25. Vorlesung 08.12.2020

Notiztitel 08.12.2020

Vektoren: Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachten wir Pfeile $\overrightarrow{AE}$ vom Anfangspunkt A zum Endpunkt E.

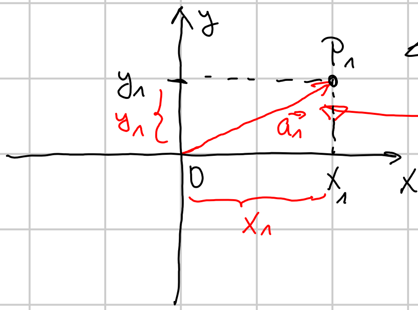
Zwei Pfeile $\overrightarrow{A_1E_1}$ und $\overrightarrow{A_2E_2}$ sind äquivalent, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x_{E_1} - x_{A_1} = x_{E_2} - x_{A_2} \\ y_{E_1} - y_{A_1} = y_{E_2} - y_{A_2} \end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^2 \\ z_{E_1} - z_{A_1} = z_{E_2} - z_{A_2} \end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^3$$

Ein Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ im $\mathbb{R}^3$

ist die Äquivalenzklasse aller Pfeile $\overrightarrow{AE}$ mit

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} x_E - x_A = a_1 \\ y_E - y_A = a_2 \end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^2 \\ z_E - z_A = a_3 \end{array}\right\} \text{ im } \mathbb{R}^3$$

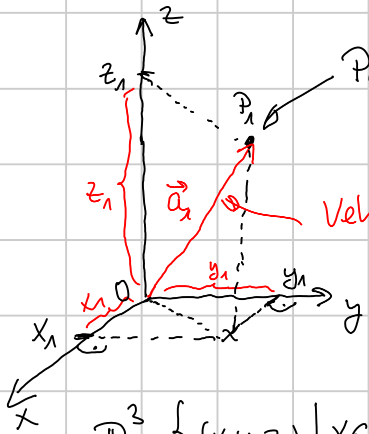


Punkt im $\mathbb{R}^2$: $P_1(x_1, y_1)$

Vektor im $\mathbb{R}^2$: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$

} äquivalente Sichten auf $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{R}^2$ kann sowohl als Menge von Punkten als auch als Menge von Vektoren aufgefasst werden

$$\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \right\}$$



Punkt im $\mathbb{R}^3$: $P_1(x_1, y_1, z_1)$

Vektor im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$

} äquivalente Sichten auf $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{R}^3$ kann sowohl als Menge von Punkten als auch als Menge von Vektoren aufgefasst werden

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \; x \in \mathbb{R} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge z \in \mathbb{R} \right\}$$

$n > 3$ $\rightarrow$ keine Anschauung mehr für Punkte und Pfeile aber abstrahiert gilt das analog, also:

$\mathbb{R}^n = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \}$ ← Punktesicht

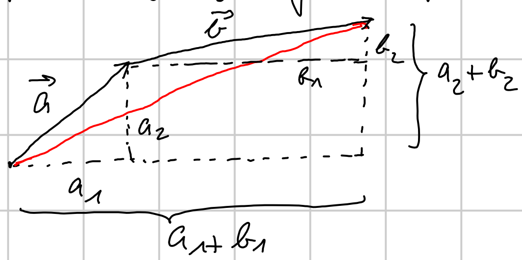
$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n \right\}$ ← Vektorsicht

Rechenoperationen für Vektoren

a) Addition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$$

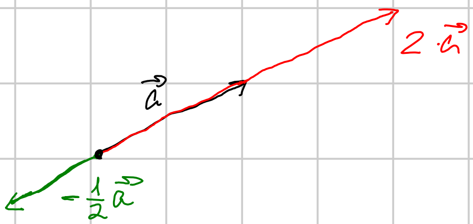
im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ entstanden aus „Hintereinanderhängen von Pfeilen"



b) Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

$$s \cdot \vec{a} = s \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s a_1 \\ s a_2 \\ \vdots \\ s a_n \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}^3$ entstanden aus „Streckung/Stauchung mit/ohne Richtungsumkehr von Pfeilen"



