Zahldarstellung: Basis b ($b=10$, $b=2$, $b=16$)

Dezimalsystem ($b=10$), Dualsystem ($b=2$), Hexadezimalsystem ($b=16$)

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, c_1 c_2 \dots c_k)_b = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b^i + \sum_{j=1}^{k} c_j \cdot b^{-j}$$

Umrechnung ganzer Zahlen aus Dezimalsystem in ein andres System durch „Division mit Rest"

Beispiel: $(327)_{10}$ gesucht Darstellung im Dualsystem

$$\begin{aligned}
327 &= 163 \cdot 2 + 1 \\
163 &= 81 \cdot 2 + 1 \\
81 &= 40 \cdot 2 + 1 \\
40 &= 20 \cdot 2 + 0 \\
20 &= 10 \cdot 2 + 0 \\
10 &= 5 \cdot 2 + 0 \\
5 &= 2 \cdot 2 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1
\end{aligned}$$

$(101000111)_2 = (327)_{10}$

Probe:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^6 + 2^8 = 1 + 2 + 4 + 64 + 256 = 327 \checkmark$$

Wie kann man Brüche umrechnen?

Beispiel: $\frac{1}{8}$ Darstellung im Dezimalsystem (10er-System) also $0, c_1 c_2 \dots c_k$

$$\left.\begin{array}{rl}
 & 1 : 8 = 0{,}125 \\
 & \underline{0} \\
10 \cdot & 10 \\
 & \underline{8} \\
10 \cdot & 20 \\
 & \underline{16} \\
10 \cdot & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}\right\} \quad \frac{1}{8} = (0{,}125)_{10}$$

$\frac{1}{8}$ Darstellung im Dualsystem (2er-System) als $0, c_1 c_2 \dots c_k$

Es ist:

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3} = (0{,}001)_2$$

$1 : 8 = 0{,}001$

$\;\;\;0$

$2\cdot \;\; 1 \;\;\; 2$

$\;\;\;0$

$2\cdot \;\; 2 \;\;\; 4$

$\;\;\;0$

$2\cdot \;\; 4 \;\;\; 8$

$\;\;\;8$

$\;\;\;0$

$$\frac{1}{8} = (0{,}125)_{10} = (0{,}001)_2$$

Ein zweiter Blick auf Ungleichungen und Betrag

1) Beispiel für eine quadratische Ungleichung:

Gesucht ist die Lösungsmenge der Ungleichung $x\cdot(x+1) \leq 0$

$$x\cdot(x+1) \leq 0 \iff x^2 + x \leq 0$$

Quadratische Erg.

$$\iff x^2 + \underbrace{2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot x}_{=x} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2}_{=0} \leq 0$$

$$\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq 0$$

$$\iff \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 \leq \left(\tfrac{1}{2}\right)^2$$

$\sqrt{\ldots}$

$$\iff \sqrt{\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2} \leq \sqrt{\tfrac{1}{4}}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$

$$\iff \left|x+\tfrac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$|x| \leq a \iff x \in [-a, a]$

$$\iff x + \tfrac{1}{2} \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right]$$

$$\iff -\tfrac{1}{2} \leq x + \tfrac{1}{2} \leq \tfrac{1}{2}$$

$-\frac{1}{2}$

$$\iff -1 \leq x \leq 0$$

$$\iff x \in [-1, 0] \implies \mathbb{L} = [-1, 0]$$

2) Rechenregeln für $|x|$ also für den Betrag:

Aus der 11. Vorlesung haben wir

Erste „Rechenregeln" für den Betrag

a) $|a| \geq 0 \ \forall a \in \mathbb{R}$; $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

b) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

c) Für Summen gilt die sog. Dreiecksungleichung: $|a+b| \leq |a| + |b|$

<u>Bsp.:</u> $a = 7,\ b = -5 \Rightarrow |a| + |b| = 7 + 5 = 12$

$a + b = 2 \Rightarrow |a+b| = 2$

$\left.\right\} \begin{array}{l} 2 \leq 12 \\ |a+b| \leq |a| + |b| \end{array}$

(Beweis der Dreiecksungleichung später in der Vorlesung)

