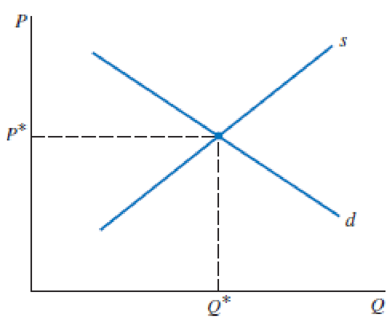
10. Hafta

Eşanlı Denklemler Sistemi

En küçük kareler yönteminin tek bir denkleme uygulanabilmesi için, eşitliğin sağ tarafında yer alan değişkenlerin tam bağımsız olması, diğer bir idade ile Y bağımlı değişkeni ile X bağımsız değişkeni/değişkenleri arasınadaki ilişkinin tek yönlü olmasına bağlıdır. Eğer bu varsayımdan sapma olursa, X'lerde Y tarafından belirleniyorsa, $E(X,u) \neq 0$ olur ve EKK yönteminin uygulanması **eğilimli ve tutarsız** tahmine yol açar.

Eğer değişkenler arasında karşılıklı (feedback) ilişki varsa, bu ilişki tek denklemli bir model olarak ele alınamaz, ilgili bütün değişkenler arasındaki ilişkileri tanımlayan daha geniş bir denklem takımına ihtiyaç vardır. $Y = f(X)$ iken $X = f(Y)$ ise, Y ile X arasındaki ilişkiyi tanımlamak için, değişkenler arasındaki karşılıklı ilişkiyi gösteren bir denklem takımına ihtiyaç vardır ki, bu denklem takımı eşanlı denklemler sistemi sistemi olarak adlandırılır.

Örneğin arz ve talep, bir malın piyasa fiyatını ve onun satılan miktarını ortaklaşa belirlemektedir. piyasa dengesi arz ve talep eğrisinin kesiştiği noktada oluşmaktadır.



Arz ve talep dengesi.

Piyasa fiyatını ve miktarını açıklayan ekonometrik bir model, arz ve talep için olmak üzere iki denklemden oluşmaktadır. Birlikte çalışan her iki denklem fiyatı ve miktarı belirlediği için, bu eşanlı denklemler modeli olacaktır.

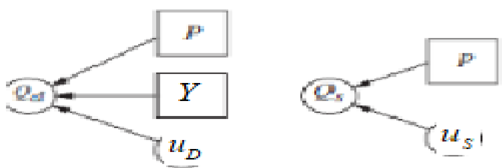
Talep: $Q = \alpha_1 P + \alpha_2 Y + u_D$

Arz: $Q = \beta_1 P + u_S$

İktisadi teorisine göre arz eğrisinin pozitif eğilimli olması $\beta_1 > 0$, talep eğrisinin ise negatif eğimli olmasını $\alpha_1 < 0$ beklenir. Böylece bu modelde talep edilen miktar Q, fiyat P ve gelir Y

’in bir fonksiyonudur. Arz edilen miktar sadece fiyatın bir fonksiyonu olarak alınmaktadır. (Matemetiksel işlemleri basitleştirmek amacıyla sabit terimler dikkate alınmamıştır.)

Böylece arz ve talep dengesini tanımlamak için *iki* denklem vardır. Sırasıyla P^* ve Q^* üzere fiyat ve miktar için *iki* denge değeri aynı zamanda belirlenmektedir. Bu modelde P ve Q değişkenlerinin değerleri sistem içinde belirlendiğinden dolayı içsel değişkenler (özü ile bağımlı olan değişkenler) olarak adlandırılmakatadır. İçsel değişkenler P ve Q bağımlı değişkenlerdir ve her ikisi rassal değişkendir.



İki regresyon modeli için etki diyagramları

Gelir değişkeni Y, sistem dışında belirlenen bir değere sahiptir. Diğer bir ifade ile tam bağımsızdır ve dışsal olarak nitelendirilmektedir. Bu değişkenler bilinen “ X ” bağımsız değişkenler gibi gibidir.

Arz ve talep denklemlerinde yer alan rassal hatalar için aşağıdaki varsayımlar geçerlidir.

