1. OLASILIK DAĞILIMLARI VE SİGORTA UYGULAMALARI

1.1 Önemli Kesikli Dağılımlar

Burada sigortacılık ve aktüeryada sıklıkla kullanılan bazı önemli kesikli dağılımlara yer verilmiştir.

1.1.1 Poisson Dağılımı

N rastgele değişkeni λ parametreli Poisson dağılımına sahip olsun. Poisson dağılımının olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{P}(N = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, x = 0,1,2,..$$

Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_N(t) = E(e^{tX}) = e^{\lambda(e^{t}-1)}$$

Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_N(r) = E(r^{X}) = e^{\lambda(r-1)}$$

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla N rd. ‘nin momentleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$E(N) = \frac{dM_N(t)}{dt} \Big|_{t=0} = \lambda$$

$$E(N^2) = \frac{d^2 M_N(t)}{dt^2} = \lambda + \lambda^2$$

N rd.’nin varyansı ise

$$Var(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda = \lambda$$

olarak elde edilir.

1.1.2 Binom Dağılımı

N rastgele değişkeni $Binom$ dağılımına sahip olsun. $N \sim Binom(n,p)$, $0 < p < 1$ Binom dağılımının olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{P}(N = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0,1,2 \dots, n$$

Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_N(t) = E(e^{tX}) = (q + pe^t)^n, \ \ t \epsilon \mathcal{R}$$

Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_N(r) = E(r^X) = (q + pr)^n$$

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla N rd. ‘nin momentleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$E(N) = \frac{dM_N(t)}{dt}\Big|_{t=0} = np$$

$$E(N^2) = \frac{d^2 M_N(t)}{dt^2} = np + n^2p^2 - np^2$$

N rd.'nin varyansı ise

$$Var(N) = E(N^2) - [E(N)]^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np - np^2 = npq$$

olarak elde edilir.

1.1.3 Negatif Binom Dağılımı

N rastgele değişkeni $Negatif\ Binom$ dağılımına sahip olsun. $N \sim NB(k,p)$, $k > 0,\ 0 < p < 1$. Negatif binom dağılımının olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{P}(N = x) = \binom{k+x-1}{x} p^k q^x, \qquad x = 0,1,2 \ldots, n \qquad q = 1 - p$$

Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_N(t) = E(e^{tX}) = \left(\frac{p}{1 - qe^t}\right)^k, \;\; t < -\log q$$

Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_N(r) = E(r^X) = \left(\frac{p}{1 - qr}\right)^k$$

Moment çıkaran fonksiyon yardımıyla N rd. ‘nin beklenen değeri,

$$E(N) = \frac{dM_N(t)}{dt}\bigg|_{t=0} = \frac{kq}{p}$$

varyansı ise

$$Var(N) = \frac{kq}{p^2}$$

şeklindedir.

1.1.4 Geometik Dağılım

N rastgele değişkeni $Geometrik$ dağılımına sahip olsun. $N \sim GM(p), 0 < p < 1$. Geometrik dağılım, negatif binom dağılımının özel bir halidir. Negatif binom dağılımında $k = 1$ alınırsa geometrik dağılım elde edilir. Geometrik dağılımın olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir:

$$\mathrm{P}(N = x) = pq^x, \qquad x = 0,1,2 \dots, n \qquad q = 1 - p$$

Moment çıkaran fonksiyonu

$$M_N(t) = \frac{p}{1 - qe^t}, \quad t < -\log q$$

Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_N(r) = \frac{p}{1 - qr}$$

Beklenen değeri,

$$E(N) = \frac{q}{p}$$

varyansı ise

$$Var(N) = \frac{kq}{p^2}$$

şeklindedir.

1.2 Önemli Sürekli Dağılımlar

Bu bölümde sigortacılık ve aktüeryada sıklıkla kullanılan bazı sürekli dağılımlara yer verilmiştir.

1.2.1 Gamma Dağılımı

$$X \sim \gamma(\alpha, \lambda), \quad \alpha > 0, \qquad \lambda > 0$$

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$$

biçimindedir. Burada $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ 'dir.

Not: α tam sayı ise dağılım Erlang dağılımı olarak bilinir ve dağılım fonksiyonu

$$F(x) = 1 - \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{e^{-\lambda x} (\lambda x)^j}{j!}, \quad x > 0$$

Gamma dağılımının n. momenti

$$E(X^n)=\int_0^\infty x^n\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha+n-1}e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\lambda^{\alpha+n}}=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

$$E(X^n)=\frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)\lambda^n}$$

beklenen değeri

$$E(X)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)\lambda^1}=\frac{\alpha!}{(\alpha-1)!\,\lambda}=\frac{\alpha(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!\,\lambda}=\frac{\alpha}{\lambda}$$

ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)!}{(\alpha-1)!\,\lambda^2} = \frac{(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)!}{(\alpha-1)!\,\lambda^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}$$

varyansı

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right)^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-(\lambda-t)x} dx = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\lambda-t)^\alpha}$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^{\alpha}$$

biçiminde elde edilir.

Çarpıklık katsayısı aşağıdaki eşitlik ile verilir.

$$S_k(X) = \frac{E[X - E(X)]^3}{[Var(X)]^{3/2}}$$

Burada

$$E[X - E(X)]^3 = E\left(X - \frac{\alpha}{\lambda}\right)^3 = E\left(X^3 - 3X^2\frac{\alpha}{\lambda} + 3X\frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}\right)$$

$$= E(X^3) - 3\frac{\alpha}{\lambda}E(X^2) + 3\frac{\alpha^2}{\lambda^2}E(X) - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\lambda^3} - 3\frac{\alpha}{\lambda}\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\lambda^2}\right) + 3\frac{\alpha^2}{\lambda^2}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) - \frac{\alpha^3}{\lambda^3}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2) - 3\alpha^2(\alpha+1) + 2\alpha^3}{\lambda^3} = \frac{2\alpha}{\lambda^3}$$

olarak elde edilir. Bu ifade çarpıklık katsayısında yerine konursa, çarpıklık katsayısı

$$S_k(X) = \frac{\frac{2\alpha}{\lambda^3}}{\left(\frac{\alpha}{\lambda^2}\right)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

olur.

1.2.2 Üstel Dağılım

Gamma dağılımda $\alpha = 1$ alındığında üstel dağılım elde edilir. Üstel dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \qquad \lambda > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \qquad x > 0$$

n. momenti

$$E(X^n) = \frac{\text{n!}}{\lambda^n}$$

beklenen değeri

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

varyansı

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

ve moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad , \quad t < \lambda$$

olarak elde edilir.

1.2.3 Pareto Dağılımı

X rastgele değişkeninin dağılımı $Pareto(\alpha, \lambda)$ olsun. $(X \sim Pa(\alpha, \lambda))$. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + x)^{\alpha+1}} \quad , x > 0, \qquad \alpha > 0, \qquad \lambda > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu,

$$F(x) = \int_{0}^{x} \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda + y)^{\alpha+1}} dy = \alpha\lambda^{\alpha} \int_{0}^{x} \frac{1}{(\lambda + y)^{\alpha+1}} dy$$

$$= \alpha\lambda^{\alpha} \int_{0}^{x} (\lambda + y)^{-(\alpha+1)} dy = \alpha\lambda^{\alpha} \frac{(\lambda + y)^{-\alpha-1+1}}{-\alpha - 1 + 1} \Big|_{y=0}^{x}$$

$$= \lambda^{\alpha}(\lambda + y)^{-\alpha} \Big|_{y=0}^{x} = \lambda^{\alpha}(\lambda + x)^{-\alpha} + \lambda^{\alpha}(\lambda)^{-\alpha}$$

$$= 1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda + x}\right)^{\alpha} \quad , \quad x > 0$$

olarak elde edilir.

Beklenen değeri aşağıda verildiği gibi bulunabilir.

$$E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty [(x+\lambda)-\lambda]f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \int_0^\infty \lambda f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \lambda \int_0^\infty f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \lambda.1 = \int_0^\infty (x+\lambda)f(x)dx - \lambda$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}dx - \lambda$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

Yukarıdaki integral $\frac{(\alpha-1)\lambda}{(\alpha-1)\lambda}$ ile çarpıp bölünürse,

$$= \int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda}{(\alpha-1)\lambda}\frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

$$= \frac{\alpha\lambda}{(\alpha-1)}\int_0^\infty \frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{(\lambda+x)^\alpha}dx - \lambda$$

yukarıdaki integralin içindeki ifade $Pareto(\alpha-1,\lambda)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla integralin değeri 1'dir. O halde X rastgele değişkeninin beklenen değeri

$$E(X) = \frac{\alpha\lambda}{(\alpha-1)} - \lambda = \frac{\alpha\lambda - \lambda(\alpha-1)}{(\alpha-1)} = \frac{\alpha\lambda - \alpha\lambda + \lambda}{(\alpha-1)} = \frac{\lambda}{(\alpha-1)} \;, \quad \alpha > 1$$

olarak bulunur.

X rastgele değişkeninin varyansını bulabilmek için önce ikinci moment bulunmalıdır.

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx = \int_0^\infty [(x+\lambda)-\lambda]^2 f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty [(x+\lambda)^2 - 2(x+\lambda)\lambda + \lambda^2] f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty [(x+\lambda)^2 - 2x\lambda - \lambda^2] f(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 f(x)dx - 2\lambda \int_0^\infty xf(x)dx - \lambda^2 \int_0^\infty f(x)dx$$

yukarıda kırmızı ile gösterilen integral $Pareto(\alpha, \lambda)$ dağılımının beklenen değeridir, yani integralin sonucu $\frac{\lambda}{\alpha-1}$'dir. Mavi ile gösterilen integralin sonucu 1 olduğundan yukarıdaki eşitlik aşağıdaki gibi yazılır:

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 f(x)dx - 2\lambda \frac{\lambda}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \int_0^\infty (x+\lambda)^2 \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \int_0^\infty \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

Yukarıdaki integral $\frac{(\alpha-2)\lambda^2}{(\alpha-2)\lambda^2}$ ile çarpıp bölünürse,

$$= \int_0^{\infty} \frac{(\alpha-2)\lambda^2}{(\alpha-2)\lambda^2} \frac{\alpha\lambda^{\alpha}}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

$$= \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-2)} \int_0^{\infty} \frac{(\alpha-2)\lambda^{\alpha-2}}{(\lambda+x)^{\alpha-1}} dx - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2$$

eşitliği elde edilir. Yukarıdaki integralin içindeki ifade $Pareto(\alpha-2,\lambda)$ dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonudur. Dolayısıyla integralin değeri 1'dir. O halde Pareto dağılımının ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-2)} - \frac{2\lambda^2}{\alpha-1} - \lambda^2 = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$$

olarak elde edilir. O halde varyans

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} - \left(\frac{\lambda}{\alpha-1}\right)^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

olur.

