



# UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

Facultad de Ciencias

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO FIN DE GRADO

## EVENTOS RAROS EN SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS

Presentado por:  
**D. Nils van Es Ostos**

Curso Académico 2021-2022

#### DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D. Nils van Es Ostos

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2021-2022, es original, entendida esta, en el sentido de que no ha utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 8 de julio de 2022

Fdo: Nils van Es Ostos

## Resumen

En algunas ocasiones, es de gran utilidad el poder manipular un sistema a antojo, para así reproducir un comportamiento que nos converga. En este trabajo, se han estudiado los eventos raros de un sistemas cuántico abierto, siendo estos aquellos que ocurren con baja probabilidad. Estas ideas se ilustran estudiando la emisión de fotones de un sistema formado por tres sistemas de dos niveles caracterizado por una transición abrupta entre las fases dinámicas activa e inactiva. Estos sistemas cuánticos abiertos, es decir, en contacto con un entorno, son descritos por la ecuación maestra de Lindblad. Además, puesto que dichos eventos tienen tan baja probabilidad, el marco teórico para su análisis es el de la teoría de grandes desviaciones. Para hacer que tales eventos raros ocurran de manera típica y controlada, se ha usado el método llamado como la transformada cuántica de Doob. También, se ha hecho del método de Monte Carlo de los saltos cuánticos para simular la dinámica de los sistemas. Finalmente, se ha comparado el promedio de muchas trayectorias aisladas usando este método con los resultados de aplicar métodos de diagonalización numérica exacta.

## Abstract

Occasionally, it is of great interest the ability to manipulate a system as we want so that we can reproduce some behavior needed. In this work, we study rare events in open quantum systems, which happen with low probability. These ideas are illustrates by studying the photon emission of a system formed by three two-level systems characterized by an abrupt transition between active and inactive dynamical phases. Open quantum systems, that is, in contact with an environment, are described by the Lindblad master equation. Moreover, as these events have low probability, the theoretical framework for its analysis is large deviation theory. In order to make these rare event typical and controlled, we have used the so-called quantum Doob transform. Further, we have used the quantum jump Monte Carlo method to perform simulations of the dynamics of the systems. Finally, we compare the average of many isolated trajectories using this method with the results obtained by performing exact numerical diagonalization methods.



# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Breve introducción a la dinámica del qubit</b>	<b>9</b>
2.1	La esfera de Bloch . . . . .	9
2.2	Matriz densidad . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Obtención de la ecuación maestra de Lindblad</b>	<b>11</b>
3.1	Ecuación de Lioville-von Neumann . . . . .	11
3.2	Ecuación maestra de Lindblad . . . . .	12
3.2.1	Emisión de fotones en un sistema de qubits . . . . .	13
3.2.2	Haciendo eventos raros típicos . . . . .	14
3.3	Simulación de la ecuación maestra de Lindblad . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Cambio de espacio de trabajo</b>	<b>18</b>
4.1	Espacio de Fock-Liouville . . . . .	18
4.2	Resolución de ecuaciones en EFL . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Sistema cuántico abierto de 3 qubits</b>	<b>19</b>
5.1	Análisis teórico del sistema . . . . .	20
5.2	Evolución temporal del sistema . . . . .	22
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>26</b>
	<b>Referencias</b>	<b>27</b>



## 1 Introducción

En las últimas décadas, ha habido un auge en las tecnologías cuánticas, tecnologías como la computación y criptografía cuántica, que están comenzando a tomar gran importancia en el panorama global, ha surgido una nueva línea de investigación que busca ya no solo conocer de manera cercana los misterios de la Mecánica Cuántica, sino tener un control sobre un sistema cuántico dado. Además, dado que un sistema cuántico aislado que no es más que una idealización, cabe preguntarse como se comportan los sistemas cuánticos que sí que están en contacto con su entorno, que por tanto presentan algún tipo de disipación. Estos, reciben el nombre de sistemas cuánticos abiertos, y es esta característica de “abierto” la que nos saca de un caso ideal para introducirnos en un caso físico más cercano al real.

Para abordar estos sistemas con disipación, tendremos que hacer uso de un arma aún más general que la ecuación de Schrödinger. Es por ello que será introducida la ecuación maestra de Lindblad. Esta no es más que una generalización de la ecuación de Von-Neumann, ecuación usada para describir la evolución de matrices de densidad sin considerar la disipación. De esta manera, la ecuación de Lindblad nos permitirá estudiar el sistema cuántico abierto más simple, el bit cuántico o qubit, también conocido como sistema de dos niveles. Para conocer un poco más sobre este objeto, introduciremos también el formalismo de la esfera de Bloch, que no es más que la representación que usaremos para comprender la dinámica del qubit.

Es este marco de trabajo, es de gran interés explorar el control sobre sistemas cuánticos abiertos lejos del equilibrio. Considérese, por ejemplo, un sistema formado por varios átomos ionizados, el sistema resultante estará caracterizado tanto por una dinámica colectiva dada por la interacción de los átomos entre ellos mismos como con su entorno. Pues bien, se ha demostrado que es posible controlar la interacción o el acoplamiento del sistema con su entorno de manera que el sistema presente un comportamiento determinado.

Veremos que el sistema en cuestión emite fotones al entorno con cierta probabilidad. Esta emisión tendrá un cierto valor promedio, pero de vez en cuando ocurrirá un evento raro en el que la emisión de fotones sea o muy alta o muy baja, es decir que, se encuentre muy lejos de dicho valor medio. Es por ello que cabe preguntarse si podemos modificar el sistema cuántico de forma que podamos hacer de estas fluctuaciones el comportamiento típico del sistema.

Para relatar lo anteriormente mencionado, se considerará un sistema abierto de tres qubits con interacción entre ellos. Este sistema irá emitiendo fotones de manera aleatoria de acuerdo con una tasa de decaimiento. Haciendo el promedio de gran cantidad de experimentos, obtendremos el número medio de fotones emitidos, y estudiando las fluctuaciones del sistema, trataremos de hacer que dichas fluctuaciones pasen a ser típicas. Así, podremos construir un nuevo sistema con emisiones inusualmente bajas de fotones como emisiones inusualmente altas.

El modo de proceder será aplicar la llamada transformada de Doob. Esta, consiste en, dado un sistema cuántico abierto, obtener un nuevo Hamiltoniano y nuevos operadores de salto cuánticos, de manera que la estadística del nuevo sistema corresponda con la de ciertos eventos raros del sistema original. Este marco teórico, está dado por la teoría de grandes desviaciones (GD), que estudia el comportamiento de sistemas estocásticos cuya

distribución de probabilidad decae exponencialmente con el tiempo. Además, la teoría de grandes desviaciones es el marco teórico que está detrás de la mecánica estadística, donde el decaimiento exponencial de la posibilidad se produce con el volumen o el número de partículas del sistema.

Por otro lado, para el estudio de los sistemas cuánticos abiertos, tanto en el caso de eventos raros como típicos, se aplicarán métodos de diagonalización numérica exacta de superoperadores para hallar los estados estacionarios de los sistemas de interés. De forma análoga, se aplicará el método de Monte Carlo de los saltos cuánticos (MCSC) para simular las trayectorias de los sistemas cuánticos abiertos. Esta poderosa técnica computacional, nos permitirá simular una trayectoria individual, de modo que al hacer el promedio de muchas trayectorias, podemos obtener la evolución temporal de un estado, dado por su matriz densidad. Así, podremos comparar tanto el resultado exacto, como el numérico de las trayectorias del sistema.



## 2 Breve introducción a la dinámica del qubit

### 2.1 La esfera de Bloch

Antes de comenzar con la dinámica de un sistema cuántico abierto, tenemos que hablar brevemente de lo que es la *esfera de Bloch*. Esta es la representación geométrica de los estados de un qubit como puntos de una esfera de superficie unidad. Al ser el qubit el sistema de dos niveles, que vamos a denotar con  $|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  y  $|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , el estado vendrá dado por

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Pero este estado tiene que estar normalizado, luego  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ , por lo que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (2.2)$$

De esta manera, la probabilidad de que  $|\psi\rangle$  esté en el estado  $|1\rangle$  es  $|\alpha|^2$  y de que esté en  $|0\rangle$  es  $|\beta|^2$ . Reescribiendo la Ec.(2.2) en

$$|\psi\rangle = r_\alpha e^{i\phi_\alpha} |1\rangle + r_\beta e^{i\phi_\beta} |0\rangle \quad (2.3)$$

Y continuando con este desarrollo, obtenemos que la forma general del estado de un qubit viene dado por

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |1\rangle + e^{i\varphi} \sin\frac{\theta}{2} |0\rangle \quad (2.4)$$

De esta forma, el vector resultante apuntará en una dirección característica de la esfera de Bloch, Fig.(4).

