23. Vorlesung 02.12.2020

Notiztitel 02.12.2020

Zusammenfassung Lineare Gleichungssysteme, n Gleichungen, k Unbekannte, $n \le k$

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nk}x_k = b_n \end{array}\right\} \qquad \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j = b_i \; ; \; 1 \le i \le n$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$

Gauß-Schema zur Lösung

$$\begin{array}{c|c} x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_k & \\ \hline \underline{\underline{A}} \left\{ \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{array} \right. & \left. \begin{array}{c} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right\} \vec{b} \\ \hline \end{array}$$

Vorwärtselimination

Hauptdiagonale

$$\tilde{\underline{\underline{A}}} \left\{ \begin{array}{cccc|c} \tilde{a}_{11} & \dots & \dots & \tilde{a}_{1k} & \tilde{b}_1 \\ & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2k} & \tilde{b}_2 \\ & & \tilde{a}_{\ell\ell} \dots & \tilde{a}_{\ell k} & \tilde{b}_\ell \\ & 0 & & & \tilde{b}_{\ell+1} \\ & & & & \tilde{b}_n \end{array} \right.$$

Ende der Vorwärtselimination

Lösung startet mit Vorwärtselimination.

Ziel: Mit elementaren Umformungen wird das System überführt in ein neues System mit derselben Lösungsmenge; das neue System hat Dreiecks- bzw. Trapezform

Am Ende der Vorwärtselimination kann man eindeutig entscheiden, ob das System keine Lösung hat ($\mathbb{L} = \emptyset$) oder genau eine Lösung hat ($\mathbb{L} = \{\vec{x}_0\}$) oder unendlich viele Lösungen mit s freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_s$ ($\mathbb{L} = \{\vec{x}_0 + \sum_{i=1}^{s} t_i \vec{x}_i \mid t_i \in \mathbb{R}\}$):

Es gilt:

1) $\mathbb{L} = \emptyset$ falls $rg(\underline{\underline{A}}) \neq rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$
2) $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) \Rightarrow$ Gleichungssystem ist lösbar mit $s = k - rg(\underline{\underline{A}})$ freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_s$ in der Lösung ($k \mathrel{\hat=}$ Anzahl der Unbekannten)

Definition:

1) Der Rang der Matrix $\underline{\underline{A}}$ ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen von $\tilde{\underline{\underline{A}}}$ am Ende der Vorwärtselimination.
Nicht-Nullzeile $\mathrel{\hat=}$ Elemente der Zeile sind nicht alle gleich Null!
2) Der erweiterte Rang des lin. GLS ist die Anzahl der Nicht-Nullzeilen im kompletten Gauß-Schema $\tilde{\underline{\underline{A}}}|\tilde{\vec{b}}$ am Ende der Vorwärtselimination.
3) Für den Rang von $\underline{\underline{A}}$ schreibt man $rg(\underline{\underline{A}})$; für den erweiterten Rang schreibt man $rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$

Falls $\mathbb{L} \neq \emptyset$ ist, berechnet man die Lösung durch Rücksubstitution mit $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ und $\vec{\tilde{b}}$ am Ende der Vorwärtselimination!

Beispiel (siehe 22. Vorlesung), $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ -5x + 5y - z &= \alpha \end{aligned}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Gauß-Schema

x	y	z		
1	1	1	1	$\vert\cdot 3$ $\vert\cdot 5$
−3	2	−1	2	+
−5	5	−1	α	+
1	1	1	1	
0	5	2	5	$\vert\cdot(-2)$
0	10	4	$\alpha+5$	+
1	1	1	1	
0	5	2	5	
0	0	0	$\alpha - 5$	

(oberer Block: $\underline{\underline{A}}$, $\vec{b}$; unterer Block: $\underline{\underline{\tilde{A}}}$, $\vec{\tilde{b}}$)

Vorwärtselim. mit elementaren Umformungen

Ende der Vorwärtselimination

$rg(\underline{\underline{A}}) = 2$ denn $\underline{\underline{\tilde{A}}}$ hat 2 Nicht-Nullzeilen

$rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) = 2$, wenn $\alpha = 5$ ist, denn dann hat auch $\underline{\underline{\tilde{A}}}|\vec{\tilde{b}}$ 2 Nicht-Nullzeilen

$rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) = 3$, wenn $\alpha \neq 5$ ist, denn dann ist $\alpha - 5 \neq 0$ und $\underline{\underline{\tilde{A}}}|\vec{\tilde{b}}$ hat 3 Nicht-Nullzeilen

Also: Das GLS ist lösbar für $\alpha = 5$, für $\alpha \neq 5$ gilt $\mathbb{L} = \emptyset$.

Für $\alpha = 5$ gibt es unendlich viele Lösungen mit $3 - 2 = 1$ freien

$k = 3$, Anzahl der Unbek. (3), $rg(\underline{\underline{A}})$ (2)

Parametern, man erhält mit $\alpha = 5$ am Ende der Vorwärtselimination

x	y	z	
1	1	1	1
0	5	2	5
0	0	0	0

$\to x = 1 - y - z = \frac{2}{5}t - t = -\frac{3}{5}t$

zum Start der Rücksubstitution

setze $z = t$ ← 1 freier Parameter

$5y = 5 - 2t \Rightarrow y = 1 - \frac{2}{5}t$

$$\Rightarrow \mathbb{L}(\alpha=5) = \left\{ \begin{pmatrix} -3/5\, t \\ 1 - 2/5\, t \\ t \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Folgerungen aus der Lösungstheorie

1) Gegeben ist $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$; ein lineares GLS mit n Gleichungen für k Unbekannte $n \leq k$, es gilt immer:

$$rg(\underline{\underline{A}}) \leq n \quad \Rightarrow \quad \text{Anzahl freier Parameter } s = k - rg(\underline{\underline{A}}) \geq k - n \geq 0$$

$s = 0$ (also kein freier Parameter) und damit eindeutige Lösbarkeit erreicht man nur, wenn $k = n = rg(\underline{\underline{A}})$ ist, d.h. Anzahl Gleichungen muß gleich der Anzahl der Unbekannten sein und $rg(\underline{\underline{A}})$ muss maximal also auch gleich n sein! In allen anderen Fällen ist entweder $\mathbb{L} = \emptyset$ oder $\mathbb{L}$ hat unendlich viele Elemente mit s freien Parametern!

2)
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_p} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{x}_h} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Behauptung: $\vec{x}_p$ löst $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, d.h. $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_p = \vec{b}$, denn:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x}_p = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ -3\cdot 0 + 2\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ -5\cdot 0 + 5 \cdot 1 - 1\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \checkmark$$

$\vec{x}_h = t \cdot \begin{pmatrix} -3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist die allgemeine Lösung von $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, denn

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0} \xrightarrow[\text{Schema}]{\text{Gauß-}} \quad \vec{b} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c|ccc|cl}
 & x & y & z & & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdot 3 \quad \cdot 5 \\
\underline{\underline{A}} & -3 & 2 & -1 & 0 & + \\
 & -5 & 5 & -1 & 0 & + \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & 0 & 5 & 2 & 0 & \cdot(-2) \\
 & 0 & 10 & 4 & 0 & + \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & \to x = -y - z = \frac{2}{5}t - t = \frac{3}{5}t \\
\tilde{\underline{\underline{A}}} & 0 & 5 & 2 & 0 & \text{zum Start der Rücksubstitution} \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 & z = t \Rightarrow y = -\frac{2}{5}t \\
\hline
\end{array}$$

$rg(\underline{\underline{A}}) = 2$

$\underbrace{rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{0}) = 2}$

System lösbar mit $1 = 3 - 2$ freien Parametern

$$\Rightarrow \mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} 3/5\, t \\ -2/5\, t \\ t \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 3/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>Definition:</u> Gegeben ist ein lineares GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, n Gleichungen mit K Unbekannten $(n \leq K)$.

