26. Vorlesung 09.12.2020

Notiztitel 09.12.2020

Aus der 25. Vorlesung:

$B = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2} \right\}$ Basis des $\mathbb{R}^2$

↳ jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen, d.h. es gibt $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ mit $\underbrace{\vec{v} = t_1 \cdot \vec{b}_1 + t_2 \cdot \vec{b}_2}$ ✓

operativ / zur Berechnung: t_1, t_2 sind Lösungen dieses linearen GLS!

Wir hatten berechnet:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{5}v_1 + \frac{2}{5}v_2\right)}_{t_1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \underbrace{\left(-\frac{1}{5}v_1 + \frac{4}{5}v_2\right)}_{t_2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_1 + \cancel{\frac{4}{5}v_2} - \cancel{\frac{4}{5}v_2} \\ \cancel{\frac{1}{5}v_1} - \cancel{\frac{1}{5}v_1} + \frac{1}{5}v_2 + \frac{4}{5}v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} ✓$$

Zusammenfassung

V Vektorraum, $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ Basis:

operativ / rechnerisch

- $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k$ sind linear unabhängig → das lin. GLS $t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \cdots + t_k\vec{b}_k = \vec{0}$ für die Unbekannten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ hat nur die Lösung $t_1 = 0, t_2 = 0, \ldots, t_k = 0$
- $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ ist Erzeugendensystem → für jeden Vektor $\vec{v} \in V$ hat das lin. GLS $t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \cdots + t_k\vec{b}_k = \vec{v}$ für die Unbekannten $t_1, t_2, \ldots, t_k$ eine Lösung

Bemerkung: Wenn $B = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k\}$ eine Basis von V ist, ist die Darstellung $\vec{v} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \cdots + t_k\vec{b}_k$ eines Vektors $\vec{v} \in V$ eindeutig bestimmt.

Beweisidee: Angenommen $\vec{v} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \cdots + t_k\vec{b}_k$ und

$\vec{v} = s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2 + \cdots + s_k\vec{b}_k \implies \vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = (t_1 - s_1)\vec{b}_1 + (t_2 - s_2)\vec{b}_2 + \cdots + (t_k - s_k)\vec{b}_k$

B Basis $\implies$ es gibt nur die Lösung $t_1 - s_1 = 0, t_2 - s_2 = 0, \ldots, t_k - s_k = 0$

also $t_1 = s_1, t_2 = s_2, \ldots, t_k = s_k$.

Definition:

Gegeben ist ein Vektorraum V. Die Dimension von V ist die Anzahl der Basisvektoren von V, man schreibt dafür $\dim(V)$ = Anzahl Basisvektoren

Bemerkung:

$$\mathbb{R}^2,\quad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \to \dim(\mathbb{R}^2)=2$$

$$\mathbb{R}^3,\quad B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \to \dim(\mathbb{R}^3)=3$$

$$\mathbb{R}^n,\quad B=\left\{ \vec{e}_i \mid 1\le i\le n\right\} \to \dim(\mathbb{R}^n)=n$$

$$\hookrightarrow \vec{e}_i=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \leftarrow \text{nur } i\text{-te Komponente gleich } 1$$

Vektorrechnung im $\mathbb{R}^n$ / speziell in $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Definition:

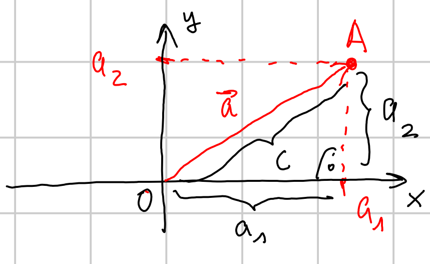
1) Für $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ ist das Skalarprodukt definiert

als $$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\dots+a_nb_n=\sum_{i=1}^{n}a_i\cdot b_i$$

2) Für $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ ist der Betrag von $\vec{a}$ definiert als

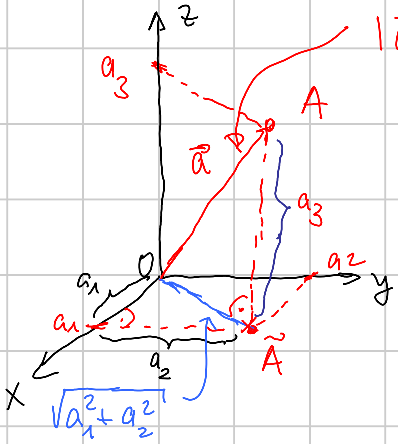
$$|\vec{a}|=\sqrt{\langle\vec{a},\vec{a}\rangle}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+\dots+a_n^2}$$

Im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ haben Skalarprodukt und Betrag eine direkte geometrische Bedeutung, nämlich:



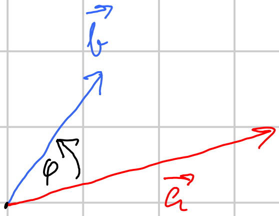
$\vec{a}$ repräsentiert den Pfeil $\overrightarrow{OA}$

$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ ist die Länge des Pfeils (man sagt auch einfach Länge des Vektors): Nach Pythagoras gilt $a_1^2+a_2^2=c^2 \Rightarrow c=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$



$|\vec{a}|^2 = a_3^2 + \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2}\right)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2 \Rightarrow$

$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ ist die Länge des Pfeils $\overrightarrow{OA}$ (die Länge des Vektors $\vec{a}$)



φ ist der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $0 \le \varphi \le \pi$ $(0° \le \varphi \le 180°)$, dann gilt:

$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow$

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{für } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^{2(3)} \setminus \{\vec{0}\}$$

als <u>Verallgemeinerung</u> sagt man: Auch im $\mathbb{R}^n$ gibt es den Winkel φ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad \text{für } \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$$

<u>Beispiele:</u>

1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

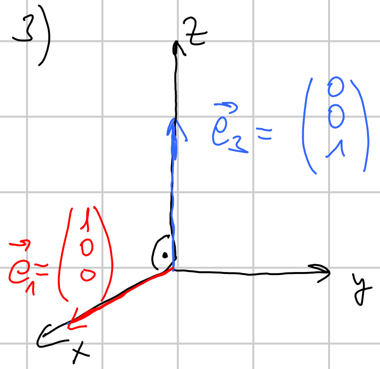
$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -3$

2) $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \Rightarrow |\vec{v}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$|\vec{v}_2| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

$\langle \vec{v}_1, \vec{v}_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 = 5$

3)



Winkel φ zwischen $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_3$ ist $90°$ ($\frac{\pi}{2}$ im Bogenmaß); es gilt $\cos(90°) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ also muss

$$\frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \cos(\varphi) = 0 \checkmark$$ sein!

<u>Wir haben:</u>

$$|\vec{e}_1| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$$
$$|\vec{e}_3| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1$$

$$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle}{|\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_3|} = \frac{0}{1 \cdot 1} = 0 \checkmark$$

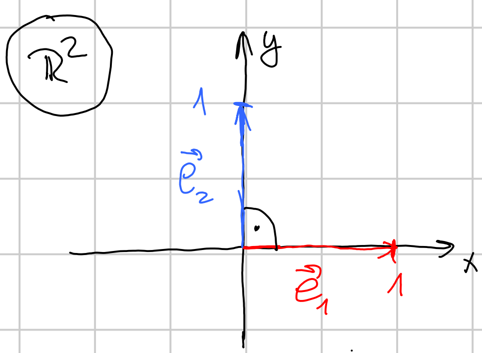
<u>Bemerkung:</u>

1) Eine Basis $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ heißt <u>Orthonormal Basis</u>, wenn gilt: Alle Basisvektoren haben Betrag 1, also $|\vec{b}_i| = 1$ für $1 \leq i \leq n$, und sie erfüllen $\langle \vec{b}_i, \vec{b}_j \rangle = 0$ für $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$ (man sagt dann auch $\vec{b}_i$ steht senkrecht/ist orthogonal auf/zu $\vec{b}_j$)

2) Die Standardbasis $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ des $\mathbb{R}^n$ mit

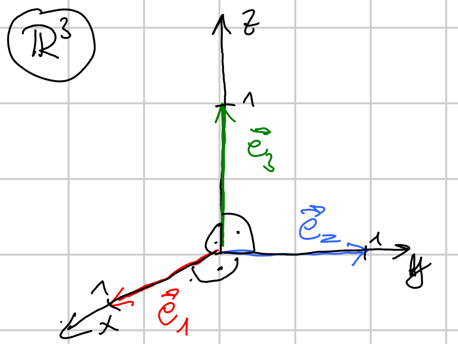
$$\vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{nur } i\text{-te Komponente } 1 \text{, alle anderen Komponenten } 0$$

ist eine <u>Orthonormalbasis</u>! Speziell



$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$



$|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$

$\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0$, $\langle \vec{e}_2, \vec{e}_3 \rangle = 0$, $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_3 \rangle = 0$

Rechenregeln für Skalarprodukt und Betrag

↳ Rechnen mit Vektoren (also Vektoraddition und die Multiplikation mit $s \in \mathbb{R}$)

Es gilt: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$

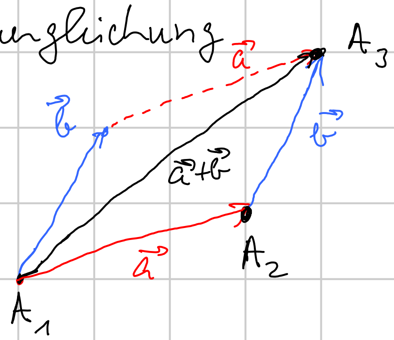
① * $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$ Kommutativgesetz für das Skalarprodukt