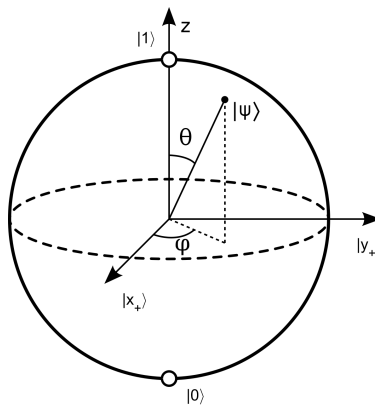


Figura 1: Representación gráfica de la esfera de Bloch

Además, se puede ver que los vectores ortogonales de la Esfera de Bloch pueden ser escritos en función de  $|1\rangle$  y  $|0\rangle$  como,

$$\begin{aligned} |x_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |0\rangle), & |x_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - |0\rangle) \\ |y_+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + i|0\rangle), & |y_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle - i|0\rangle) \end{aligned}$$

### Rotaciones en la esfera de Bloch

Podemos ver que cualquier estado posible del qubit se podrá obtener aplicando rotaciones a los estados que ya hemos visto. Los operadores de rotación para los diferentes ejes de la esfera son

$$\begin{cases} R_x \equiv e^{-i\phi\sigma_x/2} \\ R_y \equiv e^{-i\phi\sigma_y/2} \\ R_z \equiv e^{-i\phi\sigma_z/2} \end{cases} \quad (2.5)$$

donde  $\phi$  representa la rotación entorno al eje en cuestión, y  $\sigma_{x,y,z}$  son las matrices de Pauli, respectivamente,

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Puede notarse que estas matrices están relacionadas de manera intrínseca con las rotaciones en la esfera de Bloch. Además, el lector familiarizado con este tema, habrá notado la falta de un término  $\hbar$  acompañando a estas matrices. Esto se debe a que en todo el estudio de la dinámica del sistema se va a trabajar en unidades naturales ( $\hbar = 1$ ), con el fin de simplificar la notación.

## 2.2 Matriz densidad

Un sistema cuántico puede estar en un estado  $|\psi\rangle$  con probabilidad  $p$ . Por lo tanto, decimos que cuando un estado está formado por un conjunto de estados  $|\psi_i\rangle$ ,  $p_i$  cada uno con probabilidad  $p_i$ , nos encontramos ante un *estado mixto*. La manera de operar matemáticamente con un estado mixto es a través del *operador densidad* o *matriz densidad*, definido como

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \quad (2.7)$$

Además, dado que el operador evolución temporal  $U(t, t_0)$  describe la evolución temporal, tal que

$$|\psi_i(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \quad (2.8)$$

donde  $U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)}$ , podemos escribir el operador densidad como

$$\rho(t) = \sum_i p_i U(t, t_0) |\psi_i(t_0)\rangle \langle\psi_i(t_0)| U^\dagger(t, t_0) = U(t, t_0) \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) \quad (2.9)$$

Entre sus propiedades más características, se encuentran que

1. La traza del operador densidad debe ser siempre igual a la unidad:  $\text{Tr}[\rho] = 1$ .
2. El operador densidad es hermítico:  $\rho = \rho^\dagger$ .

Cualquier operador que satisfaga estas dos propiedades, es considerado un operador densidad.

Por otra parte, para un qubit podemos pensar en la matriz densidad como una rotación en la esfera de Bloch. Esto es

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \hat{a} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.10)$$

donde  $\hat{a}$  representa el vector unitario que apunta a la dirección del estado en la esfera de Bloch y  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ . Sus componentes en la esfera de Bloch se pueden escribir como

$$\hat{a} = (\text{Tr}[\sigma_x \cdot \rho], \text{Tr}[\sigma_y \cdot \rho], \text{Tr}[\sigma_z \cdot \rho]) \quad (2.11)$$

Además, su pureza de un estado se puede medir como

$$\text{Tr}[\rho^2] = (1 + |\hat{a}|^2) \quad (2.12)$$

Sin embargo, veremos que para esto sólo es válido para un qubit y no cuando tenemos más de uno.

Para identificar si una matriz densidad pertenece a un estado puro o mixto, tenemos en cuenta que para los estados puros  $\text{Tr}[\rho^2] = 1$ . De modo que, en los estados mixtos, siempre se cumple que  $\text{Tr}[\rho^2] < 1$ .

Finalmente, nos será de utilidad el mencionar que el valor esperado de cierto observable  $A$  para un estado descrito por  $\rho$  es

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[A \cdot \rho] \quad (2.13)$$

Véase que las componentes en la esfera de Bloch, Ec.(2.11), no son más que los valores esperados de las matrices de Pauli (Ec.2.6).

### 3 Obtención de la ecuación maestra de Lindblad

#### 3.1 Ecuación de Liouville-von Neumann

Dado que la ecuación encargada de describir cómo evoluciona cierto estado  $|\psi\rangle$  es la *ecuación de Schrödinger*, la ecuación que nos diga cómo evoluciona cierto estado descrito por una matriz densidad  $\rho$  deberá emerger naturalmente de esta. Sea la ecuación de Schrödinger,

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -iH |\psi(t)\rangle \quad (3.1)$$

donde vamos a considerar un Hamiltoniano  $H$  independiente del tiempo y operando en unidades naturales ( $\hbar = 1$ ). Haciendo uso de la Ec.(2.9), se llega con facilidad a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\rho(t) &= \frac{\partial}{\partial t} [U(t, t_0)] \rho(t_0) U^\dagger(t, t_0) + U(t, t_0) \rho(t_0) \frac{\partial}{\partial t} U^\dagger(t, t_0) = \\ &= -iHU(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0) + iU(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)H = -i[H, \rho(t)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

que es una ecuación a la que nos referimos como la *ecuación de Liouville-von Neumann*. Además, esta misma ecuación la podemos escribir también como

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}[\rho(t)] \quad (3.3)$$

donde  $\mathcal{L}$  es el llamado operador *Lindbladiano*.

### 3.2 Ecuación maestra de Lindblad

Lo visto anteriormente nos sirve para describir un sistema cerrado que no tiene ningún tipo de interacción con el entorno. Consideremos ahora un sistema cuántico cerrado que interacciona con lo que le rodea. Su Hamiltoniano será

$$H_{tot} = H + H_{ent} + H_{int} \quad (3.4)$$

donde  $H$  es la interacción propia del sistema,  $H_{ent}$  es el Hamiltoniano del entorno y  $H_{int}$  es la interacción del sistema y el entorno.

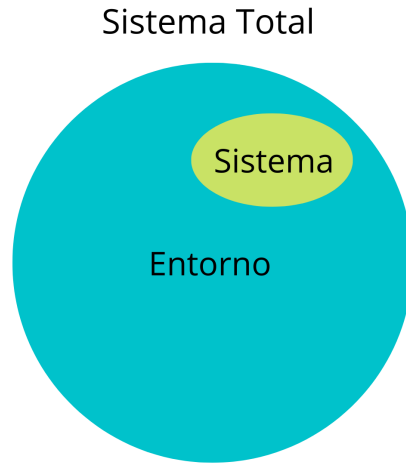


Figura 2: Boceto de sistema total como suma de un sistema y su entorno

Sean los *operadores de salto cuántico*  $J_\mu$  los operadores que actúan sobre el sistema, y los operadores  $b_\mu$  los que actúan sobre el entorno. La forma general de  $H_{int}$  y  $H_{ent}$  para  $N_J$  supuestos operadores,

$$H_{int} = \sum_{\mu=1}^{N_J} \left( J_\mu b_{\mu}^\dagger + J_\mu^\dagger b_\mu \right), \quad H_{ent} = \sum_{\mu=1}^{N_J} \omega_\mu b_\mu^\dagger b_\mu \quad (3.5)$$

donde  $\omega_\mu$  hace referencia a cierta probabilidad. Bajo ciertas aproximaciones, como considerar que el entorno es grane, que los tiempos de correlación en el entorno son cortos comparados con la escala temporal del sistema, y que el acoplamiento sistema-entorno es débil, obtenemos la llamada *Ecuación maestra de Lindblad* [6],

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = -i[H, \rho] + \sum_{\mu} \left( J_{\mu}\rho J_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{J_{\mu}^{\dagger}J_{\mu}, \rho\} \right) \quad (3.6)$$

Como podemos observar, esta ecuación no es más que la ecuación de Liouville-von Neumann para un sistema sin interacción externa, más algunos términos que provienen del efecto del entorno en nuestro sistema. Además, al escribir esta ecuación como  $\dot{\rho} = \mathcal{L}[\rho]$ , aparece el superoperador  $\mathcal{L}[\cdot]$  conocido como *Lindbladiano*,

$$\mathcal{L}[\cdot] = -i[H, (\cdot)] + \sum_{\mu} \left( J_{\mu}(\cdot) J_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{J_{\mu}^{\dagger}J_{\mu}, (\cdot)\} \right) \quad (3.7)$$

Véase que en el caso de que  $\rho = \mathbb{1}$ , obtenemos

$$\mathcal{L}^{\dagger}(\mathbb{1}) = i[H, \mathbb{1}] + \sum_{\mu} \left( J_{\mu}^{\dagger}\mathbb{1}J_{\mu} - \frac{1}{2}\{J_{\mu}^{\dagger}J_{\mu}, \mathbb{1}\} \right) = 0 \quad (3.8)$$

ya que  $[H, \mathbb{1}] = 0$  y  $\{J_{\mu}^{\dagger}J_{\mu}, \mathbb{1}\} = 2(J_{\mu}^{\dagger}J_{\mu})$ . Cuando esta última condición se cumple, que el operador está bien definido dado que conserva la probabilidad.

