22. Vorlesung 01.12.2020

Notiztitel 01.12.2020

## Lösung linearer Gleichungssysteme

→ Gauß-Algorithmus
- **1. Stufe:** Vorwärtselimination ← ②
- **2. Stufe:** Rücksubstitution ← ①

### ① Rücksubstitution

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizienten-matrix stehen nur Nullen, Anzahl Zeilen = Anzahl Spalten

a) Lineares GLS in „Dreiecksform" ist durch Rücksubstitution lösbar

$$\begin{aligned} 2x_1+3x_2+x_3 &= 1 \longrightarrow 2x_1 = 1-3x_2-x_3 = 1-13-\tfrac{1}{3} = -12-\tfrac{1}{3} = -\tfrac{37}{3} \Rightarrow \boxed{x_1 = -\tfrac{37}{6}} \\ x_2 - x_3 &= 4 \longrightarrow x_2 = 4+x_3 = 4+\tfrac{1}{3} = \tfrac{13}{3} \Rightarrow \boxed{x_2 = \tfrac{13}{3}} \\ 3x_3 &= 1 \longrightarrow \boxed{x_3 = \tfrac{1}{3}} \end{aligned}$$

Hauptdiagonale

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

eine eindeutige Lösung

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -37/6 \\ 13/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \right\}$$

unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix stehen nur Nullen; Anzahl Zeilen < Anzahl Spalten

b) Lineares GLS in „Trapezform" ist durch Rücksubstitution lösbar mit Hilfe freier Parameter

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2-x_3 &= 1 \longrightarrow 2x_1 = 1-x_2+x_3 = 1-5+\tfrac{5}{2}t-t = -4+\tfrac{3}{2}t \Rightarrow \boxed{x_1 = -2+\tfrac{3}{4}t} \\ 2x_2+5x_3 &= 10 \longrightarrow \boxed{x_3 = t} : 2x_2 = 10-5x_3 = 10-5t \Rightarrow \boxed{x_2 = 5-\tfrac{5}{2}t} \end{aligned}$$

↑ freier Parameter

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Es gibt unendlich viele Lösungen abhängig vom Parameter $t \in \mathbb{R}$ (für jedes $t$ gibt es eine zulässige Lösung) ⇒

Lösungsmenge:

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3/4\,t \\ 5-5/2\,t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2+3/4\,t \\ 5-5/2\,t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

offene Frage:

1) Wie kommt man von einem allg. linearen GLS zu einem System in Dreiecks- oder Trapezform mit derselben Lösungsmenge?

2) Wie kann man entscheiden, ob für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ eines linearen GLS gilt: $\underbrace{\mathbb{L} = \emptyset}_{\text{keine Lösung}}$ oder $\underbrace{\mathbb{L} = \{\vec{a}\}}_{\text{genau eine Lösung}}$ oder $\underbrace{\mathbb{L} = \{s_1\vec{a} + s_2\vec{c} + \dots \mid s_1, s_2 \dots \in \mathbb{R}\}}_{\text{unendlich viele Lösungen}}$

→ Antworten liefert

## ② Vorwärtselimination

Jedes lineare GLS kann durch (mehrmaliges) Anwenden elementarer Umformungen (das sind Umformungen, die die Lösungsmenge nicht verändern) in ein System in Dreiecks- oder Trapezform überführt werden. Dieses System hat dieselbe Lösungsmenge, die dann durch Rücksubstitution berechnet werden kann.

elementare Umformungen sind

① Vertauschen von Gleichungen ✓ → Vertauschen von Zeilen in der Koeffizientenmatrix + Vektor der rechten Seite

② Multiplikation von Gleichungen mit reellem Faktor $s \neq 0$ → Multiplikation einer Zeile in der Koeffizientenmatrix + Komponente im Vektor der rechten Seite mit $s \neq 0$

③ Bilden sog. Linearkombinationen von Gleichungen, d.h. Ersetzen der $i$-ten Gleichung durch das $s$-fache dieser $i$-ten Gleichung $(s \neq 0)$ plus dem $t$-fachen $t \neq 0$ einer anderen $k$-ten Gleichung des geg. linearen GLS → Ersetzen der $i$-ten Zeile / $i$-ten Komponente der rechten Seite durch das $s$-fache dieser $i$-ten Zeile + $i$-te Komponente der rechten Seite $(s \neq 0)$ plus dem $t$-fachen $(t \neq 0)$ einer anderen $k$-ten Zeile + $k$-ten Komponente der rechten Seite

Ziel: Durch Anwendung von ①, ②, ③ ein System in Dreiecks-/Trapezform zu erzeugen!

