36. Vorlesung 12.01.2021

Aus der 35. Vorlesung:

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 4$.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 1$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ sind die Vektoren $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$, $t \neq 0$.

Probe: $\vec{v} \neq \vec{0}$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\underline{\underline{A}}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2}t + t \\ -t + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1$$

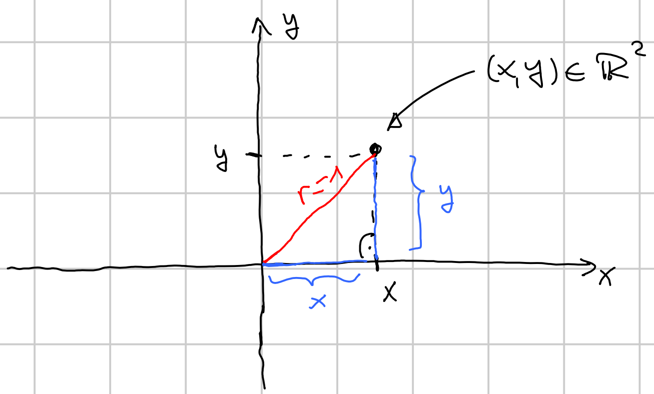
$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t + t \\ 2t + 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 4t \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2$$

Geometrische Bedeutung von Eigenvektoren von (2x2)-Matrizen

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \quad K = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$$

Welche Punktmenge im $\mathbb{R}^2$ ist das? Einheitskreis!



nach Pythagoras gilt im rechtwinkligen Dreieck $x^2 + y^2 = r^2 = 1$

Der Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, der die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ erfüllt, hat den Abstand 1 vom KO-Ursprung, d.h. alle Punkte aus der Menge K liegen auf dem Kreis mit Radius 1 um den KO-Ursprung!

$$E = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 + 25y^2 = 100 \right\}$$

$$= \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 + 25y^2 - 100 = 0 \right\}$$

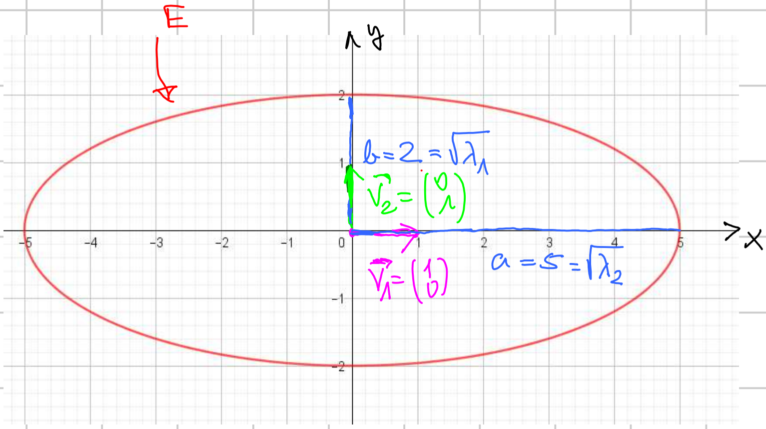
Welche Punktmenge im $\mathbb{R}^2$ ist das?

Ellipse mit Achsen parallel zu den Koordinatenachsen und Achsabschnitt a auf der x-Achse sowie Achsabschnitt b auf der y-Achse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$4x^2 + 25y^2 = 100 \iff \frac{4x^2}{100} + \frac{25y^2}{100} = 1$$

$$\iff \underbrace{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1}_{a=5,\ b=2}$$



x-Achse, y-Achse also die Koordinatenachsen sind die Achsen der Ellipse E

Verbindung zu Matrizen, Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$E = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \underline{\underline{A}}\,\vec{x} \rangle - 100 = 0 \}$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \langle \vec{x}, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \rangle - 100 = 0$$

$$4x^2 + 25y^2 - 100 = 0$$

$$\underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 25y \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{x}, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4x \\ 25y \end{pmatrix} = 4x^2 + 25y^2$$