1.2.4 Normal Dağılım

X rastgele değişkeninin dağılımı $Normal(\mu, \sigma)$ olsun. $(X \sim N(\mu, \sigma^2))$. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right\} \quad , -\infty < x < \infty$$

biçimindedir.

$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ dönüşümü yapıldığında $Z \sim N(0,1)$ olur. Z rastgele değişkeninin dağılım fonksiyonu

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} dx$$

olur.(Standart normal dağılım)

X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu

$$M_X(t) = \exp\left\{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right\},$$

beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \mu \,, \quad Var(X) = \sigma^2$$

biçimindedir.

1.2.5 Lognormal Dağılım

X rastgele değişkeninin dağılımı $Lognormal(\mu, \sigma)$ olsun. $(X \sim LN(\mu, \sigma))$ X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log x - \mu)^2\right\} \quad , x > 0$$

biçimindedir. Dağılım fonksiyonu olasılık yoğunluk fonksiyonunun integrali alınarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{y\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(\log y - \mu)^2\right\} dy$$

Burada $z = \log y$ denirse dağılım fonksiyonu

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\log x} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(z - \mu)^2\right\} dz$$

olur. İntegralin içindeki ifade Normal dağılım olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$F(x) = \Phi\left(\frac{\log x - \mu}{\sigma}\right)$$

biçiminde yazılır. Böylece Lognormal dağılımın olasılıkları, standart normal dağılım kullanılarak hesaplanabilir. O halde lognormal dağılım ile normal dağılım arasındaki ilişki

$$X \sim LN(\mu, \sigma) \Longrightarrow \log X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

biçimindedir. Bu ilişki sayesinde lognormal dağılımın momentleri kolaylıkla elde edilebilir. Eğer $X \sim LN(\mu, \sigma) \Longrightarrow Y = \log X$ dönüşümü yapıldığında, X rastgele değişkeninin n. momenti aşağıdaki gibi yazılır:

$$E(X^n) = E(e^{nY}) = M_Y(n) = \exp\left\{\mu n + \frac{1}{2}\sigma^2 n^2\right\}$$

1.3 Karma (Mixed) Dağılımlar

Aktüeryada karma dağılımlar sıklıkla kullanılır. Konunun anlaşılabilmesi için X ortalaması 100 olan üstel dağılıma sahip olsun ve Y rastgele değişkeni aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$Y = \begin{cases} 0, & X < 20 \\ X - 20, & 20 \leq X < 300 \\ 280, & x \geq 300 \end{cases}$$

Y'nin sıfıra eşit olma olasılığı

$$P(Y = 0) = P(X < 20) = 1 - e^{-0.2} = 0.1813$$

olur. Benzer şekilde

$$P(Y = 280) = 0.0498$$

olarak elde edilir, yani 0 ve 280 noktasında olasılık fonksiyonuna sahiptir. (0,280) aralığında ise Y'nin dağılımı süreklidir, yani örneğin $P(30 < Y \leq 100)$ olasılığının sonucu bulmak istenirse,

$$P(30 < Y \leq 100) = P(50 < X \leq 120) = 0.3053$$

biçiminde bulunur.

(0,280) aralığında Y'nin yoğunluk fonksiyonu vardır. h ile Y rastgele değişkeninin yoğunluk fonksiyonu gösterilirse, Y'nin momentleri aşağıda verilen eşitlik yardımıyla bulunur:

$$E[Y^r] = \int_0^{280} x^r h(x)dx + 280^r P(Y = 280)$$

Stieltjes integral notasyonu yardımıyla, kesikli, sürekli ya da karma dağılım için r. moment

$$E[Y^r] = \int_0^{\infty} x^r dH(x)$$

olarak yazılır.

1.4 Sigorta Uygulamaları

Burada rastgele değişkenlerin bazı fonksiyonları ele alınmıştır. Sigorta şirketi, prim ödemesi karşılığında riski reasürans şirketle paylaşmaktadır. Sigorta şirketi ve reasürans şirket arasında bu paylaşımın nasıl yapıldığından bahsedilmiştir.

1.4.1 Oransal Reasürans

Oransal reasürans anlaşmasında, sigorta şirketinin ödemesi gereken her bir hasarın a kadar belli bir yüzdesi sigorta şirketi, geri kalan $1-a$ kadarlık yüzdesi reasürans şirketi tarafından ödenir.

$Y \rightarrow$ Sigorta şirketi tarafından ödenen

$Z \rightarrow$ Reasürans tarafından ödenen

miktar olsun.

$$Y = aX$$

$$Z = (1-a)X$$

$$Y + Z = aX + (1-a)X = X$$

Kısaca Y ve Z, X 'in bir dönüşümü olmaktadır. Y'nin dağılım fonksiyonu,

$$P(Y \leq x) = P(aX \leq x) = P\left(X \leq \frac{x}{a}\right) = F\left(\frac{x}{a}\right)$$

ve yoğunluk fonksiyonu

$$\frac{dF\left(\frac{x}{a}\right)}{dx} = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right)$$

olur.

Örnek: $X \sim \gamma(\alpha, \lambda)$ iken $Y = aX$'in dağılımı nedir?

Çözüm: $f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0$

$$f_Y(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\alpha \left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} e^{-\lambda\left(\frac{x}{a}\right)}$$

$$= \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\frac{\lambda x}{a}}}{a^\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{\left(\frac{\lambda}{a}\right)^{\alpha-1} x^\alpha e^{-\left(\frac{\lambda}{a}\right)x}}{\Gamma(\alpha)}$$

Dolayısıyla $Y = aX \sim \gamma\left(\alpha, \frac{\lambda}{a}\right)$ olur.

1.4.2 Aşan Kayıp Reasüransı

Aşan kayıp reasürans anlaşmasında hasar, retenşın sınırını(M) geçtiğinde sigorta şirketi ve reasürans şirket arasında paylaşılır, aksi halde reasürans hepsini öder.

M: retenşın sınırı

Y → Sigorta şirketi tarafından ödenen miktar

Z → Reasürans tarafından ödenen miktar

olmak üzere Y ve Z ‘nin matematiksel gösterimi aşağıdaki gibidir:

$Y = \min(X, M)$

$Z = \max(0, X - M)$

(Y+Z=X olduğuna dikkat ediniz.)

<u>Sigorta şirketi açısından</u>

Y’nin dağılım fonksiyonu F_Y ile gösterilirse, Y’nin tanımından dağılım fonksiyonu

$$F_Y(x) = \begin{cases} F(x), & x < M \\ 1, & x \geq M \end{cases}$$

biçiminde yazılır. Bu durumda Y rastgele değişkeni, $f(x),\ 0 < x < M$ olasılık yoğunluk fonksiyonu ve $P(Y = M) = 1 - F(M)$ olasılığı ile M de ki olasılık fonksiyonundan oluşan karma dağılıma sahiptir.

Y, X'in bir fonksiyonu olduğundan Y'nin momentleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(Y^n) = \int_0^\infty [\min(X, M)]^n f(x)dx$$

$0 < x < M$ iken $\min(X, M) = X,\ \ x \geq M$ iken $\min(X, M) = M$ olduğundan, yukarıdaki integrali 2 parçaya bölünerek yazılır. O zaman n. moment

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \int_0^M x^n f(x)dx + \int_M^\infty M^n f(x)dx \\ &= \int_0^M x^n f(x)dx + M^n \int_M^\infty f(x)dx \\ &= \int_0^M x^n f(x)dx + M^n[1 - F(M)] \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Özel olarak $n = 1$ alındığında beklenen değer aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M[1 - F(M)]$$

Örnek: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ ve $Y = \min(X, M)$olsun. $E(Y)$'yi bulunuz.

Çözüm:

$$E(Y) = \int_0^M xf(x)dx + M[1 - F(M)]$$

$$= \int_0^M x\lambda e^{-\lambda x}dx + M\left[1 - 1 + e^{-\lambda M})\right]$$

$$= \lambda \int_0^M xe^{-\lambda}\ \ dx + Me^{-\lambda M}$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda M}\right)$$

<u>Reasürans açısından</u>

X: Hasar miktarı

Z: Reasürans şirketin ödeyeceği miktar

$$Z = \max(0, X - M) = \begin{cases} 0, & X \leq M \\ X - M, & X > M \end{cases}$$

$F_Z(0) = M$ ve $F_Z(x) = F(x + M),\ x > 0$

Z'nin n'inci momenti aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$E(Z^n) = \int_0^\infty [\max(0, X - M)]^n f(x)dx$$

$$= \int_0^M 0 f(x)dx + \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx = \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx$$

$$\Longrightarrow E(Z^n) = \int_M^\infty (x - M)^n f(x)dx$$

Örnek: $F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0$ ve $Z = \max(0, X - M)$olsun. $E(Z)$'yi bulunuz.

Çözüm:

$$E(Z) = \int_{M}^{\infty} (x - M) f(x) dx = \int_{M}^{\infty} (x - M) \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\begin{Bmatrix} x - M = y & x = M \Longrightarrow y = 0 \\ dx = dy & x = \infty \Longrightarrow y = \infty \end{Bmatrix}$$

$$= \int_{0}^{\infty} y \lambda e^{-\lambda(M+y)} dy = e^{-\lambda M} \int_{0}^{\infty} y \lambda e^{-\lambda\, '} dy$$

λ parametreli üstel dağılımın beklenen değeri

$$= e^{-\lambda M} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda M}$$

1.5 Rastgele Değişkenlerin Toplamı

Birçok sigorta uygulamasında birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı rastgele değişkenlerin dağılımı ile ilgilenilir. Örneğin sigorta şirketinin n tane poliçesi olsun. X_i: i.poliçede meydana gelen hasar miktarını göstersin ($i = 1,2,\dots,n$). Bu durumda sigorta şirketi, n poliçedeki hasarlar için toplam

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i\,, \qquad i = 1,2,\dots,n \quad X_i' ler\ birbirinden\ bağımsız\ aynı\ dağılımlı$$

miktarını öder. Buradaki temel konu S_n'nin dağılımının bulunmasıdır. S_n'nin kapalı formu mevcutsa S_n'nin dağılımı aşağıdaki iki yolla bulunabilir.

