ , d.h.  $\sqrt{2}$  gehört zu einer Zahlenmenge (repräsentiert auf dem Zahlensstrahl), die neu ist; das ist  $\mathbb{R}$ , die Menge der reellen Zahlen; es gilt  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .

Beweis zu  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ : Widerspruchsbeweis (man nimmt das Gegenteil der Behauptung als wahr an und leitet daraus einen offensichtlichen Widerspruch ab, d.h. das

Gegentil des Behauptung muss falsch sein, die ursprüngliche Behauptung ist also wahr)

Angenommen  $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$   $\Rightarrow$  es gibt  $z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$  mit  $\sqrt{2} = \frac{z}{n}$  in wollständig gekürzter Form, d.h.  $z$  und  $n$  haben keine gemeinsamen Faktoren mehr:

$$\sqrt{2} = \frac{z}{n} \Rightarrow 2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow z^2 = 2 \cdot n^2 \Rightarrow 2 \text{ ist Teiler von } z^2 = z \cdot z \\ \Rightarrow 2 \text{ ist Teiler von } z, \text{ d.h.}$$

es gibt  $k \in \mathbb{Z}$  mit  $z = k \cdot 2$

$$\text{dann gilt } 2 = \frac{z^2}{n^2} \Rightarrow 2 \cdot n^2 = z^2 = (k \cdot 2)^2 = 4k^2$$

$$\Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow 2 \text{ ist Teiler von } n^2 = n \cdot n$$

2 ist ein Teiler von n

Widerepond dazu, dass  $z$  und  $n$  keine gemeinsamen Faktoren haben!

## 6 Vorlesung 6 (19.10.2020)

**6.1 Beispiele Abbildung, Funktion**

**6.2 Zahlensysteme**

**6.3 Peano-Axiome (natürliche Zahlen definieren)**

**6.4 Rechenregeln in den natürlichen Zahlen**

**6.5 Definition: Endliche Summe**

**6.6 5. Peano-Axiom / Induktionsaxiom / vollständige Induktion**

Abbildung / Funktion

Gegaben sind Mengen  $D, W$  ( $D \neq \emptyset, W \neq \emptyset$ ).

Die 2-stellige Relation  $f \subseteq D \times W$  heißt Abbildung, falls gilt:

$\forall x \in D \exists ! y \in W : (x, y) \in f$ , man schreibt dann  $y = f(x)$ .

Wenn gilt  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $W \subseteq \mathbb{R}$ , nennt man  $f$  eine (reellwertige) Funktion einer (reellen) Veränderlichen (Variablen).

$D$  heißt Definitionsbereich / Definitionsmenge

$W$  heißt Wertebereich / Wertemenge

$$\underline{\text{Graph}}(f) = \{(x, y) \in D \times W \mid (x, y) \in f\} = \{(x, y) \in D \times W \mid y = f(x)\}$$

ist der Graph von  $f$  (bei Funktionen heißt der Graph auch Funktionskurve)

$$\underline{\text{Bild}}(f) = \{y \in W \mid \exists x \in D : (x, y) \in f\} = \{(x, y) \in D \times W \mid \exists x \in D : y = f(x)\}$$

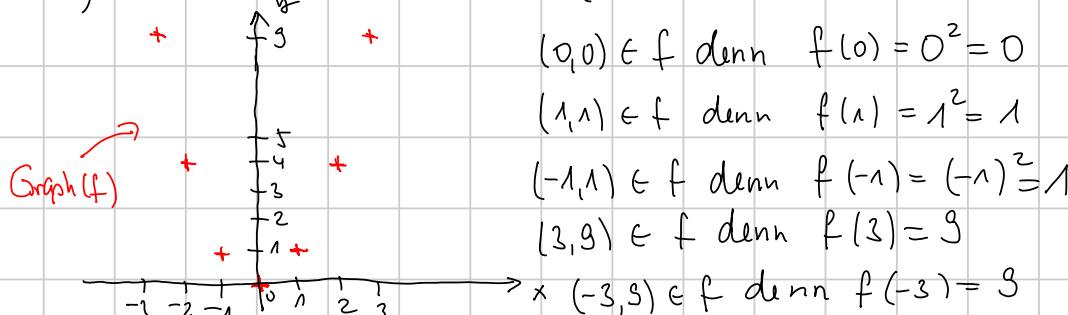
heißt Bild von  $f$ .

$$\begin{aligned} \text{Das Urbild von } y \text{ unter } f \text{ ist } U_f(y) &= \{x \in D \mid (x, y) \in f\} \\ &= \{x \in D \mid y = f(x)\} \end{aligned}$$

Beispiele:

$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  es ist  $D = \mathbb{Z}$  und  $W = \mathbb{Z}$

$$1) \quad f \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ mit } f = \{(x, x^2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \in \mathbb{Z}\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid y = x^2\}$$



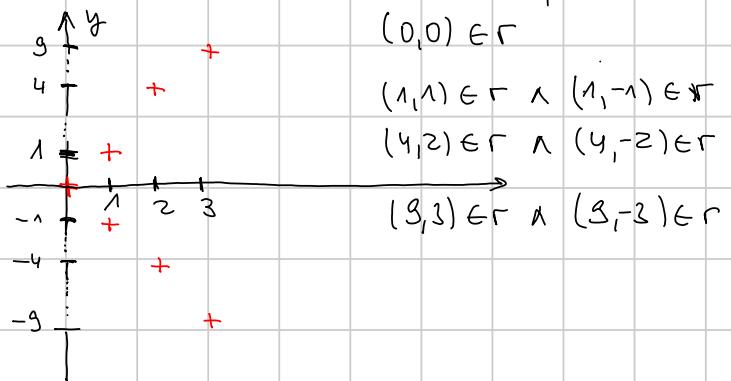
$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{Z} \mid y \geq 0\}$$

$$U_f(16) = \{-4, 4\} \text{ denn } f(-4) = (-4)^2 = 16 \text{ und } f(4) = 4^2 = 16$$

$$U_f(2) = \emptyset \text{ denn es gilt } (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ d.h. } f(\sqrt{2}) = 2 \text{ aber } \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$$

$$U_f(-5) = \emptyset \text{ denn für kein } x \in \mathbb{Z} \text{ gilt } x^2 = -5, U_f(0) = \{0\} \text{ denn nur } 0^2 = 0$$

2) Die 2-stellige Relation  $r \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ist gegeben durch

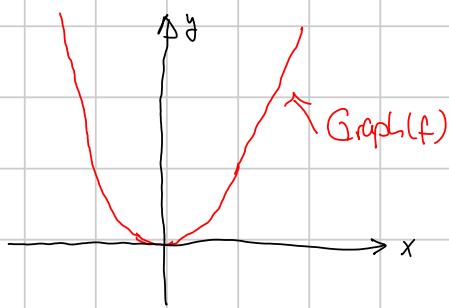
$$r = \{(x^2, x) \mid x \in \mathbb{Z}\}$$


$r$  ist 2-stellige Relation  
aber Keine Abbildung/Funktion  
denn z.B. zu 1 gibt es  
 $y_1 = -1$  und  $y_2 = 1$  mit  $(1, -1) \in r$   
und  $(1, 1) \in r$

3)  $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  mit  $(x, y) \in f \Leftrightarrow y = x^2$

das definiert die Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y = f(x) = x^2$

D  $\uparrow$  L W



$$\text{Bild}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 0\}$$

$$U_f(0) = \{0\}, U_f(2) = \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$$

$$U_f(-4) = \emptyset \text{ denn } x^2 = -4 \text{ hat keine Lösung}$$

$$x \in \mathbb{R}$$

Zahlensystem: Das System der reellen Zahlen

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Start mit  $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0$ : natürliche Zahlen und natürliche Zahlen mit 0

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}; \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

Axiomatische Einführung von  $\mathbb{N}_0$  (Peano-Axiome)

$\models$  für Peano  $0 \in \mathbb{N}$

↑ gültige (als richtig gesetzte)  
mathematische Aussagen

1. 0 ist eine natürliche Zahl (alternativ: 1 ist eine natürliche Zahl)

4 von

2. Jede natürliche Zahl  $n$  hat einen Nachfolger, der  $n'$  genannt wird, 0 ist nicht Nachfolger einer natürlichen Zahl, der Nachfolger der 0 heißt 1, also  $0' = 1$ ,

5

$0$  ist neutrales Element der Addition

Peano-

3.  $n + 0 = n$  und  $n + m' = (n + m)'$  und damit:  $n' = (n + 0)' = n + 0' = n + 1$  und  $n + m$  ist der  $m$ -fache Nachfolger von  $n$ , also:  $n + m = ((\dots(n+1)+1)+1)+\dots+1$ ,

Axiomen

4.  $n \cdot 0 = 0$  und  $n \cdot m' = n \cdot m + n$ .

Das Axiomensystem von Peano liefert die natürlichen Zahlen mit 0,

also meine Menge  $\mathbb{N}_0$ , und die Addition und die Multiplikation in der Menge  $\mathbb{N}_0$ . Addition und Multiplikation sind Rechenoperationen, d.h. besondere Abbildungen (Funktionen), nämlich

$$+ : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x, y) \mapsto x + y$$

$$\cdot : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } (x, y) \mapsto x \cdot y$$

Es gelten folgende Rechenregeln in  $\mathbb{N}_0$

| Name                        | Addition (+)                                  | Multiplikation (·)                            |
|-----------------------------|---|---|
| Kommutativgesetz            | $a + b = b + a$                               | $a \cdot b = b \cdot a$                       |
| Assoziativgesetz            | $a + (b + c) = (a + b) + c$                   | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$   |
| Existenz neutraler Elemente | $a + 0 = a$                                   | $a \cdot 1 = a$                               |
| Distributivgesetze          | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ |

neutrales Element der Addition:  $\emptyset$  Null

neutrales Element der Multiplikation: 1 Eins

Distributivgesetz regelt den „Zusammenspiel“ von Addition und Multiplikation.

Bemerkung:

- 1) Die Peano-Axiome führen die Addition (inklusive 0 als neutralem Element) in  $\mathbb{N}_0$  ein!  
 $0 \notin \mathbb{N}$  heißt: In  $\mathbb{N}$  gibt es kein neutrales Element der Addition!
- 2) Multiplikation ist eine wiederholte Addition des selben Elements z.B.

$$3 \cdot 5 = \underbrace{5 + 5 + 5}_{\text{3-fache Addition des Elements } 5 \in \mathbb{N}_0}$$

$$n \cdot m = \underbrace{m + m + \dots + m}_{n-\text{mal}}$$

- 3) Potenzen: Für  $\underbrace{a \in \mathbb{N}}_{a \neq 0}$  und  $n \in \mathbb{N}_0$  ist definiert:

$$a^0 = 1 \leftarrow 0\text{-te Potenz von } a \neq 0 \text{ ist immer 1}$$

$$a^1 = a \leftarrow 1\text{-te Potenz von } a \neq 0 \text{ ist immer } a$$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$\vdots$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n-\text{mal Faktor } a}$$

} 2-te, n-te Potenz ist das 2-fache/n-fache Produkt von  $a$  mit sich selbst

Definition:

Gegaben sind  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\sigma \in \mathbb{N}_0$  mit  $\sigma \leq n$  und Zahlen  $a_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \leq \sigma$ ,

$i \in \mathbb{N}_0$ . Dann ist die zugehörige endliche Summe mit unterer Grenze  $u$  und oberer Grenze  $\theta$  definiert durch

$$\sum_{i=u}^{\theta} a_i = a_u + a_{u+1} + a_{u+2} + \dots + a_{\theta}$$

$\sum$  heißt Summenzeichen,  $i$  heißt Laufindex,  $a_i$  sind die Summanden der Summe; für  $u=0$  gilt  $\sum_{i=0}^{\theta} a_i = a_{\theta}$

Beispiele:

1)  $u=3, \theta=9, a_i = 2i+1$  für  $3 \leq i \leq 9, i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=u}^{\theta} a_i = \sum_{i=3}^9 (2i+1) = 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$$

$\downarrow$

$$= a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_9$$

2)  $u=0, \theta=10, a_i = i$  für  $0 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{i=0}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

3)  $\sum_{i=s}^{\theta} (\underbrace{i^2 - i + 2}_{= a_i}) = a_s = 22$

S.Peano-Axiom: Induktionsaxiom  $\Leftrightarrow$  Axiom der vollständigen Induktion

Gegaben ist eine Aussageform  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$  (bzw.  $n \in \mathbb{N}$ ).

Dann gilt:  $A(n)$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  (bzw.  $n \in \mathbb{N}$ )

falls die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind

① Induktionsanfang

$A(0)$  ist wahr (bzw.  $A(1)$  ist wahr)

d.h. die Aussageform  $A(n)$  liefert eine wahre Aussage für die erste behandelte nat. Zahl 0 bzw. 1

② Induktionsabschluß: Für  $n=k$

$A(k)$  wahr

$\Rightarrow$   $A(k+1)$  wahr

Induktionsannahme

Induktionsbehauptung

das ist die „Beweisarbeit“: Zeigt, dass  $A(k+1)$  wahr ist, wenn  $A(k)$  wahr ist

d.h. wenn die Aussageform  $A(n)$  für  $n=k$  eine wahre Aussage liefert, dann liefert  $A(n)$  auch für die nachfolgende Zahl  $n=k+1$  eine wahre Aussage.

Beispiele:

1) Summenformel vom „Kleinen Gauß“:

$$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2},$$

$$A(n): \text{Für } n \in \mathbb{N} \text{ ist } \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Induktionsanfang: Man muss nachrechnen, dass  $A(1)$  wahr ist ( $n=1$ )

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 \quad (\text{nach Def. einer endlichen Summe mit oberer Grenze} = \text{niedrige Grenze})$$

$$\frac{n \cdot (n+1)}{2} = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

$$\underline{\text{insgesamt}} \quad \sum_{i=1}^1 i = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} \quad \text{d.h. } A(1) \text{ ist wahr}$$

Induktionsschritt:

Induktionsvoraussetzung: Für  $n=k$  ist  $A(k)$  wahr, also

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k \cdot (k+1)}{2} \quad \leftarrow \text{das darf im weiteren Beweis als } \underline{\text{wahr}} \text{ benutzt werden}$$

Induktionsbehauptung: Für  $n=k+1$  ist  $A(k+1)$  ebenfalls wahr, also

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i &= \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2} \quad \checkmark \quad \leftarrow \text{es muss gezeigt/bewiesen/nachgerechnet werden, dass dieses } = \text{ und wahr ist} \\ &\uparrow n=k+1 \\ \rightarrow \left( \sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Beweis: } \sum_{i=1}^{k+1} i = \left( \sum_{i=1}^k i \right) + (k+1)$$

$$\begin{aligned} \text{Induktionsvoraus-} \\ \text{setzung} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad = \frac{k \cdot (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2)}{2} = \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1)}{2}$$

✓ das rot genau das,  
was getzt werden sollte

## Bemerkung:

$$a) \sum_{i=1}^{50} i = \frac{50 \cdot 51}{2} = \frac{50 \cdot (50+1)}{2} = \frac{50^2 + 50}{2} = \frac{2500 + 50}{2} = 1275$$

$$b) \sum_{i=1}^{100} i = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5050$$

## Gauß:

$$\begin{aligned}
 & 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 99 + 100 = S \\
 & + + + + + + + + + + + + + + + \\
 & 100 + 99 + 98 + 97 + \dots + 2 + 1 = S \\
 \hline
 & \underbrace{101 + 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101}_{= 100 \cdot 101} = 2S
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2S = 100 \cdot 101 \Rightarrow S = \frac{100 \cdot 101}{2}$$

## 7 Vorlesung 7 (20.10.2020)

**7.1 Beispiele Vollständige Induktion**

**7.2 Definition durch Rekursion + Beispiele**

**7.3 Binomialkoeffizient**

Vollständige Induktion

Eine Aussageform  $A(n)$  mit  $n \in \mathbb{N}$  bzw.  $n \in \mathbb{N}_0$  ist wahr für alle  $n \in \mathbb{N}$  bzw.  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

falls gilt: ① Induktionsanfang  $A(1)$  bzw.  $A(0)$  ist wahr, d.h. die Aussage gilt für  $n=1$  bzw.  $n=0$

② Induktionsabschluß  $A(k)$  ist wahr  $\Rightarrow A(k+1)$  ist wahr, d.h.

man zeigt: Wenn die Aussage für  $n=k$  wahr ist, dann ist sie auch für  $n=k+1$  wahr

Beispiele: Gestern (18.10.)  $\sum_{i=1}^n i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

$$\textcircled{1} \quad \sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) Induktionsanfang  $n=1$

$$\sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} &= \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6} = 1 \\ \sum_{i=1}^1 i^2 &= \frac{1 \cdot (1+1) \cdot (2 \cdot 1+1)}{6} \end{aligned} \right\} \checkmark$$

b) Induktionsabschluß

Induktionsvor.  $A(k)$  ist wahr, d.h.  $\sum_{i=1}^k i^2 = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6}$

das darf beim Beweis als wahr benutzt werden

Induktionsabschluß:  $A(k+1)$  ist wahr, d.h.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} i^2 &= \frac{(k+1) \cdot ((k+1)+1) \cdot (2(k+1)+1)}{6} \\ &= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6} \end{aligned}$$

das muss im Beweis gezeigt (nachgerechnet) werden!

$$\text{Beweis: } \sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \left( \sum_{i=1}^k i^2 \right) + (k+1)^2$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (2k+1) + 6(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[k \cdot (2k+1) + 6(k+1)]}{6}$$

$$= \frac{(k+1)[2k^2 + 7k + 6]}{6}$$

$$= \frac{(k+1) \cdot (k+2) \cdot (2k+3)}{6} \quad \checkmark$$

$$(k+2) \cdot (2k+3) = \\ 2k^2 + 3k + 4k + 6 = \\ 2k^2 + 7k + 6$$

$$(2) \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 1; \quad \text{dann gilt: } \sum_{i=0}^n q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

a) Induktionsanfang:  $n=0$ ;  $A(0)$  ist wahr muss gezeigt werden

$$\sum_{i=0}^0 q^i = q^0 = 1 \quad \left. \begin{array}{l} \sum_{i=0}^0 q^i = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} \quad \checkmark \\ \frac{1-q^{0+1}}{1-q} = \frac{1-q}{1-q} = 1 \end{array} \right\} A(0) \text{ ist wahr!}$$

b) Induktionsgesch.

$$\text{Induktionsvor.: } A(k) \text{ ist wahr, d.h. } \sum_{i=0}^k q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$$

das darf beim Beweis als wahr benutzt werden

Induktionssch.:  $A(k+1)$  ist wahr, d.h.

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{(k+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q} \quad \checkmark$$

das muss im Beweis gezeigt (nahegeordnet) werden

Beweis:

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \left( \sum_{i=0}^k q^i \right) + q^{k+1}$$

Induktionsvor.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} \\
 &= \frac{1-q^{k+1} + (1-q)q^{k+1}}{1-q} \\
 &= \frac{1-q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

"Anwendungen": a)  $\sum_{i=1}^n q^i = \left( \sum_{i=0}^n q^i \right) - q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$

$$= \frac{1-q^{n+1} - (1-q) \cdot 1}{1-q}$$

$$= \frac{1-q^{n+1} - 1 + q}{1-q} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

b)  $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64} - 1$

$$\begin{aligned}
 c) \sum_{i=5}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i &= \underbrace{\sum_{i=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^i}_{\frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}}} - \sum_{i=0}^4 \left(\frac{1}{2}\right)^i \\
 &= \frac{1-(\frac{1}{2})^{11}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-(\frac{1}{2})^5}{1-\frac{1}{2}} \\
 &= 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{10}}\right) - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^5}\right)
 \end{aligned}$$

$$= 2 - \frac{1}{2^{10}} - 2 + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{1024}$$

③ A endliche Menge mit  $|A|=n$  Elementen  $\Rightarrow P(A)$  hat  $2^n$  Elemente  
 also  $|P(A)| = 2^n$  ( $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$  Menge aller Teilmengen von A)  
 ↑ Potenzmenge

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: A hat  $n=1$  Element, also  $A = \{a\}$

$\Rightarrow P(A) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, A\}$  mit  $|P(A)| = 2 = 2^1$ ,

die Aussage ist für  $n=1$  wahr!

## Induktionsabschluß:

Induktionsvoraussetzung: Für  $n=k$  ist die Aussage wahr, d.h.

$$|A|=k \text{ Elemente} \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^k \text{ Elemente}$$

das darf beim Beweis als wahr  
verwendet werden

Induktionsbehauptung: Für  $n=k+1$  ist die Aussage ebenfalls wahr, d.h.

$$|A|=k+1 \text{ Elemente} \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^{k+1} \text{ Elemente} \quad \checkmark$$

das muss im Beweis nachgezeichnet/beweisen werden

### Beweis:

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\} \quad A \text{ hat } k+1 \text{ Elemente}$$

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\} = \left\{ \tilde{B} \mid \tilde{B} \subseteq A \wedge (a_{k+1} \notin \tilde{B}) \right\} \cup \left\{ \tilde{B} \cup \{a_{k+1}\} \mid \tilde{B} \in M_1 \right\}$$

alle Teilmengen von  
A, die das Element  
 $a_{k+1}$  nicht enthalten

$\longrightarrow M_1$

$M_2$   
Teilmengen von A,  
die  $a_{k+1}$  enthalten

$$|\mathcal{P}(A)| = |M_1| + |M_2| = 2 \cdot |M_1| \quad \text{denn } M_2 \text{ enthält alle } \tilde{B} \text{ aus } M_1,$$

vereinigt mit  $\{a_{k+1}\}$  und keine  
weiteren Teilmengen von A

In  $M_1$  sind alle Teilmengen von  $A \setminus \{a_{k+1}\}$ , es gilt  $|A \setminus \{a_{k+1}\}| = k$

$$\Rightarrow |M_1| = |\mathcal{P}(A \setminus \{a_{k+1}\})| = 2^k$$

$$\text{insgesamt: } |\mathcal{P}(A)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1} \quad \checkmark$$

↓ "Rückgriff" auf vorherige Gegebenheit

## Definition durch Rekursion

Die Zahlen  $a_n \in \mathbb{R}$  sind für alle  $n \in \mathbb{N}$  bzw. für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  definiert,  
wenn man angibt, dass

- Definition durch Rekursion
- 1. Anker/Anfang:  $a_1$  bzw.  $a_0$  ist gegeben
  - 2. Bildungsgesetz:  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$   
mit Funktionsvorschrift  $f$  für  $n \geq 1$  bzw.  $n \geq 0$

## Beispiele für Definition durch Rekursion

↓ lies: n Fakultät

① Fakultät von n für  $n \in \mathbb{N}_0$  (geschrieben als  $n!$ )

$$\text{Anker: } 0! = 1 \quad \text{Bildungsgesetz: } \underbrace{(n+1)!}_{a_{n+1}} = \underbrace{(n+1) \cdot n!}_{f(a_n)} = (n+1) \cdot a_n$$

Konkret:

$$0! = 1$$

$$1! = 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1$$

$$3! = 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1$$

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

insgesamt

$n!$  ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots n$$

② Die Folge  $x_0, x_1, x_2, \dots = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von Zahlen ist definiert durch

$$\text{Anker: } x_0 = 1,5 = \frac{3}{2}$$

$$\text{Bildungsgesetz: } \underbrace{x_{n+1}}_{a_{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{2} \left( x_n + \frac{2}{x_n} \right)}_{f(a_n)}$$

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{2}{x_0} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+8}{6} = \frac{17}{12}$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( x_1 + \frac{2}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}} \right)$$

Es gilt: Je größer  $n$  wird um so besser nähert sich  $x_n$  an  $\sqrt{2}$  an!

|                   | A  | B          | C          | D |
|-------------------|----|------------|------------|---|
| $n=0 \rightarrow$ | 1  | 1,5        | 1,41666667 |   |
| $n=1 \rightarrow$ | 2  | 1,41666667 | 1,41421569 |   |
| $n=2 \rightarrow$ | 3  | 1,41421569 | 1,41421356 |   |
|                   | 4  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 5  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 6  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 7  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 8  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 9  | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 10 | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 11 | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 12 | 1,41421356 | 1,41421356 |   |
|                   | 13 | 1,41421356 | 1,41421356 |   |

Berechnung mit EXCEL

Hinweis: Mit  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$  für  $a > 0$  bekommt man Näherungen für  $\sqrt{a}$

③ Binomialkoeffizienten für  $k, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq n$

↳ Berechnung  $\binom{n}{k}$  ↪ lies:  $n$  über  $k$   
 Binomialkoeffizient  $n$  über  $k$

Es ist definiert: Anker  $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$

Bildungsgesetz  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$  für  $k, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1, \binom{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \binom{1-1}{1-1} = 1 \cdot \binom{0}{0} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = \frac{2}{1} \cdot \binom{2-1}{1-1} = 2 \cdot \binom{1}{0} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\binom{2}{2} = \frac{2}{2} \cdot \binom{2-1}{2-1} = 1 \cdot \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 = 1$$

Bildungsgesetz

} diese Rekurrenz liefert alle Binomialkoeffizienten

direkte Definition der Binomialkoeffizienten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1 \forall n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \text{ für } n, k \in \mathbb{N}; k \leq n \end{array} \right.$$

↳ Es folgt sofort:  $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = n$$

## 8 Vorlesung 8 (21.10.2020)

- 8.1 Binomialkoeffizienten und Fakultät
- 8.2 Eigenschaften Binomialkoeffizient
- 8.3 Pascalsches Dreieck
- 8.4 1. Binomische Formel (+ 1. allgemeine Binomische Formel)
- 8.5 2. Binomische Formel (+ 2. allgemeine Binomische Formel)
- 8.6 Wiederholung: Ordnungsrelation, Vollständige Induktion

Binomialkoeffizienten und Fakultät

Fakultät für Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$ :  $0! = 1$ ,  $\underbrace{n! = n \cdot (n-1)! \text{ für } n \geq 1}$

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis  $n$

Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  :  $\binom{0}{0} = 1$ ,  $\binom{n}{0} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$  für  $n \geq 1, k \leq n$

↑  
n über k  
 $k \leq n$

Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \cdot (6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2} \cdot \cancel{3 \cdot 4} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{6} \cdot 4!}{\cancel{2!} \cdot \cancel{4!}} = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

$$\binom{11}{3} = \frac{11!}{3! \cdot (11-3)!} = \frac{11!}{3! \cdot 8!} = \frac{\cancel{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \cancel{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8!}}{\cancel{3!}} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{1 \cdot 2 \cdot \cancel{8!}} = 165$$

(3) allgemein:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}$$

Weitere Eigenschaften der Binomialkoeffizienten

① Symmetrie: Es gilt  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

② Additivität:  $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$  ✓

Beweis (durch Nachrechnen)

$$\textcircled{1} \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot (\cancel{n-n+k})!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$$

$$\textcircled{2} \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-(k-1))!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Brüche zur Addition gleichnamig machen,  
d.h. auf den gleichen Nenner bringen (Hauptnenner)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\
 &= \frac{k \cdot n!}{k \cdot (k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)!} \\
 &= \frac{k \cdot n! + n! \cdot (n-k+1)}{k! \cdot (n-k+1)!} \\
 &= \frac{n! \cdot [k + (n-k+1)]}{k! \cdot (n+1 - k)!} \\
 &= \frac{n! \cdot (n+1)!}{k! \cdot ((n+1) - k)!} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot ((n+1) - k)!} = \binom{n+1}{k} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Was leisten Binomialkoeffizienten?

Rechenregeln in  $\mathbb{N}_0$

| Name                        | Addition (+)                                  | Multiplikation (·)                            |
|-----------------------------|---|---|
| Kommutativgesetz            | $a + b = b + a$                               | $a \cdot b = b \cdot a$                       |
| Assoziativgesetz            | $a + (b + c) = (a + b) + c$                   | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$   |
| Existenz neutraler Elemente | $a + 0 = a$                                   | $a \cdot 1 = a$                               |
| Distributivgesetze          | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ |

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1 \} = \{ \dots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

Rechenregeln in  $\mathbb{Z}$

| Name  | Addition (+)                                  | Multiplikation (·)                            |
|---|---|---|
| Kommutativgesetz                            | $a + b = b + a$                               | $a \cdot b = b \cdot a$                       |
| Assoziativgesetz                            | $a + (b + c) = (a + b) + c$                   | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$   |
| Existenz neutraler Elemente                 | $a + 0 = a$                                   | $a \cdot 1 = a$                               |
| Distributivgesetze                          | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$ |
| <u>neu</u> → Existenz additiv inv. Elemente | $a + (-a) = 0$                                | ← neu   |

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}, z \text{ heißt Zähler, } n \text{ heißt Nenner}$$

$n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0$  ist als Nenner verboten: Durch 0 kann man nicht teilen!

Rechenregeln in  $\mathbb{Q}$

| Name                                    | Addition (+)                                  | Multiplikation (·)   |
|---|---|--|
| Kommutativgesetz                        | $a + b = b + a$                               | $a \cdot b = b \cdot a$                                    |
| Assoziativgesetz                        | $a + (b + c) = (a + b) + c$                   | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$                |
| Existenz neutraler Elemente             | $a + 0 = a$                                   | $a \cdot 1 = a$  |
| Distributivgesetze                      | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$              |
| <u>neu</u> → Existenz inverser Elemente | $a + (-a) = 0$                                | $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1, a \neq 0$ ← neu |

Wir berechnen für  $a, b \in \mathbb{Q}$

$$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$$

Distributivgesetz  $\rightarrow (a+b) \cdot a + (a+b) \cdot b$

$$\underline{\quad} \Rightarrow a^2 + b \cdot a + a \cdot b + b^2$$

Kommutativgesetz  $\rightarrow a^2 + \underline{a \cdot b + a \cdot b} + b^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2$

Distributivgesetz  $a \cdot b \cdot \frac{(1+1)}{2}$

Die oben angegebenen Rechenregeln liefern die

1. Binomische Formel  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Damit erhält man auch die „Binomische Formel“ für  $(a+b)^3$ , nämlich

$$(a+b)^3 = (a+b) \cdot (a+b)^2$$

$$= (a+b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$$

Anwendung  
der Rechenregeln  $\rightarrow a^3 + \underline{2a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{b \cdot a^2} + \underline{2ab^2} + b^3$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

Binomialkoeffizienten  
sind Faktoren in  
den Binomischen  
Formeln!

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 1 \cdot a^2 + 2 \cdot a \cdot b + 1 \cdot b^2$$



$$= \binom{2}{0} \cdot a^2 + \binom{2}{1} \cdot a \cdot b + \binom{2}{2} b^2$$

$$= \binom{2}{0} \cdot a^{2-0} \cdot b^0 + \binom{2}{1} a^{2-1} \cdot b^1 + \binom{2}{2} a^{2-2} \cdot b^2$$

$$= a^2$$

$$= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} \cdot b^k$$

Behauptung:  $(a+b)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^{3-k} \cdot b^k$

Wir rechnen aus

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{3}{1} = 3$$

$$\binom{3}{2} \stackrel{\text{Symmetrie}}{=} \binom{3}{3-2} = \binom{3}{1} = 3$$

$$\Rightarrow \binom{3}{0} a^3 \cdot b^0 + \binom{3}{1} a^2 \cdot b^1 + \binom{3}{2} a \cdot b^2 + \binom{3}{3} a^0 \cdot b^3$$

$$= 1 \cdot a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1 \cdot b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \checkmark$$

Allgemein gilt:

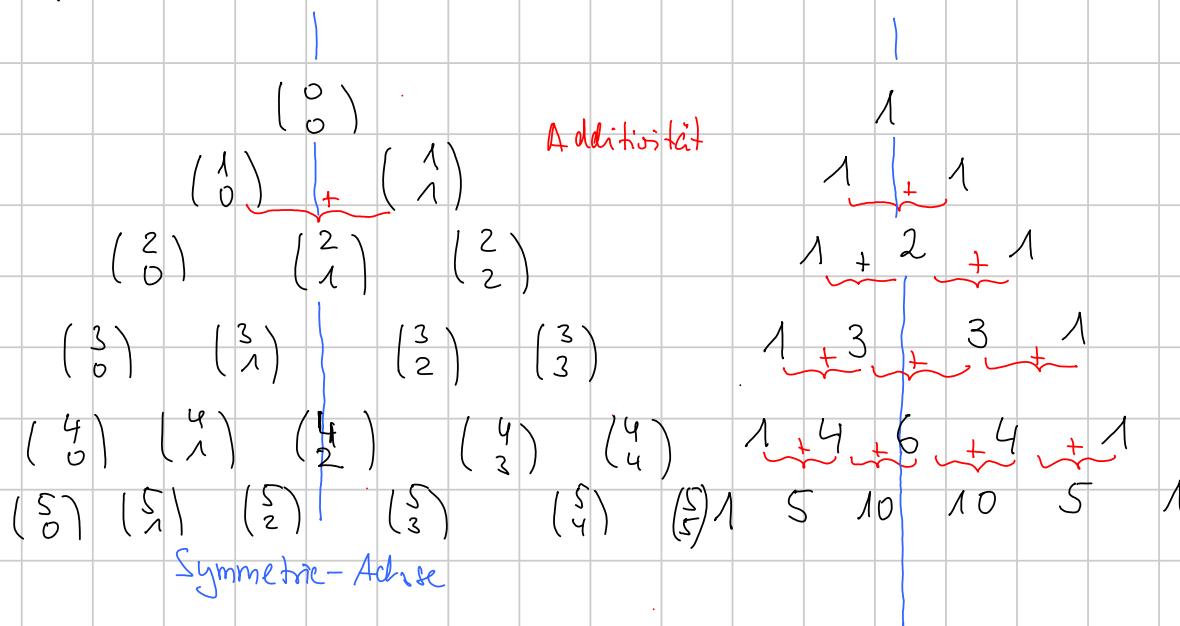
Satz (allgemeine binomische Formel):  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \quad \text{für } n \geq 2$$

Potenzen von  $a$  „runterzählen“ ↑ Potenzen von  $b$  „raufzählen“ ↑

Ausnutzen der Symmetrie und Additivität der Binomialkoeffizienten

↳ liefert das **Pascalsche Dreieck**



$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

2. binomische Formel aus der Schule:  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Wie bekommt man allgemein  $(a-b)^n$  für  $n \geq 2$ ?

Wir wissen

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$\Rightarrow (a-b)^n = (a+(-b))^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot \underbrace{(-b)^k}_{=(-1)^k \cdot b^k}$$

$$= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

„Vorzeichen“ ist abwechselnd + und -

alternierendes Vorzeichen

alternierende Summe

## Satz (allgemeine 2. binomische Formel)

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k, \quad n \geq 2$$

Vorschau auf die nächste Vorlesung: Was ist mit der sog. 3. binomischen Formel  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ ?

"Wiederholung": Ordnungsrelation, Beispiel zur vollständigen Induktion

① A Menge,  $A \neq \emptyset$ ; die zweistellige Relation  $R \subseteq A \times A$  heißt  
Ordnungsrelation, falls gilt:

a) R ist reflexiv, also  $(a,a) \in R \quad \forall a \in A$

b) R ist transitiv, also  $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$

c) R ist antisymmetrisch, also  $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$

② Die Relation  $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist gegeben durch

$$(a,b) \in R \Leftrightarrow \underbrace{\exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a}$$

d.h. a ist ein (echter) Teiler von b

oder b ist ein Vielfaches von a

Man schreibt statt  $(a,b) \in R$  auch  $a | b$

↑ liest: teilt

$R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ist eine Ordnungsrelation

a) reflexiv:  $a = 1 \cdot a \quad \forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow a | a$  also  $(a,a) \in R$

b) transitiv:  $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow a | b \wedge b | c$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: \underbrace{b = k \cdot a}_{\text{und}} \quad \exists l \in \mathbb{N}: c = l \cdot b$$

$$\Rightarrow c = l \cdot b = l \cdot (k \cdot a) = \underbrace{(l \cdot k)}_{\in \mathbb{N}} \cdot a$$

$$\Rightarrow c = m \cdot a \text{ für } m = l \cdot k \in \mathbb{N} \Rightarrow a | c \Rightarrow (a,c) \in R$$

c) antisymmetrisch:  $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}: b = k \cdot a \quad \exists l \in \mathbb{N}: a = l \cdot b$$

$$\Rightarrow b = k \cdot a = k \cdot (l \cdot b) = (k \cdot l) \cdot b$$

$$\Rightarrow b = (k \cdot l) \cdot b \text{ mit } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k \cdot l = 1 \text{ mit } k, l \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow k=1 \wedge l=1 \Rightarrow b = 1 \cdot a = a \wedge a = 1 \cdot b = b \Rightarrow a = b$$

③ Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass gilt:

$$7 \mid 2^{3n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Induktionsanfang:  $n=1$

$$2^{3 \cdot 1} - 1 = 2^3 - 1 = 8 - 1 = 7 = 1 \cdot 7 \Rightarrow 7 \mid 7 = 2^3 - 1$$

für  $n=1$  ist die Behauptung wahr!

Induktionsschluß:

Induktionsvor: Die Behauptung ist wahr für  $n=k$ , also

$$7 \mid 2^{3k} - 1 \Rightarrow \exists l \in \mathbb{N}: 2^{3k} - 1 = 7 \cdot l$$

das darf beim Beweis als wahre Aussage benutzt werden!

Induktionsbehauptung: Die Behauptung ist wahr für  $n=k+1$ , also

$$7 \mid 2^{3(k+1)} - 1 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}: 2^{3(k+1)} - 1 = 7 \cdot m \quad \checkmark$$

das muss gezeigt werden!

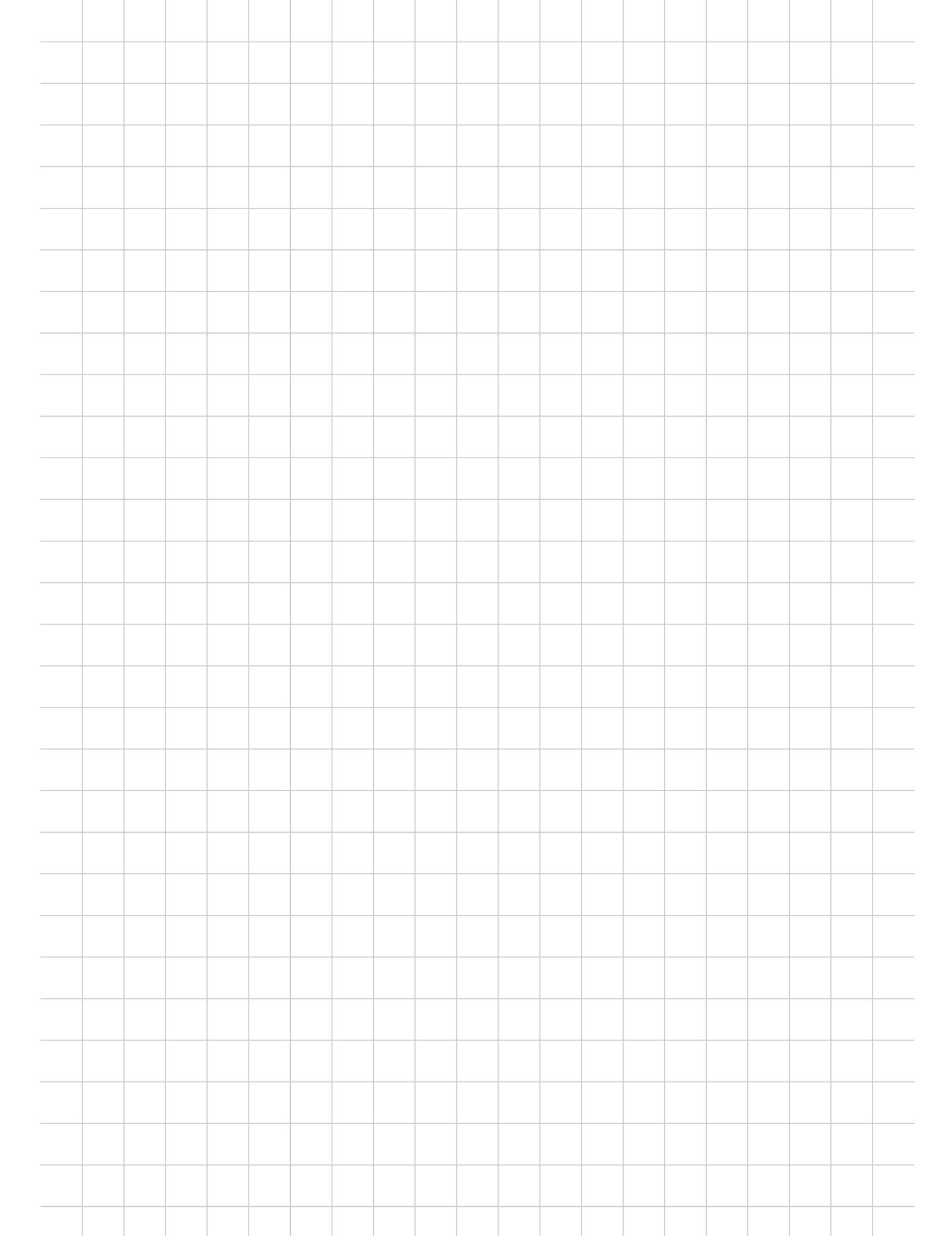
Beweis:

$$\begin{aligned} 2^{3(k+1)} - 1 &= 2^{3k+3} - 1 \\ &= \underbrace{2^{3k} \cdot 2^3 - 1}_{(2^{3k} - 1 + 1) \cdot 2^3 - 1} \\ &= (2^{3k} - 1) \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^3 - 1 \\ &= \underbrace{(2^{3k} - 1)}_{(2^{3k} - 1) \cdot 2^k + 7} \cdot 2^k + 7 \end{aligned}$$

Induktionsvor:

$$2^{3k} - 1 = 7 \cdot l \quad \checkmark \quad = 7 \cdot l \cdot 2^k + 7 = 7 \cdot \underbrace{(2^k \cdot l + 1)}_{m} = 7 \cdot m$$

$$\Rightarrow 2^{3(k+1)} - 1 = 7 \cdot m \text{ für ein } m \in \mathbb{N} \Rightarrow 7 \mid 2^{3(k+1)} - 1 \quad \checkmark$$



## 9 Vorlesung 9 (26.10.2020)

**9.1 Rechenregeln für Potenzen**

**9.2 3. Binomische Formel (+ 3. allgemeine Binomische Formel)**

**9.3 Elementares Multiplikationsprinzip**

**9.4 Elementare Kombinatorik (Anordnung, Auswahl)**

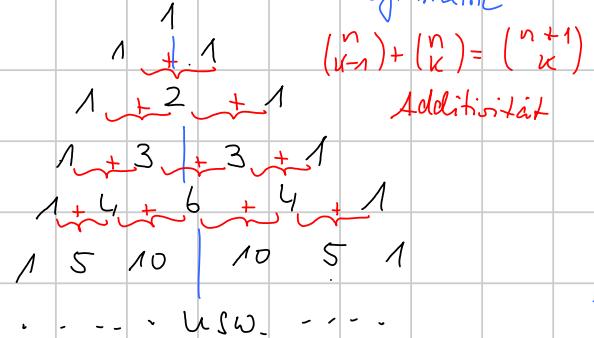
## Verallgemeinerte binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \rightarrow (a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$$

$\left| \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} n \\ n-k \end{array} \right) \\ \text{Symmetrie} \end{array} \right.$

Binomialkoeffizienten → Pascal'sches Dreieck

"3. binomische Formel"

$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 \rightarrow a \neq b: \frac{a^2 - b^2}{a-b} = a+b$$

Gibt es eine Formel für  $\frac{a^n - b^n}{a-b} = ?$ Für  $a \neq b$  gilt:

$$\begin{aligned} \frac{a^n - b^n}{a-b} &= \frac{a^n \cdot \left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{a \cdot \left(1 - \frac{b}{a}\right)} \quad | \text{ Klammer ausmultiplizieren} \\ &= a^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}} \quad | \text{ 7. Vorlesung} \end{aligned}$$

$$\frac{b}{a} = q \quad \overrightarrow{q \neq 1}$$

$$a+b \Rightarrow q \neq 1$$

$$= a^{n-1} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-1} q^i \right)$$

$$= a^{n-1} \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^i \right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^i \cdot b^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Rechenregeln für Potenzen:  $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ 

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$$

$$\frac{1}{a} = a^{-1} \quad \text{für } a \neq 0, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$$

$$\frac{a^n}{a^k} = a^n \cdot a^{-k} = a^{n-k}$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$$

$$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

 $(0^0)$  ist nicht definiert

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot a^i \cdot b^i$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^i$$

Insgesamt bekommt man die „verallgemeinerte 3. binomische Formel“

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^i ; \quad a \neq b$$

$$a^n - b^n = (a - b) \cdot \left( \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^i \right) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

Beispiel:

$$\frac{x^6 - 64}{x - 2} = \frac{x^6 - 2^6}{x - 2} \stackrel{\text{Formel mit } a=x, b=2, n=6}{=} \sum_{i=0}^5 x^{5-i} \cdot 2^i$$

$$= x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$$

Weitere „Anwendungen“ von Fakultät und Binomialkoeffizienten:

### Elementare Kombinatorik

→ Lehre von der Anzahl der Möglichkeiten

endliche Mengen anzordnen oder Auswählen  
von Elementen zu treffen

### Elementares Multiplikationsprinzip

1) Gegeben sind die Menge  $A_1$  mit  $n_1 = |A_1|$  Elementen und

die Menge  $A_2$  mit  $n_2 = |A_2|$  Elementen  $\Rightarrow$

$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\}$  hat  $n_1 \cdot n_2$  Elemente, also

$$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$$

2) Gegeben sind die Mengen  $A_i$  mit  $n_i = |A_i|$  Elementen,  $1 \leq i \leq N \Rightarrow$

$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N = \{(a_1, a_2, \dots, a_N) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq N\}$  hat  $n_1 \cdot n_2 \cdots n_N$

Elemente, also

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdots |A_N|$$

Beispiel:  $H = \{h_1, h_2, h_3\}$  Menge mit drei verschiedenen Hosen

$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$  Menge mit vier verschiedenen T-Shirts

$S = \{s_1, s_2\}$  Menge mit zwei verschiedenen Paaren Schuhe

$$\Rightarrow H \times T \times S = \{(h, t, s) \mid h \in H \wedge t \in T, s \in S\}$$

Menge der möglichen „Kombinationen“ von Hose, T-Shirt, Schuh

$$\Rightarrow |H \times T \times S| = |H| \cdot |T| \cdot |S| = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

① Anordnung: a)  $k$  von  $n$  Elementen ( $k \leq n$ ) werden mit Beachtung der Reihenfolge angeordnet; (Anordnung  $\rightarrow$  ohne Wiederholung!)

