LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Peter Philip,
Paula Reichert, Lukas Emmert

Sommersemester 2024

Analysis 2 (Statistik)
Hausaufgabenblatt 2

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{K}^n$ mit $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$. Zeigen Sie, dass die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ genau dann eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}^n$ ist, wenn jede Koordinatenfolge $(x_j^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $j = 1, 2, ..., n$, eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionen

$||x||_1 := |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|,$

$||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$

zwei Normen auf $\mathbb{R}^n$ definieren.

(b) Sei jetzt $n = 2$. Zeichnen Sie die folgenden Mengen:

(i) $B^1(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, ||x||_1 < 1\}$,

(ii) $B^\infty(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^2 |\, ||x||_\infty < 1\}$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es sei $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit $x^k = (x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

(b) Wir nehmen an, dass

$$|x_j^k - x_j^{k+1}| \leq (j + 1)^{-k}$$

für alle $j \in \{1, 2, ..., n\}$ und alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Hinweis: Eine Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Abgabe bis Montag, 06.05.24, 12 Uhr auf Moodle als ein pdf-Dokument.