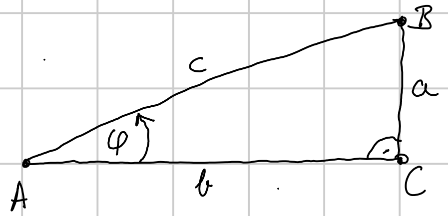
29. Vorlesung 16.12.2020

Notiztitel 16.12.2020

Geometrie und ein zweiter Blick auf Skalarprodukt und Vektorprodukt

Geometrie im rechtwinkligen Dreieck



a, b Katheten des Dreiecks

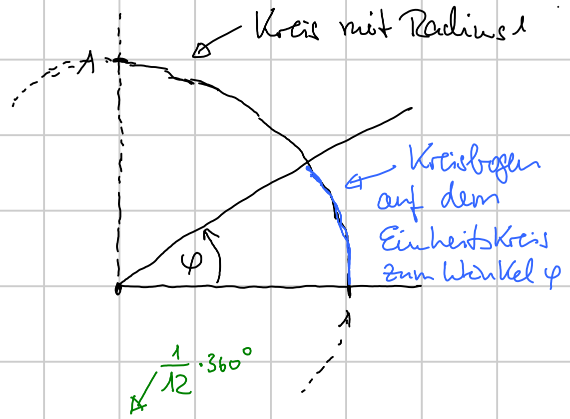
c Hypothenuse

a Gegenkathete zu φ

b Ankathete zu φ

$$\sin(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{a}{c}, \quad \cos(\varphi) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}} = \frac{b}{c}$$

Messen des Winkels φ



$\frac{1}{12} \cdot 360°$

$φ°$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°
$φ$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π

$\frac{1}{12} \cdot 2\pi$

Winkelmessung in Grad

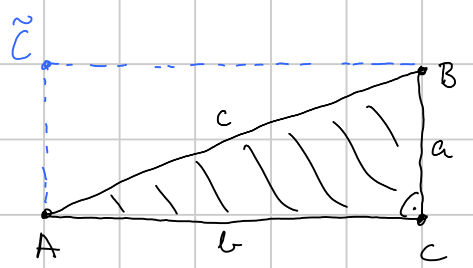
Vollkreis (Kompletter Kreis) $\hat{=}$ $360° \in \mathbb{R}$

Winkel φ erzeugt Kreisausschnitt also einen Bruchteil des Vollkreises z.B. $\frac{1}{n}$-tel, dann hat φ die Maßzahl $\frac{360°}{n} \in \mathbb{R}$

Winkelmessung im Bogenmaß

Kreis mit Radius 1 hat Umfang $2\pi \in \mathbb{R}$

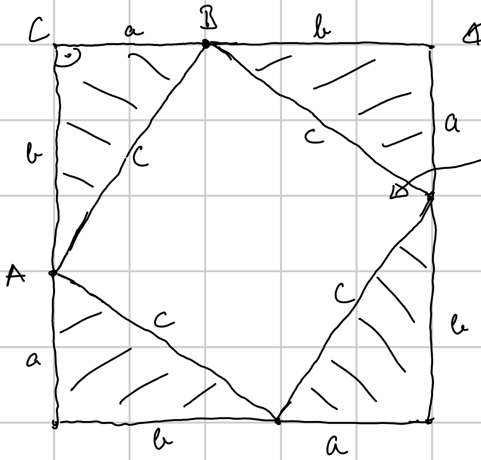
Winkel φ erzeugt Kreisbogen auf dem Umfang, die Maßzahl für den Winkel φ ist die Länge dieses Kreisbogens als Anteil des Gesamtumfangs $2\pi \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{n} \in \mathbb{R}$ bei $\frac{1}{n}$-tel Anteil



Flächeninhalt des Dreiecks

$$Fl(\Delta(ABC)) = \frac{1}{2} Fl(\square(A, \tilde{C}, B, C)) = \frac{1}{2} a \cdot b$$

$$\Rightarrow Fl(\Delta(ABC)) = \frac{a \cdot b}{2}$$



$\text{Fl (großes Quadrat)} = (a+b)^2$

$\text{Fl (Kleines Quadrat)} = c^2$

$\text{Fl (großes Quadrat)} =$

$\text{Fl (Kleines Quadrat)} + 4 \cdot \text{Fl (Dreiecke)}$

insgesamt

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + \cancel{2ab} + b^2 = c^2 + \cancel{2ab} \quad \Big| -2ab$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = c^2$$