**Bsp.**

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 &= -2 \quad \vert \cdot (-3) \end{aligned}$$

+

Koeffizienten-matrix

Gauß-Schema

Vektor der rechten Seite

$$\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \hline 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -5 & -2 \end{array} \quad \vert \cdot (-3)$$

+

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \quad \vert \cdot 4 \\ -8x_2 - 2x_3 + 14x_4 &= 7 \quad + \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \quad \vert \cdot 4 \\ 0 & -8 & -2 & 14 & 7 \quad + \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -6x_3 + 14x_4 &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c} 3 & -5 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 14 & 7 \end{array}$$

Ende der Vorwärtselimination: System in Trapezform

Rückwärtssubstitution

$-6x_3 + 14x_4 = 7$ ← freier Parameter $\boxed{x_4 = t}$

$\Rightarrow -6x_3 = 7 - 14t \Rightarrow \boxed{x_3 = -\frac{7}{6} + \frac{7}{3}t}$

$2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}x_3$

$\Rightarrow \boxed{x_2 = -\frac{7}{12} + \frac{7}{6}t}$

$3x_1 - 5x_2 + x_3 - x_4 = 1$

$3x_1 = 1 + 5x_2 - x_3 + x_4$

$= \cancel{1} - \cancel{\frac{35}{12}} + \cancel{\frac{35}{6}}t + \cancel{\frac{7}{6}} - \cancel{\frac{7}{3}}t + \cancel{t}$

$= \frac{12 - 35 + 14}{12} + \frac{35 - 14 + 6}{6}t$

$= -\frac{9}{12} + \frac{27}{6}t \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{12} + \frac{9}{6}t$

$\Rightarrow \boxed{x_1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{2}t}$

Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/4 + 3/2\,t \\ -7/12 + 7/6\,t \\ -7/6 + 7/3\,t \\ t \end{pmatrix} \middle\vert\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/4 \\ -7/12 \\ -7/6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3/2 \\ 7/6 \\ 7/3 \\ 1 \end{pmatrix} \middle\vert\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

Warum verändern die elementaren Umformungen die Lösungsmenge nicht?

① Vertauschen von Gleichungen ✓

② Multiplikation mit $s \neq 0$:

$x_1, \ldots, x_k$ löst $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k = b_i$ ← i-te Gleichung

$s \neq 0$ ⟶

$$s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k) = s \cdot b_i$$

$$= a_{i1}(sx_1) + a_{i2}(s \cdot x_2) + \cdots + a_{ik}(s \cdot x_k) = s \cdot b_i$$

d.h. wenn $x_1, \ldots, x_k$ Lösung der i-ten Gleichung ist, löst $sx_1, \ldots, sx_k$ diese i-te Gleichung mit rechter Seite $s \cdot b_i$

$s = 0$ erzeugt aus $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k = b_i$ die wahre aber nutzlose Aussage $0 = 0$

③ Linearkombination

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k = b_i$ ← i-te Gleichung

$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \cdots a_{jk}x_k = b_j$ ← j-te Gleichung

$\}$ $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ← lösen

$s \neq 0$, $t \neq 0$

$$\Rightarrow s \cdot (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k) + t \cdot (a_{j1}x_1 + \cdots a_{jk}x_k) = sb_i + tb_j$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -5 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{\underline{A}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \alpha \end{pmatrix}}_{\vec{b}} \Leftrightarrow \underline{\underline{A}} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ -3x + 2y - z &= 2 \\ -5x + 5y - z &= \alpha \end{aligned} \quad \leftarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist dieses lineare GLS lösbar?

2) Für diese(s) $\alpha$ Lösungsmenge bestimmen

Gauß-Schema ⟶

| x | y | z | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | $\vert \cdot 3$ $\quad \vert \cdot 5$ |
| -3 | 2 | -1 | 2 | + |
| -5 | 5 | -1 | $\alpha$ | + |
| 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 0 | 5 | 2 | 5 | $\vert \cdot (-2)$ |
| 0 | 10 | 4 | $5+\alpha$ | + |

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-5 \end{array}\right)$$

Ende der Vorwärtselimination

$\mathbb{L} = \emptyset$ falls $\alpha \neq 5$ ist, denn in der letzten Gleichung steht

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = \alpha - 5$$

für $\alpha \neq 5$ ist $\alpha - 5 \neq 0$ jedoch $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$ !

Trapezform

Für $\alpha = 5$ haben wir

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

ist immer wahr ⟶ $0 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0$

$\longrightarrow x = 1 - y - z = 1 - 1 + \frac{2}{5}t - t \Rightarrow \boxed{x = -\frac{3}{5}t}$

$\longrightarrow \boxed{z = t}, \quad 5y = 5 - 2t \Rightarrow$

$$\boxed{y = 1 - \frac{2}{5}t}$$

$$\mathbb{L}(\alpha = 5) = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}t \\ 1 - \frac{2}{5}t \\ t \end{pmatrix} \middle| \; t \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathbb{L}(\alpha \neq 5) = \emptyset$$