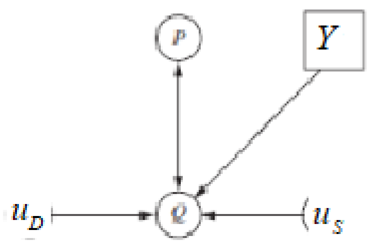
$E(u_D) = 0, \quad Var(u_D) = \sigma_D^2$

$E(u_S) = 0, \quad Var(u_S) = \sigma_S^2$

$Cov(u_D, u_S) = 0$

Eşanlı denklemler modelleri ve regresyon modelleri arasındaki farkı etki diyagramlarını kullanarak anlamak mümkündür. Bir “etki diyagramı” model bileşenleri arasındaki ilişkilerin grafiksel bir gösterimidir. Ayrı regresyonlar olarak arz ve talep ilişkilerinin modellendiği diyagramda daireler, içsel bağımlı değişkenleri ve hata terimlerini temsil etmektedir. Kareler dışsal açıklayıcı değişkenleri temsil etmektedir. Regresyon analizinde etki yönü bağımsız değişken ve hata teriminden bağımlı değişkene doğru tek yönlüdür. Bu durumda serbest piyasa fiyatında talep edilen miktarı, arz edilen miktara eşitlemeye yol açacak denge mekanizması yoktur. Fiyatı serbest piyasa dengesine uyumlu hale getirebilmek için P'den Q'ya ve Q'dan P'ye çalışan bir etki olmalıdır.

Fiyat P ile miktar Q'nun ortaklaşa belirlendiği ve aralarında karşılıklı etkileşim var olduğu durumda etki diyagramını aşağıdaki gibidir.



Eşanlı denklemler modelinde P ve Q arasında iki-yönlü etki veya geribildirim söz konusu olup ortaklaşa belirlenmektedirler. Rassal hata terimleri u_D ve u_S , hem P hem de Q'yu etkilemektedir. Göreceğimiz gibi, bu, eşanlı denklemler modellerinde en küçük kareler tahmin edicinin başarısızlığına yol açmaktadır. Gelir (Y) ise içsel değişkenleri etkileyen bir dışsal (tam bağımsız) değişkendir, P ve Q'dan Y'e doğru bir ilişki yoktur.

P'nin arz ve talep denklemlerinin sağ tarafında bir içsel değişken olması, rassal olan bir bağomsız değişkene sahip olduğumuz anlamına gelmektedir. Bu durum, "bağımsız değişkenlerin sabit" olduğu varsayımına terstir, fakat bu durum tek başına standart regresyon analizinin uygun olmadığı anlamına gelmemektedir. Gerçek problem, içsel açıklayıcı değişken P'nin u_D ve u_S rassal hatalar ile korelasyonlu olmasıdır ki, bu durumda en küçük kareler tahmin edicisi sapmalı ve tutarsızdır.

Yapısal denklemler olarak adlandırılan yukarıdaki iki denklem, içsel değişkenler P ve Q'nun, dışsal (tam bağımsız) değişken Y'in fonksiyonları olarak çözülebilmektedir. Modelin bu yeniden formülasyonuna, yapısal denklem sisteminin indirgenmiş kalıbı (daraltımış biçimi) olarak adlandırılır. İndirgenmiş kalıbı (daraltılmış biçim) için yukarıdaki iki denklem P ve Q için eşanlı olarak çözülür.

P'yi çözmek için, talep ve arz denklemleri eşitlenir.

$$\beta_1 P + u_S = \alpha_1 P + \alpha_2 Y + u_D$$

Daha sonra P için çözüm yapılır.

$$P = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} Y + \frac{u_D - u_S}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$P = \pi_1 Y + v_1$$

Q'yu çözmek için, yukarıdaki P'nin değeri talep yada arz denklemi içinde yerine konur. Arz denklemi daha basit olduğu için P'yi arz denkleminde yerine konur.

$$Q = \beta_1 P + u_S$$

$$Q = \beta_1 \left[\frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} Y + \frac{u_D - u_S}{(\beta_1 - \alpha_1)} \right] + u_S$$

$$Q = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} Y + \frac{\beta_1 u_D - \alpha_1 u_S}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$Q = \pi_2 Y + v_2$$

Buradaki π_1 ve π_2 parametrelerine indirgenmiş-kalıp (daraltılmış biçim) parametreleri, hata terimleri olan v_1 ve v_2 ise indirgenmiş-kalıp hatalarıdır.