Da bei Addition und Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ im $\mathbb{R}^n$ komponentenweise gerechnet wird, übertragen sich Rechenregeln aus $\mathbb{R}$, nämlich

a) in Bezug auf die Addition

- Assoziativgesetz $\quad \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
- Kommutativgesetz $\quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Existenz eines neutralen Elements $\quad \vec{a} + \vec{0} = \vec{a} \longrightarrow \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : x_i = 0$ für $1 \leq i \leq n$
- Existenz eines inversen Elements $\quad \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} \longrightarrow -\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$

→ $(\mathbb{R}^n, +)$ ist eine abelsche (kommutative) Gruppe

b) in Bezug auf die Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$

(*)

$s \cdot (t \cdot \vec{a}) = (s \cdot t) \cdot \vec{a} = t \cdot (s \cdot \vec{a}), \quad s, t \in \mathbb{R}$

$s \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = (s \cdot \vec{a}) + (s \vec{b}), \quad (s + t) \cdot \vec{a} = s \cdot \vec{a} + t \vec{a}$

speziell: $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}, \quad 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$

Allgemein definiert man

Definition:

Gegeben ist eine Menge V mit einer Addition und einer Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$. Wenn $(V,+)$ eine abelsche Gruppe ist und bezüglich der Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$ die Regeln $(*)$ gelten, sagt man

V ist ein (reeller) Vektorraum oder auch V ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Die Elemente von V nennt man Vektoren (dieses Vektorraums)

$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n$ sind reelle Vektorräume!

Bemerkung und Beispiel

1) Gegeben ist das homogene lin. GLS

$$\left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 0 \\ -6x + 3y - 3z &= 0 \\ -x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{2}z &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -6 & 3 & -3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{0}}$$

$rg(\underline{A}) = 1$

$2 = 3 - 1$ freie Parameter werden benötigt

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & -1 & +1 & 0 \\ -6 & 3 & -3 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \qquad | \cdot 3 \quad | \cdot (+\tfrac{1}{2})$$

2 freie Parameter

$\boxed{z = t,\ y = s}$, $2x = y - z = s - t$

$\boxed{x = \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t}$

$$\mathbb{L}_h = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t \\ s \\ t \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

Behauptung: $\mathbb{L}_h$ mit der üblichen Vektoraddition und der Multiplikation mit $r \in \mathbb{R}$ ist ein Vektorraum, d.h. für zwei Lösungen $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{L}_h$ gilt $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in \mathbb{L}_h$ und für $\vec{x}_1 \in \mathbb{L}_h$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt auch $r \cdot \vec{x}_1 \in \mathbb{L}_h$ (siehe 24. Vorlesung 4b)!)

2) $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2}$; $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_1} + a_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_2} + a_3 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{e}_3}$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + \dots + a_n \vec{e}_n$$

$\vec{e}_i \in \mathbb{R}^n$ hat eine 1 in der i-ten Komponente, alle anderen Komponenten sind 0!

Daraus gewinnt man folgende Begriffe

Definition:

Gegeben ist ein Vektorraum V.

(1) Die Menge $E = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ heißt Erzeugendensystem von V, falls gilt

Für jeden Vektor $\vec{a} \in V$ gibt es reelle Zahlen $t_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le k$ mit

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{k} t_i \vec{v}_i = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k$$

Beispiel: $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein Erzeugendensystem, denn für $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3$

(2) Die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in V$ heißen linear unabhängig, falls gilt

$$\vec{0} = t_1 \vec{v}_1 + t_2 \vec{v}_2 + \dots + t_k \vec{v}_k \Leftrightarrow t_1 = 0, t_2 = 0, \dots, t_k = 0$$

d.h. die einzige Möglichkeit mit den Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ den Nullvektor $\vec{0}$ zu erzeugen, besteht darin alle Koeffizienten $t_1, t_2, \dots$ $\dots t_k$ gleich 0 zu setzen!

Vektoren die nicht linear unabhängig sind, heißen linear abhängig.

Bemerkung + Beispiel:

a) $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ sind linear unabhängig, denn

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = t_1\vec{e}_1 + t_2\vec{e}_2 + t_3\vec{e}_3 = t_1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t_2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t_3\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t_1\\t_2\\t_3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow t_1=0,\ t_2=0,\ t_3=0$

b) $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ sind linear unabhängig falls das homogene lineare Gleichungssystem für die Unbekannten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ gegeben durch $t_1\vec{v}_1 + t_2\vec{v}_2 + \ldots + t_k\vec{v}_k = \vec{0}$ nur die Lösung $t_1=0,\ t_2=0, \ldots, t_k=0$ hat!

