11. Vorlesung 28.10.2020

Notiztitel 28.10.2020

Anordnung auf $\mathbb{R}$ und Rechenregeln der Anordnung

Anordnung $\longrightarrow$ Position auf dem Zahlenstrahl

Anordnungsaxiom: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt immer genau eine der folgenden drei Alternativen: ① $a<b$, ② $a=b$, ③ $a>b$

Rechenregeln: Zusammenspiel von Rechenoperationen und Anordnung

1) $a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall c \in \mathbb{R}$

„Addition bewahrt die Anordnung"

2) $a<b \Rightarrow a \cdot c<b \cdot c \quad \forall c \in \mathbb{R}, c>0$

„Multiplikation mit Zahlen >0 bewahrt Anordnung"

Bemerkung:

a) $a>b \Leftrightarrow b<a$ also auch $a>b \Rightarrow a+c>b+c \; \forall c \in \mathbb{R}$

$a>b \Rightarrow a \cdot c>b \cdot c \; \forall c \in \mathbb{R}, c>0$

b) $a \leq b \Leftrightarrow (a<b) \vee (a=b)$
$a \geq b \Leftrightarrow (a>b) \vee (a=b)$
$\Big\}$ die Rechenregeln 1) und 2) gelten analog für $\leq$ und $\geq$

c) $\mathbb{R}^{+}=\{x \in \mathbb{R} \mid x>0\}$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen

$\mathbb{R}_0^{+}=\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist die Menge der nicht negativen reellen Zahlen

$\mathbb{R}^{-}=\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_0^{+}=\{x \in \mathbb{R} \mid x<0\}$ ist die Menge der negativen reellen Zahlen

d) Intervalle als Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a<b$ ist definiert

① $(a, b)=]a, b[=\{x \in \mathbb{R} \mid (a<x) \wedge (x<b)\}=\{x \in \mathbb{R} \mid a<x<b\}$

ist das offene Intervall mit Grenzen a und b

Es gilt: $a \notin (a, b)$; $b \notin (a, b)$

② $[a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x\le b\}$ ist das <u>abgeschlossene</u> Intervall mit Grenzen a und b. Es gilt: $a\in[a,b]$; $b\in[a,b]$

③ Halboffene Intervalle

$$(a,b]=\{x\in\mathbb{R} \mid a<x\le b\}$$
$$[a,b)=\{x\in\mathbb{R} \mid a\le x< b\}$$

④ Für $a=b$ gilt $(a,b)=(a,a)=\emptyset$; $[a,b]=[a,a]=\{a\}$;
für $b<a$ ist (a,b) und $[a,b]$, $(a,b]$, $[a,b)$ <u>nicht</u> definiert.

e) <u>Abschluss</u> der Anordnung in $\mathbb{R}$

Zur Vervollständigung der Anordnung definiert man die Symbole $+\infty$ und $-\infty$; es gilt:

① $+\infty\notin\mathbb{R}$, $-\infty\notin\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ Rechenoperationen für $+\infty$ und $-\infty$ sind <u>nicht</u> definiert

② $$\underbrace{\forall x\in\mathbb{R}:\ (-\infty<x)\wedge(x<+\infty)}_{\text{in diesem Sinn gilt: } \mathbb{R}=(-\infty,+\infty)}$$

<u>Konsequenzen aus den Rechenregeln für die Anordnung</u>

$a<b \Rightarrow a+c<b+c \quad \forall c\in\mathbb{R}$

$a<b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c \quad \forall c\in\mathbb{R},\ c>0$

1) $a<0 \Rightarrow -a>0$

<u>denn</u>: $a<0 \xRightarrow[c=-a]{} a+(-a)<0+(-a) \Rightarrow 0<-a \Rightarrow -a>0$

analog gilt: $a>0\Rightarrow -a<0$; $a\le 0\Rightarrow -a\ge 0$; $a\ge 0\Rightarrow -a\le 0$

2) Für a,b mit $a<b$ und $c<0$ gilt: $a<b \Rightarrow a\cdot c>b\cdot c$

analog gilt: $a>b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c$ | $a\le b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c\ge b\cdot c$

$a\ge b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$

denn: $c<0 \Rightarrow (-c)>0$ also $a<b \Rightarrow a\cdot(-c) < b\cdot(-c)$

$$\Rightarrow -a\cdot c < -b\cdot c \quad | + a\cdot c$$

$$\Rightarrow 0 < a\cdot c - b\cdot c \quad | + b\cdot c$$

$$\Rightarrow b\cdot c < a\cdot c$$

Zusammengefasst: $a<b,\ c<0 \Rightarrow a\cdot c > b\cdot c$

Definition:

1) Ein Term besteht aus syntaktisch korrekt gebildeten Wörtern oder Wortgruppen in der formalen Sprache der Mathematik, d.h. ein Term ist ein sinnvoller Ausdruck, der Zahlen, Variablen, Symbole für mathematische Verknüpfungen und Klammern enthalten kann.

