Exam 2020 retake solution

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018) (Technische Universität München)

Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Klausur:	IN0018 / Retake	**Datum:**	Montag, 5. Oktober 2020
Prüfer:	Prof. Dr. Susanne Albers	**Uhrzeit:**	13:00 – 15:00

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **16 Seiten** mit insgesamt **6 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 40 Punkte.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - Vorlesungsfolien und Übungsblätter, inkl. selbst geschriebener Zusammenfassungen und Notizen in beliebigem Umfang
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch $\leftrightarrow$ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Unterschreiben Sie in dem obigen Unterschriftenfeld. Damit versichern Sie, dass Sie
  - alle Antworten selbstständig und ohne Austausch mit Dritten angefertigt haben,
  - keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutzt haben und
  - unter Ihrem eigenen Namen abgeben.
- Ich erkläre mich mit einer **Videoüberwachung** während der elektronischen Übungsleistung einverstanden.

  [ ] ja   [ ] nein

  Wenn ich das Einverständnis verweigere, wird eine **mündliche Nachprüfung** stattfinden, ob die Prüfungsleistung eigenständig von mir erbracht wurde.
- Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der **Lösungsweg erkennbar ist.** Begründen Sie alle Antworten, solange es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.

Hörsaal verlassen von __________ bis __________ / Vorzeitige Abgabe um __________

Aufgabe 1 Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum (8 Punkte)

Wir betrachten einen Würfel, dessen acht Ecken zufällig und unabhängig voneinander gefärbt werden. Dabei ist jede Ecke jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ rot bzw. grün gefärbt. Eine Kante des Würfels heißt *bunt*, falls ihre Endpunkte unterschiedlich gefärbt sind. Wir definieren die folgenden Ereignisse.
E: Die Oberseite des Würfels besitzt genau k rote und $4 - k$ grüne Ecken.
F: Genau l der vier seitlichen Kanten, die Oberseite und Unterseite des Würfels miteinander verbinden, sind bunt.

Variante 1: $k = 2$, $l = 2$
Variante 2: $k = 1$, $l = 3$
Variante 3: $k = 1$, $l = 2$

0
1
2

a) Geben Sie eine formale Beschreibung der Ergebnismenge Ω an und zeigen Sie, dass jedes $\omega \in \Omega$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt.

Eine Färbung des Würfels kann beispielsweise als Funktion modelliert werden, die jeder Ecke eine Farbe (rot oder grün) zuweist. Folglich gilt $\Omega = \{c \mid c\colon [8] \to \{r, g\}\}$.
Als Nächstes zeigen wir, dass jede Färbung mit der gleichen Wahrscheinlichkeit $1/|\Omega| = 1/256$ auftritt. Hierzu sei c die zufällige Färbung und c' eine beliebig fixierte Färbung. Da alle Ecken des Würfels unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ rot bzw. grün gefärbt werden, gilt

$$\Pr[c = c'] = \Pr[\cap_{i=1}^{8} c(i) = c'(i)] = \prod_{i=1}^{8} \Pr[c(i) = c'(i)] = \prod_{i=1}^{8} \frac{1}{2} = \frac{1}{256}.$$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit von $E \cup F$.

0 1 2 3 4

Da es sich um einen Laplace-Wahrscheinlichkeitsraum handelt, entsprechen die Wahrscheinlichkeiten relativen Häufigkeiten.
Für das Ereignis E gibt es $\binom{4}{k}$ Möglichkeiten, die k roten Ecken auf der Oberseite zu wählen, die anderen Ecken der Oberseite müssen dann grün sein. Die Ecken der Unterseite können beliebig gefärbt werden, somit gilt $|E| = \binom{4}{k} \cdot 2^4$.
Für das Ereignis F gibt es $\binom{4}{l}$ Möglichkeiten, die l bunten Kanten zu wählen, und deren Endpunkte können jeweils auf zwei Arten gefärbt werden (rot-grün oder grün-rot). Alle anderen Ecken sind Endpunkte der $4 - l$ verbleibenden seitlichen Kanten, die rot-rot oder grün-grün gefärbt sein müssen. Es gilt also $|F| = \binom{4}{l} \cdot 2^l \cdot 2^{4-l} = \binom{4}{l} \cdot 2^4$.
Schließlich betrachten wir $E \cap F$. Hier ist die Färbung nach Wahl der roten Ecken auf der Oberseite und der bunten seitlichen Kanten eindeutig bestimmt. Daher gilt $|E \cap F| = \binom{4}{k} \cdot \binom{4}{l}$.
Mit der Siebformel erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\Pr[E \cup F] &= \Pr[E] + \Pr[F] - \Pr[E \cap F] \\
&= \frac{\binom{4}{k} \cdot 2^4}{2^8} + \frac{\binom{4}{l} \cdot 2^4}{2^8} - \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{4}{l}}{2^8} \\
&= \frac{\binom{4}{k}}{16} + \frac{\binom{4}{l}}{16} - \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{4}{l}}{256}
\end{aligned}$$

