

Modelo de Hopfield de red neuronal

Nils van Es Ostos

Mayo 2021

1 Introducción

Una red de Hopfield es una forma de red neuronal artificial recurrente inventada por John Hopfield en 1982. Las redes de Hopfield se usan como sistemas de Memoria asociativa con unidades binarias. Están diseñadas para converger a un mínimo local, pero la convergencia a uno de los patrones almacenados no está garantizada.

2 Método numérico

Consideramos un red bidimensional con $N \times N = N^2$ modos y condiciones de contorno periódicas donde cada nodo de la red (i, j) representa una neurona que está activa ($s_{i,j} = +1$) o inactiva ($s_{i,j} = 0$). En este caso el Hamiltoniano viene dado por

$$H(s) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_{i,j,k,l} s_{i,j} s_{k,l} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta_{i,j} s_{i,j} \quad (2.1)$$

donde la interacción entre la neurona (i, j) y (k, l) viene dada por la relación

$$\omega_{i,j,k,l} = \begin{cases} \frac{1}{N^2} \sum_{\mu=1}^P (\xi_{i,j}^{\mu} - a^{\mu})(\xi_{k,l}^{\mu} - a^{\mu}) & \text{si } (i, j) \neq (k, l), \\ 0 & \text{si } (i, j) = (k, l) \end{cases}$$

con

$$a^{\mu} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_{i,j}^{\mu} \quad (2.2)$$

Por otro lado, el término que corresponde al umbral de disparo viene dado por

$$\theta_{i,j} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \omega_{i,j,k,l} \quad (2.3)$$

Una vez que obtenemos tenemos la forma del Hamiltoniano, lo que queda es discutir el funcionamiento del algoritmo. Para ello, debemos seguir los siguientes pasos

- (1) Elegir un punto al azar, (n, m) de la red.
- (2) Evaluar $p = \min(1, \exp[-\Delta H/T])$ donde $\Delta H = H(s') - H(s)$. En este caso, s' es la configuración cuando elegimos al azar un espín de la configuración s y cambiamos su valor a $s_{n,m} = 1 - s_{n,m}$.
- (3) Generar un número aleatorio uniforme $\xi \in [0, 1]$. Si $\xi < p$ entonces cambiar el signo del espín (n, m) i.e $s(n, m) = 1 - s(n, m)$.
- (4) Ir a (1).

Al realizar todo este procedimiento, debería quedar un diagrama de flujo parecido al siguiente:

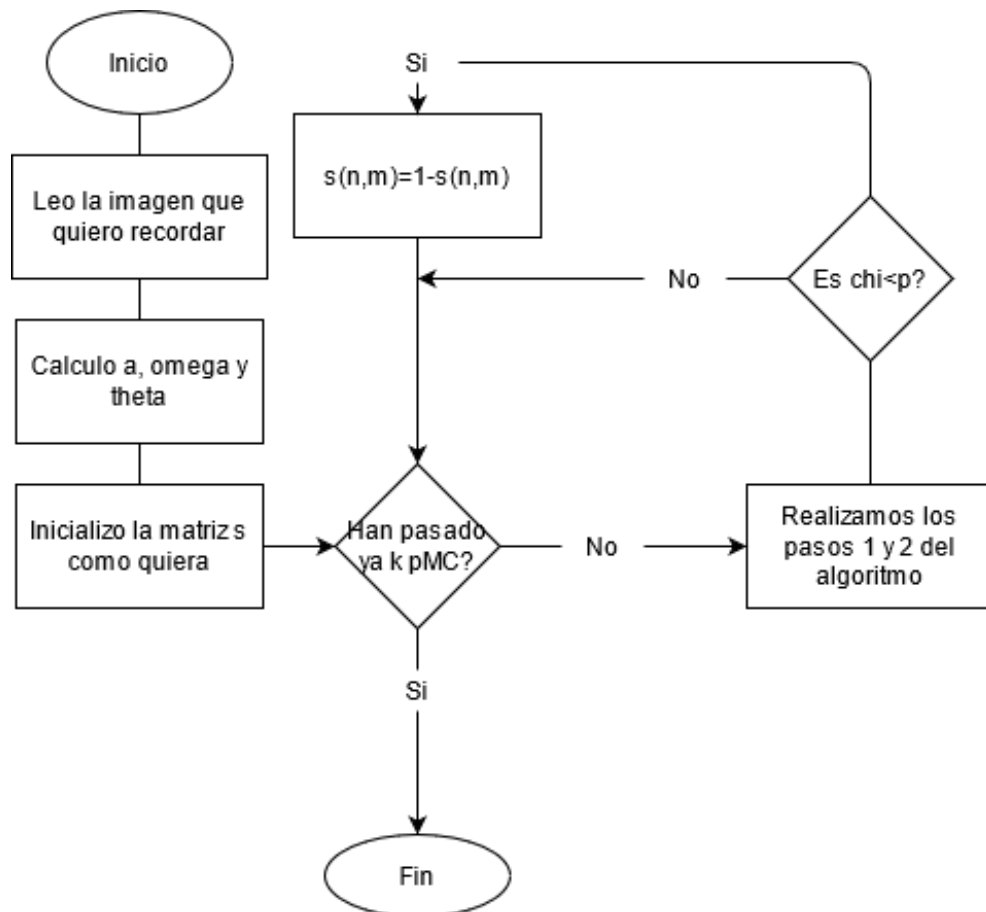


Figura 1: Diagrama de flujo del programa

3 Resultados

3.1 Un patrón

Vamos a estudiar como afecta actúa nuestra red para una imagen de $N = 120$.

Partimos de un estado inicial aleatorio, tras 20 pasos Montecarlo, obtenemos lo siguiente

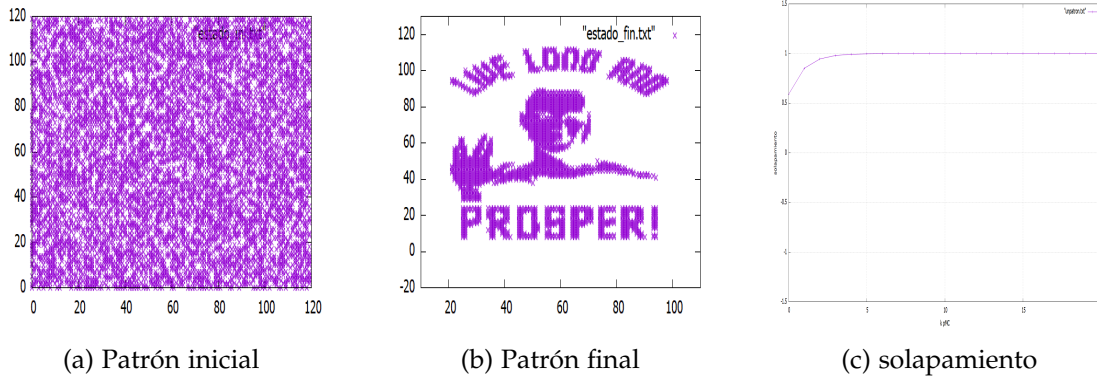


Figura 2: Estado inicial aleatorio para un patrón

Si en vez de partir de un estado inicial aleatorio, partiesemos de un estado inicial deformado, obtendríamos

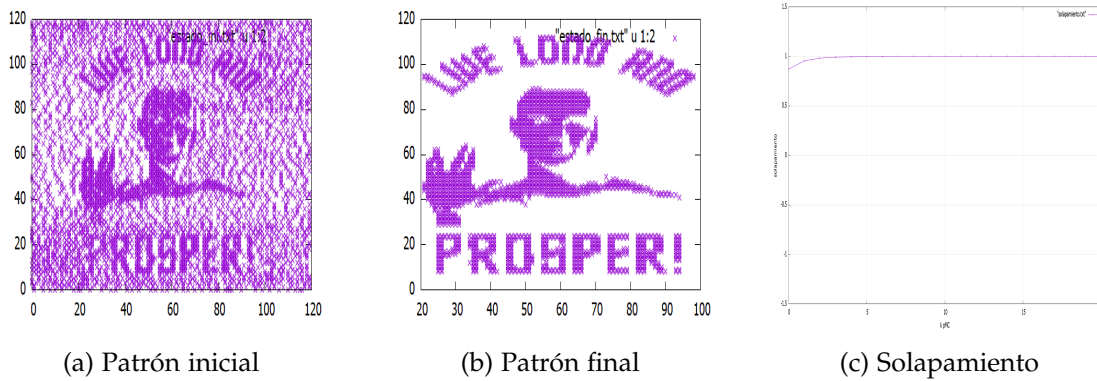


Figura 3: Estado inicial aleatorio para un patrón

Al comparar ambos casos, aleatorio y deformado, se observa a simple vista como en el deformado, el solapamiento para $k = 0$ es mayor. Esto es lógico y esperable, puesto al partir de un estado inicial muy parecido al final, requiere de menos cambios para alcanzar el esta final estable.