Im rechtwinkligen Dreieck mit Hypothenuse c und den Katheten a und b gilt der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$

$\Rightarrow$ (mit $\frac{a}{c} = \sin(\varphi)$, $\frac{b}{c} = \cos(\varphi)$ im rechtw. Dreieck)

$\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi) = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbb{R}$ $\leftarrow$ trigonometrischer Pythagoras

Typische Werte für $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ liefert eine Wertetabelle

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3\pi}{2}$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	n/a	0	n/a	0
$\cot\alpha$	n/a	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	n/a	0	n/a

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}, \quad \cot(\alpha) = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

Skalarprodukt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$$

Betrag: $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$: $|\vec{a}| = \sqrt{\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$

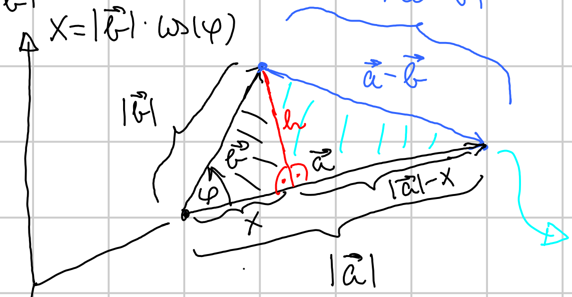
$\to$ im $\mathbb{R}^2 / \mathbb{R}^3$ Konkrete geometrische Bedeutung

$|\vec{a}| \leftarrow$ Vektorlänge $\hat{=}$ Länge des zug. Pfeils

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)} \leftarrow \varphi = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$$

$\frac{x}{|\vec{b}|} = \cos(\varphi) \Rightarrow$

$x = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$



$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}-\vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a}-\vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a}-\vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle - \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle - \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle} + \langle \vec{b}, \vec{b} \rangle \Rightarrow$$

$$\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2}_{(*)}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = h^2 + (|\vec{a}|-x)^2$$

$$\underbrace{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}|-x)^2}_{①}$$

$\to \frac{h}{|\vec{b}|} = \sin(\varphi) \Rightarrow h^2 = |\vec{b}|^2 \cdot \sin^2(\varphi)$

$$(|\vec{a}|-x)^2 = |\vec{a}|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot x + x^2 \qquad x = |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\underbrace{= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cdot \cos^2(\varphi)}_{②}$$

damit $|\vec{a}-\vec{b}|^2 \overset{①}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + (|\vec{a}|-x)^2$

$$\overset{②}{=} |\vec{b}|^2 \sin^2(\varphi) + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\varphi) + |\vec{b}|^2 \cos^2(\varphi)$$

$= 1$ trig. Pythagoras

$$= |\vec{b}|^2 \cdot (\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) + |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

also $\boxed{|\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)}$ $(**)$

insgesamt

$$|\vec{a}|^2 - 2\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + |\vec{b}|^2 \underset{(*)}{=} |\vec{a}-\vec{b}|^2 \underset{(**)}{=} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

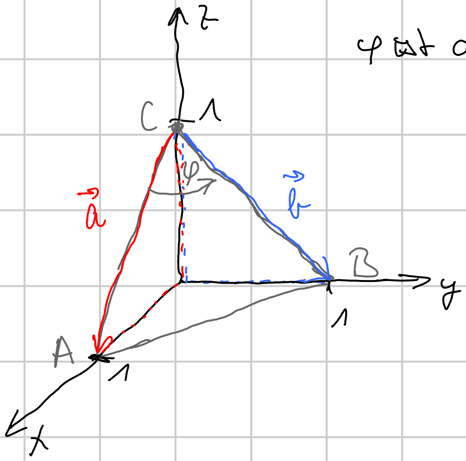
$$\cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{|\vec{b}|^2} - 2\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \cancel{|\vec{a}|^2} + \cancel{|\vec{b}|^2} - 2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi) \quad \Big| - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

$$-2\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = -2\,|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi) \quad \Big|\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\boxed{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)}$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \text{für } \vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0}$$

Beispiel: Berechnen Sie den Winkel φ am Punkt C des Dreiecks!