1.5.1 Moment Çıkaran Fonksiyon Yöntemi

M_S: S'nin moment çıkaran fonksiyonu

M_X: X'in moment çıkaran fonksiyonu olsun.

$$\begin{aligned} M_S(t) &= E(e^{tS_n}) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}\right) \\ &= E(e^{tX_1}e^{tX_2}\dots e^{tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2})\dots E(e^{tX_n}) \\ &= M_X(t)M_X(t)\dots M_X(t) \\ &= [M_X(t)]^n \end{aligned}$$

Örnek: $X_1 \sim Poisson(\lambda)$ olsun. $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$'nin dağılımı nedir?

Çözüm:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

$$M_S(t) = [M_X(t)]^n = \left[e^{\lambda(e^t-1)}\right]^n = e^{n\lambda(e^t-1)}$$

$\Rightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Poisson(n\lambda)$ olur.

1.5.2 Konvolüsyon

$X_i, i = 1,2, \dots, n$ negatif değerler almayan kesikli bir rastgele değişken olsun. Bu durumda S_n de negatif değerler almayan bir rastgele değişken olur.

$S_2 = X_1 + X_2$

$P(S_2 \leq x) =?$

$S_2 = X_1 + X_2 = x$ olsun. Bu durumda X_2, j değerini $0 \leq j \leq x,\ X_1, x - j$ değerini alır. (X_1 ve X_2 birbirinden bağımsız)

$$P(S_2 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(X_1 \leq x - j)P(X_2 = j)$$

$S_3 = S_2 + X_3$ (S_2 ve X_3 bağımsızdır)

$$P(S_3 \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_2 \leq x - j)P(X_3 = j)$$

ve genel olarak

$$P(S_n \leq x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} \leq x - j) P(X_n = j) \qquad (1)$$

biçiminde elde edilir.

$$P(S_n = x) = \sum_{j=0}^{x} P(S_{n-1} = x - j) P(X_n = j)$$

X_1'in dağılım fonksiyonu F ve $f_j = P(X_1 = j)$ olsun.

$$F^{n*}(x) = P(S_n \leq x) \qquad \text{(n katlı konvolüsyon)}$$

Bu durumda (1) eşitliği

$$F^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} F^{(n-1)*}(x - j)\, f_j$$

olur. Burada $F^{1*} = F$ ve $F^{0*}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$ dır.

Benzer şekilde $f^{n*}(x) = P(S_n = x)$ olarak tanımlanırsa

$$f^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} f_{x-j}^{(n-1)*}\, f_j$$

olur. Burada $f^{1*} = f$ 'dir.

F, $(0, \infty)$da sürekli bir dağılım olduğunda n katlı konvolüsyonlar aşağıdaki gibi yazılır:

$$F^{n*}(x) = \int_0^x F^{(n-1)*}(x-y)\, f(y)dy$$

ve

$$f^{n*}(x) = \int_0^x f^{(n-1)*}(x-y)\, f(y)dy$$

Örnek: $\{X_i\}_{i=1}^{n}$rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız ve ortalaması $1/\lambda$ olan üstel dağıma sahiptir. S_n'nin dağılımı nedir?

Çözüm: $n = 2$ olsun.

$$f^{2*}(x) = \int_0^x f(x-y)\, f(y)dy = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda(x-y)} \lambda e^{-\lambda y} dy$$

$$= \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda x + \lambda y - \lambda y}\, dy = \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1\, dy$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda x} x$$

$\Longrightarrow S_2 = X_1 + X_2 \sim \gamma(2, \lambda)$

$n = 3$ olsun. $S_3 = S_2 + X_3$

$$f^{3*}(x) = \int_0^x f^{2*}(x-y)\, f(y)dy = \int_0^x f^{2*}(y)\, f(x-y)dy$$

$$= \int_0^x \lambda^2\, e^{-\lambda y} y \lambda e^{-\lambda(x-y)} dy = \lambda^3 \int_0^x e^{-\lambda y - \lambda x + \lambda y}\, y dy$$

$$= \lambda^3 e^{-\lambda} \int_0^x y\, dy = \frac{1}{2} \lambda^3 e^{-\lambda x} x^2$$

$\Longrightarrow S_2 \sim \gamma(3, \lambda)$ olur. O halde n için $S_n \sim \gamma(n, \lambda)$ 'dir.

1.5.3 Kesikli Rastgele Değişkenler için Ardışık Yineleme

X_1 kesikli ve negatif olmayan değerler alan bir rastgele değişken olsun. Ardışık olarak S_n'nin olasılık fonksiyonunu hesaplamak mümkündür.

$$f_j = P(X_1 = j) \text{ ve } g_j = P(S_n = j), \quad j = 0,1,2,\ldots$$

X_1 'in olasılık üreten fonksiyonu P_X ,

$$P_X(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j$$

S_n'nin olasılık üreten fonksiyonunu P_S

$$P_S(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k$$

ile gösterilsin. Moment çıkaran fonksiyondaki gibi aralarındaki ilişkiden

$$P_S(r) = [P_X(r)]^n$$

yazılır. r'ye göre türev alınırsa

$$P_S{}'(r) = n[P_X(r)]^{n-1} P_X{}'(r)$$

elde edilir. Her iki taraf $rP_X(r)$ ile çarpılırsa,

$$rP_X(r)P_S{}'(r) = rP_X(r)n[P_X(r)]^{n-1}P_X{}'(r)$$
$$= nr[P_X(r)]^n P_X{}'(r)$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j \;\; r\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}g_k = n\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k \;\; r\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}f_j$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} r^j f_j \;\; \sum_{k=1}^{\infty} kr^k g_k = n\sum_{k=0}^{\infty} r^k g_k \;\; \sum_{j=1}^{\infty} jr^j f_j$$

g_x ifadesini bulabilmek için yukarıdaki eşitliğin her iki tarafında r^xkatsayısı elde edilsin. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra yukarıdaki ifade,

$$xg_x f_0 + \sum_{j=1}^{x-1}(x-j)f_j g_{x-j} = n\sum_{j=1}^{x} jf_j g_{x-j}$$

olur. Buradan g_x çekilirse,

$$g_x = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{x}\left[(n+1)\frac{j}{x} - 1\right] f_j g_{x-j}$$

olarak elde edilir. Burada $g_0 = f_0{}^n$ ‘dir.

Örnek: $\{X_i\}_{i=1}^{4}$ rastgele değişkenleri birbirinden bağımsız aynı dağılımlıdır. Olasılık fonksiyonu $f_j = P(X_1 = j)$

$$f_0 = 0.4 \qquad f_1 = 0.3 \qquad f_2 = 0.2 \qquad f_3 = 0.1$$

ile verilsin. $S_4 = \sum_{i=1}^{4} X_i$ olsun. Ardışık olarak $P(S_4 = r),\; r = 1,2,3,4$ hesaplayınız.

Çözüm:

$$g_0 = P(S_4 = 0) = {f_0}^4 = (0.4)^4 = 0.0256$$

$f_j = 0,\;\; j = 4,5,6, \ldots$

$$g_x = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{x}\left[\frac{5j}{x} - 1\right] f_j g_{x-j}$$

$$g_1 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{1}\left[\frac{5j}{1} - 1\right] f_j g_{1-j} = \frac{1}{f_0}\left(\frac{(5)(1)}{1} - 1\right) f_1 g_0 = \frac{1}{f_0} 4 f_1 g_0 = 0.0768$$

$$g_2 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{5j}{2} - 1\right] f_j g_{2-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{2} - 1\right) f_1 g_1 + (5-1) f_2 g_0\right] = 0.1376$$

$$g_3 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{3}\left[\frac{5j}{3} - 1\right] f_j g_{3-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{3} - 1\right) f_1 g_2 + \left(\frac{10}{3} - 1\right) f_2 g_1 + \left(\frac{15}{3} - 1\right) f_3 g_0\right] = 0.1840$$

$$g_4 = \frac{1}{f_0}\sum_{j=1}^{4}\left[\frac{5j}{4} - 1\right] f_j g_{4-j} = \frac{1}{f_0}\left[\left(\frac{5}{4} - 1\right) f_1 g_3 + \left(\frac{10}{4} - 1\right) f_2 g_2 + \left(\frac{15}{4} - 1\right) f_3 g_1 + 5 f_4 g_0\right] = 0.1905$$

2. FAYDA (YARAR) TEORİSİ

Fayda teorisi çok sayıda uygulama alanı olan bir konudur, burada sadece sigorta yönüyle ela alınacaktır.

2.1 Fayda (Yarar) Fonksiyonları

$u(x)$ fayda fonksiyonu faydayı ölçen bir fonksiyon olarak tanımlanır. $u(x)$ fayda fonksiyonun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılır:

$u'(x) > 0$ ve $u''(x) < 0$

Matematiksel olarak ilk ifade u'nun artan bir fonksiyon olduğunu, ikinci ifade ise u'nun konkav bir fonksiyon olduğunu söyler.

Yukarıdaki koşulları sağlayan fayda fonksiyonuna sahip bir bireyin, riskten kaçan olduğu söylenir ve riskten kaçma katsayısı aşağıda verilen formülle hesaplanır.

$$r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$$

2.2 Beklenen Fayda Kriteri

Karar vericiler beklenen fayda kriterine göre karar alırlar. Bu kriter, iki fayda kriterinden hangisinin beklenen faydası daha yüksek ise onun tercih edileceğini söyler. Beklenen faydalar eşit ise, hangisinin tercih edildiğinin farkı yoktur.

Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için, yarar fonksiyonu u olan bir yatırımcının sırasıyla X_1 ve X_2 kazançlarına sahip olan iki yatırımdan birini seçeceği varsayılsın. Yatırımcının varlığı W ve i. yatırıma yatırım yaptığı zaman, varlığı $W + X$ olsun (i=1,2). Bu durumda yatırımcı,

$E\ [u\,(W + X_1)] > E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ 1. yatırımı
$E\ [u\,(W + X_1)] < E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ 2. yatırımı tercih eder
$E\ [u\,(W + X_1)] = E\ [u\,(W + X_2)] \Rightarrow$ ikisinden hangisini isterse seçebilir.