Ergebnisse der Varianten:

- Variante 1 ($k = 2, l = 2$): $\Pr[E \cup F] = \frac{6}{16} + \frac{6}{16} - \frac{6 \cdot 6}{256} = \frac{39}{64}$
- Variante 2 ($k = 1, l = 3$): $\Pr[E \cup F] = \frac{4}{16} + \frac{4}{16} - \frac{4 \cdot 4}{256} = \frac{7}{16}$
- Variante 3 ($k = 1, l = 2$): $\Pr[E \cup F] = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} - \frac{4 \cdot 6}{256} = \frac{17}{32}$

0
1

c) Prüfen Sie E und F auf Unabhängigkeit.

Die Ereignisse E und F sind unabhängig, da gilt

$$\Pr[E] \cdot \Pr[F] = \frac{\binom{4}{k} \cdot 2^4}{2^8} \cdot \frac{\binom{4}{l} \cdot 2^4}{2^8} = \frac{\binom{4}{k} \cdot \binom{4}{l}}{2^8} = \Pr[E \cap F] \,.$$

0
1

d) Berechnen Sie die erwartete Anzahl an bunten Kanten im gesamten Würfel.

Für $1 \leq i \leq 12$ sei X_i eine Indikatorvariable für das Ereignis, dass die i-te Kante bunt ist. Da beide Endpunkte mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ gleich gefärbt sind, folgt $\mathrm{E}[X_i] = \Pr[X_i = 1] = 1/2$ für $1 \leq i \leq 12$. Die Gesamtanzahl der bunten Kanten ist somit $X := \sum_{i=1}^{12} X_i$ und es gilt

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{i=1}^{12} \mathrm{E}[X_i] = \sum_{i=1}^{12} \frac{1}{2} = 6 \,.$$

Aufgabe 2 **Diskrete Zufallsvariablen (6 Punkte)**

Gegeben seien zwei Tetraeder, deren vier Flächen mit natürlichen Zahlen beschriftet sind. Beim gemeinsamen Wurf dieser Tetraeder bleiben beide auf einer ihrer Flächen liegen, jeweils auf allen vier Seiten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Sei X die Summe der zwei Zahlen, auf denen die Tetraeder liegen geblieben sind.

a) Angenommen beide Tetraeder sind mit den Zahlen 1,2,3,4 beschriftet. Zeigen Sie, dass X die folgende Dichte besitzt: 0 1 2

x	2	3	4	5	6	7	8	sonst
$f_X(x)$	1/16	1/8	3/16	1/4	3/16	1/8	1/16	0

Die Summe zweier Zahlen zwischen 1 und 4 liegt zwischen 2 und 8, es gilt also $W_X = \{2, \dots, 8\}$ und $f_X(x) = 0$ für $x \notin W_X$. Da alle Zahlenpaare mit der gleichen Wahrscheinlichkeit von $1/16$ auftreten, ergibt sich die Dichte von X aus den relativen Häufigkeiten der Zahlenpaare. Die folgende Tabelle zeigt die Summe beim Wurf zweier Tetraeder mit Beschriftung 1,2,3,4.

	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2	3	4	5	6
3	4	5	6	7
4	5	6	7	8

Durch Abzählen erhalten wir die Werte der gegebenen Dichtefunktion:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/16 & x \in \{2, 8\} \\ 2/16 = 1/8 & x \in \{3, 7\} \\ 3/16 & x \in \{4, 6\} \\ 4/16 = 1/4 & x = 5 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

b) Die Flächen des einen Tetraeders werden nun mit den Zahlen 1,2,2,3 (Variante) 1 bzw. 1,3,3,5 (Variante 2) beschriftet. Finden Sie eine passende Beschriftung des zweiten Tetraeders, sodass X wie in Teilaufgabe 1 verteilt ist.

Seien $a \leq b \leq c \leq d$ die Zahlen auf dem gesuchten zweiten Tetraeder.

Variante 1 (Gegebener Tetraeder: 1,2,2,3)
Wir stellen fest, dass $a = 1$ gelten muss, damit das Ereignis $X = 2$ eintritt, aber nicht $X < 2$. Ebenso folgt $d = 5$, damit $X = 8$ eintritt, aber nicht $X > 8$. Diese Überlegung liefert zunächst die unten links stehende Häufigkeitsverteilung.
Durch $b \leq 2$ erhöhte sich die Wahrscheinlichkeit von $X = 3$ auf mehr als $2/16$, daher muss $b \geq 3$ gelten. Durch $c \geq 4$ erhöhte sich die Wahrscheinlichkeit von $X = 7$ auf mehr als $2/16$, daher muss $c \leq 3$ gelten. Es folgt somit $b = c = 3$. Die Häufigkeitsverteilung der unten rechts stehenden Tabelle ergibt gerade die gesuchte Dichte von X.