### 3.2.1 Emisión de fotones en un sistema de qubits

Se demuestra que la probabilidad  $P_t(K)$  de observar  $K$  eventos tras un tiempo  $t$ , para  $t \gg 1$ , sigue una distribución exponencial [8],

$$P_t(K) = \text{Tr} \left[ \rho^{(K)}(t) \right] \approx e^{-t\varphi(K/t)} \quad (3.9)$$

donde  $\rho^{(K)}(t)$  es la matriz densidad reducida, obtenida como la proyección de  $\rho$  sobre el subespacio de  $K$  eventos, y  $\varphi(k)$  ( $k \equiv K/t$ ) es la *función de grandes desviaciones* (FGD), que contiene información de las probabilidades de  $K$  cuando  $t \gg 1$ . Por otra parte, se pueden desplazar las probabilidades de emitir fotones hacia valores deseados, sesgandp exponencialmente la probabilidad anterior introduciendo el campo “s”,

$$P_t^s(K) = \frac{e^{-sK}P_t(K)}{Z_t(s)} \quad (3.10)$$

donde  $P_t(K)$  es la distribución de probabilidad original, Ec.(3.9), y  $Z_t(s) = \sum_k e^{-sK}P_t(K)$  es la función generatriz que normaliza  $P_t^s(K)$ . Además, para tiempos largos, la función generatriz sigue un principio de grandes desviaciones,

$$Z_t(s) \approx e^{t\theta(s)} \quad (3.11)$$

donde llamaremos a  $\theta(s)$  la *función generatriz escalada de cumulante* (FGEC).

Las dos funciones,  $\varphi(k)$  y  $\theta(s)$ , son para las trayectorias, lo que son la densidad de entropía y la energía libre para las configuraciones en los sistemas mecánicos estadísticos,

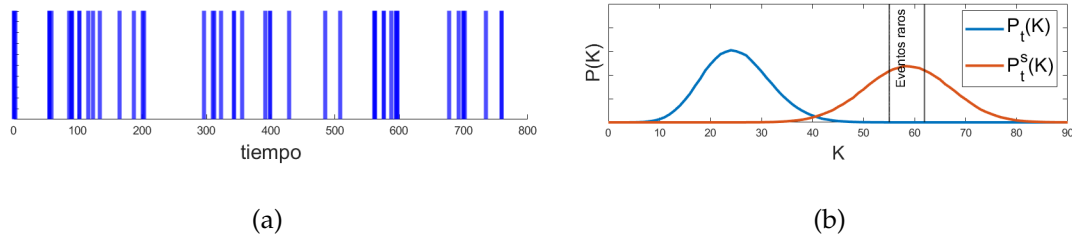


Figura 3: (a) Boceto de una trayectoria de salto cuántico. Cada línea azul corresponde a la realización de un salto. (b) Muestra del desplazamiento de una trayectoria de salto cuántico

con  $s$  el campo conjugado del parámetro  $K$ . Están relacionadas por la transformada de Legendre,

$$\theta(s) = -\min_k [ks + \varphi(k)] \quad (3.12)$$

pudiendo calcular así la FGD como

$$\varphi(k) = \max_s [-k \cdot s - \theta(s)] \quad (3.13)$$

Además, dada la Ec.(3.11) podemos establecer una relación entre la actividad media  $\langle k \rangle_s$  y la función  $\theta(s)$ , ya que

$$\theta(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln [Z_t(K)] \quad (3.14)$$

tal que

$$\langle k \rangle_s = \frac{\langle K \rangle}{t} = \frac{1}{t Z_t(s)} \sum_K K P_t(K) e^{-sK} = -\theta'(s) \quad (3.15)$$

Así, vemos que el valor de  $s$  determinará tanto el valor medio  $\langle k \rangle_s$  como el d todos los cumulantes, correspondientes a las derivadas de  $\theta(s)$ , ya que esta es la función generatriz de cumulantes. Nótese que cuando  $s < 0$  tendremos  $\langle k \rangle_s > \langle k \rangle_0$ , y cuando  $s > 0$  tendremos  $\langle k \rangle_s < \langle k \rangle_0$ , y cuando  $s = 0$ , obtenemos el valor típico de  $\langle k \rangle$ .

### 3.2.2 Haciendo eventos raros típicos

Comenzamos cambiando el operador densidad bajo la transformación de Laplace vista en la Ec.(3.10),

$$\rho_{s_0}(t) = \sum_K \rho^{(K)}(t) e^{-s_0 K} \quad (3.16)$$

dado que se debe cumplir la ecuación de Liouville-von Neumann, Ec.(3.3), llegamos al operador Lindbladiano,

$$\mathcal{L}_{s_0}(\cdot) = -i[H, (\cdot)] + \sum_{\mu=1}^{N_I} \left( e^{-s_0} J_{\mu}(\cdot) J_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} \{J_{\mu}^{\dagger} J_{\mu}, (\cdot)\} \right) \quad (3.17)$$

Véase pues, que para  $s_0 = 0$ , este operador no es más que el operador Lindbladiano para valores típicos. Mientras que cuando  $s_0 \neq 0$ ,  $\partial_t \rho = \mathcal{L}_{s_0}(\rho)$  describe un conjunto de trayectorias sesgadas por  $e^{-s_0 K}$  [8]. Sin embargo, este operador no es estocástico, puesto que no preserva la traza ( $\mathcal{L}_{s_0}^{\dagger}(\mathbb{1}) \neq 0$ ) cuando  $s_0 \neq 0$ . Por tanto, no podemos simular trayectorias cuánticas con él. Para que el operador sea estocástico, aplicamos la *transformada cuántica de Doob* [5]. Así, obtenemos el operador

$$\tilde{\mathcal{L}}_{s_0}(\cdot) = \ell_{s_0}^{1/2} \mathcal{L}_{s_0} \left[ \ell_{s_0}^{-1/2}(\cdot) \ell_{s_0}^{-1/2} \right] \ell_{s_0}^{1/2} - \theta(s_0) \quad (3.18)$$

ya que para tiempos largos, la unión con las probabilidades  $P_t^{s_0}(K)$  viene dada por el mayor autovalor de  $\mathcal{L}_{s_0}$ , que nos otorga la función  $\theta(s_0)$ ,

$$Z = \text{Tr} \left[ e^{\mathcal{L}_{s_0} t}(\rho_0) \right] = \text{Tr} \left[ \sum_i e^{\lambda_i t} \text{Tr}(\ell_0 \cdot \rho_0) r_0 \right] = \sum_i e^{\lambda_i t} \text{Tr}(\ell_0 \cdot \rho_0) \text{Tr}(r_0) \sim e^{\lambda_0 t} \quad (3.19)$$

cuando  $t \gg 1$ . Por tanto, si teniendo en cuenta la Ec.(3.11) deducimos que  $\lambda_0 = \theta(s_0)$ .

Por otra parte,  $\ell_{s_0}$  y  $r_{s_0}$  son las automatrices izquierda y derecha, respectivamente. Las cuales cumplen  $\mathcal{L}_{s_0}^{\dagger}[\ell_{s_0}] = \theta(s_0)\ell_{s_0}$  y  $\mathcal{L}_{s_0}[r_{s_0}] = \theta(s_0)r_{s_0}$ , normalizadas tal que  $\text{Tr}(\ell_{s_0} r_{s_0}) = \text{Tr}(r_{s_0}) = 1$ .