İndirgenmiş kalıp denklemleri en küçük kareler ile tutarlı olarak tahmin edilebilmektedir. Bağımsız değişken Y bu sistem dışında belirlenmektedir. Bu, rassal hatalar v_1 ve v_2 ile korelasyonlu değildir, burada kendileri sıfır ortalama, sabit varyans ve sıfır kovaryansın olağan özelliklerine sahiptir. Böylece en küçük kareler tahmin edici, π_1 ve π_2 için BLUE özelliğine sahiptir.

İndirgenmiş-kalıp denklemleri ekonomik analiz için önemlidir. Bu denklemler içsel değişkenlerin denge değerlerini, dışsal değişkenlere bağlamaktadır. Böylece, piyasa ayarlamaları P ve Q için yeni bir dengeye yol açtıktan sonra, gelir Y'te bir artış olursa, π_1 fiyatta beklenen artıştır. Benzer şekilde, π_2, Q'nun denge değerindeki beklenen artıştır. İkinci olarak, tahmin edilmiş indirgenmiş-kalıp denklemleri gelirin farklı düzeyleri için denge fiyat ve miktarının değerlerini öngörmek için kullanılabilmektedir.

En Küçük Kareler Tahmininin Başarısızlığı

Eşanlı bir denklemler modelinde yer alan denklemlerden sadece bir denklemin alınarak En Küçük Kareler tahmin etmek uygun değildir. Bu durumda tahmin edilen parametreler sahip olması istenen özellikleri taşımayacaklardır.

Yapısal biçim

Talep: $Q = \alpha_1 P + \alpha_2 Y + u_D$

Arz: $Q = \beta_1 P + u_S$

Arz denkleminin sağ tarafında yer alan fiyat içsel değişken P içsel bir değişkendir ve rassal hata terimi u_S korelasyonludur.

Daraltılmış (İndirgenmiş) biçim

$$P = \frac{\alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} Y + \frac{u_D - u_S}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

$$Q = \frac{\beta_1 \alpha_2}{(\beta_1 - \alpha_1)} Y + \frac{\beta_1 u_D - \alpha_1 u_S}{(\beta_1 - \alpha_1)}$$

Hata terimi u_S 'de , örneğin Δu_S de kadar küçük bir değişimin var olduğunu varsayalım. Daraltılmış biçim denkleminden görüldüğü üzere hata terimindeki Δu_S doğrudan doğruya P denge değerine üzerinde etkili olacaktır. Arz denklemi hata terimi u_S'deki her değişim P üzerinde direkt doğrusal bir etkiye sahiptir. $\beta_1 > 0$ ve $\alpha_1 < 0$ olduğu için, $\Delta u_S > 0$ ise, $\Delta P < 0$ olacaktır. Böylece, u_S'deki bir değişim ters yönde P'deki değişim ile ilişkilidir. Sonuç olarak, P ve u_S negatif olarak korelasyonludur.

β_1'in en küçük kareler tahmin edicisi, içsel değişken P ve hata terimi u_S arasındaki negatif korelasyondan dolayı bu modelde gerçek parametre değerini olduğundan az gösterecektir. Büyük örneklemlerde, en küçük kareler tahmin edici bu modelde negatif sapmalı olma eğiliminde olacaktır. Bu sapma örnek büyüklüğü sonsuza gitse bile eğilimlilik özelliği devam etmekte ve böylece en küçük kareler tahmin edici tutarsız olmaktadır. Bu, en küçük kareler tahmin edicinin olasılık dağılımının örneklem büyüklüğü $N \to \infty$ iken, en sonunda gerçek parametre değeri olmayan bir nokta etrafına "düşeceği" anlamına gelmektedir.

Yapısal eşanlı bir denklemde parametrelerin en küçük kareler tahmin edicisi, denklemin sağ tarafındaki rassal hata ve içsel değişkenler arasındaki korelasyondan dolayı sapmalı ve tutarsızdır.

