

# Hafta 1 - Ulaştırma Problemi ve Modeli

March 3, 2023

## 1 Transportation Problem (Ulaştırma)

- Bir A ürününün belirli arz kaynaklarından yine belirli talep merkezlerine optimum şekilde ulaştırılması ile ilgileneceğiz.
- Ulaştırma Problemlerini ulaştırma tablosu adı verilen bir tablo ile göstereceğiz.
- Bu tabloda  $n$  tane arz merkezi ve  $m$  tane talep merkezi olacak.
- Bu matrisin  $i$ . satır ve  $j$ . sütun değerleri bize 'bir adet A ürününün  $i$ . arz merkezinden  $j$ . talep merkezine ulaştırılmasının maliyetini (Pb) gösterecek.
- Diyelim ki bir ulaştırma probleminde 2 arz merkezi ve 3 talep merkezi olsun:

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10	12	14	100
Fabrika 2	9	13	8	200
Talep	50	100	150	-

- Tabloya göre bir birim A ürününü Fabrika 1'den Mağaza 1'e göndermenin maliyeti 10pb'dir.
- Fabrika 1'in belirli bir dönemde gönderebileceği (arz edebileceği) miktar 100 birimdir (adet, kg, ton) (miktar)
- Tabloya göre bir birim A ürününü Fabrika 1'den Mağaza 3'e ulaştırmanın maliyeti 14 pb'dir.
- Tabloya göre bir birim A ürününü Fabrika 2'den Mağaza 2'ye ulaştırmanın maliyeti 13 pb'dir.
- Tabloya göre Mağaza 1'in belirli bir dönemdeki A ürünü talebi 50 adettir (adet, kg, ton) (miktar)

```
[2]: toplam_arz <- 100 + 200
```

```
[3]: toplam_talep <- 50 + 100 + 150
```

```
[4]: toplam_arz == toplam_talep
```

TRUE

```
[5]: toplam_arz
```

300

```
[6]: toplam_talep
```

300

- Toplam arz toplam talebi eşit olduğu için (300 birim) tablonun **dengelenmiş (balanced)** olduğunu söyleriz.
- Biz bütün ulaştırma problemlerinin **dengelenmiş** olduğunu isteyeceğiz.
- Eğer problem **dengelenmiş** değilse, onu öncelikle dengeli hale getireceğiz.

## ## The Problem

- Hangi fabrikadan hangi mağaza kaç birimlik A ürünü gönderilmelidir ki toplam ulaştırma maliyetleri en küçük olsun.

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10 ( $x_{11}$ )	12	14	100
Fabrika 2	9	13 ( $x_{22}$ )	8 ( $x_{23}$ )	200
Talep	50	100	150	-

### 1.0.1 Karar Değişkenlerinin Belirlenmesi

- $x_{11}$ : 1. Fabrikadan 1. Mağazaya gönderilecek olan miktar.
- $x_{22}$ : 2. Fabrikadan 2. Mağazaya gönderilecek olan miktar.
- $x_{23}$ : 2. Fabrikadan 3. Mağazaya gönderilecek olan miktar.
- $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{22}, x_{23}$  değerleri ne olmalıdır ki toplam ulaştırma maliyetleri en küçük olsun

### 1.0.2 Amaç Fonksiyonunun Belirlenmesi

$$\min z = 10x_{11} + 12x_{12} + 14x_{13} + 9x_{21} + 13x_{22} + 8x_{23}$$

### 1.1 Kısıtların Belirlenmesi

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10 ( $x_{11}$ )	12 ( $x_{12}$ )	14 ( $x_{13}$ )	100
Fabrika 2	9 ( $x_{21}$ )	13 ( $x_{22}$ )	8 ( $x_{23}$ )	200
Talep	50	100	150	-

- $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \rightarrow$  Fabrika 1 toplam arzı olan 100 birimi mağazalara paylaştırsın.
- $x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \rightarrow$  Fabrika 2 toplam arzı olan 200 birimi mağazalara paylaştırsın.
- $x_{11} + x_{21} = 50 \rightarrow$  Mağaza 1'in gereksinimi olan 50 birim karşılansın.
- $x_{12} + x_{22} = 100 \rightarrow$  Mağaza 2'nin gereksinimi olan 100 birim karşılansın.
- $x_{13} + x_{23} = 150 \rightarrow$  Mağaza 3'ün gereksinimi olan 150 birim karşılansın.
- $n$  tane fabrika ve  $m$  tane mağaza için toplamda  $n + m$  adet arz ve talep kısıtı yazdık.
- Kısıtlardaki eşit sembolünü kullanmamıza imkan sağlayan durum, problemin **dengelenmiş** olmasıdır.
- $x_{ij} \geq 0$  olmalı, burada  $i = 1, 2$  ve  $j = 1, 2, 3$ .

