Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$

Gerade: $\boxed{\vec{g}(t) = \vec{a} + t \cdot \vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}}$ ← Parameterdarstellung der Gerade

$\vec{a}$: Aufpunkt(vektor), $\vec{u}$: Richtungsvektor

Beispiel:

$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Welcher der Punkte $P_1(2,5,6)$ und $P_2(4,-1,6)$ liegt auf dieser Geraden?

P_i $(i=1,2)$ liegt auf der Geraden, falls es $t_i \in \mathbb{R}$ gibt mit $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix} = \vec{g}(t_i)$ für $P_i(x_i, y_i, z_i)$.

a) Gesucht $t \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ (*)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ also insbesondere $-t = 1 \Rightarrow t = -1$

dann ist aber $t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ↯

(*) ist für kein $t \in \mathbb{R}$ erfüllbar

insgesamt P_1 liegt nicht auf der Geraden

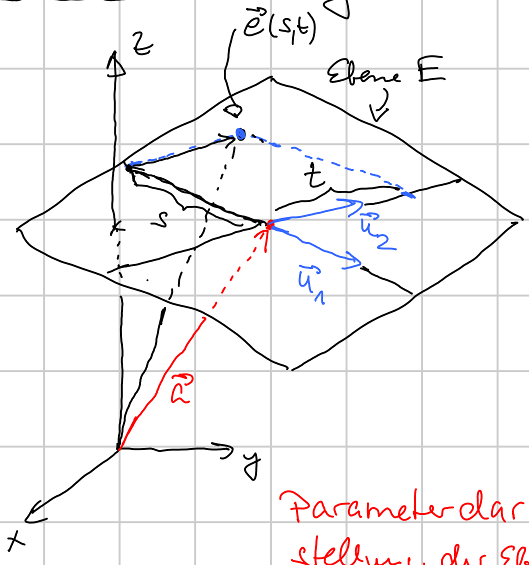
b) Gesucht $t \in \mathbb{R}$ mit $\boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$ (**)

$$\Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$ also insbesondere $-t = 3 \Rightarrow t = -3$

und $(-3) \cdot 1 = -3$, $(-3) \cdot (-1) = 3 \Rightarrow (-3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

für $t = -3$ ist (**) erfüllt, d.h. P_2 liegt auf der Geraden

Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Aufpunktvektor $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$

$\underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2}$ $\in \mathbb{R}^3$ Richtungsvektoren

linear unabhängig, d.h.

es gibt kein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{u}_1 = \lambda \cdot \vec{u}_2$,

$\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ sind keine Vielfachen voneinander

dann beschreibt

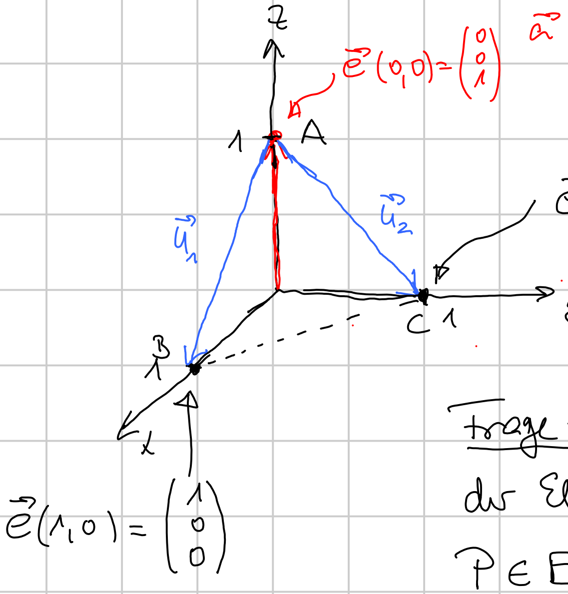
Parameterdarstellung der Ebene $\longrightarrow$ $\boxed{\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2 \; ; \; s,t \in \mathbb{R}}$

die Ebene E.