Örnek

Gelir oluşum modeli

$$
\begin{aligned}
C_t &= \alpha_0 + \alpha_1 I_t + \alpha_2 Y_t + \alpha_3 C_{t-1} + \alpha_4 Z_t + u_1 \\
I_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Z_t + u_2 \\
Y_t &= C_t + I_t + G_t
\end{aligned}
$$

Eşanlı Modelin Yapısal Biçimi

$$Y_i A + X_i B = u_i$$

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}Y_1 + \alpha_{12}Y_2 + \cdots + \alpha_{1G}Y_G + \beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2 + \cdots + \beta_{1K}X_K = u_1 \\
&\alpha_{21}Y_1 + \alpha_{22}Y_2 + \cdots + \alpha_{2G}Y_G + \beta_{21}X_1 + \beta_{22}X_2 + \cdots + \beta_{2K}X_K = u_2 \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
&\alpha_{G1}Y_1 + \alpha_{G2}Y_2 + \cdots + \alpha_{GG}Y_G + \beta_{G1}X_1 + \beta_{G2}X_2 + \cdots + \beta_{GK}X_K = u_G
\end{aligned}
$$

Modelde G sayıda bağımlı değişken, K sayıda bağımsız değişken ve G sayıda denklem vardır.

$$
Y_i = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_G \end{bmatrix} \qquad
X_i = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} \qquad
U_i = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_G \end{bmatrix}
$$

$$
A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix} \qquad
B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GK} \end{bmatrix}
$$

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1K} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2K} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \cdots & \beta_{GK} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_G \end{bmatrix}$$

- Eşanlı modellerin matematiksel özelliği:

Modeldeki denklem sayısı bağımlı değişken sayısına eşit olmalıdır. Böylece A katsayılar matrisi GxG boyutlu kare matristir. A katsayılar matrisinin tersinin alınabilir olması gereklidir, diğer bir ifade ile A matrisinin determinant sıfırdan farklıdır. Aksi halde modelin çözümü imkansız hale gelir.

- Ekonometrik özellikler

1) Modeldeki rassal hatların dağılımı normal, ortalamaları sıfır varyansları sabittir.

$E(U_i) = 0$ G sayıda bütün *i*'ler için

$$E(U_i) = \begin{bmatrix} E(u_1) \\ E(u_2) \\ \vdots \\ E(u_G) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

u_i 'nin her gözlem için ayrı ayrı ifade edilmek üzere varyans kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir.

$$Var - Cov(U_i) = E(U_i'U_i) = \sum_{G\times G} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1G} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \sigma_{G1} & \sigma_{G2} & \cdots & \sigma_{GG} \end{bmatrix}$$

Bu matris bütün gözlemler için yani n $(i = 1, 2, \ldots, n)$ defa tekrarlanır. Varyans kovaryans matrisi simetrik bir matristir. Homoskedasite şartı vektör düzeyinde kabul edilmiştir.

$u_1 \sim N(0, \sigma^2)$

$u_2 \sim N(0, \sigma^2)$

$u_G \sim N(0, \sigma^2)$

2) Bir gözleme ait hata terimi vektörü u_i ile başka bir gözleme ait hata terimi vektörü u_j arasında bir ilişki yoktur.

$E(u_i, u_j) = 0_{G\times G}$ $i \neq j$

Böylece bir gözleme ait rassal hatalar, başka bir gözleme ait rassal hatalar ile ilişkili değildir. Bu durum, tek denkleml modeler içn söz konusu olan otokorelasyonun olmadığı varsayımının vektör düzeyinde genişletilmesidir.

- Eşanlılık özelliği

Eşanlı ekonometrik modeli oluşturan denklemlerden hiçbiri, tam bağımsız olarak ilişkileri belirleyemez. Bu sebeple eşanlı bir modelde yer alan bağımlı değişkenin değerini tahmin edebilmek için, sistemin bütün denklemlerinin birarada ele alınarak eşanlı bir çözüm yapılması zorunludur. Eşanlı bir modeldeki denklemlerden yanlız birini ele alarak yapılan parametre tahminlerinin eğilimli ve tutarsız olmasının sebebi de eşanlılık karakterinden kaynaklanmaktadır.

Rassal hata terimleri arasında gözlemler itibariyle bir bağlantı olmadığı varsayılmışsa da G sayıda denklemin her birinde yer alan hata terimleri arasında aynı gözlem için söz konusu olmak üzere bir ilişki, korelasyon bulunabilir. Bu özellik, eşanlı denklemlerin karakterini ve çözüm yöntemlerini anlamak açısından önemlidir. Zira, bir denklem sisteminin denklemlerinin hata terimleri arasındaki bağlantı, eşanlı modellerin öz karakterini oluştururlar ve bu karakter dolayısıyladır ki, eşanlı modelin bir system olarak çözümlenmesi, zorunludur. Yine bu sebepledir ki, eşanlı bir modelin bir sistem olarak değil de, sistemde yer alan denklemlerin teket taker tahmin edilmesi doğru kabul edilmemektedir.