Örnek: $u(x) = -e^{-0.002x}$, $X_1 \sim N(10^4, 500^2)$ ve $X_2 \sim N(1.1(10^4), 2000^2)$ olduğuna göre yatırımcı hangi yatırımı tercih etmelidir?

$$E\ [u\,(W + X_1)] > E\ [u\,(W + X_2)] \quad ?$$

$$E\ [u\,(W + X_1)] = E\left(-e^{-0.002(w+x_1}\right) = -e^{-0.002w}E(e^{-0.002x_1})$$
$$= -e^{-0.002w}M_{X_1}(-0.002)$$

$$\left\{X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow M_X(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}\right\}$$

$$= -e^{-0.002w}e^{-10^4(0.002)+\frac{1}{2}500^2(0.002)^2}$$
$$= -e^{-0.002w}e^{-19.5}$$

$$E\ [u\ (W\ +\ X_2\ )] = E\left(-e^{-0.002(w+x_2}\right) = -e^{-0.002w}E(e^{-0.002\ \ _2})$$
$$= -e^{-0.002w}M_{X_2}(-0.002)$$
$$= -e^{-0.002w}e^{-1.1(10^4)(0.002)+\frac{1}{2}2000^2(0.002)^2}$$
$$= -e^{-0.002w}e^{-14}$$

$\Rightarrow E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] > E\ [u\ (W\ +\ X_2\ )]$ olduğundan 1. yatırım tercih edilir.

Not: $\vartheta(x) = au(x) + b, a > 0,\ \ a, b$ sabit

$$E\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] >\ E\ [u\ (W\ +\ X_2)] \Leftrightarrow\ aE\ [u\ (W\ +\ X_1\ )] + b > a\ E\ [u\ (W\ +\ X_2)] + b$$

2.3 Jensen Eşitsizliği

u konkav bir fonksiyon iken bu fonksiyonun beklenen değeri her zaman için bu değişkenin beklenen değerinin fayda fonksiyonundan küçüktür yada eşittir.

$$E[u(x)] \leq u[E(x)]$$

Max Prim-Min Prim

X rastgele kayıp, w kişinin varlığını göstersin. Kişi bu X kaybına karşı tam koruma istesin. Kişinin bu koruma için ödediği maksimum prim P olsun. O halde sigorta yaptıran açısından ödeyeceği maksimum prim aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur:

$$u(w - \mathrm{P}) = E[u(w - X)]$$

Benzer şekilde sigorta şirketi açısından da bakılabilir. Sigorta şirketinin fayda fonksiyonu ϑ, varlığı w olsun. Bir kişinin sigorta şirketinden X rastgele kaybına karşı tam koruma istediğini varsayalım. Sigorta şirketi açısından bu koruma için kabul edilebilir min prim Π aşağıdaki eşitlik yardımıyla bulunur:

$$\vartheta(w) = E[\vartheta(w + \Pi - X)]$$

Örnek: Bir sigorta şirketi X riskini alıyor ve prim topladıktan sonra $w = 100$ varlığa sahip oluyor. Bu sigorta şirketi riskin tamamını bir reasürans şirkete devretmek istiyor. Fayda fonksiyonu $u(w) = \log(w)$ ve $P(X = 0) = P(X = 36) = 0.5$ olduğunda sigorta şirketinin reasüransa ödeyebileceği maksimum prim nedir?

Çözüm:

$$u(w - \mathrm{P}) = E[u(w - X)]$$

$$\log(w - \mathrm{P}) = E[\log(w - X)]$$

$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5\log(100 - 0) + 0.5\log(100 - 36)$$

$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5\log(100) + 0.5\log(64)$$

$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5[\log(100) + \log(64)]$$

$$\log(100 - \mathrm{P}) = 0.5[\log(6400)]$$

$$\log(100 - \mathrm{P}) = \log(6400)^{0.5}$$

$$100 - \mathrm{P} = 80$$

$$\Rightarrow \mathrm{P} = 20$$

2.4 Fayda Fonksiyonu Türleri

w'nun farklı düzeylerine farklı değerler alarak fayda fonksiyonu oluşturmak mümkündür. Matematiksel fonksiyonlar yardımıyla oluşturulan fayda fonksiyonlarını kullanmak daha kolaydır. Aşağıda fayda fonksiyonları olarak bazı matematiksel fonksiyonlar verilmiştir.

2.4.1 Üstel Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = -exp\{-\beta x\}, \qquad \beta > 0$$

Bu fayda fonksiyonunun önemli bir özelliği bireyin varlığına(w) bağlı olmayan bir karar yapısına sahiptir.

Üstel fayda fonksiyonunu kullanarak karar vermenin önemli özelliği moment çıkaran fonksiyonları arasında karşılaştırma yaparak karara ulaşmasıdır.

$u(x) = -exp\{-\beta x\}$ fonksiyonuna sahip bir bireyin rastgele X kaybına karşı kendini sigortalamak için ödeyebileceği maksimum prim

$$\mathrm{P} = \beta^{-1} \log M_X(\beta)$$

olur.

Örnek: $X \sim \gamma(2, 0.01)$ olsun. Kişi kararı üstel fayda fonksiyonuna dayanarak verecektir. Sigorta şirketinin istediği prim 208'dir. Kişi bu primi kabul etmeli midir?

Çözüm: $X \sim \gamma(2, 0.01)$ olduğundan X rastgele değişkeninin moment çıkaran fonksiyonu $M_X(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^\alpha$ dır. Kişinin kabul edebileceği maksimum prim,

$$\mathrm{P} = \beta^{-1} \log M_X(\beta) = \frac{1}{\beta} \log \left(\frac{\lambda}{\lambda - \beta}\right)^\alpha$$

$$= \frac{1}{0.001} \log \left(\frac{0.01}{0.01 - 0.001}\right)^2 = 210.72$$

olduğundan 208 birim kabul edilmelidir.

2.4.2 Karesel Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = x - \beta x^2, \qquad x < \frac{1}{2\beta}, \qquad \beta > 0$$

Örnek: X rastgele hasar için $E(X) = Var(X) = 100$ ve $P(X > 0 = 1)$ olsun.
$u(x) = x - 0.001x^2$ fayda fonksiyonu kullanarak $w = 100$ için minimum primi bulunuz.

Çözüm:

$$u(w) = E[u(w + \Pi - X)]$$

$$u(100) = E[u(100 + \Pi - X)]$$

$u(100) = 100 - 0.001(100)^2 = 90$

$$\begin{aligned} E[u(100 + \Pi - X)] &= E[100 + \Pi - X - 0.001(100 + \Pi - X)^2] \\ &= E\big[100 + \Pi - X - 0.001[(100 + \Pi)^2 + 2X(100 + \Pi) + \mathrm{X}^2]\big] \\ &= E[100 + \Pi - X - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002X(100 + \Pi) + 0.001\mathrm{X}^2] \\ &= 100 + \Pi - E(X) - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002E(X)(100 + \Pi) + 0.001\mathrm{E}(\mathrm{X}^2) \\ &= 100 + \Pi - 100 - 0.001(100 + \Pi)^2 + 0.002(100)(100 + \Pi) + 0.001(10100) \\ &= \Pi - 100 - 0.001\Pi^2 - 0.1 \end{aligned}$$

$u(100) = E[u(100 + \Pi - X)]$olduğundan

$$90 = \Pi - 100 - 0.001\Pi^2 - 0.1$$

$$\Rightarrow \Pi^2 - 1000\Pi \ + 90100 = 0$$

$$\Pi = 100.13$$

2.4.3 Logaritmik Fayda Fonksiyonu

$$u(x) = \beta \log x\,, \qquad x > 0, \qquad \beta > 0$$

Örnek: Bir yatırımcı logaritmik fayda fonksiyonu temelinde n tane şirket hissesinden birine yatırım yapacaktır. Yatırımcı B varlığına sahiptir ve i. şirket hissesine yatırım yaptığı zaman varlığı BX_i, $i = 1,2,\dots,n$ olacaktır. Yatırım kararının B ‘den bağımsız olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $E[u(BX_i)] > E[u(BX_j)]$ olduğunda i. şirket hissesine yatırım yapılacaktır.

$$\begin{aligned} E[u(BX_i)] &= E[\beta \log(BX_i)] = \beta E[\log(BX_i)] \\ &= \beta E[\log(B) + \log(X_i)] \\ &= \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_i)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[u(BX_j)] &= E[\beta \log(BX_j)] = \beta E[\log(BX_j)] \\ &= \beta E[\log(B) + \log(X_j)] \\ &= \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_j)] \end{aligned}$$

$$E[u(BX_i)] = \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_i)] > \beta E[\log(B)] + \beta E[\log(X_j)] = E[u(BX_j)]$$

$$E[\log(X_i)] > E\left[\log\left(X_j\right)\right]$$

olduğunda i. şirket hissesine yatırım yapacak. Bu durum B'den bağımsızdır.

2.4.4 Üssel Fayda Fonsiyonu

$$u(x) = x^{\beta}, \qquad x > 0, \qquad 0 < \beta < 1$$

Örnek: Rastgele kayıp $X \sim U(0{,}200)$ dağılımına sahiptir. Yatırımcı $Y = \min(X, 100)$ ile bu kayba karşı kısmi sigorta yaptırıyor(hasar 100'den küçükse kişi hasarı ödeyecek, 100'den büyükse 100 ödeyecek). Yarar fonksiyonu $u(x) = x^{2/5}$ ile kişi bu kısmi sigorta için 80 birim para ödesin mi?($w = 100$)

Çözüm:

$$E[u(300 - X)] \leq E[u(300 - 80 - Y)]$$

$$\begin{aligned} E[u(300 - X)] &= E\left[(300 - X)^{2/5}\right] \\ &= \int_0^{200} (300 - x)^{2/5} \frac{1}{200} dx \\ &= \frac{1}{200} \int_0^{200} (300 - x)^{2/5} dx = 8.237 \end{aligned}$$

$$E[u(300 - 80 - Y)] = E\left[(220 - Y)^{2/5}\right]$$

$$= \int_{0}^{100} (220 - x)^{2/5} \frac{1}{200} dx + \int_{100}^{200} (120)^{2/5} \frac{1}{200} dx$$

$$= \frac{1}{200} \left[\int_{0}^{100} (220 - x)^{2/5} dx + \int_{100}^{200} (120)^{2/5} dx \right] = 7.280$$

$$E[u(300 - X)] = 8.237 > E[u(300 - 80 - Y)] = 7.280$$

olduğundan 80 birim ödemeyi kabul etmemelidir.

3. PRİM HESAPLAMA PRENSİPLERİ

Önceki bölümlerde prim kelimesi kullanıldı ancak henüz tanımlanmadı. Bir riski kısmen veya tamamen kapsam altına alabilmek için risk veren tarafından ödenen paraya denir. Bir sigortacı sadece riskin karakteristiklerini incelemez aynı zamanda rekabetçi ortamda rakiplerinin de primlerini takip eder.