② * $\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$ Distributivgesetz für das Skalarprodukt

③ $\langle s \cdot \vec{a}, \vec{b} \rangle = s \cdot \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, s \cdot \vec{b} \rangle$ für $s \in \mathbb{R}$

④ $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ Dreiecksungleichung

⑤ $|s \cdot \vec{a}| = |s| \cdot |\vec{a}|$



$|\overline{A_1 A_3}| = |\vec{a} + \vec{b}|$ ← Länge der Strecke von A_1 nach A_3

$|\overline{A_1 A_3}| \leq |\overline{A_1 A_2}| + |\overline{A_2 A_3}|$

*) Beweisidee zu diesen Regeln:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i) \overset{\text{Kommutativgesetz in } \mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^{n} (b_i \cdot a_i) = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} + \vec{c} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot (b_i + c_i) \overset{\text{Distributivgesetz in } \mathbb{R}}{=} \sum_{i=1}^{n} (a_i \cdot b_i + a_i \cdot c_i)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot c_i\right)$$

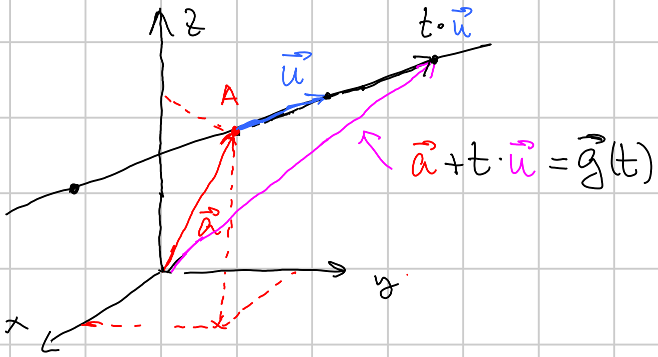
$$= \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle$$

Weitere geometrische Anwendungen im $\mathbb{R}^3$

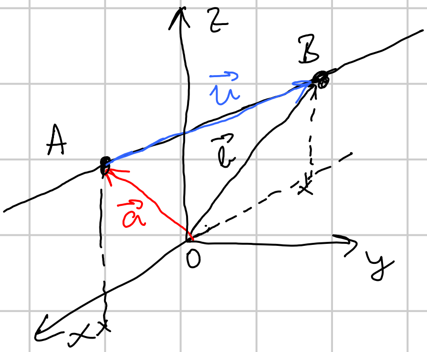
1) Parameterdarstellung einer Geraden im $\mathbb{R}^3$

$\vec{a}$ Aufpunktvektor
$\vec{u}$ Richtungsvektor
$\Bigg\}$ $\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$ heißt Parameterdarstellung der Geraden

$\vec{a} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$



<u>Beispiel:</u> Zwei Punkte $A(a_1,a_2,a_3)$ und $B(b_1,b_2,b_3)$ im $\mathbb{R}^3$ bestimmen genau eine Gerade; gesucht ist <u>eine</u> Parameterdarstellung dieser Geraden



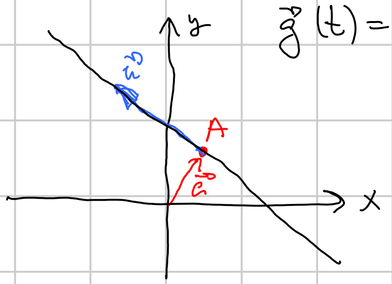
<u>MERKE:</u> Parameterdarstellungen sind nicht eindeutig!

<u>Aufpunkt:</u> $A \Rightarrow \vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$

<u>Richtungsvektor:</u> $\vec{u}=\vec{b}-\vec{a}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$

$$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot(\vec{b}-\vec{a})$$

2) Im $\mathbb{R}^2$



$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$ mit $\vec{a},\vec{u}\in\mathbb{R}^2$

„gewöhnliche Koordinatendarstellung" einer Geraden im $\mathbb{R}^2$ ist $y=ax+b$.
Welche Parameterdarstellung gehört zu dieser Geraden? <u>Konkret:</u> $y=-\frac{1}{2}x+3$

$y=t$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}x+y=3$ lin. GLS für die Unbekannten x und y: 2 Unbek., 1 Gleichung: Lösung mit 2-1=1 freiem Parameter

$\frac{1}{2}x=3-t$

$x=6-2t$

<u>Lösungsmenge:</u>

$$\mathbb{L}=\left\{\begin{pmatrix}6-2t\\t\end{pmatrix}\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}}_{\vec{a}}+t\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}}\,\middle|\,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$\vec{g}(t)=\vec{a}+t\cdot\vec{u}$ $\leftarrow$