Yapısal Biçimde Bağımlı Değişkenlere ait Katsayılar Matrisinin Özellikleri

1) A Matrisinin diyagonal biçmde olması: Görünürde ilişkisiz denklemler sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix}$$

Böyle bir modelde A matrisinin sadece diyagonal elemanları mevcut olup, diğer elemanlar sıfırdır. Birbirleriyle ilişkisiz görünen bu denklem sisteminde bağımlı değişkenler eşitliğin sol tarafında yer alır, eşitliğin sağ tarafında özü ile bağımlı olan herhangi bir değişken yer almaz.Buna rağmen hata terimleri arasında ilişki vardır.

Özü ile bağımlı olan değişkenler eşitliğin sağ tarafında yer almadığı için hata terimleri arasında da bir ilişki yoksa bu modelin her bir denklemi EKK yöntemi ile tahmin edilir. Bu şekilde elde edilen EKK tahmincileri eğilimsiz ve tutarlıdırlar ancak en küçük varyanslı değildirler, kısaca tesirlilik özelliği kaybolmaktadır.

İmalat sanayi ürünlerinin talep modeli

$$Y_1 = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_1 X_2 + u_1$$

$$Y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_1 X_2 + u_2$$

$$Y_3 = \lambda_0 + \lambda_1 X_1 + \lambda_1 X_2 + u_3$$

Burada, Y_1, Y_2 ve Y_3 sırasıyla 1.,2. Ve 3. malın talebidir. X_1 ve X_2 ise talebe etki eden faktörlerdir. Bu modelde hata terimleri birbirlerinden tam bağımsız oldukları yani aralarında bir korelasyon olmadığı takdirde tam bağımsız üç denklemin biraraya gelmesi olarak düşünlebilir. Bu durumda her birdenklem ayrı ayrı EKK yöntemi ile tahmin edilebilir. Ancak hata terimleri arasında bir ilişki varsa, eşanlı modellerin tahmininde kullanılan parametre tahmin yöntemine ihtiyaç vardır.

2) A Matrisinin üçgen biçimde olması: Hiyerarşik Model

Ekonometrik model, bazı durumlarda eşanlı görünümünde olmakla beraber değişkenler arasındaki ilişki karşılıklı değil, tek yönlüdür.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix}$$

$$Y_1 = \beta_0 + \cdots\cdots\cdots\cdots + \beta_3 X_1 + \beta_4 X_2 + u_1$$

$$Y_2 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_1 + \cdots\cdots + \alpha_3 X_1 + \alpha_4 X_2 + u_2$$

$$Y_3 = \lambda_0 + \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 X_1 + \lambda_4 X_2 + u_3$$

Bu denklemler sistemi öz karakteri ile yukarıdan aşağı doğru bir etkiye sahiptir. Öz karakteri ile bağımlı değişkenler birbirleriyle ilişkilidir ancak bu ilişki $Y_1 \rightarrow Y_2 \rightarrow Y_3$'e doğru tek yönlüdür. Böyle bir denklem sisteminde, yukarıdan aşağı doğru denklemlerin tek tek EKK yöntemi ile tahmin edilmesi mümkündür.

3) Tam Karşılıklı Bağlantı

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1G} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2G} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{G1} & \alpha_{G2} & \cdots & \alpha_{GG} \end{bmatrix}$$

Tanımlama (Belirlenme)

Ekonometride “tanımlama” daraltılmış biçim parametrelerinden yapısal biçim parametrelerinin bulunup bulunamayacağını araştıran bir testtir. Tanımlama, model tahmini ya da değerlendirilmesinden ziyade, model kurma sorunu kısaca modelin spesifikasyonu ile ilgilidir. Bu sebeple örnekleme alanın genişletilmesi, verierin sayısal olarak zenginleştirilmesi modellerin “tanımlama “yönü ile ilgili özelliklerini etkilemez.

Ekonometrik bir sorun olarak tanımlama üç biçimde ortaya çıkar.

1. Tam Tanımlama
2. Eksik Tanımlama
3. Aşırı Tanımlama

Tam tanımlama halinde daraltılmış biçimden tahmin edilen edilen parametrelerden yapısal biçim parametreleri tek değer olarak bulunur.

Eksik tanımlama aslında modelin hiç tanımlanamaması demektir.

