1– Noções Topológicas em $\mathbb{R}$ – Resumo

Definição 1 — Vizinhança. Sejam $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Chama-se vizinhança ε de a ao conjunto

$$V_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[.$$

Exemplo 1 $V_2(5) =]3,7[$.

Definição 2 — Ponto interior. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um conjunto de números reais. Diz-se que a é interior a A se

$$\exists \varepsilon > 0 : \; V_\varepsilon(a) \subset A.$$

Exemplo 2 5 é um ponto interior a $A =]3,7]$, pois, existe pelo menos uma vizinhança de 5 que está contida em A. Por exemplo, $V_1(5) \subset A$.

Definição 3 — Ponto fronteiro. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um conjunto de números reais. Diz-se que a é fronteiro a A se

$$\forall \varepsilon > 0, \; V_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \;\; \wedge \;\; V_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \backslash A) \neq \emptyset.$$

Exemplo 3 3 e 7 são pontos fronteiros a $A =]3,7]$, pois, qualquer vizinhança desses números contém pontos de A e de $\mathbb{R} \backslash A$.

Definição 4 — Ponto exterior. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um conjunto de números reais. Diz-se que a é exterior a A se

$$\exists \varepsilon > 0 : \; V_\varepsilon(a) \subset \mathbb{R} \backslash A.$$

Exemplo 4 0 é um ponto exterior a $A =]3,7]$, pois, existe pelo menos uma vizinhança de 0 que está contida em $\mathbb{R} \backslash A =]-\infty, 3] \cup]7, +\infty[$. Por exemplo, $V_1(0) \subset]-\infty, 3] \cup]7, +\infty[$.

Definição 5 — Interior, fronteira, exterior de um conjunto. O conjunto dos pontos interiores a A chama-se interior de A e representa-se por int(A). O conjunto dos pontos exteriores a A chama-se exterior de A e representa-se por ext(A). O conjunto dos pontos fronteiros a A chama-se fronteira de A e representa-se por fr(A).

Exemplo 5 Seja $A =]3,7]$. Tem-se que:

- $int(A) =]3,7[$
- $fr(A) = \{3,7\}$
- $ext(A) =]-\infty, 3[\cup]7, +\infty[$

OBS Os conjuntos $int(A)$, $fr(A)$ e $ext(A)$ são disjuntos dois a dois e $int(A) \cup fr(A) \cup ext(A) = \mathbb{R}$.

Definição 6 — Conjunto aberto. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que A é aberto se $A = int(A)$.

Exemplo 6
- $]-3,4[$ é um conjunto aberto, pois, $int(]-3,4[) =]-3,4[$.
- $[-3,4[$ não é um conjunto aberto, pois, $int([-3,4[) =]-3,4[\neq [-3,4[$.

Definição 7 — Fecho ou aderência. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Chama-se fecho ou aderência de A ao conjunto $\overline{A} = A \cup fr(A)$. Diz-se que x é aderente a A se $x \in \overline{A}$.

Exemplo 7 Seja $A = [-3,4[\cup]5,8]$. Tem-se que $fr(A) = \{-3, 4, 5, 8\}$. Logo, $\overline{A} = [-3,4] \cup [5,8]$.

Definição 8 — Conjunto fechado. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que A é fechado se $A = \overline{A}$.

Exemplo 8
- Se $A = [-3,4]$, então $fr(A) = \{-3,4\}$, fazendo com que $\overline{A} = [-3,4] \cup \{-3,4\} = [-3,4]$. Logo A é um conjunto fechado.
- $A = [-3,4[$ não é um conjunto fechado, pois, $\overline{A} = [-3,4] \neq [-3,4[$.

OBS Tem-se que:
- $\overline{A} = int(A) \cup fr(A)$.
- A é fechado se, e só se, $fr(A) \subset A$.
- A é fechado se, e só se, $\mathbb{R}\backslash A$ é aberto, isto é, $\mathbb{R}\backslash A = int(\mathbb{R}\backslash A) = ext(A)$.

Exemplo 9
- $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ não é fechado nem aberto.
- $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ é fechado.