A modo de curiosidad se ha añadido un gif llamado "Hopfield" en el repositorio de la asignatura ("<https://github.com/Nilsvanesostos/Compu/tree/master/ising/voluntario>").

3.2 Dependencia de la temperatura sobre el solapamiento

Otra propiedad que se puede estudiar en nuestra red, es cómo cambia el solapamiento de un único patrón para diferentes temperaturas. Si partimos de un estado inicial completamente aleatorio, y escogemos un solo patrón por comodidad, obtenemos la siguiente gráfica

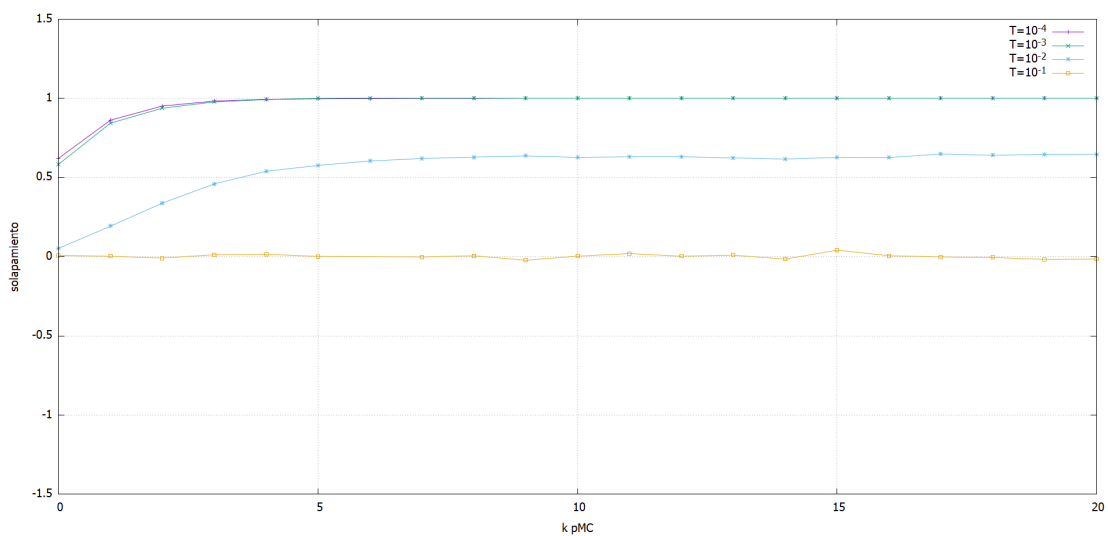


Figura 4: Solapamiento para distintas temperaturas

En esta gráfica, se puede ver con facilidad como la convergencia de la curva si ve alterada en el momento que tocamos la temperatura de la red. De esta forma, tenemos que para temperaturas muy bajas, como $T = 10^{-4} K$, el solapamiento se hace muy rápido. Mientras que para temperaturas del orden de $T = 0.1 K$ ni siquiera llega a formarse la imagen.

3.3 Tres patrones

En este caso, hay que tener constancia de que al añadir patrones con N 's muy grandes, el programa del modelo empieza a ralentizarse. Es por ello, que vamos a partir de 3 patrones con $N = 40$. Estos patrones son los siguientes