Eigenwerte & Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$:

λ Eigenwert, wenn $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = 0$ ist

$$|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 \\ 0 & 25-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(25-\lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 25 \text{ sind}$$

Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$

Für $\vec{v}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 4$

Für $\vec{v}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$ gilt $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 25t \end{pmatrix} = 25 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{v}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix},\ t \neq 0$ sind Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 25$

Für $t = 1$ erhalten wir zwei Eigenvektoren der Länge 1 nämlich
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ bestimmen die Richtung der Achsen dieser Ellipse: $\vec{g}_1(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \rightarrow x$-Achse

$\vec{g}_2(t) = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \rightarrow y$-Achse

2. Konkretes Beispiel:

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix};\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x - \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + 7y \end{pmatrix}$$

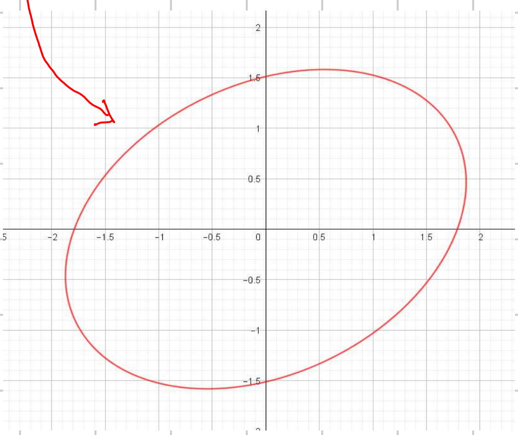
$$\langle \vec{x}, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \rangle = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x - \sqrt{3}y \\ -\sqrt{3}x + 7y \end{pmatrix} = 5x^2 - \sqrt{3}xy - \sqrt{3}xy + 7y^2 = 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2$$

$$E = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \vec{x}, \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} \rangle - 16 = 0 \right\}$$

gesucht: Achsen der Ellipse und Achsabschnitte!

Ansatz: Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix}$$



$$0 = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda) - (-\sqrt{3})(-\sqrt{3})$$
$$= \lambda^2 - 12\lambda + 35 - 3$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 6 \pm \sqrt{36 - 32} = 6 \pm 2$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = 4 \leftarrow \text{Eigenwerte von } \underline{\underline{A}}$$

Zugehörige Eigenvektoren:

$\lambda_1 = 8 \rightarrow (\underline{\underline{A}} - 8 \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{array}{cc|cl} v_1 & v_2 & & \\ \hline -3 & -\sqrt{3} & 0 & \\ -\sqrt{3} & -1 & 0 & |\cdot(-\sqrt{3}) \\ \hline -3 & -\sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$\longrightarrow \underbrace{v_2 = t, \quad -3v_1 = \sqrt{3}t \Rightarrow v_1 = -\sqrt{3}/3\, t}$

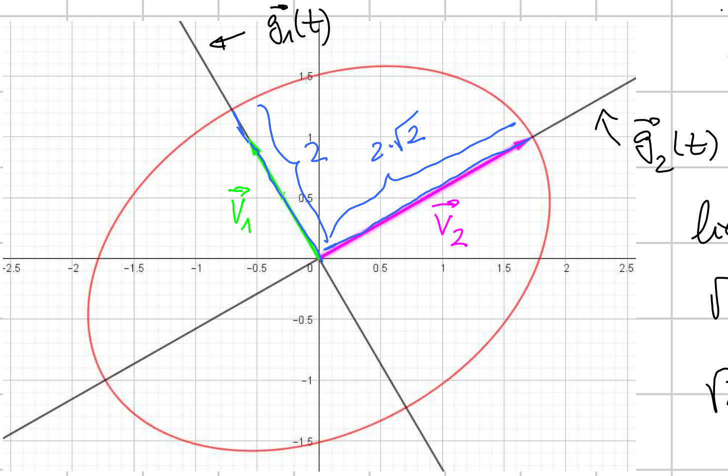
$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3\, t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \rightarrow \vec{g}_1(t) = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/3 \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