Anzahl möglicher Anordnungen ist  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl möglicher Besetzung  $\rightarrow$   $n \quad n-1 \quad n-2 \quad \dots \quad n-k+1$

Plätze  $\rightarrow P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad \dots \quad P_k$   $\leftarrow$  numerische Reihenfolge

$\underbrace{\quad}_{(n-k+1)} \quad \underbrace{\quad}_{(n-k+1)} \quad \underbrace{\quad}_{(n-k+1)} \quad \dots$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$$

b) Wenn man  $n$  von  $n$  Elementen mit Reihenfolge ordnet, nennt man dies Permutation von  $n$  Elementen; die Anzahl der Permutationen ist  $n!$  (Formel von oben mit  $k=n$  liefert)

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

c) Anordnung von  $n$  aus  $n$  Elementen, wobei es Gruppen gleicher

Elemente gibt:  $n_1$  Elemente vom Typ 1 ( $T_1$ )

$n_2$  Elemente vom Typ 2 ( $T_2$ )

$\vdots$  Elemente vom Typ  $k$  ( $T_k$ )

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} n_1 + n_2 + \dots + n_k \leq n$

Es gibt

$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$  mögliche Anordnungen

Die Elemente in den Mengen  $T_i$  sind ununterscheidbar

Bsp. KAMPMANN  $\rightarrow$

|       |                         |   |
|-------|-------------------------|---|
| $n=8$ | $T_1 = \{K\}, n_1=1$    | } |
|       | $T_2 = \{A, A\}, n_2=2$ |   |
|       | $T_3 = \{M, M\}, n_3=2$ |   |
|       | $T_4 = \{P\}, n_4=1$    |   |
|       | $T_5 = \{N, N\}, n_5=2$ |   |

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = P$$

Diese 8 Buchstaben des Namens KAMPMANN, kann man auf

$$\frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{8 \cdot 7!}{8} = 7! = 5040$$

alle Buchstaben unterscheidbar  
 bei unterschiedlichen A's  
 bei unterschiedlichen N's  
 bei unterschiedlichen M's

KAMPMANN  
 KAMP M ANN  
 KAM PM ANN  
 KAMPM ANN

2 Möglichkeiten  
 2 Möglichkeiten  
 1 Möglichkeit

② Auswahl von K aus n Elementen (Reihenfolge gesellt keine Rolle)

mit Reihenfolge  $\rightarrow \frac{n!}{(n-k)!}$  Mögliche Anordnungen von K Elementen aus n  
 diese K Elemente können auf K! Arten  
 umsortiert werden; Reihenfolge gesellt keine  
 Rolle, d.h. alle diese K! Umortierungen  
 ergeben nur 1 Möglichkeit

$$\frac{n!}{(n-k)! k!} = \binom{n}{k} \leftarrow \text{ohne Reihenfolge}$$

Aus n Elementen kann man ohne Beachtung der Reihenfolge auf  $\binom{n}{k}$  verschiedene Arten K Elemente auswählen ( $k \leq n$ ).

D.h. und:

Eine Menge M mit n Elementen hat  $\binom{n}{k}$  Teilmengen mit k Elementen, denn die Teilmenge mit k Elementen geschieht durch Auswahl von k aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge!

$$\left. \begin{array}{l} M \text{ mit } |M|=n \Rightarrow |\mathcal{P}(M)| = 2^n, \text{ d.h. } M \text{ hat } 2^n \text{ Teilmengen} \\ M \text{ hat Teilmengen mit 0 Elementen} \rightarrow \emptyset \text{ genau } 1 = \binom{n}{0} \end{array} \right\} T$$

$M$  hat Teilmengen mit 1 Element  $\rightarrow \binom{n}{1} = n$ ;  $\{m_1\}, \{m_2\}, \dots, \{m_n\}$   
 $M$  hat Teilmengen mit  $k$  Elementen  $\rightarrow \binom{n}{k}$

→ zusammen  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$

Anzahl aller  
Teilmenge  $\uparrow$   $\uparrow$  Anzahl der  $k$ -Elementigen Teilmengen  
 $k=0, 1, 2, \dots, n$

Bemerkung:  $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$  — Herleitung über Kombinatorik

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$(a+b)^n$  mit  $a=1$   
 $b=1$

Rechenregeln für endliche Summen  $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ ,  $u \leq k \leq o$ ,  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=u}^o (s \cdot a_k + t \cdot b_k) = s \cdot \left( \sum_{k=u}^o a_k \right) + t \cdot \left( \sum_{k=u}^o b_k \right)$$

← Linearitätsregel

Beispiel: Aus der 6. Voraussetzung  $\sum_{i=0}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Aus der 7. Voraussetzung  $\sum_{i=0}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Mit Hilfe der Linearität bekommt man

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = n^2 \checkmark$$

Beweis ohne vollständige Induktion:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (2i-1) &= 2 \cdot \left( \sum_{i=1}^n i \right) - \left( \sum_{i=1}^n 1 \right) \\
 &= 2 \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=0}^n i \right)}_{\text{--}} - n \\
 &\stackrel{\text{6. Voraussetzung}}{=} 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2 \checkmark
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^n (2i^2 - i - 1) = -1 + 0 + 5 + 14 + \dots + (2n^2 - n - 1)$$

*i=0*   
 *i=1*   
 *i=2*   
 *i=3*   
 *i=n*

Mit Linearität folgt:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^n (2i^2 - i - 1) &= 2 \cdot \underbrace{\left( \sum_{i=0}^n i^2 \right)}_1 - \underbrace{\left( \sum_{i=0}^n i \right)}_1 - \sum_{i=0}^n 1 \\
 \text{6. 17. Volesung} \quad \overline{=} \quad &= 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1) \\
 &= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) - 6(n+1)}{6} \\
 &= \frac{(n+1) \cdot [2n(2n+1) - 3n - 6]}{6} \\
 &= \frac{(n+1) \cdot [4n^2 - n - 6]}{6}
 \end{aligned}$$

## 10 Vorlesung 10 (27.10.2020)

**10.1 Zusammenfassung Elementare Kombinatorik**

**10.2 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen**

**10.3 Rechenregeln in den reellen Zahlen**

**10.4 Bemerkung: Was ist ein Körper, Anordnungsaxiom**

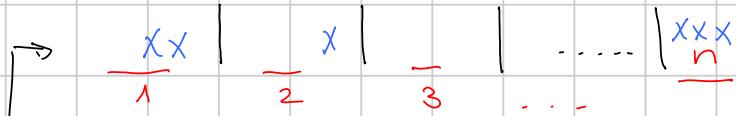
Zusammenfassung der Formeln der elementaren Kombinatorik ( $K \leq n$ )Anordnungen von  $K$  aus  $n$  Elementen  $\leftarrow$  mit ReihenfolgeAuswahl von  $K$  aus  $n$  Elementen  $\leftarrow$  ohne Reihenfolge

|             | ohne Wiederh.       | mit Wiederh.       |   |
|-------------|---------------------|--------------------|---|
| Anordnungen | $\frac{n!}{(n-k)!}$ | $n^k$              | in der Tabelle steht jeweils die Anzahl der Möglichkeiten |
| Auswahl     | $\binom{n}{k}$      | $\binom{n+k-1}{k}$ |   |

6 Elemente auf 4 Plätze anordnen mit Wiederholung:

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$$

↓ ↓ ↓ ↓

Auswahl von  $6$  aus  $n$  mit Wiederholungen $n-1$  Striche kennzeichnen  
 $n$  Elemente  $\hat{=}$   $n$  Plätzebei Auswahl von Element  $i$   
wird am Platz des Elements  $i$   
ein Kreuz eingezeichnetBei der Auswahl von  $K$  aus  $n$  Elementen mit Wiederholungenentsteht ein Muster mit  $n-1$  Strichen und  $K$  Kreuzen, d.h.es gibt  $n-1+K = n+K-1$  Symbole in dem Muster, von denen  $K$  Kreuze sind, d.h. aus den  $n-1+K$  Symbolen müssen  $K$  für Kreuze ausgewählt werden, das ist Auswahl von  $K$  aus  $n-1+K$  ohne Wiederholungen, also hat man  $\binom{n-1+K}{K} = \binom{n+K-1}{K}$  Möglichkeiten

## \*) Spezialfälle bei Anordnungen

a) Permutationen  $\hat{=}$  Anordnung von  $n$  aus  $n$  Elementen ( $K=n$ );es gibt  $n!$  Möglichkeiten

b) Anordnung von  $n$  aus  $n$  Elementen, wobei die  $n$  Elemente in  $k$  Gruppen identischer Elemente (jeweils Anzahl  $n_i$  pro Gruppe,  $1 \leq i \leq k$ ) aufgeteilt sind; es gibt  $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$  Möglichkeiten

Zahlen im  $\mathbb{Q}$   $\leftarrow$  Menge der rationalen Zahlen

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}$$

① Darstellung  $\frac{z}{n}$  ist nicht eindeutig;  $z$  und  $n$  können gemeinsame Faktoren enthalten; Eindeutigkeit bekommt man durch vollständiges Kürzen dieser Faktoren

$$z = z_1 \cdot k, \quad n = n_1 \cdot k \Rightarrow \frac{z}{n} = \frac{z_1 \cdot k}{n_1 \cdot k} = \frac{z_1}{n_1}$$

②  $\mathbb{Q}$  ist die Menge aller Brüche  $\frac{z}{n}$ ; Bruchrechnen:  $q_1 = \frac{a}{b}, q_2 = \frac{c}{d}$

$$q_1 \cdot q_2 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$q_1 + q_2 = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{ad + c \cdot b}{d \cdot b}$$

| Bemerkung zur Addition

$$\frac{z_1}{n} + \frac{z_2}{n} = \frac{z_1 + z_2}{n}$$

| Addition gleichnamiger Brüche (Nenner gleich)

"Erweitern" der Brüche

③ Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Zahlendarstellung in einem „Stellenwertsystem“ zur Basis 10, z.B.

$$3246 = 3 \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 6$$

$$= 3 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$$

$$= \sum_{i=0}^3 z_i \cdot 10^i \quad \text{mit } z_0 = 6, z_1 = 4, z_2 = 2, z_3 = 3$$

Allgemein:  $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0)_{10} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i$

$$a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, a_n \neq 0$$

$$23,\overbrace{75}^{\frac{75}{100}} = 2 \cdot 10 + 3 + \underbrace{\frac{7}{10} + \frac{5}{100}}_{\frac{75}{100}} = 2 \cdot 10^0 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2}$$

allgemein:  $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_2 a_1 a_0, b_1 b_2 \dots b_k)_{10} =$

$$\sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^k b_j \cdot 10^{-j}$$

Wie bekommt man aus der Darstellung  $\frac{z}{n} \in \mathbb{Q}$  (also Darstellung als Bruch) die Dezimaldarstellung?  $\rightarrow$  schriftliche Division ganzer Zahlen

$\downarrow$  gesuchte Dezimaldarstellung von  $\frac{3406}{26}$

$$\begin{array}{r} 3406 : 26 = \underline{1} \underline{3} \underline{1} \\ - 26 \\ \hline 806 \\ - 78 \\ \hline 26 \\ - 26 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \leftarrow 3406 = \underline{100} \cdot 26 + \underline{806} \\ \leftarrow 806 = \underline{30} \cdot 26 + 26 \\ \leftarrow 26 = \underline{1} \cdot 26 + 0 \end{array} \right\} \text{Division mit Rest}$$

$$\begin{array}{r} 33 : 6 = 5,5 \\ - 30 \\ \hline 30 \\ - 30 \\ \hline 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \frac{33}{6} = 5,5 \end{array} \right\}$$

unendlich viele Nachkommastellen alle identisch = 3

$$121 : 12 = 10, \overbrace{08333\dots}^{= 10,08\bar{3}} \leftarrow \text{Periodenstiel}$$

$$\begin{array}{r} - 12 \\ \hline 1 \\ - 0 \\ \hline 10 \\ - 0 \\ \hline 100 \\ - 96 \\ \hline 40 \\ - 36 \\ \hline 40 \\ - 36 \\ \hline 40 \\ \vdots \end{array}$$

Lies: 10,083 Periode

Zahlen unter dem Periodenstiel werden

unendlich oft in identischer Anordnung wiederholt

$$\frac{121}{12} = 10,08\bar{3} \leftarrow \text{periodische Dezimalzahl}$$

$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{z}{n} \mid z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N} \right\}}$   $\stackrel{1}{=} \text{Menge aller Dezimalzahlen mit endlichen Nachkommastellen oder periodisch wiederkehrende Nachkommastellen}$

Beispiel:

$$0, \overline{3} = 0,3333\ldots \in \mathbb{Q}$$

$$12,45 \overline{12} = 12,4512121212\ldots \notin \mathbb{Q}$$

} wie bekommt man die Darstellung  $\frac{2}{n}$  ?

$$\begin{aligned} 10x &= 3, \overline{3} = 3,3333\ldots \\ x &= 0, \overline{3} = 0,3333\ldots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\underline{9x = 3} \Rightarrow x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} 100x &= 1245, \overline{1212121212} \\ x &= 12,45 \overline{1212121212} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\underline{99x = 1245,12 - 12,45} \quad \begin{array}{l} \text{Korrekte Variante} \\ \text{Falsche Variante} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 10000x &= 124512, \overline{12121212} \\ 100x &= 1245, \overline{121212} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \hline \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} 9900x &= 124512 - 1245 \\ \Rightarrow x &= \frac{124512 - 1245}{9900} \\ &= \frac{123267}{9900} \end{aligned}$$

Zu jedem  $q \in \mathbb{Q}$  gehört ein Punkt auf dem Zahlenstrahl; wir haben aber schon einen weiteren Punkt auf dem Zahlenstrahl gefunden, der zu  $\sqrt{2}$  gehört und  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Rightarrow$  reellen Zahlen  $\mathbb{R}$  mit  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

$\mathbb{R} \triangleq$  Menge aller Decimalzahlen mit endlich vielen Nachkommastellen  
oder mit unendlich vielen aber periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen  
oder mit unendlich vielen aber nicht periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen

Die "Rechenregeln" in  $\mathbb{R}$  entsprechen den Regeln in  $\mathbb{Q}$ , d.h. es gelten  
die 5 Körperaxiome

| Name                           | Addition (+)                                  | Multiplikation (·)   |
|--------------------------------|---|--|
| 1) Kommutativgesetz            | $a + b = b + a$                               | $a \cdot b = b \cdot a$  |
| 2) Assoziativgesetz            | $a + (b + c) = (a + b) + c$                   | $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  |
| 3) Existenz neutraler Elemente | $a + 0 = a$                                   | $a \cdot 1 = a$  |
| 4) Distributivgesetze          | $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$ | $(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$  |
| 5) Existenz inverser Elemente  | $\forall a \exists (-a) : a + (-a) = 0$       | $\forall a \neq 0 \exists \frac{1}{a} = a^{-1} : a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1$ |

↑ Symmetriebereich bei  
den Regeln zwischen Addition  
und Multiplikation

### Bemerkung:

- 1) Wenn man auf einer Menge  $M$  eine Rechenoperation  $+$  und eine Rechengaktion  $\cdot$  erklären kann, die diesen 5 Axiomen genügen, nennt man  $(M, +, \cdot)$  einen Körper.
- 2)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  sind Körper!

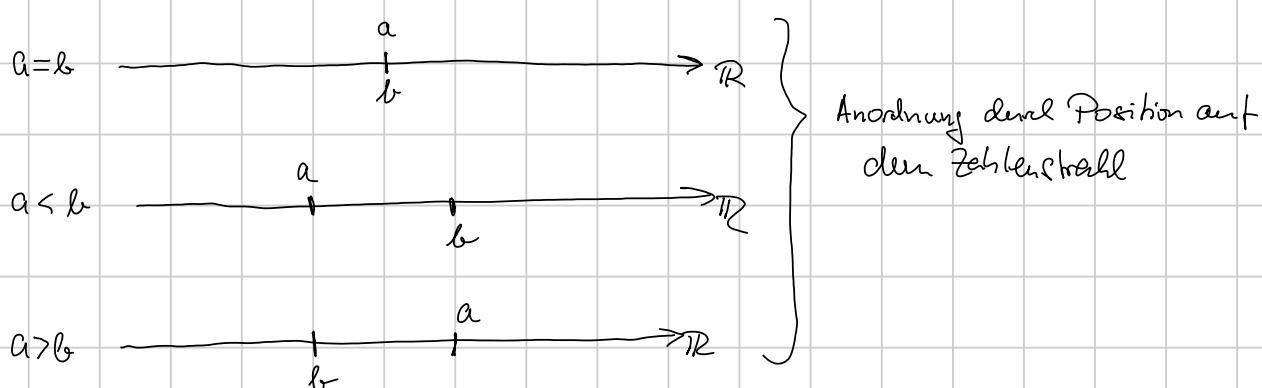
Zu den **5 Körperaxiomen** für  $\mathbb{R}$  (damit auch für  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ) kommt zusätzlich das **Anordnungsaxiom**, nämlich

Anordnungsaxiom: Für zwei reelle Zahlen  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt immer genau eine der folgenden drei Alternativen:

- (1)  $a < b$
- (2)  $a = b$
- (3)  $a > b$

Das Anordnungsaxiom garantiert, dass man zwei reelle Zahlen immer eindeutig in Relation zueinander setzen kann (immer miteinander vergleichen kann mit eindeutigen Ergebnis!)

Auf  $\mathbb{R}$  gibt es zwei Rechenoperationen und die Anordnung.



Wie verhalten sich Anordnung und Rechenoperationen?

$$\text{Es gilt: } a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } c > 0$$

$$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } c > 0$$

## 11 Vorlesung 11 (28.10.2020)

11.1 Rechenregeln der Anordnung

11.2 Intervalle als Mengen

11.3 unendlich-Symbol

11.4 Definition: Term

11.5 Definition: Betrag einer reellen Zahl

11.6 erste Rechenregeln für den Betrag

11.7 Betrag, Ungleichung und Intervalle

## Anordnung auf $\mathbb{R}$ und Rechenregeln der Anordnung

Anordnung  $\rightarrow$  Position auf dem Zahlenstrahl

Anordnungsaxiom: Für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt immer genau eine der folgenden drei

Alternativen: ①  $a < b$ , ②  $a = b$ , ③  $a > b$

Rechenregeln: Zusammenhang von Rechenoperationen und Anordnung

$$1) \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

„Addition bewahrt die Anordnung“

$$2) \quad a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c > 0$$

„Multiplikation mit Zahlen  $> 0$  bewahrt Anordnung“

Bemerkung:

$$a) \quad a > b \Leftrightarrow b < a \text{ also und } a > b \Rightarrow a + c > b + c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a > b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c > 0$$

$$b) \quad a \leq b \Leftrightarrow (a < b) \vee (a = b) \quad \left. \begin{array}{l} \text{die Rechenregeln 1) und 2) gelten} \\ a \geq b \Leftrightarrow (a > b) \vee (a = b) \end{array} \right\} \text{analog für } \leq \text{ und } \geq$$

c)  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  ist die Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$  ist die Menge der nicht negativen reellen Zahlen

$\mathbb{R}^- = \mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$  ist die Menge der negativen reellen Zahlen

d) Intervalle als Teilmengen von  $\mathbb{R}$ :

Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$  ist definiert

$$\textcircled{1} \quad (a, b) = ]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{(a < x) \wedge (x < b)}_{\text{oder}}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \underbrace{a < x < b}_{\text{oder}}\}$$

ist das offene Intervall mit Grenzen  $a$  und  $b$

Es gilt:  $a \notin (a, b)$ ;  $b \notin (a, b)$

②  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$  ist das abgeschlossene Intervall mit Grenzen  $a$  und  $b$ . Es gilt:  $a \in [a, b]$ ;  $b \in [a, b]$

③ Halboffene Intervalle

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

④ Für  $a=b$  gilt  $(a, b) = (a, a) = \emptyset$ ;  $[a, b] = [a, a] = \{a\}$ ;  
für  $b < a$  ist  $(a, b)$  und  $[a, b]$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$  nicht definiert.

c) Abschluss der Anordnung in  $\mathbb{R}$

Zur Vervollständigung der Anordnung definiert man die Symbole  $+\infty$  und  $-\infty$ ; es gilt:

①  $+\infty \notin \mathbb{R}$ ,  $-\infty \notin \mathbb{R} \Rightarrow$  Rechenoperationen für  $+\infty$  und  $-\infty$  sind nicht definiert

②  $\underbrace{\forall x \in \mathbb{R}: (-\infty < x) \wedge (x < +\infty)}$   
in diesem Sinn gilt:  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$

Konsequenzen aus den Rechenregeln für die Anordnung

$$a < b \Rightarrow a+c < b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c > 0$$

1)  $a < 0 \Rightarrow -a > 0$

denn:  $a < 0 \Rightarrow a + (-a) < 0 + (-a) \Rightarrow 0 < -a \Rightarrow -a > 0$

$\uparrow$   
 $c = -a$

analog gilt:  $a > 0 \Rightarrow -a < 0$ ;  $a \leq 0 \Rightarrow -a \geq 0$ ;  $a \geq 0 \Rightarrow -a \leq 0$

2) Für  $a, b$  mit  $a < b$  und  $c < 0$  gilt:  $a < b \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

analog gilt:  $a > b$ ,  $c < 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c \quad | \quad a \leq b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$   
 $a \geq b$ ,  $c < 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c \quad | \quad$

denn:  $c < 0 \Rightarrow (-c) > 0$  also  $a < b \Rightarrow a \cdot (-c) < b \cdot (-c)$

$$\Rightarrow -a \cdot c < -b \cdot c \quad | + a \cdot c$$

$$\Rightarrow 0 < a \cdot c - b \cdot c \quad | + b \cdot c$$

$$\Rightarrow b \cdot c < a \cdot c \quad \text{+}$$

Zusammengefasst:  $a < b, c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

### Definition:

- 1) Ein Term besteht aus syntaktisch korrekt gebildeten Wörtern oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik, d.h. ein Term ist ein sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann.
- 2) Eine Gleichung ist eine Aussage über die Gleichheit (Äquivalenz) zweier Terme,  $T_1 = T_2$ . Das Symbol  $=$  heißt Gleichheitszeichen.
- 3) Eine Ungleichung ist eine Aussage zum Größenvergleich zweier Terme, z.B.  $T_1 < T_2$ , oder  $T_1 \geq T_2$ . Die Symbole  $<, >, \leq, \geq$  heißen Ungleichheitszeichen.

Definition: (Betrag einer reellen Zahl)

für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:

lies: Betrag von  $a$ ,  
oder  $a$  Betrag

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

aus der Def. des Betrags

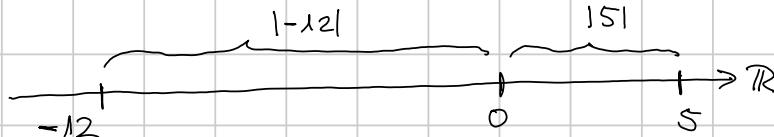
folgt:

Wenn man den „Betrag auflöst“ muss man immer zwei Fälle betrachten, nämlich  
1. Fall: Term im Betrag  $\geq 0$   
2. Fall: Term im Betrag  $< 0$

Beispiele:

$$|5| = 5 \text{ denn } 5 \geq 0$$

$$|-12| = 12 \text{ denn } -12 < 0 \text{ und } |-12| = -(-12) = 12$$



Bemerkung:

- 1)  $|a|$  gibt den Abstand von  $a$  zur  $0$  auf dem Zahlstrahl

an;  $|a|$  ist also ein Abstandsmaß, damit:  $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$ ;

es gilt sogar  $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

- 2) Erste Rechenregeln für den Betrag:

a)  $|a| \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}; |a|=0 \Leftrightarrow a=0$

b)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung:  $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bsp.:  $a=7, b=-5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \leq 12 \\ |a+b| \leq |a| + |b| \end{array} \right\}$   
 $a+b = 2 \Rightarrow |a+b| = 2$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)

### 3) Betrag, Ungleichung und Intervalle

a) Gegeben ist die Ungleichung  $|x| < 5$ , gesucht ist die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  dieser Ungleichung, also  $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$ .

$$|x| < 5 \Rightarrow \underbrace{\text{1. Fall: } x \geq 0}_{\text{im 1. Fall gilt also}} : |x| < 5 \Leftrightarrow x < 5$$

$$0 \leq x < 5 \Leftrightarrow x \in [0, 5) = \mathbb{L}_1$$

$$\underbrace{\text{2. Fall: } x < 0}_{\text{im 2. Fall gilt also}} : |x| < 5 \Leftrightarrow -x < 5 \quad | \cdot (-1)$$

$$x > -5 \Leftrightarrow -5 < x < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 0) = \mathbb{L}_2$$

insgesamt:  $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-5, 5)$



alle  $x \in \mathbb{R}$ , deren Abstand zu 0 auf dem Zahlenstrahl kleiner 5 ist:  $|x| < 5 \Leftrightarrow |x-0| < 5$

b) Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow |x-2| \leq 3$



alle  $x \in \mathbb{R}$  mit Abstand ≤ 3 von 2 ∈ ℝ

Rechnerische Lösung:  $|x-2| \leq 3$

1. Fall:  $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty)$  | 2. Fall:  $x-2 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 3 &\Leftrightarrow x-2 \leq 3 \quad |+2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 5 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, 5] \end{aligned}$$

$$I_L = [2, +\infty) \cap (-\infty, 5] = [2, 5]$$

$$\begin{aligned} |x-2| \leq 3 &\Leftrightarrow -(x-2) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -x+2 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -x \leq 1 \quad | \cdot (-1) \\ &\Leftrightarrow x \geq -1 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, +\infty) \end{aligned}$$
$$I_L = (-\infty, 2) \cap [-1, +\infty) = [-1, 2]$$

insgesamt:  $I_L = I_{L_2} \cup I_{L_1} = [-1, 2) \cup [2, 5] = [-1, 5]$

c)  $|2x+4| < 2$  ← gesucht ist die Lösungsmenge dieser Ungleichung

Variante 1: Fallunterscheidung zum Auflösen des Betrags

1. Fall:  $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-2, +\infty)$

$$\begin{aligned} |2x+4| < 2 &\Leftrightarrow 2x+4 < 2 \quad |-4 \\ &\Leftrightarrow 2x < -2 \quad | \cdot \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{L_1} &= [-2, +\infty) \cap (-\infty, -1) \\ &= [-2, -1) \end{aligned}$$

2. Fall:  $2x+4 < 0 \Leftrightarrow 2x < -4 \Leftrightarrow x < -2 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2)$

$$\begin{aligned} |2x+4| < 2 &\Leftrightarrow -(2x+4) < 2 \\ &\Leftrightarrow -2x-4 < 2 \quad |+4 \\ &\Leftrightarrow -2x < 6 \quad | \cdot (-\frac{1}{2}) \\ &\Leftrightarrow x > -3 \\ &\Leftrightarrow x \in (-3, +\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{L_2} &= (-3, +\infty) \cap (-\infty, -2) \\ &= (-3, -2) \end{aligned}$$

ausgesamt:  $I_L = I_{L_2} \cup I_{L_1} = (-3, -2) \cup [-2, -1) = (-3, -1)$

Variante 2: Anwendung von Rechenregeln und „Geometrie“ (Anschaun)

$$|2x+4| < 2 \Leftrightarrow |2 \cdot (x+2)| < 2 \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

$$\Leftrightarrow |2| \cdot |x+2| < 2$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot |x+2| < 2 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow |x+2| < 1$$

$$\Leftrightarrow |x - (-2)| < 1 \quad \leftarrow \text{alle } x, \text{ deren Abstand von } -2 \text{ kleiner } 1 \text{ ist}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-3, -1)$$

d) Ungleichungen (ohne Betrag)

Gesucht ist die Lösungsmenge von  $\frac{x+1}{x-1} > 5$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$$

$$\frac{x+1}{x-1} > 5 \quad | \cdot (x-1)$$

1. Fall  $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$   
 2. Fall  $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$

1. Fall:  $x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (1, +\infty)$

$$\frac{x+1}{x-1} > 5 \Leftrightarrow x+1 > 5 \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 > 5x-5 \quad | -5x+1$$

$$\Leftrightarrow -4x > -6 \quad | \cdot (-\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow x < \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{3}{2}]$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= (-\infty, \frac{3}{2}] \cap (1, +\infty) \\ &= (1, \frac{3}{2}] \end{aligned} \right\}$$

2. Fall:  $x-1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$$\frac{x+1}{x-1} > 5 \Leftrightarrow x+1 < 5 \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow x+1 < 5x-5 \quad | -5x+1$$

$$\Leftrightarrow -4x < -6 \quad | \cdot (-\frac{1}{4})$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2} \Leftrightarrow x \in [\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= [\frac{3}{2}, +\infty) \cap (-\infty, 1) = \emptyset \end{aligned} \right\}$$

insgesamt:  $L = L_1 \cup L_2 = (1, \frac{3}{2}] \cup \emptyset = (1, \frac{3}{2}]$

## 12 Vorlesung 12 (02.11.2020)

**12.1 Anordnung, Ungleichung und Intervalle**

**12.2 Potenzen und Wurzeln in den reellen Zahlen**

**12.3 Rechenregeln für Wurzeln**

**12.4 Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in den reellen Zahlen**

**12.5 pq-Formel**

WICHTIG: Im Rahmen der Portfolio-Prüfung zu Mathematik 1 werden 3 edX-Tests angeboten! Zwei von drei Test muss man mitmachen um Punkte (maximal 15%) für die Gesamtprüfung zu erzielen.

Der 1. Test wird freigeschaltet vom 18.11.2020 12:00 Uhr bis 18.11.2020 18:00 Uhr im edX-Portal. Nach dem Anmelden (Einloggen) zum Test hat man individuell 60 Minuten Bearbeitungszeit.

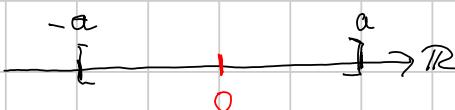
### Anordnung, Ungleichungen, Intervalle in $\mathbb{R}$

① Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  hat die Ungleichung  $|x| \leq a$  die

$$\text{Lösungsmenge } L = \{x \in \mathbb{R} \mid -a \leq x \leq a\} = [-a, a]$$

$[-a, a]$  ist ein symmetrisch um  $0 \in \mathbb{R}$  gelgenes Intervall

$$|x| \leq a \Leftrightarrow \underbrace{|x - 0| \leq a}_{\text{Menge aller } x \in \mathbb{R}, \text{ deren Abstand von } 0 \text{ kleiner oder gleich } a \text{ ist}}$$

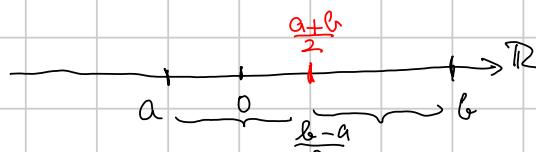


②  $|x - b| \leq a$  hat als Lösungsmenge  $L = [b - a, b + a]$ ,  $b \in \mathbb{R}, a > 0$

Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , deren Abstand von  $b$  kleiner oder gleich  $a$  ist

③ Behauptung: Es gilt  $[a, b] = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid |x - \frac{a+b}{2}| \leq \frac{b-a}{2} \right\}$   
für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $b > a$

"geometrische" Lösung:



$[a, b]$  ist die Menge aller  $x \in \mathbb{R}$ , deren Abstand von  $\frac{a+b}{2}$  kleiner oder gleich  $\frac{b-a}{2}$  ist

"rechnerische" Lösung: Mit Fallunterscheidung;  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2}$$

$x \in [\frac{a+b}{2}, +\infty)$

1. Fall  $x \geq \frac{a+b}{2} \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} \geq 0$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{b-a+a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b$$

$$\Leftrightarrow x \leq b \Leftrightarrow x \in (-\infty, b]$$

$$I_{L_1} = \left[ \frac{a+b}{2}, +\infty \right) \cap (-\infty, b]$$

$$= \left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$$

$$x \in (-\infty, \frac{a+b}{2})$$

2. Fall  $x < \frac{a+b}{2} \Rightarrow x - \frac{a+b}{2} < 0$

$$\left| x - \frac{a+b}{2} \right| \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow$$

$$-(x - \frac{a+b}{2}) \leq \frac{b-a}{2} \Leftrightarrow$$

$$-x + \frac{a+b}{2} \leq \frac{b-a}{2} \quad \left| -\frac{a+b}{2} \right. \Leftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a}{2} - \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a-(a+b)}{2} \Leftrightarrow$$

$$-x \leq \frac{b-a-a-b}{2} = \frac{-2a}{2} = -a \quad | \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow x \geq a \Leftrightarrow x \in [a, +\infty)$$

$$I_{L_2} = [a, +\infty) \cap (-\infty, \frac{a+b}{2}) = [a, \frac{a+b}{2}]$$

insgesamt:  $I = I_{L_1} \cup I_{L_2} = I_{L_2} \cup I_{L_1} = [a, \frac{a+b}{2}) \cup [\frac{a+b}{2}, b] = [a, b]$

### Potenzen und Wurzeln in $\mathbb{R}$

① Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  ist  $\underbrace{a^0 = 1}$  und  $\underbrace{a^n = a \cdot a^{n-1}}_{\text{Rekursive Definition des } n\text{-ten Potenz } a^n \text{ für } a \neq 0} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Rekursive Definition des  $n$ -ten Potenz  $a^n$  für  $a \neq 0$

Es gilt:  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$  Produkt von  $a$  mit  $a$   $n$ -mal

②  $0^n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $0^0$  ist nicht definiert

③  $a^n \cdot a^k = a^{n+k}$ ,  $\frac{a^n}{a^k} = a^{n-k} \Rightarrow \frac{1}{a^k} = a^{-k} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}$

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$ ; Bedeutungen  $\begin{array}{l} n \leftarrow \text{Exponent (der Potenz)} \\ a \leftarrow \text{Basis (der Potenz)} \end{array}$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n, \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

↑ allg. binomische Formel

#### ④ Definition ( $n$ -te Wurzel)

a) Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  gerade (d.h.  $n = 2k$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ), ist definiert:

Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$ , ist  $\sqrt[n]{a}$  die eindeutig bestimmte nicht negative  
↑ Lös:  $n$ -te Wurzel a

Lösung der Gleichung  $x^n = a$ .

↑  $\sqrt[2]{4} = 2$  denn 2 ist die nicht negative Lösung von  $x^2 = 4$

statt  $\sqrt[2]{a}$  schreibt man einfacher  $\sqrt{a}$ .

Bedeutung:  $\sqrt[n]{a}$   
↑ Wurzlexponent  
↑ Radikand

→

b) Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  ungerade (d.h.  $n = 2k+1$  für ein  $k \in \mathbb{N}_0$ ) ist

definiert:

$\forall a \in \mathbb{R}$  ist  $\sqrt[n]{a}$  die eindeutig bestimmte Lösung der Gleichung  
 $x^n = a$ . ↑ Lös:  $n$ -te Wurzel von a

↑  $\sqrt[3]{-8} = -2$  denn  $-2$  ist die eindeutig bestimmte Lösung

von  $x^3 = -8$ :  $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = (-2)^3 = -8$

$\sqrt[3]{64} = 4$  denn  $4^3 = 64$ , d.h. 4 ist die eindeutig bestimmte  
Lösung von  $x^3 = 64$

→

Bemerkung:

① Wenn  $n$  gerade ist und  $a > 0$  hat  $x^n = a$  die beiden Lösungen

$x_1 = \sqrt[n]{a}$  und  $x_2 = -\sqrt[n]{a}$  denn

$x_1^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$  nach Definition [ **MERKE:**  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  ]

$$x_2^n = (-\sqrt[n]{a})^n = ((-1) \cdot \sqrt[n]{a})^n = \underbrace{(-1)^n}_{=+1 \text{ für } n \text{ gerade}} \cdot (\sqrt[n]{a})^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

②  $\sqrt[0]{0} = 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt[1]{a} = a$  für alle  $a \in \mathbb{R}$

③ Darstellung von  $\sqrt[n]{a}$  als Potenz:

Gesucht  $\alpha$  mit  $\sqrt[n]{a} = a^\alpha \leftarrow$  Darstellung von  $\sqrt[n]{a}$  als Potenz

Falls es ein solches  $\alpha$  gibt, erhält man mit den Rechenregeln für Potenzen

$$\textcircled{1} \quad a = a = (\sqrt[n]{a})^n = (a^\alpha)^n = a^{\alpha \cdot n}$$

$\Rightarrow$  es muss gelten:  $\alpha \cdot n = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n}$ .

$$\boxed{\text{Es gilt also: } \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$$

④ Rechenregeln für Wurzeln (Existenz der Wurzeln wird vorausgesetzt)

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Bemerkung: Im Regelfall gilt

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[5]{25} = 5, \quad \sqrt[5]{25} = \sqrt[5]{16+9} = \sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{9}$$

$$\sqrt[k]{\sqrt[n]{a}} = (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{k}} = a^{\frac{1}{n \cdot k}} = \sqrt[n \cdot k]{a}$$

$$\sqrt[n]{a^k} = (a^k)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{k}{n}} = a^{\frac{1}{n} \cdot k} = (a^{\frac{1}{n}})^k = \sqrt[n]{a}^k$$

### Quadratische Gleichungen und Ungleichungen in $\mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{aligned} \textcircled{1} \quad x^2 = a &\rightarrow \text{L} = \emptyset \text{ für } a < 0 \\ &\rightarrow \text{L} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\} \text{ für } a > 0 \\ &\rightarrow \text{L} = \{0\} \text{ für } a = 0 \end{aligned}}$$

$$\text{denn: } x \in \mathbb{R}, \quad x > 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0 \quad \left. \begin{array}{l} x < 0 \Rightarrow x \cdot x > 0 \cdot x \Rightarrow x^2 > 0 \\ \hline 0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \end{array} \right\} x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$$

$$\text{Es gilt: } x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sogar } x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \wedge 0^2 = 0$$

d.h.  $x^2 = 0$  hat nur die Lösung  $x = 0$

② Wir hatten definiert  $|x| = \begin{cases} x & \text{für } x \geq 0 \\ -x & \text{für } x < 0 \end{cases}$

es gilt eine andere Darstellung für  $|x|$ , nämlich  $|x| = \sqrt{x^2}$

$$\Gamma 4 = |-4| = \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}$$

③ Für  $a \geq 0$  gilt:  $x^2 \leq a \iff |x| \leq \sqrt{a}$

$$\iff x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$$

d.h. die Lösungsmenge der Ungleichung  $x^2 \leq a$  für  $a \geq 0$   
ist das Intervall  $[-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

#### ④ Quadratische Gleichungen in $\mathbb{R}$

In ① haben wir gesehen: Für  $a \in \mathbb{R}$  gibt es als Lösungsmenge  
zu  $x^2 = a$  drei Möglichkeiten, nämlich  $\mathcal{L} = \emptyset$  falls  $a < 0$  ist,  
 $\mathcal{L} = \{0\}$  falls  $a = 0$ ,  $\mathcal{L} = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$  falls  $a > 0$  ist.

allgemeine quadratische Gleichung  $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$  mit  $a_2 \in \mathbb{R}, a_2 \neq 0$   
 $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

Wegen  $a_2 \neq 0$  kann man durch  $a_2$  teilen und erhält

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0$$

setzt man  $\frac{a_1}{a_2} = p \in \mathbb{R}$  und  $\frac{a_0}{a_2} = q \in \mathbb{R}$  hat man die

quadratische Gleichung in Normalform  $x^2 + px + q = 0$

Zur Lösung macht man die sog. quadratische Ergänzung

$$(x+b)^2 = x^2 + 2bx + b^2$$

$$x^2 + px = x^2 + 2bx$$

$$\therefore b = \frac{p}{2}$$

$$x^2 + px + q = 0 \iff$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + q = 0 \iff$$

$$\underbrace{(x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} x + (\frac{p}{2})^2)}_{=0} - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \iff$$

$$(x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p}{2})^2 + q = 0 \iff$$

damit erhält man

$$\left( x + \frac{P}{2} \right)^2 = \left( \frac{P}{2} \right)^2 - q \quad \leftarrow \begin{array}{l} \tilde{x}^2 = a \text{ mit } a = \left( \frac{P}{2} \right)^2 - q \\ \tilde{x} = \left( x + \frac{P}{2} \right) \end{array}$$

1. Fall:  $\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q < 0 \Rightarrow L = \emptyset$

2. Fall:  $\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q = 0 \Rightarrow L = \{ \tilde{x} = 0 \} = \{ -\frac{P}{2} \}$

3. Fall:  $\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q > 0 \Rightarrow L = \{ \tilde{x}_1 = -\sqrt{\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q}, \tilde{x}_2 = \sqrt{\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q} \}$

$$= \left\{ x_1 = -\frac{P}{2} - \sqrt{\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q}, \right.$$

$$\left. x_2 = -\frac{P}{2} + \sqrt{\left( \frac{P}{2} \right)^2 - q} \right\}$$

Beispiel:  $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$P = -5, q = 6 \Rightarrow \left( \frac{P}{2} \right)^2 - q = \left( -\frac{5}{2} \right)^2 - 6 = \frac{25}{4} - 6 = \frac{25}{4} - \frac{24}{4} = \frac{1}{4} > 0$$

$\Rightarrow$  es gibt 2 Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{P}{2} - \sqrt{\left( -\frac{P}{2} \right)^2 - q} = +\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} - \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = -\frac{P}{2} + \sqrt{\left( -\frac{P}{2} \right)^2 - q} = +\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}} = +\frac{5}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Es gilt:  $(x - x_1) \cdot (x - x_2) = (x - 2) \cdot (x - 3) = x^2 - 5x + 6$

oder  $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-3) = 0$

## 13 Vorlesung 13 (03.11.2020)

**13.1 Linearfaktoren des quadratischen Polynoms**

**13.2 Mitternachtsformel**

**13.3 Quadratische Ungleichungen**

**13.4 Definition: Logarithmus**

**13.5 Rechenregeln für Logarithmen**

**13.6 Zahldarstellungen (umrechnung)**

quadr. Gleichung in Normalform  $x^2 + px + q = 0$

„formale“ Lösung  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$\Rightarrow$  1. Fall:  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

$\Rightarrow$  2. Fall:  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2}\right\}$

$\Rightarrow$  3. Fall  $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0 \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$

Zur 3. Fall hat man mit  $x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$  und  $x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ :

$$(x-x_1) \cdot (x-x_2) = x^2 - x \cdot x_2 - x \cdot x_1 + x_1 \cdot x_2 \\ = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2$$

es ist  $x_1 + x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -p$

$$x_1 \cdot x_2 = \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)$$

$\xleftarrow{\text{mit } a = -\frac{p}{2}, b = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}} (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$

$$= \left(-\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right) = q$$

dann folgt  $(x-x_1) \cdot (x-x_2) = x^2 - \underbrace{(x_1 + x_2)}_{=-p} x + \underbrace{x_1 \cdot x_2}_{=q} = x^2 + px + q$

$\xrightarrow{\text{Linearfaktoren des quadratischen Polynoms}}$

Quadratische Gleichung in allgemeiner Form:  $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ ,  $a_2 \neq 0, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$

$$0 = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = a_2 \cdot \left(x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2}\right)$$

$\uparrow \quad \underbrace{\quad}_{\neq 0}$

$$x^2 + \frac{a_1}{a_2} x + \frac{a_0}{a_2} = 0 \xrightarrow{\frac{a_1}{a_2} = p, \frac{a_0}{a_2} = q} x^2 + px + q = 0$$

"formale" Lösung  $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

$$\text{mit } \frac{p}{2} = \frac{a_1}{2a_2}, \quad q = \frac{a_0}{a_2} : \quad \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{a_1^2}{4a_2^2} - \frac{a_0}{a_2} = \frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \sqrt{\frac{a_1^2 - 4a_0a_2}{4a_2^2}} = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2|a_2|}$$

$$\text{insgesamt } x_{1,2} = -\frac{a_1}{2a_2} \pm \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2|a_2|} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}$$

$$\rightarrow 1. \text{ Fall: } a_1^2 - 4a_0a_2 < 0 \Rightarrow L = \emptyset$$

$$\rightarrow 2. \text{ Fall: } a_1^2 - 4a_0a_2 = 0 \Rightarrow L = \left\{ -\frac{a_1}{2a_2} \right\}$$

$$\rightarrow 3. \text{ Fall: } a_1^2 - 4a_0a_2 > 0 \Rightarrow L = \left\{ \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2}, \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \right\}$$

$$\left. \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_0a_2}}{2a_2} \right\}$$

Quadratische Ungleichungen: (12. Vorlesung):  $x^2 \leq a$  für  $a \in \mathbb{R}, a > 0$   
 $\Rightarrow |x| \leq \sqrt{a} \Rightarrow$   
 $x \in [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$$x^2 + px + q \leq a$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \leq a$$

$$y^2 \leq b \quad \begin{cases} b < 0 & L = \emptyset \\ b \geq 0 & L = [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \end{cases}$$

$$(x + \frac{p}{2}) = y \in [-\sqrt{b}, \sqrt{b}] \Rightarrow$$

$$x \in [-\frac{p}{2} - \sqrt{b}, -\frac{p}{2} + \sqrt{b}]$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2}_y \leq \underbrace{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}_{b \geq 0} \quad \begin{cases} L \neq \emptyset \text{ für } a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0 \\ L = \emptyset \text{ für } a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \end{cases}$$

insbesondere gilt:  $L = \left\{ -\frac{p}{2} \right\}$  falls  $a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 0$  ist und

$$L = \left[ -\frac{p}{2} - \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, -\frac{p}{2} + \sqrt{a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \right] \text{ falls } a + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q > 0.$$

Bemerkung:  $x^2 \leq a$ ,  $a > 0$  hat Lösungsmenge  $L = [-\sqrt{a}, \sqrt{a}]$

$x^2 < a$ ,  $a > 0$  hat Lösungsmenge  $L = (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$x^2 \geq a$ ,  $a > 0$  hat Lösungsmenge  $L = \mathbb{R} \setminus (-\sqrt{a}, \sqrt{a})$

$$= (-\infty, -\sqrt{a}] \cup [\sqrt{a}, +\infty)$$

$$x^2 > a, \quad a > 0 \text{ hat Lösungsmenge } \mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{a}, \sqrt{a}] \\ = (-\infty, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, +\infty)$$

## Logarithmen

Definition: Für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  und  $b > 0$  ist der Logarithmus von  $a$  zur Basis  $b$  definiert als

$$x = \log_b(a) \Leftrightarrow b^x = a$$

( $\log_b(a)$  ist die Zahl  $x$ , die als Exponent  $b^x = a$  ergibt)

Beispiele: a)  $\log_{10}(1000) = 3$  denn  $10^3 = 1000$

$$\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2 \text{ denn } 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

$$\log_5(125) = 3 \text{ denn } 5^3 = 5 \cdot 5 = 25 \cdot 5 = 125$$

b) Die Lösung der Gleichung  $2^x = 8$  ist  $x = \underbrace{\log_2(8)}_{2^3 = 8} = 3$

MERKE:  $x = \log_b(a)$  ist die Lösung der Gleichung  $b^x = a$

## Bemerkung:

1) Logarithmus zur Basis 10  $\rightarrow$  10er Logarithmus:  $\log_{10}(a) = \lg(a) = \log(a)$

Logarithmus zur Basis 2  $\rightarrow$  2er Logarithmus:  $\log_2(a) = \text{ld}(a)$

↑  
logarithmus dualis

Logarithmus zur Basis e  $\rightarrow$  Logarithmus zur Basis e  $\hat{=}$  natürlicher

$e \in \mathbb{R}$

↔

Logarithmus:  $\log_e(a) = \ln(a)$

↑  
logarithmus naturalis

$e = 2,7182818\dots$

unendlich viele nicht  
periodische Nachkommastellen.