Aşırı tanımlama halinde ise, daraltımış biçim parametrelerinden yapısal biçim parametreleri için birden fazla ve birbirinden farklı değer bulmak mümkündür.

Tanımlama testi, sadece parametreleri istatistiksel yöntemler ile tahmin edilmesi gereken denklemlere uygulanır. Tanım denklemleri, özdeşlikler ve denge koşulu ifadeleri için tanımlama testi uygulanmaz.Çünkü bu tür ilişkilerin ölçümlenmeleri gerekmez.

Tanımlama, eşanlı bir modelin tahminiyle yakından ilgilidir.

1. Bir denklem ya da bir model eksik tanımlanmışsa yapısal biçim parametrelerinin hepsinin herhangi bir ekonometrik tahmin yöntemiyle tahmin edilmesi olanaksızdır.
2. Bir denklem tanımlanabiliyorsa, genellikle parametreleri tahmin edilebilir. Eğer model tam tanımlanmışsa tahminde kullanılacak uygun yöntem ***Dolaylı EKK*** yöntemidir. Eğer modelin denklemlerinden biri aşırı tanımlanmışsa, uygun tahmin yöntemi ***İki Aşamalı EKK /2AEKK*** yöntemidir.

Tanımlama, modelin yapısal biçiminin kuruluşunun incelenmesiyle yada daraltımış biçiminin incelenmesiyle gerçekleştirilir.

Daraltımış biçim yaklaşımı, yapısal biçim yaklaşımıyla karşılaştırıldığında hem kavramsal olarak daha karmaşık hem de hesaplaması daha zordur. Çünkü öncelikle daraltılmış biçimn oluşturulmaası, sonra da daraltılmış biçim katsayılarının bazılarından oluşturulan determinant değerinin oluşturulması gerekir.

Tanımlama testi uygulanırken, sabit parametre dışlanır, dışlanmıyorsa değişkenler kümesine geğeri her zaman "1" olan gölge değişken ilave edilir. Tanımlama çısından her iki yolda aynı sonucu verecektir.

Bir denklemin tanımlanabilmesi için iki koşulun yerine gelmesi gereklidir.Bunlardan ilki "Sayma koşulu" diğeri "Rank koşulu"dur. Sayma koşulu gereklilik şartını yerine getirmekle birlikte yeterlilik şartını yerine getirememektedir.Rank koşuluhem yeterlilik hem de gereklilik koşulunu sağlamaktadır.

Tanımlamanın Sayma (Sıra) Koşulu

Tanımlamanın sayma koşulu, belli bir denkleme alınan ve alınmayan değişkenlerin sayılması kuralına dayanmakadır.Bir denklemin tanımlanması için gerekli ancak yeterli olmayan bir koşuldur. Sayma koşulu, doğrusal olmayan modellerde genellikle uygulanmaz.

G: Yapısal Modelin denklem sayısı

K: Modelin bütününde yer aldığı halde, tanımlama testinin uygulandığı denklemde bulunmayan değişken sayısı

i.denklem için

$K_i = G - 1$ Tam tanımlama

$K_i > G - 1$ Aşırı tanımlama

$K_i < G - 1$ Eksik tanımlama

Örnek

Yapısal Biçim

$$Y_1 = \alpha_{10} + \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + u_1$$

$$Y_2 = \beta_{20} + \beta_{21} Y_1 + u_2$$

Modelin bağımlı değişkenleri: Y_1, Y_2

Modelin bağımsız değişkenleri: $X_1,\ X_2$

Denklem sayısı (G): 2

1. Denklem için:

$K_1 = 1 \qquad (Y_2)$

$G = 2$

$$K_1 \underset{<}{\overset{>}{=}} G - 1$$

$$1 \underset{<}{\overset{>}{=}} 2 - 1$$

$1 = 1$ 1. Denklem tam tanımlanmıştır.

2. Denklem

$K_2 = 2 \qquad (X_1, X_2)$

$G = 2$

$$K_2 \underset{<}{\overset{>}{=}} G - 1$$

$$2 \underset{<}{\overset{>}{=}} 2 - 1$$

$2 > 1$ 2. Denklem aşırı tanımlanmıştır.