Reagrupando términos, llegamos a la forma general del superoperador en cuestión,

$$\tilde{\mathcal{L}}_{s_0}(\cdot) = -i[\tilde{H}_{s_0}, (\cdot)] + \sum_{\mu=1}^{N_I} \left( \tilde{J}_{\mu}^{s_0}(\cdot) \tilde{J}_{\mu}^{s_0\dagger} - \frac{1}{2} \{ \tilde{J}_{\mu}^{s_0\dagger} \tilde{J}_{\mu}^{s_0}, (\cdot) \} \right) \quad (3.20)$$

con los operadores de salto cuántico modificados,

$$\tilde{J}_{\mu}^{s_0} = e^{-s_0/2} \ell_{s_0}^{1/2} J_{\mu} \ell_{s_0}^{-1/2} \quad (3.21)$$

y el Hamiltoniano modificado

$$\tilde{H}_{s_0} = \frac{1}{2} \ell_{s_0}^{1/2} \left( H - \frac{i}{2} \sum_{\mu=1}^{N_I} J_{\mu} J_{\mu}^{\dagger} \right) \ell_{s_0}^{-1/2} + H.c \quad (3.22)$$

donde  $H.c$  hace referencia al complejo conjugado de la primera parte de la ecuación.

El generador dinámico  $\tilde{\mathcal{L}}_{s_0}$  describe un sistema cuántico para el que las estadísticas del observable  $k = K/t$  vienen dadas por las siguientes FGEC y FGD,

$$\begin{cases} \tilde{\theta}(s) = \theta(s + s_0) - \theta(s_0) \\ \tilde{\varphi}(k) = \varphi(k) + \theta(s_0) + k \cdot s_0 \end{cases} \quad (3.23)$$

véase de esta ecuación que si bien la FGEC transforma de manera lineal, la FGD no lo hace. Se verán ejemplos de ellos más adelante.

Este nuevo superoperador  $\tilde{\mathcal{L}}_{s_0}$  genera las trayectorias sesgadas que buscamos, Ec.(3.10). De hecho, vemos de la Ec.(3.22) que dicha estadística dada por  $\theta(s)$  y sus derivadas en torno a  $s_0$  ha sido desplazada al origen, de manera que las trayectorias raras que daban lugar a grandes fluctuaciones del observable, han pasado a ser las trayectorias típicas del sistema. Esto se ilustrará más adelante con un ejemplo en la Fig.(7a).

Además, se puede demostrar que efectivamente el operador es estocástico, lo cual nos permite simular trayectorias cuánticas con él. Por tanto, la evolución del nuevo sistema vendrá dada por

$$\frac{d\rho}{dt} = \tilde{\mathcal{L}}_{s_0}(\rho_s) \quad (3.24)$$

cuyo estado estacionario es

$$\rho_{st} = \ell_{s_0}^{1/2} r_{s_0} \ell_{s_0}^{-1/2} \quad (3.25)$$

### 3.3 Simulación de la ecuación maestra de Lindblad

Comenzaremos definiendo el llamado *Hamiltoniano efectivo*  $H_{eff}$  para poder escribir el Lindbladiano en una forma más compacta,

$$H_{eff} = H - \frac{i}{2} \sum_{\mu} J_{\mu}^{\dagger} J_{\mu} \quad (3.26)$$

De esta manera, la Ec.(3.8) puede ser escrita como

$$\mathcal{L}(\cdot) = \sum_{\mu} J_{\mu}(\cdot) J_{\mu}^{\dagger} - i \left[ H_{eff}(\cdot) - (\cdot) H_{eff}^{\dagger} \right] \quad (3.27)$$

Además, dada la Ec.(3.27), al hacer una discretización del tiempo con paso  $\delta t = t/N \ll 1$ , podemos escribir

$$e^{t\mathcal{L}}(\rho) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N e^{\delta t \mathcal{L}} \approx (\mathbb{1} + \delta t \mathcal{L})^N + \mathcal{O}(\delta t \mathcal{L})^2 \quad (3.28)$$

y quedandonos solo con el primer orden e implementando la Ec.(3.27), quedaría como

$$e^{t\mathcal{L}}(\rho) \approx \sum_{\mu} V_{\mu} \rho V_{\mu}^{\dagger} + V_0 \rho V_0^{\dagger} \quad (3.29)$$

donde

$$V_{\mu} = \sqrt{\delta t} J_{\mu}, \quad V_0 = \mathbb{1} - i\delta t H_{eff} \quad (3.30)$$

A partir de un estado inicial puro, el sistema puede, o bien, experimentar un salto tras un tiempo  $\delta t$  a un estado diferente

$$|\psi^{\mu-\text{salto}}\rangle = \frac{V_{\mu} |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | V_{\mu}^{\dagger} V_{\mu} | \psi \rangle}} \quad (3.31)$$



con probabilidad

$$p_\mu = \langle \psi | V_\mu^\dagger V_\mu | \psi \rangle = \delta t \langle \psi | J_\mu^\dagger J_\mu | \psi \rangle \quad (3.32)$$

o bien evolucionar bajo  $H_{eff}$  tras un tiempo  $\delta t$  al estado

$$|\psi^{no-salto}\rangle = \frac{V_0 |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | V_0^\dagger V_0 | \psi \rangle}} \quad (3.33)$$

con probabilidad

$$p_0 = \langle \psi | V_0^\dagger V_0 | \psi \rangle = 1 - i\delta t \langle \psi | (H_{eff} - H_{eff}^\dagger) | \psi \rangle = 1 - \delta t \sum_\mu \langle \psi | J_\mu^\dagger J_\mu | \psi \rangle \quad (3.34)$$

Véase que se puede comprobar que

$$\sum_\mu p_\mu + p_0 = \langle \psi | V_\mu^\dagger V_\mu | \psi \rangle + \langle \psi | V_0^\dagger V_0 | \psi \rangle = 1 \quad (3.35)$$

lo cual no es más que una consecuencia de la propiedad de preservar la traza del superoperador Lindbladiano,

$$\sum_\mu \text{Tr} [\langle \psi | V_\mu^\dagger V_\mu | \psi \rangle] + \text{Tr} [\langle \psi | V_0^\dagger V_0 | \psi \rangle] = \text{Tr} \left[ \sum_\mu (V_\mu \rho V_\mu^\dagger) + V_0 \rho V_0^\dagger \right] = 1$$

Ya que debemos trabajar con operadores densidad y no simplemente estados, tenemos que tener en cuenta que

$$\begin{aligned} \rho(t + \delta t) &= |\psi(t + \delta t)\rangle \langle \psi(t + \delta t)| = \\ &= \sum_\mu p_\mu |\psi^{\mu-salto}(t)\rangle \langle \psi^{\mu-salto}(t)| + \left(1 - \sum_\mu p_\mu\right) |\psi^{no-salto}(t)\rangle \langle \psi^{no-salto}(t)| \end{aligned} \quad (3.36)$$

escribiendo esto en función de  $V_\mu$  y  $V_0$  tal como hemos visto en la Ec.(3.30), junto al hecho de que  $H_{eff} - H_{eff}^\dagger = -i \sum_\mu J_\mu J_\mu^\dagger$ , conseguimos llegar a la expresión general del operador densidad

$$\rho(t + \delta t) = \delta t \sum_\mu J_\mu \rho(t) J_\mu^\dagger + \rho(t) - i\delta t [H_{eff} \rho(t) - \rho(t) H_{eff}^\dagger] \quad (3.37)$$

Dado todo lo anterior, podemos el algoritmo que simula la ecuación de Lindblad puede resumirse como

1. Partimos de un estado inicial puro  $|\psi\rangle$ .
2. Generamos un número aleatorio uniforme  $u \in [0, 1]$ .
3. Comparamos  $u$  con  $\sum_\mu p_\mu$  tal que

- Si  $u < \sum_{\mu} p_{\mu}$ , el sistema salta bajo la Ec.(3.31). El salto que ocurrirá dependerá de las probabilidades  $p_{\mu}$ .
- Si  $u > \sum_{\mu} p_{\mu}$ , el sistema evoluciona como la Ec.(3.33).

4. Aumentamos  $\delta t$  en una unidad y volvemos a 2.

Este algoritmo, no es más que un tipo de algoritmo de Monte Carlo, que recibe el nombre de *algoritmo de Salto Cuántico de Monte Carlo de tiempo discreto*. Veremos que nos permitirá simular trayectorias cuánticas de un sistema a elección propia [11].