Definição 9 — Ponto de acumulação. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que a é ponto de acumulação de A se

$$\forall \varepsilon > 0,\ V_\varepsilon(a) \cap A \backslash \{a\} \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se derivado de A e denota-se por A'.

Exemplo 10 Se $A =]-5,6[\cup \{8\} \cup [9,12[\cup \{13\}$, então o derivado de A é $[-5,6] \cup [9,12]$.

Definição 10 — Ponto isolado. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que a é ponto isolado de A se

$$a \in A \ \wedge\ \exists \varepsilon > 0 :\ V_\varepsilon(a) \cap A \backslash \{a\} = \emptyset.$$

Exemplo 11 Se $A =]-5,6[\cup \{8\} \cup [9,12[\cup \{13\}$, então o conjunto dos pontos isolados de A é $\{8, 13\}$.

Exemplo 12 Se $A = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$, então 0 é ponto de acumulação de A e todos os pontos de A são isolados.

OBS Se $a \in int(A)$, então a é ponto de acumulação de A.

Definição 11 — Majorante. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que x é majorante de A se

$$x \geq a,\ \forall a \in A.$$

Definição 12 — Minorante. Sejam $x \in \mathbb{R}$ e A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que x é minorante de A se

$$x \leq a,\ \forall a \in A.$$

Definição 13 — Conjunto limitado. Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que A é majorado se admitir majorantes. Diz-se que A é minorado se admitir minorantes. Se A for majorado e minorado, diz-se que A é limitado.

Exemplo 13

- $A = \{x \in \mathbb{R}:\ x^2 < 9\} =]-3,\, 3[$ admite minorantes $(]-\infty,\, -3])$ e majorantes $([3,\, +\infty[)$, logo, A é um conjunto limitado.
- $A =]-\infty,\, 2[\cup]5,\, +\infty[$ não admite minorante nem majorante, por isso, A não é limitado.

Teorema 1 A é limitado se, e só se,

$$\exists M > 0, |x| \leq M, \forall x \in A.$$

Definição 14 — Supremo, Máximo. Seja A um subconjunto majorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que β é o supremo de A se β for o menor dos majorantes de A. Representa-se por $\beta = \sup(A)$. Se β, supremo de A, pertencer a A, diz-se que β é o máximo de A; neste caso, representa-se por $\beta = \max(A)$.

Exemplo 14

- $A =]-3,\, 3[$ tem como conjunto majorantes o intervalo $[3,\, +\infty[$. Como 3 é o menor dos majorantes, logo $\sup(A) = 3$. A não tem máximo, pois, $3 \notin A$.
- Seja $A = [-3,\, 3]$. Tem-se que $\sup(A) = 3 = \max(A)$, pois $3 \in A$.

Definição 15 — Ínfimo, Mínimo. Seja A um subconjunto minorado de $\mathbb{R}$. Diz-se que α é o ínfimo de A se α for o maior dos minorantes de A. Representa-se por $\alpha = \inf(A)$. Se α, ínfimo de A, pertencer a A, diz-se que α é o mínimo de A; neste caso, representa-se por $\alpha = \min(A)$.

Exemplo 15

- $A =]-3,\, 3[$ tem como conjunto minorantes o intervalo $]-\infty,\, -3]$. Como -3 é o maior dos minorantes, logo $\inf(A) = -3$. A não tem mínimo, pois, $-3 \notin A$.
- Seja $A = [-3,\, 3]$. Tem-se que $\inf(A) = -3 = \min(A)$, pois $-3 \in A$.

Exercícios

Exercício 1 Determine o interior, o exterior, a fronteira, o derivado, a aderência, o conjunto dos minorantes, o conjunto dos majorantes, o supremo, o ínfimo, o máximo e o mínimo (caso existam) dos seguintes conjuntos:

(a) $A = [2,3[\cup[4,10[$;

(b) $B =]5,7[\cup\{15\}$.