2) Eine Gleichung ist eine Aussage über die Gleichheit (Äquivalenz) zweier Terme, $T_1 = T_2$. Das Symbol $=$ heißt Gleichheitszeichen.

3) Eine Ungleichung ist eine Aussage zum Größenvergleich zweier Terme, z.B. $T_1 < T_2$, oder $T_1 \geqq T_2$. Die Symbole $<, >, \leq, \geq$ heißen Ungleichheitszeichen.

Definition: (Betrag einer reellen Zahl)

Für $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

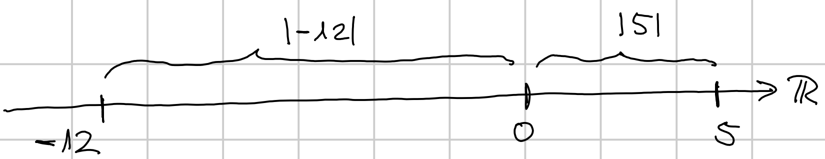
lies: Betrag von a, oder a Betrag

aus der Def. des Betrags folgt: Wenn man den „Betrag auflöst" muss man immer zwei Fälle betrachten, nämlich
1. Fall: Term im Betrag ≥ 0
2. Fall Term im Betrag < 0

Beispiele:

$|5| = 5$ denn $5 \geq 0$

$|-12| = 12$ denn $-12 < 0$ und $|-12| = -(-12) = 12$



Bemerkung:

1) $|a|$ gibt den Abstand von a zur 0 auf dem Zahlenstrahl an; $|a|$ ist also ein Abstandsmass, damit: $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$; es gilt sogar $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

2) Erste Rechenregeln für den Betrag:

a) $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

<u>Bsp.</u>: $a = 7,\ b = -5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12$
$a + b = 2 \Rightarrow |a+b| = 2$

$\left.\right\}\ 2 \leq 12$, $|a+b| \leq |a| + |b|$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)

3) Betrag, Ungleichung und Intervalle

a) Gegeben ist die Ungleichung $|x| < 5$, gesucht ist die <u>Lösungsmenge</u> $\mathbb{L}$ dieser Ungleichung, also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 5\}$.

$|x| < 5 \Rightarrow$ <u>1. Fall:</u> $\underbrace{x \geq 0 : \quad |x| < 5 \Leftrightarrow x < 5}$

im 1. Fall gilt also

$0 \leq x < 5 \Leftrightarrow x \in [0, 5) = \mathbb{L}_1$

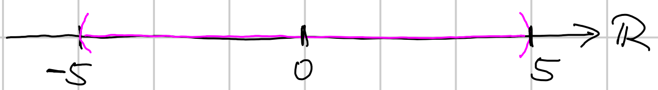
<u>2. Fall:</u> $x < 0: \quad |x| < 5 \Leftrightarrow -x < 5 \quad | \cdot (-1)$

$\underbrace{\Leftrightarrow \quad x > -5}$

im 2. Fall gilt also

$-5 < x < 0 \Leftrightarrow x \in (-5, 0) = \mathbb{L}_2$

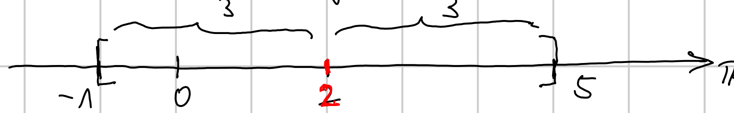
<u>insgesamt</u>: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-5, 5)$



alle $x \in \mathbb{R}$, deren Abstand zu 0 auf dem Zahlenstrahl kleiner 5 ist: $|x| < 5 \Leftrightarrow |x - 0| < 5$

b) Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung $|x - 2| \leq 3 \Leftrightarrow \underbrace{|x - 2| \leq 3}$