	1	b	c	5
1	2			6
2	3			7
2	3			7
3	4			8

	1	3	3	5
1	2	4	4	6
2	3	5	5	7
2	3	5	5	7
3	4	6	6	8

Variante 2 (Gegebener Tetraeder: 1,3,3,5)
Wir stellen fest, dass $a = 1$ gelten muss, damit das Ereignis $X = 2$ eintritt, aber nicht $X < 2$. Ebenso folgt $d = 3$, damit $X = 8$ eintritt, aber nicht $X > 8$. Diese Überlegung liefert zunächst die unten links stehende Häufigkeitsverteilung.
Durch $b \leq 1$ erhöhte sich die Wahrscheinlichkeit von $X = 2$ auf mehr als $1/16$, daher muss $b \geq 2$ gelten. Durch $c \geq 3$ erhöhte sich die Wahrscheinlichkeit von $X = 8$ auf mehr als $2/16$, daher muss $c \leq 2$ gelten. Es folgt somit $b = c = 2$. Die Häufigkeitsverteilung der unten rechts stehenden Tabelle ergibt gerade die gesuchte Dichte von X.

	1	b	c	3
1	2			4
3	4			6
3	4			6
5	6			8

	1	2	2	3
1	2	3	3	4
3	4	5	5	6
3	4	5	5	6
5	6	7	7	8

c) Finden Sie eine Beschriftung eines einzelnen Tetraeders, sodass beim wiederholten Wurf dieses Tetraeders erwartungsgemäß

- Variante 1: vier Runden bis zur ersten Primzahl vergehen.
- Variante 2: vier Runden bis zur ersten Quadratzahl vergehen.
- Variante 3: zwei Runden bis zur ersten Fünf vergehen.
- Variante 4: zwei Runden bis zur ersten Zweierpotenz vergehen.

Die Anzahl X der Runden bis zum ersten Erfolg ist geometrisch verteilt. Es gilt $E[X] = 1/p$, wobei p die Erfolgswahrscheinlichkeit sei. In unserem Fall ist die Erfolgswahrscheinlichkeit gerade die relative Häufigkeit von Zahlen auf dem Tetraeder, die einen Erfolg darstellen. Sei k die geforderte Anzahl erwarteter Runden bis zum ersten Erfolg. Es ist also jede Beschriftung zulässig, die genau $4/k$ Zahlen enthält, die einen Erfolg darstellen. Geeignete Beschriftungen sind also zum Beispiel:

Variante 1: 1,**2**,4,4 / Variante 2: 2,3,**4**,5 / Variante 3: 1,2,**5**,**5** / Variante 4: **1**,**2**,3,5

Aufgabe 3 Kontinuierliche Zufallsvariablen (6 Punkte)

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c_1 & \text{falls } 0 < x < 1, \\ c_2 & \text{falls } a < x < b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Weiterhin sei die kontinuierliche Zufallsvariable Y definiert durch $Y = \frac{1}{X}$.

- Variante 1: $c_1 = 1/2$, $c_2 = 1/6$, $a = 2$, $b = 5$
- Variante 2: $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/6$, $a = 2$, $b = 4$
- Variante 3: $c_1 = 1/3$, $c_2 = 2/9$, $a = 3$, $b = 6$
- Variante 4: $c_1 = 1/4$, $c_2 = 3/8$, $a = 3$, $b = 5$

a) Bestimmen Sie die Dichte von Y.

0 1 2 3 4

Um die Dichte von Y zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Verteilungsfunktion F_Y.

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr\left[\frac{1}{X} \leq y\right]$$

Da X nur positive Werte annimmt, nimmt $1/X$ ebenfalls nur positive Werte an und wir erhalten $F_Y(y) = 0$ und damit auch $f_Y(y) = 0$, falls $y \leq 0$.
Falls $y > 0$, können wir weiter umformen:

$$F_Y(y) = \Pr\left[\frac{1}{X} \leq y\right] = \Pr\left[X \geq \frac{1}{y}\right] = 1 - \Pr\left[X < \frac{1}{y}\right] = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

und erhalten für die Dichtefunktion mittels Kettenregel:

$$f_Y(y) = F_Y'(y) = \left(-f_X\left(\frac{1}{y}\right)\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) = \frac{1}{y^2} \cdot f_X\left(\frac{1}{y}\right).$$

Nun ist $f_X(1/y) = c_1$, falls $0 < 1/y < 1$ gilt und diese Bedingung ist äquivalent zu $y > 1$. Weiterhin ist $f_X(1/y) = c_2$, falls $a < 1/y < b$ gilt und diese Bedingung ist äquivalent zu $1/b < y < 1/a$. In allen anderen Fällen ist $f_X(1/y) = 0$. Insgesamt ergibt sich somit als Dichte von Y:

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{y^2} \cdot c_2 & \text{falls } \frac{1}{b} < y < \frac{1}{a}, \\ \frac{1}{y^2} \cdot c_1 & \text{falls } y > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ergebnisse der Varianten:

(i)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6y^2} & \text{falls } \frac{1}{5} < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2y^2} & \text{falls } y > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(ii)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{6y^2} & \text{falls } \frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3y^2} & \text{falls } y > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iii)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{9y^2} & \text{falls } \frac{1}{6} < y < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{3y^2} & \text{falls } y > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iv)

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{3}{8y^2} & \text{falls } \frac{1}{5} < y < \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{4y^2} & \text{falls } y > 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

0
1
2

b) Beweisen oder widerlegen Sie die Existenz des Erwartungswertes von Y.

Der Erwartungswert von Y existiert, falls $\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_Y(y)\, dy < \infty$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_Y(y)\, dy = \int_{1/b}^{1/a} y \cdot \frac{1}{y^2} \cdot c_2\, dy + \int_{1}^{\infty} y \cdot \frac{1}{y^2} \cdot c_1\, dy$$

$$= c_2 \cdot \int_{1/b}^{1/a} \frac{1}{y}\, dy + c_1 \int_{1}^{\infty} \frac{1}{y}\, dy$$

$$= \underbrace{c_2 \cdot [\ln(y)]_{1/b}^{1/a}}_{\text{reelle Zahl}} + \underbrace{c_1 \cdot [\ln(y)]_1^{\infty}}_{\infty}$$

Da $\ln(y) \to \infty$ für $y \to \infty$, ist der zweite Summand nicht kleiner als unendlich. Somit ist das gesamte Integral nicht kleiner als unendlich und der Erwartungswert von Y existiert nicht.

Alternative Lösung ohne das Ergebnis des 1. Aufgabenteils zu verwenden:
Wir berechnen das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_Y(y)\, dy$ mittels der Dichtefunktion von X anstatt von Y, indem wir analog zum Beweis von Lemma 89 vorgehen und die Substitution $x := 1/y$, $dx = -1/(y^2)dy$ verwenden:

$$\int |y| \cdot f_Y(y)\, dy = \int |y| \cdot f_X\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right) dy = \int \left|\frac{1}{x}\right| \cdot f_X(x)\, dx$$

Wir können also das gesuchte Integral wie folgt berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot f_Y(y)\, dy = \int_0^1 \frac{1}{x} \cdot c_1\, dx + \int_a^b \frac{1}{x} \cdot c_2\, dx$$

$$= \underbrace{c_1 \cdot [\ln(x)]_0^1}_{\infty} + \underbrace{c_2 \cdot [\ln(x)]_a^b}_{\text{reelle Zahl}}$$

Da $\ln(y) \to -\infty$ für $x \to 0$, ist der erste Summand nicht kleiner als unendlich. Somit ist das gesamte Integral nicht kleiner als unendlich und der Erwartungswert von Y existiert nicht.

Aufgabe 4 Exponentialverteilung (6 Punkte)

Der verrückte Wissenschaftler Amadeus testet ein neues Mutationsverfahren an einer Kolonie kugelförmiger Bakterien sowie einer Kolonie zylinderförmiger Bakterien. In beiden Kolonien treten die Mutationen in unabhängigen und exponentialverteilten Zeitspannen auf. Unter den kugelförmigen Bakterien mutiert im Erwartungswert alle a Minuten ein Bakterium, während dies bei den zylinderförmigen Bakterien erwartungsgemäß alle b Minuten geschieht.

Sei c die Gesamtanzahl mutierter Bakterien im dritten Aufgabenteil.

- Variante i: $a = 4, b = 20, c = 27$
- Variante ii: $a = 5, b = 15, c = 28$
- Variante iii: $a = 6, b = 15, c = 21$
- Variante iv: $a = 7, b = 21, c = 24$

a) Wie lange muss Amadeus im Erwartungswert warten, bis er zum ersten Mal eine Bakterienmutation beobachten kann?

0 1 2

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen für die Zeit bis zur ersten Mutation unter den kugelförmigen bzw. zylinderförmigen Bakterien. Laut Angabe sind X und Y exponentialverteilt mit Erwartungswert a bzw. b. Die entsprechenden Parameter der Exponentialverteilungen lauten daher $\lambda_X = 1/a$ bzw. $\lambda_Y = 1/b$.
Der Zeitpunkt, an dem zum ersten Mal ein Bakterium egal welcher Kolonie mutiert, ist $Z = \min\{X, Y\}$. Nachdem X und Y unabhängig sind, ist Z laut Vorlesung (Satz 102) ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_Z = \lambda_X + \lambda_Y$. Für den Erwartungswert von Z folgt

$$\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{\lambda_Z} = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Ergebnisse der Varianten:

(i) $\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{\frac{1}{4}+\frac{1}{20}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$

(ii) $\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{\frac{1}{5}+\frac{1}{15}} = \frac{15}{4}$

(iii) $\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{\frac{1}{6}+\frac{1}{15}} = \frac{30}{7}$

(iv) $\mathrm{E}[Z] = \frac{1}{\frac{1}{7}+\frac{1}{21}} = \frac{21}{4}$

b) Wie lange muss Amadeus im Erwartungswert warten, bis in beiden Bakterienkolonien eine Mutation aufgetreten ist?

0 1 2

Die Zeit, bis in beiden Bakterienkolonien eine Mutation aufgetreten ist, wird durch die Zufallsvariable $\max\{X, Y\}$ angegeben. Da für beliebige reelle Zahlen x und y die Identität $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ gilt, folgt $\max\{X, Y\} = X + Y - \min\{X, Y\}$. Mit der Linearität des Erwartungswerts und dem Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe folgt:

$$\mathrm{E}[\max\{X, Y\}] = \mathrm{E}[X] + \mathrm{E}[Y] - \mathrm{E}[\min\{X, Y\}] = a + b - \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Ergebnisse der Varianten:

(i) $\mathrm{E}[\max\{X, Y\}] = 4 + 20 - \frac{10}{3} = \frac{62}{3}$

(ii) $\mathrm{E}[\max\{X, Y\}] = 5 + 15 - \frac{15}{4} = \frac{65}{4}$

(iii) $\mathrm{E}[\max\{X, Y\}] = 6 + 15 - \frac{30}{7} = \frac{117}{7}$

(iv) $\mathrm{E}[\max\{X, Y\}] = 7 + 21 - \frac{21}{4} = \frac{91}{4}$

0
1
2

c) Wie lange muss Amadeus warten, damit erwartungsgemäß insgesamt c Bakterien mutiert sind?

Sei X_i die Zeitspanne (in Minuten) zwischen dem Auftreten der $(i-1)$-ten und i-ten Mutation in der Kolonie der kugelförmigen Bakterien. Des Weiteren sei $M(t) = \max\{m \mid X_1 + \ldots + X_m \leq t\}$ die Anzahl der kugelförmigen Bakterien, die in t Minuten mutieren. Für die zylinderförmigen Bakterien sind die Zufallsvariablen Y_j und $N(t)$ analog definiert. Ferner sei $B(t) = M(t) + N(t)$ die Gesamtanzahl von Bakterien, die in t Minuten mutieren.
Da es sich bei den Zufallsvariablen X_i bzw. Y_j um unabhängige und identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen handelt, beschreiben $M(t)$ bzw. $N(t)$ für $t > 0$ Poisson-Prozesse. Folglich sind $M(t)$ und $N(t)$ mit Parameter $t \cdot \lambda_X$ bzw. $t \cdot \lambda_Y$ Poisson-verteilt. Nach Vorlesung (Satz 59) ist $B(t)$ als Summe unabhängiger Poisson-verteilter Zufallsvariablen ebenfalls Poisson-verteilt mit Parameter $t \cdot \lambda_X + t \cdot \lambda_Y = t \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Die erwartete Gesamtanzahl an Mutationen nach t Minuten beträgt folglich

$$\mathrm{E}[B(t)] = t \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = t \cdot \frac{1}{\mathrm{E}[Z]},$$

wobei $\mathrm{E}[Z]$ das Ergebnis der ersten Teilaufgabe war. Gesucht ist laut Angabe t, sodass $\mathrm{E}[B(t)] = c$. Das bedeutet, dass Amadeus $t = \mathrm{E}[Z] \cdot c$ Minuten warten muss, um erwartungsgemäß c mutierte Bakterien zu haben.

Ergebnisse der Varianten:

(i) $t = \frac{10}{3} \cdot 27 = 90$

(ii) $t = \frac{15}{4} \cdot 28 = 105$

(iii) $t = \frac{30}{7} \cdot 21 = 90$

(iv) $t = \frac{21}{4} \cdot 24 = 126$

Aufgabe 5 Hypothesentest (6 Punkte)

In einem Laden für Zauberzubehör hat Zauberkünstlerin Aida eine gezinkte Münze entdeckt. Der Verkäufer versichert ihr, dass die Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens p_0 Kopf zeigt. Zur Demonstration wirft der Verkäufer die Münze $n = 100$ mal und führt einen approximativen Binomialtest auf Signifikanzniveau α durch.

Hinweis: Am Ende dieser Klausur befindet sich eine Tabelle mit den Werten der Standardnormalverteilung.

Sei p_1 die Konstante aus Aidas Alternativhypothese in Teil (b).

Variante	p_0	α	p_1
1	0,1	0,05	0,2
2	0,2	0,05	0,4
3	0,1	0,1	0,2
4	0,2	0,02	0,4

a) Bestimmen Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich $K = \{k, \dots, n\}$ für die Hypothese des Verkäufers.

Sei X die Anzahl der Kopfwürfe. Nach Angabe handelt es sich bei X um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 100$ und unbekannter Wahrscheinlichkeit p für Kopf. Wir führen einen approximativen Binomialtest (siehe 347) mit Nullhypothese $H_0 : p \leq p_0$ (gegen $H_1 : p > p_0$) durch. Die Testgröße Z ist gegeben durch

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}}.$$

Bei einem Signifikanzniveau von α lehnen wir die Nullhypothese ab, falls $Z > z_{1-\alpha}$ gilt. Den Wert für $z_{1-\alpha}$ können wir direkt aus der Tabelle der Standardnormalverteilung ablesen. Somit liegt die Testgröße gerade dann im Ablehnungsbereich K, wenn $X > \sqrt{np_0(1 - p_0)} \cdot z_{1-\alpha} + np_0$ erfüllt ist. Ergebnisse der Varianten:

Variante	p_0	α	$\sqrt{np_0(1-p_0)}$	$z_{1-\alpha}$	$\sqrt{np_0(1-p_0)} \cdot z_{1-\alpha} + np_0$
1	0,1	0,05	$\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$	1,65	$3 \cdot 1{,}65 + 10 = 14{,}95$
2	0,2	0,05	$\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$	1,65	$4 \cdot 1{,}65 + 20 = 26{,}6$
3	0,1	0,1	$\sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 3$	1,28	$3 \cdot 1{,}28 + 10 = 13{,}84$
4	0,2	0,02	$\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$	2,05	$4 \cdot 2{,}05 + 20 = 28{,}20$

Der größtmögliche Ablehnungsbereich lautet demnach $K = \{k, \dots, 100\}$ für $k = (15, 27, 14, 29)$ in Variante $(1, 2, 3, 4)$.

0 1 2 3

b) Aida ist skeptisch und glaubt, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf größer als p_1 ist. Wir betrachten daher nun die Nullhypothese des Verkäufers und Aidas Vermutung als Alternativhypothese. Berechnen Sie den Fehler zweiter Art bezüglich des in (a) bestimmten Ablehnungsbereichs. Benutzen Sie die Standardnormalverteilung zur Approximation.

Hinweis: Die Funktion $f(x) = \frac{a-bx}{\sqrt{bx(1-x)}}$ mit $0 < a < b$ ist streng monoton fallend auf dem Intervall $x \in (0,1)$.

Für Variante 2 und 4: Sie dürfen außerdem $\sqrt{24}$ durch 5 approximieren.

Für den Fehler zweiter Art betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, dass nicht H_0, sondern Aidas Alternativhypothese $H_1 : p > p_1$ gilt, die Testgröße aber nicht im Ablehnungsbereich von H_0 liegt. Wir betrachten also

$$\sup_{p>p_1} \Pr_p[X \notin K] = \sup_{p>p_1} \Pr_p[X \leq k-1]\,.$$

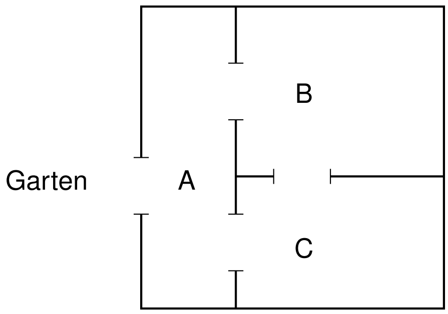
Wir folgen dem Hinweis und nutzen die Standardnormalverteilung zur Approximation. Laut Korollar 109 können wir $Z' = \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ als standardnormalverteilt annehmen, sodass zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\Pr_p[X \leq k-1] &= \Pr_p[Z' \cdot \sqrt{np(1-p)} + np \leq k-1] \\
&= \Pr_p\left[Z' \leq \frac{k-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\
&= \Phi\left(\frac{k-1-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).
\end{aligned}$$

Als Verteilungsfunktion ist Φ monoton steigend. Aus dem Hinweis (mit $a = k-1$, $b = n$, $x = p$) erhalten wir außerdem, dass das Argument der Verteilungsfunktion streng monoton fallend bezüglich p ist. Auf diese Weise folgt

$$\begin{aligned}
\sup_{p>p_1} \Pr_p[X \leq k-1] &= \Phi\left(\frac{k-1-np_1}{\sqrt{np_1(1-p_1)}}\right) \\
&= \begin{cases}
\Phi\left(\frac{14-20}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = \Phi(-\frac{6}{4}) = 1-\Phi(1{,}5) = 1-0{,}933 = 0{,}067 & \text{Variante 1}\,. \\
\Phi\left(\frac{26-40}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right) \approx \Phi(-\frac{14}{5}) = 1-\Phi(2{,}8) = 1-0{,}997 = 0{,}003 & \text{Variante 2}\,. \\
\Phi\left(\frac{13-20}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\right) = \Phi(-\frac{7}{4}) = 1-\Phi(1{,}75) = 1-0{,}960 = 0{,}04 & \text{Variante 3}\,. \\
\Phi\left(\frac{28-40}{\sqrt{100\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6}}\right) \approx \Phi(\frac{-12}{5}) = 1-\Phi(2.4) = 1-0{,}992 = 0{,}008 & \text{Variante 4}\,.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 **Markov-Ketten (8 Punkte)**



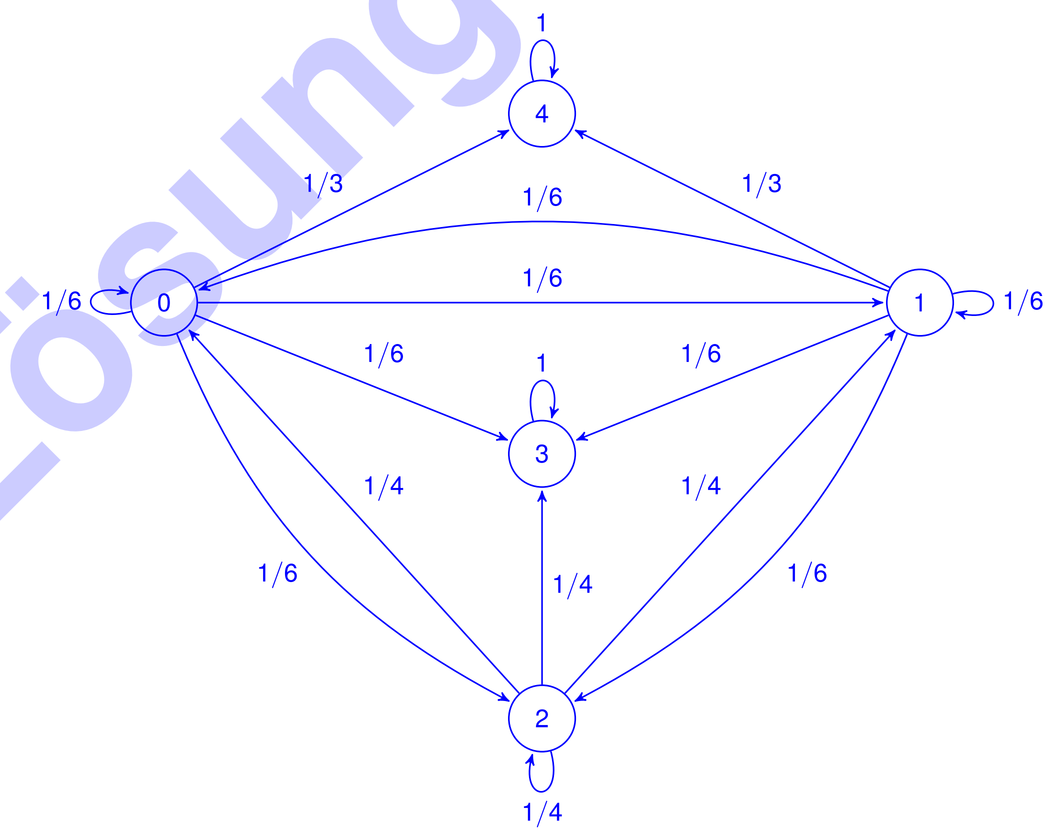
Die beiden Kater Ajax und Bringfried jagen sich quer durch die oben abgebildete Wohnung mit angrenzendem Garten. Zu Beginn befinden sie sich in den Räumen B und C. In jedem Zeitschritt wählen die beiden unabhängig voneinander zufällig eine der Türen ihres aktuellen Raums und wechseln in den nächsten Raum (bzw. von Raum A in den Garten). Da alle Türen gleich aussehen, wählen die beiden Kater jede Tür mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Das Spiel ist beendet, falls ein Kater in den Garten fliehen konnte, oder sich beide im gleichen Raum aufhalten.
Wir modellieren das Spiel der Kater durch die Markov-Kette $(X_t)_{t\geq 0}$. Dabei beschreibt die Zufallsvariable X_t, in welchen Räumen sich die beiden Kater zum Zeitpunkt t aufhalten. Die Zustände seien wie folgt gewählt.

Bedeutung	Variante 1	Variante 2	Variante 3	Variante 4
Die Kater befinden sich in den Räumen A und B.	0	1	2	2
Die Kater befinden sich in den Räumen A und C.	1	0	0	1
Die Kater befinden sich in den Räumen B und C.	2	2	1	0
Die Kater befinden sich im selben Raum.	3	3	3	3
Ein Kater befindet sich im Garten.	4	4	4	4

Der folgende Lösungsvorschlag bezieht sich exemplarisch auf Variante 1.

a) Zeichnen Sie das Übergangsdiagramm.

0
1
2
3



b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelingt es einem Kater, in den Garten zu fliehen?

Nach Angabe halten sich die beiden Kater zu Beginn in den Räumen B und C auf. Gesucht ist somit die Ankunftswahrscheinlichkeit f_{24}. Für die Berechnung verwenden wir Lemma 129 aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} f_{2,4} &= p_{2,4} + p_{2,0} f_{0,4} + p_{2,1} f_{1,4} + p_{2,2} f_{2,4} + p_{2,3} f_{3,4} \\ &= 0 + \frac{1}{4} f_{0,4} + \frac{1}{4} f_{1,4} + \frac{1}{4} f_{2,4} + \frac{1}{4} f_{3,4}. \end{aligned}$$

Da es sich bei Zustand 3 um einen absorbierenden Zustand handelt, ist $f_{3,4} = 0$. Dies setzen wir ein und stellen nach $f_{2,4}$ um:

$$f_{2,4} = \frac{1}{4} f_{0,4} + \frac{1}{4} f_{1,4} + \frac{1}{4} f_{2,4} \quad \Leftrightarrow \quad f_{2,4} = \frac{1}{3}\left(f_{0,4} + f_{1,4}\right).$$

Analog berechnen wir nun $f_{0,4}$ und $f_{1,4}$. Es gilt

$$f_{0,4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} f_{0,4} + \frac{1}{6} f_{1,4} + \frac{1}{6} f_{2,4}$$

und aus Symmetriegründen ergibt sich analog

$$f_{1,4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} f_{0,4} + \frac{1}{6} f_{1,4} + \frac{1}{6} f_{2,4} = f_{0,4}.$$

Damit können wir $f_{0,4}$ umstellen zu:

$$f_{0,4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} f_{0,4} + \frac{1}{6} f_{2,4} \quad \Leftrightarrow \quad f_{0,4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} f_{2,4}.$$

Abschließend setzen wir diese Ergebnisse in $f_{2,4} = 1/3\left(f_{0,4} + f_{1,4}\right)$ ein und erhalten das Endergebnis durch Umstellen nach $f_{2,4}$:

$$\begin{aligned} f_{2,4} &= \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} f_{2,4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} f_{2,4} \\ \Leftrightarrow \quad f_{2,4} &= \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

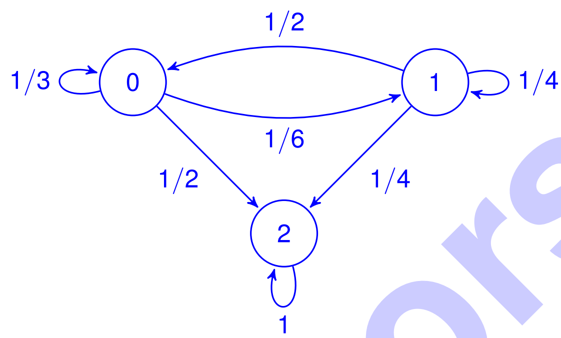
c) Wie lange dauert das Spiel erwartungsgemäß?

Hinweis: Sie dürfen für diese Teilaufgabe die Markov-Kette aus dem ersten Aufgabenteil geeignet modifizieren.

Zunächst legen wir die absorbierenden Zustände 3 (gleicher Raum) und 4 (Garten) zusammen, denn in beiden Fällen ist das Spiel vorbei. Um die Markov-Kette weiter zu vereinfachen, legen wir außerdem die bisherigen Zustände 0 (AB) und 1 (AC) zusammen, da keine Unterscheidung für diese Fragestellung nötig ist. Die modifizierte Markov-Kette $(X'_t)_{t\geq 0}$ besitzt nun also drei Zustände mit folgenden Bedeutungen:

0	Die Kater befinden sich in den Räumen A,B oder A,C.
1	Die Kater befinden sich in Räumen B und C.
2	Ein Kater befindet sich im Garten oder beide im gleichen Raum.

Das Übergangsdiagramm ist hier dargestellt:



Da die Kater in Raum B und C (Zustand 1) starten, ist die erwartete Übergangszeit $h_{1,2}$ gesucht. Unter Anwendung von Lemma 129 aus der Vorlesung berechnen wir

$$h_{1,2} = 1 + \frac{1}{2}h_{0,2} + \frac{1}{4}h_{1,2}\,,$$
$$h_{0,2} = 1 + \frac{1}{3}h_{0,2} + \frac{1}{6}h_{1,2} \quad \Leftrightarrow \quad h_{0,2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}h_{1,2}$$

und schließlich

$$h_{1,2} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}h_{1,2}\right) + \frac{1}{4}h_{1,2} = \frac{7}{4} + \frac{3}{8}h_{1,2}$$
$$\Leftrightarrow \quad h_{1,2} = \frac{8}{5} \cdot \frac{7}{4} = \frac{14}{5}.$$

Verteilungswerte der Standardnormalverteilung

Diese Tabelle der Standardnormalverteilung enthält die Werte von $\Phi(x)$ für $0 \leq x \leq 2{,}99$. Beispielsweise gilt $\Phi(1{,}55) \approx 0{,}939$. Diese Seite muss nicht abgegeben werden.

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999