Definition:

Spaltenanzahl $\underline{\underline{A}}$ = Zeilenanzahl $\underline{\underline{B}}$

Gegeben sind eine $(n \times k)$-Matrix $\underline{\underline{A}}$ und eine $(k \times \ell)$-Matrix $\underline{\underline{B}}$.
Dann (und nur dann) ist das Produkt $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ definiert durch:

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}} \cdot \left(\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \dots \vec{b}_\ell \right) = \underbrace{\left(\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_1 \ \ \underline{\underline{A}}\vec{b}_2 \ \cdots \ \underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_\ell \right)}_{\text{Spaltenvektoren für } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}} \in M(n \times \ell)$$

Spaltenvektoren $\vec{b}_j \in \mathbb{R}^k, 1 \le j \le \ell$

$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}_j \in \mathbb{R}^n, 1 \le j \le \ell$

Beispiele:

(1)

$$\underbrace{\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}}_{(2\times 3)}, \quad \underbrace{\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}_{(3\times 2)}$$

✓

$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ ist definiert, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2\times 2)$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 17 & 10 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

Matrixprodukt ist nicht kommutativ!

$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ ist definiert und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \in M(3\times 3)$

(3x2) (2x3) ✓

$$\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 7 & 13 & 6 \\ 4 & -13 & -4 \end{pmatrix}$$

(2) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$\underset{(2\times 2)}{\underline{\underline{A}}} \cdot \underset{(2\times 3)}{\underline{\underline{B}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \text{ ist definiert, } \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \in M(2\times 3)$$

$$\underset{(2\times 3)}{\underline{\underline{B}}} \cdot \underset{(2\times 2)}{\underline{\underline{A}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}} \text{ ist } \underline{\text{nicht}} \text{ definiert!}$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \end{pmatrix}$$

Rechenregeln für das Matrizenprodukt

Die im Folgenden auftretenden Produkte sollen jeweils definiert sein.
Es gilt:

① In der Regel ist $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$ (das Matrixprodukt ist nicht kommutativ)

② $\underline{\underline{A}} \cdot (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) \cdot \underline{\underline{C}}$

③ $\underline{\underline{A}} \in M(n \times k)$; $\underline{\underline{B}} \in M(k \times \ell) \wedge \underline{\underline{C}} \in M(k \times \ell)$:

$$\underline{\underline{A}} \cdot (s \cdot \underline{\underline{B}} + t \cdot \underline{\underline{C}}) = s \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}) + t \cdot (\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{C}}) \quad \forall s,t \in \mathbb{R}$$

Weitere Beispiele im Umfeld Matrizen und Vektoren

① Erinnerung: Gegeben ist $\underline{\underline{A}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le k}} \in M(n \times k)$,

dann ist die transponierte Matrix $\underline{\underline{A}}^t$ definiert durch

$\underline{\underline{A}}^t = (a_{ji})_{\substack{1 \le j \le k \\ 1 \le i \le n}}$ ($\underline{\underline{A}}^t$ entsteht aus $\underline{\underline{A}}$ durch das Vertauschen von Zeilen und Spalten)

$$\underbrace{\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(3\times 4)} \Rightarrow \underbrace{\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}}_{\in M(4\times 3)}$$

$$\underline{\underline{A}} \in M(n\times k),\ \underline{\underline{A}}^t \in M(k\times n) \Rightarrow \underline{\underline{A}}\cdot\underline{\underline{A}}^t \in M(n\times n) \text{ ist definiert}$$

$$\underline{\underline{A}}^t \in M(k\times n),\ \underline{\underline{A}} \in M(n\times k) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^t\cdot\underline{\underline{A}} \in M(k\times k) \text{ ist definiert}$$

$$\underset{(3\times 4)}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{(4\times 3)}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 22 & 11 & 0 \\ 11 & 18 & 4 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}}_{\in M(3\times 3)}$$

② $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow$ auffassen/deuten als $(n\times 1)$-Matrix

$\Rightarrow \vec{v}^{\,t} = (v_1\ v_2 \dots v_n)$

$\quad \hookrightarrow (1\times n)$-Matrix

Als „Matrixprodukt" erhält man

$$\vec{v}^{\,t}\cdot\vec{v} = \underset{(1\times n)}{(v_1\ v_2 \dots v_n)} \cdot \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} = \underbrace{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}_{\in \mathbb{R}\ \hat{=}\ \text{„}(1\times 1)\text{-Matrix"}} = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v}\cdot\vec{v}^{\,t} = \underset{(n\times 1)}{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}} \cdot \underset{(1\times n)}{(v_1\ v_2 \dots v_n)} = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1v_2 & v_1v_3 & \dots & v_1v_n \\ v_2v_1 & v_2^2 & v_2v_3 & \dots & v_2v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ v_nv_1 & v_nv_2 & v_nv_3 & \dots & v_n^2 \end{pmatrix}$$

Hauptdiagonale

Konkret:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}^t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3^2 + 1^2 + 5^2 = 35 = |\vec{v}|^2$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v}^t = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 3 & 15 \\ 3 & 1 & 5 \\ 15 & 5 & 25 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matrizen:

Definition: Eine Matrix $\underline{A}$ heißt quadratisch, wenn gilt Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten.