$\lambda_2 = 4 \rightarrow (\underline{\underline{A}} - 4 \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{array}{cc|cl} v_1 & v_2 & & \\ \hline 1 & -\sqrt{3} & 0 & |\cdot\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 & 0 & + \\ \hline 1 & -\sqrt{3} & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \\ \hline \end{array}$$

$\longrightarrow \underbrace{v_2 = t, \quad v_1 = \sqrt{3}t}$

$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\, t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \neq 0 \rightarrow \vec{g}_2(t) = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$



Die Eigenvektoren liefern die Richtung der Achsen der Ellipse und die Wurzeln der Eigenwerte liefern die Achsabschnitte

$\sqrt{\lambda_2} = \sqrt{4} = 2$

$\sqrt{\lambda_1} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$

Ein weiteres Beispiel für Eigenwerte und Eigenvektoren einer (3x3)-Matrix

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ← gesucht: Eigenwerte & Eigenvektoren von $\underline{\underline{A}}$

$$\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} + & - & + \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = +(3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (3-\lambda)\cdot\left[(-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - 0\right] + \left[2\cdot(-1-\lambda) - 0\cdot(-2)\right]$$
$$= (3-\lambda)\cdot(-\lambda)\cdot(-1-\lambda) + 2\cdot(-1-\lambda)$$
$$= (-1-\lambda)\cdot\left[(3-\lambda)\cdot(-\lambda) + 2\right]$$
$$= (-1-\lambda)\cdot\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right]$$

$$0 = \det(\underline{A} - \lambda \underline{\underline{E}}) \iff \underbrace{(-1-\lambda)}_{\lambda_1 = -1}\cdot\underbrace{\left[\lambda^2 - 3\lambda + 2\right]}_{\lambda_{2,3} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}} = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\underline{A} \text{ hat die Eigenwerte } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2}$

Berechnung der zug. Eigenvektoren: $(\underline{A} - \lambda_i \underline{\underline{E}})\cdot\vec{v}_i = \vec{0} \quad i = 1, 2, 3$

$$\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccc|c|l}
x & y & z & & \\
\hline
4 & -1 & 0 & 0 & \\
2 & 1 & 0 & 0 & I\cdot(-2) \\
-2 & 2 & 0 & 0 & I\cdot 2 \\
\hline
4 & -1 & 0 & 0 & \\
0 & -3 & 0 & 0 & \\
0 & 3 & 0 & 0 & + \\
\hline
4 & -1 & 0 & 0 & \rightarrow x = 0 \\
0 & -3 & 0 & 0 & \rightarrow y = 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & z = t \\
\hline
\end{array}
\qquad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix},\quad t \neq 0$$

$\boxed{\lambda_2 = 1}$

$$\begin{array}{ccc|c|l}
x & y & z & & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 0 & I\cdot(-1) \\
2 & -1 & 0 & 0 & + \\
-2 & 2 & -2 & 0 & + \\
\hline
2 & -1 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & -2 & 0 & \\
\hline
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc|c|l}
x & y & z & & \\
\hline
2 & -1 & 0 & 0 & \rightarrow 2x = y = 2t \Rightarrow x = t \\
0 & 1 & -2 & 0 & \rightarrow z = t,\ y = 2t \\
0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ t \end{pmatrix},\quad t \neq 0$$

$\boxed{\lambda_3 = 2}$

$$
\begin{array}{ccc|c}
x & y & z & \\
\hline
1 & -1 & 0 & 0 \\
2 & -2 & 0 & 0 \\
-2 & 2 & -3 & 0 \\
\end{array}
\quad 1\cdot(-2) \quad 1\cdot 2 \quad +
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \\
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\to y = t,\ x = t \\
\to z = 0 \\
\\
\end{array}
$$

$$\left.\right\} \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \neq 0$$