LEBESGUE OLCUMU VE INTEGRAL KURAMI

Dicle Üniversitesi - Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Uzaktan Eğitim

Mayıs 2021

Sınırsız Kümelerde Riemann İntegrali ile Lebesgue İntegralini Karşılaştırma

Lebesgue integralinin aksine, bir sınırsız E kümesi üzerinde $|f|$ fonksiyonunun has olmayan Riemann integrali yok iken f fonksiyonunun E kümesi üzerinde has olmayan Riemann integrali var olabilir.

Sınırsız Kümelerde Riemann İntegrali ile Lebesgue İntegralini Karşılaştırma

Lebesgue integralinin aksine, bir sınırsız E kümesi üzerinde $|f|$ fonksiyonunun has olmayan Riemann integrali yok iken f fonksiyonunun E kümesi üzerinde has olmayan Riemann integrali var olabilir.Bu yüzden Lebesgue integral yok iken has olmayan Riemann integrali var olabilir.
Örneğin;

Sınırsız Kümelerde Riemann İntegrali ile Lebesgue İntegralini Karşılaştırma

Lebesgue integralinin aksine, bir sınırsız E kümesi üzerinde $|f|$ fonksiyonunun has olmayan Riemann integrali yok iken f fonksiyonunun E kümesi üzerinde has olmayan Riemann integrali var olabilir.Bu yüzden Lebesgue integral yok iken has olmayan Riemann integrali var olabilir. Örneğin;

Örnek

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ integralinin has olmayan Riemann integral olarak var olduğunu fakat Lebesgue integral olarak var olmadığını gösteriniz.

Çözüm

Önce $(\Re)\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$ varlığını gösterelim. $(\Re)\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ integrali inceleyelim. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ limit değerini integrandın $x=0$ noktasındaki değeri olarak kabul edersek $(\Re)\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ integraline $[0,1]$ aralığında sürekli fonksiyonun integrali gibi bakabiliriz. Yani $(\Re)\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ integrali vardır. $b\in(1,\infty)$ için

$$\begin{aligned}(\Re)\int\limits_1^b \frac{\sin x}{x}dx &= \left[\frac{-\cos x}{x}\right]_1^b + \int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx \\ &= \cos 1 - \frac{\cos b}{b} + \int\limits_1^b \frac{\cos x}{x^2}dx\end{aligned}$$

ve

$$\left| \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \right| \leq \int_1^b \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{b}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} (\Re) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin x}{x} dx \\ &= \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + \cos 1 + \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos x}{x^2} dx \\ &\leq \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx + 1 + \cos 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu $(\Re) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integralinin varlığını gösterir.

Şimdi $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ integralinin varlığını Lebesgue anlamında araştıralım. Lebesgue integrallenebilir olması için mutlak integrallenebilir olması gerekir. Yani $\int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ integralinin var olması gerekir. Fakat bu integral ıraksaktır. Bunun için $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ integralinin ıraksak olduğunu göstermek yeterlidir. $|\sin x| \geq \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ eşitsizliği göz önüne alınırsa

$$\int_1^b \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \int_1^b \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^b \frac{\cos 2x}{x} dx$$

yazılabilir.

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{dx}{x} = \lim_{b\to\infty} \left[\ln b - \ln 1\right] = \infty$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\cos 2x}{x} dx &= \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \left[\frac{\sin x}{x} \right|_1^b - \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin 2x}{x^2} \\
&= -\frac{\sin 2}{2} - \frac{1}{2} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\sin 2x}{x^2} dx \\
&< \infty
\end{aligned}$$

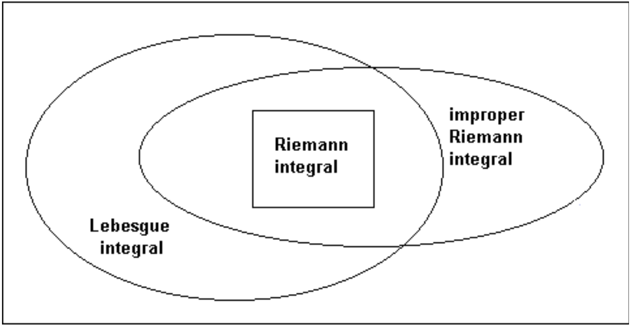
olduğundan $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} dx$ integrali ıraksaktır.

Teorem

$|f|$ fonksiyonu E kümesi üzerinde ölçülebilir ve Riemann integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonu E kümesi üzerinde hem Riemann hem de Lebesgue integrallenebilirdir ve bu iki integral birbirine eşittir.

Teorem

$|f|$ fonksiyonu E kümesi üzerinde ölçülebilir ve Riemann integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonu E kümesi üzerinde hem Riemann hem de Lebesgue integrallenebilirdir ve bu iki integral birbirine eşittir.



Örnek

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integralinin hem Lebesgue integrali olarak hem de has olmayan Riemann integrali olarak var olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integralinin hem Lebesgue integrali olarak hem de has olmayan Riemann integrali olarak var olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}$ fonksiyonu $[0, \infty)$ üzerinde ölçülebilir fonksiyondur.
$\int\limits_0^\infty \left|\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integralinin has olmayan Riemann integralini araştıralım. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ limit değerini integrandın $x = 0$ noktasındaki değeri olarak kabul edersek $(\Re) \int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$ integraline $[0, 1]$ aralığında sürekli fonksiyonun integrali gibi bakabiliriz.