Π_X: X riskinin primi

Π_X, X'in bir fonksiyonudur. ($\Pi_X: \Phi(x)$)

3.1 Prim Prensiplerinin Özellikleri

Prim hesaplama prensipleri için istenen birçok özellik bulunmaktadır. Burada hepsinden bahsedilmeyecek ancak prim prensipleri için temel özelliklerin çoğu verilecektir.

i. Negatif Olmayan Yükleme

$\Pi_X \geq E(X)$ (Prim beklenen kayıptan az olamaz)

ii. Toplamsallık

X_1 ve X_2 bağımsız riskler olsun. X_1 ve X_2 riskleri için prim $\Pi_{X_1+X_2}$ olsun.

$$\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

iii. Çarpımsallık

$Z = aX \quad , \ a > 0$

$$\Pi_Z = a\Pi_X$$

iv. Tutarlılık

$Y = X + c \, , \ c > 0$

$$\Pi_Y = \Pi_X + c$$

v. No-ripoff (hilesiz)

$\Pi_X \leq \mathrm{x}_m \qquad \mathrm{x}_m$ sonlu

3.2 Prim Prensipleri Örnekleri

3.2.1 Saf (Net) Prim Prensibi

Net Prim $\Pi_X = E(X)$

Sigorta şirketi açısından Net Prim prensibi çok kullanışlı değildir. Beklenen hasarları kapsar, kar için bir yükleme yoktur. Net prim, hesaplama prensiplerinin 5 özelliğini de sağlar.

3.2.2 Beklenen Değer Prim Prensibi

$$\Pi_X = (1+\theta)E(X) \ , \theta > 0, \quad \theta \text{ prim yükleme katsayısı}$$

En basit prim hesaplama yöntemi olup, aynı ortalamalı tüm risklere aynı primi yüklemesi zayıf noktasıdır.

$$\Pi_X = E(X) + \theta E(X)$$

Özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakılsın.

i. $\Pi_X > E(X)$

$\Pi_X = E(X) + \theta E(X) > E(X)$

ii. $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$?

$$\Pi_{X_1+X_2} = (1+\theta)\mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) = (1+\theta)[E(X_1) + E(X_2)]$$

$$= (1+\theta)E(X_1) + (1+\theta)E(X_2)$$

olduğundan $\Pi_{X_1+X_2} = \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$'dir.

iii. $\Pi_Z = \mathrm{a}\Pi_X, \qquad Z = aX$

$$\Pi_Z = (1+\theta)\mathrm{E}(Z) = (1+\theta)E(aX) = a(1+\theta)E(X) = a\Pi_x$$

olduğundan $\Pi_Z = a\Pi_X$'dir.

iv. $\Pi_Z = \Pi_X + c, \qquad \mathrm{Y} = \mathrm{X} + c, \qquad c > 0$

$$\Pi_Y = (1+\theta)\mathrm{E}(Y) = (1+\theta)E(X+c) = (1+\theta)[E(X)+c] = (1+\theta)E(X) + (1+\theta)c \neq \Pi_X + c$$

olduğundan $\Pi_Y \neq \Pi_X + c$

v. Tersine bir örnek gösterilsin. $\Pi_Y \leq x_m$?

$$\mathrm{P} = (X = b) = 1, \qquad \mathrm{b} > 0 \text{ olsun}$$

$$\Pi_X = (1+\theta)\mathrm{E}(X) = (1+\theta)b \leq b \text{ olmalı}$$

$$\mathrm{E(X)} = b(P(X = b) = b$$

$(1+\theta)b > b$ olduğundan özellik sağlanmamıştır.

3.2.3 Varyans Prim Prensibi

$$\Pi_X = \mathrm{E}(X) + \alpha Var(X) \qquad \alpha > 0$$

(Burada yükleme varyansın belli bir orandadır. $\alpha > 0$ olduğundan non-negatif yükleme söz konusudur.)

i. $\Pi_X = \mathrm{E}(X) + \alpha Var(X) > E(X)$

ii. $\Pi_{X_1+X_2} = \mathrm{E}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2) + \alpha \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2)$

$$= \mathrm{E}(\mathrm{X}_1) + E(\mathrm{X}_2) + \alpha \mathrm{Var}(\mathrm{X}_1) + \alpha Var(\mathrm{X}_2)$$

$$= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

iii. $\Pi_Z = a\Pi_X$

$$\Pi_Z = \mathrm{E}(a\mathrm{X}) + \alpha \mathrm{Var}(a\mathrm{X})$$

$$= a\mathrm{E}(\mathrm{X}) + \alpha a^2 \mathrm{Var}(\mathrm{X})$$

$\neq a\Pi_X$ olduğundan sağlanmadı.

iv. $\Pi_Z = \Pi_X + c$

$$\Pi_Z = \mathrm{E}(\mathrm{X} + \mathrm{c}) + \alpha \mathrm{Var}(\mathrm{X} + \mathrm{c})$$

$$= \mathrm{E}(X) + c + \alpha \mathrm{Var}(\mathrm{X})$$

$$= \mathrm{E}(\mathrm{X}) + \alpha \mathrm{Var}(\mathrm{X}) + \mathrm{c}$$

$$= \Pi_X + c$$

v. No-ripoff sağlanmıyor

Örneğin $P(X = 8) = P(X = 12) = 0.5$

$$E(X) = 8\frac{1}{2} + 12\frac{1}{2} = 4 + 6 = 10$$

$$E(X^2) = 8^2\frac{1}{2} + 12^2\frac{1}{2} = 32 + 72 = 104$$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ =104-100=4

$\Pi_X = E(X) + \alpha Var(X) = 10 + \alpha 4 = 10 + 4\alpha$

$\alpha > 0{,}5$ için $\Pi_X > 12$ oluyor. $\Pi_X \leq x_m$ olmalı.

3.2.4 Stardart Sapma Prim Prensibi

$$\Pi_X = \mathrm{E(X)} + \alpha[\mathrm{Var(X)}]^{\frac{1}{2}} \qquad \alpha > 0$$

Varyans prensibi ile aynı olmasına karşın özellikleri farklıdır.

i. $\Pi_X > \mathrm{E(X)}$

ii. $\Pi_{X_1+X_2} = \mathrm{E(X_1 + X_2)} + \alpha[\mathrm{Var(X_1 + X_2)}]^{\frac{1}{2}}$ özellik sağlanmıyor

iii. $\Pi_Z = a\Pi_X \qquad Z = aX$

$\Pi_Z = E(aX) + \alpha[\mathrm{Var(X_1 + X_2)}]^{\frac{1}{2}} = aE(X) + \alpha(a^2)^{\frac{1}{2}}(Var(X))^{\frac{1}{2}}$

$= a[E(X) + \alpha\big(Var(X)\big)^{\frac{1}{2}} = a\Pi_X$

iv. $\Pi_Z = E(X + c) + \alpha\big(Var(X)\big)^{\frac{1}{2}} = E(X) + c + \alpha(Var(X))^{\frac{1}{2}}$

$= E(X) + \alpha Var(X)^{\frac{1}{2}} + c = \Pi_X + c$

v. Varyans prensibi ile aynı örnek verilebilir.

3.2.5 Sıfır Fayda Prensibi

Sigortanın fayda fonksiyonu $u(x)$ olsun ve $u'(x) > 0$ ve $u''(x) < 0$ özelliklerini sağlasın.

$$u'(w) = E[u(w + \Pi_X - X)]$$

Dolayısıyla prim w'ya bağlıdır.

İstisna: $u(w) = -\exp\{-\beta x\}, \quad \beta > 0$ olduğunda w'ya bağlı olmaz

$\Pi_X = \beta^{-1} log\ E[\exp\{-\beta x\}]$ üstel prensip

i. $u'(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \leq u(w + \Pi_X - E(X))$

   $u'(x) > 0$ olduğundan $\Pi_X > E(X)$ 'dir.

ii. Toplamsallık üstel durum hariç sağlamaz

$$\begin{aligned}\Pi_{X_1+X_2} &= \beta^{-1} logE[\exp\{\ \beta(X_1 + X_2)\}] \\ &= \beta^{-1} logE[\exp\{\beta_1 X_1\}]E[\exp\{\beta X_2\}] \\ &= \beta^{-1} logE[\exp\{\beta X_1\}] + \beta^{-1} logE[\exp\{\beta X_2\}] \\ &= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}\end{aligned}$$

iii. $u(x) = -\exp\{-\beta X\} \quad X \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad Y = \alpha X, \quad \alpha > 0$

$$\Pi_X = \beta^{-1} logE[\exp(\beta X)] = \beta^{-1}\left(\beta\mu + \frac{\sigma^2\beta^2}{2}\right) = \mu + \frac{\sigma^2\beta}{2}$$

$\Pi_Y = \alpha\mu + \frac{\alpha^2\sigma^2\beta^2}{2} \neq \alpha\Pi_X$ olduğundan sağlanmaz.

iv. $Y = X + c$ iken Π_Y

$$u(w) = E[u(w + \Pi_Y - Y)] = E[u(w + \Pi_Y - X - c)]$$

$$= E[u|w(w + \Pi_Y - c - X)$$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \Pi_X + c$$

v. No-ripoff $w + \Pi_X - X \geq w + \Pi_X - xm$

$u(w) = E[u(w + \Pi_X - X)] \geq E[u(w + \Pi_X - xm)] = u(w + \Pi_X - xm)$

$u'(x) > 0$ olduğundan $\Pi_X - x_m \leq 0$

3.2.6 Esscher Prensibi

Esscher prim ilkesi aşağıda verilmektedir.

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]}, h > 0$$

X, $(0, \infty)$'da f yoğunluk fonksiyonuna sahip bir r.d. olduğu varsayılsın ve g fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

$g(x) = \frac{e^{hx} f(x)}{\int_0^{\infty} e^{hx} f(x) dx}$ $\tilde{X}$ r.d. nin yoğunluk fonksiyonu

$G(x) = \frac{\int_0^{x} e^{hy} f(y) dy}{M_X(h)}$ h parametreli F'nin Esscher dönüşümü

$\tilde{X}$ rastgele değişkeninin beklenen değeri Esscher primini vermektedir. Önce $\tilde{X}$'nın moment çıkaran fonksiyonu elde edilsin.

$$M_{\tilde{X}}(t) = \int_0^{\infty} e^{tx} g(x) dx$$

$g(x)$ yerine yazılırsa, $\tilde{X}$'nın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır:

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$$

O halde Esscher primi

$$\Pi_X = E(\tilde{X})$$

biçimindedir.

Örnek: $F(x) = 1 - \exp\{-\lambda x\}, x > 0$ olsun. h parametreli F'nin Esscher dönüşümünü bulunuz. $(h < \lambda)$

Çözüm:$X \sim F \Rightarrow M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} = \frac{\lambda/(\lambda - t - h)}{\lambda/(\lambda - h)}$$

$\lambda - h$ parametreli üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonu

$$= \frac{\lambda - h}{\lambda - t - h}$$

O halde $\tilde{X} \sim Exp(\lambda - h)$'dır.