$e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

## 2) Rechenregeln für Logarithmen (folgen aus den Regeln für Potenzen)

Da die Regeln für jede zulässige Basis  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b > 0$  gleich sind, schreiben wir jetzt einfach  $\log$  statt  $\log_b$ .

$$a) \log(a_1 \cdot a_2) = \log(a_1) + \log(a_2) \quad \xrightarrow{\text{Beweis}}$$

$$b) \log\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \log(a_1) - \log(a_2)$$

$$c) \log(a_1^\alpha) = \alpha \cdot \log(a_1)$$

linke Seite

$$x = \log_b(a_1 \cdot a_2) \Leftrightarrow b^x = a_1 \cdot a_2$$

rechte Seite

$$x = \log_b(a_1) + \log_b(a_2) \Rightarrow$$

$$b^x = b^{\log_b(a_1) + \log_b(a_2)}$$

$$= \underbrace{b^{\log_b(a_1)}}_{a_1} \cdot \underbrace{b^{\log_b(a_2)}}_{a_2} = a_1 \cdot a_2$$

## 3) Umrechnung von Logarithmen

gesucht  $x = \log_b(a)$  bekannt ist  $\log_{\tilde{b}}(a)$  Logarithmus zur Basis  $\tilde{b}$

d.h.  $\log_{\tilde{b}}(a)$  und  $\log_{\tilde{b}}(b)$  sind bekannt

$$x = \log_b(a) \Leftrightarrow b^x = a \quad | \log_{\tilde{b}}(\dots)$$

$$\Leftrightarrow \log_{\tilde{b}}(b^x) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\stackrel{c)}{\Leftrightarrow} x \cdot \log_{\tilde{b}}(b) = \log_{\tilde{b}}(a)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}$$

insgesamt: 
$$\log_b(a) = \frac{\log_{\tilde{b}}(a)}{\log_{\tilde{b}}(b)}$$

Beispiel:  $\log_{10}(35) = \frac{\ln(35)}{\ln(10)}, \ln(35) = \frac{\log_{10}(35)}{\log_{10}(e)}$

## Rückblick auf Zahldarstellungen

Dezimalsystem  $\rightarrow$  Basis 10 :  $273,12 = 2 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2}$

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{\text{Basis } 10}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_K}_{\text{Basis } c} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot 10^i + \sum_{j=1}^K b_j \cdot 10^{-j}$$

c-adisches System  $\rightarrow$  Basis  $c > 0$ :

$$\underbrace{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}_{\text{Basis } c}, \underbrace{b_1 b_2 \dots b_K}_{\text{Basis } c} = \sum_{i=0}^n a_i \cdot c^i + \sum_{j=1}^K b_j \cdot c^{-j}$$

$c = 2 \rightarrow$  Dualsystem,  $c = 16 \rightarrow$  Hexadezimalsystem

$$\begin{aligned} 1357 &= 135 \cdot 10 + 7 \uparrow \\ 135 &= 13 \cdot 10 + 5 \uparrow \\ 13 &= 1 \cdot 10 + 3 \uparrow \\ 1 &= 0 \cdot 10 + 1 \uparrow \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teilen mit Rest durch 10} \\ \text{1357} \end{array} \right\}$$

für die Zahlendarstellung c-adischer Systeme gilt: Teilen mit Rest durch  $c$ ;

z.B. Dualsystem  $c = 2$ : Gegeben 135 im Dezimalsystem  $(135)_{10}$ ;  
gesucht 135 im Dualsystem  $(135)_2$

$$\begin{aligned} 135 : 2 &= \overbrace{67 \cdot 2}^{134} + 1 \uparrow \\ 67 : 2 &= 33 \cdot 2 + 1 \uparrow \\ 33 : 2 &= 16 \cdot 2 + 1 \uparrow \\ 16 : 2 &= 8 \cdot 2 + 0 \uparrow \\ 8 : 2 &= 4 \cdot 2 + 0 \uparrow \\ 4 : 2 &= 2 \cdot 2 + 0 \uparrow \\ 2 : 2 &= 1 \cdot 2 + 0 \uparrow \\ 1 : 2 &= 0 \cdot 2 + 1 \uparrow \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Teilen mit Rest durch 2} \\ (10000111)_2 \\ \text{Probe: } (10000111)_2 = \\ 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 = \\ 1 + 2 + 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 128 = 135 \end{array} \right\}$$

$c = 5$  : Gegeben  $(232)_{10}$ , gesucht 232 zur Basis 5

Teilen mit Rest durch 5 liefert

$$\begin{array}{l}
 232 : 5 = 46 \cdot 5 + 2 \\
 46 : 5 = 9 \cdot 5 + 1 \\
 9 : 5 = 1 \cdot 5 + 4 \\
 1 : 5 = 0 \cdot 5 + 1
 \end{array}
 \quad
 \left. \begin{array}{l}
 2 \\
 1 \\
 4 \\
 1
 \end{array} \right\} \quad
 \left. \begin{array}{l}
 (232)_{10} = (1412)_5 \\
 \text{Probe: } (1412)_5 = \\
 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^3 = 2 + 5 + 100 + 125 = 232
 \end{array} \right\}$$

Frage: Was ist  $(0,25)_{10}$  im System zur Basis 2?

$$\hookrightarrow 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2}$$

$$(0,25)_{10} = (0,01)_2$$

Wie geht das generell bei Zahlen mit Nachkommastellen?

## 14 Vorlesung 14 (04.11.2020)

- 14.1 Beispiel: Zahldarstellungen (umrechnung)
- 14.2 Brüche in anderen Zahldarstellungen
- 14.3 Zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag
- 14.4 Rechenregeln für den Betrag
- 14.5 Beweisidee Dreiecksungleichung
- 14.6 Definition: Verknüfungen auf Mengen
- 14.7 Definition: Gruppe, Halbgruppe, abelsche Gruppe
- 14.8 Definition: Ring, Ring mit Eins, Kommutativer Ring mit Eins
- 14.9 Definition: Körper

Zahldarstellung: Basis b ( $b=10$ ,  $b=2$ ,  $b=16$ )

$$\left( a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, c_1 c_2 \dots c_K \right)_b = \sum_{i=0}^n a_i \cdot b^i + \sum_{j=1}^K c_j \cdot b^{-j}$$

Umrechnung ganzer Zahlen aus Dezimalsystem in ein anderes System  
durch "Division mit Rest"

Beispiel: (327)<sub>10</sub> gesucht Darstellung im Dualsystem

$$\begin{array}{rcl}
 327 & = & 163 \cdot 2 + 1 \\
 163 & = & 81 \cdot 2 + 1 \\
 81 & = & 40 \cdot 2 + 1 \\
 40 & = & 20 \cdot 2 + 0 \\
 20 & = & 10 \cdot 2 + 0 \\
 10 & = & 5 \cdot 2 + 0 \\
 5 & = & 2 \cdot 2 + 1 \\
 2 & = & 1 \cdot 2 + 0 \\
 1 & = & 0 \cdot 2 + 1
 \end{array}$$

$$(101000111)_2 = (327)_{10}$$

Prob:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^4 + 2^8 = 1 + 2 + 4 + 64 + 256 \\ = 327 \checkmark$$

Wie kann man Brüche umschreiben?

Beispiel:  $\frac{1}{p}$  Darstellung im Dezimalsystem also  $0, c_1 c_2 \dots c_n$

$$1 : 8 = 0,125$$

10 ·       $\frac{0}{10}$   
10 ·       $\frac{8}{20}$   
10 ·       $\frac{16}{40}$   
10 ·       $\frac{40}{8}$

$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad \frac{1}{8} = (0,125)_{10}$

Zer-System  
 $\frac{1}{p}$  Darstellung im Dualsystem als  $0, c_1 c_2 \dots c_n$

| Es ist:

$$\left| \frac{1}{\mathcal{P}} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = (0,001)_2 \right.$$

$$1 : \varphi = 0,001$$

2.  $\frac{1}{\varphi}$   
 $\frac{1}{2}$   
 $\frac{0}{4}$   
 $\frac{0}{8}$   
 $\frac{0}{8}$   
 $0$

$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad \frac{1}{\varphi} = (0,125)_{10} = (0,001)_2$

## Ein zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag

1) Beispiel für eine quadratische Ungleichung:

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung  $x \cdot (x+1) \leq 0$

$$x \cdot (x+1) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 + x \leq 0$$

Quadratische Erg.  $\rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{=0} \leq 0$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$\sqrt{\dots}$   $\rightarrow \sqrt{(x+\frac{1}{2})^2} \leq \sqrt{\frac{1}{4}}$

$\sqrt{x^2} = |x| \rightarrow |x + \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$

$|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$

$$\Leftrightarrow x + \frac{1}{2} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$   $\rightarrow -1 \leq x \leq 0$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 0] \Rightarrow L = [-1, 0]$$

2) Rechenregeln für  $|x|$  also für den Betrag:

Aus der 1. Vorlesung haben wir

## Erste „Rechenregeln“ für den Betrag

a)  $|a| \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}; \quad |a|=0 \Leftrightarrow a=0$

b)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung:  $|a+b| \leq |a| + |b|$

Bsp.:  $a=7, b=-5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12 \quad \left. \begin{array}{l} 2 \leq 12 \\ |a+b| \leq |a| + |b| \end{array} \right\}$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)

↳ jetzt: 14. Vorlesung

### Beweisidee zur Dreiecksungleichung

1) Es gilt  $|x| = \sqrt{x^2}$  also  $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 \stackrel{?}{=} |a|^2 + |b|^2$$

2) Es gilt:  $|a| = \sqrt{a^2} \Rightarrow |a|^2 = a^2$   
 $|b| = \sqrt{b^2} \Rightarrow |b|^2 = b^2$ .

3) Es gilt auch:  $a \leq |a| \quad \forall a \in \mathbb{R}$ , denn

dann ist  $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$  und

$$2 \cdot a \cdot b \leq 2 \cdot |a| \cdot |b|$$

|   |
|---|
| $\left. \begin{array}{l} \text{1. Fall: } a \geq 0 \Rightarrow  a  = a \\ a \leq a \Leftrightarrow a \leq  a  \end{array} \right\}$   |
| $\left. \begin{array}{l} \text{2. Fall: } a < 0 \Rightarrow  a  = -a \\ a < 0 \Rightarrow -a > 0 \text{ also} \\ a < 0 < -a \Rightarrow a < -a \\ \Rightarrow a <  a  \end{array} \right\}$ |

4) Zusammen:  $(a+b)^2 \leq |a|^2 + 2 \cdot a \cdot b + |b|^2$

$$\leq |a|^2 + 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

↑ 1. bin. Formel

also:  $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$$\Rightarrow |a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a| + |b|)^2} = |a| + |b|$$

Welche allgemeinen Strukturen stecken hinter unseren Zahlensystemen?

→ algebraische Strukturen

Es geht um „Rechnen“ in einer Menge von Objekten!

Definition:

Gegeben ist eine Menge  $M$ ,  $M \neq \emptyset$ , eine Verknüpfung auf  $M$  (Rechenoperation auf  $M$ ) ist eine Abbildung  $\otimes: M \times M \rightarrow M$ , d.h. jeder Typel  $(a, b) \in M$  wird genau ein Element  $a \otimes b \in M$  zugeordnet.

Beispiele:  $M = \mathbb{Z}$ ,  $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow a + b \in \mathbb{Z}$   
 $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} : (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Definition:

Gegeben ist eine Menge  $M$ ,  $M \neq \emptyset$  und eine Verknüpfung (Rechenoperation)  $\otimes: M \times M \rightarrow M$ .

1)  $(M, \otimes)$  ist eine Halbgruppe, wenn gilt

Assoziativgesetz:  $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a, b, c \in M$

2)  $(M, \otimes)$  ist eine Gruppe, wenn gilt

Assoziativgesetz:  $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a, b, c \in M$

Existenz eines neutralen Elements:  $\exists n \in M : a \otimes n = a, \forall a \in M$

Existenz inverser Elemente:  $\forall a \in M \exists a^{-1} \in M : a \otimes a^{-1} = n$ ,

gilt zusätzlich das

Kommutativgesetz:  $a \otimes b = b \otimes a, \forall a, b \in M$

heißt  $(M, \otimes)$  abelsche Gruppe.

Beispiele: 1)  $(\mathbb{N}, +)$  ist eine Halbgruppe, denn

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a + (b + c) = (a + b) + c$$

$(\mathbb{N}, \cdot)$  ist auch eine Halbgruppe, denn

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

2)  $(\mathbb{N}, +)$  ist keine Gruppe, denn es gibt kein neutrales Element der Addition ( $0 \notin \mathbb{N}$ )

3)  $(\mathbb{N}, \cdot)$  besitzt mit  $1 \in \mathbb{N}$  das neutrale Element der Multiplikation;  $(\mathbb{N}, \cdot)$  ist aber keine Gruppe, denn es gibt z.B. zur  $2 \in \mathbb{N}$  kein

inverses Element bezüglich der Multiplikation

$$\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$$

4)  $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine abelsche Gruppe, denn

$$a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{Z}$$

$\text{OE } \mathbb{Z}: a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{Z}, 0 \text{ ist neutrales Element}$

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z} \text{ mit } a + (-a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{Z},$

$-a$  ist das inverse Element zu  $a$

$$a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

5)  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  ist Venne Gruppe, denn (wie bei  $(\mathbb{N}, \cdot)$ ) z.B.

$2 \in \mathbb{Z}$  hat bezüglich der Multiplikation in  $\mathbb{Z}$  kein

inverses Element:  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

#### Definition:

Gegeben sind eine Menge  $M, M \neq \emptyset$  und zwei Verknüpfungen (Rechenoperationen)

$$\oplus : M \times M \rightarrow M \text{ und } \otimes : M \times M \rightarrow M.$$

$(M, \oplus, \otimes)$  ist ein Ring, falls gilt:

1)  $(M, \oplus)$  ist eine abelsche Gruppe  $\leftarrow$  bezüglich  $\oplus$

2)  $(M, \otimes)$  ist eine Halbgruppe  $\leftarrow$  bezüglich  $\otimes$

3) Es gilt das Distributivgesetz:  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \quad \forall a, b, c \in M. \leftarrow$  "Verträglichkeit" der beiden Verknüpfungen

$\downarrow$  bezogen auf  $\otimes$

Hat  $(M, \otimes)$  zusätzlich ein neutrales Element, nennt man  $(M, \oplus, \otimes)$  einen Ring mit Eins. Gilt in einem Ring mit Eins zusätzlich in  $(M, \otimes)$  das Kommutativgesetz, nennt man  $(M, \oplus, \otimes)$  einen kommutativen Ring mit Eins.

Beispiel:

1)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein Ring, denn  $(\mathbb{Z}, +)$  ist eine abelsche Gruppe und  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  ist eine Halbgruppe ( $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$   $\forall a, b, c \in \mathbb{Z}$ ) und wir haben das Distributivgesetz  $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

2)  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins, denn wegen  $a = a \cdot 1 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$ , ist  $1 \in \mathbb{Z}$  das neutrale Element (Eins)

element) der Multiplikation und  $a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}$

3)  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  ist ein Kommutativer Ring mit Eins,

außerdem gilt:  $\forall q \in \mathbb{Q}, q \neq 0 \exists \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$  mit  $q \cdot \frac{1}{q} = 1$

also zu  $q \in \mathbb{Q}, q \neq 0$  gibt es  $\frac{1}{q}$  als inverses Element bezügl  
der Multiplikation:

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ , dann gilt  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$  ist eine abelsche Gruppe

Definition: Eine Menge  $M, M \neq \emptyset$ , mit zwei Verknüpfungen

$\oplus: M \times M \rightarrow M$  und  $\otimes: M \times M \rightarrow M$  heißt Körper, falls gilt

1)  $(M, \oplus, \otimes)$  ist ein Kommutativer Ring mit Eins

2)  $e \in M$  ist das neutrale Element in  $(M, \oplus)$  also

$a \oplus e = e \oplus a = a \quad \forall a \in M$ , denn ist  $M^* = M \setminus \{e\}$

und  $(M^*, \otimes)$  ist eine Kommutative (abelsche) Gruppe.

Beispiele:  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ;  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ;  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Weitere Beispiele:  $M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$  Menge mit 4 Elementen

$\oplus: M \times M \rightarrow M$  ist durch folgende Tabelle definiert

| $\oplus$  | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |

Hauptdiagonale.

$\bar{0}$  ist das neutrale Element bezügl

$\oplus$  in  $M$ :  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \quad \forall \bar{a} \in M$

Verknüpfungstabelle ist spiegel-symmetrisch zur Hauptdiagonale  $\Rightarrow$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in M$ ,

$\oplus$  ist Kommutativ  
(Assoziativgesetz gilt auch)

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{0}$  ist bezgl.  $\oplus$  invers zu  $\bar{0}$

}

$$\begin{aligned} \bar{1} + \bar{3} = \bar{0} &\Rightarrow \bar{3} \text{ ist bezgl. } \oplus \text{ invers zu } \bar{1} \text{ und} \\ &\quad \bar{1} + \bar{3} = \bar{3} + \bar{1} \text{ also ist } \bar{1} \text{ invers zu } \bar{3} \text{ bezgl. } \oplus \\ \bar{2} + \bar{2} = \bar{0} &\Rightarrow \bar{2} \text{ ist bezgl. } \oplus \text{ invers zu } \bar{2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (\mathbb{M}, \oplus) \text{ ist eine} \\ \text{abelsche Gruppe}$$

## 15 Vorlesung 15 (16.11.2020)

**15.1 5 Körperaxiome + Beispiele**

**15.2 Definition: Ganzzahlige Teiler**

**15.3 Definition: Primzahl**

**15.4 Definition: Gemeinsame Teiler / Größter gemeinsamer Teiler**

**15.5 Division mit Rest**

Aus der 14. Vorlesung:

Definition: Eine Menge  $M, M \neq \emptyset$ , mit zwei Verknüpfungen

$\oplus: M \times M \rightarrow M$  und  $\otimes: M \times M \rightarrow M$  heißt Körper, falls gilt

1)  $(M, \oplus, \otimes)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins

2)  $e \in M$  ist das neutrale Element in  $(M, \oplus)$  also

$a \oplus e = e \oplus a = a \forall a \in M$ , denn ist  $M^* = M \setminus \{e\}$

und  $(M^*, \otimes)$  ist eine kommutative (abelsche) Gruppe.

Merke: Ein Körper  $(M, \oplus, \otimes)$  ist gekennzeichnet durch die

5 Körperaxiome, nämlich

| Name                        | $\oplus$  | $\otimes$  |
|-----------------------------|---|--|
| Assoziativgesetz            | $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$           | $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$                        |
| Kommutativgesetz            | $a \oplus b = b \oplus a$                                 | $a \otimes b = b \otimes a$  |
| Distributivgesetz           |   | $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$              |
| Existenz neutraler Elemente | $\exists ! 0 \in M: a \oplus 0 = a \quad \forall a \in M$ | $\exists ! 1 \in M: a \cdot 1 = a \quad \forall a \in M$                   |
| Existenz inverser Elemente  | $\forall a \in M \exists (-a) \in M: a + (-a) = 0$        | $\forall a \in M \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in M: a \cdot a^{-1} = 1$ |

Beispiele:

①  $K = \{0, 1\}$  mit  $\oplus: K \times K \rightarrow K$

Verknüpfungstabelle

| $\oplus$ | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| 0        | 0 | 1 |
| 1        | 1 | 0 |

Kommutativ  $\hat{=}$  Spiegel an der Diagonale lässt die Tabelle gleich!

$\otimes: K \times K \rightarrow K$

| $\otimes$ | 0 | 1 |
|-----------|---|---|
| 0         | 0 | 0 |
| 1         | 0 | 1 |

$K = \{0, 1\}$  mit  $\oplus, \otimes$  laut Verknüpfungstabelle ist der kleinste

mögliche Körper (Hinweis: 4. Übung  $\rightarrow 0 \neq 1$  in einem Körper)

②  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  und  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  sind Körper.

③  $K = \{0, 1, a, b\}$  mit folgenden Verknüpfungen

$$\oplus: K \times K \rightarrow K$$

| $\oplus$ | 0 | 1 | a | b |
|----------|---|---|---|---|
| 0        | 0 | 1 | a | b |
| 1        | 1 | 0 | b | a |
| a        | a | b | 0 | 1 |
| b        | b | a | 1 | 0 |

Spiegelsymmetrisch zur Diagonale,  
also Kommutativ, 0 neutrales Element  
für  $\oplus$ , in jeder Zeile steht genau  
einmal die 0, d.h. zu jedem Element  
gibt es genau ein inverses Element  
bezüglich  $\oplus$

$$\odot: K \times K \rightarrow K$$

| $\odot$ | 0 | 1 | a | b |
|---------|---|---|---|---|
| 0       | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1       | 0 | 1 | a | b |
| a       | a | b | 0 | 1 |
| b       | b | a | 1 | 0 |

$K^* = K \setminus \{0\}$  mit  $\odot$   
in jeder Zeile steht  
genau einmal die 1, d.h.  
zu jedem Element  $\neq 0$

Spiegelsymmetrisch zur Diagonale  
gibt es genau ein inverses  
Element bezüglich  $\odot$ .  
Kommutativ, 1 neutrales  
Element für  $\odot$ .

Exemplarische (an einem Beispiel) der Distributivgesetze

$$a \odot (b \oplus 1) = a \odot a = b$$

$$(a \odot b) \oplus (a \odot 1) = 1 \oplus a = b$$

$$a \odot (b \oplus 1) = b = (a \odot b) \oplus (a \odot 1)$$

den Distributivgesetz ist  
erfüllt!

### Elementare Zahlentheorie

Zahlentheorie beschäftigt sich mit  $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}$   
und Rechenoperationen für diese Mengen

### Definition:

Gegeben sind  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ . Dann gilt:

①  $a$  teilt  $b$  (geschrieben  $a|b$ ), falls gilt:  $\exists k \in \mathbb{Z}: b = k \cdot a$ .

Man sagt dann auch:  $b$  ist ein (ganzzahliges) Vielfaches von  $a$

②  $\tilde{T}(b) = \{a \in \mathbb{Z} \mid a|b\}$  Teilermenge von  $b$  (Menge aller  
(ganzzahligen) Teiler von  $b$ )

### Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad 5 | 15 \text{ dann } 15 = 3 \cdot 5$$

$$5 | -50 \text{ dann } -50 = (-10) \cdot 5$$

$$5 \nmid 7 \text{ dann } 7 \neq k \cdot 5 \forall k \in \mathbb{Z}$$

$\hookrightarrow \times$  steht für „teilt nicht (ganzahlig)“  
 ↗ „Spiegelsymmetrie“

$$\textcircled{2} \quad \tilde{T}(12) = \{-12, -6, \textcolor{blue}{(-4)}, -3, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\} \subseteq [-12, 12]$$

$$\hookrightarrow \text{dann } 12 = (-3) \cdot (-4) = k \cdot (-4) \text{ mit } k = -3$$

Es gilt folgende Symmetrie:  $a \in \tilde{T}(12) \Leftrightarrow (-a) \in \tilde{T}(12)$

$$\textcircled{3} \quad \tilde{T}(7) = \{-7, -1, 1, 7\}$$

Es gilt folgender Satz:  $\forall a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{es ist ausreichend alle} \\ \text{Überlegungen zur (ganzahligen)} \\ \text{Teilbarkeit für } a, b \in \mathbb{N} \\ \text{durchzuführen} \end{array} \right\}$

### Beweise:

$$\hookrightarrow 1) \quad a \in T(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a \quad | \cdot (-1) \uparrow$$

$$\Leftrightarrow \exists -k \in \mathbb{Z} : -b = (-k) \cdot a \quad \downarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in T(-b)$$

$$2) \quad a \in T(b) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : b = k \cdot a \quad | \cdot 1 = (-1) \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow b = (-k) \cdot (-a)$$

$$\Leftrightarrow (-a) \in T(b)$$

Ab jetzt:  $T(b) = \tilde{T}(b) \cap \mathbb{N} \leftarrow$  wir betrachten nur mit negativen Teileren

$$\hookrightarrow T(b) = \{ a \in \mathbb{N} \mid b = k \cdot a \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\hookrightarrow T(7) = \tilde{T}(7) \cap \mathbb{N} = \{1, 7\}$$

Definition:  $p \in \mathbb{N}$  heißt Primzahl, falls gilt  $T(p) = \{1, p\}$ , d.h.

$p$  hat (außer 1 und  $p$ ) keine ganzzahligen Teiler!

Bemerkung: 2 ist die einige gerade Primzahl

Es gilt:  $\forall b \in \mathbb{Z}$  ist  $\tilde{T}(b) \subseteq [-|b|, |b|]$  und  $\overline{\tilde{T}(b)} \cap \mathbb{N} \subseteq [1, |b|]$

Jur Intervall  $[-|b|, |b|]$  liegen nur endlich viele ganze Zahlen, d.h.  
 $\tilde{T}(b)$  ist eine endliche Menge!

$T(a, b) = T(a) \cap T(b)$ ; es gilt  $T(a) \cap T(b) \subseteq T(b)$  und  $T(a) \cap T(b) \subseteq T(a)$

Menge der gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$   $\Rightarrow T(a, b)$  ist als Teilmenge endlicher Mengen ebenfalls eine endliche Menge

$\Rightarrow$  jede endliche Menge (Menge mit endlich vielen Zahlen als Element) kann nach Größe der Zahlen sortiert werden und es gibt ein größtes Element in  $T(a, b)$ .

Definition:

Das größte Element in  $T(a, b) = T(a) \cap T(b)$  heißt  
größter gemeinsamer Teiler von  $a$  und  $b$ , man schreibt dafür  $\text{ggT}(a, b)$ .

Beispiel:  $\tilde{T}(12) = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$$\tilde{T}(8) = \{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$$

$$\hookrightarrow \tilde{T}(12) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} = \underline{\underline{T}(12)}$$

$$\hookrightarrow \tilde{T}(8) \cap \mathbb{N} = \{1, 2, 4, 8\} = \underline{\underline{T}(8)}$$

$$\Rightarrow T(12, 8) = T(12) \cap T(8) = \{1, 2, 4\} \Rightarrow \text{ggT}(8, 12) = 4$$

Gibt es einen Algorithmus zur Berechnung im ggT(a, b) ohne  $T(a)$  und  $T(b)$  einzeln zu ermitteln,  $T(a, b) = T(a) \cap T(b)$  zu bilden, die Zahlen in  $T(a, b)$  der Größe nach anzuordnen und dann das größte

Element anzugeben? Antwort: Ja  $\rightarrow$  euklidischer Algorithmus

Vorbereitung: Division mit Rest

Gegaben sind  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$  dann existieren  $k \in \mathbb{Z}$  und  $m \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{N}_0$  mit  $b = k \cdot a + m$ ;  $0 \leq m < |b|$   
Reste sind immer nicht negativ  
 $\hookrightarrow$  (ganzheitliches) Teilen von  $b$  durch  $a$  mit Rest  $m$

Beispiel:  $a = 8, b = 21 \Rightarrow 21 = 2 \cdot 8 + 5$

$$a = 8, b = -27 \Rightarrow -27 = (-4) \cdot 8 + 5$$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $k = -4 \quad m = 5$

Behauptung:  $\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, m)$  falls gilt  $b = k \cdot a + m, 0 \leq m < |b|$

Beweisidee:  $\text{ggT}(a, b)$  ist das größte Element in  $T(a, b) = T(a) \cap T(b)$

$\text{ggT}(a, m)$  ist das größte Element in  $T(a, m) = T(a) \cap T(m)$

Wir zeigen (mögliche)  $\boxed{T(a, b) = T(a, m)}$

da die Mengen gleich sind,

sind die größten Elemente in beiden Mengen gleich!

## 16 Vorlesung 16 (17.11.2020)

**16.1 Wiederholung Teilmengen, Primzahl, gemeinsame Teiler**

**16.2 Definition: ggT, Division mit Rest, Teilerfremd**

**16.3 Beweis: Division mit Rest**

**16.4 Euklidischer Algorithmus**

**16.5 Lemma von Bézout**

Aus der 15. Vorlesung

$b \in \mathbb{Z}$ , Teilmenge von  $b$ :  $\tilde{T}(b) = \{a \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot a \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}\}$   
 $a \in \tilde{T}(b) \Rightarrow -a \in \tilde{T}(b) \Leftarrow \text{"Symmetrie" der Teilmenge } \tilde{T}(b)$   
 Für alle  $a \in \tilde{T}(b)$  gilt:  $-|b| \leq a \leq |b| \Rightarrow \tilde{T}(b)$  ist eine  
endliche Menge.  
 $\tilde{T}(b) = \tilde{T}(-b)$  denn:  $b = k \cdot a \Rightarrow -b = (-k) \cdot a$

→ es reicht aus bei Fragen zur Teilbarkeit in  $\mathbb{Z}$  die positiven Zahlen zu betrachten also Teilbarkeit in  $\mathbb{N}$  zu diskutieren!

$$T(b) = \{a \in \mathbb{N} \mid b = k \cdot a\} \subseteq \mathbb{N}$$

$\uparrow b \in \mathbb{N}$

$$p \in \mathbb{N} \text{ ist Primzahl} \Leftrightarrow T(p) = \{1, p\}$$

Gegaben  $a, b \in \mathbb{N}$ :  $T(a, b) = T(a) \cap T(b)$

$\uparrow$  Menge der gemeinsamen Teiler von  $a$  und  $b$

$T(a, b)$  ist eine endliche Menge, da  $T(a)$  und  $T(b)$  endliche Mengen sind.

In einer endlichen Menge von Zahlen gibt es immer ein größtes (maximales) Element.

Definition:

Der größte gemeinsame Teiler  $\text{ggT}(a, b)$  ist definiert als

$$\text{ggT}(a, b) = \max \{x \mid x \in T(a, b)\}$$

Zur Berechnung des ggT dient der euklidische Algorithmus basierend auf (ganzzahlige) Division mit Rest.

Gegeben sind  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , dann existieren  $k \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{N}_0$  mit

$b = k \cdot a + r$ ;  $0 \leq r < |a|$ .  $r$  ist der Rest beim (ganzzahligen) Dividieren von  $b$  durch  $a$ !

Euklidischer Algorithmus als Anwendung des Satzes über Division mit Rest:

Für  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $b = k \cdot a + r$  nach Division mit Rest

gilt:  $\underbrace{\text{ggT}(a, b)}_{\text{zum Beweis zeigen wir, dass die Teilermengen}} = \underbrace{\text{ggT}(a, r)}$

zum Beweis zeigen wir, dass die Teilermengen  $T(a, b)$  und  $T(a, r)$  gleich sind, dann sind auch die größten Elemente dieser Mengen gleich!

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in T(a, b) \Rightarrow t | a \wedge t | b \Rightarrow a = n \cdot t, b = \tilde{n} \cdot t \text{ für } n, \tilde{n} \in \mathbb{Z} \\ \text{mit } b = k \cdot a + r \text{ folgt } r = b - k \cdot a = \tilde{n} \cdot t - k \cdot n \cdot t = (\tilde{n} - k \cdot n) \cdot t \in \mathbb{Z} \\ \Rightarrow t | r \wedge t | a \Rightarrow t \in T(a, r) \\ \rightarrow \text{dann: } T(a, b) \subseteq T(a, r) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in T(a, r) \Rightarrow t | a \wedge t | r \Rightarrow a = m \cdot t \wedge r = \tilde{m} \cdot t \text{ für } m, \tilde{m} \in \mathbb{Z} \\ \text{mit } b = k \cdot a + r \text{ folgt } b = k \cdot m \cdot t + \tilde{m} \cdot t = (\underbrace{k \cdot m + \tilde{m}}_{\in \mathbb{Z}}) \cdot t \\ \Rightarrow t | b \wedge t | a \Rightarrow t \in T(a, b) \\ \rightarrow \text{dann: } T(a, r) \subseteq T(a, b) \end{array} \right.$$

Insgesamt:  $T(a, r) = T(a, b)$

Gesucht  $\text{ggT}(a, b)$ , dann: Führe Division mit Rest aus

$a \leq b$   $\xrightarrow{}$

$b = k \cdot a + r$

$\Rightarrow \boxed{\text{ggT}(a, b) = \text{ggT}(a, r)}$

und wiederhole diesen Schritt bis  $r = 0$  ist;  
der letzte von 0 verschiedene Rest in der Schrittfolge ist der gesuchte  $\text{ggT}(a, b)$ !

Beispiel: 1) ggT(426, 54)

$$426 = \overbrace{7 \cdot 54}^{378} + 48$$

$$54 = 1 \cdot 48 + 6$$

$$48 = 8 \cdot 6 + 0$$

$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{ggT}(426, 54) = \text{ggT}(54, 48) \\ \leftarrow \text{ggT}(54, 48) = \text{ggT}(48, 6) \\ \leftarrow \text{Rest } r=0 \text{ Algorithmus endet} \end{array} \right\}$

(letzter von 0 verschiedener Rest: ) 6 = ggT(426, 54)

2) ggT(1312, 251)

$$1312 = \overbrace{5 \cdot 251}^{1255} + 57$$

$$251 = \overbrace{4 \cdot 57}^{228} + 23$$

$$57 = \overbrace{2 \cdot 23}^{46} + 11$$

$$23 = 2 \cdot 11 + 1$$

$$11 = 11 \cdot 1 + 0$$

$\left. \begin{array}{l} \leftarrow \text{ggT}(1312, 251) = \text{ggT}(251, 57) \\ \leftarrow \text{ggT}(251, 57) = \text{ggT}(57, 23) \\ \leftarrow \text{ggT}(57, 23) = \text{ggT}(23, 11) \\ \leftarrow \text{ggT}(23, 11) = \text{ggT}(11, 1) \\ \leftarrow \text{Rest } r=0 \text{ Algorithmus endet} \end{array} \right\}$

(letzter von 0 verschiedener Rest) 1 = ggT(1312, 251)

Definition: Zwei Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  heißen teilerfremd, falls

gilt  $\text{ggT}(a, b) = 1$ , d.h.  $T(a, b) = \{1\}$

Beispiel: 1312 und 251 sind teilerfremd!

Beweis zum Teilen mit Rest

Gegeben sind  $a, b \in \mathbb{Z}$ ,  $a \neq 0$ , dann existieren  $k \in \mathbb{Z}$  und  $r \in \mathbb{N}_0$  mit

$b = k \cdot a + r$ ;  $0 \leq r < |a|$ .  $r$  ist der Rest beim (ganzzahligen) Dividieren von  $b$  durch  $a$ !

1) Wegen  $T(b) = T(-b)$  reicht es aus, den Satz für  $a, b \in \mathbb{N}$  zu beweisen!

2) Es reicht aus  $a < b$  anzunehmen, denn für  $a = b$  hat

$$\text{man } b = 1 \cdot b + 0 = \underbrace{1 \cdot a}_{b=a} + \underbrace{0}_{r=0} = k \cdot a + r \text{ mit } k=1, r=0 < a$$

3) Es reicht aus  $a \geq 2$  zu betrachten, denn

$$\text{für } a=1 \text{ gilt } b = b \cdot 1 + 0 = b \cdot a + 0 = k \cdot a + r \text{ mit } k=b, r=0 < a=1$$

4) Zu beweisen bleibt: Für  $a, b \in \mathbb{N}$  mit  $b \geq a \geq 2$  gilt:

Es existieren  $k, r \in \mathbb{N}$  mit  $b = k \cdot a + r$ ,  $0 \leq r < a$

Beweis durch vollständige Induktion bezogen auf  $b \in \mathbb{N}$

Induktionsanfang  $b=2$ :  $2 = 1 \cdot 2 + 0$   
 $a=2$   $\uparrow$   $\uparrow r=0, 0 \leq r < a$

Induktionsumritt:

Induktionsvoraussetzung Aussage ist wahr für  $b=u$  also

$$u = k \cdot a + r \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, 0 \leq r < a$$

Induktionsbehauptung Aussage ist auch wahr für  $u+1$  also

$$u+1 = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r} \text{ für ein } \tilde{k} \in \mathbb{N}, 0 \leq \tilde{r} < a$$

Beweis:  $u+1 = (k \cdot a + r) + 1, k \in \mathbb{N}, \underbrace{0 \leq r < a}_{r < a, r \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{N} \text{ also } r \leq a-1}$

$\hookrightarrow$  Induktionsvor.

$$= k \cdot a + (r+1)$$

1. Fall:  $r+1 < a \Rightarrow \tilde{k}=k, \tilde{r}=r+1 : u+1 = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r} \text{ mit } \tilde{k} \in \mathbb{Z}, 0 \leq \tilde{r} < a$

2. Fall  $r+1=a \Rightarrow u+1 = k \cdot a + \underbrace{(r+1)}_{=a}$

$$= k \cdot a + a$$

$$= (\underbrace{k+1}_{\tilde{k}}) \cdot a = \tilde{k} \cdot a + \tilde{r} \text{ mit } \tilde{k}=k+1 \text{ und } \tilde{r}=0$$

$\uparrow 0 \leq \tilde{r} < a$

Beispiel:  $\text{ggT}(125, 13)=1$  dann 13 ist Primzahl also  $\mathbb{T}(13)=\{1, 13\}$   
 und  $13 \nmid 125$

Der euklidische Algorithmus liefert

$$125 = \overbrace{9 \cdot 13}^{112} + 8$$

$$13 = 1 \cdot 8 + 5$$

$$8 = 1 \cdot 5 + 3$$

$$5 = 1 \cdot 3 + 2$$

$$3 = 1 \cdot 2 + 1$$

$\text{ggT}(125, 13)=1$  letzter von 0 verschiedenen Rest

$$2 = 2 \cdot 1 + 0 \quad \text{Punkt 0, Algorithmus endet}$$

„Umkehrung  $\hat{=} \text{ Rückwärtsrechnung}$ “ in diesem Algorithmus

$$\begin{aligned} 1 &= \text{ggT}(125, 13) = 3 - 1 \cdot 2 \\ &= 3 - 1 \cdot (5 - 1 \cdot 3) = (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 \\ &= (-1) \cdot 5 + 2 \cdot (8 - 1 \cdot 5) = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 5 \\ &= 2 \cdot 8 - 3(13 - 1 \cdot 8) = (-3) \cdot 13 + 5 \cdot 8 \\ &= (-3) \cdot 13 + 5(125 - 9 \cdot 13) \\ &= \underbrace{5 \cdot 125}_{s} - \underbrace{48 \cdot 13}_{t} = s \cdot 125 + t \cdot 13 \end{aligned}$$

d.h. es gibt  $s \in \mathbb{Z}$  (hier  $s=5$ ) und  $t \in \mathbb{Z}$  (hier  $t=-48$ ) mit  
 $\text{ggT}(125, 13) = s \cdot 125 + t \cdot 13$

Lemma von Bézout:

Gegaben sind  $a, b \in \mathbb{Z}$ ; dann existieren Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit

$$\text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$$

Beweisidee: euklidischen Algorithmus „umkehren  $\hat{=} \text{ rückwärts rechnen}$ “  
math. exakt ist Beweis mit vollständiger Induktion (siehe Skript)

Beispiel:  $\text{ggT}(378, 45)$

$$\left. \begin{array}{l} 378 = \underbrace{8 \cdot 45}_{360} + 18 \\ 45 = \underbrace{2 \cdot 18}_{16} + 9 \\ 18 = 2 \cdot 9 + 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ggT}(378, 45) = 9$$

$$\hookrightarrow 9 = 45 - 2 \cdot 18$$

$$= 45 - 2 \cdot (378 - 8 \cdot 45)$$

$$= (-2) \cdot 378 + 17 \cdot 45 = s \cdot 378 + t \cdot 45 \text{ mit } s = -2 \text{ und } t = 17.$$

## 17 Vorlesung 17 (18.11.2020)

**17.1 Teilen mit Rest**

**17.2 Teilen und Äquivalenzrelationen, Restmengen**

**17.3 Rechenoperationen in  $\mathbb{Z}_m$ , Körper?, kommutativer Ring mit Eins?**

Heute (18.11.) 12:00 Uhr bis morgen (19.11.) 18:00 Uhr 1. edX-Test!

$$b, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow b = k \cdot m + r \text{ mit } 0 \leq r < |m|$$

Division mit Rest

speziell mit  $m \in \mathbb{N}$  (also  $m \geq 1$ ):  $b = k \cdot m + r$  mit  $0 \leq r < m$

$r$  ist der Rest, der beim ganzzahligen Teilen von  $b$  durch  $m$  entsteht

Bedeutung: Gauß:  $r$  heißt Modul von  $b$  bezüglich  $m$  und

Schreibt dafür  $r = b \bmod m$  → Rest, der beim Teilen von  $b$  durch  $m$  bleibt

auch  $r = b \bmod m \Leftrightarrow b = k \cdot m + r$  mit  $0 \leq r < m$

als Rest  $r$  kommen nur die  $\leftarrow r \in \mathbb{N}_0$  ↑  
Zahlen  $0, 1, 2, \dots, m-1$  in Frage (denn falls  $r = m+l$  für ein  $l \in \mathbb{N}_0$   
gilt:  $b = k \cdot m + r = k \cdot m + (m+l) = (k+1) \cdot m + l \Rightarrow l = b \bmod m$ )

Die möglichen Reste  $0, 1, 2, \dots, m-1$  beim ganzzahligen Teilen durch  $m$

liefern uns folgende Mengen:

$$\bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m \} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + 0 \}$$

$$\bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + 1 \}$$

:

$$\bar{m-1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + (m-1) \}$$

Beispiel:  $m = 3 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{0} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 \} \\ = \{ \dots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, 12, \dots \} \\ \bar{1} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 + 1 \} \\ = \{ \dots, -8, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \dots \} \end{array} \right.$

$$\bar{0} \cup \bar{1} \cup \bar{2} = \mathbb{Z}$$

$$\bar{0} \cap \bar{1} = \emptyset$$

$$\bar{1} \cap \bar{2} = \emptyset$$

$$\bar{2} \cap \bar{0} = \emptyset$$

$$\hookrightarrow -2 = (-1) \cdot 3 + 1$$

$$\bar{2} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot 3 + 2 \}$$

$$= \{ \dots, -7, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \dots \}$$

## Teilen durch m ( $m \in \mathbb{N}$ ) und Äquivalenzrelationen

Die zweistellige Relation  $R_m \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  über  $\mathbb{Z}$  ist definiert durch:  
 $(a, b) \in R_m \iff m \mid b - a \iff b - a = k \cdot m \text{ für ein } k \in \mathbb{Z}$

Behauptung:

- 1)  $R_m$  ist eine Äquivalenzrelation
- 2) Für  $m \in \mathbb{N}$  sind die Äquivalenzklassen gerade die Mengen  $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}$

Beweis:

1) reflexiv, symmetrisch, transitiv

$$\hookrightarrow (a, a) \in R_m \quad \hookrightarrow (a, b) \in R_m \Rightarrow (b, a) \in R_m$$

a) reflexiv  $(a, a) \in R_m \quad \forall a \in \mathbb{Z}; \text{ dann } a - a = 0 = 0 \cdot m$   
 $\Rightarrow m \mid a - a$

b) symmetrisch  $(a, b) \in R_m \Rightarrow b - a = k \cdot m$   
 $\Rightarrow a - b = (-k) \cdot m$   
 $\Rightarrow m \mid a - b \Rightarrow (b, a) \in R_m$

c) transitiv  $(a, b) \in R_m \wedge (b, c) \in R_m \Rightarrow$   
 $b - a = k \cdot m \wedge c - b = \tilde{k} \cdot m \Rightarrow$   
 $c - a = (c - b) + (b - a)$   
 $= \tilde{k} \cdot m + k \cdot m = (\tilde{k} + k) \cdot m$   
 $\Rightarrow m \mid c - a \Rightarrow (a, c) \in R_m$

2) zugehörige Äquivalenzklassen

$\bar{a}$  ist Äquivalenzklasse zu  $a$  in  $R_m \Rightarrow$

$$\bar{a} = \{b \in \mathbb{Z} \mid (a, b) \in R_m\}$$

$$= \{b \in \mathbb{Z} \mid b - a = k \cdot m\}$$

$$= \{b \in \mathbb{Z} \mid b = k \cdot m + a\}$$

↑ Menge aller ganzen Zahlen, die beim Teilen durch  $m$  den Rest  $a$  lassen

Beim Teilen durch  $m$  gibt es die Reste  $0, 1, 2, \dots, m-1$

mit den Mengen  $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1} \Rightarrow \bar{a} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$

Definition: Für  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  ist definiert

$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$  die Menge der Äquivalenzklassen der Relation  $R_m$ . Für  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$  gilt also: Jede Zahl in  $\bar{k}$  lässt beim Teilen durch  $m$  den Rest  $k$  ( $0 \leq k \leq m-1$ ).

