# LEBESGUE OLCUMU
# VE
# INTEGRAL KURAMI

**Dicle Üniversitesi - Fen Fakültesi**
**Matematik Bölümü**

Uzaktan Eğitim

26 - 30 Nisan 2021

# Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminin bir genelleştirmesidir.

# Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminin bir genelleştirmesidir.

**Teorem**

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $(f_n)$ fonksiyon dizisi $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.*

*(a) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*

# Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminin bir genelleştirmesidir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $(f_n)$ fonksiyon dizisi $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.*

*(a) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*

*(b) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$*

# Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminin bir genelleştirmesidir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $(f_n)$ fonksiyon dizisi $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.*

*(a) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*

*(b) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$*

*(c) $g \in \mathcal{L}(E)$*

# Lebesgue Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoreminin bir genelleştirmesidir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $(f_n)$ fonksiyon dizisi $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun.*

*(a) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*

*(b) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$*

*(c) $g \in \mathcal{L}(E)$*

*ise bu durumda $f \in \mathcal{L}(E)$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathcal{L}(E)$ dir ve*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

*eşitliği geçerlidir.*

## İspat:

$(f_n)$ fonksiyon dizisi $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olduğundan $f$ fonksiyonu da ölçülebilirdir. $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olduğundan $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $|f(x)| \leq g(x)$ dir. $g \in \mathcal{L}(E)$ olduğundan $f \in \mathcal{L}(E)$ sonucu elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliğini göstermek için

$$\left| \int_E [f(x) - f_n(x)]\, dx \right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx \to 0$$

olduğunu gösterelim.

# İspatın Devamı:

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in E : |f(x) - f_1(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon, ...\} \\
E_2 &= \{x \in E : |f(x) - f_1(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon, ...\} \\
E_3 &= \{x \in E : |f(x) - f_2(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_3(x)| < \varepsilon, ...\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E_n &= \{x \in E : |f(x) - f_{n-1}(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, ...\} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ yazılabilir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{M}$ ve $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ dir. $S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ ve $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$ olmak üzere

$$\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\, dx = \int\limits_{S_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int\limits_{R_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx$$

yazılabilir.

## İspatın Devamı:

$S_n$ üzerinde $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ dur. $|f_n(x)| \leq g(x)$ ve $|f(x)| \leq g(x)$ olduğundan $R_n$ üzerinde

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2g(x)$$

yazılabilir. Böylece $\int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \varepsilon m(S_n) + 2\int\limits_{R_n} g(x)dx$ eşitsizliği elde edilir. $g \in \mathcal{L}(E)$ olduğundan $\int\limits_E g(x)dx < \infty$ dur. Bu yüzden $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{R_n} g(x)dx = 0$ dır. $\lim\limits_{n\to\infty} m(S_n) = m(E)$ olduğundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \varepsilon m(E)$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ iken $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_E |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0$ elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

## Örnek

$E = [0,1]$ olmak üzere $E$ kümesi üzerinde $(f_n)$ fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} n & ; \quad \frac{1}{n^3} \leq x \leq \frac{8}{n^3} \\ 0 & ; \quad 0 \leq x < \frac{1}{n^3} \text{ ya da } \frac{8}{n^3} < x \leq 1 \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0$$

olduğunu gösteriniz.

## Çözüm

$(f_n)$ fonksiyon dizisinin her bir terimi $E$ üzerinde parçalı sürekli olduğundan $(f_n)$ dizisi $E$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon dizisidir.

## Çözüm

$(f_n)$ fonksiyon dizisinin her bir terimi $E$ üzerinde parçalı sürekli olduğundan $(f_n)$ dizisi $E$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon dizisidir.

$(a)$ $\forall x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,

## Çözüm

$(f_n)$ fonksiyon dizisinin her bir terimi $E$ üzerinde parçalı sürekli olduğundan $(f_n)$ dizisi $E$ üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon dizisidir.
$(a)$ $\forall x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$,
$(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $f_n(0) = 0$ olduğu açıktır. $x \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{n^3} \leq x \leq \frac{8}{n^3} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \leq n \leq \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

iken $f_n(x) = n$ olduğundan $|f_n(x)| = n \leq \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ elde edilir. Böylece

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ eşitsizliği elde edilir.

$(c)$ $g \in \mathcal{L}(E)$ olduğunu göstermeliyiz. $g$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde negatif olmayan bir sınırsız fonksiyondur ve $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. de sürekli olduğundan ölçülebilirdir.

$$[g(x)]_N = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} & ; \quad \frac{8}{N^3} \leq x \leq 1 \\ N & ; \quad 0 < x < \frac{8}{N^3} \end{cases}$$

olmak üzere $\int\limits_0^1 [g(x)]_N \, dx = \frac{8}{N^2} + \int\limits_{\frac{8}{N^3}}^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{8}{N^2} + (\Re) \int\limits_{\frac{8}{N^3}}^1 \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx =$

$\frac{8}{N^2} + 3x^{\frac{2}{3}} \Big|_{\frac{8}{N^3}}^1 = 3 - \frac{4}{N^2}$ olduğundan

$$\int\limits_0^1 g(x) dx = \lim_{N \to \infty} \int\limits_0^1 [g(x)]_N \, dx = \lim_{N \to \infty} \left(3 - \frac{4}{N^2}\right) = 3 < \infty$$

yani $g \in \mathcal{L}(E)$ dir. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden istenen sonuç elde edilir.

## Örnek

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^3x^3} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

## Örnek

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^3x^3}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

## Çözüm

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^3x^3}$ olarak tanımlayalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $(f_n)$ dizisi ölçülebilir fonksiyonların bir dizisidir.

## Örnek

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^3x^3} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

## Çözüm

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \frac{n^{\frac{3}{2}} x}{1+n^3x^3}$ olarak tanımlayalım. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n$ fonksiyonları sürekli olduğundan $(f_n)$ dizisi ölçülebilir fonksiyonların bir dizisidir.

$(a)$ $\forall x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = f(x)$ dir.

$(b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ olacak şekilde bir $g$ fonksiyonu bulmaya çalışalım. $x \in (0,1]$ için

$$t \in \mathbb{R} \text{ için } \ |f_t(x)| = \frac{t^{\frac{3}{2}} x}{1 + t^3 x^3}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = \frac{\frac{3}{2}\left(\sqrt{t}x - t^{\frac{7}{3}} x^4\right)}{\left(1 + t^3 x^3\right)^2}$$

olduğundan $t = 0$ ve $t = \frac{1}{x}$ kritik noktalardır. $f_0(x) = 0$ ve $f_{\frac{1}{x}}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & ; \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$

eşitsizliği sağlanır.

$(c)$ $g$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde negatif olmayan bir sınırsız fonksiyondur ve $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. de sürekli olduğundan ölçülebilirdir. Ayrıca

$$\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{dx}{2\sqrt{x}} < \infty$$

olduğundan $g \in \mathcal{L}(E)$ dir. Böylece Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n^{\frac{3}{2}}x}{1+n^3x^3}dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 0dx = 0$$

elde edilir.

# Seriler için Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi seriler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

# Seriler için Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi seriler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $E$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ olmak üzere*

*(a) $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x); \quad x \in E$*

# Seriler için Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi seriler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $E$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ olmak üzere*

*$(a)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x); \quad x \in E$*

*$(b)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $|s_n(x)| \leq g(x)$*

# Seriler için Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi seriler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $E$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ olmak üzere*

*$(a)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x); \qquad x \in E$*

*$(b)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $|s_n(x)| \leq g(x)$*

*$(c)$ $g \in \mathcal{L}(E)$*

# Seriler için Baskın Yakınsaklık Teoremi

Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi seriler cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $E$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ olmak üzere*

*$(a)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x); \quad x \in E$*

*$(b)$ $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $|s_n(x)| \leq g(x)$*

*$(c)$ $g \in \mathcal{L}(E)$*

*ise bu durumda*

$$\int_E \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dx$$

*eşitliği geçerlidir.*

## Teorem

*$E$ ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi $E$ üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $|s_n(x)| = \left|\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)\right| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı var ve $g$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon ise bu durumda*

$$\int_E \left( g(x) \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E g(x) f_k(x) dx$$

*eşitliği geçerlidir.*

## Lemma

$(f_n)$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $f_n \to f$ olsun. Bu durumda

$$\int_E f(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

## Lemma

$(f_n)$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olmak üzere $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $f_n \to f$ olsun. Bu durumda

$$\int_E f(x)dx \leq \varliminf_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

## İspat:

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x) & ; \quad f(x) \leq N \text{ o.ş. } x \in E \text{ için} \\ N & ; \quad f(x) > N \text{ o.ş. } x \in E \text{ için} \end{cases}$$

ve

$$[f_n(x)]_N = \begin{cases} f_n(x) & ; \quad f_n(x) \leq N \text{ o.ş. } x \in E \text{ için} \\ N & ; \quad f_n(x) > N \text{ o.ş. } x \in E \text{ için} \end{cases}$$

olarak tanımlayalım.

## İspatın Devamı:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty} [f_n(x)]_N = [f(x)]_N$ elde edilir. Lebesgue sınırlı yakınsaklık teoremi gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E [f_n(x)]_N \, dx = \int\limits_E [f(x)]_N \, dx$$

olur. $[f_n(x)]_N \leq f_n(x)$ olduğundan

$$\int\limits_E [f_n(x)]_N \, dx \leq \int\limits_E f_n(x) dx$$

dir.

## İspatın Devamı:

Her iki tarafın alt limiti alınırsa

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E [f_n(x)]_N \, dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx$$

elde edilir. Sol tarafın limiti var ise

$$\int_E [f_n(x)]_N \, dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx$$

elde ederiz. $N \to \infty$ iken limit alınırsa

$$\int_E f(x) dx \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x) dx$$

eşitsizliği elde edilir.

