1. Aufgabe

a)

(i) Bestimme das Inverse von $\overline{9}$ im $\mathbb{Z}_{25}$:

$$\begin{aligned} ggT(9{,}25): \quad 25 &= 2 \cdot 9 + 7 \\ 9 &= 1 \cdot 7 + 2 \\ 7 &= 3 \cdot 2 + 1 && \Rightarrow ggT(9{,}25) = 1 \Rightarrow \text{Das Inverse existiert!} \\ 1 &= 1 \cdot 1 + 0 && \text{Ende des euklidischen Algorithmus} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Lemma von Bézout:} \quad 1 &= 7 - 3 \cdot 2 \\ &= 7 - 3 \cdot (9 - 1 \cdot 7) \\ &= (-3) \cdot 9 + 4 \cdot 7 \\ &= (-3) \cdot 9 + 4 \cdot (25 - 2 \cdot 9) \\ &= 4 \cdot 25 - 11 \cdot 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{1} &= \overline{4 \cdot 25 - 11 \cdot 9} \\ &= \overline{4} \cdot \overline{25} + \overline{-11} \cdot \overline{9} && \text{da } \overline{25} = \overline{0} \text{ im } \mathbb{Z}_{25} \\ &= \overline{-11} \cdot \overline{9} && \overline{-11} = \overline{14} \\ &= \overline{14} \cdot \overline{9} \end{aligned}$$

Aus $\overline{1} = \overline{14} \cdot \overline{9}$ folgt, dass $\overline{14}$ das Inverse zu $\overline{9}$ im $\mathbb{Z}_{25}$ ist.

(ii) Bestimme das Inverse von $\overline{7}$ im $\mathbb{Z}_{25}$: 18

2. Aufgabe

a)

Bestimme das Inverse von $\overline{16}$ im $\mathbb{Z}_{123}$:
Errechne ggt(16,123), um zu bestimmen ob es ein Inverses zu 16 im Z123 gibt:

$$\begin{aligned} ggT(16{,}123): \quad 123 &= 7 \cdot 16 + 11 \\ 16 &= 1 \cdot 11 + 5 \\ 11 &= 2 \cdot 5 + 1 && \Rightarrow ggT(16{,}123) = 1 \Rightarrow \text{Das Inverse existiert!} \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 && \text{Ende des euklidischen Algorithmus} \end{aligned}$$

Lemma von Bézout:

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 2 \cdot 5 \\ &= 11 - 2 \cdot (16 - 1 \cdot 11) \\ &= -2 \cdot 16 - 1 \cdot 11 \\ &= -2 \cdot 16 - 1 \cdot (123 - 7 \cdot 16) \\ &= -1 \cdot 123 + 5 \cdot 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{1} &= \overline{-1 \cdot 123 + 5 \cdot 16} \\ &= \overline{-1} \cdot \overline{123} + \overline{5} \cdot \overline{16} \\ &= \overline{5} \cdot \overline{16} && \text{da } \overline{123} = \overline{0} \text{ im } \mathbb{Z}_{123} \end{aligned}$$

Aus $\overline{1} = \overline{5} \cdot \overline{16}$ folgt, dass $\overline{5}$ das Inverse zu $\overline{16}$ im $\mathbb{Z}_{123}$ ist.

b)

Das Inverse von $\overline{4}$ im $\mathbb{Z}_{11}$ bestimmen, um später den Gauß-Algorithmus zu vereinfachen:
Da $\overline{4} \cdot \overline{3} = \overline{4 \cdot 3} = \overline{12} = \overline{1}$ im $\mathbb{Z}_{11}$ gilt ist $\overline{3}$ das Inverse zu $\overline{4}$ im $\mathbb{Z}_{11}$!
Im Gauß-Schema unter Anwendung des Gauß-Algorithmus ergibt sich dann:

	x	y		
I:	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{5}$	$\leftarrow \cdot \overline{3}$
II:	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	
I:	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\leftarrow \cdot \overline{9}$
II:	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	
I:	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	
II:	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\leftarrow$ +I
I:	$\overline{9}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	
II:	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	

$$\begin{aligned}
&\text{II}: & \overline{0}x + \overline{6}y &= \overline{2} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{6}y &= \overline{2} & \mid \cdot \overline{2} \\
&\Leftrightarrow & \overline{12}y &= \overline{4} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{1}y &= \overline{4} & \\
&\Leftrightarrow & y &= \overline{4} &
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{II}: & \overline{4}x + \overline{9}y &= \overline{5} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{4}x + \overline{9} \cdot \overline{4} &= \overline{5} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{4}x + \overline{3} &= \overline{5} & \mid + \overline{8} \\
&\Leftrightarrow & \overline{4}x + \overline{11} &= \overline{13} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{4}x &= \overline{2} & \mid \cdot \overline{3} \\
&\Leftrightarrow & \overline{12}x &= \overline{6} & \\
&\Leftrightarrow & \overline{1}x &= \overline{6} & \\
&\Leftrightarrow & x &= \overline{6} &
\end{aligned}$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\overline{4}x + \overline{9}y &= \overline{4} \cdot \overline{6} + \overline{9} \cdot \overline{4} \\
&= \overline{24} + \overline{36} \\
&= \overline{60} \\
&= \overline{5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{2}x + \overline{5}y &= \overline{2} \cdot \overline{6} + \overline{5} \cdot \overline{4} \\
&= \overline{12} + \overline{20} \\
&= \overline{32} \\
&= \overline{10}
\end{aligned}$$

3. Aufgabe

Zu lösen sind diese simulaten Kongruenzen:

$$\overline{x} = \overline{9} \text{ in } \mathbb{Z}_{17}$$
$$\overline{x} = \overline{4} \text{ in } \mathbb{Z}_{7}$$