Rechenoperationen in  $\mathbb{Z}_m$ :

Beispiel:  $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$$\begin{array}{l} \overline{1} \leftarrow b = k \cdot 5 + 1 \\ \overline{2} \leftarrow \tilde{b} = \tilde{k} \cdot 5 + 2 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b + \tilde{b} = (k + \tilde{k}) \cdot 5 + 1 + 2 = \underbrace{(k + \tilde{k})}_{l} \cdot 5 + 3 = l \cdot 5 + 3 \\ \Rightarrow b + \tilde{b} \in \overline{3} \end{array} \right\}$$

$\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$

↑ Repräsentanten von  $\overline{1}, \overline{2}$

$$\begin{array}{l} \overline{2} \leftarrow \tilde{b} = \tilde{k} \cdot 5 + 2 \\ \overline{4} \leftarrow b = k \cdot 5 + 4 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} b + \tilde{b} = \underbrace{(k + \tilde{k})}_{l} \cdot 5 + 2 + 4 = l \cdot 5 + 6 = l \cdot 5 + (5+1) \\ = (l+1) \cdot 5 + 1 \end{array} \right\}$$

$\overline{2} + \overline{4} (= \overline{6}) = \overline{1}$

↑ Repräsentanten von  $\overline{2}, \overline{4}$

$\overline{6} = 1 \cdot 5 + 1 \Rightarrow \overline{6} = \overline{1}$

Strich über  $l$  heißt: Bestimme den Rest von  $l$  beim Teilen durch  $m$

Addition in  $\mathbb{Z}_m$  ist definiert durch

$$\overline{l}, \overline{k} \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow \overline{l} + \overline{k} = \underbrace{(l+k) \bmod m}_{\substack{\text{Rest, der beim Teilen von } l+k \\ \text{durch } m \text{ bleibt}}} = \overline{l+k}$$

$\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{m-1}\}$  ist eine endliche Menge, die Addition kann man dann in einer Verknüpfungstabelle darstellen

Beispiel:  $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

| $\bar{+}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |

$\bar{0}$  ist das neutrale Element der Addition  
in  $\mathbb{Z}_5$ , das inverse Element zu  $\bar{1}$  bz.  
der Addition in  $\mathbb{Z}_5$  ist  $\bar{4}$ , denn  $\bar{1} + \bar{4} = \bar{0}$ ,  
ebenso:  $\bar{2} + \bar{3} = \bar{0}$ ,  $\bar{3} + \bar{2} = \bar{0}$ ,  $\bar{4} + \bar{1} = \bar{0}$

Verknüpfungstafel spiegelsymmetrisch }  $\bar{x} + \bar{t} = \bar{t} + \bar{x}$   
zur Diagonale }  
diese Verknüpfung (Addition) ist Kommutativ

$$\bar{3} + (\bar{4} + \bar{2}) = \overline{\bar{3} + (\bar{4} + \bar{2})} = \overline{(\bar{3} + \bar{4}) + \bar{2}} = (\bar{3} + \bar{4}) + \bar{2}$$

$\swarrow$  Assoziativgesetz in  $\mathbb{Z}$

Für die Addition in  $\mathbb{Z}_5$  gilt auch das Assoziativgesetz!

insgesamt:  $(\mathbb{Z}_5, +)$  ist eine abelsche (Kommutative) Gruppe

allgemein:  $(\mathbb{Z}_m, +)$  ist eine abelsche (Kommutative) Gruppe  
für  $m \in \mathbb{N}, m \geq 2$

Assoziativgesetz gilt (s.o. Reduzieren in  $\mathbb{Z}$ )

Multiplikation in  $\mathbb{Z}_m$  ist definiert durch:  $\bar{k} \cdot \bar{l} = \overline{\bar{k} \cdot l}$

Beispiel:  $\mathbb{Z}_5$ ; die Multiplikation regelt folgende Verknüpfungstabelle

| $\cdot$   | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ | $\bar{4}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{4}$ | $\bar{1}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{1}$ | $\bar{4}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{4}$ | $\bar{0}$ | $\bar{4}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

$\bar{1}$  ist das neutrale Element bezügl. der  
Multiplikation in  $\mathbb{Z}_5$

$\leftarrow \mathbb{Z}_5^* = \mathbb{Z}_5 \setminus \{\bar{0}\} = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\} \leftarrow$  in jeder  
Zeile der Teiltafel steht genau einmal  $\bar{1}$ ,  
d.h. jedes  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_5^*$  hat bezügl. der  
Multiplikation ein inverses Element, z.B.  
 $\bar{3} \cdot \bar{2} = \bar{1}$

Spiegelsymmetrie zur Diagonale

die Multiplikation in  $\mathbb{Z}_5$  ist Kommutativ

$$\text{Distributivgesetz: } \bar{k} \cdot (\bar{l} + \bar{m}) = \overline{\bar{k} \cdot (\bar{l} + \bar{m})} = \overline{(\bar{k} \cdot \bar{l}) + (\bar{k} \cdot \bar{m})} = \overline{(\bar{k} \cdot \bar{l})} + \overline{(\bar{k} \cdot \bar{m})}$$

$\swarrow$  Distributivgesetz in  $\mathbb{Z}$

$$= \bar{k} \cdot \bar{l} + \bar{k} \cdot \bar{m}$$

insgesamt:  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  ist ein Körper (endlicher Körper mit 5 Elementen)

Beispiel:  $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$

| .         | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ | $\bar{0}$ |
| $\bar{1}$ | $\bar{0}$ | $\bar{1}$ | $\bar{2}$ | $\bar{3}$ |
| $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ | $\bar{0}$ | $\bar{2}$ |
| $\bar{3}$ | $\bar{0}$ | $\bar{3}$ | $\bar{2}$ | $\bar{1}$ |

Es gibt kein  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_4$  mit  $\bar{2} \cdot \bar{k} = \bar{1}$   
d.h. zu  $\bar{2} \in \mathbb{Z}_4$  gibt es bezgl. der Multiplikation  
kein inverses Element  
 $\mathbb{Z}_4^* = \mathbb{Z}_4 \setminus \{\bar{0}\}$  ist keine Gruppe

$\Rightarrow (\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$  ist kein Körper sonder (nur) ein kommutativer Ring mit Eins!

Allgemein:  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Frage: Wenn hat  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$  ein inverses Element bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_m$ ? Wann ist  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  ein Körper?

Satz:

für  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$  gilt:  $\bar{k}$  hat ein inverses Element bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_m$ , falls ggT( $k, m$ )=1 ist (d.h.  $k$  und  $m$  sind teilerfremd).

Beweisidee: Angenommen  $\text{ggT}(k, m) = 1$ , dann gibt es nach dem Lemma von Bézout ganze Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = s \cdot k + t \cdot m$ , damit gilt für die Reste beim Teilen durch  $m$

$$\begin{aligned}\bar{1} &= \overline{s \cdot k + t \cdot m} = \bar{s} \cdot \bar{k} + \bar{t} \cdot \bar{m} \quad \leftarrow \bar{m} = \bar{0} \text{ in } \mathbb{Z}_m \\ &= \bar{s} \cdot \bar{k} + \bar{t} \cdot \bar{0} \quad \leftarrow \bar{t} \cdot \bar{0} = \bar{0} \\ &= \bar{s} \cdot \bar{k}\end{aligned}$$

Es gilt also  $\bar{1} = \bar{s} \cdot \bar{k}$  d.h.  $\bar{s}$  ist das Inverse Element zu  $\bar{k}$  bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_m$ .

Beispiel:  $\mathbb{Z}_{42}$ ; gesucht ist die Inverse bezgl. der Multiplikation  
zu  $\bar{5}$  in  $\mathbb{Z}_{42}$  (falls es sie gibt).

$\hookrightarrow$  Inverse existiert, falls  $\text{ggT}(42, 5) = 1$  ist

$$42 = 8 \cdot 5 + \underline{\underline{2}}$$

$$5 = 2 \cdot 2 + \underline{\underline{1}} \Leftrightarrow \text{ggT}(42, 5) = 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Anwendung des Lemmas von Bézout:

Reste beim Teilen durch 42 bilden!

$$\hookrightarrow 1 = 5 - 2 \cdot \underline{\underline{2}}$$

$$\begin{aligned} &= 5 - 2 \cdot (42 - 8 \cdot 5) \\ &= 17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow \bar{1} &= \overline{17 \cdot 5 + (-2) \cdot 42} \\ &= \overline{17} \cdot \overline{5} + \overline{(-2)} \cdot \overline{42} \\ &= \overline{17} \cdot \overline{5} \end{aligned} \right\}$$

$\Rightarrow \bar{17}$  ist die Inverse zu  $\bar{5}$  bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_{42}$ .

Probe:

$$17 \cdot 5 = 85 = 2 \cdot 42 + \underline{\underline{1}} \Rightarrow \bar{17} \cdot \bar{5} = \bar{1}$$

## 18 Vorlesung 18 (23.11.2020)

**18.1 Restklassen mit Primzahlen sind Körper + Beispiel**

**18.2 simultane Kongruenzen**

**18.3 chinesischer Restsatz**

Bemerkungen zur 3. Übung

zur 6. Aufgabe Finden Sie Binome bzw. berechnen Sie mit geeigneten Binomen

c)  $99^2$

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 1 \cdot 100 + 1^2 = 10000 - 200 + 1 = 9801$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

zur 1. Aufgabe: c)  $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$  ←  $(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$  ↗  $a=1, b=1, n=10$

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1^{10-i} \cdot 1^i$$

$$= (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$$

siehe z.B.  
8. Vorlesung

d)  $(a-b)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= (1-1)^n = 0^n = 0$$

e)  $\sum_{n=4}^7 \binom{n}{n-2}$  ↗ "stwe" Einsetzen  
 $= \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$  dann ausrechnen

→ 2. Variante Symmetrie von Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ also } \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-(n-2)} = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{n=4}^7 \binom{n}{n-2} = \sum_{n=4}^7 \binom{n}{2} = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} + \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} + \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} + \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2}$$

$$= 6 + 10 + 15 + 21 = 52$$

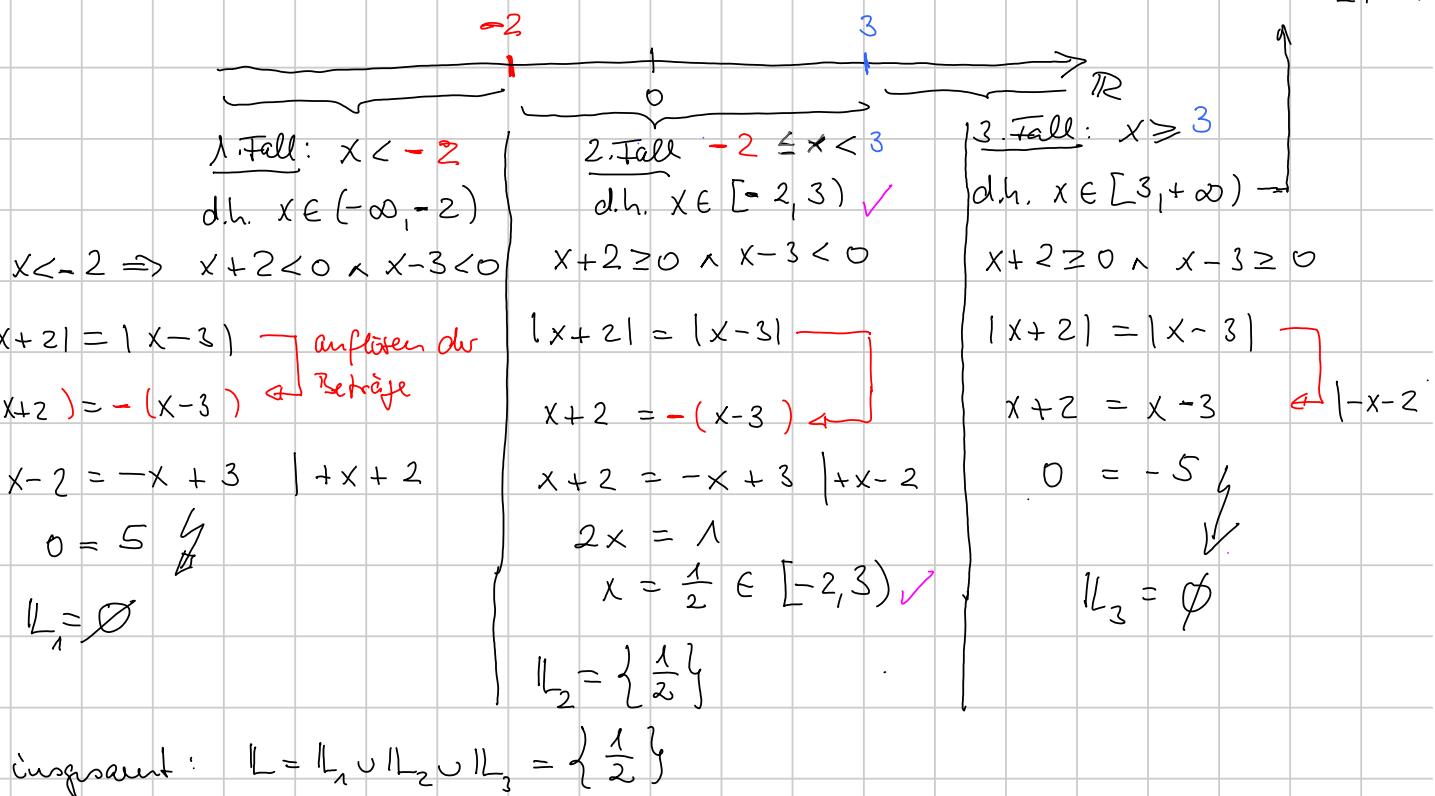
zu Aufgabe 4 d:

$$|x+2| = |x-3|$$

Vorzeichenwechsel bei -2  
Vorzeichenwechsel bei +3

Welche Fälle muss man bei der Fallunterscheidung betrachten!

$$\mathbb{R} = (-\infty, -2) \cup [-2, 3) \cup [3, +\infty)$$



zu Aufgabe 3: Berechnung von Quadratzahlen natürlicher Zahlen, wenn die

letzte Ziffer eine 5 ist!

$$\begin{cases} 125^2 = 15625 \\ \hookrightarrow n=12, n \cdot (n+1) = 12 \cdot 13 \\ \hookrightarrow 12 \cdot 10 + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 85^2 = 7225 \\ \hookrightarrow n=8, n \cdot (n+1) = 8 \cdot 9 \\ \hookrightarrow 8 \cdot 10 + 5 \end{cases}$$

Warum geht das?

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 5 = z \text{ ergibt } z^2$$

$$z = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 5 = \underbrace{(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1)}_n \cdot 10 + 5$$

$$\Rightarrow z = n \cdot 10 + 5$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (n \cdot 10)^2 + 2 \cdot (n \cdot 10) \cdot 5 + 5^2 \\ &= \underbrace{n^2 \cdot 100}_{(n^2+n)} + n \cdot 100 + 25 \\ &= \underbrace{(n^2+n)}_{n \cdot (n+1)} \cdot 100 + 25 \\ &= n \cdot (n+1) \cdot 100 + 25 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Weiter in der Vorlesung: Rechnen in  $\mathbb{Z}_m = \{\bar{k} \mid 0 \leq k \leq m-1\}$

↑ Restklassen beim (ganzzahligen) Teilen durch  $m$

Aus der 17. Vorlesung ist bekannt:

a)  $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$  ist ein Kommutativer

Ring mit 1

b)  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$  hat ein inverses Element bezüglich der Multiplikation (also ein  $\bar{l} \in \mathbb{Z}_m$  mit  $\bar{k} \cdot \bar{l} = \bar{l} \cdot \bar{k} = \bar{1}$ ), falls  $k$  und  $m$  teiler-fremd sind, d.h.  $\text{ggT}(k, m) = 1$

$\Rightarrow p \in \mathbb{N}$  Primzahl  $\Rightarrow \text{ggT}(k, p) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (\mathbb{Z}_p, +, \cdot)$  ist ein Körper, d.h. es gelten die 5 Körperaxiome (wie in  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$ )

Beispiel:  $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$  13 ist Primzahl  $\Rightarrow (\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$  ist ein Körper

a) Berechnen Sie das inverse Element bezüglich der Multiplikation von  $\bar{11} \in \mathbb{Z}_{13}$

b)  $(\mathbb{Z}_{13}, +, \cdot)$  ist ein Körper also gelten binomische Formeln!  
Rechnen Sie dies mal für  $(\bar{5} + \bar{7})^2$

Zu a) zunächst euklid. Algorithmus für  $\text{ggT}(11, 13) = 1$

$$13 = 1 \cdot 11 + 2$$

$$11 = 5 \cdot 2 + 1 \leftarrow 1 = \text{ggT}(11, 13)$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

Es gibt  $s, t \in \mathbb{Z}$  mit  
 $1 = \text{ggT}(11, 13) = s \cdot 11 + t \cdot 13$

"Rückwärtsrechnen" (Lemma von Bezout)

$$1 = 11 - 5 \cdot 2$$

$$= 11 - 5 \cdot (13 - 1 \cdot 11)$$

$$= (-5) \cdot 13 + 6 \cdot 11$$

} in  $\mathbb{Z}_{13}$  gilt also

$$\bar{1} = \overline{(-5) \cdot 13 + 6 \cdot 11}$$

$$= \overline{(-5) \cdot \underbrace{13}_{\bar{0}} + 6 \cdot \bar{11}} = \bar{6} \cdot \bar{11}$$

$$= \bar{0}$$

$\Rightarrow$  die inverse Zahl zu  $\bar{11}$  in  $\mathbb{Z}_{13}$  bezüglich der Multiplikation ist  $\bar{6}$

Probe:  $\bar{6} \cdot \bar{11} = \bar{66} = \bar{65} + \bar{1} = \underbrace{\bar{5} \cdot \bar{13}}_{\substack{\hookrightarrow 65=5 \cdot 13 \\ =\bar{0}}} + \bar{1} = \bar{1}$

b)  $(\bar{5} + \bar{7})^2 = \bar{12}^2 = \bar{12} \cdot \bar{12} = \overline{12 \cdot 12} = \overline{(12)^2} = \bar{144} = \bar{143} + \bar{1}$

$$= \bar{11} \cdot \bar{13} + \bar{1} = \bar{0}$$

$$\bar{5}^2 + \bar{2} \cdot \bar{5} \cdot \bar{7} + \bar{7}^2 = \textcircled{\bar{25}} + \bar{5} \cdot \textcircled{\bar{14}} + \textcircled{\bar{49}} = \bar{12} + \bar{5} + \bar{10}$$

$$\bar{14} = \bar{1} \cdot \bar{13} + \bar{1} = \bar{1}$$

$$\bar{49} = \overline{39+10} = \bar{3} \cdot \bar{13} + \bar{10} = \bar{10}$$

$$\bar{25} = \bar{13} + \bar{12} = \bar{12}$$

$$(\bar{5} + \bar{7})^2 = \bar{5}^2 + \bar{2} \cdot \bar{5} \cdot \bar{7} + \bar{7}^2$$

4

Merke: Potenzen ist wiederholtes Multiplizieren mit dem selben Faktor  
also gilt für  $\bar{k} \in \mathbb{Z}_m$ :  $\bar{k}^n = (\bar{k}^n)$

### Einführung in „simultane Kongruenzen“

c) Bemerkung zu Bezeichnungen:

$$\begin{aligned} \bar{k} \in \mathbb{Z}_m \Rightarrow \bar{k} &= \{ b \in \mathbb{Z} \mid b \text{ hat beim Teilen durch } m \text{ den Rest } k \} \\ &= \{ b \in \mathbb{Z} \mid m \mid b - k \text{ d.h. } m \text{ teilt } b - k \} \\ &= \{ b \in \mathbb{Z} \mid (k, b) \in R_m \} \end{aligned}$$

↑ Äquivalenzrelation aus der  
17. Vorlesung

statt  $(k, b) \in R_m$  sagt man auch „ $k$  ist Kongruent zu  $b$  modulo  $m$ “  
und schreibt dafür  $k \equiv b \pmod{m}$

↑ ist Kongruent zu

b) Was sind „simultane Kongruenzen“?

Beispiel: Nikolaus verteilt Geschenke. Wenn er in jedem Haushalt 3 Geschenke abgibt, hat er zum Schluss 2 Geschenke übrig.  
Wenn er in jedem Haushalt 5 Geschenke abgibt, hat zum Schluss 4 Geschenke übrig.

Wieviele Geschenke hat der Nikolaus mindestens dabei? Gibt es weitere mögliche Anzahlen von Geschenken?

↓ Geschenkesack von Nikolaus

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{(3) Geschenke / 2 Rest: } S_1 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, \dots\} \\ \text{(5) Geschenke / 4 Rest: } S_2 = \{4, 9, 14, 13, 24, 29, 34, \dots\} \end{array} \right. \quad \begin{array}{c} 15 = 3 \cdot 5 \\ 15 = 5 \cdot 3 \end{array} \quad \begin{array}{c} 15 \\ 15 \\ 44 \end{array}$$

Der Nikolaus hat mindestens 14 Geschenke dabei, weitere Möglichkeiten

sind  $x_k = 14 + k \cdot 15$ ,  $\tilde{x} = 14$  ist kleinste positive Lösung!

$$\rightarrow \bar{x} = \bar{2} \text{ in } \mathbb{Z}_3 \quad \leftarrow x \equiv 2 \pmod{3} \quad \left. \begin{array}{l} 2 \text{ „simultane Kongruenzen“} \\ \quad \quad \quad \end{array} \right\}$$

$$\bar{x} = \bar{4} \text{ in } \mathbb{Z}_5 \quad \leftarrow x \equiv 4 \pmod{5}$$

Allgemein gilt:

**Satz (chinesischer Restsatz für zwei simultane Kongruenzen):**

Die simultanen Kongruenzen

$\bar{x} = \bar{n}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  und  $\bar{x} = \bar{k}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$   
sind lösbar, wenn gilt:  $\text{ggT}(m_1, m_2) = 1$ .

Es gilt dann:  $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$  ist eine Lösung, falls gilt  $\bar{a} \cdot \bar{m_2} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  und  $\bar{b} \cdot \bar{m_1} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$ .

Weitere (positive) Lösungen sind  $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2$  für  $i \in \mathbb{Z}$  (solange  $x \geq 0$  gilt).

Bemerkung:

- $\text{ggT}(m_1, m_2) = 1$  heißt  $m_1$  und  $m_2$  sind teilerfremd
- $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$  mit  $\bar{a} \cdot \bar{m_2} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  und  $\bar{b} \cdot \bar{m_1} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$   
ist nicht immer sofort die kleinste pos. Lösung sondern auf jeden Fall  
1 Lösung von den unendlich vielen Möglichkeiten  $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2, i \in \mathbb{Z}$
- Wie sieht das in unserem Beispiel aus:

$$n = 2, m_1 = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{gesucht in } \mathbb{Z}_3: \bar{a} \text{ mit } \bar{a} \cdot \bar{5} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_3 \\ k = 4, m_2 = 5 \end{array} \right.$$

gibt es in  $\mathbb{Z}_5$ :  $\bar{b}$  mit  $\bar{b} \cdot \bar{3} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_5$

$\bar{b} \cdot \bar{3} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_5 \rightarrow$  Lösung durch "Hingucker"  $\bar{b} = \bar{2}$

$\bar{a} \cdot \bar{5} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_3 \Rightarrow \bar{a} \cdot \bar{2} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_3 \rightarrow$  Lösung durch "Hingucker"  $\bar{a} = \bar{2}$

Also:  $x_0 = 2 \cdot 2 \cdot 5 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 20 + 24 = \underline{\underline{44}}$

## 19 Vorlesung 19 (24.11.2020)

**19.1 Chinesischer Restsatz: Beweis, Beispiel**

**19.2 Allgemeiner chinesischer Restsatz**

**19.3 RSA: Anwendung von modularer Arithmetik**

Allgemein gilt:

**Satz (chinesischer Restsatz für zwei simultane Kongruenzen):**

Die simultanen Kongruenzen

$\bar{x} = \bar{n}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  und  $\bar{x} = \bar{k}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$  ✓  
sind lösbar, wenn gilt:  $\text{ggT}(m_1, m_2) = 1$ .

Es gilt dann:  $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$  ist eine Lösung, falls gilt  $\bar{a} \cdot \bar{m}_2 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  und  $\bar{b} \cdot \bar{m}_1 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$ .

Weitere (positive) Lösungen sind  $x = x_0 + i \cdot m_1 \cdot m_2$  für  $i \in \mathbb{Z}$  (solange  $x \geq 0$  gilt).

Beweis: ①  $\text{ggT}(m_1, m_2) = 1 \Rightarrow$  (euklid. Algor. & Lemma von Bézout)

es existiert  $\bar{a}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$  mit  $\bar{a} \cdot \bar{m}_2 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$ ; a)

es existiert  $\bar{b}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$  mit  $\bar{b} \cdot \bar{m}_1 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$  b)

② Bildet  $x_0 = n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1$  mit a, b aus ①, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{(2.1) in } \mathbb{Z}_{m_1}: \quad \bar{x}_0 &= \overline{n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1} \\ &= \overline{n} \cdot \overline{a} \cdot \overline{m}_2 + \overline{k} \cdot \overline{b} \cdot \overline{m}_1 = \overline{n} \quad \checkmark \\ &\quad \underbrace{\overline{a}}_{\text{a)}} = \bar{1} \quad \underbrace{\overline{b}}_{\text{b)}} = \bar{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(2.2) in } \mathbb{Z}_{m_2}: \quad \bar{x}_0 &= \overline{n \cdot a \cdot m_2 + k \cdot b \cdot m_1} \\ &= \overline{n} \cdot \overline{a} \cdot \overline{m}_2 + \overline{k} \cdot \overline{b} \cdot \overline{m}_1 = \bar{k} \quad \checkmark \\ &\quad \underbrace{\overline{a}}_{\text{a)}} = \bar{0} \quad \underbrace{\overline{b}}_{\text{b)}} = \bar{1} \end{aligned}$$

Beispiel: Lösen Sie folgende simultane Kongruenzen

$$\bar{x} = \bar{10} \text{ in } \mathbb{Z}_{101} \rightarrow x \equiv 10 \pmod{101} \quad \left. \begin{array}{l} \text{alternative} \\ \text{Schreibweise} \end{array} \right\}$$

$$\bar{x} = \bar{11} \text{ in } \mathbb{Z}_{47} \rightarrow x \equiv 11 \pmod{47} \quad \left. \begin{array}{l} \text{alternative} \\ \text{Schreibweise} \end{array} \right\}$$

Geben Sie und die kleinste pos. Zahl  $x$  an, die die gegebenen simultanen Kongruenzen löst.

①  $\text{ggT}(101, 47)$  bestimmen

$$101 = 2 \cdot 47 + 7$$

$$47 = 6 \cdot 7 + 5$$

$$7 = 1 \cdot 5 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad \leftarrow \text{ggT}(101, 47) = 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

⇒ Problem lösbar

② Lemma von Bezout anwenden und Inverse (begr. Kult.) bestimmen

$$\begin{aligned}
 1 &= 5 - 2 \cdot 2 \\
 &= 5 - 2 \cdot (7 - 1 \cdot 5) \\
 &= (-2) \cdot 7 + 3 \cdot 5 \\
 &= (-2) \cdot 7 + 3 \cdot (47 - 6 \cdot 7) \\
 &= 3 \cdot 47 - 20 \cdot 7 \\
 &= 3 \cdot 47 - 20 \cdot (101 - 2 \cdot 47) \\
 &= (-20) \cdot 101 + 43 \cdot 47
 \end{aligned}$$

②.1 In  $\mathbb{Z}_{47}$  gilt

$$\bar{1} = \overbrace{(-20) \cdot 101 + 43 \cdot 47}^{\text{b}}$$

$$= (\overline{-20}) \cdot \overline{101} + \overline{43} \cdot \overline{47} = \overline{(-20)} \cdot \overline{101}$$

$= \bar{0}$

Inverse zu  $\overline{101}$  in  $\mathbb{Z}_{47}$  ist  $\overline{(-20)} = \overline{(-20+47)} = \overline{27}$

②.2 In  $\mathbb{Z}_{101}$  gilt

$$\bar{1} = \overbrace{(-20) \cdot 101 + 43 \cdot 47}^{\text{b}}$$

$$= (\overline{-20}) \cdot \overline{101} + \overline{43} \cdot \overline{47} = \overline{43} \cdot \overline{47}$$

$= \bar{0}$

Inverse zu  $\overline{47}$  in  $\mathbb{Z}_{101}$  ist  $\overline{43} \leftarrow a$

③ Ergebnis:  $x_0 = a \cdot 47 \cdot 10 + b \cdot 101 \cdot 11$

$$= 43 \cdot 47 \cdot 10 + 27 \cdot 101 \cdot 11 = 150207$$

$x_0 = 150207$  ist eine Lösung des geg. simultanen Kongruenzen

Weitere Lösungen sind  $x = x_0 + k \cdot 47 \cdot 101$  mit  $k \in \mathbb{Z}$ , mit  $k = -10$

erhält man  $x = 150207 - 47470 = 2737$  als kleinste positive Lösung!

Bemerkung:  $\bar{x} = \bar{n}_1$  in  $\mathbb{Z}_{m_1} \rightarrow a_1$  mit  $\bar{a}_1 \cdot \bar{m}_2 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_1}$

$\bar{x} = \bar{n}_2$  in  $\mathbb{Z}_{m_2} \rightarrow a_2$  mit  $\bar{a}_2 \cdot \bar{m}_1 = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_2}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = n_1 \cdot a_1 \cdot m_2 + n_2 \cdot a_2 \cdot m_1 \text{ löst die simultanen Kongruenzen} \\ = n_1 \cdot a_1 \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{m_1} + n_2 \cdot a_2 \cdot \frac{m_2 \cdot m_1}{m_2} \end{array} \right.$

andere Darstellung der  
 chin. Restklassen  
 für 2 Kongruenzen

$$\begin{aligned}
 &= n_1 \cdot a_1 \cdot \frac{M}{m_1} + n_2 \cdot a_2 \cdot \frac{M}{m_2} \quad \leftarrow M = m_1 \cdot m_2 \\
 &\quad \bar{a}_1 \cdot \left( \frac{M}{m_1} \right) = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_1} \\
 &\quad \bar{a}_2 \cdot \left( \frac{M}{m_2} \right) = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_2} \\
 &= \sum_{i=1}^2 n_i \cdot a_i \cdot \frac{M}{m_i} \quad \text{mit } \bar{a}_i \cdot \left( \frac{M}{m_i} \right) = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{m_i}
 \end{aligned}$$

Diese Darstellung liefert sofort folgende Verallgemeinerung

Satz (Chin. Restsatz für mehrere simultane Kongruenzen)

Die  $K$  simultanen Kongruenzen

$$\bar{x} = \bar{n}_i \text{ in } \mathbb{Z}_{m_i}, 1 \leq i \leq K$$

sind lösbar, falls gilt  $\text{ggT}(m_i, m_j) = 1$  für  $i \neq j$ ,  $1 \leq i, j \leq K$ .

Es gilt dann

$$x_0 = \sum_{i=1}^K n_i \cdot a_i \cdot \frac{M}{m_i} \text{ ist eine Lösung}$$

mit  $M = m_1 \cdot m_2 \cdots m_K$  und  $\bar{a}_i \cdot \left(\frac{M}{m_i}\right) = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{m_i}$ ,  $1 \leq i \leq K$ .

Weitere Lösungen sind  $x = x_0 + l \cdot M$  für  $l \in \mathbb{Z}$ .

(Beispiel: Siehe Skript S. 66/67)

Anwendung modulärer Arithmetik (= Rechnen mit Restklassen):

Algorithmen zur Verschlüsselung von Daten!

hier: Grundidee des RSA-Algorithmus (asymmetrische Verschlüsselung)

Rivest, Shamir, ↗  
Adelman

Sendu und Empfänger der  
Daten haben verschiedene Schlüssel

Empfänger (E) hat einen „privaten“ Schlüssel und einen  
„öffentlichen“ Schlüssel

Sendu (S) kennt (erhält) den „öffentlichen“ Schlüssel des Empfängers E

S verschlüsselt seine Daten mit dem öffentl. Schlüssel von E und  
sendet diese (verschlüsselten) Daten an E.

Nur E kann mit seinem (geheim gehaltenen) privaten Schlüssel die  
verschlüsselten Daten von S entschlüsseln.

Damit ist der Ablauf des Verfahrens klar aber wie/warum funktioniert das?

Konkaktes Beispiel (Skript S. 68-72)

Sendu (S) ist Student und möchte Empfänger E (Prof. K) verschlüsselt  
mitteln, dass MATHE sein Lieblingsfach ist!

① Kodierung des Wortes MATHE in Zahlen

|      |   |   |   |     |    |               |       |                           |
|------|---|---|---|-----|----|---------------|-------|---------------------------|
| Text | A | B | C | ... | Z  | $\Rightarrow$ | MATHE | $\rightarrow 13 1 20 8 5$ |
| zahl | 1 | 2 | 3 |     | 26 |               |       |                           |

Sender (S) will die Zahlenfolge  $13|1|20|8|5$  verschlüsselt senden

② Schlüsselgenerierung (Jetzt vor ① gelaufen)

Der Empfänger E nimmt eine sehr große natürliche Zahl  $N$ , die

das Produkt zweier sehr großer Primzahlen ist:  $N = p \cdot q$

$p, q$  Primzahlen (mit mehreren hundert Dezimalstellen.)

$N$  ist dann (momentan) und mit den leistungsfähigsten Computern  
nicht in (endlicher) angemessener Zeit in das Produkt  $p \cdot q$  faktorisierbar!

Empfänger E hat  $N = p \cdot q$ ; er nimmt  $\tilde{N} = (p-1) \cdot (q-1)$  und rechnet

in  $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$ : Er bestimmt zunächst  $e$  mit  $0 < e < \tilde{N}$  und  $\text{ggT}(e, \tilde{N}) = 1$

$\Rightarrow e$  hat in  $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$  ein inverses Element bezgl. der Multiplikation d;

der Empfänger berechnet d mit  $\bar{d} \cdot \bar{e} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{\tilde{N}}$ .

Der „öffentliche“ Schlüssel des Empfängers ist  $(N, e)$ .

Der „privater“ Schlüssel des Empfängers ist  $(N, d)$ .

Bei hinreichend großen  $N$  kann niemand (kein Supercomputer) in  
(endlicher) angemessener Zeit aus  $(N, e)$  den Schlüssel  $(N, d)$   
berechnen!

Konkretes Beispiel

Empfänger E wählt  $N = 33 = 3 \cdot 11$  also  $p = 3, q = 11$

Empfänger E berechnet  $\tilde{N} = (p-1) \cdot (q-1) = 2 \cdot 10 = 20$

Erechnet also in  $\mathbb{Z}_{20}$ , er wählt  $e = 7$  mit  $\text{ggT}(7, 20) = 1$

und bestimmt d mit  $\bar{d} \cdot \bar{e} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_{20}$ : Es ist  $\bar{1} = \bar{7} \cdot \bar{3}$  in  $\mathbb{Z}_{20}$

$\Rightarrow d = 3, \bar{d} = \bar{3}$  in  $\mathbb{Z}_{20}$

„öffentlicher“ Schlüssel ist  $(33, 7)$ , „privater“ Schlüssel ist  $(33, 3)$

③ Sender will  $13|1|20|8|5$  mit dem „öffentlichen“ Schlüssel verschlüsseln.

Für die zu verschlüsselnde Ziffernfolge  $a_1 a_2 \dots a_n$  muss gelten:  $\text{ggT}(a_i, N) = 1$

hier im Beispiel:  $\text{ggT}(33, 13) = 1$ ,  $\text{ggT}(33, 1) = 1$ ,  $\text{ggT}(20, 33) = 1$ ,  $\text{ggT}(8, 33) = 1$

$$\text{ggT}(5, 33) = 1$$

Der Sender S rechnet mit dem „öffentlichen“ Schlüssel  $(N, e) = (33, 7)$

in  $\mathbb{Z}_{33}$  und zwar

$$\overline{13^7} = \overline{62748517} = \overline{7} \text{ denn } 62748517 = 1801470 \cdot 33 + \textcircled{7}$$

$$\overline{1^7} = \overline{1} \text{ denn } 1^7 = 1 = 0 \cdot 33 + \textcircled{1}$$

$$\overline{20^7} = \overline{1280600000} = \overline{26} \text{ denn } 1280000000 = 38787878 \cdot 33 + \textcircled{26}$$

$$\overline{8^7} = \overline{2097152} = \overline{2} \text{ denn } 2097152 = 63550 \cdot 33 + \textcircled{2}$$

$$\overline{5^7} = \overline{78125} = \overline{14} \text{ denn } 78125 = 2367 \cdot 33 + \textcircled{14}$$

$\Rightarrow$  Sender verschlüsselt  $13|1|20|8|5$  in  $\overline{7}|1|26|2|14$

(4) Empfänger E bekommt die Ziffernfolge  $\overline{7}|1|26|2|14$

und entschlüsselt mit seinem „privaten“ Schlüssel  $(N, d) = (33, 3)$

und zwar durch Rechnung in  $\mathbb{Z}_{33}$ :

$$\overline{7^3} = \overline{343} = \overline{13} \text{ denn } 343 = 10 \cdot 33 + \textcircled{13}$$

$$\overline{1^3} = \overline{1} \text{ denn } 1 = 0 \cdot 33 + \textcircled{1}$$

$$\overline{26^3} = \overline{17567} = \overline{20} \text{ denn } 17567 = 532 \cdot 33 + \textcircled{20}$$

$$\overline{2^3} = \overline{8} \text{ denn } 8 = 0 \cdot 33 + \textcircled{8}$$

$$\overline{14^3} = \overline{2744} = \overline{5} = 2744 = 83 \cdot 33 + \textcircled{5}$$

$\Rightarrow$  Empfänger nimmt  $13|1|20|8|5$  als entschlüsselte Nachricht,  
dekodieren mit Buchstabentabelle liefert: M A T H E

Theorie dazu (warum funktioniert dieses Verfahren): Vorsicht margin!

## 20 Vorlesung 20 (25.11.2020)

**20.1 Prinzip der RSA-Verschlüsselung**

**20.2 Eulersche-phi-Funktion**

**20.3 Satz von Euler**

**20.4 'kleiner' Satz von Fermat**

**20.5 Beweis: RSA-Algorithmus**

**20.6 Beweis: Satz von Euler**

**20.7 Einführung: Lineare Gleichungssysteme**

## Prinzip der RSA-Verschlüsselung

Empfänger:  $N = p \cdot q$  Produkt zweier sehr großer Primzahlen,  
 er rechnet in  $\mathbb{Z}_N$  mit  $\tilde{N} = (p-1) \cdot (q-1)$  folgendes aus:  
 er bestimmt  $e$  mit  $1 < e < \tilde{N}$  und  $\text{ggT}(e, \tilde{N}) = 1 \Rightarrow$   
 $e$  hat in  $\mathbb{Z}_N$  eine Inverse bezüglich der Multiplikation,  
 er berechnet diese Inverse, d.h. er löst  $\bar{e} \cdot \bar{d} = \bar{1}$  in  $\mathbb{Z}_N$   
öffentlicher Schlüssel ist  $(N, e)$   
privater Schlüssel ist  $(N, d)$

Sender: Er kennt den öffentlichen Schlüssel  $(N, c)$ .  
 Er kodiert den zu verschlüsselnden Text in eine  
 Zahlenfolge  $a_1, a_2, \dots, a_k$  mit  $\text{ggT}(a_i, N) = 1, 1 \leq i \leq k$   
 Für jede Zahl  $a_i (1 \leq i \leq k)$  berechnet er in  $\mathbb{Z}_N$   
 die Zahl  $\bar{A}_i = \overline{a_i^c}$   
 die Zahlenfolge  $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_k$  ist dann die verschlüsselte Nachricht!

Empfänger: Er bekommt die Zahlenfolge  $A_1, A_2, \dots, A_k$  und berechnet mit  
 dem privaten Schlüssel  $(N, d)$  in  $\mathbb{Z}_N$  die Zahlen  $\bar{A}_i^d$ ;  
 es gilt  $\bar{A}_i^d = a_i$ , d.h. aus  $A_1, A_2, \dots, A_k$  wird wieder  $a_1, a_2, \dots, a_k$ .

Warum funktioniert das?

Definition: Für  $n \in \mathbb{N}$  wird definiert

a)  $\phi(n) = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k < n \wedge \text{ggT}(k, n) = 1\}$

Das ist die Menge der zu  $n$  teilerfreien nat. Zahlen kleiner als  $n$ .

b) Die Funktion  $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $\varphi(n) = |\phi(n)| \hat{=} \text{Anzahl der Elemente}$   
 in der Menge  $\phi(n)$ ; diese Funktion heißt Eulersche-phi-Funktion.