**NOT :** Fatou's yardımcı teoreminde $f_n$ lerin negatif olmama koşulu kaldırılamaz.

**NOT :** Fatou's yardımcı teoreminde $f_n$ lerin negatif olmama koşulu kaldırılamaz.

## Örnek

$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} -n & ; \quad \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{2}{n+1} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ olsun. Bu durumda h.h.h.y. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ dır. Dikkat edilirse

$$0 = \int_E f(x)dx \nleq \underline{\lim}_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = -1.$$

# Monoton Yakınsaklık Teoremi

**Teorem**

*$(f_n)$ fonksiyon dizisi bir $E$ kümesi üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir artan dizisi ve $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $f_n \longrightarrow f$ olsun. Bu durumda*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

*eşitliği her iki taraftan birinin sonlu olması durumunda geçerlidir.*

# Monoton Yakınsaklık Teoremi

**Teorem**

*$(f_n)$ fonksiyon dizisi bir $E$ kümesi üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir artan dizisi ve $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. $f_n \longrightarrow f$ olsun. Bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

*eşitliği her iki taraftan birinin sonlu olması durumunda geçerlidir.*

**NOT :** Monoton yakınsaklık teoremindeki dizinin artan olma koşulu kaldırılamaz.

## İspat:

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx < \infty$ olduğunu kabul edelim. Fatou's yardımcı teoreminden

$$\int\limits_E f(x)dx \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx \tag{1}$$

elde ederiz. Demek ki $\int\limits_E f(x)dx < \infty$ dur. $f_n(x) \leq f(x)$ olduğundan

$$\int\limits_E f_n(x)dx \leq \int\limits_E f(x)dx$$

yazabiliriz. Her iki tarafın limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx \leq \int\limits_E f(x)dx \tag{2}$$

elde ederiz. (1) ve (2) den istenen sonuç elde edilir.

## İspatın Devamı:

$\int_E f(x)dx$ integrali sonlu ise bu durumda $f_n(x) \leq f(x)$ olduğundan
Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

## İspatın Devamı:

$\int_E f(x)dx$ integrali sonlu ise bu durumda $f_n(x) \leq f(x)$ olduğundan
Lebesgue baskın yakınsaklık teoremi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

## Sonuç

*$(f_k)$ $E$ kümesi üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda*

$$\int_E \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x)dx$$

*eşitliği her iki taraftan birinin sonlu olması durumunda geçerlidir.*

## Örnek

Monoton yakınsaklık teoreminden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) dx$$

ifadesini hesaplayınız.

## Örnek

Monoton yakınsaklık teoreminden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) dx$$

ifadesini hesaplayınız.

## Çözüm

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ olsun. Ölçülebilir fonksiyonların sürekli fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, $(f_n)$ dizisi $[0,1]$ üzerinde negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların bir dizisidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve sabit bir $x_0 \in [0,1]$ için

$$0 < f_n(x_0) \leq f_{n+1}(x_0)$$

olduğundan $(f_n)$ dizisi $[0,1]$ üzerinde artandır.

## Çözüm

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = x = f(x)$$

ve

$$\int_0^1 x dx = (\Re)\int_0^1 x dx = \frac{1}{2} < \infty$$

olduğundan Monoton yakınsaklık teoremi gereği

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) dx = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

1. $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & ; \quad \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ olsun. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden yararlanarak,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

olduğunu gösteriniz.

# Alıştırmalar

1. $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} & ; \quad \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ olsun. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden yararlanarak,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^2 f_n(x)dx = 0 = \int_0^2 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

olduğunu gösteriniz.

2. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{n \sin x}{1+n^2\sqrt{x}} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

# Alıştırmalar

3. $E = (0,1)$ olmak üzere $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n & ; \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \text{ ve } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

ifadelerini hesaplayınız. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminin neden geçerli olmadığını açıklayınız.

# Alıştırmalar

3. $E = (0,1)$ olmak üzere $f_n : E \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \begin{cases} n & ; \quad 0 < x < \frac{1}{n} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \text{ ve } \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

ifadelerini hesaplayınız. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminin neden geçerli olmadığını açıklayınız.

4. Lebesgue baskın yakınsaklık teoreminden yararlanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{nx\log x}{1+n^2x^2}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

# Alıştırmalar

5. Monoton yakınsaklık teoreminden yararlanarak,

$$\int_0^1 \left(\frac{\ln x}{1-x}\right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

olduğunu gösteriniz. (Yol Gösterme: $(1-x)^{-2}$ ifadesini seriye açınız ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ eşitliğini kullanınız.)

# Alıştırmalar

5. Monoton yakınsaklık teoreminden yararlanarak,

$$\int_0^1 \left( \frac{\ln x}{1-x} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{3}$$

olduğunu gösteriniz. (Yol Gösterme: $(1-x)^{-2}$ ifadesini seriye açınız ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$ eşitliğini kullanınız.)

6. $p > -1$ olmak üzere

$$\int_0^1 \frac{x^p \ln x}{1-x} dx = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(p+n)^2}$$

olduğunu gösteriniz.