$\tilde{X}$'nın dağılım fonksiyonu,

$$G(x) = 1 - \exp\{-(\lambda - h)x\}$$

ve $\tilde{X}$'nın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g(x) = (\lambda - h)\exp\{-(\lambda - h)x\}$$

olur.

Örnek: $X \sim Üstel\ (\lambda = 1), h < 1$ parametreli Esscher prensibine göre primi bulunuz.

Çözüm: Önceki örnekte üstel dağılımının Esscher dönüşümü $(\lambda - h)$ parametreli üstel olarak bulunumuştu. $\lambda = 1$ olduğundan Esscher primi,

$$\Pi_X = E(\tilde{X}) = \frac{1}{1-h}$$

olur.

Özellikleri sağlayıp sağlamadığına bakılsın.

i. Esscher prensibi negatif olmama özelliğini sağlar. Bu durum şu şekilde gösterilir.

$h = 0$ için $\quad M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)}$

$$M_{\tilde{X}}(t) = \frac{M_X(t)}{M_X(0)}$$

Dolayısıyla $E(\tilde{X}) = E(X) = \Pi_X$

$h \geq 0$ için $E[\tilde{X}^r] = \frac{d^r M_{\tilde{X}}(t)}{dt^r} \Big|_{t=0}$

$$= \frac{d^r}{dt^r} \frac{M_X(t+h)}{M_X(h)} \Big|_{t=0} = \frac{{M_X}^r(h)}{M_X(h)}$$

ve böylece

$$\frac{d}{dh}\Pi_X = \frac{d}{dh}\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{X}}) = \frac{d}{dh}\ \frac{M'_X(h)}{M_X(h)}$$

$$= \frac{1}{\left(M_X(h)\right)^2} M_X^{(2)}.M_X(h) - (M'_X(h))^2$$

$$= \frac{M_X^{(2)}(h)}{M_X(h)} - \left(\frac{M'_X(h)}{M_X(h)}\right)^2$$

$$= \mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{X}}^2) - \left(\mathrm{E}(\widetilde{\mathrm{X}})\right)^2 \geq 0$$

olur. Böylelikle Π_X, h'nin artan bir fonksiyonudur. $h \geq 0$ için $\Pi_X \geq E(X)$ olduğundan negatif olmama özelliği sağlanmıştır.

ii. Esscher prensibi tutarlıdır çünkü $Y = X + c$

$$\Pi_Y = \frac{E[Ye^{hY}]}{E[e^{hY}]} = \frac{E[(x+c)e^{h(X+c)}}{E[e^{h(X+c)}]}$$

$$= \frac{E[Xe^{hX}]e^{hc} + c.E[e^{hX}]e^{hc}}{E[e^{hX}]e^{hc}} = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]e^{hc}}$$

$$= \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} + c$$

$$\Rightarrow \Pi_Y = \Pi_{X+c}$$

iii. Toplamsaldır.

$$\Pi_{X_1+X_2} = \frac{E\left[(X_1 + X_2)e^{h(X_1+X_2)}\right]}{E\left[e^{h(X_1+X_2)}\right]} = \frac{E(X_1 e^{hX_1})E(e^{hX_2}) + E(e^{hX_1})E(X_2 e^{hX_2})}{E(e^{hX_1})E(e^{hX_2})}$$

$$= \frac{E(X_1 e^{hX_1})}{E(e^{hX_1})} + \frac{E(X_2 e^{hX_2})}{E(e^{hX_2})}$$

$$= \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2}$$

iv. No-ripoff sağlanır.

x_m mümkün en büyük hasar olsun. $P(X \leq x_m) = 1$

$$xe^{hx} \leq x_m e^{hx}$$

$$\Pi_X = \frac{E[Xe^{hX}]}{E[e^{hX}]} \leq \frac{E[x_m e^{hX}]}{E[e^{hX}]} = x_m$$

v. Çarpımsallık sağlanmıyor. $Z = aX$

$$\Pi_Z(h) = \frac{E[Ze^{hZ}]}{E[e^{hZ}]} = \frac{E[aXe^{ha}\ \ ]}{E[e^{haX}]}$$

$$= \frac{aE[Xe^{ahX}]}{E[e^{ahX}]} = a\Pi_{aX}(h) \neq a\Pi_X(h), \qquad a \neq 1\ için$$

3.2.7 Düzeltilmiş Risk Primi Prensibi

X negatif olmayan r.d.nin dağılım fonksiyonu F olsun. Düzeltilmiş risk primi

$$\Pi_X = \int_0^{\infty} [P(X > x)]^{1/\rho}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} [1 - F(x)]^{1/\rho}\, dx, \quad \rho \geq 1 \quad (\rho \text{ :Risk index})$$

dönüşüm yöntemidir. X^* negatif olmayan r.d.nin H dağılım fonksiyonu olarak tanımlansın.

$$1 - H(x) = [1 - F(x)]^{\frac{1}{\rho}}$$

$$E[X^*] = \int_0^{\infty} [1 - H(x)]dx$$

$$\Pi_X = E[X^*]$$

Örnek: X r.d.i ortalaması $1/\lambda$ olan üstel dağılıma sahiptir. Düzeltilmiş risk primini bulunuz.

$$1 - F(x) = e^{-\lambda x}$$

$$1 - H(x) = e^{-\lambda x/\rho}$$

$\Rightarrow X^*$ ortalaması $\frac{\rho}{\lambda}$ olan üstel dağılıma sahiptir. O halde

$$\Pi_X = \frac{\rho}{\lambda}$$

olur.

Örnek : $X \sim$ Pareto(α, λ). Düzeltilmiş risk primi bulunur.

$$1 - F(x) = (\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha}$$

$$F(x) = 1 - (\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha}$$

$$1 - H(x) = (\frac{\lambda}{\lambda + x})^{\alpha/\rho}$$

$$\Rightarrow X^{*} \sim Pareto\left(\frac{\alpha}{\rho}, \lambda\right) \Rightarrow \ \Pi_X = \frac{\rho\lambda}{\alpha\lambda}\ ,\ \rho < \alpha$$

Toplamsallık dışında tüm özellikleri taşır.

i. $\Pi_X \geq E(X) \quad \rho \geq 1$

$$1 - F(x) \leq [1 + F(x)]^{1/\rho}, \qquad x \geq 0$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)]dx$$

$$\Pi_X \geq E(X)$$

ii. $Y = X + C$

$$P(Y > x) = \begin{cases} 1, & x < c \\ 1 - F(x - c), & x \geq c \end{cases}$$

$$\Pi_Y = \int_0^{\infty} [P(Y > x)]^{1/\rho} dx$$

$$= \int_0^{c} dx + \int_c^{\infty} [1 - F(x - c)]^{1/\rho} dx$$

$$= c + \int_0^{\infty} [1 - F(y)]^{1/\rho} dy$$

$$= c + \Pi_X$$

iii. $Z = aX$

$$P(Z > x) = P\left(X > \frac{x}{a}\right)$$

$$\Pi_Z = \int_0^{\infty} [P(Z > x)]^{1/\rho} dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left[P(x > \frac{x}{a})\right]^{1/\rho} dx = a\int_0^{\infty} [P(X > y)]^{1/\rho} dy = a\Pi_X$$

iv. No-ripoff sağlanır

$$F(x_m) = 1$$

$$\Pi_X = \int_0^{x_m} [1 - F(x)]^{1/\rho} dx \leq \int_0^{x_m} dx = x_m$$

v. Toplamsallığın sağlanmadığı ile ilgili örnek verilsin:

X_1 ve X_2 *birbirinden bağımsız aynı dağılıma sahip olsun*

$$P(X_1 = 0) = P(X_2 = 0) = 0.5 \qquad \rho = 2$$

$$\Pi_{X_1} = \Pi_{X_2} = 0.5^{\frac{1}{2}}$$

$$\Pi_{X_1+X_2} = 0.5\left(1 + 3^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \Pi_{X_1} + \Pi_{X_2} > \Pi_{X_1+X_2}$$

4. KOLEKTİF RİSK MODELİ

Kısa dönemde toplam hasar miktarı ile ilgilenilir(örneğin 1 yıl). Toplam hasar miktarı S rastgele değişkeni ile gösterilir. Burada S'nin dağılım fonksiyonu ve momentleri elde edilecektir.

4.1 Model

S rastgele değişkeni bir yıllık dönemde meydana gelen hasarların toplamı,

N bir yıllık dönemde meydana gelen hasar sayısı

olsun.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$N = 0$ iken $S = 0$ olur (hiç hasar yokken toplam hasar sıfır olur)

Bu noktada iki önemli varsayım yapılmıştır:

1. $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılımlı
2. N, $\{X_i\}_{i=1}^{N}$'den bağımsız.

4.1.1 *S*'nin Dağılımı

$G(x) = P(S \leq x) \rightarrow$ Toplam hasarın dağılım fonksiyonu

$F(x) = P(X_1 \leq x) \rightarrow$Bireysel hasar miktarlarının dağılım fonksiyonu

$p_n = P(N = n), \{p_n\}_{n=0}^{\infty} \rightarrow$ Hasar sayısının olasılık fonksiyonu

$(S \leq x) = \bigcup_{n=0}^{\infty}\{S \leq x \text{ ve } N = n\}$ biçiminde gösterilir.

$$G(x) = P(S \leq x) = \sum_{n=0}^{\infty} P\{S \leq x \text{ ve } N = n\}$$

$$P\{S \leq x \text{ ve } N = n\} = P\{S \leq x \,|N = n\}P(N = n)$$

$$P\{S \leq x \,|N = n\} = P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq x\right) = F^{n*}(x)$$

Böylelikle $x \geq 0$ için,

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{n*}(x)$$

elde edilir. Burada $F^{0*}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & dy \end{cases}$ dır.

Tam sayı değer alan bireysel hasar miktarı durumunda ise olasılık fonksiyonu

$$f_j = F(j) - F(j-1), \qquad j = 1,2,3, \ldots$$

olsun. S'nin olasılık fonksiyonu $\{g_x\}_{x=0}^{\infty}$

$$g_x = \sum_{n=0}^{\infty} p_n f_X^{n*}, \qquad g_0 = p_0, \qquad x = 1,2,3, \ldots$$

olarak verilir. Burada $f_X^{n*} = P(\sum_{i=1}^{n} X_i = x)$'dir.