Beispiele:

$$n=18 \Rightarrow \phi(18) = \{1, 5, 7, 11, 13, 17\}, \quad \varphi(18) = |\phi(18)| = 6$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n=21 \Rightarrow \phi(21) = \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}, \quad \varphi(21) = 12 \\ n=7 \Rightarrow \phi(7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \quad \varphi(7) = 6 = 7-1 \\ n=3 \Rightarrow \phi(3) = \{1, 2\}, \quad \varphi(3) = 2 = 3-1 \end{array} \right.$$

$\rightarrow 12 = \varphi(21) = \varphi(3 \cdot 7) = \underbrace{\varphi(3)}_{=2} \cdot \underbrace{\varphi(7)}_{=6}$

Bemerkung:

$$1) p \in \mathbb{N} \text{ Primzahl} \Rightarrow \varphi(p) = p-1 \text{ denn } \phi(p) = \{1, 2, 3, \dots, p-1\}$$

$$2) p, q \in \mathbb{N} \text{ beide Primzahlen} \Rightarrow \varphi(p \cdot q) = \varphi(p) \cdot \varphi(q) = (p-1) \cdot (q-1)$$

Satz von Euler:

Gegeben sind  $a, N \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(a, N) = 1$ , d.h.  $a$  und  $N$  sind teilerfremd.

Dann gilt

$$a^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N} \quad \text{anders formuliert: } a^{\varphi(N)} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_N$$

Folgerung daraus ist der „Kleine“ Satz von Fermat, nämlich:

$$\text{Für jede Primzahl } p \in \mathbb{N} \text{ gilt } a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow a^p \equiv a \pmod{p}$$

$$(p \text{ Primzahl} \Rightarrow \varphi(p) = p-1, \text{ dann ist nach dem Satz von Euler } a^{\varphi(p)} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p})$$

Beweisidee zum RSA - Algorithmus

öffentlicher Schlüssel  $(N, e)$  mit  $N = p \cdot q$   $p$  und  $q$  Primzahlen

$$\varphi(N) = \varphi(p \cdot q) = (p-1) \cdot (q-1) = \tilde{N} \text{ und } \overline{e} \cdot \overline{d} = \bar{1} \text{ in } \mathbb{Z}_{\tilde{N}} = \mathbb{Z}_{\varphi(N)}$$

privater Schlüssel  $(N, d)$  mit diesem  $d$

Klartext als Zahl:  $a$  mit  $\text{ggT}(a, N) = 1$ , verschlüsselt wird  $a$  in

$$\overline{a^e} \in \mathbb{Z}_N \text{ (Rest von } \overline{a} \text{ beim Teilen durch } N): \overline{A} = \overline{a^e}, A \text{ wird gesendet}$$

Zur Entschlüsselung wird berechnet:

$\overline{A^d} \in \mathbb{Z}_N$  berechnet; es ist

$$\overline{A^d} = \overline{(a^e)^d} = \overline{a^{ed}} \text{ in } \mathbb{Z}_N$$

Es gilt  $\overline{e} \cdot \overline{d} = \overline{1}$  in  $\mathbb{Z}_{\varphi(N)} = \mathbb{Z}_{\varphi(N)}$ , d.h.  $e \cdot d$  hat Rest 1 beim Teilen durch  $\varphi(N)$ ; es gibt also ein  $i \in \mathbb{N}$  mit  $e \cdot d = i \cdot \varphi(N) + 1$

$$\Rightarrow \overline{a^{ed}} \text{ in } \mathbb{Z}_N \text{ ist } \overline{a^{i \cdot \varphi(N)+1}} \text{ in } \mathbb{Z}_N \text{ und damit: } \overline{a^{ed}} = \overline{a^{i \cdot \varphi(N)+1}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\overline{a^{e \cdot d}}}_{\overline{A^d}} = \overline{a^{i \cdot \varphi(N)}} \cdot \overline{a} = \overline{a} \cdot (\underbrace{\overline{a^{\varphi(N)}}}_{} )^i = \overline{a} \cdot \overline{1}^i = \overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a}$$

= Satz von Euler

Insgesamt gilt:  $\overline{A^d} = \overline{a}$  in  $\mathbb{Z}_N$ .

Beweisidee zum Satz von Euler  $a, N \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(a, N) = 1$

Behauptung  $a^{\varphi(N)} \equiv 1 \pmod{N}$  ( $\overline{a^{\varphi(N)}} = \overline{1}$  in  $\mathbb{Z}_N$ )

Setze  $l = \varphi(N)$ , dann ist  $\Phi(N) = \{K_1, K_2, \dots, K_e\}$  mit  $\text{ggT}(K_i, N) = 1$  für  $1 \leq i \leq l$ ; d.h.  $\overline{K_1}, \overline{K_2}, \dots, \overline{K_e}$  in  $\mathbb{Z}_N$  haben inverse Elemente bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_N$ .

Für die Zahlen  $a \cdot K_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) gilt und  $\text{ggT}(a \cdot K_i, N) = 1$ , d.h. und  $\overline{a \cdot K_1}, \overline{a \cdot K_2}, \dots, \overline{a \cdot K_e}$  in  $\mathbb{Z}_N$  haben inverse Elemente bezgl. der Multiplikation in  $\mathbb{Z}_N$ .

Für  $\mathbb{Z}_N^* = \{ \overline{k} \in \mathbb{Z}_N \mid \text{es gibt } \overline{l} \in \mathbb{Z}_N \text{ mit } \overline{k} \cdot \overline{l} = \overline{1} \}$

$$= \{ \overline{k} \in \mathbb{Z}_N \mid \text{ggT}(k, N) = 1 \} = \{ \overline{K_1}, \overline{K_2}, \dots, \overline{K_e} \};$$

es ist aber auch  $\overline{a \cdot K_1}, \overline{a \cdot K_2}, \dots, \overline{a \cdot K_e} \in \mathbb{Z}_N^* = \{ \overline{K_1}, \overline{K_2}, \dots, \overline{K_e} \}$

$\overline{a \cdot K_1}, \overline{a \cdot K_2}, \dots, \overline{a \cdot K_e}$  ist nur eine andere Sortierung (eine Permutation) der Zahlen  $\overline{K_1}, \overline{K_2}, \dots, \overline{K_e}$  und damit in  $\mathbb{Z}_N$ :

$$\overline{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdots K_e} = (\overline{a} \overline{K_1}) \cdot (\overline{a} \overline{K_2}) \cdots (\overline{a} \overline{K_e}) \iff ggt(K_i | N) = 1$$

$$\overline{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdots K_e} = \overline{a^l} \cdot \overline{K_1 \cdot K_2 \cdot K_3 \cdots K_e} = (\overline{a^l}) \cdot (\overline{K_1 \cdot K_2 \cdots K_e})$$

noch Kürzen hat man  $\overline{a} = \overline{a^l}$  in  $\mathbb{Z}_N$  also  $\overline{a} = \overline{a^{φ(N)}}$  in  $\mathbb{Z}_N$

## Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus

Definition: (Wir betrachten nur die Fälle  $n \leq k$ )

Gegaben sind  $n \cdot k$  reelle Zahlen  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ ) und  $n$  reelle Zahlen  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

① Gesucht sind die Werte der  $k$  Unbekannten  $x_j$  ( $1 \leq j \leq k$ ) mit

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{array} \right\} \text{in Kurzform}$$

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} \cdot x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

also Lösungen dieses linearen Gleichungssystems mit  $n$  Gleichungen für  $k$  Unbekannte.

② Die Zahlen  $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$  heißen Koeffizienten des linearen Gleichungssystems; die Zahlen  $b_i, 1 \leq i \leq n$  heißen rechte Seite des linearen Gleichungssystems und die gesuchten Zahlen  $x_j, 1 \leq j \leq k$  heißen Unbekannte des linearen Gleichungssystems.

## Beispiele:

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ 0 \cdot x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{lineares Gleichungssystem mit} \\ n=3 \text{ Gleichungen und } k=4 \\ \text{Unbekannten } x_1, x_2, x_3, x_4 \\ \text{rechte Seite: } b_1=1, b_2=0, b_3=-2 \end{array}$$

Koeffizienten  $a_{11} = 3$ ,  $a_{12} = -5$ ,  $a_{13} = 1$ ,  $a_{14} = -1$

$a_{21} = 0$ ,  $a_{22} = 2$ ,  $a_{23} = -1$ ,  $a_{24} = 0$

$a_{31} = 1$ ,  $a_{32} = 1$ ,  $a_{33} = 1$ ,  $a_{34} = -5$

(2)  $\begin{aligned} 5x - 2y &= 0 \\ -2x + 3y &= 0 \end{aligned}$  }  $n=2$  Gleichungen für  $K=2$  Unbekannte nämlich  $x$  und  $y$ , formal  
Unbekannte  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$

Koeffizienten:  $a_{11} = 5$ ,  $a_{12} = -2$ ,  $a_{21} = -2$ ,  $a_{22} = 3$

rechte Seite:  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = 0$

Bezeichnung:  $n \leq K$  heißt: Wir betrachten nur lineare Gleichungssysteme mit weniger Gleichungen als Unbekannte ( $n < K$ ) oder genauso viele Gleichungen wie Unbekannte ( $n = K$ ).

Definition:

(1) Die  $n \cdot K$  Koeffizienten  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq K$  eines lin. GLS bilden die Koeffizientenmatrix  $A$  des lin. GLS; das ist ein rechteckiges Zahlenschema mit  $n$  Zeilen und  $K$  Spalten, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nK} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}}$$

$\uparrow$   $i$  heißt Zeilenindex ( $1 \leq i \leq n$ )  
 $j$  heißt Spaltenindex ( $1 \leq j \leq K$ )

(2) Die  $K$  Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_K$  bilden den Vektor der Unbekannten, nämlich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix}$$

(Ein solcher Vektor  $\vec{x}$  kann auch als Matrix mit  $K$  Zeilen und 1 Spalte interpretiert werden)

③ Die  $n$  Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bilden den Vektor der rechten Seite,  
nämlich

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

(Ein solcher Vektor  $\vec{b}$  kann auch als Matrix mit  $n$  Zeilen und 1 Spalte  
interpretiert werden)

Beispiel: 
$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

## 21 Vorlesung 21 (30.11.2020)

**21.1 Rechenoperationen für Vektoren**

**21.2 Definition: Linearkombination/Gewichtete Summe**

**21.3 Definition: Vektorraum**

**21.4 Einführung in Gauß-Algorithmus (Rücksubstitution)**

Lineare Gleichungssysteme in Gleichungen mit  $k$  Unbekannten ( $n \leq k$ )Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 0 \cdot x_1 + 2x_2 - x_3 + 0 \cdot x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{Vektor der Unbekannten} \\ \text{Vektor der rechten Seite} \end{matrix}$$

$$\rightarrow \underline{\text{Koeffizientenmatrix}} \quad A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 4} \quad \begin{matrix} 3 \text{ Gleichungen} \\ 4 \text{ Unbekannte} \end{matrix}$$

Warum heißt so ein Gleichungssystem linear?

1. Antwort: Die Unbekannten  $x_1, x_2, \dots, x_k$  (im Beispiel  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) kommen linear, d.h. als Faktoren in 1. Potenz darin vor!

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$\begin{matrix} \uparrow x_1 \\ \uparrow x_2 \\ \uparrow x_3 \\ \uparrow x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow x_1 \\ \uparrow x_2 \\ \uparrow x_3 \\ \uparrow x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow x_1 \\ \uparrow x_2 \\ \uparrow x_3 \\ \uparrow x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \uparrow x_1 \\ \uparrow x_2 \\ \uparrow x_3 \\ \uparrow x_4 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{1. Potenz} \\ \text{nicht als z.B. } x_2^2 \text{ oder } \sqrt{x_2} \text{ usw.} \end{matrix}$$

2. Antwort:  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$  ist Lösung von  $2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 = 0$ ,

dann gilt: Auch  $s \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} s x_1 \\ s x_2 \\ s x_3 \\ s x_4 \end{pmatrix}$  für  $s \in \mathbb{R}$  ist Lösung dieser Gleichung,

$$\text{dann } 2 \cdot (s \cdot x_1) - (s \cdot x_2) + 5(s \cdot x_3) + (s \cdot x_4) = s \cdot \underbrace{(2x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4)}_{=0} = s \cdot 0 = 0.$$

Wenn  $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix}$  eine weitere Lösung ist, d.h. es gilt  $2u_1 - u_2 + 5u_3 + u_4 = 0$ ,

dann ist auch  $\vec{x} + \vec{u} = \begin{pmatrix} x_1 + u_1 \\ x_2 + u_2 \\ x_3 + u_3 \\ x_4 + u_4 \end{pmatrix}$  eine Lösung dieser Gleichung, denn

$$2(x_1+u_1) - (x_2+u_2) + 5(x_3+u_3) + (x_4+u_4) =$$

$$\underbrace{(2x_1-x_2+5x_3+x_4)}_{=0} + \underbrace{(2u_1-u_2+5u_3+u_4)}_{=0} = 0$$

Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Matrizen und Vektoren,

Rechenoperationen für diese Matrizen und Vektoren

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1K}x_K = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2K}x_K = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nK}x_K = b_n \end{array} \right\}$$

Gegeben:  $a_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq K$   
und  $b_i, 1 \leq i \leq n$   
Result:  $x_j, 1 \leq j \leq K$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nK} \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Koeffizientenmatrix (rechteckiges Zeilenschema)} \\ \text{mit } n \text{ Zeilen und } K \text{ Spalten} \end{array}$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Vektor der Unbekannten} \\ \text{(eine Spalte mit } K \text{ Zahlen} \stackrel{\triangle}{=} \text{Matrix mit } K \text{ Zeilen und 1 Spalte)} \end{array}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \leftarrow \begin{array}{l} \text{Vektor der rechten Seite} \\ \text{(eine Spalte mit } n \text{ Zahlen} \stackrel{\triangle}{=} \text{Matrix mit } n \text{ Zeilen und 1 Spalte)} \end{array}$$

Rechenoperationen für Vektoren

1) Für einen Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$  mit m Komponenten (m Zeilen, 1 Spalte)

und  $s \in \mathbb{R}$  ist definiert:  $s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ s \cdot a_m \end{pmatrix}$

2) Für zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$  mit m Komponenten (für Beisp. !)

Ist  $\vec{a} + \vec{b}$  definiert:  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}$

Beispiel:

$$\textcircled{1} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow 5 \cdot \vec{a} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{3} \cdot \vec{a} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4 \\ 2+1 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} \quad \text{[nicht definiert, denn } \vec{a} \text{ hat 3 Komponenten, } \vec{b} \text{ hat jedoch 4 Komponenten]}$$

Bemerkung:

1) Falls  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  beide m Komponenten haben, ist auch  $\vec{a} - \vec{b}$  definiert durch  $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{b}$ , z.B. mit  $m = 3$

$$\begin{aligned} \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{direkt rechnet man:} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Komponentenweise} \\ \text{subtrahieren!} \end{array} \right\} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \\ -b_3 \end{pmatrix}}_{\text{Komponentenweise subtrahieren!}} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 + (-b_1) \\ a_2 + (-b_2) \\ a_3 + (-b_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2) Definition:

Gegeben sind die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$  mit jeweils m Komponenten,

außerdem sind gegeben N reelle Zahlen  $s_1, s_2, \dots, s_N \in \mathbb{R}$ . Dann ist

die Linearkombination der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$  mit Koeffizienten  $s_1, s_2, \dots, s_N$  gegeben durch

$$\sum_{i=1}^N s_i \cdot \vec{a}_i = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + \dots + s_N \vec{a}_N$$

Statt Linearkombination sagt man auch gewichtete Summe der Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_N$

mit Gewichten  $s_1, s_2, \dots, s_n$ .

Beispiel:  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}, s_1 = 2, s_2 = -1, s_3 = 5$

Die Linearkombination von  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  mit Koeffizienten  $s_1, s_2, s_3$  ist

$$\sum_{i=1}^3 s_i \cdot \vec{a}_i = s_1 \vec{a}_1 + s_2 \vec{a}_2 + s_3 \vec{a}_3 \\ = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 4 - 30 \\ 6 - 5 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -28 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Da wir bei  $s \cdot \vec{a}$  und  $\vec{a} + \vec{b}$  Komponentenweise rechnen, d.h.

in jeder Komponente Rechenoperationen im  $\mathbb{R}$  (also mit reellen Zahlen) ausführen, übertragen sich folgende Rechenregeln für reelle Zahlen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad \text{Kommutativgesetz} \\ \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} \quad \text{Assoziativgesetz} \\ \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}, \quad \vec{0} \text{ ist der Vektor mit allen} \\ \text{Komponenten } = 0 \quad \text{Existenz eines neutralen} \\ \text{Elements der Addition} \\ \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{a} + (-1) \cdot \vec{a} = \vec{0}, \quad \text{Existenz von } -\vec{a}, \text{ dem inversen Element zu } \vec{a} \\ \text{bezüglich der Addition} \end{array} \right.$$

Die Menge der Vektoren mit m Komponenten ist bezüglich der Addition Gruppe sogar eine abelsche, d.h. kommutative, Gruppe

Für die Multiplikation mit reellen Zahlen gilt:

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \cdot \vec{b}) \\ (s+t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a} \\ t \cdot (s \cdot \vec{a}) = (t \cdot s) \cdot \vec{a} = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = s(t \cdot \vec{a}) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{"Distributivgesetze"} \\ \forall s, t \in \mathbb{R} \\ \vec{a}, \vec{b} \text{ Vektoren} \\ \text{mit m Kompo-} \\ \text{nenten} \end{array}$$

Definition:

Eine Menge  $V$  von Objekten, für die eine Addition  $+$  erklärt ist, so dass  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist und für die eine Multiplikation mit

reellen Zahlen  $s$  erklärt ist, die den Regeln (\*) genügt, nennt man einen Vektorraum, die Elemente von  $V$  heißen Vektoren.

Beispiel:  $V = \left\{ \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m \right\}$  mit

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix} \text{ und } s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ sa_m \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

Ist ein Vektorraum.

4) Rechenoperation für Matrizen und Vektoren: Produkt „Matrix mal Vektor“

Definition:

Gegben ist eine Matrix  $A$  mit  $n$  Zeilen und  $k$  Spalten und ein Vektor  $\vec{v}$  mit  $k$  Komponenten (d.h. Spaltenanzahl der Matrix = Komponentenzahl des Vektors), dann und nur dann ist das Produkt  $A \cdot \vec{v}$  definiert durch:

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1k}v_k \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2k}v_k \\ \vdots \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nk}v_k \end{pmatrix}$$

$A \cdot \vec{v}$  ist damit ein Vektor mit  $n$  Komponenten.

Beispiel:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$2) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ \text{nicht definiert} \end{pmatrix}$$

$$3) \quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1K}x_K = b_1$$

$$\rightarrow a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2K}x_K = b_2 \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nK}x_K = b_n$$

$$\left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nK} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme: Gauß-Algorithmus

Beispiel:  $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Gauß-Algorithmus ist ein zweistufiger Algorithmus, er besteht aus

1. Stufe: Vorwärtelimination

2. Stufe: Rücksubstitution

basiert auf zwei Erkenntnissen in Gauß, nämlich

2. Stufe: Es gibt lineare Gleichungssysteme, die durch Rücksubstitution (Rückwärtseinsetzen) lösbar sind, nämlich z.B.

System mit  
Dreiecks-  
gestalt

$$\left. \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_2 + 5x_3 = 5 \\ 3x_3 = 6 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \right)$$

Hauptdiagonale

Lösen durch Rücksubstitution

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 4 & 3x_1 &= 4 - 2x_2 + x_3 = 4 - 2 \cdot (-5) + 2 = 16 \Rightarrow x_1 = \frac{16}{3} \\ x_2 + 5x_3 &= 5 & x_2 &= 5 - 5 \cdot x_3 = 5 - 5 \cdot 2 = -5 \\ 3x_3 &= 6 & x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Lösung } \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{3} \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \frac{16}{3} + 2 \cdot (-5) - 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot \frac{16}{3} + 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 2 \\ 0 \cdot \frac{16}{3} + 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

für morgen:

$$2x_1 + x_2 - x_3 = \lambda$$

$$2x_2 + 5x_3 = 10$$

? Kann man dafür durch

Rücksubstitution Lösungen finden?

## 22 Vorlesung 22 (01.12.2020)

### 22.1 Gauß-Algorithmus

## Lösung linearer Gleichungssysteme

→ Gauß-Algorithmus

1. Stufe: Vorwärtselimination  $\xrightarrow{④ \leftarrow ②}$

2. Stufe: Rücksubstitution  $\xleftarrow{①}$

### ① Rücksubstitution

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen; Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten

a) Lineares GLS in „Dreiecksform“ ist durch Rücksubstitution lösbar

$$\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_3 = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 1 - 3x_2 - x_3 = 1 - 13 - \frac{1}{3} = -12 - \frac{1}{3} = -\frac{37}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{37}{6} \\ x_2 = 4 + x_3 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{13}{3} \\ x_3 = \frac{1}{3} \end{array}$$

Hauptdiagonale

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{37}{6} \\ \frac{13}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\}$$

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen; Anzahl Zeilen < Anzahl Spalten

b) Lineares GLS in „Trapezform“ ist durch Rücksubstitution lösbar

mit Hilfe freier Parameter

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 + 5x_3 = 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x_1 = 1 - x_2 + x_3 = 1 - 5 + \frac{5}{2}t + t = -4 + \frac{7}{2}t \Rightarrow x_1 = -2 + \frac{7}{4}t \\ x_2 = 10 - 5x_3 = 10 - 5t \Rightarrow x_2 = 5 - \frac{5}{2}t \end{array}$$

1 freier Parameter

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen abhängig vom Parameter  $t \in \mathbb{R}$  (für jedes  $t$  gibt es eine zulässige Lösung)  $\Rightarrow$

Lösungsmenge:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{4}t \\ 5 - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2 + \frac{7}{4}t \\ 5 - \frac{5}{2}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

## Offene Fragen:

- 1) Wie kommt man von einem allg. linearen GLS zu einem System in Dreiecks- oder Trapezform mit derselben Lösungsmenge?
- 2) Wie kann man entscheiden, ob für die Lösungsmenge  $L$  eines linearen GLS gilt:  
 $L = \emptyset$  oder  $L = \{\vec{a}\}$  oder  $L = \{\vec{s}_1\vec{a} + \vec{s}_2\vec{a} + \dots | s_1, s_2, \dots \in \mathbb{R}\}$
- Keine Lösung      genau eine Lösung      unendlich viele Lösungen

→ Antworten liefern

## (2) Vorwärtelimination

Jedes lineare GLS kann durch (mehrmaliges) Anwenden elementarer Umformungen (das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern) ein System in Dreiecks- oder Trapezform überführt werden.

Dieses System hat die selbe Lösungsmenge, die dann durch Rück-substitution berechnet werden kann.

### Elementare Umformungen sind

① Vertauschen von Gleichungen → Vertauschen von Zeilen in der Koeffizientenmatrix + Vektor der rechten Seite

② Multiplikation von Gleichungen mit reellen Faktoren  $s \neq 0$  → Multiplikation einer Zeile in der Koeffizientenmatrix + Komponente im Vektor der rechten Seite mit  $s \neq 0$

③ Bilden sog. Linear-Kombinationen von Gleichungen, d.h. Ersetzen der  $i$ -ten Gleichung durch den  $s$ -fachen dieser  $i$ -ten Gleichung ( $s \neq 0$ ) plus dem  $t$ -fachen einer anderen  $k$ -ten Gleichung des geg. linearen GLS → Ersätzen der  $i$ -ten Zeile/ $i$ -ten Komponente der rechten Seite durch das  $s$ -fache dieser  $i$ -ten Zeile +  $t$ -fache Komponente der rechten Seite ( $s \neq 0$ ) plus dem  $t$ -fachen ( $t \neq 0$ ) einer anderen  $k$ -ten Zeile +  $k$ -ten Komponente der rechten Seite

Ziel: Durch Anwendung von ①, ②, ③ ein System in Dreiecks-/Trapezform zu erzeugen!

Repr.

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\
 2x_2 - x_3 = 0 \\
 x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = -2
 \end{array} \right\} \quad \text{Koeffizientenmatrix} \\
 + \text{Gauß-Schema} \quad \left| \begin{array}{cccc|c}
 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & -5 & -2
 \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l}
 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\
 2x_2 - x_3 = 0 \\
 -8x_2 + 2x_3 + 14x_4 = 7
 \end{array} \right\} \quad \left| \begin{array}{cccc|c}
 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\
 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -8 & -2 & 14 & 7
 \end{array} \right. \\
 \left. \begin{array}{l}
 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\
 2x_2 - x_3 = 0 \\
 -6x_3 + 14x_4 = 7
 \end{array} \right\} \quad \text{Ende der Vorrätselimination: System in Triangularform}
 \end{array}$$

Rechtsseitentafel

$$-6x_3 + 14x_4 = 7 \quad \leftarrow \text{frees Parameter } x_4 = t$$

$$\Rightarrow -6x_3 = 7 - 14t \Rightarrow x_3 = -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t$$

$$2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$$

$$\Rightarrow x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t$$

$$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$$

$$3x_1 = 1 + 5x_2 - x_3 + x_4$$

$$= 1 - \frac{35}{12} + \frac{35}{6}t + \frac{7}{6} - \frac{7}{3}t + t$$

$$= \frac{12 - 35 + 14}{12} + \frac{35 - 14 + 6}{6}t$$

$$= -\frac{9}{12} + \frac{27}{6}t \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{12} + \frac{9}{6}t$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t$$

Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t \\ -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t \\ -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{7}{12} \\ -\frac{7}{6} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{7}{6} \\ \frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Warum verändern die elementaren Umformungen die Lösungsmenge nicht?

① Vertauschen von Gleichungen ✓

② Multiplikation mit  $s \neq 0$ :

$$\begin{cases} x_1, \dots, x_n \text{ löst } a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \leftarrow i\text{-te Gleichung} \\ s \neq 0 \end{cases} \rightarrow s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) = s \cdot b_i \\ = a_{i1}(sx_1) + a_{i2}(sx_2) + \dots + a_{in}(sx_n) = s \cdot b_i$$

d.h. Wenn  $x_1, \dots, x_n$  Lösung der  $i$ -ten Gleichung ist, löst  $sx_1, \dots, sx_n$  diese  $i$ -te Gleichung mit rechter Seite  $s \cdot b_i$

$\Gamma$   $s=0$  erzeugt aus  $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i$  die wahre aber nutzlose Aussage  $0 = 0$   $\perp$

③ Linear-Kombination

$$\begin{array}{l} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i \leftarrow i\text{-te Gleichung} \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jn}x_n = b_j \leftarrow j\text{-te Gleichung} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} x_1, x_2, \dots, x_n \\ \text{4 Lösungen} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n) + t \cdot (a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n) = sb_i + tb_j$$

$$\begin{cases} s \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases} \quad \left( \begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{matrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Beispiel:  $x + y + z = 1$   $\left. \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right\}$  für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  ist dieses  
 $-3x + 2y - z = 2$  lineare GLS lösbar?  
 $-5x + 5y - z = \alpha \leftarrow \alpha \in \mathbb{R}$  2) Für diese(s)  $\alpha$  Lösungsmenge bestimmen

Gauß-Schema

| $x$ | $y$ | $z$ |                         |                  |
|-----|-----|-----|-------------------------|------------------|
| 1   | 1   | 1   | 1                       | $1 \cdot 3$      |
| -3  | 2   | -1  | 2                       | $4 \leftarrow +$ |
| -5  | 5   | -1  | $\alpha \leftarrow$     |                  |
| 1   | 1   | 1   | 1                       |                  |
| 0   | 5   | 2   | 5                       | $1 \cdot (-2)$   |
| 0   | 10  | 4   | $5 + \alpha \leftarrow$ | $\downarrow$     |

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \end{array} \right| \quad \text{Ende der Vorwärtseliminierung}$$

$L = \emptyset$  falls  $\alpha \neq 5$  ist, dann in der letzten Gleichung steht

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \alpha - 5$$

für  $\alpha \neq 5$  ist  $\alpha - 5 \neq 0$  jedoch  $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ !

für  $\alpha = 5$  haben wir

$$\left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right| \quad \text{Trapezform}$$

$x = 1 - y - z = 1 - 1 + \frac{2}{5}t - t \Rightarrow x = \frac{-3}{5}t$   
 $z = t$ ,  $5y = 5 - 2t \Rightarrow$   
 $y = 1 - \frac{2}{5}t$

ist immer wahr  $\rightarrow$

$$L(\alpha=5) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}t \\ 1 - \frac{3}{5}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}, \quad L(\alpha \neq 5) = \emptyset$$

## 23 Vorlesung 23 (02.12.2020)

- 23.1 Zusammenfassung lösen von LGS / Gauß-Algorithmus
- 23.2 Definition Rang von Matrizen und linearen Gleichungssystemen
- 23.3 Folgerungen aus Lösungstheorie (spezielle Lösung, allgemeine Lösung)
- 23.4 in-/homogene lineare Gleichungssysteme und deren Lösungsstruktur
- 23.5 Beispiele spezielle/allgemeine Lösungen

Zusammenfassung Lineare Gleichungssysteme,  $n$  Gleichungen,  $k$  Unbekannte,  $n \leq k$

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{array} \right\} \quad \sum_{j=1}^k a_{ij}x_j = b_i; 1 \leq i \leq n$$

$$\left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right)$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Gauß-Schema zur Lösung

$$\underline{\underline{A}} = \left| \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_k & | & b_1 \\ \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & | & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & | & b_n \end{array} \right| \rightarrow \vec{b}$$

Vorwärtselimination

Lösung startet mit Vorwärtselimination.

Ziel: Mit elementaren Umformungen

wird das System überführt in ein neues System mit derselben Lösungsmenge; das neue System hat Dreiecks- bzw. Trapez- form

Auf Ende der Vorwärtselimination kann man eindeutig entscheiden, ob das System keine Lösung hat ( $L = \emptyset$ ) oder genau eine Lösung hat ( $L = \{\vec{x}_0\}$ ) oder unendlich viele Lösungen mit  $s$  freien Parametern  $t_1, t_2, \dots, t_s$  ( $L = \{\vec{x}_0 + \sum_{i=1}^s t_i \vec{x}_i \mid t_i \in \mathbb{R}\}$ ):

Es gilt:

- 1)  $L = \emptyset$  falls  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) \neq \text{rg}(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$
- 2)  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = \text{rg}(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) \Rightarrow$  Gleichungssystem ist lösbar mit  $s = k - \text{rg}(\underline{\underline{A}})$  freien Parametern  $t_1, t_2, \dots, t_s$  in der Lösung

( $k \triangleq$  Anzahl der Unbekannten)

Falls  $L \neq \emptyset$  ist, berechnet man die Lösung durch Rücksubstitution

$$\underline{\underline{A}} = \left| \begin{array}{ccccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1k} & | & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2k} & | & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nk} & | & \tilde{b}_n \end{array} \right|$$

Ende der Vorwärtselimination

Definition:

- 1) Der Rang der Matrix  $\underline{\underline{A}}$  ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen von  $\underline{\underline{A}}$  am Ende der Vorwärtselimination.

Nicht-Nullzeile  $\triangleq$  Elemente der Zeile sind nicht alle gleich Null!

- 2) Der erweiterte Rang des lin. GLS

ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen im Kompletten Gauß-Schema

$\underline{\underline{A}}|\vec{b}$  am Ende der Vorwärtselimination,

- 3) Für den Rang von  $\underline{\underline{A}}$  schreibt man  $\text{rg}(\underline{\underline{A}})$ ; für den erweiterten Rang schreibt man  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$

mit  $\tilde{A}$  und  $\tilde{b}$  am Ende der Vorwärtselimination!

Beispiel (siehe 22. Vorlesung),  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ -5x + 5y - z &= \alpha \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{Gauß-Schema}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\tilde{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} x & y & z & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ -3 & 2 & -1 & 2 & \\ -5 & 5 & -1 & \alpha & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} | \cdot 3 | \cdot 5 \\ \downarrow + \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & 4 & \alpha + 5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Vorwärtselim.} \\ \text{mit elementaren} \\ \text{Umformungen} \end{array}$$
  

$$\tilde{A} = \left\{ \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 5 & \end{array} \right\} \quad \tilde{b}$$

Ende der Vorwärtselimination

$\text{rg}(\tilde{A}) = 2$  denn  $\tilde{A}$  hat 2 Null-Nullzeilen

$\text{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = 2$ , wenn  $\alpha = 5$  ist, dann hat  $\tilde{A}|\tilde{b}$  2 Null-Nullzeilen

$\text{rg}(\tilde{A}|\tilde{b}) = 3$ , wenn  $\alpha \neq 5$  ist, dann ist  $\alpha - 5 \neq 0$  und  $\tilde{A}|\tilde{b}$  hat 3 Null-Nullzeilen

Also: Das GLS ist lösbar für  $\alpha = 5$ , für  $\alpha \neq 5$  gilt  $\text{IL} = \emptyset$ .

Für  $\alpha = 5$  gibt es unendlich viele Lösungen mit  $3 - 2 = 1$  freien  
K=3, Anzahl der Unbek.

$$\text{rg}(\tilde{A})$$

Parameter, man erhält mit  $\alpha = 5$  am Ende der Vorwärtselimination

$$\begin{array}{c|ccc|c} x & y & z & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & \\ 0 & 5 & 2 & 5 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow x = 1 - y - z = \frac{2}{5}t - t = -\frac{3}{5}t \\ \uparrow \text{ zum Start der Rücksubstitution} \\ \text{setze } z = t \leftarrow 1 \text{ freier Parameter} \end{array}$$

$$5y = 5 - 2t \Rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}t$$

$$\Rightarrow \text{IL}(\alpha = 5) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}t \\ 1 - \frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\hookrightarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

## Folgerungen aus der Lösungstheorie

1) Gegeben ist  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ; ein lineares GLS mit n Gleichungen für K Unbekannte  $n \leq K$ , es gilt immer:

$$\text{rg}(\underline{A}) \leq n \Rightarrow \text{Anzahl freier Parameter } s = K - \text{rg}(\underline{A}) \geq K - n \geq 0$$

$s=0$  (also kein freier Parameter) und damit eindeutige Lösbarkeit

erreicht man nur, wenn  $K=n=\text{rg}(\underline{A})$  ist, d.h. Anzahl Gleichungen

muß gleich der Anzahl der Unbekanntes sein und  $\text{rg}(\underline{A})$  muss maximal also auch gleich n sein! In allen anderen Fällen ist entweder  $\mathbb{L} = \emptyset$  oder  $\mathbb{L}$  hat unendlich viele Elemente mit s freien Parametern!

$$2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_n} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Behauptung:  $\vec{x}_n$  löst  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , d.h.  $\underline{A} \cdot \vec{x}_n = \vec{b}$ , denn:

$$\underline{A} \cdot \vec{x}_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \\ -5 \cdot 0 + 5 \cdot 1 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\vec{x}_n = t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist die allgemeine Lösung von  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ , denn

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow[\text{Gauß-Schema}]{\quad} \underbrace{\underline{A} = \left\{ \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ -5 & 5 & -1 & 0 \end{array} \right.}_{\begin{array}{l} 1 \cdot 3 \rightarrow 1 \\ \downarrow + \\ 1 \cdot 5 \end{array}} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad \vec{b} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rg}(\underline{A}) = 2$$

$$\text{rg}(\underline{A}|\vec{b}) = \text{rg}(\underline{A}|\vec{0}) = 2$$

System lösbar mit

1 = 3-2 freien

Parametern

$$\underbrace{\underline{A} = \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right.}_{\begin{array}{l} \uparrow \text{ zum Start der Zeilensubstitution} \\ z = t \end{array}} \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \rightarrow x = -y - z = \frac{2}{5}t - t = \frac{3}{5}t$$

$$z = t \Rightarrow y = -\frac{2}{5}t$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{5}t \\ -\frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{2}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Definition: Gegeben ist ein lineares GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ,  $n$  Gleichungen mit  $K$  Unbekannten ( $n \leq K$ ).

- 1) Falls  $\vec{b} = \vec{0}$ , also  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ , ist, spricht man von **homogenen linearen Gleichungssystemen**
- 2) Falls  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , also mindestens ein  $b_i \neq 0$  ( $1 \leq i \leq n$ ), ist, spricht man von **inhomogenen linearen Gleichungssystemen**
- 3) Wenn man ein inhomogenes lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ,  $\vec{b} \neq \vec{0}$ , hat, ist  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$  das **zugehörige homogene lineare GLS**.

Es gilt folgender

Satz: (Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme)

- 1) Ein homogenes lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$  hat immer mindestens eine Lösung, nämlich  $\vec{x} = \vec{0}$  ( $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_K = 0$ )
- 2) Ist bei einem homogenen lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$   $s = K - \text{rg}(\underline{A}) \neq 0$ , dann hat man Lösungen mit  $s$  freien Parametern  $t_1, t_2, \dots, t_s$ . Die Lösungsmenge ist

$$L_h = \left\{ \vec{x}_h = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \dots + t_s \vec{x}_s \mid t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq s \right\}$$

$\vec{x}_h = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \dots + t_s \vec{x}_s$  nennt man auch die **allgemeine Lösung** des homogenen lin. GLS.

- 3) Das inhomogene lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$  ist nur lösbar, wenn  $\text{rg}(\underline{A}) = \text{rg}(\underline{A}|\vec{b})$  ist. Ist  $s = K - \text{rg}(\underline{A}) > 0$ , dann hat man Lösungen mit  $s$  freien Parametern, die Lösungsmenge hat die Form

$$L = \left\{ \vec{x}_p + \underbrace{t_1 \vec{x}_1 + \dots + t_s \vec{x}_s}_{\vec{x}_h} \mid t_1, t_2, \dots, t_s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dabei gilt:  $\vec{x}_h$  ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$  und  $\vec{x}_p$  ist eine spezielle/partikuläre

Lösung des inhomogenen GLS, also gilt  $\underline{A} \cdot \vec{x}_p = \vec{b}$ .

Beispiel:

1)  $2x + y - z = 4 \quad \leftarrow \underbrace{n=1 \text{ Gleichung für } k=3 \text{ Unbekannte}}_{\text{Lsg. GLS mit } n \text{ Gleichungen für } k \text{ Unbekannte } n \leq k}$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}$$

zum Start der Rücksubstitution setze  $z = t_1, y = t_2$

2 freie Parameter

$$2x = 4 - y + z = 4 - t_2 + t_1 \Rightarrow x = 2 - \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_1$$

$$\operatorname{rg}(\underline{A}) = 1, \operatorname{rg}(\underline{A} | \vec{b}) = 1$$

$\Rightarrow$  System lösbar mit

$3-1=2$  freien Parametern

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 - \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_1 \\ t_2 \\ t_1 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_n} + t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_n}$$

2)  $5x - 6y + z = 1$

$$-x + 2y - z = 2$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 5 & -6 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ \hline 5 & -6 & 1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\substack{7+ \\ 1 \cdot 5}} \begin{array}{ccc|c} & & & \\ & & & \\ & & & \\ 0 & 4 & -4 & 11 \end{array} \xrightarrow{\substack{z = t, y = \frac{11}{4} + t \\ 5x = 1 + 6y - z}}$$

$$\operatorname{rg}(\underline{A}) = \operatorname{rg}(\underline{A} | \vec{b}) = 2$$

Lösungen mit  $3-2=1$  freien Parametern

$$5x = 1 + \frac{33}{2} + 6t - t = \frac{35}{2} + 5t$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{2} + t$$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{7}{2} + t \\ \frac{11}{4} + t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

## 24 Vorlesung 24 (07.12.2020)

24.1 Zusammenfassung LGS: Lösen, Lösungsstruktur

24.2 Vektoren und Vektorräume: Rechenoperationen, Pfeile

2. edX-Test Mittwoch 16.12 (12:00 Uhr) bis Donnerstag 17.12. (18:00 Uhr)

4 Aufgaben, 60 Minuten Bearbeitungszeit ab Start des Tests!

### Bemerkungen und Beispiele zu linearen Gleichungssystemen

1) Ablauf: a) Vorwärtselimination überführt das System in Dreiecks-/Trapezform (Zeilenstufenform)

b) System lösbar, wenn  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = \text{rg}(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$ , sonst  $\text{IL} = \emptyset$

c) Bei Lösbarkeit: Anzahl Unbekannte -  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = s \neq 0$   
 $\Rightarrow$  Rücksubstitution mit  $s$  freien Parametern (nur mit freien Parametern läuft die Rücksubstitution).

Anzahl Unbekannte -  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = 0 \Rightarrow$

Lösung eindeutig (Rücksubstitution läuft ohne free Parameter)

2) Beispiel:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2 \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 7 \\ 5x_1 + 15x_2 + 2x_3 = \alpha \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \begin{matrix} 1 & 3 & 4 & | & 2 \\ 2 & 6 & 5 & | & 7 \\ 5 & 15 & 2 & | & \alpha \end{matrix} \\ \underbrace{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{x}}}_{\vec{x}} = \underbrace{\vec{b}}_{\vec{b}} \end{array} \right\}$$

Gauß-Schema

$$\begin{array}{r|ccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 3 & 4 & | & 2 \\ 2 & 6 & 5 & | & 7 \\ 5 & 15 & 2 & | & \alpha \end{array} \quad \begin{array}{l} 1 \cdot (-2) \\ + \\ \hline 1 & 0 & -3 & | & 3 \\ 0 & 0 & -10 & | & \alpha - 10 \\ \hline 1 & 0 & -3 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & \alpha - 20 \end{array}$$

$\rightarrow \text{rg}(\underline{\underline{A}}) = 2 = \text{rg}(\underline{\underline{A}} | \vec{b})$  nur für  $\alpha = 20$

$\Rightarrow$  System nur lösbar für  $\alpha = 20$ , sonst  $\text{IL} = \emptyset$ .

Für  $\alpha = 28$  gilt

$$\begin{array}{c|ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 2 & \\ 0 & 0 & -3 & 3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

erst hier freie Variablen notwendig  $x_2 = t$

$$x_1 = 2 - 3x_2 - 4x_3 = 2 - 3t + 4 \Rightarrow x_1 = 6 - 3t$$

$$-3x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = -1$$

$$\Rightarrow \text{Für } \alpha = 28 \text{ hat man } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 6-3t \\ t \\ -1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

### 3) Struktur der Lösungsmenge eines lin. GLS.

Zur Beispield bei 2) hat man für  $\alpha = 28$ :

$$\mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_s} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_n} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\vec{x} \in \mathbb{L}$  hat also die Darstellung  $\vec{x} = \vec{x}_s + \vec{x}_n$ , dabei gilt folgende Behauptung:  $\vec{x}_s$  ist eine (sogenannte spezielle) Lösung des inhomogenen Systems  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ , d.h. also  $\underline{A} \cdot \vec{x}_s = \vec{b}$

$\vec{x}_n$  ist die allgemeine Lösung (mit freien Parametern) des zugehörigen homogenen Systems  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Beweis:

a) Durch Nachrechnen

$$\underline{A} \cdot \vec{x}_s = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 5 \\ 5 & 15 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 28 \end{pmatrix} \text{ für } \alpha = 28$$

b) Für  $\vec{b} = \vec{0}$  (rechte Seite nur Nullen) endet das Gauß-Schema zur Vorwärtselimination bei

$$\begin{array}{c|ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & & \\ \hline 1 & 3 & 4 & 0 & \rightarrow x_2 = t, x_1 = -3t \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \rightarrow x_3 = 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \left\{ t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{x}_n \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Allgemein:  $\text{rg}(\underline{A}) = \text{rg}(\underline{A}|\vec{b})$ ,  $l = \text{Anzahl Unbekannte} - \text{rg}(\underline{A}) \neq 0$

$\Rightarrow$  Lösungen mit  $l$  freien Parametern  $t_1, t_2, \dots, t_l$

$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x}_s + \underbrace{t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \dots + t_l \vec{x}_l}_{= \vec{x}_n} \mid t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq l \right\}$$

Es gilt:  $\underline{A} \cdot \vec{x}_s = \vec{b} \Leftarrow \vec{x}_s$  ist eine spezielle Lösung des gegebenen lin. GLS

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \vec{x}_h = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \dots + t_s \vec{x}_s \mid t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq s \right\}$$

Ist die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ,  $\vec{x}_h$  heißt allgemeine Lösung des homogenen lin. GLS.

