1. Aufgabe

a) $\sum_{n=4}^{7} \binom{n}{n-2} = \binom{4}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5}$ „stures" Einsetzen, dann ausrechnen

2. Variante Symmetrie von Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \text{ also } \binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-(n-2)} = \binom{n}{2}$$

$$\sum_{n=4}^{7} \binom{n}{n-2} = \sum_{n=4}^{7} \binom{n}{2} = \binom{4}{2} + \binom{5}{2} + \binom{6}{2} + \binom{7}{2}$$

$$= \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2} + \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{7\cdot 6}{1\cdot 2}$$

$$= 6 + 10 + 15 + 21 = 52$$

c) $\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i}$ ← $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} \cdot b^i$ ← $a=1, b=1, n=10$

$$\sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} \cdot 1^{10-i} \cdot 1^i$$

$$= (\underset{a}{1} + \underset{b}{1})^{10} = 2^{10} = 1024$$

d) $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ $\quad a=1 \quad b=1$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} 1^{n-k} \cdot 1^k$$

$$= (1-1)^n = 0^n = 0$$

2. Aufgabe

a)

$$\begin{aligned}
8^2 - x^6 &= (2^3)^2 - x^6 \\
&= 2^6 - x^6 \\
&= (2^3)^2 - (x^3)^2 \\
&= (2^3 - x^3) \cdot (2^3 + x^3) \\
&= (2 - x) \cdot (2^2 - 2x + x^2) \cdot (2^3 + x^3) \\
&\Rightarrow p(x) = (2^2 - 2x + x^2) \cdot (2^3 + x^3)
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

zu Aufgabe 3: Berechnung von Quadratzahlen natürlicher Zahlen, wenn die letzte Ziffer eine 5 ist!

$\underbrace{156}_{n\cdot(n+1)} \cdot 100 + 25$

$125^2 = 15625$

$n = 12,\ n\cdot(n+1) = 12 \cdot 13$

$12 \cdot 10 + 5$

$\underbrace{72}_{n\cdot(n+1)} \cdot 100 + 25$

$85^2 = 7225$

$n = 8,\ n\cdot(n+1) = 8 \cdot 9$

$8 \cdot 10 + 5$

Warum geht das? $a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a\, 5 = z$ gesucht z^2

$z = a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1 5 = \underbrace{(a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1)}_{n} \cdot 10 + 5$

$\Rightarrow z = n \cdot 10 + 5 \Rightarrow z^2 = (n \cdot 10 + 5)^2$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{aligned}
&= (n\cdot 10)^2 + 2\cdot(n\cdot 10)\cdot 5 + 5^2 \\
&= \underbrace{n^2 \cdot 100 + n \cdot 100} + 25 \\
&= \underbrace{(n^2 + n)} \cdot 100 + 25 \\
&= n\cdot(n+1) \cdot 100 + 25 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(10n + 5)^2 &= (10n)^2 + 2 \cdot 10n \cdot 5 + 5^2 \\
&= 100n^2 + 100n + 25 \\
&= 100 \cdot n(n+1) + 25
\end{aligned}$$

4. Aufgabe

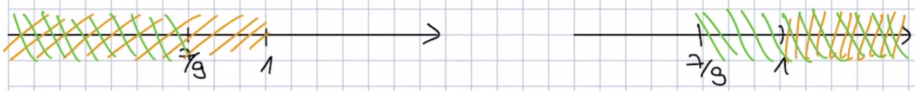
4 b) (*) $\frac{x+1}{2-2x} \le 4 \quad |\cdot(2-2x)$ $\qquad \mathbb{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

1. Fall: $2-2x > 0$
$\Leftrightarrow 2 > 2x$
$\Leftrightarrow 1 > x$

(*) $x+1 \le 4\cdot(2-2x)$
$x+1 \le 8-8x \quad |+8x; -1$
$9x \le 7 \quad |:9$
$x \le 7/9$

2. Fall: $2-2x < 0$
$\Leftrightarrow 2 < 2x$
$\Leftrightarrow 1 < x$

(*) $x+1 \ge 4\cdot(2-2x)$
$x+1 \ge 8-8x \quad |+8x; -1$
$9x \ge 7 \quad |:9$
$x \ge 7/9$



$\mathbb{L}_1 = (-\infty; 7/9]$ $\qquad \mathbb{L}_2 = (1; \infty)$

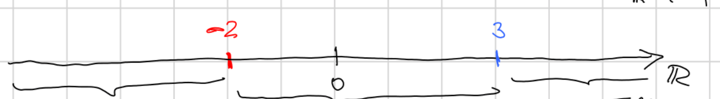
$\Rightarrow \mathbb{L}_G = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty; 7/9] \cup (1; \infty)$

Zu Aufgabe 4d: $|x+2| = |x-3|$

Vorzeichenwechsel bei -2 — Vorzeichenwechsel bei $+3$

Welche Fälle muss man bei der Fallunterscheidung betrachten!