↳ jetzt: 14. Vorlesung

Beweisidee zur Dreiecksungleichung

1) Es gilt $|x| = \sqrt{x^2}$ also $|a+b| = \sqrt{(a+b)^2}$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2a \cdot b + b^2 \overset{\uparrow}{=} |a|^2 + 2a \cdot b + |b|^2$$

2) Es gilt: $|a| = \sqrt{a^2} \Rightarrow |a|^2 = a^2$

$|b| = \sqrt{b^2} \Rightarrow |b|^2 = b^2$

3) Es gilt auch: $a \leq |a| \ \forall a \in \mathbb{R}$, denn

<u>1. Fall</u>: $a \geq 0 \Rightarrow |a| = a$

$a \leq a \Leftrightarrow a \leq |a|$

<u>2. Fall</u> $a < 0 \Rightarrow |a| = -a$

$a < 0 \Rightarrow -a > 0$ also

$a < 0 < -a \Rightarrow a < -a$

$\Rightarrow a < |a|$

damit ist $a \cdot b \leq |a| \cdot |b|$ und

$$2 \cdot a \cdot b \leq 2 \cdot |a| \cdot |b|$$

4) Insgesamt: $(a+b)^2 \leq |a|^2 + 2 \cdot a \cdot b + |b|^2$

$$\leq |a|^2 \cdot 2|a| \cdot |b| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

↑ 1. bin. Formel

also: $(a+b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$

$$\Rightarrow |a+b| = \sqrt{(a+b)^2} \leq \sqrt{(|a|+|b|)^2} = |a| + |b|$$

Welche allgemeinen Strukturen stecken hinter unseren Zahlsystem?

$\hookrightarrow$ algebraische Strukturen

Es geht um „Rechnen" in einer Menge von Objekten!

Definition:

Gegeben ist eine Menge M, $M \neq \emptyset$, eine Verknüpfung auf M (Rechenoperation auf M) ist eine Abbildung $\otimes : M \times M \to M$, d.h. jedem Tupel $(a,b) \in M$ wird genau ein Element $a \otimes b \in M$ zugeordnet.

Beispiele: $M = \mathbb{Z}$, $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \quad (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to a+b \in \mathbb{Z}$

$\cdot : \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \quad (a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to a \cdot b \in \mathbb{Z}$

Definiton:
Gegeben ist eine Menge $M, M \neq \emptyset$ und eine Verknüpfung (Rechenoperation) $\otimes : M \times M \to M$.

1) $(M, \otimes)$ ist eine **Halbgruppe**, wenn gilt
Assoziativgesetz: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a, b, c \in M$

2) $(M, \otimes)$ ist eine **Gruppe**, wenn gilt
Assoziativgesetz: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c, \forall a, b, c \in M$
Existenz eines neutralen Elements: $\exists n \in M : a \otimes n = a, \forall a \in M$
Existenz inverser Elemente: $\forall a \in M \, \exists a^{-1} \in M : a \otimes a^{-1} = n$,
gilt **zusätzlich** das
Kommutativgesetz: $a \otimes b = b \otimes a, \forall a, b \in M$
heißt $(M, \otimes)$ **abelsche Gruppe**.

Beispiele: 1) $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe, denn

$\forall a,b,c \in \mathbb{N} : \quad a + (b+c) = (a+b)+c$

$(\mathbb{N}, \cdot)$ ist auch eine Halbgruppe, denn

$\forall a,b,c \in \mathbb{N} : \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

2) $(\mathbb{N}, +)$ ist keine Gruppe, denn es gibt kein neutrales Element der Addition $(0 \notin \mathbb{N})$

3) $(\mathbb{N}, \cdot)$ besitzt mit $1 \in \mathbb{N}$ das neutrale Element der Multiplikation; $(\mathbb{N}, \cdot)$ ist aber keine Gruppe, denn es gibt z.B. zur $2 \in \mathbb{N}$ kein

inverses Element bezüglich der Multiplikation $\left(\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$

4) $(\mathbb{Z},+)$ ist eine abelsche Gruppe, denn

$a+(b+c)=(a+b)+c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$

$0 \in \mathbb{Z}: \quad a+0=a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$, 0 ist neutrales Element

$a \in \mathbb{Z} \Rightarrow -a \in \mathbb{Z}$ mit $a+(-a)=0 \quad \forall a \in \mathbb{Z}$,

$-a$ ist das inverse Element zu a

$a+b=b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{Z}$

5) $(\mathbb{Z},\cdot)$ ist keine Gruppe, denn (wie bei $(\mathbb{N},\cdot)$) z.B. $2 \in \mathbb{Z}$ hat bezüglich der Multiplikation in $\mathbb{Z}$ kein inverses Element: $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$

Definition:
Gegeben sind eine Menge $M, M \neq \emptyset$ und **zwei** Verknüpfungen (Rechenoperationen)

$\oplus : M \times M \to M$ und $\otimes : M \times M \to M$.