## 4 Cambio de espacio de trabajo

### 4.1 Espacio de Fock-Liouville

Comenzaremos introduciendo al lector el espacio de Fock-Liouville, que aunque ahora mismo carece de utilidad, veremos que nos resulta muy útil a la hora de trabajar con estados. El espacio de Fock-Liouville (EFL) es un entorno de trabajo que convierte matrices en vectores ( $A \rightarrow \hat{A}$ ) [10]. En este espacio, se define el producto de dos matrices  $A$  y  $B$  como

$$\langle \hat{B} | \hat{A} \rangle \equiv \text{Tr} [B^{\dagger} A] \quad (4.1)$$

Por otra parte, se define el *superoperador*  $\hat{\mathcal{L}}$  como un operador que actúa sobre otro operador. En nuestro caso, este tendrá la forma

$$\hat{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} \hat{\mathcal{L}}_{00} & \hat{\mathcal{L}}_{10} & \hat{\mathcal{L}}_{20} & \hat{\mathcal{L}}_{30} \\ \hat{\mathcal{L}}_{01} & \hat{\mathcal{L}}_{11} & \hat{\mathcal{L}}_{21} & \hat{\mathcal{L}}_{31} \\ \hat{\mathcal{L}}_{02} & \hat{\mathcal{L}}_{12} & \hat{\mathcal{L}}_{22} & \hat{\mathcal{L}}_{32} \\ \hat{\mathcal{L}}_{03} & \hat{\mathcal{L}}_{13} & \hat{\mathcal{L}}_{23} & \hat{\mathcal{L}}_{33} \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Veremos que este *superoperador*  $\mathcal{L}$ , tomará el nombre de *Lindbladiano* y cobrará gran importancia en el futuro.

### 4.2 Resolución de ecuaciones en EFL

Partiendo de cierta ecuación diferencial,

$$\frac{d}{dt} X = A X B \quad (4.3)$$

donde estamos considerando  $X = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} \\ x_{10} & x_{11} \end{pmatrix}$ .

Sabiendo que el producto de Kronecker de matrices, para matrices de  $2 \times 2$ , se define como

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00}b_{00} & a_{00}b_{01} & a_{01}b_{00} & a_{01}b_{01} \\ a_{00}b_{10} & a_{00}b_{11} & a_{01}b_{10} & a_{01}b_{11} \\ a_{10}b_{00} & a_{10}b_{01} & a_{11}b_{00} & a_{11}b_{01} \\ a_{10}b_{10} & a_{10}b_{11} & a_{11}b_{10} & a_{11}b_{11} \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Al pasar a  $\hat{X} = (x_{00}, x_{01}, x_{10}, x_{11})^T$ , su correspondiente ecuación diferencial se transforma en

$$\frac{d}{dt}X = AXB \Rightarrow \frac{d}{dt}\hat{X} = (A \otimes B^T) \hat{X} \quad (4.5)$$

de manera que, al pasar al espacio EFL, debemos tener en cuenta que las propias ecuaciones del sistema también cambiarán.

## 5 Sistema cuántico abierto de 3 qubits

Un sistema formado por tres qubits que interaccionan unos con otros viene dado por el Hamiltoniano

$$H = \Omega \sum_{k=1}^3 \sigma_x^{(k)} + V \sum_{k>h=1}^3 \sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(h)} \quad (5.1)$$

donde denotamos

$$\begin{cases} \sigma_\alpha^{(1)} = \sigma_\alpha \otimes \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \\ \sigma_\alpha^{(2)} = \mathbb{1} \otimes \sigma_\alpha \otimes \mathbb{1} \\ \sigma_\alpha^{(3)} = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes \sigma_\alpha \end{cases} \quad (5.2)$$

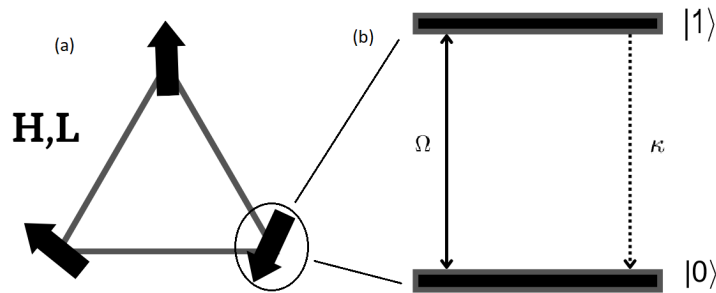


Figura 4: (a) Boceto de un sistema de 3 qubits con interacción. (b) Boceto de un qubit con campo oscilatorio  $\Omega$  y ratio de decaimiento  $\kappa$ .

para  $\alpha = x, y, z$  las matrices de Pauli, ya mencionadas en la Ec.(2.6). Además, la interacción de cada qubit,  $\mu$ , con el entorno viene descrita por el correspondiente operador de salto cuántico,

$$J_\mu = \sqrt{\kappa} \sigma_-^{(\mu)} \quad (5.3)$$

donde  $\sigma_{\pm} = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$ , con  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  dadas por la Ec.(2.6), tal que  $\sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  y  $\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ . Como hemos discutido antes, la forma general del Lindbladiano del sistema calculado usando la Ec.(3.17) es

$$\mathcal{L}_{s_0}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{\mu=1}^3 \left( e^{-s_0} \kappa \sigma_-^{(\mu)} \rho \sigma_+^{(\mu)} - \frac{\kappa}{2} \{ \sigma_+^{(\mu)} \sigma_-^{(\mu)}, \rho \} \right) \quad (5.4)$$

### 5.1 Análisis teórico del sistema

Tómese el sistema formado por tres qubits con constante de interacción  $V = 10$  y ratio de decaimiento  $\kappa = 1$ . En la Fig.(5) se muestra la FGEC  $\theta(s)$ , la actividad media  $\langle k \rangle_s = -\theta'(s)$  y las fluctuaciones  $\theta''(s)$  en función de  $\Omega$  y  $s$ .

Si prestamos atención a la actividad media  $\langle k \rangle_s = -\theta'(s)$  del sistema, podemos distinguir dos regímenes separados por una transición de fase. En la Fig.(6) se representan las dos fases distintas y el correspondiente punto crítico para  $s = s_c \approx -0.68$  en el que ambas fases coexisten en el caso de tomar  $\Omega = 1$ . Podemos observar que la fase activa esta caracterizada por una emisión casi continua de fotones, y la fase inactiva por una emisión casi nula. En la coexistencia de ambas fases, tenemos trayectorias en las que se alteran periodos de emisión y no emisión

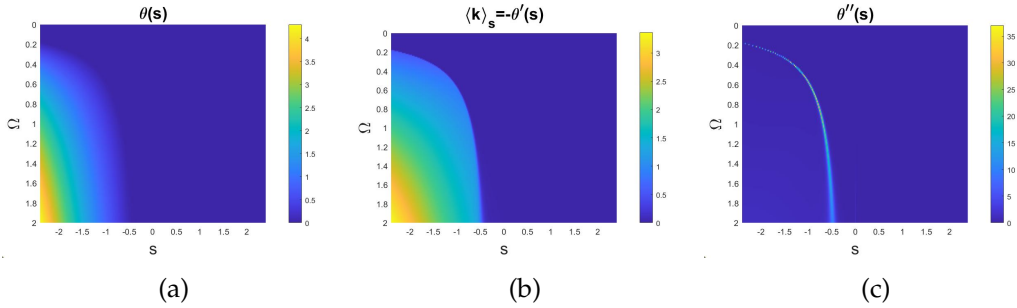


Figura 5: (a) Representación de la FGEC  $\theta(s)$  del sistema original para  $\kappa = 1$  en función de  $\Omega$  y  $s$ . (b) Representación de la actividad media  $\langle k \rangle_s$  en condiciones análogas. (c) Representación de las fluctuaciones  $\theta''(s)$  en condiciones análogas.

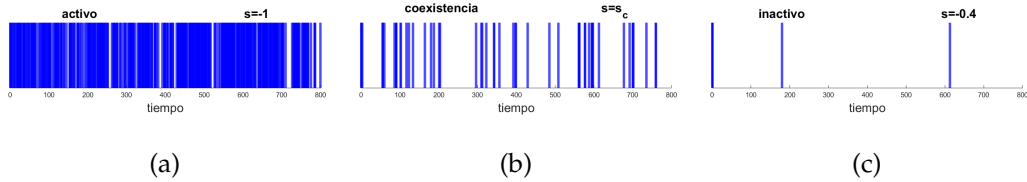


Figura 6: Emisión de fotones (líneas azules) en función del tiempo para las distintas fases para  $\Omega = 1$  y  $V = 10$ .