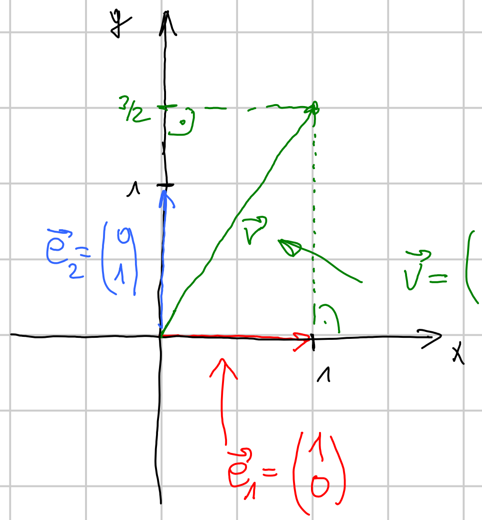
(3) Die Menge $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\} \subseteq V$ heißt Basis des Vektorraums V, falls gilt: B ist ein Erzeugendensystem und die Vektoren in B sind linear unabhängig.

Beispiel: $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$, man nennt diese Basis die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$.

$B = \{\vec{e}_i \mid 1 \le i \le n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{R}^2$

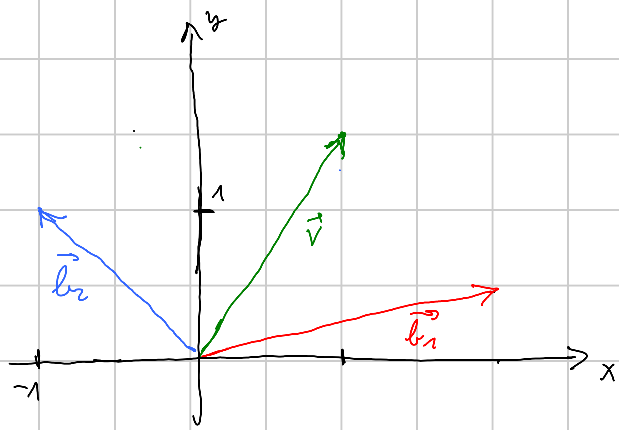


$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

$\vec{v} = \begin{pmatrix}1\\3/2\end{pmatrix} = 1\cdot\vec{e}_1 + \frac{3}{2}\cdot\vec{e}_2$

Man sagt: Die Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ „spannt das Koordinatensystem des $\mathbb{R}^2$ auf".

Behauptung: $B = \Big\{ \underbrace{\begin{pmatrix}2\\1/2\end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix}-1\\+1\end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \Big\}$ ist ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^2$



Beweis: Zu zeigen ist

1) B ist Erzeugendensystem: Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist das lin. GLS. $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$ lösbar

2) Vektoren in B sind linear unabhängig: Das hom. lineare GLS $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{0}$ hat nur die Lösung $t_1 = 0, t_2 = 0$

$\Leftarrow$ Jedes lin. GLS der Form $t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \vec{v}$ mit bel. $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ ist eindeutig lösbar

$$t_1 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + t_2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}}^{\underline{\underline{B}}} \cdot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$\leftarrow$ dieses Gleichungssystem muss eindeutig lösbar sein!

Diese lin. Gleichungssysteme sind genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt $rg(\underline{\underline{B}}) = 2$ ist; die Matrix $\underline{\underline{B}}$ hat die Vektoren $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ als Spalten(vektoren)! ↓ Gauß-Schema

	t_1	t_2	
$\underline{\underline{B}}$	2	-1	v_1 ↓+
	$1/2$	1	v_2 $\mid \cdot(-4)$
	2	-1	v_1
	0	-5	$v_1 - 4v_2$

$\to 2t_1 = v_1 + t_2 = \frac{4}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2}$

$\to \boxed{t_2 = -\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2}$

2 Nicht-Nullzeilen $\Rightarrow rg(\underline{\underline{B}}) = 2 \Rightarrow B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^2$

Probe: $$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2 = \underbrace{\left(\frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2\right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\text{weiter: morgen } 8^{00} \text{ Uhr!}}$$