## 1.2 Optimizasyon Problemi

$$\min z = 10x_{11} + 12x_{12} + 14x_{13} + 9x_{21} + 13x_{22} + 8x_{23}$$

Subject to:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \rightarrow \text{Fabrika 1 için Arz kısıtı}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 200 \rightarrow \text{Fabrika 2 için Arz kısıtı}$$

$$x_{11} + x_{21} = 50 \rightarrow \text{Mağaza 1 için Talep kısıtı}$$

$$x_{12} + x_{22} = 100 \rightarrow \text{Mağaza 2 için Talep kısıtı}$$

$$x_{13} + x_{23} = 150 \rightarrow \text{Mağaza 3 için Talep kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \rightarrow \text{Negatif olmama kısıtı}$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2, 3$$

## 1.3 Çözüm

- Simpleks yöntemiyle çözüm (Bunun için de genelde bilgisayar yazılımı kullanacağız).
- Diğer etkin çözüm yöntemleri.

### 1.3.1 Çözümün Excel ve Solver ile Elde edilmesi

Office Update To keep up-to-date with security updates, fixes, and improvements, choose Check for Updates.

	A	B	C	D	E	F	G
1		M1	M2	M3	Arz		Z
2	F1	10	12	14	100		2850
3	F2	9	13	8	200		
4	Talep	50	100	150			
5							
6		M1	M2	M3			
7	F1	0	100	0		E6	
8	F2	50	0	150			
9							
10							
11			Sol taraf	Sağ taraf	Türü		
12			100	100	1. Fabrika için Arz kısıtı		
13			200	200	2. Fabrika için Arz kısıtı		
14			50	50	1. Mağaza için Talep kısıtı		
15			100	100	2. Mağaza için Talep kısıtı		
16			150	150	3. Mağaza için Talep kısıtı		
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							

**Solver Parameters**

Set Objective: \$G\$2

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of: 0

By Changing Variable Cells: \$B\$5:\$D\$8

Subject to the Constraints:

\$B\$7:\$D\$8 >= 0

\$C\$12:\$C\$16 = \$D\$12:\$D\$16

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method: Simplex LP

**Solving Method**

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Close Solve

- Excel çözümüne göre
- $x_{11} = 0, x_{12} = 100, x_{13} = 0, x_{21} = 50, x_{22} = 0, x_{23} = 150$ .
- 100 birim A ürünü Fabrika 1'den Mağaza 2'ye ulaştırılsın. Böylece Fabrika 1'in tüm arzını Mağaza 2'ye gönderdiğini görüyoruz.
- Fabrika 2 200 birimlik arzını Mağaza 1 ve Mağaza 3 arasında farklı oranlarda paylaştırmış.
- Yatay toplamalar sırasıyla 100 ve 200
- Dikey toplamalar sırasıyla 50, 100 ve 150.
- O halde çözüm tüm kısıtları sağlar
- Aynı zamanda 2850 pb minimum maliyet gösterir.
- Yani Fabrikalardan Mağazalara daha ucuz bir ulaştırma stratejisi bulamayız.

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10	12 (100)	14	100
Fabrika 2	9 (50)	13	8 (150)	200
Talep	50	100	150	-

```
[10]: total_cost <- 12*100 + 9*50 + 8*150
```

```
[11]: total_cost
```

2850

### 1.3.2 Dengelenmiş olmama durumu (Talep Fazlası)

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10	12	14	100
Fabrika 2	9	13	8	180
Talep	50	100	150	-

```
[13]: toplam_talep <- 50 + 100 + 150
      toplam_arz <- 100 + 180
      toplam_talep == toplam_arz
```

FALSE

```
[14]: toplam_talep
```

300

```
[15]: toplam_arz
```

280

- Toplam talep toplam arza eşit olmadığı için problem **dengelenmiş** değildir (unbalanced).
- Probleme aradaki arz açığını giderecek şekilde hayali bir fabrika ekleyelim.

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10	12	14	100
Fabrika 2	9	13	8	180
Fabrika H	0	0	0	20
Talep	50	100	150	-

- Toplam arz 300, toplam talep de 300, o halde bu haliyle problem **dengelenmiştir**.

$$\min z = 10x_{11} + 12x_{12} + 14x_{13} + 9x_{21} + 13x_{22} + 8x_{23} + 0x_{31} + 0x_{32} + 0x_{33}$$

Subject to:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} = 100 \rightarrow \text{Fabrika 1 için Arz kısıtı}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 180 \rightarrow \text{Fabrika 2 için Arz kısıtı}$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 20 \rightarrow \text{Fabrika H için Arz kısıtı}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 50 \rightarrow \text{Mağaza 1 için Talep kısıtı}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 100 \rightarrow \text{Mağaza 2 için Talep kısıtı}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 150 \rightarrow \text{Mağaza 3 için Talep kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \rightarrow \text{Negatif olmama kısıtı}$$

$$i = 1, 2, 3$$

$$j = 1, 2, 3$$

The screenshot shows an Excel spreadsheet with a transportation problem. The Solver Parameters dialog box is open, showing the following settings:

- Set Objective:** \$G\$2
- To:** Min
- By Changing Variable Cells:** \$B\$8:\$D\$10
- Subject to the Constraints:**
  - \$B\$8:\$D\$10 >= 0
  - \$C\$13:\$C\$18 = \$D\$13:\$D\$18
- Make Unconstrained Variables Non-Negative:** ☒
- Select a Solving Method:** Simplex LP

The spreadsheet data is as follows:

	M1	M2	M3	Arz
F1	10	12	14	100
F2	9	13	8	180
H	0	0	0	20
Talep	50	100	150	

Below the main table, there is a summary table:

	M1	M2	M3
F1	20	80	0
F2	30	0	150
H	0	20	0

At the bottom, there is a table showing the solution (Sol taraf) and the right-hand side (Sağ taraf) for each constraint:

Sol taraf	Sağ taraf	Türü
100	100	1. Fabrika için Arz kısıtı
180	180	2. Fabrika için Arz kısıtı
20	20	Fabrika H için Arz Kısıtı
50	50	1. Mağaza için Talep kısıtı
100	100	2. Mağaza için Talep kısıtı
150	150	3. Mağaza için Talep kısıtı

- Fabrika 1, arzının 20'sini Mağaza 1'e, 80'inini Mağaza 2'ye gönderecek.
- Fabrika 2, arzının 30'unu Mağaza 1'e, 150'sini Mağaza 3'e gönderecek.
- Hayali Fabrika 20 olan arzının tamamını Mağaza 2'ye gönderecek.
- Toplam ulaştırma maliyeti 2630 Pb.
- Eğer arzı 20 birimlik yeni bir fabrika kursaydık (veya depo açsaydık, veya fason üretim yapan bir kurumla anlaşsaydık) bunun Mağaza 2'ye yakın olmasını tercih ederdik.

### 1.3.3 Dengelenmemiş olma durumu (Arz Fazlası)

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Arz
Fabrika 1	10	12	14	130
Fabrika 2	9	13	8	200
Talep	50	100	150	-

[17]:  $130 + 200$

330

[18]:  $50 + 100 + 150$

300

- Toplam arz, toplam talepten fazla.

	Mağaza1	Mağaza2	Mağaza3	Mağaza H	Arz
Fabrika 1	10	12	14	0	130
Fabrika 2	9	13	8	0	200
Talep	50	100	150	30	-

[19]:  $130 + 200$

330

[20]:  $50 + 100 + 150 + 30$

330

Problemin yeni hani **dengelenmiştir**.

$$\min z = 10x_{11} + 12x_{12} + 14x_{13} + 0x_{14} + 9x_{21} + 13x_{22} + 8x_{23} + 0x_{24}$$

Subject to:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 130 \rightarrow \text{Fabrika 1 için Arz kısıtı}$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 200 \rightarrow \text{Fabrika 2 için Arz kısıtı}$$

$$x_{11} + x_{21} = 50 \rightarrow \text{Mağaza 1 için Talep kısıtı}$$

$$x_{12} + x_{22} = 100 \rightarrow \text{Mağaza 2 için Talep kısıtı}$$

$$x_{13} + x_{23} = 150 \rightarrow \text{Mağaza 3 için Talep kısıtı}$$

$$x_{14} + x_{24} = 30 \rightarrow \text{Mağaza H için Talep kısıtı}$$

$$x_{ij} \geq 0 \rightarrow \text{Negatif olmama kısıtı}$$

$$i = 1, 2$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		m1	m2	m3	mH		Z				
2	f1	10	12	14	0		2850				
3	f2	9	13	8	0						
4											
5											
6		m1	m2	m3	mH						
7	f1	0	100	0	30						
8	f2	50	0	150	0						
9											
10											
11			LHS	DIR	RHS						
12			130	=	130						
13			200	=	200						
14			50	=	50						
15			100	=	100						
16			150	=	150						
17			30	=	30						
18					E17						
19											
20											
21											

**Solver Parameters**

Set Objective:

To: ☐ Max ☒ Min ☐ Value Of:

By Changing Variable Cells:

Subject to the Constraints:

Add

Change

Load/Save

☒ Make Unconstrained Variables Non-Negative

Select a Solving Method:  Options

**Solving Method**

Select the GRG Nonlinear engine for Solver Problems that are smooth nonlinear. Select the LP Simplex engine for linear Solver Problems, and select the Evolutionary engine for Solver problems that are non-smooth.

Close Solve

- Hayali Mağaza'nın talebi 30 birimdir.
- Bu talebinin tamamını Fabrika 1'den temin etmektedir.
- 30 birimlik üretim fazlalığı hayali mağazaya gönderildi.
- O halde birinci fabrikanın arzını 30 birim kısımlıyız.

[ ]: