9. Vorlesung 26.10.2020

Notiztitel 26.10.2020

Verallgemeinerte binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \longrightarrow (a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ Symmetrie

Binomialkoeffizienten $\longrightarrow$ Pascalsches Dreieck

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & + & 1 & & & & \\
 & & & 1 & + & 2 & + & 1 & & & \\
 & & 1 & + & 3 & + & 3 & + & 1 & & \\
 & 1 & + & 4 & + & 6 & + & 4 & + & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

. . . . . usw. . . . .

$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ Additivität

„3. binomische Formel"

$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 \longrightarrow a \neq b: \quad \underbrace{\frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b}$

Gibt es eine Formel für $\frac{a^n - b^n}{a-b} = ?$

Für $a \neq b$ gilt:

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{\cancel{a^n}\cdot\left(1 - \frac{b^n}{a^n}\right)}{\cancel{a}\cdot\left(1-\frac{b}{a}\right)}$$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 - \frac{b}{a}}$$

$\frac{b}{a} = q$

$a \neq b \Rightarrow q \neq 1$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

7. Vorlesung

$$= a^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} q^i\right)$$

$$= a^{n-1} \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^i\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^i \cdot b^i$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

Rechenregeln für Potenzen: $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$

$\frac{1}{a} = a^{-1}$ für $a \neq 0$, $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n \cdot b^{-n}$

$\frac{a^n}{a^k} = a^n \cdot a^{-k} = a^{n-k}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

$(a^n)^k = a^{n \cdot k}$

$a^0 = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$

(0^0 ist nicht definiert)

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} \cdot a^{-i} \cdot b^{i}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i}$$

Insgesamt bekommt man die „verallgemeinerte 3. Binomische Formel"

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i} \quad ; \quad a \neq b$$

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} \cdot b^{i} \right) \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$$

Formel mit $a = x,\ b = 2,\ n = 6$

Beispiel: $$\frac{x^6 - 64}{x-2} = \frac{x^6 - 2^6}{x-2} = \sum_{i=0}^{5} x^{5-i} \cdot 2^{i}$$

$$= x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 16x + 32$$

Weitere „Anwendungen" von Fakultät und Binomialkoeffizienten:

Elementare Kombinatorik

↳ Lehre von der Anzahl der Möglichkeiten endliche Mengen anzuordnen oder Auswahlen von Elementen zu treffen

Elementares Multiplikationsprinzip

1) Gegeben sind die Menge A_1 mit $n_1 = |A_1|$ Elementen und die Menge A_2 mit $n_2 = |A_2|$ Elementen $\Rightarrow$
$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \wedge a_2 \in A_2\}$ hat $n_1 \cdot n_2$ Elemente, also
$|A_1 \times A_2| = |A_1| \cdot |A_2|$

2) Gegeben sind die Mengen A_i mit $n_i = |A_i|$ Elementen, $1 \leq i \leq N \Rightarrow$
$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N = \{(a_1, a_2, \dots, a_N) \mid a_i \in A_i, 1 \leq i \leq N\}$ hat $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_N$ Elemente, also
$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot |A_3| \cdot \dots \cdot |A_N|$

Beispiel: $H = \{h_1, h_2, h_3\}$ Menge mit drei verschiedenen Hosen
$T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ Menge mit vier verschiedenen T-Shirts
$S = \{s_1, s_2\}$ Menge mit zwei verschiedenen Paar Schuhe

$$\Rightarrow H \times T \times S = \{(h,t,s) \mid h \in H \wedge t \in T, s \in S\}$$

Menge der möglichen „Kombinationen" von Hose, T-Shirt, Schuhe

$$\Rightarrow |H \times T \times S| = |H| \cdot |T| \cdot |S| = 3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$$

① Anordnung: a) k von n Elementen $(k \leq n)$ werden mit Beachtung der Reihenfolge angeordnet; (Anordnung → ohne Wiederholung!)
Anzahl möglicher Anordnungen ist $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

Anzahl möglicher Besetzungen → $n \quad n-1 \quad n-2 \quad n-k+1$

Plätze → $\sqcup_{P_1} \quad \sqcup_{P_2} \quad \sqcup_{P_3} \ldots \sqcup_{P_k}$ ← numerierte Reihenfolge $\Big\}\ n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \cdot \overbrace{\cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}^{=(n-k)!}}{\underbrace{\cancel{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}_{=(n-k)!}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

b) Wenn man n von n Elementen mit Reihenfolge anordnet, nennt man dies Permutation von n Elementen; die Anzahl der Permutationen ist $n!$ (Formel von oben mit $k = n$ liefert

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!\ )$$

c) Anordnung von n aus n Elementen, wobei es Gruppen gleicher Elemente gibt: n_1 Elemente vom Typ 1 (T_1)
n_2 Elemente vom Typ 2 (T_2)
$\vdots$
n_k Elemente vom Typ k (T_k)

$\Big\}\ n_1 + n_2 + \ldots + n_k \leq n$

Die Elemente in den Mengen T_i sind ununterscheidbar

Es gibt $\dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}$ mögliche Anordnungen

Bsp. $\underbrace{\text{KAMPMANN}}_{n=8} \rightarrow \left.\begin{array}{l} T_1=\{K\},\ n_1=1 \\ T_2=\{A,A\},\ n_2=2 \\ T_3=\{M,M\},\ n_3=2 \\ T_4=\{P\},\ n_4=1 \\ T_5=\{N,N\},\ n_5=2 \end{array}\right\} n_1+n_2+n_3+n_4+n_5=8$

Diese 8 Buchstaben des Namens KAMPMANN, kann man auf

$$\frac{8!}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{8\cdot 7!}{8} = 7! = 5040$$

$8!$ ← alle Buchstaben unterscheidbar

2 ununterscheidbare A's

2 ununterscheidbare M's

ununterscheidbare N's

KAMPMANN
KAMPMANN } bei unterscheidbaren A's 2 Möglichkeiten

KAMPMANN ← bei ununterscheidbaren A's 1 Möglichkeit

② Auswahl von k aus n Elementen (Reihenfolge spielt keine Rolle)

mit Reihenfolge → $\frac{n!}{(n-k)!}$ $\underbrace{\text{Mögliche Anordnungen von k Elementen aus n}}$

diese k Elemente können auf k! Arten umsortiert werden; Reihenfolge spielt keine Rolle, d.h. alle diese k! Umsortierungen ergeben nur 1 Möglichkeit

$$\frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{k}$$ ← ohne Reihenfolge

Aus n Elementen kann man ohne Beachtung der Reihenfolge auf $\binom{n}{k}$ verschiedene Arten k Elemente auswählen ($k \leq n$).

D.h. auch:

Eine Menge M mit n Elementen hat $\binom{n}{k}$ Teilmengen mit k Elementen, denn die Teilmenge mit k Elementen geschieht durch Auswahl von k aus n Elementen ohne Beachtung der Reihenfolge!

M mit $|M|=n \Rightarrow |P(M)| = 2^n$, d.h. M hat 2^n Teilmengen

M hat Teilmengen mit 0 Elementen → $\emptyset$ genau $1=\binom{n}{0}$

T

M hat Teilmenge mit 1 Element $\to \binom{n}{1} = n$; $\{m_1\}, \{m_2\}, \ldots \{m_n\}$

$\vdots$

M hat Teilmenge mit k Elemente $\to \binom{n}{k}$

$\to$ Zusammen

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Anzahl aller Teilmenge $\to 2^n$

Anzahl der k-Elementigen Teilmengen $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

<u>Bemerkung</u>: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ — Herleitung über Kombinatorik

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{1^{n-k}}_{=1} \cdot \underbrace{1^k}_{=1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$(a+b)^n$ mit $a = 1$, $b = 1$

. <u>Rechenregeln für endliche Summen</u> $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $u \leq k \leq o$, $s, t \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=u}^{o} (s \cdot a_k + t \cdot b_k) = s \cdot \left(\sum_{k=u}^{o} a_k \right) + t \left(\sum_{k=u}^{o} b_k \right) \leftarrow \text{Linearitätsregel}$$

<u>Beispiel</u>: Aus der 6. Vorlesung $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Aus der 7. Vorlesung: $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

Mit Hilfe der Linearität bekommt man.

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2 \checkmark$$

Beweis ohne vollständige Induktion:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1}_{n-\text{mal}} = n$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} i \right) - \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} 1 \right)}$$

$$= 2 \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i \right)} - n$$

6. Vorlesung

$$= \cancel{2} \cdot \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} - n = n(n+1) - n = n^2 + n - n = n^2 \checkmark$$

$$\sum_{i=0}^{n} \left(2i^2 - i - 1 \right) = \overset{i=0}{-1} + \overset{i=1}{0} + \overset{i=2}{5} + \overset{i=3}{14} + \dots + \overset{i=n}{\left(2n^2 - n - 1 \right)}$$

Mit Linearität folgt:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i^2 - i - 1) = 2 \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i^2 \right)} - \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{n} i \right)} - \sum_{i=0}^{n} 1$$

6./7. Vorlesung

$$= 2 \, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$= \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) - 6(n+1)}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot \left[2n(2n+1) - 3n - 6 \right]}{6}$$

$$= \frac{(n+1) \cdot \left[4n^2 - n - 6 \right]}{6}$$