4) a) Für zwei verschiedene Lösungen des homogenen lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ ,

also  $\vec{x}_{h_1} = t_1 \vec{x}_1 + t_2 \vec{x}_2 + \dots + t_s \vec{x}_s$  und  $\vec{x}_{h_2} = \tilde{t}_1 \vec{x}_1 + \tilde{t}_2 \vec{x}_2 + \dots + \tilde{t}_s \vec{x}_s$

gilt:

Auch jede Linear-Kombination  $\alpha \cdot \vec{x}_{h_1} + \beta \cdot \vec{x}_{h_2}$  löst  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

b)  $\vec{x}_1$  löst das inhom. lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x}_1 = \vec{b}_1$  } Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$   
identisch, rechte Seiten  
 $\vec{x}_2$  löst das inhom. lin. GLS  $\underline{A} \cdot \vec{x}_2 = \vec{b}_2$  } verschieden  $\vec{b}_1 \neq \vec{b}_2$

Jede Linear-Kombination  $\alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2$  löst  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \alpha \vec{b}_1 + \beta \vec{b}_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

## Vektoren und Vektorräume

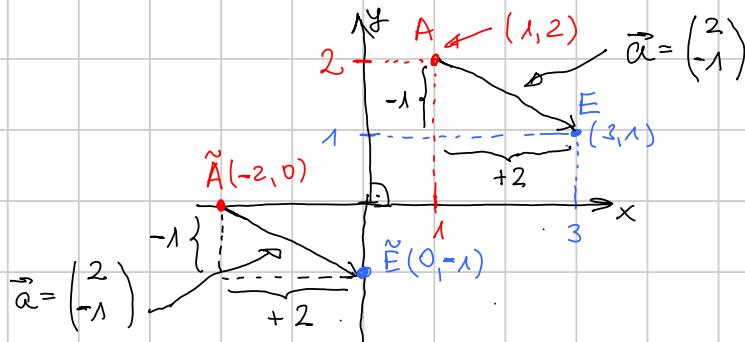
1)  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, a_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \Leftarrow$  Vektor mit  $n$  Komponenten

2 Rechenoperationen  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$  } Komponentenweise definierte Rechenoperationen

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \\ \vdots \\ s a_n \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

2) Spezialfälle  $n = 2, n = 3$

c)  $n = 2$   $\rightarrow$  Koordinatensystem mit 2 Achsen ( $x$ -Achse/ $y$ -Achse) orthogonal zueinander definiert Punkte in der Zahlenebene



$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$

2 Punkte im  $\mathbb{R}^2$ , nämlich  $A(1,2)$  und  $E(3,1)$  definieren

den gerichteten Pfeil  $\vec{AE}$  mit Anfangspunkt  $A$  und Endpunkt  $E$ .

$$P = \{ \vec{AE} \mid A, E \text{ Punkte im } \mathbb{R}^2 \}$$

$$R \subseteq P \times P = \{ (\vec{AE}_1, \vec{AE}_2) \mid \boxed{x_{E_1} - x_{A_1} = x_{E_2} - x_{A_2}} \wedge \boxed{y_{E_1} - y_{A_1} = y_{E_2} - y_{A_2}} \}$$

$\uparrow$   $R$  ist eine Äquivalenzrelation auf  $P \times P$ .

zum Beispiel:  $\vec{AE}_1 = \vec{AE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_{E_1} - x_{A_1} = 3 - 1 = 2}$   
 $\boxed{y_{E_1} - y_{A_1} = 1 - 2 = -1}$

$$\vec{AE}_2 = \vec{A'E'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x_{E_2} - x_{A_2} = 0 - (-2) = 2}$$
  
 $\boxed{y_{E_2} - y_{A_2} = -1 - 0 = -1}$

$(\vec{AE}, \vec{AE}) \in R$  oder  $\vec{AE}$  ist äquivalent zu  $\vec{AE}$ .

Ein Vektor

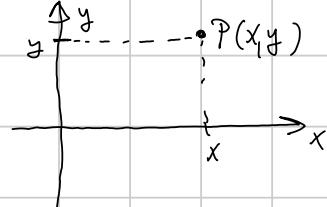
$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  ist eine Äquivalenzklasse dieser

Äquivalenzrelation  $R$ , d.h. der Vektor  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$  repräsentiert  
alle Pfeile  $\vec{AE}$  mit  $x_E - x_A = a_1$  und  $y_E - y_A = a_2$ .

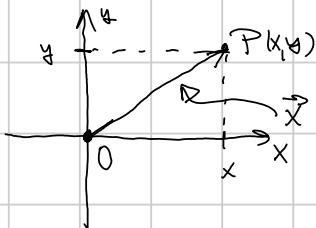
Die äquivalenten Pfeile sind parallel zueinander, gleichgerichtet und  
gleich lang!

Die Menge  $\mathbb{R}^2$  (Zahlenebene) kann man aus zwei gleichwertigen Sichten  
betrachten, nämlich a) Punktesicht

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\}$$



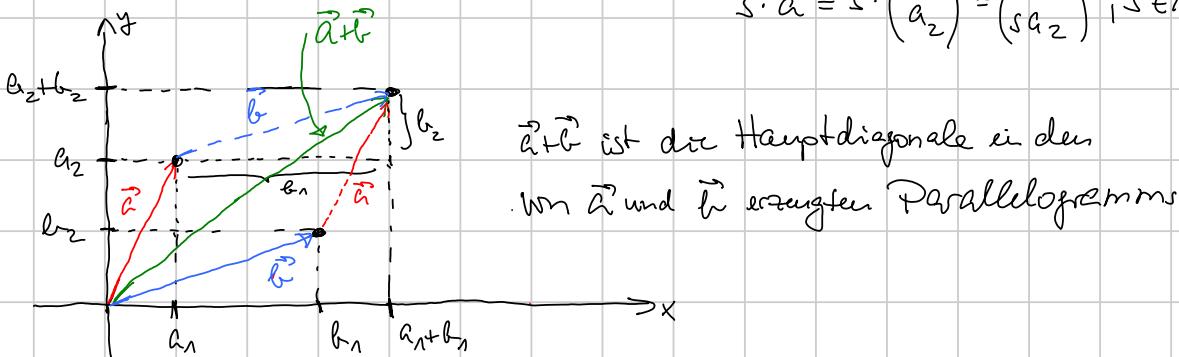
### b) Vektorschritt:



O Koordinatenursprung  $O(0,0)$ , Pfeil  $\overrightarrow{OP}$  wird  
repräsentiert durch den Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow$   
 $\mathbb{R}^2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\rightarrow \text{Rechenoperationen}, \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$



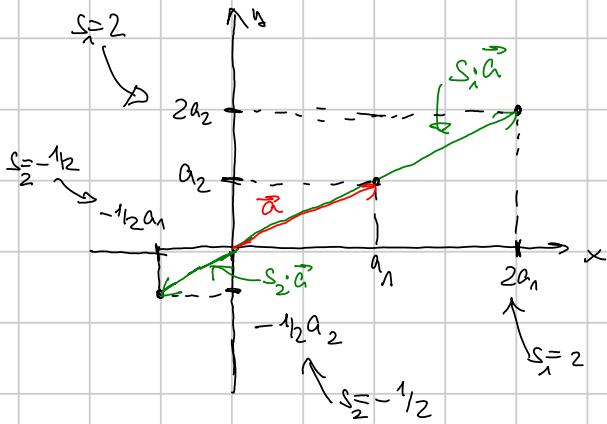
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow s \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} s \cdot a_1 \\ s \cdot a_2 \end{pmatrix}$$

$s > 0$  Richtung bleibt erhalten

$s < 0$  Richtung kehrt um

$|s| > 1$  Streckung des Pfeils

$|s| < 1$  Stauchung des Pfeils



## 25 Vorlesung 25 (08.12.2020)

**25.1 Äquivalenz von Pfeilen, Punkte und Vektorsicht**

**25.2 Rechenregeln von Vektoren**

**25.3 Definition: Vektorraum**

**25.4 Definition: Erzeugendensystem, linear unabhängig, Basis eines Vektorraums**

Vektoren: In  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir Pfeile  $\vec{AE}$  vom Anfangspunkt A zum Endpunkt E.

Zwei Pfeile  $\vec{A_1E_1}$  und  $\vec{A_2E_2}$  sind äquivalent, wenn gilt:

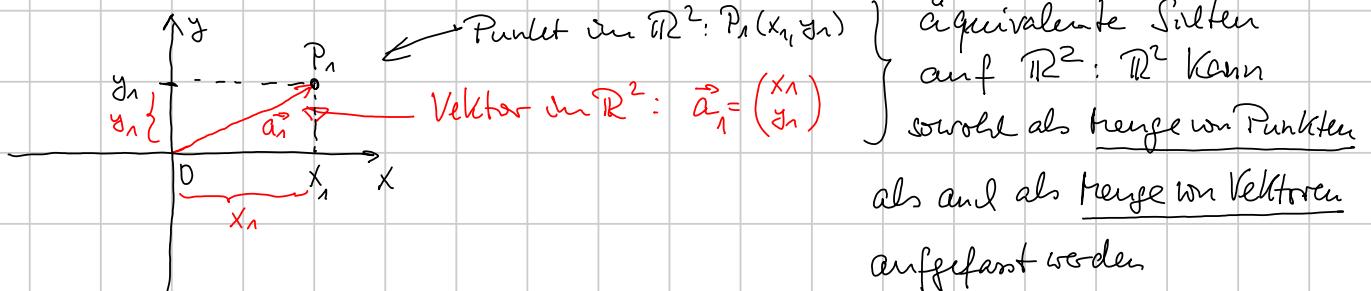
$$\begin{aligned} x_{E_1} - x_{A_1} &= x_{E_2} - x_{A_2} \\ y_{E_1} - y_{A_1} &= y_{E_2} - y_{A_2} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \text{in } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\}$$

$$z_{E_1} - z_{A_1} = z_{E_2} - z_{A_2}$$

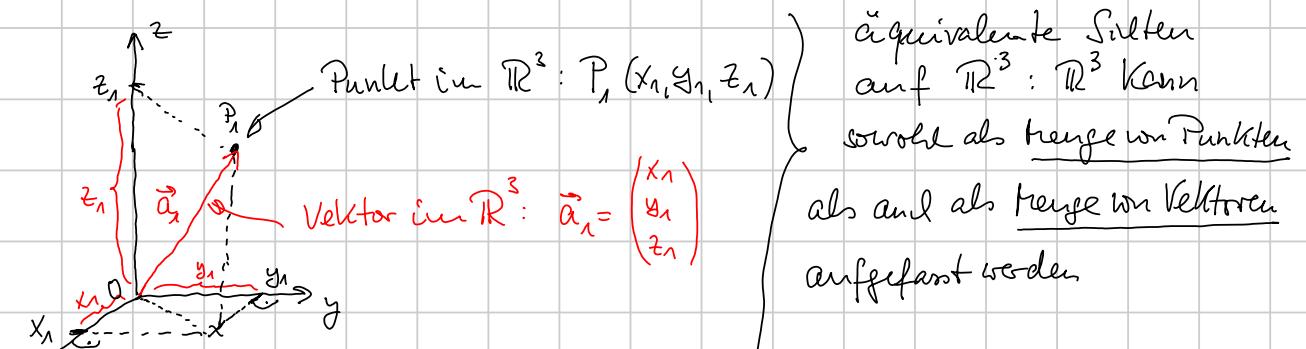
Ein Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^2$  bzw.  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  in  $\mathbb{R}^3$

Ist die Äquivalenzklasse aller Pfeile  $\vec{AE}$  mit

$$\begin{aligned} x_E - x_A &= a_1 \\ y_E - y_A &= a_2 \\ z_E - z_A &= a_3 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \text{in } \mathbb{R}^3 \end{array} \right\}$$



$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$$



$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \right\}$$

$n > 3$  → Keine Anschauung mehr für Punkte und Pfeile aber abstrakt  
gilt das analog, also:

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\} \leftarrow \text{Punktmengen}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\} \leftarrow \text{Vektormenge}$

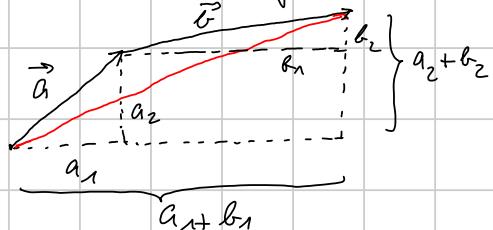
## Rechenoperationen für Vektoren

### a) Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$  entstanden aus

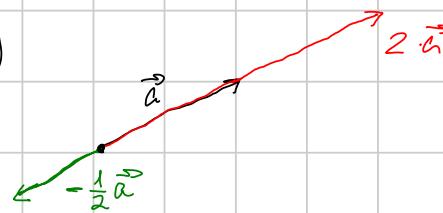
"Hintereinanderhängen von Pfeilen"



### b) Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sa_1 \\ sa_2 \\ \vdots \\ san \end{pmatrix}$$

im  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$  entstanden aus "Streckung / Stauchung mit / ohne Richtungsgehalt von Pfeilen"



Da bei Addition und Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$  im  $\mathbb{R}^n$  Komponentenweise gerechnet wird, übertragen sich Rechengesetze aus  $\mathbb{R}$ , nämlich

#### a) in Bezug auf die Addition

Assoziativgesetz  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$

Kommutativgesetz  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

Existenz eines neutralen Elements  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \longrightarrow \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0 \text{ für } 1 \leq i \leq n$

Existenz eines inversen Elements  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \longrightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

$(\mathbb{R}^n, +)$  ist eine abelsche (kommutative) Gruppe

#### b) in Bezug auf die Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

$(*) \quad s \cdot (t \cdot \vec{a}) = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = t \cdot (s \cdot \vec{a}), \forall t \in \mathbb{R}$

$s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \cdot \vec{b}), (s+t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \cdot \vec{a}$

speziell:  $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Allgemein definiert man

### Definition:

Geschen ist eine Menge  $V$  mit einer Addition und einer Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$ . Wenn  $(V, +)$  eine abelsche Gruppe ist und bezüglich der Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$  die Regeln (\*) gelten, sagt man

$V$  ist ein (reeller) Vektorraum oder auch  $V$  ist ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ .

Die Elemente von  $V$  nennt man Vektoren (dieses Vektorraums)

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$  sind reelle Vektorräume!

### Bemerkung und Beispiel

1) Gegeben ist das homogene lin. GLS

$$\begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ -6x + 3y - 3z = 0 \\ -x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{c} \underbrace{\mathbf{A}}_{= \text{Matrix}} : \quad \underbrace{\vec{x}}_{=} = \underbrace{\vec{0}}_{=} \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{rg } \mathbf{A} = 1 \\ 2 = 3 - 1 \\ \text{freie Parameter werden benötigt} \end{array} \right\} \left| \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & -1 & +1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Lösung: } \begin{array}{l} | \cdot 3 \quad | \cdot (+\frac{1}{2}) \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 1 \quad 1 \end{array} \\ \text{2 freie Parameter} \\ z = t, y = s \\ 2x = y - z = s - t \\ x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \end{array}$$

$$L_h = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Behauptung:  $L_h$  mit der üblichen Vektoraddition und der

Multiplication mit  $r \in \mathbb{R}$  ist ein Vektorraum, d.h. für zwei

Lösungen  $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in L_h$  gilt  $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in L_h$  und für  $\vec{x}_1 \in L_h$  und

$r \in \mathbb{R}$  gilt  $r \cdot \vec{x}_1 \in L_h$  (siehe 24. Vorlesung 4b) !

$$2) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}; \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + a_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$  hat eine 1 in der  $i$ -ten Komponente, alle anderen Komponenten sind 0!

Daraus gewinnt man folgende Begriffe

### Definition:

Geschen ist ein Vektorraum  $V$ .

(1) Die Menge  $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$  heißt Erzeugendensystem von  $V$ , falls gilt

für jeden Vektor  $\vec{a} \in V$  gibt es reelle Zahlen  $t_i \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq i \leq n$  mit

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n t_i \vec{v}_i = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_n \vec{v}_n$$

Beispiel:  $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$  ist ein Erzeugendensystem,

dann für  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  gilt:  $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$

(2) Die Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n \in V$  heißen linear unabhängig, falls gilt

$$\vec{0} = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_n \vec{v}_n \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_n = 0$$

d.h. die einzige Möglichkeit mit den Vektoren  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  den Nullvektor  $\vec{0}$  zu erzeugen, besteht darin alle Koeffizienten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  gleich 0 zu setzen!

Vektoren die nicht linear unabhängig sind, heißen linear abhängig.

### Bemerkung + Beispiel:

a)  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  sind linear

unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t_1 \vec{e}_1 + t_2 \vec{e}_2 + t_3 \vec{e}_3 = t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 0$$

b)  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  sind linear unabhängig falls das homogene  
lineare Gleichungssystem für die Unbekannte  $t_1, t_2, \dots, t_k$   
gegeben durch  $t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k = \vec{0}$   
nur die Lösung  $t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_k = 0$  hat!

③ Die Menge  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq V$  heißt Basis des Vektorraums  $V$ , falls gilt:  $B$  ist ein Erzeugendensystem und die Vektoren in  $B$  sind linear unabhängig.

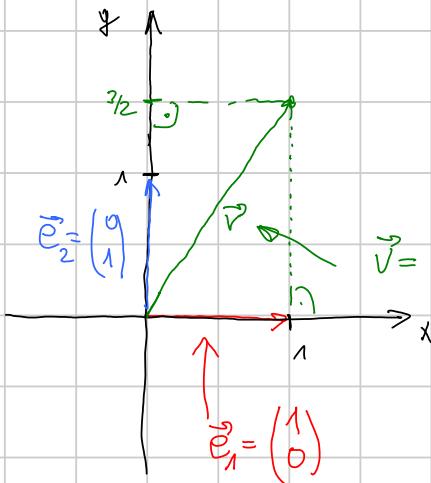
Beispiel:  $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$  ist eine Basis des  $\mathbb{R}^3$ ,  
man nennt diese Basis die Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ .

$B = \{\vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n\} \subseteq \mathbb{R}^n$  ist die Standardbasis des  $\mathbb{R}^n$ .

Beispiele:

①

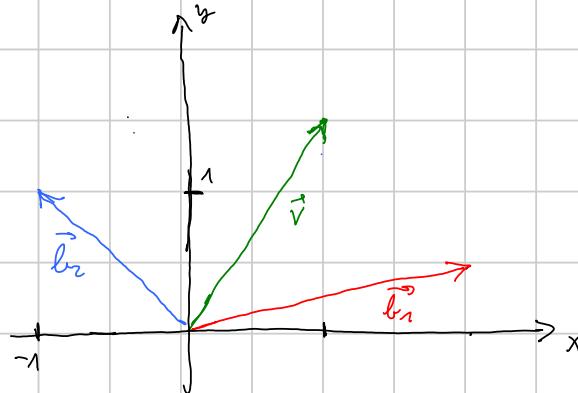
$\mathbb{R}^2$



Man sagt: Die Standardbasis  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  spannt das Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^2$  auf.

Behauptung:  $B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \right\}$

ist ebenfalls eine Basis des  $\mathbb{R}^2$



Beweis: Zu zeigen ist 1)  $\mathcal{B}$  ist Erzeugendensystem: Für jeden Vektor jedes lin. GLS der Form  $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v} \iff$  mit bel.  $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$  ist das lin. GLS  $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$  lösbar  
eindeutig lösbar

2) Vektoren in  $\mathcal{B}$  sind linear unabhängig:  
Das hom. lineare GLS  $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{0}$  hat nur die Lösung  $t_1=0, t_2=0$

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{dieses Gleichungssystem muss eindeutig lösbar sein!}$$

Diese lin. Gleichungssysteme sind genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt  $\text{rg}(\mathcal{B}) = 2$  ist; die Matrix  $\mathcal{B}$  hat die Vektoren  $\vec{b}_1$  und  $\vec{b}_2$  als Spaltenvektoren)!  $\rightarrow$  Gauß-Scheine

$$\mathcal{B} \left| \begin{array}{cc|c} t_1 & t_2 & \\ \hline 2 & -1 & v_1 \\ 1/2 & 1 & v_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} \cancel{+} \\ | \cdot (-4) \end{array} \rightarrow \left| \begin{array}{cc|c} 2 & -1 & v_1 \\ 0 & -5 & v_1 - 4v_2 \end{array} \right. \begin{array}{l} 2t_1 = v_1 + t_2 = \frac{4}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2} \\ \boxed{t_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2} \end{array}$$

2 Null-Nullzeilen  $\Rightarrow \text{rg}(\mathcal{B}) = 2 \Rightarrow \mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$  bildet eine Basis des  $\mathbb{R}^2$

$$\text{Probe: } \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \left( \frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2 \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \left( -\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2 \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

weiter: morgen P 00 Uhr!

## 26 Vorlesung 26 (09.12.2020)

**26.1 Zusammenfassung: Erzeugendensystem, Basis**

**26.2 Definition: Dimension eines Vektorraums**

**26.3 Definition: Skalarprodukt, Betrag**

**26.4 Bemerkung: Orthonormalbasis**

**26.5 Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag**

**26.6 Einführung: Parameterdarstellung einer Geraden**

Aus der 25. Vorlesung:

$$\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \right\} \text{ Basis des } \mathbb{R}^2$$

↳ jeder Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$  lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h. es gibt

$$t_1, t_2 \in \mathbb{R} \text{ mit } \vec{v} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 \quad \checkmark$$

operativ/zur Berechnung:  $t_1, t_2$  sind Lösungen dieses linearen GLS!

wir hatten berechnet:

$$\underbrace{\left( \frac{2}{5} v_1 + \frac{2}{5} v_2 \right)}_{t_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \underbrace{\left( -\frac{1}{5} v_1 + \frac{4}{5} v_2 \right)}_{t_2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_1 + \cancel{\frac{4}{5} v_2} - \cancel{\frac{4}{5} v_2} \\ \cancel{\frac{1}{5} v_1} - \cancel{\frac{1}{5} v_1} + \frac{1}{5} v_2 + \frac{4}{5} v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Zusammenfassung

$V$  Vektorraum,  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  Basis:

$\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$  sind linear unabhängig

$\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  ist Erzeugendensystem

operativ/rechnerisch

→ das lin. GLS  $t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_n \vec{b}_n = \vec{0}$   
 für die Unbekannten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  hat nur die Lösung  $t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_n = 0$   
 → für jeden Vektor  $\vec{v} \in V$  hat das lin. GLS  $t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_n \vec{b}_n = \vec{v}$  für die Unbekannten  $t_1, t_2, \dots, t_n$  eine Lösung

Bemerkung: Wenn  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$  eine Basis von  $V$  ist, ist die Darstellung  $\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_n \vec{b}_n$  eines Vektors  $\vec{v} \in V$  eindeutig bestimmt.

Durchrechnen: Angenommen  $\vec{v} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \dots + t_n \vec{b}_n$  und

$$\vec{v} = s_1 \vec{b}_1 + s_2 \vec{b}_2 + \dots + s_n \vec{b}_n \Rightarrow \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (t_1 - s_1) \vec{b}_1 + (t_2 - s_2) \vec{b}_2 + \dots + (t_n - s_n) \vec{b}_n$$

$\mathcal{B}$  Basis  $\Rightarrow$  es gibt nur die Lösung  $t_1 - s_1 = 0, t_2 - s_2 = 0, \dots, t_n - s_n = 0$

also  $t_1 = s_1, t_2 = s_2, \dots, t_n = s_n$ .

### Definition:

Gegaben ist ein Vektorraum  $V$ . Die Dimension von  $V$  ist die Anzahl der Basisvektoren von  $V$ , man schreibt dafür  $\dim(V) = \text{Anzahl Basisvektoren}$

### Bemerkung:

$$\mathbb{R}^2, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \dim(\mathbb{R}^2) = 2$$

$$\mathbb{R}^3, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \rightarrow \dim(\mathbb{R}^3) = 3$$

$$\mathbb{R}^n, B = \left\{ \vec{e}_i \mid 1 \leq i \leq n \right\} \rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$$

$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{nur } i\text{-te Komponente gleich 1}$$

### Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ / speziell in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

#### Definition:

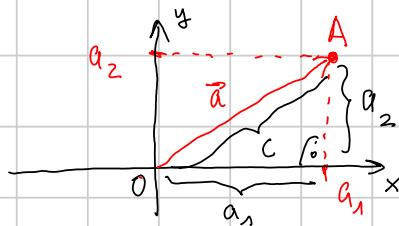
1) Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ist das Skalarprodukt definiert

$$\text{als } \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$$

2) Für  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$  ist der Betrag von  $\vec{a}$  definiert als

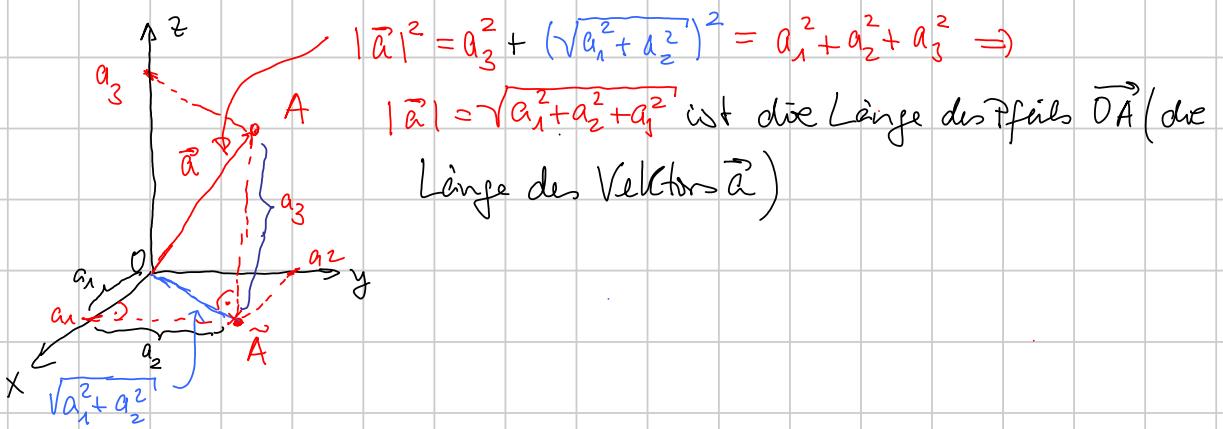
$$|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}$$

Im  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  haben Skalarprodukt und Betrag eine direkte geometrische Bedeutung, nämlich:



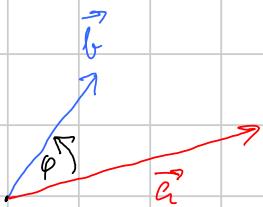
$\vec{a}$  repräsentiert den Pfeil  $\vec{OA}$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$  ist die Länge des Vektors (man sagt auch einfache Länge des Vektors): Nach Pythagoras gilt  $a_1^2 + a_2^2 = c^2 \Rightarrow c = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$



$|\vec{a}|^2 = a_1^2 + (\sqrt{a_1^2 + a_2^2})^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \Rightarrow$   
 $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$  ist die Länge des Vektors  $\vec{OA}$  (die Länge des Vektors  $\vec{a}$ )

$\varphi$  ist der Winkel zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit  $0^\circ \leq \varphi \leq \pi$  ( $0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$ ), dann gilt:



$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ für } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^{(3)} \setminus \{ \vec{0} \}$$

als Verallgemeinerung sagt man: Auch in  $\mathbb{R}^n$  gibt es den Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  mit

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ für } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{ \vec{0} \}$$

Beispiele:

$$1) \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

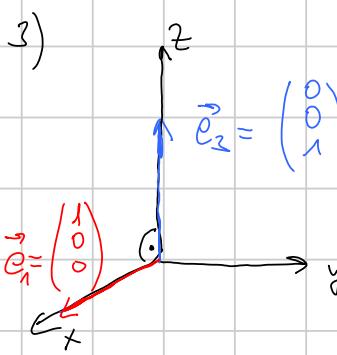
$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -3$$

$$2) \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 5$$

3) 

Winkel  $\varphi$  zwischen  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_3$  ist  $90^\circ$  ( $\frac{\pi}{2}$  im Bogenmaß), es gilt  $\cos(90^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  also muss  $\frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \cos(\varphi) = 0$  sein!

Wor holen:  $|\vec{e}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$   
 $|\vec{e}_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

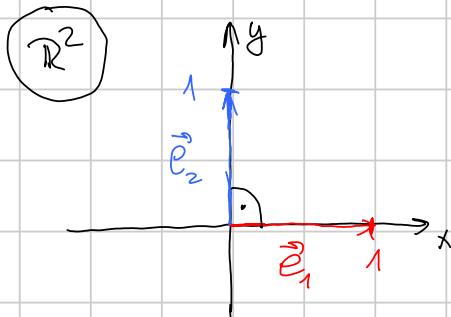
$$\Rightarrow \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \checkmark$$

Bemerkung:

- 1) Eine Basis  $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$  des  $\mathbb{R}^n$  heißt orthonormal Basis, wenn gilt: Alle Basisvektoren haben Betrag 1, also  $|\vec{b}_i| = 1$  für  $1 \leq i \leq n$ , und sie erfüllen  $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0$  für  $1 \leq i, j \leq n$  mit  $i \neq j$  (man sagt dann auch  $\vec{b}_i$  steht senkrecht/ist orthogonal auf  $\vec{b}_j$ )
- 2) Die Standardbasis  $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  des  $\mathbb{R}^n$  mit

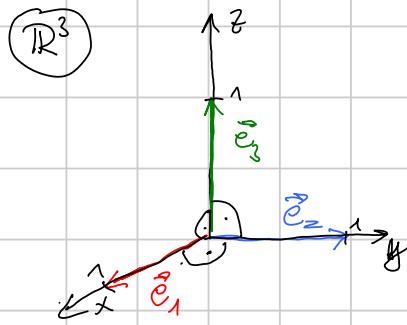
$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ + nur } i\text{-te Komponente 1, alle anderen Komponenten 0}$$

Ist eine Orthonormalbasis! Speziell



$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$$



$$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0, \langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0, \langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0$$

## Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag

→ Rechnen mit Vektoren (also Vektoraddition und die Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$ )

Es gilt:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

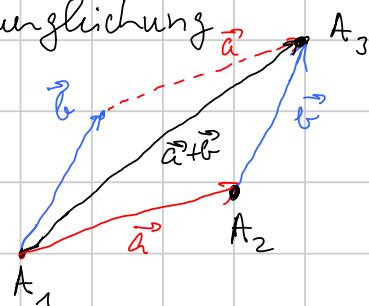
(1) \*  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$  Kommutativgesetz für das Skalarprodukt

(2) \*  $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$  Distributivgesetz für das Skalarprodukt

(3)  $\langle s \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = s \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, s \cdot \vec{b} \rangle$  für  $s \in \mathbb{R}$

(4)  $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$  Dreiecksungleichung

(5)  $|s \cdot \vec{a}| = |s| \cdot |\vec{a}|$



$|\overrightarrow{A_1 A_3}| = |\vec{a} + \vec{b}|$  & Länge der Strecke von  
A<sub>1</sub> nach A<sub>3</sub>

$$|\overrightarrow{A_1 A_3}| \leq |\overrightarrow{A_1 A_2}| + |\overrightarrow{A_2 A_3}|$$

\* Beweisidee zu diesen Regeln: Kommutativgesetz in  $\mathbb{R}$

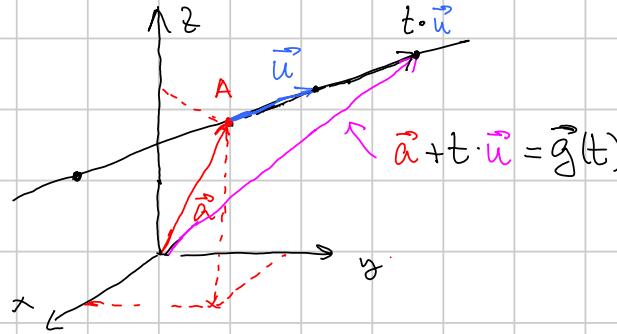
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i) \xrightarrow{\text{Kommutativgesetz in } \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (b_i \cdot a_i) = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle &= \sum_{i=1}^n a_i \cdot (b_i + c_i) \xrightarrow{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{R}} \sum_{i=1}^n (a_i \cdot b_i + a_i \cdot c_i) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i \right) + \left( \sum_{i=1}^n a_i \cdot c_i \right) \\ &= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \end{aligned}$$

## Weitere geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$

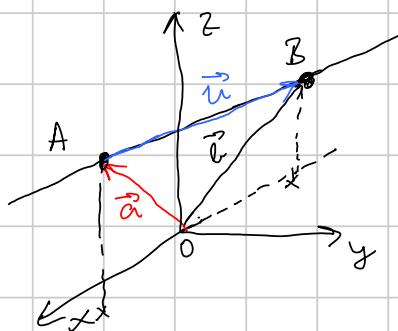
1) Parameterdarstellung einer Geraden im  $\mathbb{R}^3$

$\vec{a}$  Aufpunktvektor    }     $\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$ ,  $t \in \mathbb{R}$  heißt Parameterdarstellung  
 $\vec{u}$  Richtungsvektor    }     $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$     Stellung der Geraden



Beispiel: Zwei Punkte  $A(a_1, a_2, a_3)$  und  $B(b_1, b_2, b_3)$  im  $\mathbb{R}^3$  bestimmen genau eine Gerade; gezeigt ist eine Parameterdarstellung dieser Geraden

MERKE: Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig!

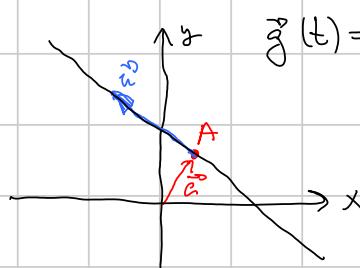


$$\text{Aufpunkt: } A \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Bildungsvektor: } \vec{u} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

2) Im  $\mathbb{R}^2$



$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u} \text{ mit } \vec{a}, \vec{u} \in \mathbb{R}^2$$

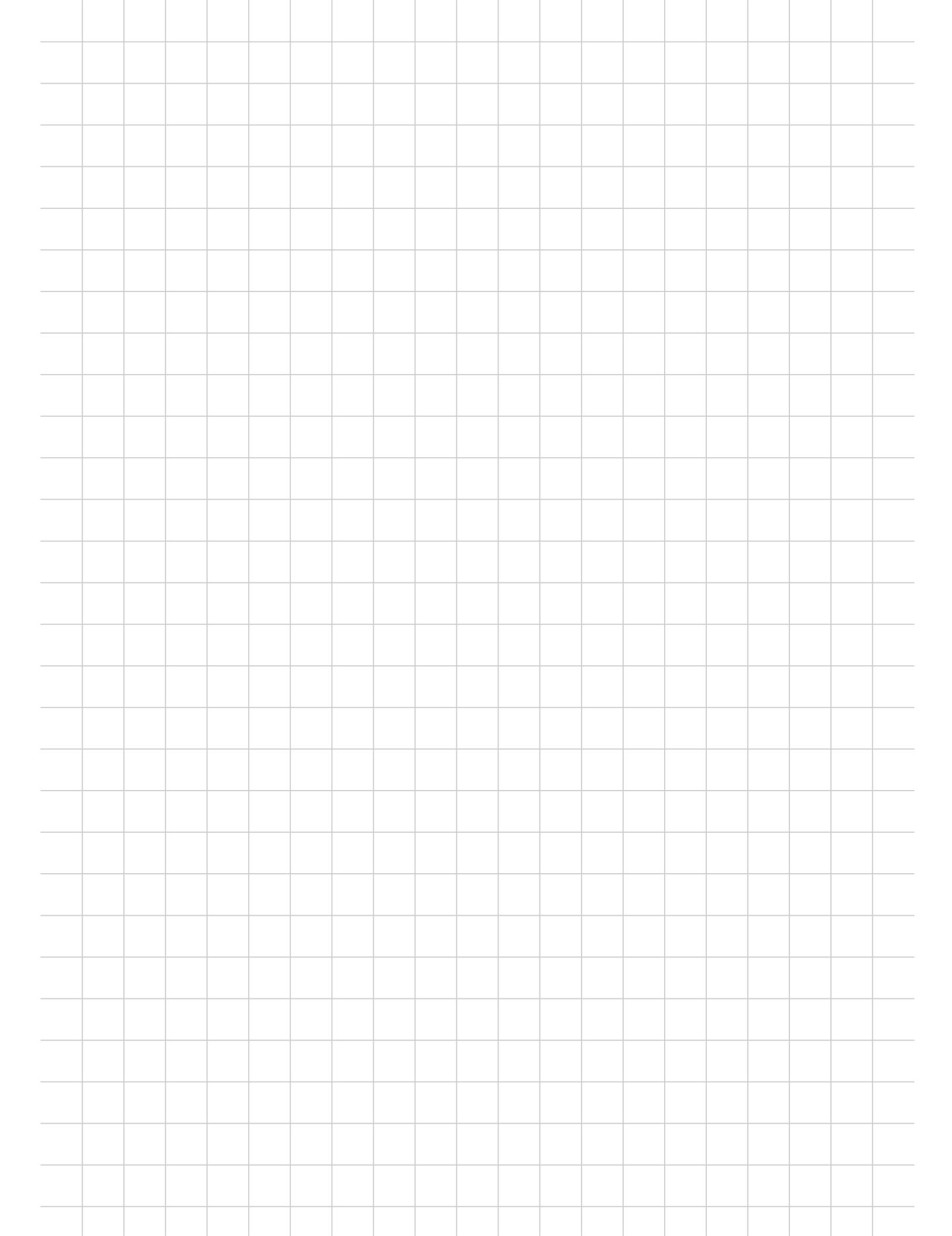
"gewöhnliche Koordinatendarstellung" einer Geraden in  $\mathbb{R}^2$  ist  $y = ax + b$ .

Welche Parameterdarstellung gehört zu dieser Geraden? Konkret:  $y = -\frac{1}{2}x + 3$

$$\begin{aligned} y &= t & \frac{1}{2}x + y &= 3 \quad \text{lön. Gls für } a \\ & \downarrow & \frac{1}{2}x &= 3 - t & \text{die Unbekannten } x \text{ und } y: 2 \text{ Unbek.,} \\ & & x &= 6 - 2t & 1 \text{ Gleichung: Lösung mit } 2-1=1 \\ & & & & \text{freiem Parameter} \end{aligned}$$

$$\text{Lösungsmenge: } \left\{ \begin{array}{l} \vec{r} = \begin{pmatrix} 6-2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

$$\vec{r}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u} \quad \left\{ \begin{array}{l} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$



## 27 Vorlesung 27 (14.12.2020)

**27.1 Parameterdarstellung: Gerade & Ebene**

**27.2 Orthogonalität von Vektoren/Ebenen**

**27.3 Definition: Vektorprodukt**

**27.4 Definition: Normalenvektor, Normaleneinheitsvektor**

## Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Gerade:  $\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u}, t \in \mathbb{R}$  ← Parameterdarstellung der Gerade

↑  
 Richtungsvektor  
 ↓  
 Aufpunkt(vektor)

Beispiel:

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

Welcher der Punkte  $P_1(2, 5, 6)$  und  $P_2(4, -1, 6)$  liegt auf dieser Geraden?

$P_i$  ( $i=1,2$ ) liegt auf der Geraden, falls es  $t_i \in \mathbb{R}$  gibt mit  $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \vec{g}(t_i)$  für  $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ,

a) Gesucht  $t \in \mathbb{R}$  mit  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (\*)

↓  
 ↓  
 ↓

insgesamt  $P_1$  liegt nicht auf der Geraden

$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ also insbesondere } -t = 1 \Rightarrow t = -1 \end{array} \right.$

dann ist aber  $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$  ↗

(\*) ist für kein  $t \in \mathbb{R}$  erfüllbar

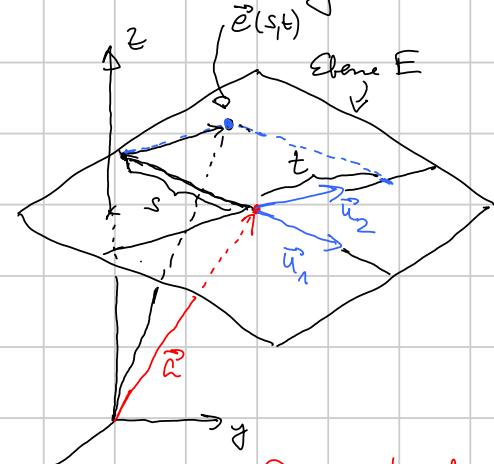
b) Gesucht  $t \in \mathbb{R}$  mit  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  (\*\*)

für  $t = -3$  ist (\*\*) erfüllt,  
d.h.  $P_2$  liegt auf der Geraden

$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ also insbesondere } -t = 3 \Rightarrow t = -3$

und  $(-3) \cdot 1 = -3, (-3) \cdot (-1) = 3 \Rightarrow (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

## Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$



Aufpunktvektor  $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^3$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^3$  Richtungsvektoren

linear unabhängig, d.h.

es gibt kein  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$ ,

$\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  sind keine Vielfache voneinander

dann beschreibt

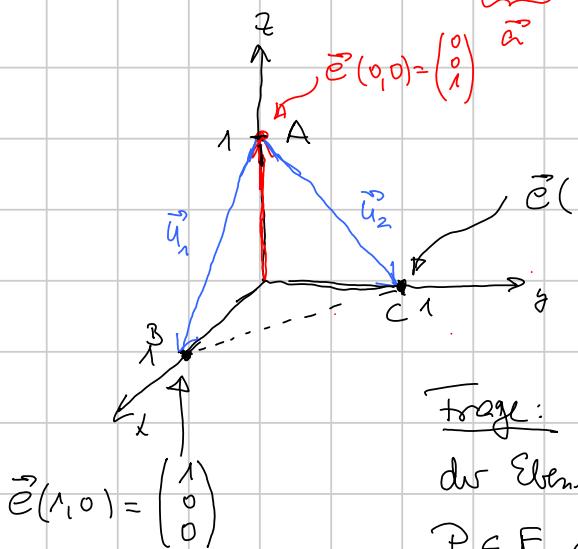
Parameterdarstellung der Ebene

$$\vec{e}(s, t) = \vec{\alpha} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2; s, t \in \mathbb{R}$$

die Ebene E.

Beispiel:

$$\vec{e}(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ebene E enthält} \\ \text{das Dreieck } \Delta(A, B, C) \end{array} \right.$$



Frage: Wann liegt der Punkt  $P(b_1, b_2, b_3)$  auf der Ebene ( $P \in E$ )?

$P \in E \Leftrightarrow$  es gibt  $s, t \in \mathbb{R}$  mit

Korrektur:

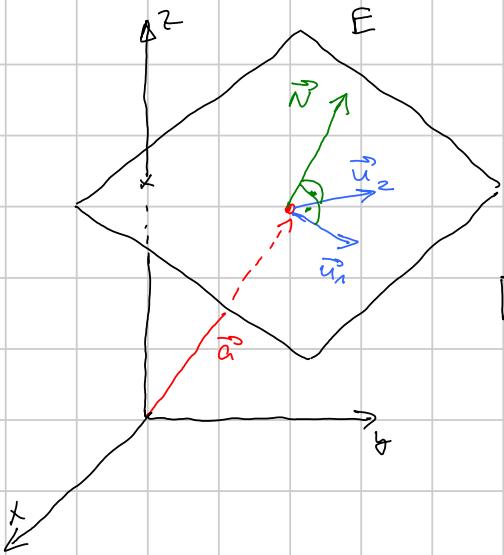
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$  das lin. GLS.

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein!



$$\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$$

$\vec{N}$  steht senkrecht (ist orthogonal) auf der Ebene  $E \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{u}_1$  und  $\vec{N} \perp \vec{u}_2$

$$\lvert \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underbrace{\varphi(\vec{a}, \vec{b})}_{\varphi \leftarrow \text{Winkel zwischen } \vec{a} \text{ und } \vec{b}} = 90^\circ (\frac{\pi}{2})$$

mit dem Skalarprodukt (siehe 26. Vorlesung)

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \varphi = 90^\circ (\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0$$

$$\text{also } 0 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

MERKE: Für  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2)$  mit  $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

gilt  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

Hier:  $\vec{N} \perp \vec{u}_1$  falls gilt:  $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$ ,

$\vec{N} \perp \vec{u}_2$  falls gilt:  $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

↓ gilt nur im  $\mathbb{R}^3$

Definition: (Vektorprodukt im  $\mathbb{R}^3$ )

Für zwei Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  ist das

Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  definiert durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bemerkung: Das Skalarprodukt  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$  liefert mit 2 Vektoren als Input eine reelle Zahl als Output!

Das Vektorprodukt  $\vec{a} \times \vec{b}$  liefert mit 2 Vektoren des  $\mathbb{R}^3$  als Input einen Vektor des  $\mathbb{R}^3$  als Output!