$(M,\oplus,\otimes)$ ist ein **Ring**, falls gilt:

1) $(M,\oplus)$ ist eine **abelsche Gruppe** ← bezüglich $\oplus$

2) $(M,\otimes)$ ist eine **Halbgruppe** ← bezüglich $\otimes$

3) Es gilt das **Distributivgesetz**: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)\ \forall a,b,c \in M$. ← „Verträglichkeit" der beiden Verknüpfungen

bezogen auf $\otimes$

Hat $(M,\otimes)$ zusätzlich ein **neutrales Element**, nennt man $(M,\oplus,\otimes)$ einen **Ring mit Eins**. Gilt in einem Ring mit Eins zusätzlich in $(M,\otimes)$ das **Kommutativgesetz**, nennt man $(M,\oplus,\otimes)$ einen **kommutativen Ring mit Eins**.

Beispiel: 1) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein Ring, denn $(\mathbb{Z},+)$ ist eine abelsche Gruppe und $(\mathbb{Z},\cdot)$ ist eine Halbgruppe ($a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c\ \forall a,b,c \in \mathbb{Z}$) und wir haben das Distributivgesetz

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$$

2) $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins, denn wegen $a=a\cdot 1\ \forall a \in \mathbb{Z}$, ist $1 \in \mathbb{Z}$ das neutrale Element (Eins-

element) der Multiplikation und $a \cdot b = b \cdot a \ \forall a,b \in \mathbb{Z}$

3) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Kommutativer Ring mit Eins,

<u>außerdem gilt:</u> $\forall q \in \mathbb{Q},\ q \neq 0\ \exists \frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q \cdot \frac{1}{q} = 1$

also zu $q \in \mathbb{Q},\ q \neq 0$ gibt es $\frac{1}{q}$ als inverses Element bezüglich der Multiplikation:

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, dann gilt $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe

<u>Definition:</u> Eine Menge M, $M \neq \emptyset$, mit zwei Verknüpfungen $\oplus : M \times M \to M$ und $\otimes : M \times M \to M$ heißt <u>Körper</u>, falls gilt

1) $(M, \oplus, \otimes)$ ist ein Kommutativer Ring mit Eins
2) $e \in M$ ist das neutrale Element in $(M, \oplus)$ also $a \oplus e = e \oplus a = a \ \forall a \in M$, denn ist $M^* = M \setminus \{e\}$ und $(M^*, \otimes)$ ist eine <u>Kommutative (abelsche) Gruppe</u>.

<u>Beispiele:</u> $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$; $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$(\mathbb{R}, +, \cdot)$; $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

<u>Weitere Beispiele:</u> $M = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ Menge mit 4 Elementen

$\oplus : M \times M \to M$ ist durch folgende Tabelle definiert

$\oplus$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$

Hauptdiagonale

$\bar{0}$ ist das neutrale Element bezüglich $\oplus$ in M: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a} \ \forall \bar{a} \in M$

Verknüpfungstabelle ist spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen $\Rightarrow$

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \ \forall \bar{a}, \bar{b} \in M$,

$\oplus$ ist Kommutativ

(Assoziativgesetz gilt auch)

$\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \Rightarrow \bar{0}$ ist bezgl. $\oplus$ invers zu $\bar{0}$

$\overline{1}+\overline{3}=\overline{0} \Rightarrow \overline{3}$ ist bzgl. $\oplus$ invers zu $\overline{1}$ und

$\overline{1}+\overline{3}=\overline{3}+\overline{1}$ also ist $\overline{1}$ invers zu $\overline{3}$ bzgl. $\oplus$

$\overline{2}+\overline{2}=\overline{0} \Rightarrow \overline{2}$ ist bzgl. $\oplus$ invers zu $\overline{2}$

$(M, \oplus)$ ist eine abelsche Gruppe