33. Vorlesung 05.01.2021

Notiztitel 05.01.2021

Inverse Matrix $\underline{A} \in M(n \times n)$ (quadratisch) ist invertierbar $\Leftrightarrow$ es gibt eine Matrix $\underline{A}^{-1}$ mit $\underline{A}^{-1} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = \underline{E}$

$$\underline{A}^{-1} = (\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2 \ldots \vec{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$

$$\underline{E} = (\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = (\underline{A} \cdot \vec{a}_1 \;\; \underline{A} \cdot \vec{a}_2 \ldots \underline{A} \cdot \vec{a}_n) = (\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2 \ldots \vec{e}_n)$$

Für $1 \le i \le n$ ist

$$\underline{A} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$$

die Spaltenvektoren der Matrix $\underline{A}^{-1}$ sind die Lösungen der lin. GLS $\underline{A} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$, diese lin. GLS haben alle dieselbe Koeffizientenmatrix $\underline{A}$ nur verschiedene rechte Seiten $\vec{e}_i$ $(1 \le i \le n)$

Beispiel: $\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, gesucht $\underline{A}^{-1}$

Ansatz $\underline{A}^{-1} = (\vec{a}_1 \;\; \vec{a}_2)$

$$\underline{A} \cdot \underline{A}^{-1} = (\underline{A} \cdot \vec{a}_1 \;\; \underline{A} \cdot \vec{a}_2) = \underline{E} = (\vec{e}_1 \;\; \vec{e}_2)$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1 \wedge \underline{A} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$$

die Lösungen $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ dieser beiden lin. GLS liefern die Spaltenvektoren der gesuchten inversen Matrix $\underline{A}^{-1}$!

$\underline{A} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad$ $\underline{A} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Gauß-Schema $\qquad$ Gauß-Schema

x	y		
1	2	1	$1 \cdot (-3)$
3	4	0	+

x	y		
1	2	0	$1 \cdot (-3)$
3	4	1	+

gemeinsames erweitertes Gauß-Schema

Vorwärtselimination

	x	y				
$\underline{A}$	1	2	1	0	$\underline{E}$	$1 \cdot (-3)$
	3	4	0	1		+

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

Ende der Vorwärtselimination

Start der Rücksub.

$$\begin{array}{r|cc|cc} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ \cdot(-1/2) & 0 & -2 & -3 & 1 \\ \hline \underline{\underline{E}} & 1 & 0 & -2 & 1 \\ & 0 & 1 & 3/2 & -1/2 \end{array} \; \underline{\underline{A}}^{-1}$$

Ende der Rücksub.

1.GLS   2.GLS

Für $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_1 = \vec{e}_1$ mit $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = -2$

$y = 3/2$

Für $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_2 = \vec{e}_2$ mit $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$x = 1$

$y = -1/2$

$$\Longrightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} = (\vec{a}_1 \; \vec{a}_2) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Das erweiterte Gauß-Schema liefert

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

<u>Probe:</u> Es muss $\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$ gelten

$$\underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Aus der 32. Vorlesung und dem Ansatz aus dieser Vorlesung, nämlich: Die Spaltenvektoren $\vec{a}_i$ der Matrix $\underline{\underline{A}}^{-1}$ sind die Lösungen des lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$ $(1 \leq i \leq n)$, folgt: $\underline{\underline{A}}^{-1}$ existiert genau dann, wenn die lin. GLS $\underline{\underline{A}} \cdot \vec{a}_i = \vec{e}_i$ $(1 \leq i \leq n)$ eindeutig lösbar sind. Dies tritt ein, wenn beim Rechnen im Gauß-Schema keine Nullzeile erzeugt wird, d.h. $rg(\underline{\underline{A}}) = n$!

<u>MERKE:</u> $\underline{\underline{A}} \in M(n \times n)$ ist invertierbar $\Longleftrightarrow rg(\underline{\underline{A}}) = n$

<u>Beispiel:</u> Berechnung von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ für $\underline{\underline{A}} \in M(3 \times 3)$: $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

erweitertes Gauß-Schema

$$\begin{array}{r|ccc|ccc|l} & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & \underline{\underline{E}} \quad \mathrm{I}\cdot 3 \\ \underline{\underline{A}} & -3 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & \\ & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 & \mathrm{I}\cdot 2 \\ \hline & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 14 & 7 & 3 & 2 & 0 & \mathrm{I}\cdot(-6) \\ & 0 & 12 & -1 & 1 & 0 & 2 & \mathrm{I}\cdot 7 \\ \hline \end{array}$$

Vorwärtselimination

$rg(\underline{\underline{A}}) = 3$

3 Nicht-Nullzeilen!!

Start der Rücksubst.

$$
\begin{array}{r|ccc|ccc}
49\cdot & 2 & 6 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
\cdot 7 & 0 & 14 & 7 & 3 & 2 & 0 \\
 & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
+ & 98 & 294 & 0 & 38 & -12 & 14 \\
\cdot(-3) & 0 & 98 & 0 & 10 & 2 & 14 \\
 & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
\cdot \frac{1}{98} & 98 & 0 & 0 & 8 & -18 & -28 \\
\cdot \frac{1}{98} & 0 & 98 & 0 & 10 & 2 & 14 \\
\cdot(-\frac{1}{49}) & 0 & 0 & -49 & -11 & -12 & 14 \\
\hline
\underline{\underline{E}} & 1 & 0 & 0 & 8/98 & -18/98 & -28/98 \\
 & 0 & 1 & 0 & 10/98 & 2/98 & 14/98 \\
 & 0 & 0 & 1 & 11/49 & 12/49 & -14/49
\end{array}
\quad \underline{\underline{A}}^{-1}
$$