Beispiele:

$$a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 3 \\ -(1 \cdot (-4)) - (-1 \cdot 3) \\ 1 \cdot 3 - (-1) \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) \\ -(-1) \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt allgemein: Das Vektorprodukt ist nicht Kommutativ sondern antikommutativ, d.h. genauer

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 a_3 - a_2 b_3 \\ a_3 b_1 - b_1 a_3 \\ b_1 a_2 - a_1 b_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -(a_2 b_3 - b_2 a_3) \\ -(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ -(a_1 b_2 - b_1 a_2) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

$$= -(\vec{a} \times \vec{b})$$

$$c) \text{ Für } \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ hatten wir } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{Es ist } \langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-17) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = -17 + 17 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\text{Es ist auch } \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = (-1) \cdot (-17) + 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 5 = 20 - 20 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$$

Es gilt allgemein für  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ :  $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$  und  $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

denn:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \text{ also}$$

$$\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

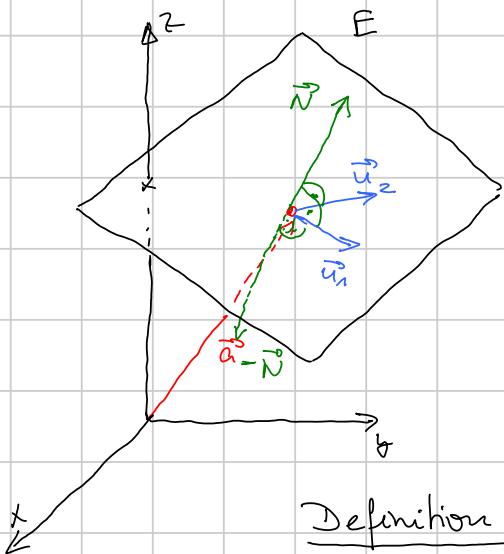
$$= a_1(a_2 b_3 - b_2 a_3) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$= \cancel{a_1 a_2 b_3} - \cancel{a_1 a_3 b_2} + \cancel{a_2 a_3 b_1} - \cancel{a_2 a_1 b_3} + \cancel{a_3 a_1 b_2} - \cancel{a_3 a_2 b_1}$$

$$= 0$$

$$\text{analog erhält man } \langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = 0$$

### Vektorprodukt und Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Ein Kandidat für einen Vektor  $\vec{N}$ , der senkrecht auf der Ebene  $E$  steht mit  
 $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$  ← Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren  
 $-\vec{N} = \vec{u}_2 \times \vec{u}_1$  ist ebenfalls ein Kandidat

#### Definition:

1) Ein Vektor  $\vec{N}$ , der senkrecht auf der Ebene  $E$  steht, heißt Normalenvektor der Ebene  $E$ .

2) Ein Normalenvektor  $\vec{n}$  der Ebene  $E$  mit  $|\vec{n}| = 1$  heißt Normaleneinheitsvektor der Ebene  $E$

3) Wenn  $\vec{N}$  ein Normalenvektor der Ebene  $E$  ist, dann ist

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} \text{ der zugehörige Normaleneinheitsvektor der Ebene } E$$

Beispiel: Für  $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $s,t \in \mathbb{R}$

also die Ebene  $E = \left\{ \vec{e}(s,t) \mid s, t \in \mathbb{R} \right\}$  gilt:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ist ein Normalenvektor}$$

der Ebene E, der zugehörige Normaleneinheitsvektor ist

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 28 Vorlesung 28 (15.12.2020)

- 28.1 Beispiele zur Parameterdarstellung von Ebenen: Punkt auf Ebene, Schnittpunkt Ebene/Gerade**
- 28.2 Eigenschaften/Rechenregeln des Vektorprodukt**
- 28.3 Koordinatendarstellung einer Ebene (Wandlung zu und von Parameterdarstellung)**
- 28.4 Beispiel Koordinatendarstellung einer Ebene -> Schnittpunkt mit Gerade**

Hinweis: a) 16.12. (12:00) - 17.12. (18:00) 2. edX-Test

60 Minuten als Teststart

b) 18.12. „WeihnachtsprobeKlausur“ } so sähe die Klausur aus,  
4 Aufgaben für 120 Minuten (2 Std.) } wenn am 24.12. Klausur wäre

Aus der 27. Vorlesung:

$P \in E \Leftrightarrow$  es gibt  $s, t \in \mathbb{R}$  mit

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$  das lin. GLS. für die Unbekannten  $s, t \in \mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{array}{l} s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

muss lösbar sein!  $\rightarrow$  Was heißt das konkret

$\hookrightarrow$  Gauß-Schema

$$\begin{array}{c|cc|c} & s & t & \\ \hline A & \left\{ \begin{array}{l} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \\ -1 & -1 & b_3 - 1 \end{array} \right. & \left[ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right] + \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{b}} \\ \xrightarrow{\text{b}} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 0 & b_1 \\ & 0 & 1 & b_2 \\ & 0 & -1 & b_3 - 1 + b_1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 + b_1 \end{array} \right] +$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & 1 & 0 & b_1 \\ & 0 & 1 & b_2 \\ & 0 & 0 & b_3 - 1 + b_1 + b_2 \end{array}$$

dieses lin. GLS ist nur  
lösbar, wenn  $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$   
ist (dann gilt  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|\vec{b})$ )

Falls  $b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0$  ist folgt:  $t = b_2, s = b_1$

$$b_1 + b_2 + b_3 - 1 = 0 \Rightarrow 1 - b_1 - b_2 = b_3$$

Probe:  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 - b_1 - b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Rightarrow P(b_1, b_2, b_3) \text{ liegt in } E!$

### Beispiel:

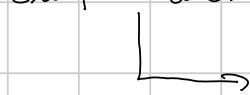
Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

für welches/welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  liegt der Punkt  $P(1, 2, \alpha)$  in der Ebene E?

→ das lin. GLS  $\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}$  für die Unbekannten  $s, t \in \mathbb{R}$   
muss lösbar sein!

Gauß-Schema



$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \alpha - 3 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{cc|c} t & s & \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & \alpha - 3 \end{array} \right| \xrightarrow{\begin{array}{l} 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-4) \\ + \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & \alpha + 1 \end{array}} \xrightarrow{\begin{array}{l} 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 \\ + \\ \hline 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 4\alpha - 1 \end{array}} \quad \begin{array}{l} t = -1 - 2s \\ s = -\frac{1}{4} \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{array}$$

nur lösbar, falls  $4\alpha - 1 = 0$   
ist, d.h.  $\alpha = \frac{1}{4}$

Der Punkt  $P(1, 2, \frac{1}{4})$  liegt in der Ebene E!

Probe:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1/4 \end{pmatrix}$$

### Fortsetzung des Beispiels:

1) Gezeigt ist ein Normaleneinheitsvektor der gegebenen Ebene E

$$\boxed{\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2$  Ebene E

Ein Normaleneinheitsvektor ist  $\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$  mit  $\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$

$$\underbrace{\vec{u}_1 \times \vec{u}_2}_{= \vec{N}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2) \cdot 3 - 0 \cdot 4 \\ 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 \\ 1 \cdot 0 - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad |\vec{N}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{77}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{77}} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2) Zusätzlich gegeben ist die Gerade  $g$  mit Parameterdarstellung

$$\boxed{\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \leftarrow \text{Gerade } g$$

Berechnen Sie (falls vorhanden) den Schnittpunkt S zwischen der Ebene E und der Gerade g!

s, t, u lösen dieses lineare GLS!

Ausatz für Schnittpunkt:  $\vec{e}(s, t) = \vec{g}(u)$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineares GLS  
für die Unbekannten  
 $s, t, u$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc} & t & s & u \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 \\ -2 & 0 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 & -4 \end{array}$$

$$1 \cdot 2 \quad | \cdot (-4) \quad | +$$

$$-1$$

$$+$$

$$\begin{array}{c|ccc} & t & s & u \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & -5 & 3 & 8 \end{array}$$

$$1 \cdot 5 \quad | +$$

$$+$$

$$\begin{array}{c|ccc} & t & s & u \\ \hline 1 & 2 & -1 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}$$

$$1 \cdot 4 \quad | +$$

$$+$$

$$t = -3 - 2s + u = -3 + 2 + 1 \Rightarrow t = 0$$

$$4s = -7 + 3u = -4 \Rightarrow s = -1$$

$$u = 1$$

$$\vec{g}(1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$S(0, 1, 0)$  ist der Schnittpunkt!

Für die Probe:  $s, t$  bestimmen und in Parameterdarstellung der Ebene einsetzen!

$$\vec{e}(s, t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c}(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

## Eigenschaften / Rechenregeln für das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

- 1)  $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$  Anti-Kommutativgesetz
- 2)  $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$  Distributivgesetz
- 3)  $(s \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = s \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (s \cdot \vec{b})$  für  $s \in \mathbb{R}$

Beweis: Einfall nach Definition des Vektorprodukts nachrechnen!

## Koordinatenform der Ebengleichung

Gegeben ist die Ebene E mit Parameterdarstellung

$$\vec{c}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$$

d.h. für jeden Punkt P(x,y,z) in E gibt es  $s, t \in \mathbb{R}$  mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{= \vec{x}} = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2 \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\vec{N} = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix}$  ist ein Normalenvektor der Ebene; für  $\vec{N}$  gilt

$\vec{N} \perp \vec{u}_1$ ; d.h.  $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$  und  $\vec{N} \perp \vec{u}_2$ , d.h.  $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

Wir rednen jetzt

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle + s \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle}_{=0} + t \cdot \underbrace{\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle}_{=0} = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3$$

ingesetzt:  $\vec{x} = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \Rightarrow$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2 \rangle = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

$\downarrow$

$$N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = \underbrace{N_1 \cdot a_1 + N_2 \cdot a_2 + N_3 \cdot a_3}_{=d}$$

$\Rightarrow$  Koordinatendarstellung der Ebene  $\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s\vec{u}_1 + t\vec{u}_2$   
mit

$$N_1 \cdot x + N_2 \cdot y + N_3 \cdot z = d \quad \text{mit } d = \langle \vec{N}, \vec{a} \rangle$$

für einen Normalenvektor  $\vec{N}$  der Ebene E

Fortsetzung des Beispiels:

Parameterdarstellung der Ebene E

$$\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \vec{N} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{N}, \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -6x + 5y + 4z \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} -6x + 5y + 4z = S$$

$$\langle \vec{N}, \vec{a} \rangle = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 + 5 + 12 = 5 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Koordinatendarst. der Ebene E}$$

Frage: Gibt es einen Schnittpunkt dieser Ebene E mit der Geraden g

gegeben durch

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ?$$

für jedes Punkt  $P(x,y,z)$  der Geraden g gilt  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

für ein  $t \in \mathbb{R}$ , also:  $x = 2 - t$ ,  $y = -1 + 2t$ ,  $z = 3 + 2t$ .

Wenn  $P(x,y,z)$  auf der Ebene E gehört (also Schnittpunkt ist), muss gelten  $S = -6x + 5y + 4z = -6 \underbrace{(2-t)}_x + 5 \underbrace{(-1+2t)}_y + 4 \cdot \underbrace{(3+2t)}_z$

$$= -12 + 6t - S + 10t + 12 + 8t = -S + 24t$$

also  $S = -S + 24t \Rightarrow 24t = 10 \Rightarrow t = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$

$$\Rightarrow \text{Schnittpunkt: } \vec{g}\left(\frac{s}{12}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{s}{12} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/12 \\ -2/12 \\ 46/12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15/12 \\ -1/6 \\ 23/6 \end{pmatrix}$$

der Schnittpunkt S ist  $S\left(\frac{15}{12}, -\frac{1}{6}, \frac{23}{6}\right)$ .

Weiteres Beispiel: Gegeben ist eine Ebene E in Koordinatendarstellung

$2x - 3y + 5z = 4$ , Gesucht ist eine Parameterdarstellung dieser Ebene!

$$2x - 3y + 5z = 4 \quad \leftarrow \text{lin. GLS mit 1 Gleichung für 3 Unbekannte}$$

also  $3-1=2$  freie Parameter!

$$2x - 3s + 5t = 4 \quad \leftarrow z = t, y = s$$

$$2x = 4 + 3s - 5t$$

$$x = 2 + \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t$$

$\Rightarrow$  die allg. Lösung dieses lin. GLS liefert die gesuchte Parameterdarstellung, nämlich

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + \frac{3}{2}s - \frac{5}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2} = \vec{e}(s, t)$$

## **29 Vorlesung 29 (16.12.2020)**

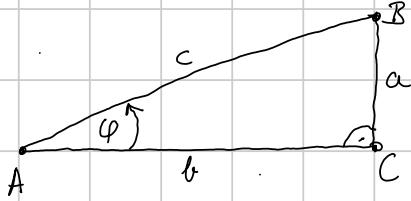
**29.1 Geometrie im rechtwinkligen Dreieck**

**29.2 Skalarprodukt in der Geometrie**

**29.3 Vektorprodukt in der Geometrie (Drei-Finger-Regel)**

## Geometrie und ein zweiter Blick auf Skalarprodukt und Vektorprodukt

### Geometrie im rechtwinkligen Dreieck



a, b Katheten des Dreiecks

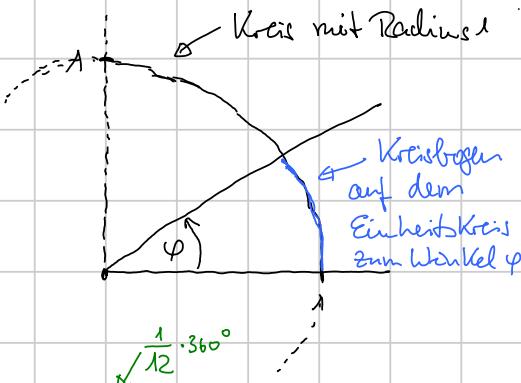
c Hypotenuse

a Gegenkathete zu  $\varphi$

b Ankathete zu  $\varphi$

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegen-Kathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}, \quad \cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

### Werten des Winkels $\varphi$



### Winkelmessung in Grad

$$\text{Vollkreis (Kompletter Kreis)} \stackrel{!}{=} 360^\circ \notin \mathbb{R}$$

Winkel  $\varphi$  erzeugt Kreisausschnitt also einen Bruchteil des Vollkreises z.B.  $\frac{1}{n}$ -tel, dann hat  $\varphi$  die Maßzahl  $\frac{360^\circ}{n} \notin \mathbb{R}$

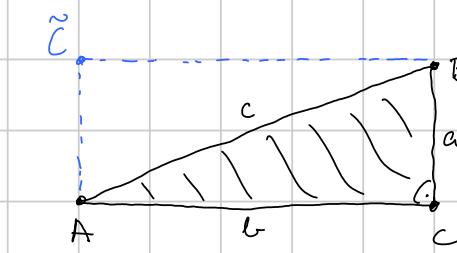
### Winkelmessung im Bogenmaß

Kreis mit Radius 1 hat Umfang  $2\pi \notin \mathbb{R}$

Winkel  $\varphi$  erzeugt Kreisbogen auf dem Umfang, die Maßzahl für den Winkel  $\varphi$  ist die Länge

dieser Kreisbogens als Anteil des gesamten Umfangs  $2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{n} \notin \mathbb{R}$  bei  $\frac{1}{n}$ -tel Anteil

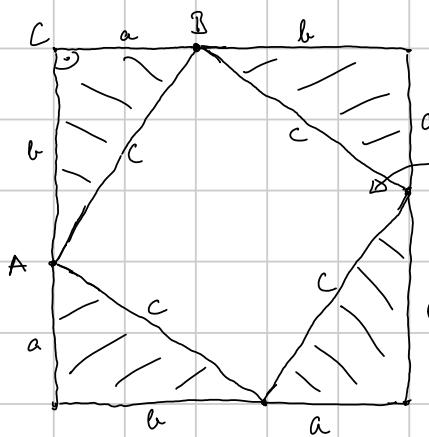
|           |           |                 |                 |                 |                 |                  |             |
|-----------|-----------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|-------------|
| $0^\circ$ | $0^\circ$ | $30^\circ$      | $45^\circ$      | $60^\circ$      | $90^\circ$      | $120^\circ$      | $180^\circ$ |
| $\varphi$ | 0         | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\pi$       |



Flächeninhalt des Dreiecks

$$\text{Fl}(\Delta(ABC)) = \frac{1}{2} \text{Fl}(\square(A, \tilde{C}, B, C)) = \frac{1}{2} a \cdot b$$

$$\Rightarrow \text{Fl}(\Delta(ABC)) = \frac{a \cdot b}{2}$$



$$FL(\text{großes Quadrat}) = (a+b)^2$$

$$FL(\text{Kleines Quadrat}) = c^2$$

$$FL(\text{großes Quadrat}) =$$

$$FL(\text{Kleines Quadrat}) + 4 \cdot FL(\text{Dreiecke})$$

ausgewertet

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$$

$$\cancel{a^2 + 2ab + b^2} = c^2 + \cancel{2ab} \quad | -2ab$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Jur rechtwinkligen Dreieck mit Hypotenuse  $c$  und den Katheten  $a$  und  $b$  gilt der **Satz des Pythagoras**:  $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \left( \text{mit } \frac{a}{c} = \sin(\varphi), \frac{b}{c} = \cos(\varphi) \text{ im rechte Dreieck} \right)$$

$$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R} \quad \leftarrow \text{trigonometrischer Pythagoras}$$

Typische Werte für  $\sin(\alpha)$ ,  $\cos(\alpha)$  liefert eine Wertetabelle

| $\alpha$      | 0<br>( $0^\circ$ ) | $\frac{\pi}{6}$<br>( $30^\circ$ ) | $\frac{\pi}{4}$<br>( $45^\circ$ ) | $\frac{\pi}{3}$<br>( $60^\circ$ ) | $\frac{\pi}{2}$<br>( $90^\circ$ ) | $\pi$<br>( $180^\circ$ ) | $\frac{3\pi}{2}$<br>( $270^\circ$ ) | $2\pi$<br>( $360^\circ$ ) |
|---------------|--------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------------|-------------------------------------|---------------------------|
| $\sin \alpha$ | 0                  | $\frac{1}{2}$                     | $\frac{\sqrt{2}}{2}$              | $\frac{\sqrt{3}}{2}$              | 1                                 | 0                        | -1                                  | 0                         |
| $\cos \alpha$ | 1                  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$              | $\frac{\sqrt{2}}{2}$              | $\frac{1}{2}$                     | 0                                 | -1                       | 0                                   | 1                         |
| $\tan \alpha$ | 0                  | $\frac{1}{\sqrt{3}}$              | 1                                 | $\sqrt{3}$                        | n/a                               | 0                        | n/a                                 | 0                         |
| $\cot \alpha$ | n/a                | $\sqrt{3}$                        | 1                                 | $\frac{1}{\sqrt{3}}$              | 0                                 | n/a                      | 0                                   | n/a                       |

{

$$\rightarrow \tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

### Kalarprodukt

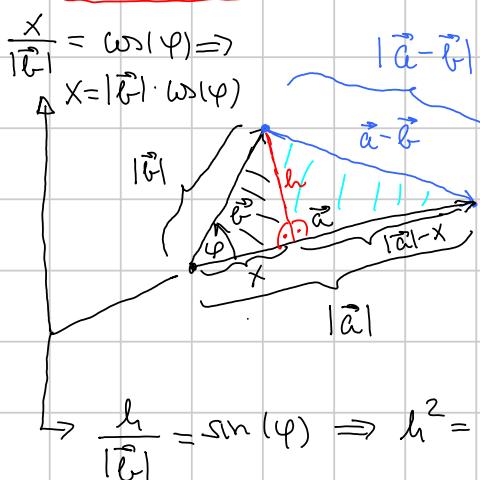
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Betrag:  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n : |\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

→ im  $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$  konkrete geometrische Bedeutung

$|\vec{a}| \leftarrow$  Vektordistanz  $\hat{=}$  Länge des zgl. Pfeils

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)} \leftarrow \varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$$



$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} - \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} - \vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle} - \underbrace{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle}_{\langle \vec{b}, \vec{b} \rangle} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = h^2 + (|\vec{a}| - x)^2 \quad (*)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}| - x)^2 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (|\vec{a}| - x)^2 &= |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot x + x^2 \\ &= |\vec{a}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cos^2(\varphi) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} x = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \\ (2) \end{array} \right.$$

daher  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 \stackrel{(1)}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}| - x)^2$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(2)}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + |\vec{a}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cos^2(\varphi) \\ &\quad = 1 \text{ trig. Pythagoras} \end{aligned}$$

$$= |\vec{b}|^2 (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + |\vec{a}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi)$$

also  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) \quad (***)$

insgesamt

$$|\vec{a}|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 \quad (****) \quad \left. \begin{array}{l} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) \\ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) \end{array} \right.$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \boxed{|\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2}$$

$$- 2 \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad \boxed{1 \cdot (-\frac{1}{2})}$$

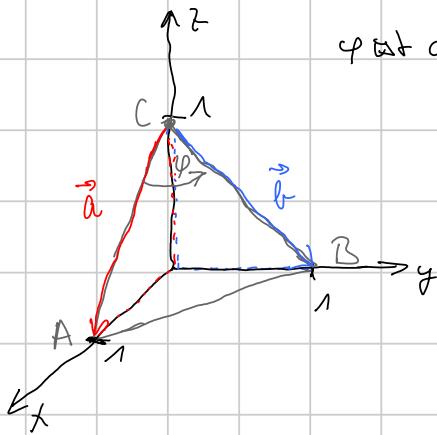
$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{für } \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$$

Beispiel:

Berechnen Sie den Winkel  $\varphi$  am Punkt C des Dreiecks!

$\varphi$  ist der Winkel zwischen



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

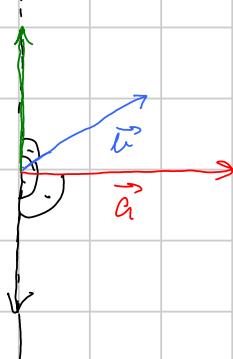
$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{Tabelle}} \varphi = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$$

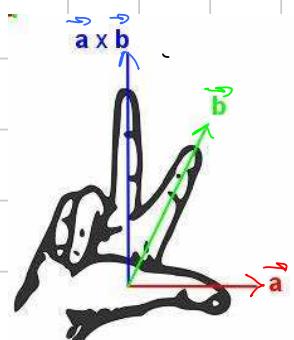
Vektorprodukt (nur im  $\mathbb{R}^3$  definiert)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ : Es gilt  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{a}$  und  $\vec{a} \times \vec{b} \perp \vec{b}$

$\vec{a} \times \vec{b}$  ist so gerichtet, dass  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$  ein "Rechtssystem" im Sinne der "Drei-Finger-Regel der rechten Hand":

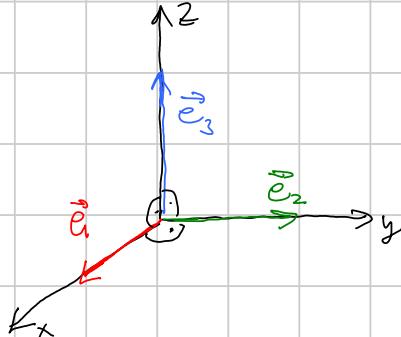


Daumen  $\rightarrow \vec{a}$   
Zeigefinger  $\rightarrow \vec{b}$   
Mittelfinger  $\rightarrow \vec{a} \times \vec{b}$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

Beispiel:



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

$$|\vec{e}_i| = 1 \text{ für } i=1,2,3$$

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_1$$

Standardbasis  
 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  des  
 $\mathbb{R}^3$  ist eine  
Orthonormalbasis, d.h.

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_2$$

die Basisvektoren haben alle  
Betrug 1, sie stehen paar-  
weise senkrecht (orthogonal)  
aufeinander

Außerdem bilden  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  ein Rechtssystem!

Eine längere technische Rechnung zeigt:  $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$ ,  
dann folgt (wegen  $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$ )

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (1 - \cos^2(\varphi)) \\ &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) &= 1 \\ \sin^2(\varphi) &= 1 - \cos^2(\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



## 30 Vorlesung 30 (21.12.2020)

**30.1 Deutung von Skalarprodukt und Vektorprodukt in der Geometrie**

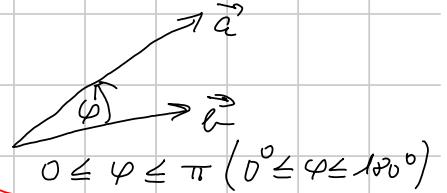
**30.2 Beispielaufgaben Ebenen und Geraden im Raum (Schnittgeraden, Senkrechte durch Punkt)**

## Skalarprodukt / Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} : \quad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

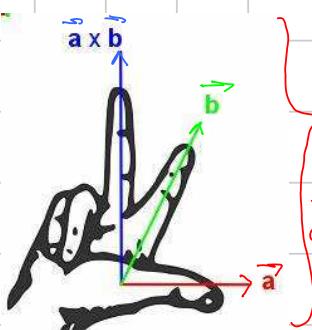
geometrische Deutung

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \quad (\star)$$



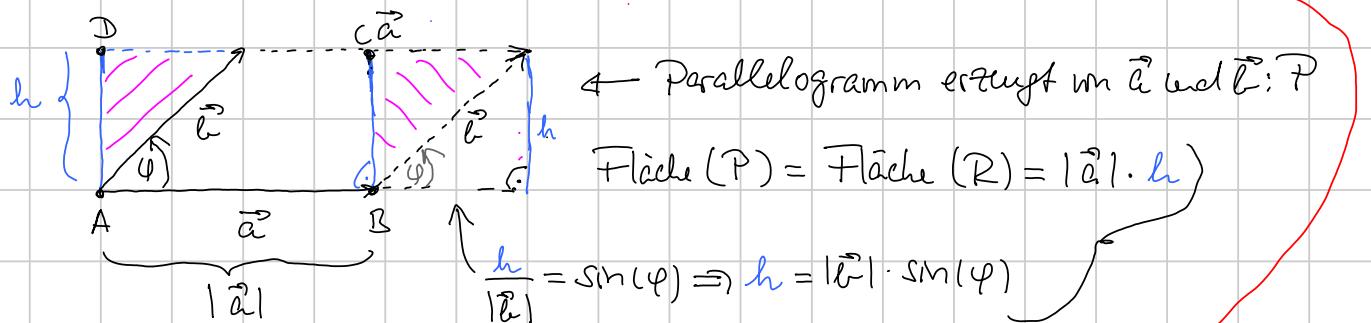
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ b_1 a_3 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}, \quad |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$

$$\text{geometrische Deutung: } |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle^2$$



$$\begin{aligned} & \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \text{ bilden ein Rechtssystem: 3-Finger-Regel der rechten Hand} \\ & = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi) \\ & = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2(\varphi)) \quad \leftarrow \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1 \Rightarrow 1 - \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi) \\ & = |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$$



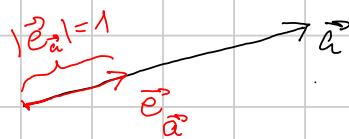
$$\text{Insgesamt: Flaeche}(P) = |\vec{a}| \cdot h = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi) = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

MERKE:  $|\vec{a} \times \vec{b}|$  entspricht der Flächeninhalt des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  erzeugten Parallelogramms; die Richtung des Vektors  $\vec{a} \times \vec{b}$  bestimmt die Drei-Finger-Regel der rechten Hand!

Gegaben ist der Vektor  $\vec{a}$  ( $\in \mathbb{R}^3$ , geht völlig analog für  $\in \mathbb{R}^n$ ),  $\vec{a} \neq \vec{0} \Rightarrow$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \text{ der Einheitsvektor in Richtung } \vec{a}, \text{ d.h. } |\vec{e}_{\vec{a}}| = 1$$

und  $\vec{e}_{\vec{a}}$  zeigt in dieselbe Richtung wie  $\vec{a}$ :



Beispiele:

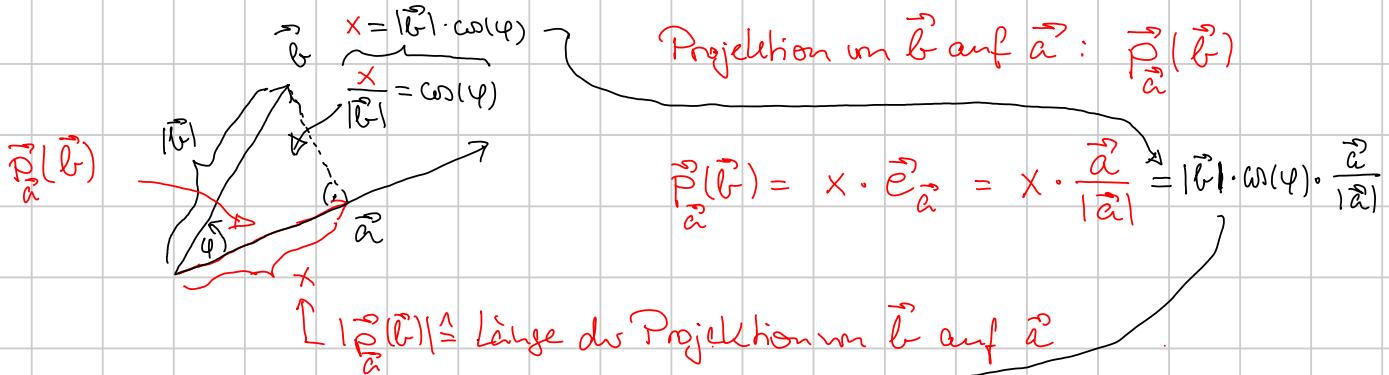
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{5} \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2} \Rightarrow$$

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}} \cdot \vec{a}$$



$$\text{Nach (*) gilt: } \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = |\vec{b}| \cdot \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}}$$

### Beispiele:

$$1) \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}: \vec{p}_{\vec{a}}(\vec{b}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{2}{14} \vec{a} = \frac{1}{7} \vec{a} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}$$

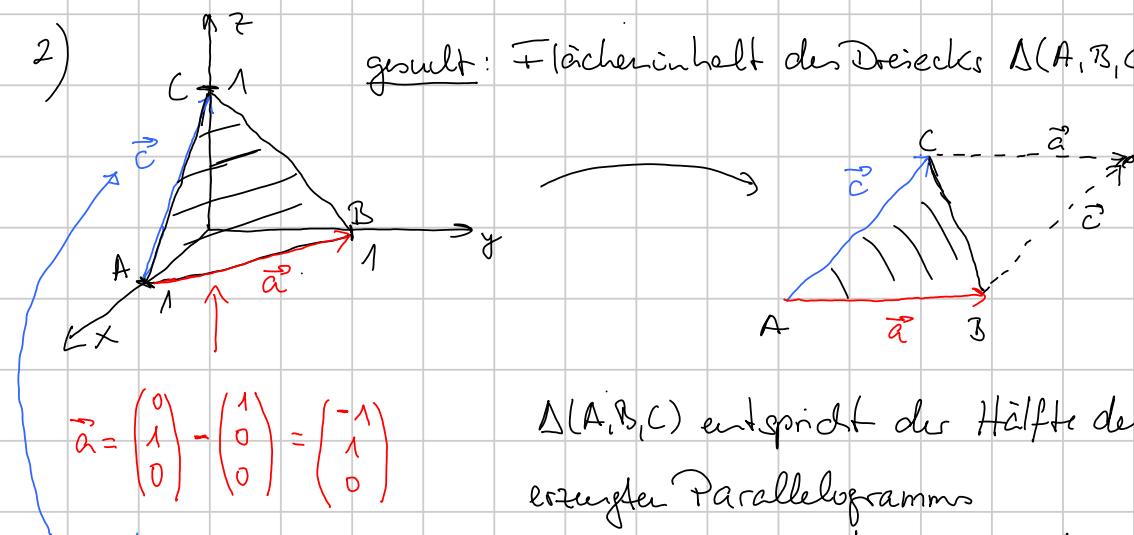
$$|\vec{a}|^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 - 2 + 3 = 2$$

$$\vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \quad \left. \right\} \quad \vec{p}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{2}{3} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{b}|^2 = 1^2 + (-1)^2 + 1^2 = 3$$

2) gesucht: Flächeninhalt des Dreiecks  $\Delta(A, B, C)$



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta(A, B, C)$  entspricht der Hälfte des von  $\vec{a}$  und  $\vec{c}$  erzeugten Parallelogramms

$$\Rightarrow \text{Fl}(\Delta) = \frac{1}{2} \cdot \text{Fl}(P) = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{c}|$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 - 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Fl}(\Delta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$|\vec{a} \times \vec{c}| = \sqrt{3}$$

### Beispielaufgaben mit Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

① Gegeben sind die Ebenen  $E_1: 2x + 3y - z = 4$  und

$$E_2: \vec{e}_2(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie (falls  $\neq \emptyset$ ) die Schnittmenge  $E_1 \cap E_2$ .

- a)  $E_1 \cap E_2$  ist  $\emptyset$ , falls  $E_1$  und  $E_2$  parallel zueinander aber nicht identisch sind;  
 b)  $E_1 \cap E_2 = E_1 = E_2$ , falls  $E_1 = E_2$  ist, d.h. die Ebenen sind identisch;  
 c)  $E_1 \cap E_2$  ist die Schnittgerade der Ebenen

Genaun eine der drei Alternativen a), b), c) tritt ein!

① Für den Aufpunkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  von  $E_2$  gilt:  $-2 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) - 1 \neq 4 \Rightarrow$

Aufpunkt von  $E_2$  liegt nicht in  $E_1$ :  $2x + 3y - z = 4$ . (Fall b) scheidet aus).

② Normalenvektor zu  $E_1$ :  $\vec{N}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$  Richtungsvektoren

Normalenvektor zu  $E_2$ :  $\vec{e}_2(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\vec{N}_2 = \vec{u}_1 \times \vec{u}_2$$



$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 - (-3) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot (-3) - (-1) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{N}_2$$

$\vec{N}_2 \neq \lambda \cdot \vec{N}_1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \vec{N}_1$  und  $\vec{N}_2$  sind unterschiedlich gerichtet, die Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  sind also nicht parallel (Fall a) scheidet aus)

### ③ Schnittgerade ausrechnen

$E_1: 2x + 3y - z = 4 \quad E_2: \vec{e}_2(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$4 = 2 \cdot (1 + 2s - t) + 3 \cdot (-1 + s - 3t) - (1 + 2t)$$

$$4 = -2 + 7s - 13t$$

$$6 = 7s - 13t \Rightarrow s = \frac{6}{7} + \frac{13}{7}t$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + 2s - t \\ -1 + s - 3t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2$$

Schnittgerade  $\vec{g}(t) = \vec{e}_2\left(\frac{6}{7} + \frac{13}{7}t, t\right) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{12}{7}t + \frac{26}{7}t - t \\ -1 + \frac{6}{7}t + \frac{13}{7}t - 3t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{19}{7}t + \frac{15}{7}t \\ -\frac{17}{7} - \frac{8}{7}t \\ 1 + 2t \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{19}{7}t \\ -\frac{17}{7} \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{19}{7} \\ -\frac{8}{7} \\ 2 \end{pmatrix}$$

- ② Gesucht ist die Gerade durch den Punkt  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ , die senkrecht ( $\perp$ ) zur Ebene  $E$  mit  $\vec{e}(s, t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  verläuft.

$$\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$\overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{\uparrow}$  steht senkrecht auf der Ebene

$$\vec{g}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Punkt liegt auf der Geraden}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \\ 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ausgesaut  $\vec{g}(u) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

③ Gegeben ist  $E_1: -x + 2y - 3z = 1$  und  $E_2: 2x - 5y + z = 4$ .

Berechnen Sie  $E_1 \cap E_2$

| $x$ | $y$ | $z$ |   |
|-----|-----|-----|---|
| -1  | 2   | -3  | 1 |
| 2   | -5  | 1   | 4 |
| -1  | 2   | -3  | 1 |
| 0   | -1  | -5  | 6 |

System lösbar  
 mit  $1=3-2$  freien  
 Parametern

$\text{rg } (\underline{\underline{A}}) = \text{rg } (\underline{\underline{A}}|\underline{\underline{b}}) = 2$

$\downarrow \cdot 2$   
 $\downarrow +$   
 $x = 2y - 3z - 1 = 2 \cdot (-6-5t) - 3t - 1 \Rightarrow x = -13 - 13t$   
 $z = t$ ,  $y = -6 - 5t$

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 13t \\ -6 - 5t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

↑

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -13 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -13 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parameterdarstellung der Schnittgerade

## 31 Vorlesung 31 (22.12.2020)

### 31.1 Definition: Matrix

### 31.2 Rechenoperationen für Matrizen

Matrizen

Definition: Gegeben sind  $n \cdot K$  reelle Zahlen  $a_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq K$ .

Dann ist das (rechteckige) Zahlenschema mit  $n$  Zeilen und  $K$  Spalten

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1K} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nK} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}}$$

die zugehörige  $(n \times K)$ -Matrix. Die Zahlen  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  heißen Elemente/Koeffizienten der Matrix.

$M(n \times K) = \{ \underline{A} \mid \underline{A} \text{ ist eine (reelle) } (n \times K)\text{-Matrix} \}$  bezeichnet die Menge aller  $(n \times K)$ -Matrizen. Bei  $a_{ij}$  ist der 1. Index  $i$  der „Zeilenindex“, der 2. Index  $j$  ist der „Spaltenindex“.

Bemerkung: Die Menge  $M(n \times K)$  wird manchmal auch als  $\mathbb{R}^{n \times K}$  oder  $\mathbb{R}^{(n, K)}$  bezeichnet.

Rechenoperationen für Matrizen

① Auf der Menge  $M(n \times K)$  ist eine Addition und eine Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$  definiert, nämlich

$$\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}} ; \quad \underline{B} = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}} \Rightarrow \underline{A} + \underline{B} = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}}$$

$$s \in \mathbb{R}, \quad s \cdot \underline{A} = (s a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq K}}$$

Kurz: Addition und Multiplikation mit  $s$  ist Komponentenweise definiert.

In jeder Komponente wird mit reellen Zahlen gerechnet, daher „ergibt“ man

die Rechenregeln, genauer:

a)  $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}}$  Kommutativgesetz

b)  $\underline{\underline{A}} + (\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) + \underline{\underline{C}}$  Assoziativgesetz

c) Die „Nullmatrix“  $\underline{\underline{0}}$  mit  $a_{ij} = 0$  für  $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$

ist das neutrale Element der Addition:  $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$

d) Zu  $\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) \in M(n \times k)$  ist  $-\underline{\underline{A}} = (-a_{ij})$  die inverse Matrix

betgl. der Addition:  $\underline{\underline{A}} + (-\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

Bemerkung:  $(M(n \times k), +)$  ist eine Gruppe!

e)  $s \cdot (\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}}) = (s \cdot \underline{\underline{A}}) + (s \cdot \underline{\underline{B}})$ ,  $s \in \mathbb{R}$  „Distributivgesetz“

f)  $s \cdot (t \cdot \underline{\underline{A}}) = (s \cdot t) \cdot \underline{\underline{A}} = t \cdot (s \cdot \underline{\underline{A}})$   $\forall t, s \in \mathbb{R}$

g)  $1 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}, 0 \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}, -\underline{\underline{A}} = (-1) \cdot \underline{\underline{A}}$

Bemerkung:  $M(n \times k)$  mit der Addition und der Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$  ist ein Vektorraum.

Beispiele:

①  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 2)$

$$5 \cdot \underline{\underline{A}} - 3 \cdot \underline{\underline{B}} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 15 & -5 \\ 5 & 0 \\ 20 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15-6 & -5-3 \\ 5-3 & 0-6 \\ 20-3 & 5-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 2 & -6 \\ 17 & -4 \end{pmatrix}$$

②  $M(2 \times 2) = \left\{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}} \text{ ist } (2 \times 2)\text{-Matrix} \right\}$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{A}$  ist Linearkombination der Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

es gilt außerdem

$$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{s_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + s_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + s_4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_3 & s_4 \end{pmatrix}} \iff s_1 = 0 \wedge s_2 = 0 \wedge s_3 = 0 = s_4 = 0,$$

d.h.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  sind linear unabhängig.

Zusammenfassung: Der Vektorraum der  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $M(2 \times 2)$  hat die Matrizen  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  als Basis (die sog. Standardbasis von  $M(2 \times 2)$ ).  $M(2 \times 2)$  ist ein 4-dimensionaler Vektorraum.

Allgemein:  $M(n \times k) = \{\underline{A} \mid \underline{A} \text{ ist } (n \times k)\text{-Matrix}\}$  ist ein Vektorraum der Dimension  $n \cdot k$  (mit Komponentenweiser Addition und Komponentenweiser Multiplikation mit  $s \in \mathbb{R}$ ).

Die Matrizen  $E_{ij}$  mit 1 als Wert für den Koeffizienten in der i-ten Zeile und j-ten Spalte und 0 sonst bilden die Standardbasis dieses Vektorraums.

### Definition:

Gegeben ist die  $(n \times k)$ -Matrix  $\underline{A} \in M(n \times k)$ . Dann ist definiert

- die zugehörige transponierte Matrix.  $\underline{A}^t$  ist die  $(k \times n)$ -Matrix, die man aus  $\underline{A}$  durch Vertauschen von Zeilen und Spalten erhält

$$\underline{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \Rightarrow \underline{A}^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}}$$

- Die Hauptdiagonale der Matrix  $\underline{A}$  besteht aus allen Matrixelementen mit gleichen Zeilen- und Spaltenindex.

- Die Matrix  $\underline{A}$  heißt quadratisch, wenn  $n = k$  ist, d.h. Anzahl Zeilen

ist gleich Anzahl Spalten;  $M(n \times n) = \{ \underline{\underline{A}} \mid \underline{\underline{A}} \text{ ist quadratische Matrix mit } n \text{ Zeilen und } n \text{ Spalten} \}$

Beispiele:

$$\textcircled{1} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4)$$

Hauptdiagonale:  $a_{11}=1, a_{22}=4, a_{33}=5$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in M(4 \times 3)$$

Hauptdiagonale

$$\textcircled{2} \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3) \leftarrow \text{quadratische Matrix}$$

Hauptdiagonale:  $a_{11}=1, a_{22}=4, a_{33}=7$

$$\underline{\underline{B}}^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Bei quadratischen Matrizen entspricht der „Wechsel“ von  $\underline{\underline{B}}$  zu  $\underline{\underline{B}}^t$  einem Spiegeln an der Hauptdiagonale.

Weitere Rechenoperationen für Matrizen

\textcircled{1} Produkt von Matrizen mit Vektoren ( $\rightarrow$  siehe lineare GLS)

Definition:

Anzahl Spalten von  $\underline{\underline{A}} =$  Anzahl Komponenten von  $\vec{v}$

Gegeben ist eine  $(n \times k)$ -Matrix  $\underline{\underline{A}}$ ; dann ist für Vektoren  $\vec{v} \in \mathbb{R}^k$

das Produkt  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$  definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} : \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^k a_{1j} \cdot v_j \\ \sum_{j=1}^k a_{2j} \cdot v_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^k a_{nj} \cdot v_j \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}; \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \vec{V} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Zeile}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \\ 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

"Faustregel": Zeile · Spalte

Mit  $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$  liefert  $\underline{A} \cdot \vec{V} = \vec{b}$  :

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

der lin. GLS :  $x_1 - x_2 + 3x_3 = b_1$   
 $2x_1 + 2x_2 + 6x_3 = b_2$   
 $3x_1 + 4x_2 - x_3 = b_3$

Bemerkung: Das Produkt von Matrizen mit Vektoren ist so definiert, dass es zur Darstellung linearer Gleichungssysteme mit Koeffizientenmatrix, Vektor der Unbekannten und Vektor der rechten Seite passt!

## (2) Produkt Matrix mit Matrix

Bemerkung: Darstellung einer Matrix mittels Spaltenvektoren

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\left( \begin{array}{c} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_2 \\ \vec{a}_3 \\ \vec{a}_4 \end{array} \right)}_{\text{Darstellung von } \underline{A} \text{ mittels Spaltenvektoren}}$$

$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{a}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Spaltenvektoren der Matrix  $\underline{A}$

Allgemein:  $\underline{A} = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k} \in M(n \times k) \Rightarrow k$  Spaltenvektoren,

nämlich  $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \vec{a}_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Definition:

$\downarrow$  Spaltenanzahl  $\underline{\underline{A}} = \text{Zeilenanzahl } \underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine  $(n \times k)$ -Matrix  $\underline{\underline{A}}$  und eine  $(k \times l)$ -Matrix  $\underline{\underline{B}}$ .

