7. Vorlesung 20.10.2020

Notiztitel 20.10.2020

## Vollständige Induktion

Eine Aussageform $A(n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_0$, falls gilt: ① Induktionsanfang $A(1)$ bzw. $A(0)$ ist wahr, d.h. die Aussage gilt für $n=1$ bzw. $n=0$

② Induktionschluß $A(k)$ ist wahr $\Rightarrow$ $A(k+1)$ ist wahr, d.h. man zeigt: Wenn die Aussage für $n=k$ wahr ist, dann ist sie auch für $n=k+1$ wahr

**Beispiele:** Gestern (13.10.) $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+\dots+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$

① $$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

a) Induktionsanfang $n=1$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \\ &\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1 \end{aligned}\right\} \sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot1+1)}{6} \checkmark$$

b) Induktionsschritt

Induktionsvor. $A(k)$ ist wahr, d.h. $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6}}_{\text{das darf beim Beweis als wahr benutzt werden}}$

Induktionsbeh.. $A(k+1)$ ist wahr, d.h.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \frac{(k+1)\cdot((k+1)+1)\cdot(2(k+1)+1)}{6} = \frac{\boxed{(k+1)}\cdot\boxed{(k+2)(2k+3)}}{6}}_{\text{das muss im Beweis gezeigt (nachgerechnet) werden!}} \checkmark$$

**Beweis:**

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} i^2\right)}_{\text{Induktionsvor.}} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1)}{6} + (k+1)^2$$

$$= \frac{k\cdot(k+1)\cdot(2k+1) + 6\,(k+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\left[k\cdot(2k+1) + 6(k+1)\right]}{6}$$

$$= \frac{\boxed{(k+1)}\boxed{\left[2k^2 + 7k + 6\right]}}{6}$$

$$= \frac{(k+1)\cdot(k+2)\cdot(2k+3)}{6} \quad ✓$$

$(k+2)\cdot(2k+3) =$

$2k^2+3k+4k+6 =$

$2k^2+7k+6$

② $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$; dann gilt: $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

a) Induktionsanfang: $n=0$; $A(0)$ ist wahr muss gezeigt werden

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{0} q^i &= q^0 = 1 \\ \frac{1-q^{0+1}}{1-q} &= \frac{1-q}{1-q} = 1 \end{aligned}\right\} \quad \sum_{i=0}^{0} q^i = \frac{1-q^{0+1}}{1-q} \quad ✓$$

A(0) ist wahr!

b) Induktionsschritt

Induktionsvor.: A(k) ist wahr, d.h. $\underbrace{\displaystyle\sum_{i=0}^{k} q^i = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}}_{\text{das darf beim Beweis als wahr benutzt werden}}$

Induktionsbeh.: A(k+1) ist wahr, d.h.

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \frac{1-q^{(k+1)+1}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q}}_{\text{das muss im Beweis gezeigt (nachgerechnet) werden}} \quad ✓$$

**Beweis:**

$$\sum_{i=0}^{k+1} q^i = \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} q^i\right)}_{\text{Induktionsvor.}} + q^{k+1}$$

$$= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1}$$

$$= \frac{1-q^{k+1} + (1-q)\,q^{k+1}}{1-q}$$

$$= \frac{1-\cancel{q^{k+1}} + \cancel{q^{k+1}} - q^{k+2}}{1-q} = \frac{1-q^{k+2}}{1-q} \checkmark$$

<u>„Anwendungen"</u>: a) $\sum_{i=1}^{n} q^i = \left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right) - q^0 = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} - 1$

$$= \frac{1-q^{n+1} - (1-q)\cdot 1}{1-q}$$

$$= \frac{\cancel{1}-q^{n+1}-\cancel{1}+q}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q} = q\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$$

b) $1+2+4+8+16+\dots+2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = \frac{1-2^{64}}{1-2} = 2^{64}-1$

$q=2$ ↑

c) $\sum_{i=5}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i = \underbrace{\sum_{i=0}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^i} - \sum_{i=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^i$

$$= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{5}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^{11}}\right) - 2\cdot\left(1-\frac{1}{2^5}\right)$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{2^{10}} - \cancel{2} + \frac{1}{2^4} = \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{16} - \frac{1}{1024}$$

③ A endliche Menge mit $|A| = n$ Elementen $\Rightarrow$ $\mathcal{P}(A)$ hat $2^n$ Elemente
also $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ ( $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ Menge aller Teilmengen von A)
↑ Potenzmenge

<u>Beweis mit vollständiger Induktion</u>:

<u>Induktionsanfang</u>: A hat $n=1$ Element, also $A = \{a\}$
$\Rightarrow \mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}\} = \{\emptyset, A\}$ mit $|\mathcal{P}(A)| = 2 = 2^1$;
die Aussage ist für $n=1$ wahr!

## Induktionsschritt:

**Induktionsvor.:** Für $n=k$ ist die Aussage wahr, d.h.

$$\underbrace{|A|=k \text{ Elemente} \Rightarrow |P(A)| = 2^k \text{ Elemente}}$$

das darf beim Beweis als wahr verwendet werden

**Induktionsbeh.:** Für $n=k+1$ ist die Aussage ebenfalls wahr, d.h.

$$\underbrace{|A| = k+1 \text{ Elemente} \Rightarrow |P(A)| = 2^{k+1} \text{ Elemente}}$$ ✓

das muss im Beweis nachgerechnet / bewiesen werden

**Beweis:**

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ A hat $k+1$ Elemente

$$P(A) = \{B \mid B \subseteq A\} = \underbrace{\{\tilde{B} \mid \tilde{B} \subseteq A \wedge (a_{k+1} \notin \tilde{B})\}} \cup \underbrace{\{\tilde{B} \cup \{a_{k+1}\} \mid \tilde{B} \in M_1\}}_{M_2}$$

alle Teilmengen von A, die das Element $a_{k+1}$ nicht enthalten → $M_1$

Teilmengen von A, die $a_{k+1}$ enthalten

$|P(A)| = |M_1| + |M_2| = 2 \cdot |M_1|$ denn $M_2$ enthält alle $\tilde{B}$ aus $M_1$ vereinigt mit $\{a_{k+1}\}$ und keine weiteren Teilmengen von A

In $M_1$ sind alle Teilmengen von $A \setminus \{a_{k+1}\}$, es gilt $|A \setminus \{a_{k+1}\}| = k$

$\Rightarrow |M_1| = |P(A \setminus \{a_{k+1}\})| = 2^k$

insgesamt: $|P(A)| = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ ✓

„Rückgriff" auf vorherige Gegebenheit

## Definition durch Rekursion

Die Zahlen $a_n \in \mathbb{R}$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ bzw. für alle $n \in \mathbb{N}_0$ definiert, wenn man angegeben hat

Definition durch Rekursion

1. Anker/Anfang: $a_1$ bzw. $a_0$ ist gegeben
2. Bildungsgesetz: $a_{n+1} = f(a_n)$, $a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)$ mit Funktionsvorschrift $f$ für $n \geq 1$ bzw. $n \geq 0$

# Beispiele für Definition durch Rekursion

lies: n Fakultät

① **Fakultät von n** für $n \in \mathbb{N}_0$ ( geschrieben als $n!$)

Anker: $0! = 1$ Bildungsgesetz: $\underbrace{(n+1)!}_{a_{n+1}} = \underbrace{(n+1) \cdot n!}_{f(a_n) = (n+1) \cdot a_n}$

Konkret:

$$\left.\begin{aligned} 0! &= 1 \\ 1! &= 1 \cdot 0! = 1 \cdot 1 = 1 \\ 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1 \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 4! &= 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}\right\}$$

insgesamt

n! ist das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$$

② Die Folge $x_0, x_1, x_2, \ldots = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Zahlen ist definiert durch

Anker: $x_0 = 1{,}5 = \frac{3}{2}$

Bildungsgesetz: $\underbrace{x_{n+1}}_{a_{n+1}} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)}_{f(a_n)}$

$$x_0 = \frac{3}{2}$$

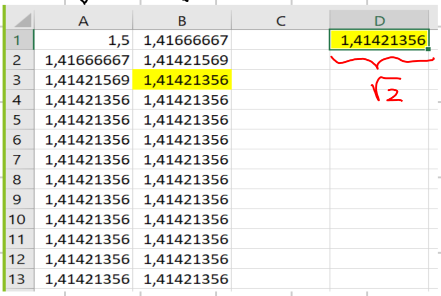
$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{3/2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{9+8}{6} = \frac{17}{12}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{2}{x_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{17/12}\right)$$

Es gilt: Je größer n wird um so besser nähert sich $x_n$ an $\sqrt{2}$ an!

$x_n$ $\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)$

n=0 →
n=1 →
n=2 →



| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,5 | 1,41666667 | | 1,41421356 |
| 2 | 1,41666667 | 1,41421569 | | |
| 3 | 1,41421569 | 1,41421356 | | |
| 4 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 5 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 6 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 7 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 8 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 9 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 10 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 11 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 12 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |
| 13 | 1,41421356 | 1,41421356 | | |

$\sqrt{2}$

Berechnung mit EXCEL

**Hinweis:** Mit $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$ für $a > 0$ bekommt man Näherungen für $\sqrt{a}$

## ③ Binomialkoeffizienten für $k, n \in \mathbb{N}_0$ mit $k \le n$

↳ Bezeichnung $\underbrace{\binom{n}{k} \leftarrow \text{lies: } n \text{ über } k}_{\text{Binomialkoeffizient } n \text{ über } k}$

Es ist definiert: **Anker** $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

**Bildungsgesetz** $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1}$ für $k, n \in \mathbb{N}$

$$\binom{0}{0} = 1, \ \binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1, \ \underbrace{\binom{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \binom{1-1}{1-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 1 \cdot \binom{0}{0} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1, \ \underbrace{\binom{2}{1} = \frac{2}{1} \cdot \binom{2-1}{1-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 2 \cdot \binom{1}{0} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\underbrace{\binom{2}{2} = \frac{2}{2} \cdot \binom{2-1}{2-1}}_{\text{Bildungsgesetz}} = 1 \cdot \binom{1}{1} = 1 \cdot 1 = 1$$

diese Rekursion liefert alle Binomialkoeffizienten

**direkte Definition der Binomialkoeffizienten:**

$$\begin{cases} \binom{0}{0} = 1, \ \binom{n}{0} = 1 \ \forall\, n \in \mathbb{N} \\ \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \quad \text{für } n, k \in \mathbb{N};\ k \le n \end{cases}$$

↳ Es folgt sofort: $\binom{0}{0} = 1, \binom{n}{0} = 1$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot \cancel{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{(n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = n$$