Ende der Vorwärtselimination

Ende der Rücksub.

$$
\underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 8/98 & -18/98 & -28/98 \\ 10/98 & 2/98 & 14/98 \\ 11/49 & 12/49 & -14/49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/49 & -9/49 & -14/49 \\ 5/49 & 1/49 & 7/49 \\ 11/49 & 12/49 & -14/49 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix}
$$

Probe: Es muss gelten $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{E}}$

$$
\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{A}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix}
$$

$$
= \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -9 & -14 \\ 5 & 1 & 7 \\ 11 & 12 & -14 \end{pmatrix} = \frac{1}{49} \cdot \begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

Zurück zu $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2)$:

$$
\det(\underline{\underline{A}}) = |\underline{\underline{A}}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc
$$

siehe 22. Vorlesung

$$
0 \neq ad - bc = \det(\underline{\underline{A}}) \Rightarrow \underline{\underline{A}}^{-1} \text{ existiert}
$$

Berechnung von $\underline{\underline{A}}^{-1}$ im erweiterten Gauß-Schema:

$$
\begin{array}{r|cc|cc|l}
\underline{\underline{A}} & a & b & 1 & 0 & \cdot(-c) \\
 & c & d & 0 & 1 & \cdot(+a) \\
\hline
 & a & b & 1 & 0 & \\
 & 0 & ad-bc & -c & a & \cdot \frac{1}{ad-bc}
\end{array}
\quad \underline{\underline{E}}
$$

falls $ad - bc = |A| \neq 0$ ist dies möglich

Start der Rücks.

$$
\begin{array}{r|cc|cc}
+\rceil & a & b & 1 & 0 \\
\cdot(-b) \mid & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \\
\hline
\cdot \frac{1}{a} \mid & a & 0 & 1+\frac{bc}{ad-bc} & -\frac{ab}{ad-bc} \\
 & 0 & 1 & -\frac{c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \\
\hline
\underline{\underline{E}} & 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\
 & 0 & 1 & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc}
\end{array}
\quad \underline{\underline{A}}^{-1}
$$

Ende der Vorwärtsel.

$$(*) \quad 1+\frac{bc}{ad-bc} = \underbrace{\frac{ad-\cancel{bc}}{ad-bc}}_{1} + \frac{\cancel{bc}}{ad-bc} = \frac{ad}{ad-bc}$$

Für $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $\boxed{\det(\underline{\underline{A}}) = ad-bc \neq 0}$ ist

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(\underline{\underline{A}})} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der Determinante von $\underline{\underline{A}} \in M(2\times 2)$:

(1) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = ad-bc$

$\underline{\underline{A}}^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}^t) = ad-cb = ad-bc = \det(\underline{\underline{A}})$

$$\boxed{\det(\underline{\underline{A}}) = \det(\underline{\underline{A}}^t)}$$

(2) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & a \\ c & c \end{pmatrix} \leftarrow$ die beiden Spaltenvektoren von $\underline{\underline{A}}$ sind identisch

$\det(\underline{\underline{A}}) = a \cdot c - ac = 0$

$\boxed{\underline{\underline{A}} \text{ hat 2 identische Spaltenvektoren} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0}$

Wegen $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$ gilt sofort

$\boxed{\underline{\underline{A}} \text{ hat 2 identische Zeilen} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = 0}$

(3) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a & s \cdot b_1 + t b_2 \\ c & s \cdot d_1 + t d_2 \end{pmatrix}$ für $s,t \in \mathbb{R}$

der 2. Spaltenvektor von $\underline{\underline{A}}$ ist Linearkombination zweier Vektoren, nämlich

$$\begin{pmatrix} sb_1 + t\cdot b_2 \\ sd_1 + t\cdot d_2 \end{pmatrix} = s\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ d_1 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_1} + t\cdot \underbrace{\begin{pmatrix} b_2 \\ d_2 \end{pmatrix}}_{\vec{b}_2}$$

$$\Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = a\cdot(s\,d_1 + t\,d_2) - (s\,b_1 + t\,b_2)\cdot c$$

$$= s\cdot(ad_1 - b_1 c) + t\cdot(ad_2 - b_2 c)$$

$$= s\cdot \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}$$

$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} \vec{a} & s\vec{b}_1 + t\vec{b}_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(\underline{\underline{A}}) = s\cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b}_1 \end{vmatrix} + t\cdot \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b}_2 \end{vmatrix}$, d.h.

„Linearkombination von Spaltenvektoren ergibt dieselbe Linearkombination der Determinanten"

Wegen $\det(\underline{\underline{A}}^t) = \det(\underline{\underline{A}})$ gilt das auch für Zeilen, d.h.

„Linearkombination von Zeilen einer Matrix ergibt dieselbe Linearkombination der Determinanten"