Dann (und nur dann) ist das Produkt  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$  definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot (\vec{b}_1 \vec{b}_2 \dots \vec{b}_l) = (\underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1 \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_2 \quad \dots \quad \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_l}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}} ) \in M(n \times l)$$

$\vec{b}_j \in \mathbb{R}^n, 1 \leq j \leq l$

Beispiel:

$$\textcircled{1} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3), \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 3)$  ist definiert mit

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 13 \\ 8 & 3 & 34 \end{pmatrix} \in M(2 \times 3)$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \quad \underline{\underline{B}} \in M(3 \times 3), \quad \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 3) \Rightarrow \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \text{ ist nicht definiert!}$$

$$\textcircled{3} \quad \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$$

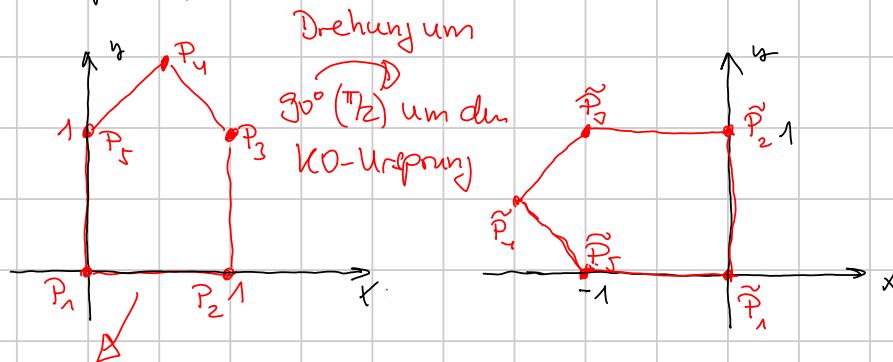
$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 2); \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$  beide Produkte sind definiert

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 5 & -13 \end{pmatrix} \quad \left. \right\} \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & -14 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \right\}$$

MERKE: Das Matrizenprodukt ist (in der Regel) nicht Kommutativ, d.h.  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Anwendungsbeispiel für  $(2 \times 2)$ -Matrizen



$$\underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{D}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{Drehmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \quad \downarrow \\ \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} \in M(2 \times 5) \\ \uparrow \quad \downarrow \\ (2 \times 2) \cdot (2 \times 5) \end{array}$$

$$\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{H}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

## 32 Vorlesung 32 (04.01.2021)

32.1 Beispiele Matrixprodukt

32.2 Rechenregeln für Matrixprodukt

32.3 transponierte Matrix

32.4 quadratische Matrix, Nullmatrix, Einheitsmatrix

32.5 Definition: Determinante einer Matrix (2x2-Matrix)

32.6 Definition: invertierbare/inverse Matrix

Definition:

$\downarrow$  Spaltenanzahl  $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{\underline{B}}} = \text{Zeilenanzahl}$   $\underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine  $(n \times k)$ -Matrix  $\underline{\underline{A}}$  und eine  $(k \times l)$ -Matrix  $\underline{\underline{B}}$ .

Dann (und nur dann) ist das Produkt  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$  definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_l) = (\underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_2, \dots, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_l}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}}) \in M(n \times l)$$

$\vec{b}_j \in \mathbb{R}^n, 1 \leq j \leq l$

Beispiele:

①  $\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{(2 \times 3)}, \underline{\underline{B}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{(3 \times 2)}$   $\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$  ist definiert,  
 $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 2)$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$   
 Matrixprodukt  
 ist nicht kommutativ!

$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$  ist definiert und  $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(3 \times 3)$

$\uparrow \quad \uparrow$   
 $(3 \times 2) \quad (2 \times 3)$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & -13 & -4 \end{pmatrix}$$

②  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \text{ ist definiert, } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2 \times 3)$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 $(2 \times 2)$      $(2 \times 3)$   
 $\uparrow \quad \swarrow$        $\checkmark$

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \Rightarrow \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \text{ ist nicht definiert!}$$

$\uparrow$        $\uparrow$   
 $(2 \times 3)$      $(2 \times 2)$   
 $\uparrow \quad \downarrow$        $\checkmark$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

### Rechenregeln für das Matrizenprodukt

Die in Folgenden auftretenden Produkte sollen jeweils definiert sein.

Es gilt:

① In der Regel ist  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$  (das Matrixprodukt ist nicht kommutativ)

②  $\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}}$

③  $\underline{\underline{A}} \in M(n \times k), \underline{\underline{B}} \in M(k \times \ell) \wedge \underline{\underline{C}} \in M(\ell \times r) :$

$$\underline{\underline{A}} \cdot (s \cdot \underline{\underline{B}} + t \cdot \underline{\underline{C}}) = s \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) + t \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

### Weitere Beispiele im Umfeld Matrizen und Vektoren

① Erinnerung: Gegeben ist  $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} \in M(n \times k)$ ,

dann ist die transponierte Matrix  $\underline{\underline{A}}^t$  definiert durch

$\underline{\underline{A}}^t = (a_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq k \\ 1 \leq i \leq n}}$  ( $\underline{\underline{A}}^t$  entsteht aus  $\underline{\underline{A}}$  durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten)

$$\underline{\underline{A}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(3 \times 4)} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(4 \times 3)}$$

$\underline{\underline{A}} \in M(n \times k)$ ,  $\underline{\underline{A}}^t \in M(k \times n) \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^t \in M(n \times n)$  ist definiert

$\underline{\underline{A}}^t \in M(k \times n)$ ,  $\underline{\underline{A}} \in M(n \times k) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t \cdot \underline{\underline{A}} \in M(k \times k)$  ist definiert

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & 11 & 0 \\ 11 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}}_{\in M(3 \times 3)}$$

②  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \rightsquigarrow$  auffassen/denken als  $(n \times 1)$ -Matrix

$$\Rightarrow \vec{v}^t = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$$

$\uparrow (1 \times n)$ -Matrix

Aus „Matrixprodukt“ erhält man

$$\vec{v}^t \cdot \vec{v} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \underbrace{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}_{\in \mathbb{R}} = |\vec{v}|^2 \quad \text{“(1 \times 1)-Matrix“}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^t = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \cdot (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 & v_1 v_3 & \dots & v_1 v_n \\ v_2 v_1 & v_2^2 & v_2 v_3 & \dots & v_2 v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n v_1 & v_n v_2 & v_n v_3 & \dots & v_n^2 \end{pmatrix} \quad \text{Hauptdiagonale}$$

Konkret:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}^t = (3 \ 1 \ 5)$$

$$\vec{v}^t \cdot \vec{v} = (3 \ 1 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3^2 + 1^2 + 5^2 = 35 = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot (3 \ 1 \ 5) = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \\ 15 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen:

Definition: Eine Matrix  $\underline{A}$  heißt quadratisch, wenn gilt

Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten.

$M(n \times n) = \{ \underline{A} \mid \underline{A} \text{ hat } n \text{ Zeilen und } n \text{ Spalten} \}$  ist die

Menge aller quadratischen Matrizen mit  $n$  Zeilen und  $n$  Spalten.

Beispiel:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2); \quad \underline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$$

$$\underline{C} = (c_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ mit } c_{ij} = i+j : \quad \underline{C} \in M(n \times n)$$

$$\underline{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & n+n \end{pmatrix}$$

Spezielle quadratische Matrizen:

$$\underline{O} = \underline{O}_n \in M(n \times n) \text{ mit } \underline{O}_n = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Nullmatrix}$$

$$\underline{E} = \underline{E}_n \in M(n \times n) \text{ mit } \underline{E}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Einheitsmatrix}}$$

Es gilt für  $\underline{A} \in M(n \times n)$ :  $\underline{A} + \underline{O} = \underline{A}$ ,  $\underline{A} \cdot \underline{O} = \underline{O} \cdot \underline{A} = \underline{O}$   
 $\underline{A} \cdot \underline{E} = \underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}$

Quadratische Matrizen und lineare Gleichungssysteme mit quadratischen Matrizen als Koeffizientenmatrix, d.h. Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte.

Einführung:  $\underline{A} \in M(2 \times 2)$  also  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

mit  $a = a_{11}$ ,  $b = a_{12}$ ,  $c = a_{21}$ ,  $d = a_{22}$ .

Das lineare GLS dazu ist  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{d}$  mit  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,  $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{d} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = d_1 \\ cx + dy = d_2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 2 \text{ lin. Gleichungen} \\ \text{für 2 Unbekannte} \end{array}$

Gauß-Schema

$\text{rg}(\underline{A}) = \text{rg}(\underline{A}|\vec{d}) = 2$   
falls  
 $ad - bc \neq 0$  ist,

|     |           |               |       |
|-----|-----------|---------------|-------|
| $x$ | $y$       |               |       |
| $a$ | $b$       |               | $d_1$ |
| $c$ | $d$       |               | $d_2$ |
| $a$ | $b$       |               | $d_1$ |
| 0   | $ad - bc$ | $ad_2 - cd_1$ |       |

$x = \frac{1}{a} \cdot [d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}]$   
 $\uparrow$   
 $ax = d_1 - by = d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$   
 $\uparrow$   
 $y = \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$

dann hat das Ls.

GLS genau eine Lösung, nämlich

Definition:

Für eine  $(2 \times 2)$ -Matrix  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  ist die Determinante von  $\underline{A}$

definiert als  $\det(\underline{A}) = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ .

Aus dem einführenden Beispiel folgt:

(4) Das lin. GLS  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d}$  hat genau eine Lösung, falls  $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \neq 0$   
ist.

- Beispiele:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|\underline{\underline{A}}| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0, \quad |\underline{\underline{C}}| = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 16 - 18 = -2$$

$$|\underline{\underline{B}}| = (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

Definition:

Die quadratische Matrix  $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$  heißt **invertierbar**, wenn  
eine Matrix  $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$  existiert mit  $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}_n$ .

$\underline{\underline{A}}^{-1}$  heißt dann die **inverse Matrix** zu  $\underline{\underline{A}}$ .

Einschub:  $(1 \times n)$ -Matrizen  $\underline{\underline{A}} = (a_{mn})$  mit  $a_{mn} \in \mathbb{R}$

Kurz:  $\underline{\underline{A}} = a_{mn} \leftarrow$  jede reelle Zahl kann als  
 $(1 \times n)$ -Matrix aufgefasst werden!

$\underline{\underline{A}} = a_{mn}$  ist **invertierbar**, wenn  $\underline{\underline{A}}^{-1} = a_{mn}^{-1} = \frac{1}{a_{mn}}$  existiert, dann ist

$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \frac{1}{a_{mn}} \cdot a_{mn} = 1 = \underline{\underline{E}}$ ; dies ist erfüllt für  $a_{mn} \neq 0$ .

Die  $(1 \times n)$ -Matrix  $\underline{\underline{A}} = (a_{mn})$  ist nur invertierbar, wenn  $a_{mn} \neq 0$  gilt.

Frage: Unter welcher Bedingung sind  $(n \times n)$ -Matrizen invertierbar?

Wann existiert  $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$  mit  $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ ?

Bemerkung: Aus  $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$  folgt immer auch  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$ .

→ Wie sieht das bei  $(2 \times 2)$ -Matrizen aus?

Spezialfall:  $\underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$  d.h.  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Gesucht ist  $\underline{A}^{-1}$  mit  $\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$ : Ansatz  $\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E} \Leftrightarrow \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$= \underline{A}^{-1}$        $= \underline{E}$

$$\Leftrightarrow \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \underline{A} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2 lineare Gleichungssysteme mit  
identischer Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$

aber zwei verschiedenen rechten Seiten,  
nämlich  $\vec{e}_1$  und  $\vec{e}_2$

(\*) liefert: Falls  $\det(\underline{A}) = |\underline{A}| \neq 0$  ist, sind

beide lin. GLS eindeutig lösbar, d.h. es  
gibt genau eine inverse Matrix  $\underline{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$ ,

dabei ist  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  die Lösung von  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$  und

$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$  die Lösung von  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$

## 33 Vorlesung 33 (05.01.2021)

**33.1 Bestimmen der Inversen Matrix (im Allgemeinen und 2x2-Matrizen)**

**33.2 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2)**

Inverse Matrix  $\underline{A} \in M(n \times n)$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow$  es gibt eine Matrix  $\underline{A}^{-1}$   
quadratisch  $\uparrow$

$$\text{mit } \underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{A} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1 \uparrow \quad \vec{a}_2 \uparrow \quad \vec{a}_n \uparrow$

$$\underline{E} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_1 \uparrow \quad \vec{e}_2 \uparrow \quad \vec{e}_n \uparrow$

Beispiel:  $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , gesucht  $\underline{A}^{-1}$

Ansatz  $\underline{A}^{-1} = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = (\underline{A} \cdot \vec{a}_1 \ \underline{A} \cdot \vec{a}_2) = \underline{E} = (\vec{e}_1 \ \vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1 \wedge \underline{A} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$$

die Lösungen  $\vec{a}_1$  und  $\vec{a}_2$  dieser beiden lin. GLS liefern die Spaltenvektoren der gesuchten invertierten Matrix  $\underline{A}^{-1}$ !

für  $1 \leq i \leq n$  ist

$$\underline{A} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$$

die Spaltenvektoren der Matrix  $\underline{A}^{-1}$  sind die Lösungen der lin. GLS

$\underline{A} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$ , diese lin. GLS haben alle dieselbe Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$  nur verschiedene rechte Seiten  $\vec{e}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ )

$$\underline{A} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1, \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gauß-Schema

$$\left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{1 \cdot (-3) \\ \leftrightarrow}} \left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{array} \right.$$

$$\underline{A} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Gauß-Schema

$$\left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{1 \cdot (-3) \\ \leftrightarrow}} \left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right.$$

gemeinsames erweitertes Gauß-Schema

$$\text{Vorwärtselimination} \quad \left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{array} \right. \xrightarrow{\substack{1 \cdot (-3) \\ \leftrightarrow \\ 3 + }} \left| \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \text{start der Rücksub.} & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & -2 & 1 \end{array} \quad \text{Ende der Vorwärtelimination}$$

$$\begin{array}{c|cc} & 1 & 0 \\ \cdot (-\frac{1}{2}) & 0 & -2 \\ \hline & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{cases} \text{für } \underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1 \text{ mit } \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ x = -2 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Für  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$  mit  $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = 1$   
 $y = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Das erweiterte Gauß-Schema liefert

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Probe: Es muss  $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$  gelten

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aus der 32. Vorlesung und dem Ansetz aus dieser Vorlesung, nämlich:

Die Spaltenvektoren  $\vec{a}_i$  der Matrix  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  sind die Lösungen des lin. GLS  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), folgt:  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  existiert genau dann, wenn die lin. GLS  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) eindeutig lösbar sind. Dies tritt ein, wenn beim Rechnen im Gauß-Schema keine Nullzeile entsteht wird, d.h.  $\text{rg}(\underline{\underline{A}}) = n$ !

MERKE:  $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$  ist invertierbar  $\Leftrightarrow \text{rg}(\underline{\underline{A}}) = n$

Beispiel: Berechnung von  $\underline{\underline{A}}^{-1}$  für  $\underline{\underline{A}} \in M(3 \times 3)$ :  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

erweitertes Gauß-Schema

$$\underline{\underline{A}} = \left\{ \begin{array}{c|ccc} & 2 & 6 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ \text{Vorwärtelimination} & -3 & -2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ & -1 & 3 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \\ \hline & 2 & 6 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & 14 & 7 & | & 3 & 2 & 0 \\ & 0 & 12 & -1 & | & 1 & 0 & 2 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} 1 \cdot 3 + \\ E_1 \leftrightarrow E_2 \\ 1 \cdot 2 + \\ 1 \cdot (-6) \\ 1 \cdot 7 + \end{array}$$

$\text{rg}(A) = 3$   
3 Nicht-Nullzeilen!!

Start der Rücksubst.  $\uparrow$

$$\left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 7 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \end{array} \right|$$

$\xrightarrow{\substack{+7 \\ +(-3)}} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 3 & -12 & 14 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 2 & 14 \end{array} \right|$

$\xrightarrow{\substack{\cdot \frac{1}{28} \\ \cdot (-3)}} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -18 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 12 & 14 \end{array} \right|$

$\xrightarrow{E} \left| \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -18 & -28 \\ 0 & 1 & 0 & 10 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 12 & 14 \end{array} \right| \quad \text{Ende der Rücksubst.}$

$\downarrow$  Ende der Vorwärtseliminierung

$A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 2 & -18 & -28 \\ 10 & 2 & 14 \\ 11 & 12 & 14 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 4/49 & -3/49 & -14/49 \\ 10/49 & 1/49 & 7/49 \\ 11/49 & 12/49 & -14/49 \end{array} \right) = \frac{1}{49} \cdot \left( \begin{array}{ccc} 4 & -3 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{array} \right)$

Probe: Es muss gelten  $A \cdot A^{-1} = E$

$$A \cdot A^{-1} = \left( \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{49} \cdot \left( \begin{array}{ccc} 4 & -3 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{array} \right)$$

$$= \frac{1}{49} \cdot \left( \begin{array}{ccc} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} \right) \cdot \left( \begin{array}{ccc} 4 & -3 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{array} \right) = \frac{1}{49} \cdot \left( \begin{array}{ccc} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{array} \right) = \left( \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Zurück zu  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$ :

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \text{siehe 22. Vorlesung}$$

$$0 \neq ad - bc = \det(A) \Rightarrow A^{-1} \text{ existiert}$$

Rechnung von  $A^{-1}$  im erweiterten Gauß-Schema:

$$A = \left\{ \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{\substack{1 \cdot (-c) \\ 1 \cdot (+a)}} \left\{ \begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad - bc & -c & a \end{array} \right\} \xrightarrow{1 \cdot \frac{1}{ad - bc}} \left\{ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -c/(ad - bc) & a/(ad - bc) \end{array} \right\}$$

fals  $ad - bc = |A| \neq 0$  ist  
dies möglich

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{+} a \quad \text{(B)} \\
 \cdot (-b) \quad 0 \quad 1 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right. \quad \text{Ende der Vorwärts.} \\
 \cdot \frac{1}{a} \quad 1 \quad 0 \quad \left| \begin{array}{cc} 1 + \frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right. \\
 \hline
 0 \quad 1 \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{array} \right. \\
 \hline
 \end{array}$$

(\*)  $1 + \frac{bc}{ad-bc} = \underbrace{\frac{ad-bc}{ad-bc}}_1 + \frac{bc}{ad-bc}$

$= \frac{ad}{ad-bc}$

Für  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $\det(\underline{A}) = ad-bc \neq 0$  ist

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{A})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante von  $\underline{A} \in M(2 \times 2)$ :

(1)  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{A}) = ad-bc$

$$\underline{A}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{A}^t) = ad-bc = \det(\underline{A})$$

$$\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^t)$$

(2)  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \leftarrow$  die beiden Spaltenvektoren von  $\underline{A}$  sind identisch

$$\det(\underline{A}) = a \cdot c - ac = 0$$

$\underline{A}$  hat 2 identische Spaltenvektoren  $\Rightarrow \det(\underline{A}) = 0$

Wegen  $\det(\underline{A}^t) = \det(\underline{A})$  gilt sofort

$\underline{A}$  hat 2 identische Zeilen  $\Rightarrow \det(\underline{A}) = 0$

(3)  $\underline{A} = \begin{pmatrix} a & s \cdot b_1 + t \cdot b_2 \\ c & s \cdot d_1 + t \cdot d_2 \end{pmatrix}$  für  $s, t \in \mathbb{R}$

der 2. Spaltenvektor von  $\underline{\underline{A}}$  ist Linearkombination zweier Vektoren,  
nämlich

$$\begin{pmatrix} sb_1 + t \cdot b_2 \\ sd_1 + t \cdot d_2 \end{pmatrix} = s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = a \cdot (sd_1 + t \cdot d_2) - (sb_1 + t \cdot b_2) \cdot c$$

$$= s \cdot (ad_1 - b_1 c) + t \cdot (ad_2 - b_2 c)$$

$$= s \cdot \left| \begin{matrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{matrix} \right| + t \cdot \left| \begin{matrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{matrix} \right|$$

$$\boxed{\underline{\underline{A}} = \left( \vec{a} \quad s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2 \right) \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = s \cdot \left| \vec{a} \quad \vec{b}_1 \right| + t \cdot \left| \vec{a} \quad \vec{b}_2 \right|, \text{ d.h.}}$$

"Linearkombination von Spaltenvektoren ergibt die selbe Linearkombination  
der Determinanten"

Wegen  $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$  gilt das auch für Zeilen, d.h.

"Linearkombination von Zeilen einer Matrix ergibt die selbe Linearkombination  
der Determinanten"

## 34 Vorlesung 34 (06.01.2021)

**34.1 (forts.) Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (2x2)**

**34.2 Definition: Determinante einer Matrix (nxn-Matrix)**

**34.3 Eigenschaften/Rechenregeln der Determinante (nxn)**

**34.4 Beispiele für Determinanten**

Fortsetzung: Eigenschaften der Determinante von  $\underline{A} \in M(2 \times 2)$

$$\textcircled{4} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det(\underline{A}) = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$s \in \mathbb{R}, s \cdot \underline{A} = \begin{pmatrix} s \cdot a & s \cdot b \\ s \cdot c & s \cdot d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(s \cdot \underline{A}) = \underbrace{s^2 ad - s^2 cb}_{s^2 \cdot (ad - bc)} = s^2 \cdot \det(\underline{A})$$

Es gilt:  $\det(s \cdot \underline{A}) = s^2 \cdot \det(\underline{A})$

Definition: Determinante einer ( $n \times n$ )-Matrix

Die Determinante wird „rekursiv“ definiert.

\textcircled{1} Anker/Start:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M(2 \times 2) \Rightarrow \det(\underline{A}) = \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

\textcircled{2} Zwischenschritt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$$

$$= + a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} = + a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_{12} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{A}_{11} &= (a_{22}) \\ \underline{A}_{12} &= (a_{21}) \end{aligned}$$

Für  $1 \leq i, j \leq 3$  ist  $\underline{A}_{ij}$  die Matrix, die entsteht, wenn man in  $\underline{A}$  die  $i$ -te Zeile und  $j$ -te Spalte streicht, d.h.  $\underline{A}_{ij} \in M(2 \times 2)$ .

Damit definiert man

$$\det(\underline{A}) = + a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_{11} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_{12} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \underline{A}_{13} \end{vmatrix}$$

$$= + a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

③ Allgemein:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n)$$

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot |A_{1j}|$$

$$= + a_{11} \cdot |A_{11}| - a_{12} \cdot |A_{12}| + a_{13} \cdot |A_{13}| - \dots (-1)^{1+n} \cdot |A_{1n}|$$

Bemerkung: Mit dieser Definition wird die Berechnung der Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix (rekursiv) schrittweise zurückgeführt auf die bekannte Berechnung der Determinante von  $(2 \times 2)$ -Matrizen!

Beispiele:

①  $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = + 2 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}_{-4} - 6 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}_5 + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{-11}$$

$$= 2 \cdot (-4) - 6 \cdot 5 + 1 \cdot (-11) = -49$$

②  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \in M(4 \times 4)$

$$\det(B) = + 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}_{\det(A) \text{ aus } ①} - 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}_0 + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}_0 - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_0$$

$$= 1 \cdot (-49) - \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}_0 = -49 - (-12) = -49 + 12 = -37$$

### Nebenrechnung:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = +0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{= 0} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 - 2 \cdot (3 - 0) + 6 \cdot (-1 - 0) = -12$$

### Eigenschaften der Determinante einer $(n \times n)$ -Matrix

Determinanten von  $(n \times n)$ -Matrizen ergeben sich rekursiv aus Determinanten

von  $(2 \times 2)$ -Matrizen  $\Rightarrow$  die Determinante von  $(n \times n)$ -Matrizen „erbt“ alle Eigenschaften der Determinante von  $(2 \times 2)$ -Matrizen, nämlich

①  $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

②  $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \dots \vec{b} \dots \vec{b} \dots \vec{a}_n) \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

$\underline{\underline{A}}$  hat zwei identische  
Spaltenvektoren

Wegen ② gilt dann auch:  $\underline{\underline{A}}$  hat zwei identische Zeilen  $\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0$

③ a)  $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_n)$  und  $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots s \cdot \vec{a}_i \dots \vec{a}_n)$  mit  $s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det(\underline{\underline{A}})$

$\vec{a}_i$  wird ersetzt durch  $s\vec{u} + t\vec{v}$

b)  $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_i \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)$  und  $\tilde{\underline{\underline{A}}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \underbrace{s\vec{u} + t\vec{v}}_{i\text{-te Spalte}} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)$

mit  $s, t \in \mathbb{R}$

i-te Spalte

i-te Spalte

$\Rightarrow \det(\tilde{\underline{\underline{A}}}) = s \cdot \det((\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{u} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n)) + t \cdot \det((\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{v} \dots \vec{a}_j \dots \vec{a}_n))$

④  $\underline{\underline{A}} = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n) \Rightarrow s \cdot \underline{\underline{A}} = (s\vec{a}_1 s\vec{a}_2 \dots s\vec{a}_n)$  für  $s \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \det(s \cdot \underline{\underline{A}}) = s^n \cdot \det(\underline{\underline{A}})$$

### Beispiele und Folgerungen

①  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -12 \checkmark$  (siehe Nebenrechnung oben)

Es gilt  $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{\underline{A}}^t) = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = - (2 \cdot 3 + 6) = -12 \checkmark$$

ein Schritt im Gauß-Algorithmus liefert

②  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow \text{neue 2. Zeile} = (-4) \cdot 1. \text{Zeile} + 1 \cdot 2. \text{Zeile}$

Eigenschaft ③ und Eigenschaft ① liefern

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c|ccc|c} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 4 & 1 & 1 & | & \leftarrow 1+ \\ 2 & -1 & 2 & | & \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|ccc} 1 & 2 & 3 & | \\ 0 & -7 & -11 & | \\ 2 & -1 & 2 & | \end{array} \end{array}$$

Determinante bleibt gleich!

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = (-4) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2 identische Zeilen! Eigenschaft ②

Probe:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= +1 \cdot \underbrace{(2+1)}_{=3} - 2 \cdot \underbrace{(8-2)}_{=6} + 3 \cdot \underbrace{(-4-2)}_{=-6} = -27 \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -11 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} &\stackrel{\text{①}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & -11 & 2 \end{vmatrix} = +1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -11 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-14 - 11) + 2 \cdot (-22 + 21) = -25 - 2 = -27 \checkmark \end{aligned}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

eine Schritt des Gauß-Algorithmus liefert

$$\xrightarrow{\quad\quad\quad} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{neue 2. Zeile}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\text{1. Zeile} \\ -3 \cdot 2. \text{Zeile}}} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 4 & 1 \cdot (-3) \\ 2 & 2 & -1 & \end{array} \right|$$

aus den Eigenschaften ①, ② und ③ der Determinante folgt

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= (-3) \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-3)} \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Probe:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{= 3 \cdot (-1 - 8)} - 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}_{= 1 \cdot (7 - 8)} = -18 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -12 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \left. \right\} - \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -12 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{3} \cdot 54 = -18 \checkmark$$

$$= 3 \cdot (2 + 24) - (0 + 24) = 54$$

## 35 Vorlesung 35 (11.01.2021)

**35.1 Matrixmanipulationen und die Determinante**

**35.2 Regel von Sarrus (3x3-Determinante)**

**35.3 Definition: Eigenvektor / Eigenwert**

Am Donnerstag, dem 14.01.2021 gibt es eine 2. Probeklausur (OscA-Portal);  
Lösungsvorschläge dazu gibt es am Sonntag, dem 17.01.2021, ab 16:00Uhr (OscA-Portal).

↓                    ↓  
nur für quadratische Matrizen definiert!

Berechnung der Determinante einer  $(n \times n)$ -Matrix

Typische Schritte des Gauß-Algorithmus im Gauß-Schema

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccc}
 a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
 & \circlearrowleft & & & \\
 a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{i+1,n} \\
 \hline
 a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
 & \circlearrowleft & \tilde{a}_{i+1,2} & \cdots & \tilde{a}_{i+1,n}
 \end{array} &
 \left| \begin{array}{l}
 b_1 + 1 \cdot a_{i+1,1} \\
 b_{i+1} + (-a_{i+1,1}) \cdot b_i
 \end{array} \right\} + &
 \begin{array}{l}
 \text{Für die Determinante bedeutet das:} \\
 1) \text{ hat keine Auswirkung, Determinante bleibt unverändert} \\
 2) \text{ Determinante verändert sich um den Faktor } (-a_{i+1,1})
 \end{array}
 \end{array}$$

Auswirkung des Vertauschens von Zeilen im Gauß-Schema auf die Determinante

Beispiel:

$$E = \begin{pmatrix} + & - & + \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |E| = +1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 = 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Vertauschen von 1. und 2. Zeile

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\tilde{E}| = +0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 = -1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) = -1 \cdot 1 \cdot 1 = -1$$

**MERKE:** Jedes Vertauschen von Zeilen verändert die Determinante um den Faktor  $-1$ .

Für eine (obere) Dreiecksmatrix

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{33} & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Unterhalb der Hauptdiagonale sind alle Matrixkoeff. = 0

$$\underline{\text{gilt: }} \quad \left| \begin{matrix} D \\ \equiv \end{matrix} \right\} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn},$$

d.h. die Determinante ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente!

## Beweisidee ( exemplarisch für $(3 \times 3)$ -Matrix )

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |D| = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix}}_{=0} + a_{13} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & a_{22} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}_{=0}$$

$$= a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot 0) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

## Beispiel zur Anwendung des Gauß-Schemas zur Determinantenberechnung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{gesucht } |A| = \det(A)$$

Für die Definition: 1. Schritt liefert alternierende gewichtete Summe von  
4 (3x3)-Determinanten

2. Schritt liefert für jede der verbliebenen 4 Determinanten eine gerichtete Summe von 3 ( $2 \times 2$ ) - Determinanten.

Jugendamt: Gewichtete Summe von 12 (2x2)-Determinanten |

Alternativ: Gauß-Schema

|  |  |
|--|--|
| $\begin{array}{cccc c} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{array}$ | $\left. \begin{array}{l} \text{2-mal Zeilentausch verändert die Determinante} \\ \text{um den Faktor } (-1) \cdot (-1) = 1 \text{ also insgesamt nicht!} \end{array} \right\}$ |
| $\begin{array}{cccc c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}$        | $\left. \begin{array}{l} 1 \cdot (-1) \quad 1 \cdot 2 \quad 1 \cdot (-2) \\ \text{diese Operationen verändern die} \\ \text{Determinante nicht} \end{array} \right\}$          |
| $\begin{array}{cccc c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & 2 \end{array}$         | $\left. \begin{array}{l} 1 \cdot (-3) \quad 1 \cdot (-1) \\ \text{diese Operationen verändern die} \\ \text{Determinante nicht} \end{array} \right\}$                          |
| $\begin{array}{cccc c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{array}$         | $\left. \begin{array}{l} \text{diese Operation verändert die Determinante nicht} \end{array} \right\}$   |

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Jugendsamt:  $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5$

2. Beispiel:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{gesucht ist } \det(B) = |B|$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \cdot 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \cdot (-3) \\ 4 & 6 & -1 & 1 \cdot (-3) \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} + \\ + \\ + \end{array} \right\} \text{durch Operationen verändern die Determinante um den Faktor } (-3) \cdot (-3) = 9$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 1 \cdot (-2) \\ 0 & -7 & 4 & \\ 0 & -14 & 11 & \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \text{diese Operation verändert die Determinante nicht}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & \\ 0 & -7 & 4 & \\ 0 & 0 & 3 & \end{array}$$

Jugendsamt:  $-63 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{9} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-63}{9} = -7 \checkmark$$

Für  $(3 \times 3)$ -Determinanten (und nur für die) gilt die

Regel von Sarrus

$$\left. \begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right\} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = + a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31}$$

$$\left| \begin{array}{ccc|cc} + & + & - & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 4 & 6 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 2 & +(-9) & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 24 \\ 4 & 6 & -1 & -(-2) & 0 \\ & & & -24 & -24 \end{array} \right| = -9 + 2 = -7 \quad \checkmark$$

Definition:

Gegeben ist eine  $(n \times n)$ -Matrix  $\underline{\underline{A}}$ .

- 1) Ein Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  heißt Eigenvektor von  $\underline{\underline{A}}$ , falls es eine reelle Zahl  $\lambda \in \mathbb{R}$  gibt mit

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$$

- 2) Die Zahl  $\lambda$  aus Teil 1) heißt Eigenwert von  $\underline{\underline{A}}$ .

Bemerkung:

- 1) Wenn  $\vec{v}$  Eigenvektor von  $\underline{\underline{A}}$  zum Eigenwert  $\lambda$  ist, hat die Multiplikation  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$  die "Wirkung" den Vektor  $\vec{v}$  auf  $\lambda \cdot \vec{v}$  zu strecken.

- 2) Wie berechnet man Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ ?

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \vec{v} = \vec{0}, \quad \underline{\underline{E}} \cdot \vec{v} = \vec{v} \text{ mit } \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \vec{v} = \vec{0}}$$

$(n \times n)$ -Matrix

$\lambda$  ist Eigenwert von  $\underline{\underline{A}}$ , wenn dieses homogene lin. GLS. Lösungen  $\vec{v} \neq \vec{0}$  hat; diese Lösungen  $\vec{v} \neq \vec{0}$  sind die Eigenvektoren von  $\underline{\underline{A}}$  zum Eigenwert  $\lambda$ .

- 3) Erinnerung: Ein homogenes lin. GLS  $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$  hat <sup>nur</sup> die Lösung  $\vec{x} = \vec{0}$  genau dann, wenn  $rg(\underline{\underline{A}}) = n \Leftrightarrow$  am Ende der Vorwärtselimination nach Gauß hat man im linken Teil des Gauß-Schemas eine obere Dreiecksmatrix

ohne Nullzeilen, d.h. alle  $n$  Hauptdiagonalelemente sind  $\neq 0 \Leftrightarrow$

Produkt der Hauptdiagonalelemente  $\neq 0 \Leftrightarrow |\tilde{A}| = \det(\tilde{A}) \neq 0$

MERKE:  $\tilde{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$  mit  $\tilde{A} \in M(n \times n)$  ist eindeutig lösbar mit  $\vec{x} = \vec{0}$

falls gilt  $rg(\tilde{A}) = n \Leftrightarrow \det(\tilde{A}) \neq 0$ .

Damit folgt:  $\underbrace{(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}}$  hat nur dann Lösungen  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , wenn

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{mit } \tilde{A} = \underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}$$

gilt:  $rg(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) < n \Leftrightarrow \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$

Jugendsamt:  $\lambda \in \mathbb{R}$  ist Eigenwert von  $\underline{\underline{A}}$  falls gilt:  $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$ ;

jede Lösung  $\vec{v} \neq \vec{0}$  von  $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$  ist dann Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ , d.h.

1. Schritt: Bestimme  $\lambda \in \mathbb{R}$  mit  $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$

$\lambda$  ist dann Eigenwert von  $\underline{\underline{A}}$

2. Schritt: Löse für dieses  $\lambda$  (ab diesen Eigenwert) das homogene lin. GLS  $(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ . Jede Lösung  $\vec{v} \neq \vec{0}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$ .

Beispiel:

①  $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & +1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \leftarrow$  gesucht sind Eigenwerte und Eigenvektoren von  $\underline{\underline{A}}$

1. Schritt:  $\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 3 & +1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & +1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$

$$0 \doteq \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & +1 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 \\ = 6 - 5\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

mit  $(p, q)$ -Formel:  $\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}$   
 $= \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4$$

2. Schritt: zu  $\lambda_1 = 1$  löse  $(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$  und  
zu  $\lambda_2 = 4$  löse  $(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

a)  $\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} v_1 & v_2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \cdot (-1) \\ \downarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow v_2 = t, v_1 = -\frac{1}{2}t \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert  $\lambda_1 = 1$  gehören die Eigenvektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$

b)  $\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{A}} - 4 \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cc} v_1 & v_2 \\ \hline -1 & 1 \\ \hline 2 & -2 \\ \hline -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \\ \leftrightarrow \\ 0 \end{array} \rightarrow v_2 = t, v_1 = t \Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

zum Eigenwert  $\lambda_2 = 4$  gehören die Eigenvektoren  $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$

## 36 Vorlesung 36 (12.01.2021)

### 36.1 Geometrische Deutung von Eigenvektor/Eigenwert

### 36.2 Beispiele Eigenvektor/Eigenwert

Aus der 35. Vorlesung:

$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 1$  und  $\lambda_2 = 4$ .

Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 1$  sind die Vektoren  $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1/2t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$

Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 4$  sind die Vektoren  $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$ .

Probe:  $\vec{v} + \vec{o}$  ist Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda$  von  $\underline{A} \Leftrightarrow \underline{A} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

$$\underline{A} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2t + t \\ -t + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2t \\ t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1/2t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1$$

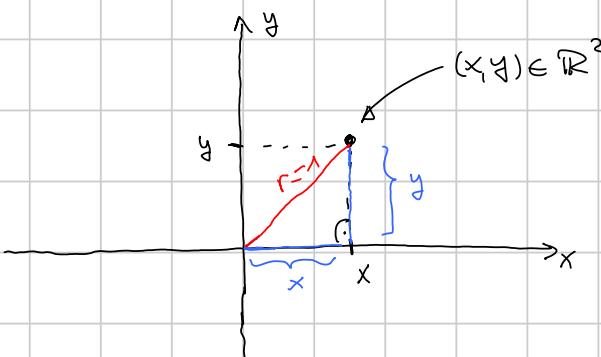
$$\underline{A} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + t \\ 2t + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

### Geometrische Bedeutung von Eigenvektoren von $(2 \times 2)$ -Matrizen

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow K = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

↑ Welche Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$  ist das? Einheitskreis!



nach Pythagoras gilt im rechtwinkligen

$$\text{Dreieck } x^2 + y^2 = r^2 = 1$$

Der Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , der die Gleichung  $x^2 + y^2 = 1$  erfüllt, hat den Abstand 1 vom Koordinatenursprung, d.h. alle Punkte aus der Menge K liegen auf dem Kreis mit Radius 1 um den Koordinatenursprung!

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 25y^2 = 100 \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 25y^2 - 100 = 0 \right\}$$

↑ Welche Punktmenge im  $\mathbb{R}^2$  ist das?

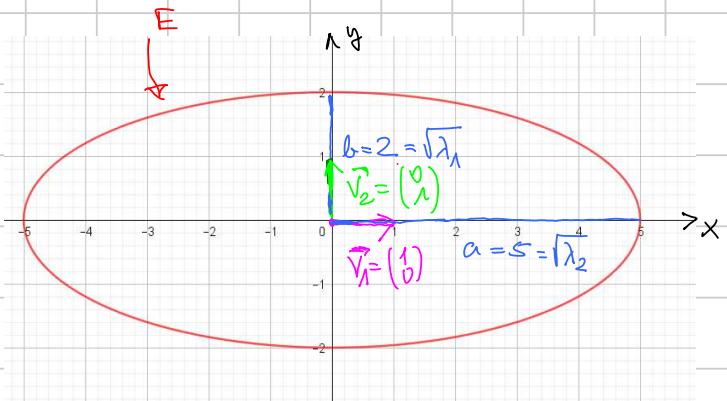
Ellipse mit Achsen parallel zu den Koordinatenachsen und Achssabschnitt  $a$  auf der x-Achse sowie Achssabschnitt  $b$  auf der y-Achse

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$a = 5, b = 2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



x-Achse, y-Achse also die Koordinatenachsen sind die Achsen der Ellipse E

Verbindung zu Matrizen, Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \underline{A} \cdot \vec{x} \rangle - 100 = 0 \right\}$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \underbrace{\langle \vec{x}, \underline{A} \cdot \vec{x} \rangle - 100 = 0}_1$$

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 25y \end{pmatrix} \quad \rightarrow 4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$$

$$\langle \vec{x}, \underline{A} \cdot \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ 25y \end{pmatrix} = 4x^2 + 25y^2$$

→ Eigenwerte & Eigenvektoren von  $\underline{A}$ :

$\lambda$  Eigenwert, wenn  $\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0$  ist

$$|\underline{A} - \lambda \underline{E}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(25-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 25 \text{ sind Eigenwerte von } \underline{A}$$

$$\text{Für } \vec{v}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \text{ gilt } \underline{A} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$  sind Eigenvektoren zu  $\lambda_1 = 4$

Für  $\vec{v}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$  gilt  $A \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25t \end{pmatrix} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$  sind Eigenvektoren zu  $\lambda_2 = 25$

für  $t=1$  erhalten wir zwei Eigenvektoren der Länge 1 nämlich

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$  bestimmen die Richtung der Achsen dieser Ellipse:  $\vec{g}_1(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \rightarrow x\text{-Achse}$

$\vec{g}_2(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \rightarrow y\text{-Achse}$

## 2. Konkretes Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}; \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + 7y \end{pmatrix}$$

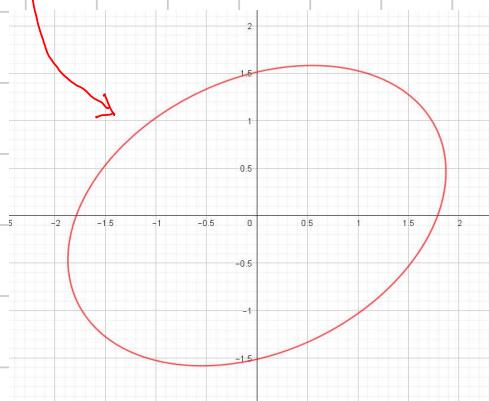
$$\langle \vec{x}, A \cdot \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x - \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + 7y \end{pmatrix} = 5x^2 - \sqrt{3}xy - \sqrt{3}xy + 7y^2 = 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2$$

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, A \cdot \vec{x} \rangle - 16 = 0 \right\}$$

gründt: Achsen der Ellipse und Achsenabschnitte!

Ansetz: Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$



$$0 = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda) - (-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) \\ = \lambda^2 - 12\lambda + 35 - 3 = \lambda^2 - 12\lambda + 32$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 8, \lambda_2 = 4 \leftarrow \text{Eigenwerte von } A$$

Zugehörige Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = \varphi \rightarrow (\underline{A} - \varphi \cdot \underline{E}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & v_1 & v_2 & \\ \hline -3 & -\sqrt{3} & 0 & \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & | \cdot (-\sqrt{3}) \\ \hline -3 & -\sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \rightarrow v_2 = t, -3v_1 = \sqrt{3}t \Rightarrow v_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}t$$

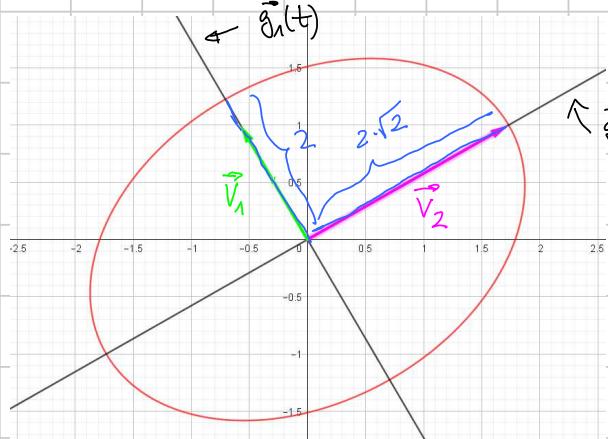
$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0 \rightarrow \vec{g}_1(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_2 = 4 \rightarrow (\underline{A} - 4 \cdot \underline{E}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{c|cc|c} & v_1 & v_2 & \\ \hline 1 & -\sqrt{3} & 0 & | \cdot \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 & | + \\ \hline 1 & -\sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \end{array} \rightarrow v_2 = t, v_1 = \sqrt{3}t$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\vec{g}_2(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$



die Eigenvektoren liefern die  
Richtung der Achsen der Ellipse  
und die Wurzeln der Eigenwerte  
liefern die Achslängen

$$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Ein weiteres Beispiel für Eigenwerte und Eigenvektoren einer  $(2 \times 3)$ -Matrix

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \leftarrow \text{gesucht: Eigenwerte \& Eigenvektoren von } \underline{A}$$

$$\underline{A} - \lambda \underline{E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = + (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 0 & \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= (3-\lambda) \cdot [(-\lambda) \cdot (-1-\lambda) - 0] + [2 \cdot (-1-\lambda) - 0 \cdot (-2)] \\
 &= (3-\lambda) \cdot (-\lambda) \cdot (-1-\lambda) + 2 \cdot (-1-\lambda) \\
 &= (-1-\lambda) \cdot [(3-\lambda) \cdot (-\lambda) + 2] \\
 &= (-1-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 3\lambda + 2]
 \end{aligned}$$

$$0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) \Leftrightarrow (-1-\lambda) \cdot [\lambda^2 - 3\lambda + 2] = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{A}}$  hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$

Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren:  $(\underline{\underline{A}} - \lambda_i \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3$

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_1 = -1} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & \\
 \hline
 4 & -1 & 0 & 0 \\
 2 & 1 & 0 & 0 \\
 -2 & 2 & 0 & 0 \\
 \hline
 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 3 & 0 & 0 \\
 \hline
 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -3 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array}
 \xrightarrow{\begin{array}{l} 1 \cdot (-2) \\ 1 \cdot 2 \end{array}}
 \left. \begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{array} \right\}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\boxed{\lambda_2 = 1}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 x & y & z & \\
 \hline
 2 & -1 & 0 & 0 \\
 2 & -1 & 0 & 0 \\
 -2 & 2 & -2 & 0 \\
 \hline
 2 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & -2 & 0
 \end{array}
 \xrightarrow{1 \cdot (-1)}
 \left. \begin{array}{l} 2x=y=2t \Rightarrow x=t \\ z=t, y=2t \end{array} \right\}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$\lambda_3 = 2$$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

$\leftarrow +$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

$\downarrow$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \neq 0$$

$$y = t, x = t$$

$$z = 0$$

## 37 Vorlesung 37 (13.01.2021)

**37.1 Definition: Diagonalmatrix**

**37.2 Definition: Potenzen von Matrix/Diagonalmatrix**

**37.3 Beispiel für Matrix-Potenzen**