φ ist der Winkel zwischen

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{1^2+0^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

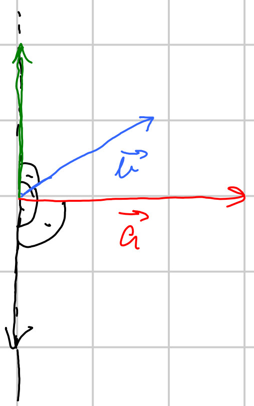
$$|\vec{b}| = \sqrt{0^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\langle \vec{a},\vec{b}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 1$$

$$\Rightarrow \cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a},\vec{b}\rangle}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{Tabelle}]{} \varphi = \frac{\pi}{3}\ (60^\circ)$$

Vektorprodukt (nur im $\mathbb{R}^3$ definiert)

$\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^3\setminus\{\vec{0}\}$: Es gilt $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$ und $\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{b}$

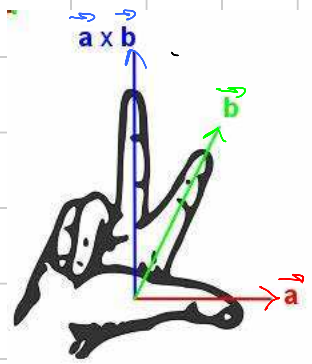


$\vec{a}\times\vec{b}$ ist so gerichtet, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\times\vec{b}$ ein „Rechtssystem" im Sinne der „Drei-Finger-Regel der rechten Hand":

Daumen $\to \vec{a}$

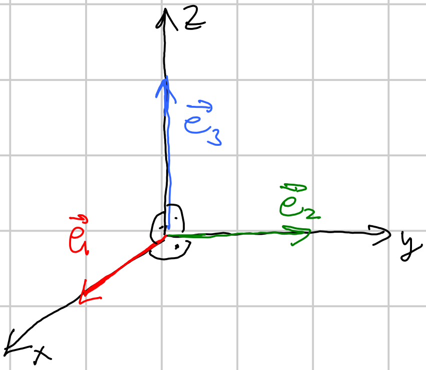
Zeigefinger $\to \vec{b}$

Mittelfinger $\to \vec{a}\times\vec{b}$



$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}:\quad \vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-b_2a_3\\b_1a_3-a_1b_3\\a_1b_2-b_2a_1\end{pmatrix}$$

Beispiel:



$$\underbrace{\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}_{\text{Standardbasis des } \mathbb{R}^3}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$$

$|\vec{e}_i|=1$ für $i=1,2,3$

$$\vec{e}_1\times\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0-1\cdot0\\0\cdot0-1\cdot0\\1\cdot1-0\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2\times\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1-0\cdot0\\0\cdot0-0\cdot1\\0\cdot0-0\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3\times\vec{e}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot0-0\cdot1\\1\cdot1-0\cdot0\\0\cdot0-1\cdot0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{e}_2$$

Standardbasis $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ ist eine <u>Orthonormalbasis</u>, d.h. die Basisvektoren haben alle Betrag 1, sie stehen paarweise senkrecht (orthogonal) aufeinander

Außerdem bilden $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ ein Rechtssystem!

Eine längere technische Rechnung zeigt: $|\vec{a}\times\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-\langle\vec{a},\vec{b}\rangle^2$, damit folgt (wegen $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\varphi)$)

$$\begin{aligned}|\vec{a}\times\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\cos^2(\varphi)\\&=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot(1-\cos^2(\varphi))\\&=|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2\cdot\sin^2(\varphi)\end{aligned}$$

$\leftarrow$ $\sin^2(\varphi)+\cos^2(\varphi)=1$
$\sin^2(\varphi)=1-\cos^2(\varphi)$

$$\Rightarrow (0\le\varphi\le\pi)\quad \boxed{|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi)}$$