Beispiel:

$$\vec{e}(s,t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}_2}$$

Ebene E enthält das Dreieck $\Delta(A, B, C)$



$$\vec{e}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Frage: Wann liegt der Punkt $P(b_1, b_2, b_3)$ auf der Ebene $(P \in E)$?

$P \in E \Leftrightarrow$ es gibt $s, t \in \mathbb{R}$ mit

Korrektur:

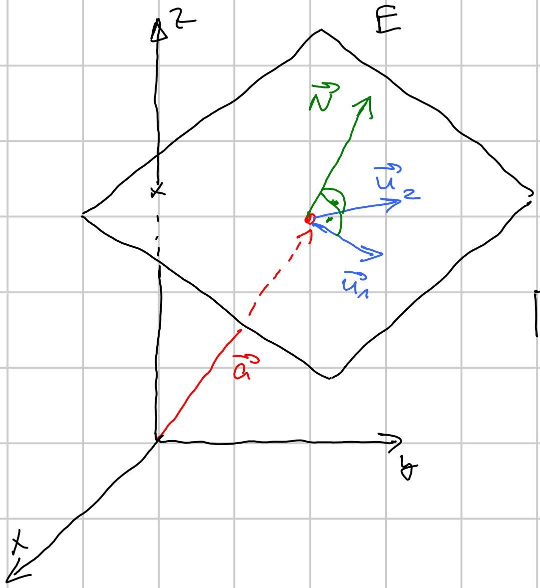
$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ das lin. GLS.

$$s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 - 1 \end{pmatrix}$$

muss lösbar sein!



$\vec{e}(s,t) = \vec{a} + s \cdot \vec{u}_1 + t \cdot \vec{u}_2$ ✓ $\perp$

$\vec{N}$ steht senkrecht (ist orthogonal) auf der Ebene E $\Leftrightarrow$ $\vec{N} \perp \vec{u}_1$ und $\vec{N} \perp \vec{u}_2$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \underbrace{\measuredangle(\vec{a},\vec{b})}_{\varphi} = 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$\varphi \leftarrow$ Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$

mit dem Skalarprodukt (siehe 26. Vorlesung)

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}, \quad \varphi = 90^\circ \left(\tfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\varphi) = 0$$

also $$0 = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

MERKE: Für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 (\mathbb{R}^2)$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ gilt $$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Hier: $\vec{N} \perp \vec{u}_1$ falls gilt: $\langle \vec{N}, \vec{u}_1 \rangle = 0$,

$\vec{N} \perp \vec{u}_2$ falls gilt: $\langle \vec{N}, \vec{u}_2 \rangle = 0$

$\leftarrow$ gilt nur im $\mathbb{R}^3$

Definition: (Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$)

Für zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ist das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ definiert durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ -(a_1 b_3 - b_1 a_3) \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Bemerkung: Das Skalarprodukt $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \vec{a} \cdot \vec{b}$ liefert mit 2 Vektoren als Input eine reelle Zahl als Output!

Das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ liefert mit 2 Vektoren des $\mathbb{R}^3$ als Input einen Vektor des $\mathbb{R}^3$ als Output!

Beispiele:

a) $$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot(-4) - 3\cdot 3\\ -(1\cdot(-4) - (-1)\cdot 3)\\ 1\cdot 3 - (-1)\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\cdot 3 - 2\cdot(-4)\\ -((-1)\cdot 3 - 1\cdot(-4))\\ (-1)\cdot 2 - 1\cdot 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\-1\\-5\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$$

b) Es gilt allgemein: Das Vektorprodukt ist nicht kommutativ sondern antikommutativ, d.h. genauer

$$\boxed{\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_2b_3 - b_2a_3\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - b_1a_2\end{pmatrix}$$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_2a_3 - a_2b_3\\ a_1b_3 - b_1a_3\\ b_1a_2 - a_1b_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-(a_2b_3 - b_2a_3)\\ -(a_3b_1 - a_1b_3)\\ -(a_1b_2 - b_1a_2)\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a_2b_3 - b_2a_3\\ a_3b_1 - a_1b_3\\ a_1b_2 - b_1a_2\end{pmatrix}$$

$$= -(\vec{a} \times \vec{b})$$

c) Für $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix}$ hatten wir $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix}$,