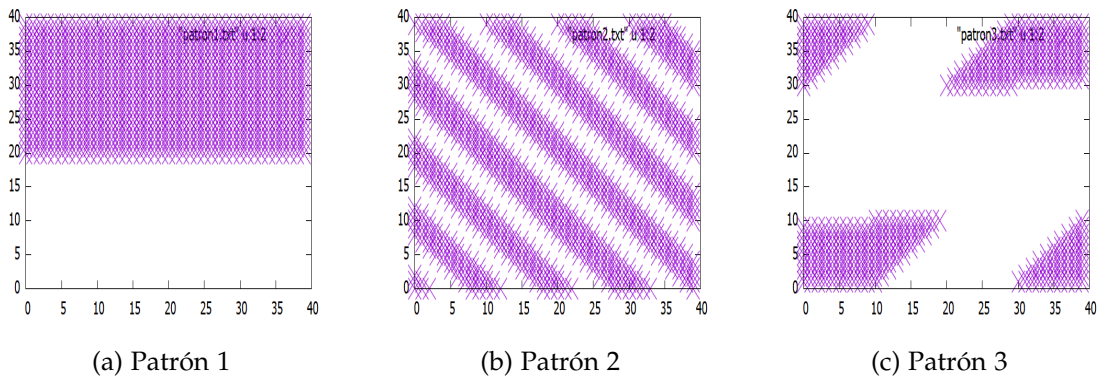


Figura 5: Patrones iniciales

Al evolucionar el sistema desde un estado inicial aleatorio, obtenemos

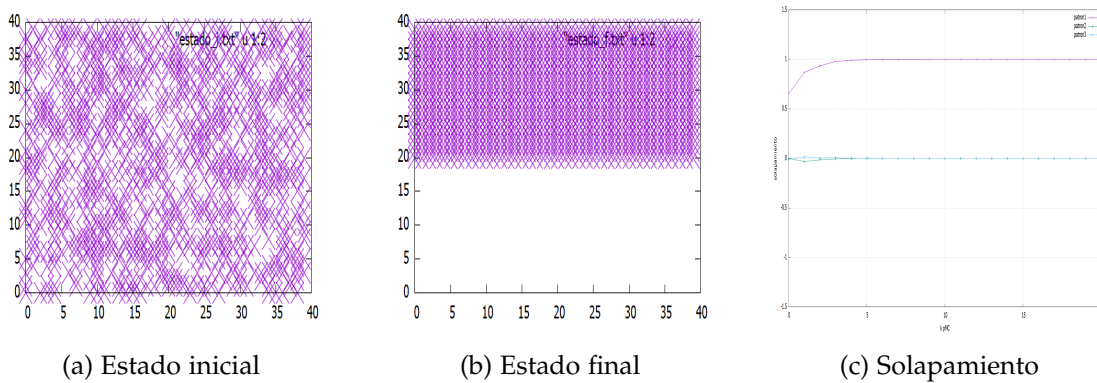


Figura 6: Estado inicial aleatorio para 3 patrones

Aquí, se puede observar como al partir de un estado inicial aleatorio, la red a tomado la forma de uno de los tres, en este caso del primer patrón.

Sin embargo, si en vez de partir de un estado inicial aleatorio, partiesemos de un estado inicial deformado, obtendríamos lo siguiente

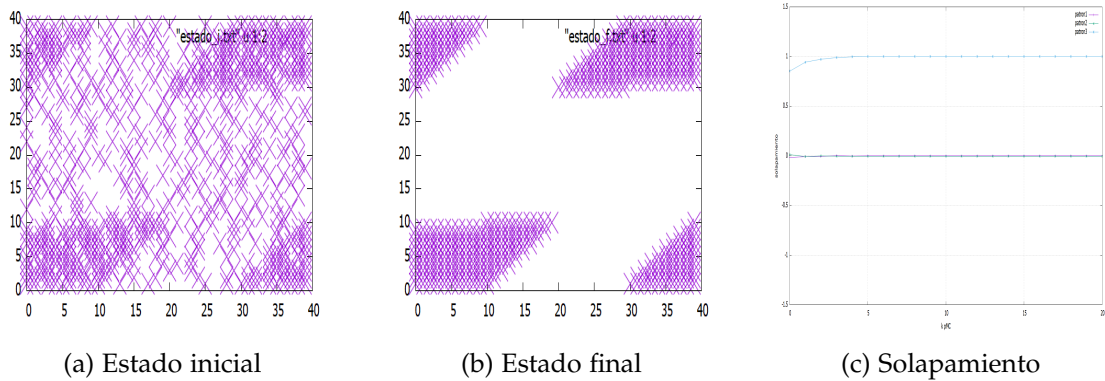


Figura 7: Estado inicial aleatorio para 3 patrones

Como podemos ver, se observa exactamente lo mismo que en el caso deformado para una imagen.

Finalmente, para completar, podemos discutir sobre los patrones utilizados. En este caso, hemos utilizado patrones muy diferentes entre ellos, de manera que el algoritmo tras algunos pasos Montecarlo, elegía un patrón, y lo asemejaba. Sin embargo, se puede discutir también que pasaría al introducir patrones parecidos entre sí. Por ello, vamos a utilizar números, por ejemplo, los siguientes:

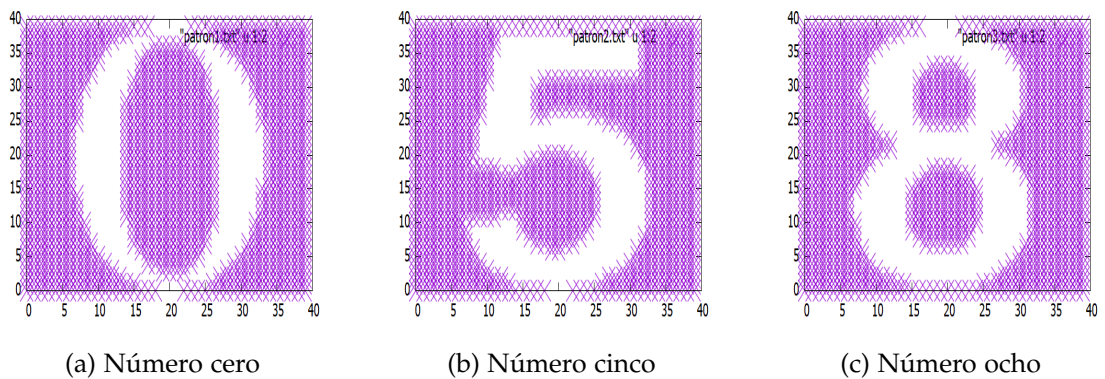


Figura 8: Patrones de los números 0,5 y 8

Al partir de un patron inicial aleatorio, obtenemos

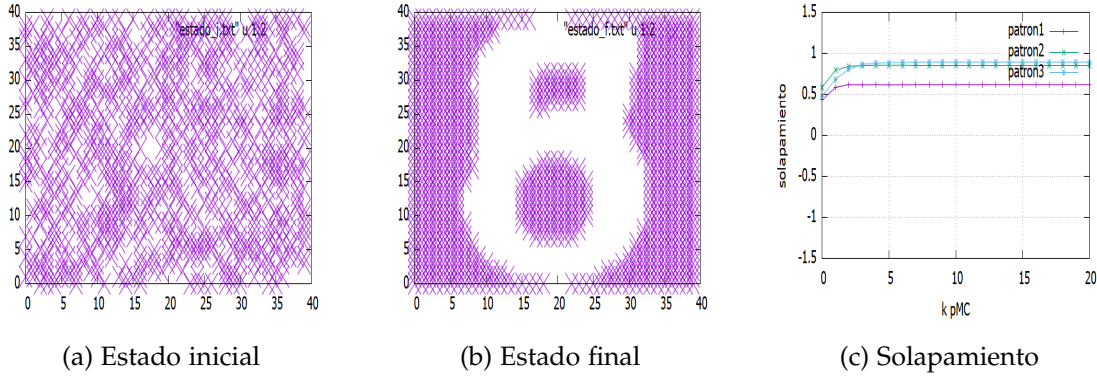


Figura 9: Estado inicial aleatorio para los números 0, 5 y 8

En este caso, podemos ver que el algoritmo no se asemeja a ningún patrón en especial, sino que muestra una superposición de los tres. Esto se debe a lo comentado anteriormente, al ser 3 patrones muy similares, el algoritmo recuerda los 3 patrones al mismo tiempo y forma dicha imagen.

3.4 Recuperación de la memoria en función del número de patrones

Finalmente, al estudiar una red de $N = 120$ con $T = 10^{-4} K$ se ha podido observar que se recuerdan un total de dos patrones, obteniendo así $\alpha = P_c/N = 1.39 \cdot 10^{-4}$. Además, no se observa variación alguna al variar la temperatura.

Sin embargo, queda recalcar que para estos valores tan bajos de N , no se puede hacer una estadística demasiado fuerte. Es por ello, que haría falta estudiar redes mucho más grandes, lo cual requiere de una mayor potencia de cálculo.

4 Conclusiones

A lo largo de este estudio, hemos podido observar la capacidad de una red de recordar patrones distintos al mismo tiempo y la capacidad de solapamiento que puede llegar a tener esta dependiendo del estado inicial dado. Sin embargo, si hay algo que se debe remarcar en este apartado, es la poca capacidad de recuerdo que estas redes tienen, así como la dificultad de tener una buena estadística sobre esto. Aunque también se puede mencionar el carácter superficial de este estudio. Dicho esto, se podría hacer un estudio mucho más exhaustivo acerca de la recuperación de la memoria en función del número de patrones, pero esto se quedará como una incógnita para un posible estudio en el futuro, pues esto no es pedido en este estudio.

Referencias

- [1] G. Galán-Marín^T and J. Muñoz-Pérez
Design and Analysis of Maximum Hopfield Networks