Yani $(\Re)\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ integrali vardır. $\sin^2 x \leq 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}\int\limits_1^\infty \left|\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| dx &\leq \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-1}{x}\right|_1^b\\ &= 1\end{aligned}$$

elde edilir. Demek ki $\int\limits_0^\infty \left|\frac{\sin^2 x}{x^2}\right| dx = \int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$ integrali yakınsaktır. Bu yüzden hem Lebesgue integrali olarak hem de has olmayan Riemann integrali olarak integral mevcuttur.

Örnek

$f:[0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ olarak tanımlansın.

$E=[0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integralini ve Lebesgue integralini araştırınız.

Örnek

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ olarak tanımlansın.
$E = [0, \infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integralini ve Lebesgue integralini araştırınız.

Çözüm

$\forall b \in (0, \infty)$ için $(\Re) \int\limits_0^b f(x)dx$ integrali mevcut olmadığından $E = [0, \infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integrali yoktur.

Çözüm

$\forall b \in (0, \infty)$ için f fonksiyonu $(0, b)$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x)dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[\int_{(0,b)\cap\mathbb{Q}} 1dx + \int_{(0,b)\cap I} 0dx \right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan f fonksiyonu E kümesi üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir. f fonksiyonunun E kümesi üzerinde Lebesgue integrali mevcut fakat has olmayan Riemann integrali mevcut değildir.

Örnek

$f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ olarak tanımlansın.
$E = [0,\infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integralini ve Lebesgue integralini araştırınız.

Örnek

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ olarak tanımlansın.
$E = [0, \infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integralini ve Lebesgue integralini araştırınız.

Çözüm

$\forall b \in (0, \infty)$ için $(\Re) \int\limits_0^b f(x)dx$ integrali mevcut olmadığından $E = [0, \infty)$ üzerinde f fonksiyonunun has olmayan Riemann integrali yoktur.

Çözüm

$\forall b \in (0, \infty)$ için f fonksiyonu $(0, b)$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir. Fakat

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(x)dx &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx \\ &= \lim_{b\to\infty} \left[\int_{(0,b)\cap\mathbb{Q}} 0dx + \int_{(0,b)\cap I} 1dx \right] \\ &= \infty \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu E kümesi üzerinde Lebesgue integrallenebilir değildir. f fonksiyonunun E kümesi üzerinde hem Lebesgue integrali hem de has olmayan Riemann integrali mevcut değildir.

Alıştırmalar

1. $E = [0, \infty)$ olsun. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n} & ; \quad n-1 \leq x < n, \;\; n = 1, 2, .. \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$
şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun E üzerinde has olmayan Riemann integralinin var olduğunu fakat Lebesgue integralinin var olmadığını gösteriniz.

Alıştırmalar

1. $E = [0, \infty)$ olsun. $f : E \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}}{n} & ; \quad n-1 \leq x < n, \; n = 1, 2, .. \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$
şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun E üzerinde has olmayan Riemann integralinin var olduğunu fakat Lebesgue integralinin var olmadığını gösteriniz.

2. $E = [0, \infty)$ olsun. $f : E \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n}}{(n+1)^2} & ; \quad n\pi < x < (n+1)\pi, \; n = 0, 1, 2, .. \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$
şeklinde tanımlansın. f fonksiyonunun E üzerinde Lebesgue integralinin var olduğunu gösteriniz.

Alıştırmalar

3. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında verilen E kümesi üzerinde integrallenebilirliğini araştırınız.

   (a) $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^{\frac{3}{2}}}, \ E = (0, \infty)$

Alıştırmalar

3. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında verilen E kümesi üzerinde integrallenebilirliğini araştırınız.

   (a) $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^{\frac{3}{2}}}, \; E = (0, \infty)$

   (b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}, \; E = (0, \infty)\,; \; 0 < \alpha < 1$

Alıştırmalar

3. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında verilen E kümesi üzerinde integrallenebilirliğini araştırınız.

   (a) $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^{\frac{3}{2}}}$, $E = (0, \infty)$

   (b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}$, $E = (0, \infty)$; $0 < \alpha < 1$

   (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}$, $E = (1, \infty)$; $\alpha > 0$

Alıştırmalar

3. Aşağıda verilen fonksiyonların yanlarında verilen E kümesi üzerinde integrallenebilirliğini araştırınız.

   (a) $f(x) = \frac{\tan^{-1} x}{x^{\frac{3}{2}}}$, $E = (0, \infty)$

   (b) $f(x) = \frac{\sin x}{x^{1+\alpha}}$, $E = (0, \infty)$; $0 < \alpha < 1$

   (c) $f(x) = \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}}$, $E = (1, \infty)$; $\alpha > 0$

   (d) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^{2+\alpha}}$, $E = (0, \infty)$; $0 < \alpha < 1$