En Küçük Kareler Tahmincilerinin Dağılımı

Çoklu değişkenli regresyon modelinin 1-5 varsayımları geçerli ise, en küçük kareler tahmincileri($\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_{k-1}$)

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \cdots + \beta_{k-1} X_{(k-1)i} + u_i$$

modelindeki $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \ldots, \hat{\beta}_{k-1}$ parametrelerinin, en iyi doğrusal sapmasız tahmincileri olduğunu olduğu bilinmektedir.

Rassal hataların u_i normal olasılık dağılımına sahip olduğu varsayımı da eklenirse, bu durumda bağımlı değişken Y_i 'de normal olarak dağılır ve aşağıdaki gibi ifade edilir,

$$Y_i \sim N\left(\left(\beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_{k-1} X_{ik-1}\right), \sigma^2\right) \Leftrightarrow u_i \sim \left(0, \sigma^2\right)$$

EKK tahmincileri, bağımlı değişkenin doğrusal fonksiyonu olduğu için, EKK tahmincileri de normal olarak dağılım gösterir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{\beta}_i \sim N\left(\beta_i, Var(\hat{\beta}_i)\right)$$

Buna göre her $\hat{\beta}_i$, β_i ortalama ve $Var(\hat{\beta}_i)$ varyans ile normal dağılıma sahiptir. Normal rassal değişken $\hat{\beta}_i$, ortalamasından çıkarılarak ve varyansının kareköküne bölünerek, aşağıda ifade edilen, ortalaması sıfır ve varyansı 1 olan, standart normal değişken Z'ye dönüştürülebilir.

$$Z = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{Var\,\beta_i}} \sim N(0,1)$$

$\hat{\beta}_i$ 'nın varyansı, yukarıda $k = 3$ olduğu durumunda gösterildiği gibi, hata teriminin bilinmeyen varyansına σ^2 bağlıdır. σ^2 yi, yukarıda elde edilen tahmincisi $\hat{\sigma}^2$ ile yer değiştirirsek, tahmin edilen $Var\,\hat{\beta}_i$ 'ı elde ederiz. Z'de $Var\,\beta_i$ yerine $Var\,\beta_i$ 'nın tahmini yazılırsa, $\mathrm{N}(0,1)$ rassal değişkenini, bir t-rassal değişkenine dönüştürür. Yani aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{Var\,\hat{\beta}_i}} = \frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{Se\,\hat{\beta}_i} \sim t_{n-k}$$

Bu sonuç basit regresyondakinden farkı t-rassal değişkenin serbestlik dereceleridir. Basit regresyonda tahmin edilen parametre sayısı iki olduğu için serbestlik derecesi $n - 2$ idi. Bu bölümde, Çok değişkenli regresyon modelinde k sayıda bilinmeyen parametre vardır ve t-istatistiği için serbestlik derecesi sayısı $n-k$'dır.

Örnek :Satış Modeli

$$\hat{Y}_i = 118,91 - 7.908X_1 + 1.863X_2 \qquad \hat{\sigma} = 4.8861$$

$$Se(\hat{\beta}_i)\ (6.351)\quad (1.096)\quad (0.683)$$

satış modelinde fiyattaki bir değişime karşı satış gelirlerinin tepkisini gösteren β_1 için %95 aralık tahmini ile ilgilendiğimizi varsayalım. Basit regresyonda uygulanan yolu izleyerek ve $n-k=75-3=72$ serbestlik derecesine sahip olduğumuz anımsayarak, birinci adım kritik değer (eşik değer) t_c olarak isimlendireceğimiz, t_{72} -dağılımından bir değer bulmaktır.

$$P\left(-t_c < t_{72} < t_c\right) = 0.95$$

t-tablosuna baktığımızda, 72 serbestlik derecesi için bir değer yoktur, fakat 70 ve 80 serbestlik derecelerinden hareketle $t_c = 1.993$'dür (Önemli not: Size verilen tabloda 50 serbestlik derecesine kadar kritik değerler yer almaktadır. Bu durumda siz elinizdeki tablonun son satırı ∞ serbestlik derecesine karşılık gelen kritik değerleri kullanmalısınız.) Bu değeri kullanarak, aralık tahmini için aşağıdaki ifade yazılır.

$$P\left(-1.993 < \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{Se\left(\hat{\beta}_1\right)} < 1.993\right) = 0.95$$

Bu ifadeyi yeniden düzenlediğimize, aşağıdakini elde ederiz,

$$P\left(\hat{\beta}_1 - 1.993 \times Se\left(\hat{\beta}_1\right) \le \beta_1 \le \hat{\beta}_1 + 1.993 \times Se\left(\hat{\beta}_1\right)\right) = 0.95$$

Aralığın alt ve üst sınırları aşağıdaki gibidir,

$$\left(\hat{\beta}_1 - 1.993 \times Se\left(\hat{\beta}_1\right)\,,\ \hat{\beta}_1 + 1.993 \times Se\left(\hat{\beta}_1\right)\right)$$

Yukarıdaki aralık β_1'nin %95 aralık tahmincisidir. Bu aralık tahmincisi, ana kütleden elde edilen pek çok örnekte kullanılırsa, bunların %95'i doğru parametre β_1'yi içerir.

Belirli bir örneğe dayanarak β_1 'in %95 bir aralık tahmini için, $\hat{\beta}_1$ ve $Se\left(\hat{\beta}_1\right)$ yerine $\hat{\beta}_1 = -7.908$ ve $Se\left(\hat{\beta}_1\right) = 1.096$ değerleri gelir. Böylece, β_1 için, % 95 aralık tahminimiz aşağıdaki gibi olur.

$$P\left(-7.9079 - (1.9335 \times 1.096) \le \beta_1 \le -7.9079 + (1.9335 \times 1.096)\right) = 1 - 0,05$$

$$(10,093\ ,\ 5,723)$$

Bu aralık tahmini fiyatın 1$ azalması, satış gelirinde 5723$ ve 10093$ arası bir aralıkta artışa yol açacaktır veya fiyatın 1$ artması satış gelirinde 5723$ ve 10093$ arası bir aralıkta azalışa yol açacaktır.

Satış hasılatının, reklama karşı tepkisini gösteren β_2 için benzer bir yöntem izleyerek, aşağıda verilen %95 bir aralık tahminini elde ederiz,

$$P\left(1.8626 - (1.9335 \times 0.6832) \le \beta_2 \le 1.8626 + (1.9335 \times 0.6832)\right) = 1 - 0,05$$

$$(0,501\ ,\ 3,225)$$

Reklam harcamasındaki 1000$'lık bir artışın, 501$ ve 3225$ arasında satış gelirinde bir artışa yol açacağını tahmin edilmektedir. Bu aralık göreceli olarak büyük bir aralıktır; ek reklam harcamasının karsız olabileceğini (gelir artışı 1000$'dan azdır) veya reklam maliyetinin üç katından fazla bir hasılat artışına yol açabileceğini göstermektedir. Bu durumu açıklamanın diğer bir yolu, nokta tahmini $\hat{\beta}_2 = 1.8626$ çok güvenilir olmadığını söylemektir, çünkü (örnekleme değişkenliğini ölçen) standart hatası göreceli olarak büyüktür.

Herhangi bir β_i'nin $100(1-\alpha)\%$ güven aralığı için genel bir formülü aşağıdaki gibidir.

$$\left(\hat{\beta}_i - t_{(1-\alpha/2, n-k)} \times Se\left(\hat{\beta}_i\right)\ ,\ \hat{\beta}_i + t_{(1-\alpha/2, n-k)} \times Se\left(\hat{\beta}_i\right)\right)$$

t-dağılımı sonucu, parametrelerin her biri ile ilgili hipotezleri test etme için bir temel sağlar. Basit regresyondan bilindiği üzere c'nin belirlenmiş bir sabit olduğu $H_0 : \beta_i = c$ 'ye karşı $H_1 : \beta_i \neq c$ şeklindeki hipotezler, çift-kuyruklu testler olarak isimlendirilir, $H_0 : \beta_i \le c$ 'ye karşı $H_1 : \beta_i > c$ gibi eşitsizlikleri içeren hipotezler, tek-kuyruklu testler olarak isimlendirilir. Bu bölümde, hipotezlerin her birinin örneklerini ele alınacaktır.

Çok değişkenli regresyon modeli oluşturulduğunda, modelde yer alan bağımsız değişkenlerin ($X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$) bağımlı değişkeni Y'yi etkilediğine inanırız. Ancak bu etkinin varlığının doğrulanması için; modelin veri ile desteklenip desteklenmediğinin incelenmesi gerekir. Diğer bir ifade ile verilerin, Y'nin her bir açıklayıcı değişken ile ilişkili olduğunu gösteren bir kanıt sağlayıp sağlamadığı bilmemiz gerekir. Veri bir açıklayıcı değişken, örneğin X_i, Y ile ilişkili değilse $\beta_i = 0$ olacaktır. $\beta_i = 0$ temel hipotezi test etme bağımsız değişken X_i için anlamlılık testi olarak isimlendirilir. Bu sebeple, verilerin Y'nin X_i ile ilişkili olduğunu gösteren herhangi bir kanıt içerip içermediğini bulmak için, temel hipotezi,

$$H_0 : \beta_i = 0$$

alternatif hipoteze karşı

$$H_1 : \beta_i \neq 0$$

test ederiz.

Testi yapmak için, temel hipotez doğruysa aşağıdaki test istatistiğini kullanırız.

$$t = \frac{\hat{\beta}_i}{Se\left(\hat{\beta}_i\right)} \sim t_{(n-k)}$$

"eşit değildir" alternatif hipotezi için çift-kuyruklu testi kullanılır ve hesaplanan t-değeri, (dağılımın sağ tarafından elde edilen kritik değer) t_c'den büyük veya eşitse veya (dağılımın sol tarafından elde edilen kritik değer) $-t_c$'den küçük veya eşitse H_0 reddedilir. Anlamlılık düzeyi α ile bir test için, $t_c = t_{(1-\alpha/2, n-k)}$ ve $-t_c = t_{(\alpha/2, n-k)}$ şeklindedir.

Satış modelinde satış gelirinin fiyat ile ilişkili olup olmadığını test edelim:

Temel ve alternatif hipotezler,

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Temel hipotez doğruysa, test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{Se\left(\hat{\beta}_1\right)} \sim t_{(n-k)} \qquad n\text{: gözlem sayısı}, \quad k\text{: parametre sayısı}$$

%5 anlamlılık düzeyini (α=0.05) kullanarak ve serberstlik derecesi $n-k=75-3=72$ dir. Buna göre kritik değerler, $t_{(0.975:72)}=1.993$ ve $t_{(0.025:72)}=-1.993$. Bu sebeple, 2. aşamada hesaplanan t-değeri, şu şekilde ise, $t \geq 1.993$ veya $t \leq -1.993$ temel hipotezi reddederiz. Eğer $-1.993 < t < 1.993$ ise, H_0'ı reddedemeyiz

t-istatistiğinin hesaplanan değeri,

$$t = \frac{-7.908}{1.096} = -7.215$$

$-7.215 < -1.993$ olduğu için, $H_0 : \beta_1 = 0$ reddederiz ve satış hasılatının, fiyata bağlı olduğunu gösteren bir kanıtın, veride olduğu sonucuna ulaşırız.

$$-7.215 < -1.993$$

$$|-7.215| > 1.993$$

Satış gelirinin, reklam harcaması ile ilişkili olup olmadığının testi için aynı aşamalar uygulanır. Temel ve alternatif hipotezler,

$$H_0 : \beta_2 = 0$$

$$H_1 : \beta_2 \neq 0$$

Temel hipotez doğruysa, test istatistiği aşağıdaki gibidir.

$$t = \frac{\hat{\beta}_2}{Se\left(\hat{\beta}_2\right)} \sim t_{(n-k)}$$ n:gözlem sayısı, k:parametre sayısı

%5 anlamlılık düzeyini kullanarak, $t \geq 1.993$ veya $t \leq -1.993$ temel hipotezi reddederiz. Eğer $-1.993 < t < 1.993$ ise, H_0'ı reddedemeyiz

t-istatistiğinin hesaplanan değeri,

$$t = \frac{1.8626}{1.096} = 2.726$$

$2.726 > 1.993$ olduğu için, H_0'ı reddederiz. Veriler, satış gelirlerinin reklam harcaması ile ilişkili olduğunu gösteren hipotezi desteklemektedir.

Bir parametre tahmininin anlamlılığının testi önemlidir. Parametrenin tahmini anlamlı ise ilgili açıklayıcı değişkenin, modele dahil edilecek değişken olduğuna dair ön inancını doğrular.

Satış modelinin tahmini sonuçlarına talebin fiyata göre esnek olup olmadığı ve ek reklam harcamasından elde edilen ek satış gelirin, reklam maliyetini karşılayıp karşılamadığı soruları ile karşılaşabilirsiniz. Şimdi, bu soruların test edilebilir hipotezler ile nasıl ifade edilebileceği ve bu hipotezlerin verilerle uyumlu olup olmadığının testini uygulayacağız.

Talep esnekliği hakkında bir karara varabilmek (talep esnekliğinin testi) , aşağıdakilerin gerçekleşme durumlarına bağlıdır.

$\beta_1 \geq 0$: Fiyattaki bir düşüş, satış gelirlerinde sıfır veya negatif olacak şekilde bir değişime yol açar. Talep fiyata göre esnek değil veya birim esnekliğe sahiptir.

$\beta_1 < 0$ Fiyattaki bir düşüş, satış hasılatında bir artışa yol açar. Talep fiyata göre esnektir.

Talebin esnek olduğu iddiasını verilerden destekleyecek bir kanıt olmadıkça, bu iddiayı kabul etmeye hazırlıklı değilsek, temel hipotezimiz olarak, esnek olmayan bir talep varsayımını kullanmak uygundur. Standart test etme aşamalarına göre öncelikle temel ve alternatif hipotezi belirtilir.

$H_0 : \beta_1 \geq 0$ (talep, birim esnek veya esnek değil)

$H_1 : \beta_1 < 0$ (talep, esnek)

Burada test istatistiği oluşturmak için, temel hipotez $\beta_1 = 0$ gibi hareket edilir. Çünkü $\beta_1 = 0$ için H_0 reddedilirse, herhangi bir $\beta_1 > 0$ için de H_0 reddedilir. Bu durumda $H_0 : \beta_1 = 0$ doğru olduğunu varsayımı altında, test istatistiği

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{Se\left(\hat{\beta}_1\right)} \sim t_{(n-k)}$$

Temel hipotez doğruysa, red bölgesi gerçekleşmesi olası olmayan t-dağılımından elde edilen değerlerden oluşacaktır. %5 anlamlılık düzeyi açısından “olası olmayan”ı tanımlarsak, t ‘nin olası olmayan değerleri $t_{(0.05,72)} = -1.666$ kritik değerinden daha düşük değerlerdir.

Test istatistiği değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$t = \frac{\hat{\beta}_1}{Se\left(\hat{\beta}_1\right)} = \frac{-7.908}{1.096} = -7.215$$

$-7.215 < -1.666$ olduğu için $H_0 : \beta_1 \geq 0$ reddedilir ve $H_1 : \beta_1 < 0$ (talep, esnek) hipotezinin verilerle daha uyumlu olduğuna sonucuna ulaşılır. Örneklem kanıtı, fiyattaki bir azalışın, satış hasılatında bir artış sağlayacağı önermesini destekler.

Önemli not: Bu test ve yukarıda gerçekleştirilen çift-taraflı anlamlılık testi arasındaki farklar ve benzerliklere dikkat edin. Hesaplanan t-değerleri aynı, fakat kritik t-değerleri farklıdır. Sadece değerlerin kendileri farklı olmayıp, fakat aynı zamanda, çift-kuyruklu test ile birisi dağılımın her bir tarafından sağlanan, mevcut iki kritik değer de söz konusudur. Tek-kuyruklu test ile dağılımın tek bir tarafından sağlanan, sadece bir kritik değer söz konusudur.

İlgilendiğimiz diğer bir hipotez, reklam harcamasındaki bir artışın, reklamın artan maliyetini karşılamak için satış hasılatında yeterli bir artış sağlayıp sağlamayacağı diğer bir ifade ile reklam harcalamalarının etkin olup olmadığının testidir. Böyle bir artışa, $\beta_2 > 1$ olursa ulaşılabileceği için, hipotezleri aşağıdaki gibi oluştururuz:

Temel ve alternatif hipotezler aşağıdaki gibidir.

$H_0 : \beta_2 \leq 1$

$H_1 : \beta_2 > 1$

Temel hipotezi, $H_0 : \beta_2 = 1$ eşitliği olarak ele alırsak, H_0 doğru olduğunda t-dağılımına sahip t istatistiği aşağıdaki gibidir,

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{Se\left(\hat{\beta}_2\right)} = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{Se\left(\hat{\beta}_2\right)} \sim t_{(n-k)}$$

Anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.05$ seçilirse, ilgili kritik değer $t_{(0.05,72)} = 1.666$ olur ve $t \geq 1.666$ ise H_0 reddedilir.

Test istatistiği değeri aşağıdaki gibidir,

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - 1}{Se\left(\hat{\beta}_2\right)} = \frac{1.8626 - 1}{0.6832} = 1.263$$

$1.263 < 1.666$ olduğu için, $\beta_2 \leq 1$'ı reddedemeyiz. Reklamın maliyet açısından etkili olduğu sonucuna ulaşmak için örneklemimizdeki kanıt yetersizdir. Test sonucu ile ilgili aynı yargıya şu yolla da ulaşmak mümkündür. $\hat{\beta}_1 = 1.8626$ tahmini birden büyük olduğu için, bu tahminin kendisi, reklamın etkili olacağını ifade etmektedir. Ne var ki, standart hata ile ölçülen, tahmininin kesinliğini göz önüne aldığımızda, $\hat{\beta}_1 = 1.8626$ tahmini anlamlı bir şekilde birden büyük değildir. Hipotez-testi yöntemi bağlamında, $\beta_2 > 1$ olduğuna dair yeterli kesinlik derecesi sonucuna ulaşılamamıştır.

Satış Modelinin Genişletilmesi

Satış gelirleri ile fiyat ve reklam harcaması arasındaki doğrusal ilişkinin ($Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$), iktisadi gerçeğe uygun olup olmadığını sorgulamaya değerdir. Çünkü doğrusal bir model göre artan reklam harcaması, satış hasılatı ve reklam harcamasının mevcut düzeyine bakmaksızın, satış gelirini aynı oranda artıracağını vurgulamaktadır. Diğer bir ifade ile reklamlardaki bir değişime karşı satışların tepkisini ölçen β_2 parametresi sabittir ve reklam harcamaları düzeyine bağlı değildir. Gerçekte, reklam harcamasının düzeyi arttıkça, azalan verimlerin başlaması ve satış gelirlerinin azalarak artmasını bekleriz.

Aşağıdaki Şekilde, reklamın orijinal düzeyi (a) 600$ ve (b) 1,600$ olduğunda reklam harcamasındaki 200$ bir artışın, satışlar üzerindeki etkisini göstermektedir. Grafikteki birimlerin, bin dolar olduğunu, bu sebeple, noktalar, 0.6 ve 1.6 olarak görünmekte olduğuna dikkat edin. Reklamın daha düşük düzeylerinde, satışların, 72,400$'dan 74,000$'a artar, buna karşın reklamın daha yüksek düzeylerinde, artış, çok daha düşük düzeydedir, 78,500$'dan 79,000$'a artmıştır. Sabit β_2 eğimli doğrusal model, azalan verimleri kapsamaz.

İktisadi gerçeğe uygun model reklam düzeyi arttıkça eğimin de değiştiği bir modeldir. Bu özellikte bir model, diğer bir değişken olarak reklamın kareli değerinin eklenmesi ile elde edilir ve yeni model aşağıdaki gibidir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + u_i \quad (1)$$

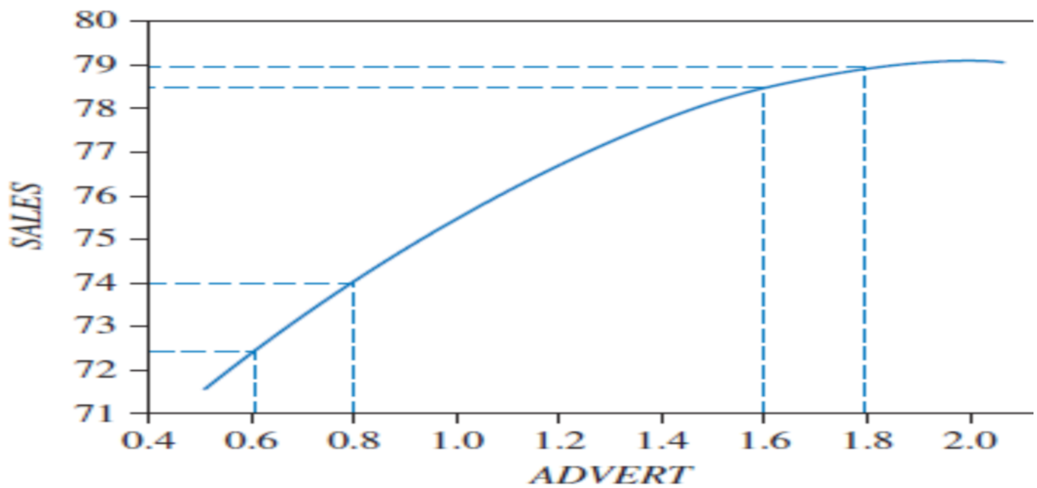
$$\frac{\Delta E(Y)}{\Delta X_2} = \frac{\partial E(Y)}{\partial X_2} = \beta_2$$

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \beta_3 X_{i2}^2 + u_i \quad (2)$$

$\beta_3 X_{i2}^2$ terimini orijinal modelin yapısına eklemek, reklam harcamasındaki bir değişime karşı beklenen hasılatın tepkisinin, reklam düzeyine bağlı olduğu bir model sunar. Fiyatı sabit tutarak yukarıdaki modele çokterimli türev kuralını uygulayarak reklamlardaki bir değişime karşı satış gelirleri beklenen değerinin tepkisi aşağıdaki gibidir,

$$\frac{\Delta E(Y)}{\Delta X_2} \text{ fiyat sabit iken } \frac{\partial E(Y)}{\partial X_2} = \beta_2 + 2\beta_3 X_2$$

Satış gelirleri, fiyat ve reklam harcamaları olmak üzere iki değişkene bağlıdır ve fiyat sabit tutulmaktadır.



Şekil 5.4 Satışların reklam harcaması karşısında azalan verimler gösterdiği bir model

$\partial E(Y)/\partial X_2$ reklam harcamasının, satışlar üzerindeki marjinal etkisi ‘dir. Doğrusal fonksiyonlarda, eğim veya marjinal etki sabittir. Doğrusal olmayan fonksiyonlarda, bir veya daha fazla değişken ile değişir. β_2 ve β_3’ün beklenen işaretlerini bulmak için; $X_2 = 0$ olduğunda reklamdaki bir değişime karşı satış hasılatının tepkisinin pozitif olmasını beklenmektedir, kısaca $\beta_2 > 0$ olması beklenir. Ayrıca, azalan verimlerin oluşması için, satış hasılatının reklam harcaması arttıkça azalması gerekmektedir, kısaca $\beta_3 < 0$ olmasını beklenir.

Örnek

Gözlem	**Üretim (bin adet)**	**Çalışma saati (100 saat)**	**Sermaye (milyon lira)**
1	11	10	25
2	10	7	22
3	12	10	30
4	6	5	18
5	10	8	21
6	7	8	15
7	9	6	17
8	10	7	12
9	11	9	14
10	10	10	24

Yukarıdaki verileri kullanarak 1-4 arası soruları cevaplandırınız.

1. **Regresyon denklemini tahmin ediniz.**

Yukarıdaki veriler üretim modeline aittir. Üretim(Q) emek (L) ve sermayenin (S) fonksiyonu olduğuna göre üretim modeli için aşağıdaki regresyon denklemini tahmin edeceğiz.

$$\hat{Q} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 L + \hat{\beta}_2 K$$

Q ; Y, L; X_1 ve K ; X_2 ile gösterilirse öncelikle aşağıdaki denklem sisteminin çözümü ile β_1 ve β_2'nin tahmin edilmesi gerekir.

$$\sum x_{i1} y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{i1} x_{i2}$$

$$\sum x_{i2} y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{i1} x_{i2} + \hat{\beta}_2 \sum x_{i2}^2$$

Dikkat edilirse denklemlerdeki değişkenler ortalamalarından farkları ile gösterilmiştir. Dolayısıyla ara sonuçların aşağıdaki gibi hesaplanması gerekir.

$$\sum y_i x_{i1} = \sum Y_i X_{i1} - n\bar{X}_1 \bar{Y} = 789 - 10 \times 8 \times 9.6 = 21$$
$$\sum y_i x_{i2} = \sum Y_i X_{i2} - n\bar{X}_2 \bar{Y} = 1945 - 10 \times 19.8 \times 9.6 = 44.2$$
$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y} = 952 - 10 \times (9.6)^2 = 30.4$$
$$\sum x_{i1}^2 = \sum X_{i1}^2 - n\bar{X}_1^2 = 668 - 10 \times (8)^2 = 28$$
$$\sum x_{i2}^2 = \sum X_{i2}^2 - n\bar{X}_2^2 = 4204 - 10 \times (19.8)^2 = 283.6$$
$$\sum x_{i1} x_{i2} = \sum X_{i1} X_{i2} - n\bar{X}_1 \bar{X}_2 = 1634 - 10 \times 8 \times 19.8 = 50$$

Y	**X_1**	**X_2**	**YX_1**	**YX_2**	**X_1X_2**	**Y^2**	**X_1^2**	**X_2^2**
11	10	25	110	275	250	121	100	625
10	7	22	70	220	154	100	49	484
12	10	30	120	360	300	144	100	900
6	5	18	30	108	90	36	25	324
10	8	21	80	210	168	100	64	441
7	8	15	56	105	120	49	64	225
9	6	17	54	153	102	81	36	289
10	7	12	70	120	84	100	49	144
11	9	14	99	154	126	121	81	196
10	10	24	100	240	240	100	100	576
96	80	198	789	1945	1634	952	668	4204
9.6	8	19.8						

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_{i1}y_i \sum x_{i2}^2 - \sum x_{i2}y_i \sum x_{i1}x_{i2}}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2 - \left(\sum x_{i1}x_{i2}\right)^2}$$

$$= \frac{(21 \times 283.6) - (44.2 \times 50)}{(28 \times 283.6) - (50)^2} = 0.688428$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{i2}y_i \sum x_{i1}^2 - \sum x_{i1}y_i \sum x_{i1}x_{i2}}{\sum x_{i1}^2 \sum x_{i2}^2 - \left(\sum x_{i1}x_{i2}\right)^2}$$

$$= \frac{(44.2 \times 28) - (21 \times 50)}{(28 \times 283.6) - (50)^2} = 0.03448$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

$$= 9.6 - (0.688428 \times 8) - (0.03448 \times 19.8) = 3.409872$$

Böylece doğrusal üretim fonksiyonunun tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{Q} = 3.409872 + 0.688428L + 0.03448K$$

2. **Tahmin ettiğiniz regresyon modelini yorumlayınız.**

Sermaye sabitken çalışma saati 100 saat artarsa üretim 688.428 adet artacaktır. Çalışma saati sabitken sermaye 1 milyon lira artarsa üretim 34.48 adet azalacaktır. Emek ve sermaye sıfır iken üretim 3409.872 adettir (*Not*: emek ve sermaye olmaksızın üretimin gerçekleşmesi olası değildir, aslında kesim parametresinin yorumlanmaması gerekir.)

3. **Hata teriminin varyansını tahmin ediniz.**

Hata terimi varyansının tahmin edicisi

$\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k}$ 'dır.

Hata teriminin varyansının tahmin edilebilmesi için kalıntı kareler toplamının hesaplanması gerekir. Daha önceki derslerimizden hatırlanacağı üzere kalıntı kareler toplamını hesaplamak için;

- Tahmin edilen regresyon modelinde sırasıyla her gözlem için (i =1,2,…,10) emek ve sermayenin değerleri yazılarak üretimin tahmini değeri hesaplanır ($\hat{Q}_i$) .
- Bağımlı değişken üretimin gözlemlenen değerlerinden (Q_i) tahmini değerleri($\hat{Q}_i$)çıkarılarak kalıntılar ($\hat{u}_i$) hesaplanır ($\hat{u}_i = Q_i - \hat{Q}_i$).
- i =1,2,…,10 'a kadar hesaplanan kalıntıların kareleri ($\hat{u}_i^2$) hesaplanır.
- i =1,2,…,10 'a kadar hesaplanan kalıntıların karelerinin toplamı alınır.

Bu uygulama için kalıntıların karelerinin toplamı $\sum \hat{u}_i^2 = 14.41898$ hesaplanmıştır. Gözlem sayısı 10, tahmin edilen parametre sayısı 3' eşit olduğuna göre, hata teriminin varyansı aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{14.41898}{10-3} = 2.059854$$

4. **Emeğin ve kapitalin ortalamaya esnekliğini hesaplayarak yorumlayınız.**

$$\varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{\overline{L}}{\overline{Q}} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\overline{L}}{\overline{Q}} = (0.688428)\frac{8}{9.6} = 0.57369$$

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{\overline{K}}{\overline{Q}} = \hat{\beta}_2 \times \frac{\overline{K}}{\overline{Q}} = (0.03448)\frac{19.8}{9.6} = 0.07112$$

Bu sonuçlara göre emek %1 artarsa üretim yaklaşık olarak ortalama % 0.57 artar. 0.57 aynı zamanda emeğin marjinal verimliliğidir. Sermaye %1 artarsa üretim yaklaşık ortalama % 0.07 artırır. 0.07 sermayenin marjinal verimliliğidir.

5. Emeğin 8 birim sermayenin 15 birim olduğu noktada emek ve sermayenin esnekliği hesaplayarak yorumlayınız.

Öncelikle emeğin 8 birim sermayenin 15 birim olduğu noktada üretimin tahmini değeri hesaplanır.

$$\hat{Q} = 4.775283 + 0.688428(8) + 0.03448(15) = 9.434496$$

$$\varepsilon_{QL} = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L_i}{\hat{Q}} = \hat{\beta}_1 \times \frac{L_i}{\hat{Q}} = (0.688428)\frac{8}{9.434496} = 0.583754$$

$$\varepsilon_{QK} = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K_i}{\hat{Q}} = \hat{\beta}_2 \times \frac{K_i}{\hat{Q}} = (0.03448)\frac{15}{9.434496} = 0.05482$$

Emeğin 8 birim sermayenin 15 birim olduğu noktada, emekteki %1 lik artış üretim miktarını yaklaşık % 0.58 arttırırken sermayedeki %1'lik artış üretim miktarını yaklaşık % 0.05 düşürür.

