LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Dicle Üniversitesi - Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Uzaktan Eğitim

26 - 30 Nisan 2021

Sınırsız Fonksiyonlar için Lebesgue İntegrali

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir sınırsız bir fonksiyon olsun.

Sınırsız Fonksiyonlar için Lebesgue İntegrali

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir sınırsız bir fonksiyon olsun.
(**a**) $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ olsun. $N \in \mathbb{N}$ için

$$[f(x)]_N = \begin{cases} f(x) & ; \quad f(x) \leq N \\ N & ; \quad f(x) > N \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall N \in \mathbb{N}$ için $[f(x)]_N$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilirdir, bu yüzden Lebesgue integrallenebilirdir. Eğer

$$\lim_{N \to \infty} \left(\int_a^b [f(x)]_N \, dx \right) < \infty$$

ise f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir denir ve f fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \to \infty} \left(\int_a^b [f(x)]_N \, dx \right)$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer limit sonsuz ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir değildir ya da integral mevcut değildir denir.

Eğer limit sonsuz ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir değildir ya da integral mevcut değildir denir.
(**b**) $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ ise (*a*) seçeneğindeki tanımdan yararlanarak,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\, dx$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer limit sonsuz ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir değildir ya da integral mevcut değildir denir.
(**b**) $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq 0$ ise (a) seçeneğindeki tanımdan yararlanarak,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|\, dx$$

şeklinde tanımlanır.
(**c**) f fonksiyonu hem pozitif hem de negatif değerler alan ölçülebilir sınırsız bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & ; \quad f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x) & ; \quad f(x) < 0 \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. f^+ ve f^- fonksiyonları negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlardır ve $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ dir.

Eğer f^+ ve f^- fonksiyonlarının her ikisi $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir denir ve ve f fonksiyonunun Lebesgue integrali

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.
$[a, b]$ üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{L}[a, b]$ ile gösterilir, yani

$$\mathcal{L}[a, b] := \{f : f \text{ fonksiyonu } [a, b] \text{ üzerinde Lebesgue integrallenebilir}\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ olsun. $f \in \mathcal{L}[0,1]$ olup-olmadığını araştırınız.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; \quad x\neq 0\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$ olsun. $f\in\mathcal{L}[0,1]$ olup-olmadığını araştırınız.

Çözüm

f fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir sınırsız bir fonksiyondur. $N\in\mathbb{N}$ için

$$[f(x)]_N=\begin{cases}N & ; \quad 0<x\leq\frac{1}{N}\\ \frac{1}{x} & ; \quad \frac{1}{N}<x<1\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\int\limits_0^1 [f(x)]_N\,dx=\int\limits_0^{\frac{1}{N}} Ndx+\int\limits_{\frac{1}{N}}^1 \frac{dx}{x}=Nm\left(\left[0,\frac{1}{N}\right]\right)+(\Re)\int\limits_{\frac{1}{N}}^1 \frac{dx}{x}=1+\ln N$$

olduğundan $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\int\limits_0^1 [f(x)]_N \, dx\right) = \lim\limits_{N\to\infty}(1+\ln N) = \infty$ ve böylece $f \notin \mathcal{L}[0,1]$ olduğu elde edilir.

olduğundan $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\int\limits_0^1 [f(x)]_N\,dx\right) = \lim\limits_{N\to\infty}(1+\ln N) = \infty$ ve böylece $f \notin \mathcal{L}[0,1]$ olduğu elde edilir.

Örnek

$g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ olsun. $g \in \mathcal{L}[0,1]$ olup-olmadığını araştırınız.

olduğundan $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\int\limits_0^1 [f(x)]_N\,dx\right) = \lim\limits_{N\to\infty}(1+\ln N) = \infty$ ve böylece $f \notin \mathcal{L}[0,1]$ olduğu elde edilir.

Örnek

$g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad x \neq 0 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$ olsun. $g \in \mathcal{L}[0,1]$ olup-olmadığını araştırınız.