1) Falls $\vec{b} = \vec{0}$, also $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$, ist, spricht man vom homogenen linearen Gleichungssystem

2) Falls $\vec{b} \neq \vec{0}$, also mindestens ein $b_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, ist, spricht man von inhomogenen linearen Gleichungssystem

3) Wenn man ein inhomogenes lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, hat, ist $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ das zugehörige homogene lineare GLS.

Es gilt folgendes

<u>Satz:</u> (Lösungsstruktur linearer Gleichungssysteme)

1) Ein homogenes lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ hat immer mindestens eine Lösung, nämlich $\vec{x} = \vec{0}$ $(x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_k = 0)$

2) Ist bei einem homogenen lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = 0$
$s = K - rg(\underline{\underline{A}}) \neq 0$, dann hat man Lösungen mit s freien Parametern $t_1, t_2, \dots, t_s$. Die Lösungsmenge ist
$$\mathbb{L}_h = \left\{ \vec{x}_h = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_s\vec{x}_s \;\middle|\; t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq s \right\}$$
$\vec{x}_h = t_1\vec{x}_1 + t_2\vec{x}_2 + \dots + t_s\vec{x}_s$ nennt man auch die allgemeine Lösung des homogenen lin. GLS.

3) Das inhomogene lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ ist nur lösbar, wenn $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})$ ist. Ist $s = K - rg(\underline{\underline{A}}) > 0$, dann hat man Lösungen mit s freien Parametern, die Lösungsmenge hat die Form
$$\mathbb{L} = \left\{ \vec{x}_p + \underbrace{t_1\vec{x}_1 + \dots + t_s\vec{x}_s}_{\vec{x}_h} \;\middle|\; t_1, t_2, \dots, t_s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dabei gilt: $\vec{x}_h$ ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ und $\vec{x}_p$ ist eine spezielle/partikuläre

Lösung des inhomogenen GLS, also gilt $\underline{\underline{A}}\cdot\vec{x}_p=\vec{b}$.

Beispiele:

1) $2x+y-z=4$ ← $\underbrace{n=1 \text{ Gleichung für } k=3 \text{ Unbekannte}}_{\text{lin. GLS mit } n \text{ Gleichungen für } k \text{ Unbekannte } n\le k}$

Gauß-Schema

x	y	z	
2	1	-1	4

← zum Start der Rücksubstitution setze $z=t_1,\ y=t_2$ (2 freie Parameter)

$$2x = 4-y+z = 4-t_2+t_1 \Rightarrow x = 2-\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}t_1$$

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}2-\frac{1}{2}t_2+\frac{1}{2}t_1\\ t_2\\ t_1\end{pmatrix} \,\middle|\, t_1,t_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}}_{\vec{x}_p}+\underbrace{t_2\cdot\begin{pmatrix}-1/2\\1\\0\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}1/2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{x}_h}$$

$rg(\underline{\underline{A}})=1,\ rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})=1$

$\Rightarrow$ System lösbar mit

$3-1=2$ freien Parametern

2)
$$\begin{aligned}5x-6y+z&=1\\ -x+2y-z&=2\end{aligned}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}5&-6&1\\-1&2&-1\end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\vec{x}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}}_{\vec{b}}$$

Gauß-Schema →

x	y	z		
5	-6	1	1	+
-1	2	-1	2	$\cdot 5$
5	-6	1	1	$5x=1+6y-z$
0	4	-4	11	$z=t,\ y=\frac{11}{4}+t$

$rg(\underline{\underline{A}})=rg(\underline{\underline{A}}|\vec{b})=2$

Lösungen mit $3-2=1$ freien Parameter

$$5x=1+\frac{33}{2}+6t-t=\frac{35}{2}+5t$$

$$\Rightarrow x=\frac{7}{2}+t$$

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}7/2+t\\ 11/4+t\\ t\end{pmatrix} \,\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$$