6. Yukarıdaki doğrusal üretim modelin dezavantajları nelerdir? Nasıl bir çözüm önerirsiniz?

Yukarıda tahmin edilen fonksiyon doğrusal olduğu için sadece tek bir üretim faktörü ile üretim gerçekleşebilir. Çünkü üretim faktörleri birbirleri ile toplanır durumdadır. Ancak iktisadi açıdan değerlendirildiğinde her iki üretim faktörünün de belli bir oranda kullanılması gerekir. Ayrıca bu modelde üretim faktörler emek ve sermayenin üretim üzerindeki etkileri sabittir. Hâlbuki iktisat teorisine göre üretim faktörlerinin artışı bir noktaya kadar üretimi arttırır, ancak daha sonra bu artış azalarak devam eder. Modelin fonksiyonel biçiminin değiştirilmesi gerekir. Uygun model $Q = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{u}$'nın dönüştürülmüş biçimi log-log modeldir.

7. Modeli yeniden alternatif bir fonksiyonel biçim log-log model ile tahmin edelim. Log-log model yukarıda verilen üretim fonksiyonundaki değişkenlerin doğal logaritmalarının yer aldığı model olup, aşağıda verilmiştir.

$$lnQ = Ln\beta_0 + \beta_1 \ln L + \beta_2 \ln K + u$$

Modelin tahmini için öncelikle değişkenlerin doğal logaritması alınmak suretiyle dönüştürülmesi gerekir. Veri tablosu aşağıdaki gibi yeniden düzenlenir.

Q	L	K	lnQ	lnL	lnK
11	10	25	2.3978	2.3025	3.2188
10	7	22	2.3025	1.9459	3.0910
12	10	30	2.4849	2.3025	3.4011
6	5	18	1.7917	1.6094	2.8903
10	8	21	2.3025	2.0794	3.0445
7	8	15	1.9459	2.0794	2.7080
9	6	17	2.1972	1.7917	2.8332
10	7	12	2.3025	1.9459	2.4849
11	9	14	2.3978	2.1972	2.6390
10	10	24	2.3025	2.3025	3.1780

Kısaca lnQ, Y^* ile; $\ln L$, X_1^* ile; $\ln K$, X_2^* ile ve $ln\beta_0$, β_0^* ile gösterilirse aşağıdaki modeli yazar ve EKK ile tahmin ederiz

$$\hat{Y}_i^* = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1 X_{i1}^* + \hat{\beta}_2 X_{i2}^*$$

Yukarıda verilen regresyon denklemi aynen 1. sorudaki gibi tahmin edilir. Tek fark kullanılan verilerdir. EKK tahmincilerinde logaritması alınarak dönüştürülmüş veriler yer alır. Burada aynı işlemleri tekrarlamak için sadece sonuç verilecektir. (*Not:* Okuyucunun modeli çözmesi tavsiye edilir)

$$\hat{Y}_i^* = 0.815073 + 0.642258 X_{i1}^* + 0.036365 X_{i2}^*$$

Veya

$$lnQ = 0.815073 + 0.642258 \ln L + 0.036365 \ln K$$

8. Tahmin edilen modelin parametrelerini yorumlayınız.

Yukarıdaki model log-log model olduğuna göre doğrusal modelden farklı olarak tahmin edilen parametreler direkt esnekliği verecektir. Parametrelerin yorumu sırasıyla sermaye sabit iken emekteki %1 lik değişim üretimi yaklaşık % 0.64, emek sabit iken sermayedeki %1'lik değişme ise üretimi yaklaşık % 0.04 arttıracaktır.

9. Hata terimi varyansını tahmin ediniz.

Yeni modelin kalıntı kareler toplamı 0.195651 ‘e eşit hesaplanmıştır. Böylece hata terimi varyansının tahmini

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{0.195651}{10-3} = 0.02795$$

olarak hesaplanır.

10. İki model arasında tercih yapmak isteseniz hangisini tercih ederdiniz?

Ekonometrik açıdan hangi modelin tercih edilmesi gerektiği hususunda henüz yeterince veri yok, testlerimizi henüz yapmadık, ancak iktisadi açıdan değerlendirildiğinde log-log modelin tercih edilmesi daha uygundur.