Además, en la Fig.(7) tenemos la FGEC, la FGD y la distribución de probabilidad en estas mismas condiciones en el caso original y en el caso desplazado  $s_0 = -2$ . Por un lado, vemos en la Fig.(7a) como al desplazar el sistema, se traduce en un cambio de coordenadas en la FGEC, de modo que el punto crítico  $s_c \approx -0.68$  del sistema original se desplaza hacia la derecha  $\tilde{s}_c \approx 1.33$ . Al hacer esto, se consigue que la dinámica del

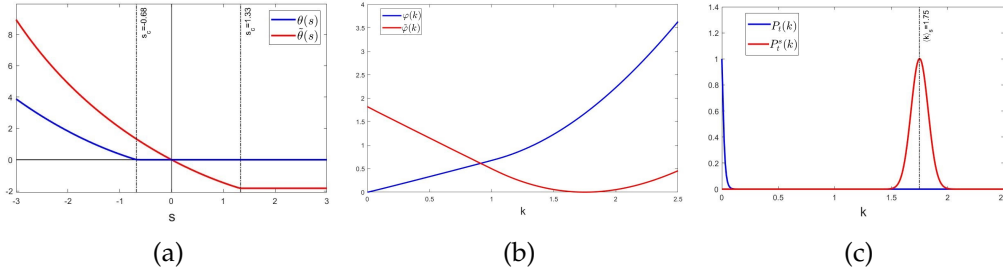


Figura 7: (a) Representación de función generatriz escalada de cumulante (FGEC) del sistema original en condiciones de  $\Omega = 1$  y  $\kappa = 1$  (línea azul) y sistema modificado con  $s_0 = -2$  (línea roja). (b) Respresntación de la función de grandes desviaciones (FGD) en condiciones análogas. (c) Representación de la probabilidad  $P_t(k)$  en condiciones análogas para un  $t = 100$ .

sistema se encuentre en la fase activa. Por otra parte, en Fig.(7b) y Fig.(7c) vemos como al transformar la FGEC, la emisión de fotones del sistema cambia drásticamente. Véase que las transformaciones vienen dadas por la Ec.(3.23) y las distribuciones  $P_t(k)$  se han calculado usando la Ec.(3.9), estando estas distribuciones sin normalizar.

En las condiciones relatadas, el Lindbladiano del sistema se puede escribir como

$$\mathcal{L}_{s_0=-2}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{\mu=1}^3 \left( e^2 \sigma_-^{(\mu)} \rho \sigma_-^{(\mu)\dagger} - \frac{1}{2} \{ \sigma_-^{(\mu)\dagger} \sigma_-^{(\mu)}, \rho \} \right) \quad (5.5)$$

Como acabamos de ver, para dicho sistema la FGEC es  $\theta_{s_0} = 1.82$ , mientras que la actividad media es  $\langle k \rangle_{s_0} = 1.75$ . Entonces, si la *transformación cuántica de Doob* es un proceso equivalente a este, deberíamos de ser capaces de obtener los mismos resultados usando este procedimiento. En la Fig.(8), observamos como efectivamente los resultados se superponen a la perfección, como ya discutimos anteriormente de manera teórica.

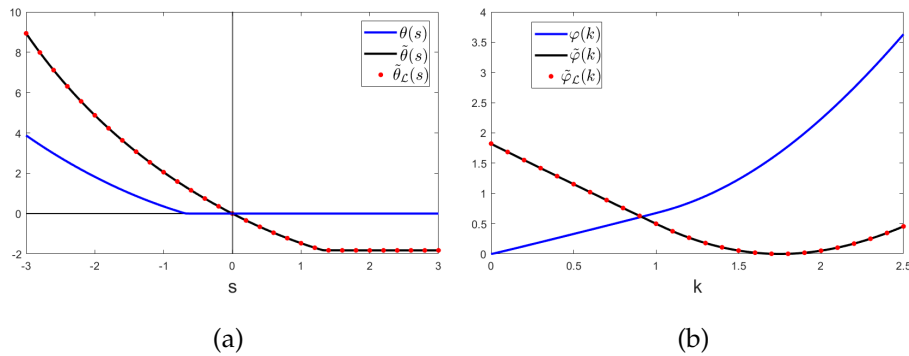


Figura 8: (a) FGEC para el sistema desplazado en  $s_0 = -2$ . La línea negra la FGEC haciendo una transformación del Lindbladiano original. Los círculos rojos muestran lo mismo calculado a partir del Lindbladiano tiltado. La línea azul muestra la FGEC para el sistema original. (b) FGD para el sistema desplazado en  $s_0 = -2$ . La línea negra la FGD haciendo una transformación del Lindbladiano original. Los círculos rojos muestran lo mismo calculado a partir del Lindbladiano tiltado. la línea azul muestra la FGD para el sistema original.

Ahora bien, al aplicar la transformada de Doob este sistema para sesgarlo bajo  $s_0 = -2$ , se han generado términos adicionales en el Hamiltoniano y los operadores de salto. Los distintos términos y sus contribuciones, los podemos calcularlos descomponiendo  $\tilde{H}_{s_0}$  y  $\tilde{J}_\mu^{s_0}$  en la base de las matrices de Pauli. En la Fig.(9a), vemos los distintos términos que influyen en  $\tilde{H}_{s_0}$ , y se puede apreciar como los términos que más contribuyen siguen siendo  $\sigma_x^{(k)}$  y  $\sigma_z^{(k)} \sigma_z^{(h)}$ , aunque ahora tenemos presencia de otros muchos términos en menor medida. En las Fig.(9b), Fig.(9c) y Fig.(9d), podemos ver los términos que influyen en  $\tilde{J}_1^{s_0}$ ,  $\tilde{J}_2^{s_0}$  y  $\tilde{J}_3^{s_0}$ , respectivamente. En estas, se puede apreciar una mayor variedad de términos que contribuyen, aunque los que más influyen siguen siendo  $\sigma_x^{(\mu)}$  y  $\sigma_y^{(\mu)}$ , tal que  $\sigma_x^{(\mu)} \approx \sigma_y^{(\mu)} \approx 0.5$ . Esto se debe a que los operadores de salto dependen de  $J_\mu \sim \sigma_\pm^{(\mu)} = \frac{1}{2}(\sigma_x^{(\mu)} \pm i\sigma_y^{(\mu)})$ .

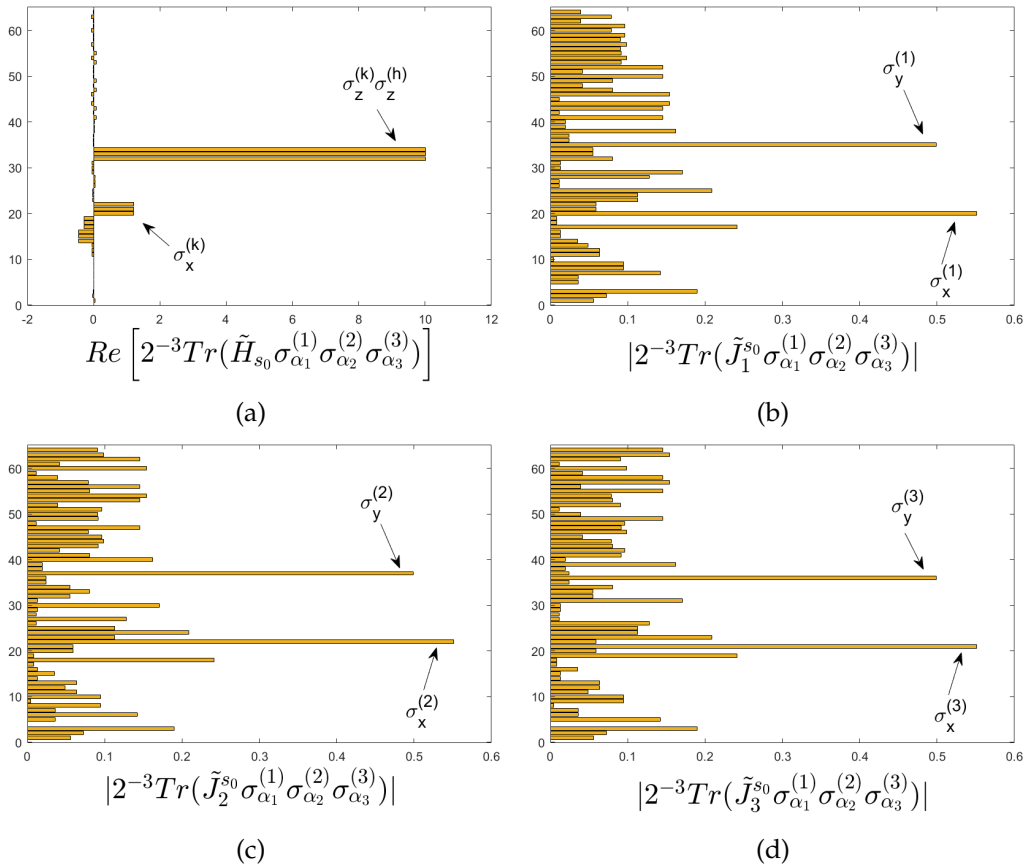


Figura 9: Coeficientes del operador descomposición en la base de matrices de Pauli para el Hamiltoniano y los operadores de salto para  $s_0 = -2$ . (a) Coeficientes reales de  $\tilde{H}_{s_0}$ . (b) Valor absoluto de los coeficientes complejos de  $\tilde{J}_1^{s_0}$ . (c) Valor absoluto de los coeficientes complejos de  $\tilde{J}_2^{s_0}$ . (d) Valor absoluto de los coeficientes complejos de  $\tilde{J}_3^{s_0}$ .