Çözüm

g fonksiyonu negatif olmayan ölçülebilir sınırsız bir fonksiyondur. $N \in \mathbb{N}$ için

$$[g(x)]_N = \begin{cases} N & ; \quad 0 < x \leq \frac{1}{N^2} \\ \frac{1}{\sqrt{x}} & ; \quad \frac{1}{N^2} < x < 1 \\ 0 & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\int_0^1 [g(x)]_N \, dx = \int_0^{\frac{1}{N^2}} N dx + \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = Nm\left(\left[0, \frac{1}{N^2}\right]\right) + (\Re) \int_{\frac{1}{N^2}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 - \frac{1}{N}$$

olduğundan $\lim\limits_{N\to\infty} \left(\int_0^1 [g(x)]_N \, dx \right) = \lim\limits_{N\to\infty} \left(2 - \frac{1}{N}\right) = 2$ ve böylece $g \in \mathcal{L}[0,1]$ olduğu elde edilir.

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2.$$

İntegrali alınacak fonksiyon sınırsız olmasına rağmen Lebesgue integrali bir has olmayan integral değildir.

Bu örnek Lebesgue ve Riemann integrali arasındaki farkı göstermektedir. $(\Re)\int_0^1 g(x)dx$ integralini has olmayan integral olarak göz önüne alarak

$$(\Re)\int_0^1 g(x)dx = (\Re)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{a\to 0^+}\left(2-2\sqrt{a}\right) = 2$$

hesaplayabiliriz. Sonuçlar aynı olmasına rağmen işlemler farklıdır. Lebesgue integrasyon stratejisi görüntüyü kısıtlamaktır. Riemann integrasyon için tanım kümesi kısıtlanarak has olmayan integral hesaplanır.

Örnek

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ x^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 0<x\leq 1 \\ -(2-x)^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 1<x<2 \\ 0 & ; \quad x=2 \end{cases}$$ olsun. $f\in\mathcal{L}[0,2]$

olup-olmadığını araştırınız.

Örnek

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ x^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 0<x\le 1 \\ -(2-x)^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 1<x<2 \\ 0 & ; \quad x=2 \end{cases}$$ olsun. $f\in\mathcal{L}[0,2]$ olup-olmadığını araştırınız.

Çözüm

$$f^+(x)=\begin{cases} x^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 0\le x\le 1 \\ 0 & ; \quad 1<x\le 2 \end{cases},\ f^-(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0\le x\le 1 \\ (2-x)^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 1<x\le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^2 f^+(x)dx=\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}}dx=2 \text{ ve } \int_0^2 f^-(x)dx=\int_1^2 (2-x)^{\frac{-1}{2}}dx=2$$

her iki integral sonlu olduğundan $f\in\mathcal{L}[0,2]$ dir.

$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 f^+(x)dx-\int_0^2 f^-(x)dx=2-2=0.$

Örnek

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ x^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 0<x\leq 1 \\ (x-2)^{-1} & ; \quad 1<x<2 \\ 0 & ; \quad x=2 \end{cases}$$ olsun. $f\in\mathcal{L}[0,2]$ olup-olmadığını araştırınız.

Örnek

$$f:[0,2]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x=0 \\ x^{\frac{-1}{2}} & ; \quad 0<x\le 1 \\ (x-2)^{-1} & ; \quad 1<x<2 \\ 0 & ; \quad x=2 \end{cases}$$ olsun. $f\in\mathcal{L}[0,2]$

olup-olmadığını araştırınız.

Çözüm

$$\int_0^2 f^+(x)dx=\int_0^1 x^{\frac{-1}{2}}dx=2 \text{ fakat } \int_0^2 f^-(x)dx=\int_1^2 -(x-2)^{-1}\,dx=\infty$$

olduğundan $f\notin\mathcal{L}[0,2]$ dir.

Sınırsız Fonksiyonların Lebesgue integralini içeren Teoremler

Ölçülebilir sınırlı fonksiyonların Lebesgue integralini içeren teoremlerin bir çoğu ölçülebilir sınırsız fonksiyonların durumuna genişletilebilir. Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe kullanılan fonksiyonların hem pozitif ve hem de negatif değerler alabilen sınırsız ölçülebilir fonksiyonlar ve tüm kümelerin sonlu ölçülebilir olduğu kabul edilecektir.

