DİNAMİK MODELLER

Dağıtılmış Gecikmeli ve Otoregresif (Ardışık Bağımlı) Modeller

Zaman serisi verilerinin kullanıldığı regresyon modellerinde, bağımlı değişken bağımsız değişkenlerin sadece cari dönem değerlerine değil, geçmiş (gecikmeli) değerlerinin de fonksiyonu ise böyle modeller **dağıtılmış gecikmeli modeller** olarak adlandırılır.

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + \beta_2 X_{t-1} + \beta_3 X_{t-2} + u_t$$

Modelde bağımlı değişkenin bir yada daha önceki değerleri etkileyici rol üstlenmişse, model otoregresif (ardışık bağımlı) model olarak adlandırılır.

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + \alpha_2 Y_{t-1} + u_t$$

Genel olarak

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + u_t$$

β_0 : Kısa dönem (etki) çarpanı

$\beta_0 = \dfrac{\partial Y_t}{\partial X_t}$, X 'deki bir birim değişmeye karşılık gelen Y ortalama değerindeki değişmeyi verir.

$$\beta_1 = \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-1}} \quad , \quad \beta_2 = \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-2}} \quad ,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., \beta_k = \frac{\partial Y_t}{\partial X_{t-k}}$$

Eğer X 'deki değişme daha sonra da aynen korunursa ($\beta_0 + \beta_1$) bir sonraki dönemde Y 'nin ortalama değerindeki değişmeyi verecektir. $\beta_0 + \beta_1 + \beta_2$ iki dönem sonraki Y 'nin ortalama değerindeki değişmeyi verir. Bu kısmi toplamlara **ara dönem çarpanları** veya **ara çarpanlar** denir.

$\sum_{i=0}^{k} \beta_i = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = \beta$ $\quad k$ gecikmenin sonunda **toplam çarpanı** verecektir.

$\beta_i^* = \dfrac{\beta_i}{\sum \beta_i}$ Standartlaştırılmış (standardize edilmiş) β_i

Standartlaştırılmış β_i 'lerin toplamı, belli sürede ortaya çıkan **uzun dönem (toplam) etki oranını** verir.

Örnek

$$\hat{Y}_t = \alpha + 0,4X_t + 0,3X_{t-1} + 0,2X_{t-2}$$

Y : Tüketim (dolar) X : Gelir (dolar)

Kısa dönem çarpanı: 0,4

1 dolarlık artışın kısa dönemdeki etkisi 40 centtir.

Uzun dönem çarpanı: 0,4+0,3+0,2=0,9

1 dolarlık artışın uzun dönemdeki etkisi 90 centtir.

$\frac{0,4}{0,9} = 0,44$ $\frac{0,3}{0,9} = 0,33$ $\frac{0,2}{0,9} = 0,23$

Gelirdeki bir birimlik (1 dolar) değişmenin %44 ünün hemen, %77 sinin 1 yıl sonra, %100 ünün de iki yıl sonra ortaya çıkacağını gösterir.

Dağıtılmış gecikmeler modelinin tahmini

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + u_t$$

Modelde yer alan bağımsız değişkenler olasılık dağılımı olmayan sabit değişkenlerdir. $COV(X_t, u_t) = 0$ ise X_{t-1}, X_{t-2} ……….. X_{t-k} değişkenleri de sabit değerlidir. Model, adım adım regresyon ile EKK yönteminin uygulaması ile tahmin edilir.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + u_t$$

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + u_t$$

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + u_t$$

…………….

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + u_t$$

Adım adım regresyon, gecikmeli değişkenlerin katsayıları istatistiksel açıdan anlamsızlaşınca ve/veya en az bir parametrenin işareti (+) dan (-)'ye veya (-) den (+)'a geçince durur.

Gecikme sayısı (k) yanlış belirlenmişse, model kurma hatasının sonuçları model için olacaktır. Dağıtılmış gecikmeli model için uygulamada karşılaşılan zorluklar:

- Gecikme sayısının ne olacağı hakkında önsel bilgi yoktur.
- Gecikme sayısı arttıkça serbestlik sayısı azalır. Bu durum küçük örnekler için sorun teşkil edecektir.
- Gecikmeli değişkenler arasında güçlü çoklu doğrusal bağlantı ihtimali yüksektir. Bu durum tahmin edilen parametrelerin varyanslarının ve dolayısıyla standart hataların

büyük çıkmasına sebep olur. Sonuç olarak hipotez testleri ve güven aralıkları gücünü ve güvenirliliğini yitirecektir.

Gecikmeli Modellere Koyck Yaklaşımı

Sonsuz gecikmeli model

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + u_t$$

Koyck, β'ların işaretlerinin aynı olduğunu ve bunların geometrik biçimde azaldıklarını varsayar.