4.1.2 *S*’nin Momentleri

Koşullu beklenen değer yardımıyla hesaplanabilir. Y ve Z momentleri olan iki rastgele değişken olsun.

$$E[Y] = E\big[E[Y|Z]\big]$$

$$Var(Y) = E\big[Var[Y|Z]\big] + Var\big[E[Y|Z]\big]$$

O halde S’nin beklenen değeri

$$E[S] = E\big[E[S|N]\big]$$

olur.

$m_k = E\left({X_1}^k\right), \; k = 1,2,3,\ldots$ olsun. $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ olduğundan

$$E[S|N = n] = E\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = nm_1$$

dolayısıyla

$$E[S|N] = Nm_1$$

$$E\big[E[S|N]\big] = E[Nm_1] = E[N]m_1$$

olur, yani beklenen toplam hasar miktarı, beklenen hasar sayısı ile her bir hasarın beklenen değerinin çarpımına eşittir.

Benzer şekilde,

$$Var[S|N=n] = Var\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} Var[X_i] = n(m_2 - {m_1}^2)$$

$$Var[S|N] = N(m_2 - {m_1}^2)$$

Bu ifade koşullu varyans tanımında yerine konursa,

$$\begin{aligned} Var(S) &= E\big[Var[S|N]\big] + Var\big[E[S|N]\big] \\ &= E[N(m_2 - {m_1}^2)] + Var[Nm_1] \\ &= E[N](m_2 - {m_1}^2) + Var[N]{m_1}^2 \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Aynı şekilde S’nin moment çıkaran fonksiyonu elde edilebilir:

$$M_S(t) = E[e^{tS}] = E\big[E[e^{tS}|N]\big]$$

$$E[e^{tS}|N=n] = E\left[\exp\left\{t\sum_{i=1}^{N} X_i\right\}\right] = \prod_{i=1}^{n} E[\exp\{tX_i\}], \qquad X_i'\text{ler bağımsız}$$

$$E[e^{tS}|N=n]=[M_X(t)]^n, \qquad X_i' \text{ler aynı dağılımlı}$$

Burada $M_X(t)=E[\exp\{tX_1\}]$'dir. O halde

$$M_S(t)=E[M_X(t)^N]=E[\exp\{\log M_X(t)^N\}]$$
$$=E[\exp\{N\log M_X(t)\}]$$
$$M_S(t)=M_N[\log M_X(t)]$$

Benzer şekilde X kesikli rastgele değişkeni negatif olmayan tam sayılarda tanımlı olduğunda P_x olasılık çıkaran fonksiyonu kullanılarak

$$P_S(r)=P_N[P_X(r)]$$

yazılır.

4.2 Bileşik Poisson Dağılımı

$X_1, X_2, \dots, X_N$ hasar miktarları, $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ toplam hasar miktarını göstermek üzere N'nin dağılımı λ parametreli Poisson olduğunda S'nin dağılımı "Bileşik Poisson" olmaktadır.

Koşullu beklenen değer ve varyansın formülü

$$E(S) = E(N)E(X)$$

$$Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)[E(X)]^2$$

idi. O halde Bileşik Poisson dağılımı için beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi olur:

$$E(S) = \lambda m_1$$

$$Var(S) = \lambda(m_2 - {m_1}^2) + \lambda {m_1}^2 = \lambda m_2$$

Çarpıklık katsayısı ise

$$S_k(s) = \frac{E[(S - \lambda m_1)^3]}{Var(S)^{3/2}} = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}}$$

Örnek: S'nin dağılımı Bileşik Poisson ($\lambda = 100$), hasar miktarının dağılımı $Pareto$ $(4, 1500)$ olsun. $E(S) =?$ $Var\ (S) =?$ $S_k(s) =?$

Çözüm: $X \sim Pareto(\alpha, \beta)$

$m_1 = E(X) = \frac{\beta}{\alpha-1}$ $\quad m_2 = E(X^2) = \frac{2\beta^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}$ $\quad m_3 = E(X^3) = \frac{6\beta^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}$

$$E(S) = \lambda m_1 = 100\frac{1500}{3} = 50000$$

$$Var(S) = \lambda m_2 = 100\frac{2(1500)^2}{(3)(2)}(7.5)10^7$$

$$E[(S-\lambda m_1)^3] = \lambda m_3 = 100.\frac{6(1500)^3}{(3)(2)(1)} = (1.5)^3 10^{11}$$

$$S_k(s) = \frac{\lambda m_3}{(\lambda m_2)^{3/2}} = 0.5196$$

4.3 Reasüransın Etkisi

Toplam hasar miktarı sigorta şirketi ve reasüransın hasar miktarları toplamından oluşur.

$$S = S_I + S_R$$

Burada S_I, sigorta şirketinin toplam hasar miktarını S_R, reasüransın toplam hasar miktarını göstermektedir.

4.3.1 Oransal Reasürans

Sigorta şirketi her bir hasar a oranını, reasürans şirketi ise $(1-a)$ oranını öder.

$$S_I = \sum_{i=1}^{N} aX_i = aS \qquad \{S = 0 \text{ ise } S_I = 0 \text{ olur}\}$$

$$S_R = (1-a)S$$

Örnek: Bir riskin toplam hasarlarının dağılımı $\lambda = 100$ olan *Bileşik Poisson* olsun. Bireysel hasar miktarlarının dağılımı ortalaması 1000 olan üsteldir.$a = 0.8$ ile oransal reasürans anlaşması yapılıyor. S_R'nin dağılımını bulunuz.

Çözüm: Reasürans her hasarın %20 sini öder. S_R'nin dağılımı100 parametreli *Poisson* ve bireysel hasar miktarları ortalaması 200 olan üsteldir.

4.3.2 XL Reasürensı (Aşan Kayıp Reasüransı)

S toplam hasar, M retenşın sınırı olsun.

$S_I = \sum_{i=1}^{N} \min(X_i, M), \quad N = 0$ olduğunda $S_I = 0$

$S_R = \sum_{i=1}^{N} \max(0, X_i - M), \quad N = 0$ olduğunda $S_R = 0$

$S_R, N > 0$ olduğu zamanlarda bile sıfır olabilir. Eğer meydana gelen $n > 0$ hasarının hepsi M miktarının altındaysa, tüm hasarlar sigorta şirketi tarafından ödenir.

Reasüransın toplam hasarı iki yöntemle ele alınabilir.
Birincisi $S_R = \sum_{i=1}^{N} \max(0, X_i - M)$ ile reasüransın hasar miktarının sıfır olmasının mümkün olduğu durum, ikincisi M'yi aşan hasarları göz önüne alarak reasürans için sıfır ödeme olmaması durumu. İkinci durumda reasüransın sıfır olmayan hasar ödemelerinin toplamı

$$S_R = \sum_{i=1}^{N_R} \hat{X}_i \ , \quad (N_R = 0 \text{ olduğunda } S_R = 0)$$

Burada

N_R: Reasürans için sıfırdan farklı ödemelerin sayısı

$\hat{X}_i$:Reasürans tarafından ödenen *i*. hasar miktarı

$\hat{X}_i$'nin dağılımı

$$P(\hat{X}_i \leq x) = \frac{F(x+M) - F(M)}{1 - F(M)}$$

ile bulunur.

N_R'nin dağılımı ise aşağıdaki gibi bulunur:

$\{I_j\}_{j=1}^{\infty}$ birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip gösterge fonksiyonu olsun.

$$I_j = \begin{cases} 0, & x_j \leq M \\ 1, & x_j > M \end{cases} \qquad j = 1,2, \ldots$$

$$P(I_j = 1) = P(X_j > M) = 1 - F(M) = \Pi_M$$

ve

$$N_R = \sum_{j=1}^{N} I_j \quad (\mathrm{N} = 0 \text{ olduğunda } N_R = 0)$$

olduğundan N_R bileşik bir dağılıma sahiptir. Olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{N_R}(r) = P_N[P_I(r)]$$

olarak yazılır. Burada,

P_I: Her bir indikatör rastgele değişkenin olasılık çıkaran fonksiyonudur.

Örnek: $N \sim Poisson(\lambda)$ olduğunda N_R ‘nin dağılımı nedir?

Çözüm:

$$P_N(r) = exp\{\lambda(r-1)\}$$

$$P_{N_R}(r) = exp\{\lambda(1 - \Pi_M + \Pi_M r - 1)\} = exp\{\lambda\Pi_M(r-1)\}$$

O halde

$$N_R \sim Poisson(\lambda\Pi_M)$$

olur.

Örnek: Toplam hasar dağılımı *Bileşik Poisson* olsun. Poisson parametresi $\lambda = 200$, bireysel hasarların dağılımı $Pareto(3{,}300)$ olsun. $M = 300$ için aşan kayıp reasürans anlaşması(XL) yapıldığında reasürans için ortalama ve varyansı bulunuz.

Çözüm: İki yöntemle çözülebilir.

Yöntem 1

Bu yöntemde $S_R, \lambda = 200$ parametreli bileşik dağılıma sahiptir. Bireysel hasar miktarları $\max(0, X-300)$, $X \sim Pareto(\alpha = 3, \lambda^* = 300)$.

$f(x) = \frac{\alpha {\lambda^*}^{\alpha}}{(\lambda^*+x)^{\alpha+1}}$ $, x > 0,\ \alpha > 0,\ \lambda^* > 0$ ve $F(x) = 1 - \left(\frac{\lambda^*}{\lambda^*+x}\right)^{\alpha},\ \ x > 0$ 'dir.

$\alpha = 3\ , \lambda = 600$ olan Pareto dağılımının beklenen değeri $E(X) = \dfrac{\lambda}{\alpha} = \dfrac{600}{2}$

$$E(S_R) = \lambda E[\max(0, X-300)] = 200E[\max(0, X-300)]$$

$$= 200 \int_{300}^{\infty} (x-300) \frac{3(300)^3}{(300+x)^4} dx$$

$$\begin{Bmatrix} x - 300 = u & x = 300\ için\ u = 0 \\ dx = du & x = \infty\ \ için\ u = 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 200 \int_{0}^{\infty} u \frac{3(300)^3}{(u+600)^4} du = \frac{200}{2^3} \int_{0}^{\infty} u \frac{3(600)^3}{(u+600)^4} du$$

$$= \frac{200}{2^3} \frac{600}{2} = 7500$$

$$Var(S_R) = \lambda E[(\max(0, X-300))^2]$$

$$= 200 \int_{300}^{\infty} (x-300)^2 \frac{3(300)^3}{(300+x)^4} dx$$

$$\begin{Bmatrix} x-300 = u & x = 300 \text{ } için \text{ } u = 0 \\ dx = du & x = \infty \text{ } için \text{ } u = 0 \end{Bmatrix}$$

$$= 200 \int_{0}^{\infty} u^2 \frac{3(300)^3}{(u+600)^4} du = \frac{200}{2^3} \int_{0}^{\infty} u^2 \frac{3(600)^3}{(u+600)^4} du$$

$\alpha = 3, \lambda = 600$ olan Pareto dağılımının ikinci momenti

$$E(X^2) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{2(600)^2}{(2)(1)}$$

Yöntem 2

S_R, $200[1-F(300)] = 200.\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 25$ Poisson parametreli *Bileşik Poisson* dağılmaktadır. Bireysel hasar miktarları

$$P(\hat{X} \leq x) = \frac{F(x+300) - F(300)}{1 - F(300)}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{300}{300 + x + 300}\right)^3 - 1 + \left(\frac{300}{600}\right)^3}{\left(\frac{300}{600}\right)^3}$$

$$= 1 - \left(\frac{600}{x + 600}\right)^3$$

$$\hat{X} \sim Pareto(3{,}600)$$

olur. Bu durumda

$$E(S_R) = 25E(\hat{X}) = 25\frac{600}{2} = 7500$$

$$Var(S_R) = 25E(\hat{X}^2) = 25\frac{2(600)^2}{(2)(1)} = 9.10^6$$

olarak elde edilir.