Sınırsız Fonksiyonların Lebesgue integralini içeren Teoremler

Ölçülebilir sınırlı fonksiyonların Lebesgue integralini içeren teoremlerin bir çoğu ölçülebilir sınırsız fonksiyonların durumuna genişletilebilir.
Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe kullanılan fonksiyonların hem pozitif ve hem de negatif değerler alabilen sınırsız ölçülebilir fonksiyonlar ve tüm kümelerin sonlu ölçülebilir olduğu kabul edilecektir.

Teorem

$f(x) \geq 0$ ise bu durumda $\int\limits_E f(x)dx$ integralinin var olması için gerek ve yeter koşul $\int\limits_E [f(x)]_N \, dx$ integralinin düzgün sınırlı olmasıdır.

Teorem

$g \in \mathcal{L}(E)$ olmak üzere E üzerinde h.h.h.y. $|f(x)| \leq g(x)$ ise bu durumda f fonksiyonu da E kümesi üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\int_E |f(x)|\, dx \leq \int_E g(x) dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

$g \in \mathcal{L}(E)$ olmak üzere E üzerinde h.h.h.y. $|f(x)| \leq g(x)$ ise bu durumda f fonksiyonu da E kümesi üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir ve

$$\int_E |f(x)|\,dx \leq \int_E g(x)dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

$f \in \mathcal{L}(E)$ olması için g.v.y.k. $|f| \in \mathcal{L}(E)$ olmasıdır ve böyle bir durumda

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|\,dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lebesgue integrasyonu mutlak integrasyondur, yani sadece mutlak değeri integrallenebilir fonksiyonlar Lebesgue integrallenebilirdir. Riemann integrallinde bu durum her zaman doğru değildir.

Lebesgue integrasyonu mutlak integrasyondur, yani sadece mutlak değeri integrallenebilir fonksiyonlar Lebesgue integrallenebilirdir. Riemann integrallinde bu durum her zaman doğru değildir.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x \in [0,1]$ için $|f(x)| = 1$ olduğundan $|f| \in \Re[0,1]$ fakat $f \notin \Re[0,1]$ dir.

Lebesgue integrasyonu mutlak integrasyondur, yani sadece mutlak değeri integrallenebilir fonksiyonlar Lebesgue integrallenebilirdir. Riemann integrallinde bu durum her zaman doğru değildir.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x \in [0,1]$ için $|f(x)| = 1$ olduğundan $|f| \in \Re[0,1]$ fakat $f \notin \Re[0,1]$ dir.

Teorem

$\int_E f(x)dx$ integrali mevcut ise bu durumda f fonksiyonu E kümesinde h.h.h.y. de sonludur.

Lebesgue integrasyonu mutlak integrasyondur, yani sadece mutlak değeri integrallenebilir fonksiyonlar Lebesgue integrallenebilirdir. Riemann integrallinde bu durum her zaman doğru değildir.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ -1 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. $\forall x \in [0,1]$ için $|f(x)| = 1$ olduğundan $|f| \in \Re[0,1]$ fakat $f \notin \Re[0,1]$ dir.

Teorem

$\int\limits_E f(x)dx$ integrali mevcut ise bu durumda f fonksiyonu E kümesinde h.h.h.y. de sonludur.