Hierfür benötigen wir die Inversen $\overline{a} \cdot \overline{7} = \overline{1}$ im $\mathbb{Z}_{17}$ und $\overline{b} \cdot \overline{17} = \overline{1}$ im $\mathbb{Z}_7$. Beide sind durch Hingucken/Ausprobieren gefunden worden:

$$\begin{aligned}
\overline{5} \cdot \overline{7} &= \overline{5 \cdot 7} \\
&= \overline{35} \\
&= \overline{1} && \text{im } \mathbb{Z}_{17} \\
&\Rightarrow a = 5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overline{5} \cdot \overline{17} &= \overline{5} \cdot \overline{3} && \text{im } \mathbb{Z}_7 \\
&= \overline{5 \cdot 3} \\
&= \overline{15} \\
&= \overline{1} && \text{im } \mathbb{Z}_7 \\
&\Rightarrow b = 5
\end{aligned}$$

Und damit ergibt sich nach dem chinesischen Restsatz:

$$\begin{aligned}
x_0 &= 9 \cdot a \cdot 7 + 4 \cdot b \cdot 17 \\
&= 9 \cdot 5 \cdot 7 + 4 \cdot 5 \cdot 17 \\
&= 315 + 340 \\
&= 655
\end{aligned}$$

Weitere Lösungen befinden sich in einem Abstand von $7 \cdot 17 = 119$ voneinander. Damit ist die kleinste Lösung also $x = 60$.

5. Aufgabe

	x	y	z		
I:	3	1	1	b	$\leftarrow$ II
II:	-1	1	1	2	$\leftarrow$ III
III:	1	3	3	-2	$\leftarrow$ I
I:	-1	1	1	2	
II:	1	3	3	-2	$\leftarrow +$I
III:	3	1	1	b	$\leftarrow +3$I
I:	-1	1	1	2	
II:	0	4	4	0	
III:	0	4	4	$b+6$	$\leftarrow -$II
I:	-1	1	1	2	
II:	0	4	4	0	
III:	0	0	0	$b+6$	

Bei $b = -6$ gibt es hier also Lösungen, denn dann gilt $rg(\underline{\underline{A}}) = rg(\underline{\underline{A}}|b)$. Unter der Annahme $b = -6$ haben wir also 3 Unbekannte und $rg(\underline{\underline{A}}) = 2$, also wird ein freier Parameter $t = z$ benötigt:

$$
\begin{aligned}
\text{II:} \quad && 0x + 4y + 4z &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad && 4y &= -4z \\
&& &= -4t \\
\Rightarrow \quad && y &= -t \\
\\
\text{I:} \quad && -1x + 1y + 1z &= 2 \\
\Leftrightarrow \quad && 1x &= 1y + 1z - 2 \\
\Leftrightarrow \quad && 1x &= 1y + 1z - 2
\end{aligned}
$$

6. Aufgabe

	x_1	x_2	x_3	x_4		
I:	1	-3	2	2	1	
II:	4	1	-6	-3	2	$\leftarrow -4\text{I}$
III:	2	0	-1	0	3	$\leftarrow -2\text{I}$
IV:	0	1	1	1	4	
I:	1	-3	2	2	1	
II:	0	13	-14	-11	-2	$\leftarrow \text{IV}$
III:	0	6	-5	-4	1	$\leftarrow \text{II}$
IV:	0	1	1	1	4	$\leftarrow \text{III}$
I:	1	-3	2	2	1	
II:	0	1	1	1	4	
III:	0	13	-14	-11	-2	$\leftarrow -13\text{II}$
IV:	0	6	-5	-4	1	$\leftarrow -6\text{II}$
I:	1	-3	2	2	1	
II:	0	1	1	1	4	
III:	0	0	-27	-24	-54	$\leftarrow \cdot (-1/3)$
IV:	0	0	-11	-10	-23	$\leftarrow \cdot (-1)$
I:	1	-3	2	2	1	
II:	0	1	1	1	4	
III:	0	0	9	8	18	
IV:	0	0	11	10	23	$\leftarrow \cdot 9 - 11\text{III}$
I:	1	-3	2	2	1	
II:	0	1	1	1	4	
III:	0	0	9	8	18	
IV:	0	0	0	2	9	

Da $rg(\underline{\underline{A}}) = 4 = rg(\underline{\underline{A}}|b)$ folgt, dass wir keine freien Parameter benötigen und es definitiv eine Lösung gibt.

$$\begin{aligned}
\text{IV}: \quad && 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 2x_4 &= 9 \\
\Leftrightarrow \quad && 2x_4 &= 9 \\
\Leftrightarrow \quad && x_4 &= 4{,}5 \\
\\
\text{III}: \quad && 0x_1 + 0x_2 + 9x_3 + 8x_4 &= 18 \\
\Leftrightarrow \quad && 9x_3 &= 18 - 8x_4 \\
&& &= 18 - 36 \\
&& &= -18 \\
\Leftrightarrow \quad && x_3 &= -2 \\
\\
\text{II}: \quad && 0x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 &= 4 \\
\Leftrightarrow \quad && x_2 &= 4 - 1x_3 - 1x_4 \\
&& &= 4 - (-2) - 4{,}5 \\
&& &= 1{,}5 \\
\\
\text{I}: \quad && 1x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 1 \\
\Leftrightarrow \quad && x_1 &= 1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 \\
&& &= 1 + 4{,}5 - (-4) - 9 \\
&& &= 0{,}5
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für dieses LGS diese Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}5 \\ -2 \\ 4{,}5 \end{pmatrix} \right\}$