$\mathbb{L} = [-1, 5]$



alle $x \in \mathbb{R}$ mit Abstand ≤ 3 von $2 \in \mathbb{R}$

Rechnerische Lösung: $|x-2| \leq 3$

1. Fall: $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2,+\infty)$

$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow x-2 \leq 3 \quad |+2$

$\Leftrightarrow x \leq 5$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 5]$

$\mathbb{L}_1 = [2,+\infty) \cap (-\infty,5] = [2,5]$

2. Fall: $x-2<0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 2)$

$|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -(x-2) \leq 3$

$\Leftrightarrow -x+2 \leq 3$

$\Leftrightarrow -x \leq 1 \quad | \cdot (-1)$

$\Leftrightarrow x \geq -1$

$\Leftrightarrow x \in [-1,+\infty)$

$\mathbb{L}_2 = (-\infty, 2) \cap [-1,+\infty) = [-1,2)$

insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = [-1,2) \cup [2,5] = [-1,5]$

c) $|2x+4| < 2$ ← gesucht ist die Lösungsmenge dieser Ungleichung

Variante 1: Fallunterscheidung zum Auflösen des Betrags

1. Fall: $2x+4 \geq 0 \Leftrightarrow 2x \geq -4 \Leftrightarrow x \geq -2 \Leftrightarrow x \in [-2,+\infty)$

$|2x+4| < 2 \Leftrightarrow 2x+4 < 2 \quad |-4$

$\Leftrightarrow 2x < -2 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x < -1 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1)$

$\mathbb{L}_1 = [-2,+\infty) \cap (-\infty,-1) = [-2,-1)$

2. Fall: $2x+4<0 \Leftrightarrow 2x<-4 \Leftrightarrow x<-2 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-2)$

$|2x+4|<2 \Leftrightarrow -(2x+4) < 2$

$\Leftrightarrow -2x-4 < 2 \quad |+4$

$\Leftrightarrow -2x < 6 \quad | \cdot (-\frac{1}{2})$

$\Leftrightarrow x > -3$

$\Leftrightarrow x \in (-3,+\infty)$

$\mathbb{L}_2 = (-3,+\infty) \cap (-\infty,-2) = (-3,-2)$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_1 = (-3,-2) \cup [-2,-1) = (-3,-1)$

Variante 2: Anwendung von Rechenregeln und „Geometrie" (Anschauung)

$|2x+4|<2 \Leftrightarrow |2 \cdot (x+2)| < 2$ $\quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$\Leftrightarrow |2| \cdot |x+2| < 2$

$\Leftrightarrow 2 \cdot |x+2| < 2 \quad | \cdot \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow |x+2| < 1$

$\Leftrightarrow |x-(-2)| < 1$ ← alle x, deren Abstand von -2 kleiner 1 ist

$$\Leftrightarrow x \in (-3,-1)$$

d) Ungleichungen (ohne Betrag)

Gesucht ist die Lösungsmenge von $\frac{x+1}{x-1} \geq 5$

$D = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\}$

$\frac{x+1}{x-1} \geq 5 \quad | \cdot (x-1)$

1. Fall $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$

2. Fall $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$

1. Fall: $x-1 > 0 \Leftrightarrow x \in (1,+\infty)$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq 5 &\Leftrightarrow x+1 \geq 5\cdot(x-1) \\
&\Leftrightarrow x+1 \geq 5x-5 \quad | -5x-1 \\
&\Leftrightarrow -4x \geq -6 \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow x \leq \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \tfrac{3}{2}\right]
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_1 = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cap (1,+\infty) = \left(1, \frac{3}{2}\right]$

2. Fall $x-1 < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} \geq 5 &\Leftrightarrow x+1 \leq 5\cdot(x-1) \\
&\Leftrightarrow x+1 \leq 5x-5 \quad | -5x-1 \\
&\Leftrightarrow -4x \leq -6 \quad | \cdot \left(-\tfrac{1}{4}\right) \\
&\Leftrightarrow x \geq \tfrac{3}{2} \Leftrightarrow x \in \left[\tfrac{3}{2}, +\infty\right)
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}_2 = \left[\frac{3}{2}, +\infty\right) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \left(1, 3/2\right] \cup \emptyset = \left(1, 3/2\right]$