Teorem

$m(E) = 0$ *ise* $\int\limits_E f(x)dx = 0.$

Teorem

$\int\limits_E f(x)dx$ *integrali mevcut ve* $A \subset E$ *kümesi ölçülebilir ise bu durumda* $\int\limits_A f(x)dx$ *integrali de mevcuttur ve*

$$\int\limits_A |f(x)|\, dx \leq \int\limits_E |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

$\int\limits_E f(x)dx$ *integrali mevcut ve* $A \subset E$ *kümesi ölçülebilir ise bu durumda* $\int\limits_A f(x)dx$ *integrali de mevcuttur ve*

$$\int\limits_A |f(x)|\, dx \leq \int\limits_E |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *olmak üzere* $E = E_1 \cup E_2$ *ise*

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Teorem

$\int\limits_E f(x)dx$ integrali mevcut ve $A \subset E$ kümesi ölçülebilir ise bu durumda $\int\limits_A f(x)dx$ integrali de mevcuttur ve

$$\int\limits_A |f(x)|\, dx \leq \int\limits_E |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olmak üzere $E = E_1 \cup E_2$ ise

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ve $\int\limits_E f(x)dx$ integrali mevcut ise bu durumda

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ve $\int\limits_E f(x)dx$ integrali mevcut ise bu durumda

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Teorem

c herhangi bir sabit olmak üzere

$$\int\limits_E cf(x)dx = c\int\limits_E f(x)dx.$$

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ve $\int\limits_E f(x)dx$ integrali mevcut ise bu durumda

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Teorem

c herhangi bir sabit olmak üzere

$$\int\limits_E cf(x)dx = c\int\limits_E f(x)dx.$$

Teorem

$f \in \mathcal{L}(E)$ ve $g \in B(E)$ ise bu durumda $fg \in \mathcal{L}(E)$ dir.

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) = g(x)$ ise bu durumda

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Teorem

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x)=g(x)$ ise bu durumda

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

İntegrallerden birinin varlığı diğerinin varlığını gerektirir.

Teorem

Eğer E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x)\geq 0$ ve $\int_E f(x)dx = 0$ ise bu durumda E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x)=0$ dır.

Teorem

$f \in \mathcal{L}(E)$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için $A \subset E$ ve $m(A) < \delta$ iken

$$\left| \int_A f(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Teorem

$f \in \mathcal{L}(E)$ ise bu durumda her $\varepsilon > 0$ sayısı için $A \subset E$ ve $m(A) < \delta$ iken

$$\left| \int_A f(x)dx \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır.

Teorem

$f \in \mathcal{L}(E)$ olsun. (E_k) dizisi E içinde $\lim_{k\to\infty} m(E_k) = 0$ özelliğine sahip bir dizi ise bu durumda

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E_k} f(x)dx = 0.$$

Alıştırmalar

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırmalar

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x)$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırmalar

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x)$ olduğunu gösteriniz.
3. Aşağıdaki fonksiyonlar için $[f(x)]_N$ fonksiyonunu belirleyiniz.

   $(a)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0 \qquad (b)\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad x > 0$

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x)$ olduğunu gösteriniz.
3. Aşağıdaki fonksiyonlar için $[f(x)]_N$ fonksiyonunu belirleyiniz.
   $(a)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0 \qquad (b)\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad x > 0$
4. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralinin varlığını ispatlayınız ve değerini bulunuz.

Alıştırmalar

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x)$ olduğunu gösteriniz.
3. Aşağıdaki fonksiyonlar için $[f(x)]_N$ fonksiyonunu belirleyiniz.
   $(a)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0 \qquad (b)\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad x > 0$
4. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralinin varlığını ispatlayınız ve değerini bulunuz.
5. $(\Re) \int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralini hesaplayınız, 3. alıştırma ile karşılaştırınız.

Alıştırmalar

1. $[f(x)]_N = \min\{f(x), N\}$ olduğunu gösteriniz.
2. $\lim\limits_{N\to\infty} [f(x)]_N = f(x)$ olduğunu gösteriniz.
3. Aşağıdaki fonksiyonlar için $[f(x)]_N$ fonksiyonunu belirleyiniz.
   $(a)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad x > 0 \qquad (b)\ f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \qquad x > 0$
4. $\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralinin varlığını ispatlayınız ve değerini bulunuz.
5. $(\Re)\int\limits_0^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ integralini hesaplayınız, 3. alıştırma ile karşılaştırınız.
6. $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3 + e^x - e^{-x}$ olsun. f^+ ve f^- fonksiyonlarını bulunuz.