Modelin daraltılmış biçimini oluşturulurken, işlemlerde kolaylık olması amacıyla sabit terim dışlanacaktır.

$$Y_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$$

$$Y_2 = \beta_{21} Y_1$$

....

$$Y_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$$
$$Y_2 = \beta_{21}(\alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2)$$

Daraltılmış biçim

$$Y_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2$$

$$Y_2 = \beta_{21}\alpha_{11} X_1 + \beta_{21}\alpha_{12} X_2$$

....

$$Y_1 = \pi_{11} X_1 + \pi_{12} X_2$$
$$Y_2 = \pi_{21} X_1 + \pi_{22} X_2$$

Daraltılmış baiçim parametrelerinden yapısal biçim parametrelerine geçildiğinde

$\hat{\pi}_{11} = \alpha_{11}$ ve $\hat{\pi}_{12} = \alpha_{12}$

olduğu görülmektedir.

$\hat{\pi}_{21} = \beta_{21}\alpha_{11}$ ve $\hat{\pi}_{21} = \beta_{21}\hat{\pi}_{11}$ buradan $\beta_{21} = \dfrac{\hat{\pi}_{21}}{\hat{\pi}_{11}}$

$\hat{\pi}_{22} = \beta_{21}\alpha_{12}$ ve $\hat{\pi}_{22} = \beta_{21}\hat{\pi}_{12}$ buradan $\beta_{21} = \dfrac{\hat{\pi}_{22}}{\hat{\pi}_{12}}$

Daraltılmış biçim parametrelerinden hareketle yapısal biçim parametreleri α_{11} ve α_{12} için tek değer bulunur iken β_{21} için iki değer bulunmuştur.

Tanımlamanın Rank (Mertebe) Koşulu

1. Rank Koşulunun Yapısal Biçime Uygulanması

Rank koşuluna göre, G sayıda denklemi olan bir modelde belli bir denklemin tanımlanabilmesi, ilgili denklemde bulunmayan ancak modelin diğer denklmlerinde yer alan değişkenlerin katsayılarından satır sütun sayısı (G-1) olan sıfırdan farklı en az bir determinant değerinin olması ile mümkündür.

Yapısal Biçim

$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + u_1$

$Y_2 = Y_3 + X_3 + u_2$

$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + u_3$

Modelin bağımlı değişkenleri: Y_1, Y_2, Y_3

Modelin bağımsız değişkenleri: $X_1,\ X_2, X_3$

Denklem sayısı (G): 3

1. Modeldeki bütün denklemlerin parametrelerinin yer aldığı çizelge hazırlanır.

$-Y_1 + 3Y_2 + 0Y_3 - 2X_1 + X_2 + 0X_3 + u_1 = 0$

$0Y_1 - 1Y_2 + Y_3 + 0X_1 + 0X_2 + X_3 + u_2 = 0$

$Y_1 - Y_2 - Y_3 + 0X_1 + 0X_2 - 2X_3 + u_3 = 0$

Yapısal Modelin Parametreler Çizelgesi

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3

1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

2. Tanımlanması istenen denkleme ait satır çizilir. Birinci denklem için tanımlama testini uyguluyorsak 1. Satır çizilecektir.

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

3. İncelenen denklemin sıfırdan farklı olan katsayıların bulunduğu sütunlar çıkarılır..

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

Söz konusu satır ve sütunlar çıkarılınca geriye ilgili denklemde yer almayan ancakmodelin diğer denklemlerinde yer alan değişkenler ve oalra ait kaysayılar kalır

Y_3	X_3
1	1
-1	-2

4. Satır-sütun sayısı G-1=3-1=2 olan detereminant lar oluşturulup değerleri

5. incelenir.Bunlaradan en az biri sıfırdan farklı ise denklem tanımlanabilir. Satır-sütun sayısı G-1 olana determinantların hepsi sıfıra eşit ise denklem eksik tanımlanmıştır.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -2-(-1) = -1 \neq 0$$

2x2 boyutunda bir determinat vardır ve değeri sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla denklem tanımlanabilir.

6. Son aşamada denklemin tam yada aşırı tanımlandığının tespiti için sayma kuralı uygulanır.

$K_1 \overset{>}{=} G - 1$ $\qquad\qquad$ $K_1 = 2 \quad (Y_3, X_3)$

$2 \overset{>}{=} 3 - 1$ $\qquad$ 2=2

1.Denklem tam tanımlanmıştır.