## 5.2 Evolución temporal del sistema

Considérese ahora el mismo sistema, pero utilicemos esta vez las constante  $\Omega = V = \kappa = 1$ . Para dicho sistema, el Lindbladinao original se escribe como

$$\mathcal{L}_0(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{\mu=1}^3 \left( \sigma_-^{(\mu)} \rho \sigma_-^{(\mu)\dagger} - \frac{1}{2} \{ \sigma_-^{(\mu)\dagger} \sigma_-^{(\mu)}, \rho \} \right) \quad (5.6)$$

Podemos calcular la evolución del de la matriz densidad aplicando la descomposición espectral

$$\rho(t) = \sum_{n=0}^{63} e^{\lambda_n t} \text{Tr}(\ell_n \cdot \rho_0) r_n \quad (5.7)$$

donde  $\lambda_n$  hace referencia a los autovalores del Lindbladiano en orden decreciente y,  $\ell_n$  y  $r_n$  a sus correspondientes automatrices normalizadas. Así, cuando  $t \gg 1$ , tendremos

$$\rho_\infty \approx r_0 \quad (5.8)$$

donde  $r_0$  hace referencia a la automatriz derecha del mayor autovalor, correspondiente a  $\lambda_0 = 0$ . Esto nos permite ver que el estado estacionario alcanzado siempre será independiente del estado inicial.

En la Fig.(10), se puede observar la comparación entre la matriz densidad  $\rho_\infty = r_0$  que se alcanza para tiempos largos (línea negra), el promedio de  $n = 1000$  trayectorias simuladas usando el algoritmo de Salto Cuántico de Montecarlo los estados  $|1_8\rangle$  (puntos violetas) y  $|0_8\rangle$  (puntos verdes), y la matriz densidad calculada de manera teórica usando la Ec.(5.7) para el estado  $|1_8\rangle$  (línea azul) y  $|0_8\rangle$  (línea roja). Nótese que solo se muestran algunas componentes de la matriz densidad de manera ilustrativa, puesto que mostrar todas sería demasiado.

Nótese que los estados iniciales se han definido como

$$\begin{cases} |1_8\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \\ |0_8\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T \end{cases} \quad (5.9)$$

Sin embargo, hemos visto en la Ec.(5.8) cómo el estado estacionario es independiente de los estados iniciales. De hecho, en la Fig.(10) se puede observar que los estados iniciales sólo influyen en los instantes iniciales, y el sistema evoluciona hacia un sistema estacionario único descrito por  $r_0$ .

Para este sistema, podemos estudiar la distribución de fotones emitidos por unidad de tiempo para distintos intervalos de tiempo. En la Fig.(11), se muestran las diferentes distribuciones cuyo pico se encuentra en  $\langle k \rangle \approx 0.47$ . Se puede observar que conforme mayor es el tiempo, más picuda es la gaussiana alrededor de su promedio. Véase que también es necesario esclarecer una relación entre el tiempo de simulación y la precisión en la cantidad de fotones emitidos. Para ello, puesto que contabilizamos el número de fotones emitidos por unidad de tiempo  $k = K/t$ , calculamos  $k$  en intervalos con un ancho de  $1/t$ .

Sin embargo, en este apartado hemos considerado continuamente el sistema original. A continuación se van a mostrar algunos ejemplos del desplazamiento del sistema hacia regímenes más activos o inactivos. Para ello, haremos uso de la *transformada cuántica de Doob* como ya hemos discutido anteriormente.

En Fig.(12), se muestran los resultados de tilar el Lindbladiano original hacia distintos valores. Primero, en la Fig.(12a) se muestran los resultados de desplazar el sistema

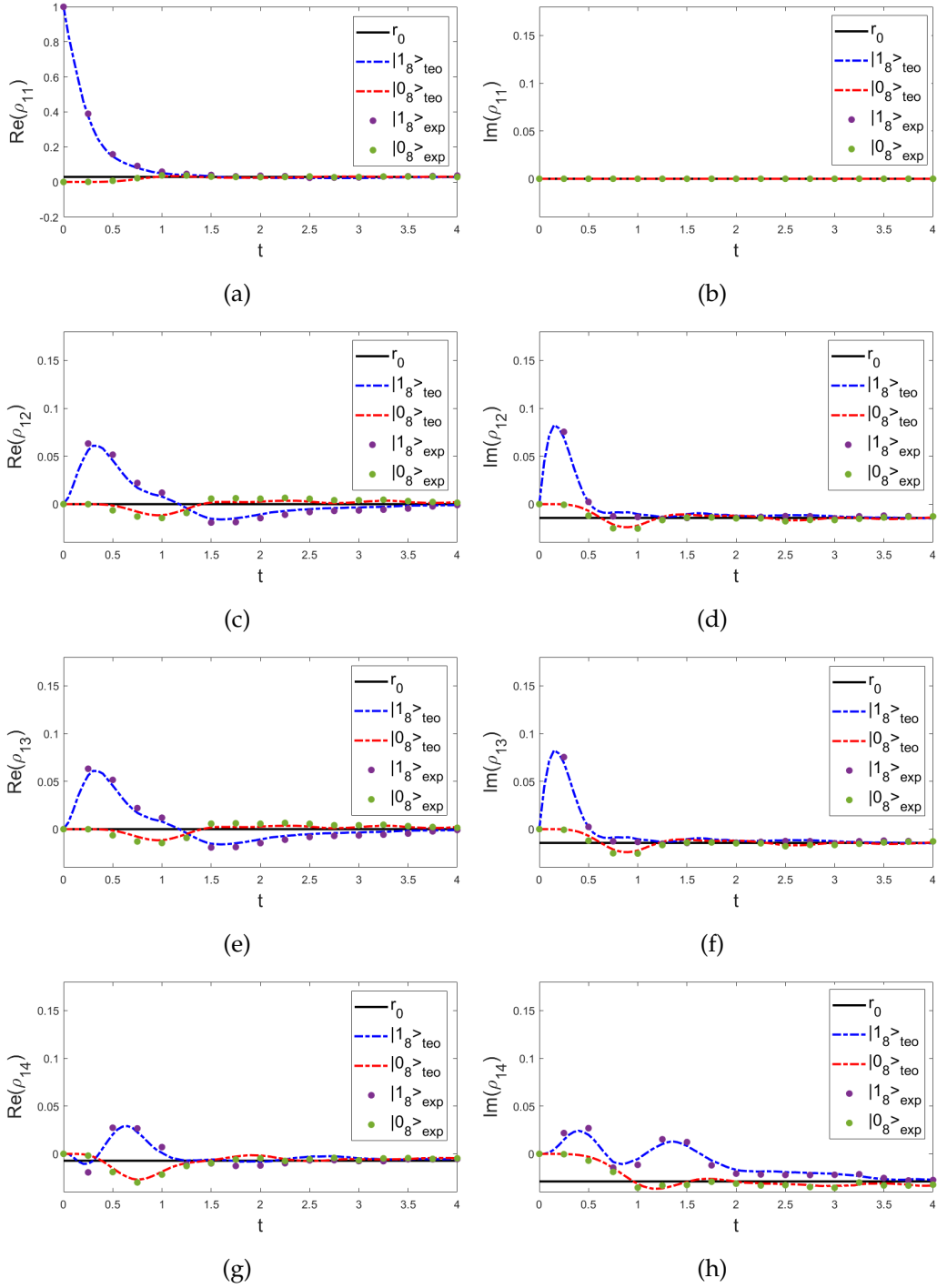


Figura 10: Algunas componentes de la matriz densidad en función del tiempo. La línea negra corresponde a la predicción teórica de acuerdo con la ecuación de Lindblad cuando  $t \gg 1$ . La línea roja muestra los resultados de las simulaciones.

original hacia una dinámica menos activa, esto se hace tomando un valor positivo del tiltado ( $s = 0.5$ ). Podemos observar que en el caso del sistema original, la emisión media de fotones total es  $\langle K \rangle_0 \sim 6$  para  $t = 10$ , mientras que para el sistema tiltado es  $\langle K \rangle_{0.5} \sim 3$ . Por el contrario, en la Fig.(12b) tenemos el caso de mover el sistema hacia una dinámica más activa, para ello se toma un valor negativo del tiltado ( $s = -0.5$ ). En este