$\mathbb{R} = (-\infty,-2) \cup [-2,3) \cup [3,+\infty)$



1. Fall: $x < -2$
d.h. $x \in (-\infty,-2)$

$x < -2 \Rightarrow x+2<0 \wedge x-3<0$

$|x+2| = |x-3|$ auflösen der Beträge
$-(x+2) = -(x-3)$
$-x-2 = -x+3 \quad |+x+2$
$0 = 5$ ↯
$\mathbb{L}_1 = \emptyset$

2. Fall: $-2 \le x < 3$
d.h. $x \in [-2,3)$ ✓

$x+2 \ge 0 \wedge x-3<0$

$|x+2| = |x-3|$
$x+2 = -(x-3)$
$x+2 = -x+3 \quad |+x-2$
$2x = 1$
$x = \frac{1}{2} \in [-2,3)$ ✓
$\mathbb{L}_2 = \{\frac{1}{2}\}$

3. Fall: $x \ge 3$
d.h. $x \in [3,+\infty)$

$x+2 \ge 0 \wedge x-3 \ge 0$

$|x+2| = |x-3|$
$x+2 = x-3 \quad |-x-2$
$0 = -5$ ↯
$\mathbb{L}_3 = \emptyset$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{\frac{1}{2}\}$

6. Aufgabe

A4

$$\begin{aligned} A_4 &= 25r^2 - 40rs + 16s^2 + 49t^2 - 70tq + 25q^2 \\ &= (5r - 4s)^2 + (7t - 5q)^2 \end{aligned}$$

A5

zur 6. Aufgabe Finden Sie Binome bzw. berechnen Sie mit geeigneten Binomen

(a5) 99^2

$$99^2 = (100-1)^2 = 100^2 - 2\cdot 1\cdot 100 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

A6

$$\begin{aligned} A_6 &= 81^2 \\ &= (80 + 1)^2 \\ &= 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 1 + 1^2 \\ &= 6400 + 160 + 1 \\ &= 6561 \end{aligned}$$

B1

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{39a^3 - 39a^2}{13a^2 - 13a} \\ &= \frac{13a(3a^2 - 3a)}{13a(a-1)} \\ &= \frac{3a^2 - 3a}{a - 1} \\ &= \frac{3a(a-1)}{a-1} \\ &= 3a \end{aligned}$$

B2

$$
\begin{aligned}
B_2 &= \frac{15ab - 30b^2}{5a^2b - 20ab^2 + 20b^3} \\
&= \frac{15ab - 30b^2}{5b(a^2 - 4ab + 4b^2)} \\
&= \frac{15ab - 30b^2}{5b(a^2 - 2 \cdot a \cdot (2b) + (2b)^2)} \\
&= \frac{5b(3a - 6b)}{5b(a - 2b)^2} \\
&= \frac{3a - 6b}{(a - 2b)^2} \\
&= \frac{3(a - 2b)}{(a - 2b)^2} \\
&= \frac{3}{a - 2b}
\end{aligned}
$$

C1

$$
\begin{aligned}
C_1 &= (-a^5)^6 \cdot (-a^6)^{-5} \\
&= -a^{30} \cdot (-a^{-30}) \\
&= -a^{30} \cdot \frac{1}{-a^{30}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

C2

$$
\begin{aligned}
C_2 &= (\frac{a}{3})^2 \cdot (\frac{3}{a})^{-5} \\
&= (\frac{a}{3})^2 \cdot (\frac{a}{3})^5 \\
&= (\frac{a}{3})^{2+5} \\
&= \frac{a^7}{3^7} \\
&= \frac{a^7}{2187}
\end{aligned}
$$

d1

$$
\begin{aligned}
-7 &= 3x^2 + 10x && \mid +7 \\
0 &= 3x^2 + 10x + 7 && \mid :3 \\
0 &= x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{7}{3} \\
\text{mittels pq-formel:} \quad x_{1,2} &= -\frac{\frac{10}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{10}{3}}{2}\right)^2 - \frac{7}{3}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{6}\right)^2 - \frac{7}{3}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{100}{36} - \frac{7}{3}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{100}{36} - \frac{84}{36}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \sqrt{\frac{16}{36}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}} \\
&= -\frac{10}{6} \pm \frac{4}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{-\frac{10}{6} - \frac{4}{6}, -\frac{10}{6} + \frac{4}{6}\right\} \\
&= \left\{-\frac{7}{3}, -1\right\}
\end{aligned}
$$

d2

$$
\begin{aligned}
&2x - 3 = 2x^2 \\
&\Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 2x + 3 && \mid :2 \\
&\Leftrightarrow 0 = x^2 - x + \frac{3}{2} \\
&\quad \Rightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0 \text{ mit } p = -1 \text{ und } q = \frac{3}{2} \\
&\quad \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset \text{ da die Diskriminante unter } 0 \text{ liegt.}
\end{aligned}
$$

d5

$$\begin{aligned}
0 &= (x-2)(x-5)+2 \\
&= (x^2-5x-2x+10)+2 \\
&= x^2-7x+12
\end{aligned}$$

mittels pq-formel:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{-7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-7}{2}\right)^2 - 12} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{49}{4}\right) - 12} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4} - \frac{48}{4}} \\
&= \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{7}{2} \pm \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{\frac{6}{2}, \frac{8}{2}\right\} \\
&= \{3, 4\}
\end{aligned}$$