Es ist $\langle \vec{a}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix} = 1\cdot(-17) + 2\cdot 1 + 3\cdot 5 = -17 + 17 = 0$

$\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

es ist auch $\langle \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b} \rangle = \begin{pmatrix}-1\\3\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-17\\1\\5\end{pmatrix} = (-1)\cdot(-17) + 3\cdot 1 + (-4)\cdot 5 = 20 - 20 = 0$

$\Rightarrow \vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

Es gilt allgemein für $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$: $\vec{a} \perp \vec{a} \times \vec{b}$ und $\vec{b} \perp \vec{a} \times \vec{b}$

denn:

$$\vec a \times \vec b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix} \quad \text{also}$$

$$\langle \vec a, \vec a \times \vec b \rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - b_1 a_2 \end{pmatrix}$$

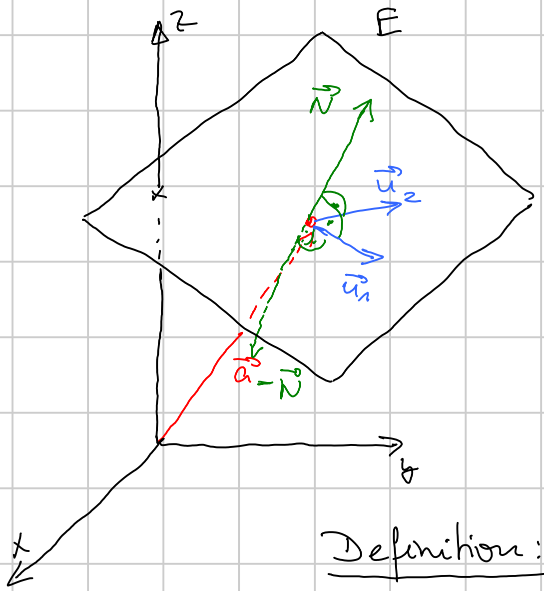
$$= a_1 (a_2 b_3 - b_2 a_3) + a_2 (a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3 \cdot (a_1 b_2 - b_1 a_2)$$

$$= \cancel{a_1 a_2 b_3} - \cancel{a_1 a_3 b_2} + \cancel{a_2 a_3 b_1} - \cancel{a_2 a_1 b_3} + \cancel{a_3 a_1 b_2} - \cancel{a_3 a_2 b_1}$$

$$= 0$$

analog erhält man $\langle \vec b, \vec a \times \vec b \rangle = 0$

Vektorprodukt und Parameterdarstellung einer Ebene im $\mathbb{R}^3$



Ein Kandidat für einen Vektor $\vec N$, der senkrecht auf der Ebene E steht ist

$\vec N = \vec u_1 \times \vec u_2$ ← Vektorprodukt der beiden Richtungsvektoren

$-\vec N = \vec u_2 \times \vec u_1$ ist ebenfalls ein Kandidat

Definition:

1) Ein Vektor $\vec N$, der senkrecht auf der Ebene E steht, heißt Normalenvektor der Ebene E.

2) Ein Normalenvektor $\vec n$ der Ebene E mit $|\vec n| = 1$ heißt Normaleneinheitsvektor der Ebene E

3) Wenn $\vec N$ ein Normalenvektor der Ebene E ist, dann ist $\vec n = \frac{1}{|\vec N|} \cdot \vec N = \frac{\vec N}{|\vec N|}$ der zugehörige Normaleneinheitsvektor der Ebene E

Beispiel: Für $\vec{e}(s,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s,t \in \mathbb{R}$

also die Ebene $E = \left\{ \vec{e}(s,t) \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$ gilt:

$$\vec{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ ist ein Normalenvektor

der Ebene E, der zugehörige Normaleneinheitsvektor ist

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{N}|} \cdot \vec{N} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$