Exercício 2 Determine, em $\mathbb{R}$, o interior, a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação dos seguintes conjuntos:

(a) $A = [0,1] \cup]2,3] \cup \{6,10\}$

(b) $B =]-\infty,0[\cup [1,2] \cup]3,+\infty[$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 9\}$

(d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^3 > x\}$

(e) $E = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \geq |x|\}$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-3| \leq 5\}$

(g) $G = \left\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x}{x+2}\right\}$

Exercício 3 Considere o conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} : x^4 + 5x^3 + 6x^2 \leq 0\}$.

(a) Mostre que $A = [-3,-2] \cup \{0\}$.

(b) Indique o conjunto dos majorantes de A e conjuntos dos minorantes de A. Indique ainda, caso existam, $sup(A)$, $inf(A)$, $\max(A)$, e $\min(A)$.

Exercício 4 Considere o conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |2x-5| \leq 5 \wedge |2x-3| \geq 2\}.$$

Determine o conjunto dos majorantes de A, int(A) e fr(A) e o conjunto dos pontos de acumulação A'.

Exercício 5 Considere os seguintes conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq \frac{x}{2} + 2\right\}, \quad B = [-3,4].$$

(a) Mostre que $A \cap B = [-3,-4/3] \cup \{4\}$ e determine o interior, a fronteira e o derivado dos conjuntos $A \cap B$ e $A \cup B$.

(b) Determine, se existirem, o $\max(A)$, $\min(A \cap B)$, $sup(A \cap B)$.

Exercício 6 Considere a expressão designatória definida, no conjunto dos números reais, por $\dfrac{x^2-4x+3}{\ln(x+2)}$ e seja A o seu domínio. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}$:

$$B = \{x \in \mathbb{R} : |x-1| < 3\}.$$

(a) Apresentando todos os cálculos, escreva A e B como união de intervalos.

(b) Determine o conjunto dos pontos interiores e o derivado de B e a fronteira de $A \cap B$.

Exercício 7 Considere os seguinte subconjuntos de $\mathbb{R}$

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+1} \leq 1\right\}, \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-2)e^x}{|x|} \leq 0\right\}$$

(a) Mostre que $A \cap B =]-1,2] \setminus \{0\}$.

(b) Indique, caso existam em $\mathbb{R}$, $inf(B)$, $sup(B)$, $inf(A \cap B)$ $sup(A \cap B)$.

Exercício 8 Considere os conjuntos

$$A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2| - 4|x| \geq 0\} \quad \text{e} \quad B = \left\{x \in \mathbb{R} : \cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0 \wedge x^2 - 16 \leq 0\right\}$$

(a) Define os conjuntos A e B recorrendo aos intervalos de números reais.
(b) Determine os conjuntos $A \cap B$ e $A \setminus B$
(c) Determine o interior, a fronteira e o fecho do conjunto $A \setminus B$. Diga justificando se o conjunto $A \setminus B$ é aberto ou fechado.

Exercício 9 Considere o conjunto

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \ x = 1 + (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n} \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(a) Determine o interior, o exterior, o derivado, a fronteira e a aderência de A.

(b) Averigue se o conjunto A é aberto ou fechado.

Exercício 10 São dados os conjuntos:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \left|\frac{x^2}{x-2}\right| \leq 1\right\} \quad \text{e} \quad B = \left\{y \in \mathbb{R} : \ y = (-1)^{n+1} + (-1)^n \left(2 + \frac{1}{n}\right) \ \wedge \ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Determine:
(a) $int(A \cup B)$.

(b) $(A \cup B)'$.

Exercício 11 Indique o supremo e o ínfimo, se existirem, do seguinte conjunto:

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : \ x - \left|\frac{4x-5}{x}\right| \leq 0\right\}.$$

Exercício 12 Considere, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$$p(x) : \ |x| + |x-1| < 3 \quad \text{e} \quad q(x) : \ \left|\left|\frac{x^2+1}{x}\right| - 1\right| < 1.$$

(a) Determine sob a forma de intervalo de $\mathbb{R}$ o conjunto

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \ p(x) \wedge \sim q(x)\}.$$

(b) Indique, caso existam, o supremo e o ínfimo de A.