2. Denklem için aynı işlemler uygulanır.

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

Y_1	X_1	X_2
-1	-2	1
1	0	0

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-2) = 2 \neq 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \qquad\qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2.Denklem tanımlanabilir.

$$K_2 \overset{>}{=} G-1 \qquad K_2 = 3 \quad (Y_1, X_1, X_2)$$

$$3 \overset{>}{=} 3-1 \qquad 3 > 2$$

2.Denklem aşırı tanımlanmıştır.

3.Denklem için

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

Denklem	Değişkenler					
	Y_1	Y_2	Y_3	X_1	X_2	X_3
1.Denklem	-1	3	0	-2	1	0
2.Denklem	0	-1	1	0	0	1
3.Denklem	1	-1	-1	0	0	-2

X_1	X_2
-2	1
0	0

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0-0=0$$

3.Denklem tanımlanmamıştır. Eksik tanımlama

Yapısal modelin 3. Denklemi eksik tanımlandığı için bu modelin tahmini söz konusu değildir.

Örnek

Yapısal biçim

$$D = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 P_R + \alpha_3 Y + \alpha_4 t + u_1$$

$$S = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P_R + \beta_3 C + \beta_4 t + u_2$$

$$D = S$$

D : Talep

S : Arz

P : Malın Fiyatı

P_R : Rakip malın fiyatı

Y :Gelir

C : Maliyet (üretim faktörleri fiyat indeksi)

t : trend (Talep denkleminde zevkleri, arz denkleminde teknolojiyi gösterir)

Bağılımlı değişkenler P , D , S

Bağımsız değişkenler P_R , Y , t , C

Denklem sayısı (G)=3

Yapısal Modelin Parametreler Çizelgesi

Denklem	Değişkenler					
	D	P	P_R	Y	t	S	C
Talep Denklemi	-1	α_1	α_2	α_3	α_4	0	0
Arz Denklemi	0	β_1	β_2	0	β_4	-1	β_3
Tanım Denklemi	-1	0	0	0	0	1	0

Talep denklemi için tanımlama

Denklem	Değişkenler						
	D	P	P_R	Y	t	S	C
Talep Denklemi	-1	α_1	α_2	α_3	α_4	0	0
Arz Denklemi	0	β_1	β_2	0	β_4	-1	β_3
Tanım Denklemi	-1	0	0	0	0	1	0

Denklem	Değişkenler						
	D	P	P_R	Y	t	S	C
Talep Denklemi	-1	α_1	α_2	α_3	α_4	0	0
Arz Denklemi	0	β_1	β_2	0	β_4	-1	β_3
Tanım Denklemi	-1	0	0	0	0	1	0

S	C
-1	β_3
1	0

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & \beta_3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-(\beta_3) = -\beta_3$$

$\beta_3 \neq 0$ olmak koşuluyla rank koşulu sağlanmıştır. Sayma koşulu için

$$K_D \overset{>}{=} G-1 \qquad K_D = 2 \quad (S,C)$$

$$2 \overset{>}{=} 3-1 \qquad 2=2$$ Talep denklemi tam tanımlanmıştır.

Arz denklemi için tanımlama

Denklem	Değişkenler						
	D	P	P_R	Y	t	S	C
Talep Denklemi	-1	α_1	α_2	α_3	α_4	0	0
Arz Denklemi	0	β_1	β_2	0	β_4	-1	β_3
Tanım Denklemi	-1	0	0	0	0	1	0

Denklem	Değişkenler						
	D	P	P_R	Y	t	S	C
Talep Denklemi	-1	α_1	α_2	α_3	α_4	0	0
Arz Denklemi	0	β_1	β_2	0	β_4	-1	β_3

Tanım Denklemi	-1	0	0	0	0	1	0

D	Y
-1	α_3
1	0

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & \alpha_3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-\alpha_3) = \alpha_3$$

$\alpha_3 \neq 0$ olmak koşuluyla rank koşulu sağlanmıştır. Sayma koşulu için

$K_S \overset{>}{=} G - 1$ $\qquad$ $K_S = 2 \quad (D, Y)$

$2 \overset{>}{=} 3 - 1$ $\qquad$ $2 = 2$ $\qquad$ Arz denklemi tam tanımlanmıştır.

3.Denklem tanım denklemidir, dolayısıyla bu denklem tanımlama testi uygulanmaz. Yapısal biçimin iki denklemi de tam tanımladığı için uygun tahmin yöntemi **Dolaylı EKK** yöntemidir.