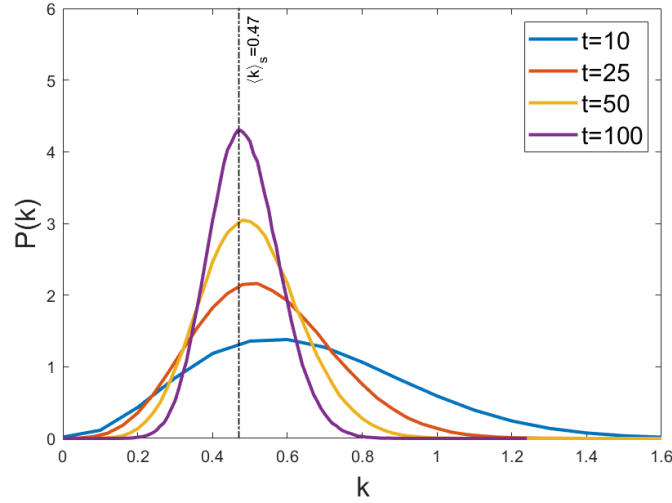


Figura 11: Distribución de probabilidad de fotones emitidos por unidad de tiempo para diferentes tiempos totales con  $5 \cdot 10^5$  realizaciones.

caso, la emisión media de fotones total será  $\langle K \rangle_{-0.5} \sim 13$  para  $t = 10$ . Finalmente, en la Fig.(12c) se encuentra exactamente lo mismo que en el caso anterior pero para un tiempo total  $t = 50$ . En este último caso, la emisión media de fotones en el sistema original es  $\langle K \rangle_0 \sim 24$  y en el sistema tiltado es  $\langle K \rangle_{-0.5} \sim 59$ . Nótese que todas estas gráficas, la distribución de probabilidad teórica (líneas rojas) se ha calculado usando la Ec.(3.10), y las otras han sido resultado de simulaciones usando el algoritmo de Salto Cuántico de Montecarlo para  $5 \cdot 10^5$  realizaciones sobre la transformada cuántica de Doob.

En estas gráficas, podemos ver cómo los resultados obtenidos de maneras distintas se superponen casi a la perfección, que es lo esperable dadas las circunstancias. Sin embargo, en la Fig.(12c) la distribución de probabilidad desplazada  $P_t^s(K)$  obtenida a través de la distribución de probabilidad original  $P_t(K)$  no tiene exactamente la forma que esperamos en una distribución de probabilidad. Esto ocurre porque a medida que el

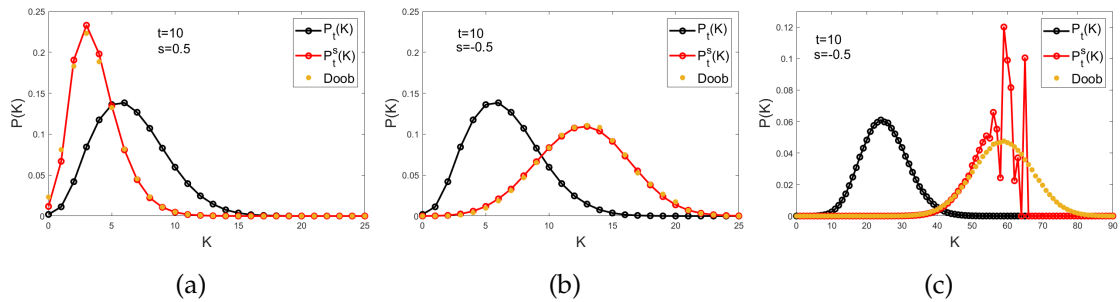


Figura 12: (a) Tiltado hacia una dinámica menos activa ( $s = 0.5$ ) para  $t = 10$ . La línea azul hace referencia a la distribución de probabilidad numérica de fotones emitidos para el sistema original. La línea negra muestra la distribución  $P_t^s(k)$  resultado de tiltar la distribución de probabilidad original  $P_t(k)$ . Los puntos rojos muestran los resultados numéricos obtenidos al hacer uso de la transformada cuántica de Doob. (b) Mismos resultados cuando tiltamos el sistema hacia una dinámica más activa ( $s = 0.5$ ) para  $t=10$ . (c) Caso análogo al anterior para un tiempo total de simulación de  $t=50$ .

tiempo aumenta, en este caso  $t = 50$ , se vuelve cada vez más raro encontrar trayectorias cuánticas que se localicen en estas colas. Esto es un problema que como podemos ver, no ocurre para en el caso de simular las trayectorias usando la transformada cuántica de Doob. Por lo tanto, vemos que cuando  $t \gg 1$  sólo a través de la transformada de Doob obtenemos resultados correctos.

## 6 Conclusiones

Durante todo el trabajo, se han estudiado los sistemas cuánticos abiertos, y de manera específica, el sistema de tres qubits con interacción. Además, se ha probado la utilidad del método de los Saltos Cuánticos de Monte Carlo para simular estos sistemas. Este método, nos ha permitido ver cómo evoluciona cierto sistema cuántico abierto promediando trayectorias individuales aisladas tanto para estados puros como mixtos. Además, se observa la existencia de un estado final estacionario único independiente del estado inicial dado.

La dinámica de estos sistemas es estudiada a través de la emisión de fotones observada. De estas manera, se han apreciado las distintas fases para estas sistemas caracterizadas por una emisión continua o nula de fotones. Así como la coexistencia de ambas fases, en la que las trayectorias van alternando entre periodos de emisión y no emisión.

Por otra parte, puesto que se busca reproducir los eventos que ocurren en las colas de las distribuciones de probabilidad, se ha utilizado la teoría de grandes desviaciones para estudiar las fluctuaciones dinámicas raras en sistemas cuánticos abiertos. Para hacer de estas fluctuaciones raras el comportamiento típico del sistema, se ha utilizado la transformada de Doob para no solo sesgar las probabilidades, sino para poder controlar estas de manera que se puedan desplazar hacia valores deseados. Esto nos permite reproducir las características de un sistema que no conocemos a través de otro sistema que sí que conocemos bien. Además, se ha estudiado la forma que tiene esta transformada de Doob sobre un sistema original dado, y cómo se generan nuevos términos que el sistema sufra dicha transformación

Finalmente, se han comparado los resultados obtenidos de aplicar la transformada cuántica de Doob con los resultados de tilar la probabilidad original hacia valores elegidos. Haciendo esto, se ha visto cómo para tiempos bajos ambos procesos son equivalentes y una discrepancia en el caso de tomar tiempos largos. De esta manera, cuando consideramos tiempos muy altos, no podemos tilar la probabilidad original puesto que no ocurren suficientes eventos en las colas de las distribuciones de probabilidad. Entonces, para estos casos la transformada de Doob se vuelve nuestra única herramienta para poder sesgar las probabilidades hacia valores esperados de manera correcta.

## Referencias

- [1] H. Touchette,  
*The large deviation approach to statistical mechanics*,  
School of Mathematical Science, Queen Mary University of London (2009).
- [2] J.P Garrahan,  
*First-order dynamical phase transition in models of glasses: an approach based on ensembles of histories*,  
J. Phys. A: Math. Theor. 42 (2009) 075007 (2009).
- [3] M. B. Plenio and P. L. Knight,  
*The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics*,  
Rev. Modern Phys. 70 101 (1998).
- [4] J.P Garrahan,  
*Aspects of non-equilibrium in classical and quantum systems: Slow relaxation and glasses, dynamical large deviations, quantum non-ergodicity, and open quantum dynamics*,  
Physica A 504 130-154 (2018)
- [5] F. Carollo, J.P Garrahan, I. Lesanovsky and C. Pérez-Espigares,  
*Making rare events typical in Markovian open quantum systems*,  
Phys. Rev. A 98, 010103(R) (2018).
- [6] G. Lindblad  
*On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups*,  
Commun. Math. Phys. 48, 119–130 (1976).
- [7] M. Rejón,  
*Study of non-equilibrium phenomena in Open Quantum Systems*,  
Facultad de Ciencias, Universidad de Granada (2021).
- [8] J.P Garrahan and I. Lesanovsky,  
*Thermodynamics of Quantum Jump Trajectories*,  
Phys. Rev. Let. PRL 104, 160601 (2010).
- [9] D. Manzano,  
*A short introduction to the Lindblad master equation*,  
AIP Advances 10, 025106 (2020).
- [10] K. Fujii,  
*Quantum Damped Harmonic Oscillator*,  
International College of Arts and Sciences, Yokohama, 236-0027 (2013).
- [11] M. Korniyik and A. Vukics,  
*The Monte Carlo wave-function method: a robust adaptive algorithm and a study in convergence*,  
Wigner Research Centre for Physics, H-1525 Budapest (2008).