4.4 Toplam Hasar Dağılımının Ardışık Hesaplanması

Bireysel hasar miktarları negatif olmayan tam sayı ve hasar sayısı dağılımı $(a,\ b, 0)$ dağılım sınıfına sahip olduğunda toplam hasar miktarının dağılımı Panjer Yineleme formülünü kullanılarak hesaplanabilir.

4.4.1 (a,b,0) Sınıfı Dağılımlar

Negatif olmayan kesikli dağılımılar sınıfına ait olan Binom, geometrik, negatif binom ve poisson dağılımları aktüerya literatüründe $(a,\ b,0)$ sınıfı dağılımları olarak adlandırılırlar.

Tanım: Negatif olmayan kesikli rastgele değişken X, eğer olasılık fonksiyonu aşağıdaki yenileme formülünü sağlıyorsa $(a,\ b,0)$ sınıfına aittir, denir:

$$f(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) f_X(x-1), \qquad x = 1,2, \dots$$

Burada a ve b sabit, ve $f_X(0)$ başlangıç değeri verilir.

Aşağıdaki tabloda $(a,\ b, 0)$ sınıfı dağılımların a ve b değerleri ile $f_X(0)$ başlangıç değerleri verilmiştir.

Tablo: $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}, \mathbf{0})$ sınıfı dağılımlar

Dağılım	a	b	$f_X(0)$
Binom; $\boldsymbol{B(n, q)}$	$-\frac{q}{1-q}$	$\frac{(n+1)q}{1-q}$	$(1-q)^n$
Poisson; $\boldsymbol{P(\lambda)}$	0	λ	$e^{-\lambda}$
Negatif Binom; $\boldsymbol{NB(k, p)}$	$1-p$	$(1-p)(k-1)$	p^k
Geometrik; $\boldsymbol{GM(p)}$	$1-p$	0	p

4.4.2 Panjer Yineleme Formülü

Panjer indirgeme formülü risk teorisinde en önemli sonuçlardan bir tanesidir. Sadece toplam hasarın dağılımda değil, aynı zamanda iflas teorisinde de kullanılır.

Bu indirgeme formülü ile hasar sayısı (a,b,0) sınıfına ait bir dağılıma sahip ve bireysel hasar miktarının dağılımı $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$ biçimde kesikli olduğunda, toplam hasarın olasılık fonksiyonu hesaplanır.

Bireysel hasar miktarının negatif olmayan tam sayı değerler olan bir dağılım olduğunu varsayılsın. S'de negatif olmayan tam değerler alan bir dağılım olur.

$$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$S = 0 \Rightarrow (N = 0)$ veya $N = n\ ve\ S = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n} X_i = 0 \Rightarrow$ her bir hasar $X_i = 0$

X_i'ler bağımsız olduğundan

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = 0\right) = f_0^n$$

$$g_0 = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n . f_0^n = P_N(f_0)$$

S'nin olasılık fonksiyonu

$$P_S(r) = P_N[P_X(r)] \qquad (1)$$

$$P_S'(r) = P_N'[P_X(r)]P_X'(r) \qquad (2)$$

(*) ve (**) formülleri kulllanılarak

$$P_S'(r) = aP_X(r)P_S'(r) + (a+b)P_S(r)P_X'(r) \qquad (3)$$

elde edilir. P_S ve P_X olasılık çıkaran fonksiyonları aşağıdaki gibi verilir.

$$P_S(r) = \sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j \;\; ve \;\; P_X(r) = \sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k$$

$$P_S'(r) = \sum_{j=0}^{\infty} j r^{j-1} g_j \;\; ve \;\; P_X'(r) = \sum_{k=0}^{\infty} k r^{k-1} f_k$$

(3) ifadesinde yerine koyulduğunda

$$\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j = a\left(\sum_{k=0}^{\infty} r^k f_k\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} jr^{j-1}g_j\right)$$
$$+(a+b)\left(\sum_{j=0}^{\infty} r^j g_j\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} kr^{k-1}f_k\right)$$

ifadesine ulaşılır. Gerekli düzenlemeler yapıldıktan sonra yukarıdaki ifade

$$xg_x = a\sum_{k=0}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=0}^{x} kf_k g_{x-k}$$
$$= af_0xg_x + a\sum_{k=1}^{x} f_k(x-k)g_{x-k} + (a+b)\sum_{k=0}^{x} kf_k g_{x-k}$$
$$= (1-af_0)xg_x = \sum_{k=1}^{x}(a(x-k)+(a+b)k)f_k g_{x-k}$$

biçiminde elde edilir. Buradan

$$\Rightarrow g_x = \frac{1}{1-af_0}\sum_{k=1}^{x}(a+\frac{bk}{x})\, f_k g_{x-k}$$

olarak Panjer yenileme formülü elde edilmiş olur.

Örnek : $N \sim Poisson(2)\ ve\ f_j = 0.6(0.4)^{j-1},\ j = 1,2,3 \ldots, x = 0,1,2,3$ için g_x'i hesaplayınız.

Çözüm:

$f_0 = 0\ ,\ g_0 = P_0 \Rightarrow\ a = 0,\ b = 2$

$$g_x = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{k=1}^{x} (a + \frac{bk}{x})\, f_k g_{x-k}$$

$a = 0,\ b = 2$ konulduğunda

$$g_x = \frac{2}{x} \sum_{k=1}^{x} k\, f_k g_{x-k}$$

$$g_0 = p_0 = e^{-2} = 0.1353$$

$$g_1 = 2f_1 g_0 = 0.1624$$

$$g_2 = f_1 g_1 + f_2 g_0 = 0.1624$$

$$g_3 = \frac{2}{3}(f_1 g_2 + 2f_2 g_1 + 3f_3 g_0) = 0.1429$$

S'nin dağılım fonksiyonu için bir ardışık hesaplama formülü bulunmaz.

İstisna: $N \sim Geometrik(p)$ $\quad p_n = pq^n,\ n = 0,1,2, \ldots$

Bu durumda $a = q,\ b = 0\ ve$

$$g_x = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{k=1}^{x} f_k g_{x-k}$$

$$G(Y) = \sum_{x=0}^{y} g_x$$

$$g_0 + \frac{a}{1 - af_0} \sum_{k=1}^{y} f_k G(y - k)$$

S'nin momentlerini Panjer indirgeme formülü ile bulabiliriz. $r = 1,2,3 \ldots$

$$E[S^r] = \sum_{x=0}^{\infty} x^r g_x$$

$$= \frac{1}{1 - af_0} \sum_{x=1}^{\infty} x^r \sum_{k=1}^{x} \left(a + \frac{bk}{x}\right) f_k g_{x-k}$$

$$= \frac{1}{1 - af_0} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{x=k}^{\infty} (ax^r + bkx^{r-1}) f_k g_{x-k}$$

$$= \frac{1}{1 - af_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sum_{x=k}^{\infty} (a(t+k)^r + bk(t+k)^{r-1}) g_t$$

Binom açılımı kullanılırsa,

$$= \sum_{t=0}^{\infty} (t+k)^r g_t = \sum_{t}^{\infty} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} t^i k^{r-i} g_t$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} \sum_{t=0}^{\infty} t^i g_t$$

$$= \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} E[S^i]$$

Böylelikle,

$$E[S^r] = \frac{1}{1-af_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k \left[a \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} k^{r-i} E[S^i] + b_k \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} k^{r-1-i} E[S^i] \right]$$

$$= \frac{1}{1-af_0} \left[a \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} E[S^i] \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-i} f_k + b \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} E[S^i] \sum_{k=1}^{\infty} k^{r-i} f_k \right]$$

$$= \frac{1}{1-af_0} \left[\sum_{i=0}^{r-1} \left[a \binom{r}{i} + b \binom{r-1}{i} \right] E[S^i] E[X_1^{r-1}] + aE[S^r] \sum_{k=1}^{\infty} f_k \right]$$

$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = 1 - f_0$ olduğundan,

$$E[S^r] = \frac{1}{1-a} \sum_{i=0}^{r-1} \left[a \binom{r}{i} + b \binom{r-1}{i} \right] E[S^i] E[X_1^{r-i}] \qquad (4)$$

Örnek: Poisson parametresi λ ve bireysel hasar müktarı negatifi olmayan tam sayılı değerler alan bileşik poisson dağılımının ilk üç momentini (4) eşitliğini kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$$P(\lambda) \Rightarrow a = 0 \quad b = \lambda$$

$$E[S^r] = \lambda \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r-1}{i} E[S^i] E[X_1^{r-i}]$$

$r = 1$

$$E[S] = \lambda E[X_1]$$

$r = 2$

$$\begin{aligned} E[S^2] &= \lambda(E[X_1^2] + E[S]E[X_1]) \\ &= \lambda E[X_1^2] + E[S]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Var(S) &= E[S^2] - \big[E[S]\big]^2 \\ &= \lambda E[X_1^2] + E[S]^2 - E[S]^2 \\ &= \lambda E[X_1^2] \end{aligned}$$

$r = 3$

$$\begin{aligned} E[S^3] &= \lambda(E[X_1^3] + 2E[S]E[X_1^2] + E[S^2]E[X_1]) \\ &= \lambda E[X_1^3] + 3E[S]E[S^2] - 2E[S]^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda E[X_1^3] &= E[S^3] - 3E[S]E[S^2] + 2E[S]^3 \\ &= E[(S - E[S])^3] \end{aligned}$$