M a t h e m a t i k 1 f ü r I n f o r m a t i k

Kleingruppenübung

Blatt 06

Kampmann/Meyer HS Osnabrück, Fakultät I.u.I.

★

Erinnern Sie sich an folgende Begriffe, Sachverhalte und Sätze: Vektorrechnung, Skalarprodukt, Vektorprodukt, lineares Gleichungssystem, linear abhängig/unabhängig, Erzeugendensystem, Basis, Matrizenrechnung.

★

1. Aufgabe: Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems
$-2x + 3z = 1$
$x - y + 6z = 2$
$3x + 2y = 3$

2. Aufgabe: Berechnen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems
$2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = -3$
$- x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 1$
$2x_1 + 2x_2 + 10x_3 + 8x_4 = -4$

3. Aufgabe: Gegeben sind $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
und $\underline{\underline{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie (falls diese Terme definiert sind):

1) $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{b}$ und $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{c}$ 2) $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{b}$ und $\underline{\underline{B}} \cdot \vec{c}$ 3) $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}}$ und $\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{A}}$

4. Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2-s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

a) Berechnen Sie das **Skalarprodukt** $< \vec{a}, \vec{b} >= \vec{a} \cdot \vec{b}$ und das **Vektorprodukt** $\vec{a} \times \vec{b}$

b) Berechnen Sie $s \in \mathbb{R}$ so, dass $\vec{a}$ **orthogonal (senkrecht stehend)** zu $\vec{b}$ ist.

c) Berechnen Sie die **Einheitsvektoren** $\vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ und $\vec{e}_b = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$

5. Aufgabe: Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

(1) Berechnen Sie $\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} + 3 \cdot \vec{b}$ und $\vec{d} = \dfrac{1}{2} \cdot \vec{a} + \dfrac{2}{3} \cdot \vec{b}$.

(2) Lösen Sie die Gleichung $3 \cdot \vec{a} - \dfrac{1}{3} \cdot \left(\vec{x} - 2 \cdot \vec{b}\right) = \vec{b} - \dfrac{1}{2} \cdot \vec{x}$.

(3) Berechnen Sie die **Projektionen** $\vec{p_{\vec{a}}}(\vec{b}) = \dfrac{< \vec{a}, \vec{b} >}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$ und $\vec{p_{\vec{b}}}(\vec{a}) = \dfrac{< \vec{b}, \vec{a} >}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

6. Aufgabe: a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie durch **Berechnung der Koeffizienten** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dass $\vec{d}$ eine **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ist, d.h. **berechnen Sie** $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\vec{d} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b} + \gamma \cdot \vec{c}$.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Für welches $\alpha \in \mathbb{R}$ sind diese Vektoren **linear abhängig**?

c) Nehmen Sie die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ mit $\alpha = 1$ aus b) und zeigen Sie, dass $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ eine **Basis** des $\mathbb{R}^3$ bilden.