$M(n \times n) = \{ \underline{A} \mid \underline{A}$ hat n Zeilen und n Spalten$\}$ ist die Menge aller quadratischen Matrizen mit n Zeilen und n Spalten.

Beispiele:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M(2 \times 2); \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3)$$

$$\underline{\underline{C}} = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} \text{ mit } c_{ij} = i + j : \quad \underline{\underline{C}} \in M(n \times n)$$

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n+1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n+2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+1 & n+2 & n+3 & \cdots & n+n \end{pmatrix}$$

Spezielle quadratische Matrizen:

$$\underline{\underline{O}} = \underline{\underline{O}}_n \in M(n \times n) \text{ mit } \underline{\underline{O}}_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ Nullmatrix

$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_n \in M(n \times n)$ mit $\underline{\underline{E}}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ Einheitsmatrix

Es gilt für $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$: $\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{A}}$, $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{0}} = \underline{\underline{0}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{0}}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}$$

Quadratische Matrizen und lineare Gleichungssysteme mit quadratischen Matrizen als Koeffizientenmatrix

, d.h. Anzahl Gleichungen = Anzahl Unbekannte.

Einführung: $\underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ also $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

mit $a = a_{11}$, $b = a_{12}$, $c = a_{21}$, $d = a_{22}$.

Das lineare GLS dazu ist $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{l} ax + by = d_1 \\ cx + dy = d_2 \end{array}\right\} \text{2 lin. Gleichungen für 2 Unbekannte}$$

Gauß-Schema

$rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}} | \vec{d}) = 2$ falls $ad - bc \neq 0$ ist, dann hat das lin. GLS genau eine Lösung, nämlich

x	y		
a	b	d_1	$\cdot(-c)$
c	d	d_2	$\cdot a$ +
a	b	d_1	
0	$ad - bc$	$ad_2 - cd_1$	

$$y = \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$$

$$ax = d_1 - by = d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc}$$

$$x = \frac{1}{a} \cdot \left[d_1 - b \cdot \frac{ad_2 - cd_1}{ad - bc} \right]$$

Definition:

Für eine (2×2)-Matrix $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist die Determinante von $\underline{\underline{A}}$

definiert als $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

Aus dem einführenden Beispiel folgt:

(*) $\boxed{\text{Das lin. GLS } \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{d} \text{ hat genau eine Lösung, falls } \det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \neq 0 \text{ ist.}}$

Beispiele:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \implies$$

$$|\underline{\underline{A}}| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2 \neq 0, \quad |\underline{\underline{C}}| = 4 \cdot 4 - 3 \cdot 6 = 16 - 18 = -2$$

$$|\underline{\underline{B}}| = (-1) \cdot (-6) - 2 \cdot 3 = 6 - 6 = 0$$

Definition:

Die quadratische Matrix $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ heißt invertierbar, wenn eine Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$ existiert mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}_n$.
$\underline{\underline{A}}^{-1}$ heißt dann die inverse Matrix zu $\underline{\underline{A}}$.

Einschub: $\underbrace{(1 \times 1)\text{-Matrizen } \underline{\underline{A}} = (a_{11}) \text{ mit } a_{11} \in \mathbb{R}}$

Kurz: $\underline{\underline{A}} = a_{11}$ ← jede reelle Zahl kann als (1×1)-Matrix aufgefasst werden!

$\underline{\underline{A}} = a_{11}$ ist invertierbar, wenn $\underline{\underline{A}}^{-1} = a_{11}^{-1} = \frac{1}{a_{11}}$ existiert, dann ist $\underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} = \frac{1}{a_{11}} \cdot a_{11} = 1 = \underline{\underline{E}}$; dies ist erfüllt für $a_{11} \neq 0$.

Die (1×1)-Matrix $\underline{\underline{A}} = (a_{11})$ ist nur invertierbar, wenn $a_{11} \neq 0$ gilt.

Frage: Unter welcher Bedingung sind $(n \times n)$-Matrizen invertierbar?
Wann existiert $\underline{\underline{A}}^{-1} \in M(n \times n)$ mit $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$?

Bemerkung: Aus $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ folgt immer auch $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$.

→ Wie sieht das bei (2×2)-Matrizen aus?

Spezialfall: $\underline{\underline{A}} \in M(2 \times 2)$ d.h. $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Gesucht ist $\underline{\underline{A}}^{-1}$ mit $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$: Ansatz $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}} \iff \underline{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}}_{=\underline{\underline{A}}^{-1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\underline{\underline{E}}}$$

$$\iff \underbrace{\underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}^{\vec{e}_1} \wedge \underline{\underline{A}} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}^{\vec{e}_2}}_{\text{2 lineare Gleichungssysteme mit identischer Koeffizientenmatrix } \underline{\underline{A}}}$$

2 lineare Gleichungssysteme mit <u>identischer</u> Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ aber zwei verschiedenen rechten Seiten, nämlich $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$

(*) liefert: Falls $\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| \neq 0$ ist, sind beide lin. GLS eindeutig lösbar, d.h. es gibt genau eine inverse Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} x & \tilde{x} \\ y & \tilde{y} \end{pmatrix}$, dabei ist $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ die Lösung von $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{e}_1$ und $\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$ die Lösung von $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{e}_2$