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k \qquad \text{veya} \qquad \beta_k = \beta_0 (1-\lambda)^k$$

Burada $k = 0,1,2,\ldots$ ve $0 < \lambda < 1$ değerlerini alır. λ gecikmenin azalma (düşme) oranı, $(1-\lambda)$ uyarlanma hızıdır. $\lambda < 1$ olduğu için her β katsayısı önceki β'dan sayısal olarak daha küçük olacak, diğer bir ifade ile uzak geçmişe gittikçe gecikmenin Y_t zerindeki etkisi azalacaktır. $\lambda < 1$varsayımı ile uzak β'lara yakındıkilere göre daha az ağırlık tanınmış olmakatadır.

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots$$

β_k gecikme katsayısının değeri, ortak β_0 ve λ' ya bağlıdır. λ, 1'e ne kadar yakınsa β_k'daki azalma oranı o kadar küçük olacak ve X 'in geçmiş değerlerinin Y_t üzerinde önemli bir etkisi olacaktır. λ, sıfıra ne kadar yakınsa β_k'daki azalma oranı o kadar büyük olacak ve X 'in geçmiş değerlerinin Y_t üzerindeki etkisi az olacaktır.

Uzun dönem çarpanı β'ların toplamı aşağıdaki gibidir.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \beta_k = \beta_0 \left(\frac{1}{1-\lambda} \right)$$

$\beta_k = \beta_0 \lambda^k$ olduğuna göre, sonsuz gecikmeli model ($Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + u_t$) aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + u_t$$

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \lambda^0 X_t + \beta_0 \lambda^1 X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-3} + \cdots + u_t$$

Koyck modelin çözümü

$$Y_t = \alpha + \beta_0 \lambda^0 X_t + \beta_0 \lambda^1 X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-3} + \cdots + u_t$$

1.Model bir adım geriye çekilir.

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 \lambda^0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda^1 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-3} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-4} + \cdots + u_t$$

2.Yeni model λ ile çarpılır.

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-3} + \beta_0 \lambda^4 X_{t-4} + \cdots + \lambda u_t$$

3. Y_t ile λY_{t-1} arasındaki fark alınır.

$$(Y_t - \lambda Y_{t-1}) = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + (u_t - \lambda u_{t-1})$$

$$Y_t = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t \qquad \text{Kyock dönüştürmesi}$$

Böylece sonsuz dağıtılmış gecikmeli model otoregresif modele çevrilmiştir. Dönüştürülmüş modelin hata terimi v_t, u_t ve u_{t-1} 'nin hareketli ortalamasıdır. α ve sonsuz sayıda β yı tahmin etmek yerine α, β_0 ve λ tahmin edilir. X_t, X_{t-1}, X_{t-2}, X_{t-3},…….arasındaki çoklu doğrusal bağlantı sorunu ortadan kalkmıştır. Bağımsız değişkenin gecikmeli değerleri (X_{t-1}, X_{t-2} , …..) yerine Y_{t-1} değişkeni yer almıştır. Dağıtılmış gecikmeler modeli otoregresif modele çevrilebilir. Koyck modelde yer alan rassal hata v_t, u_t için geçerli varsayımları ($E(u_t) = 0$, $E(u_t^2) = \sigma^2, Cov(u_t, u_{t-i} = 0)$) sağlamayabilir , v_t otokorelasyonludur.

$$E(v_t, v_{t-1}) = E\left[(u_t - \lambda u_{t-1})(u_{t-1} - \lambda u_{t-2})\right]$$

$$= -\lambda E(u_{t-1})^2 = -\lambda\sigma^2$$

Y_t ve Y_{t-1} olasılık dağılımı olan değişkenlerdir. Böylece eşitliğin sağ tarafında olasılıklı açıklayıcı değişken yer almaktadır. EKK yönteminin uygulanabilmesi için eşitliğin sağ tafında yer alan değişkenlerin olasılık dağılımı olmayan sabit değişkenler olması gerekmektedir. Eğer olsasılıklı değişken yer alıyorsa, olasılıklı hata teriminden bağımsız olmaları gerekmektedir. Dolayısıyla Y_{t-1} 'in rassal hata teriminden bağımsız olup olmadığının araştırılması gerekir.

Ancak Y_{t-1}, içinde u_{t-1} varlığı nedeniyle $v_t (v_t = u_t - \lambda u_{t-1})$ ile ilişki olacaktır.

$$Cov(Y_{t-1}, v_t) = Cov(Y_{t-1}, u_t - \lambda u_{t-1}) = -\lambda\sigma^2$$

Bunun sonucu olarak, EKK tahmin edicileri eğilimli ve tutarsızdırlar, yani örnek sayısı sonsuza doğru büyüse bile Tahmin ediciler ana kütle değerine yaklaşmazlar. Y_{t-1} ile v_t arasındaki ilişki ortadan kaldırılabilirse, EKK ile tutarlı tahminler elde edilebilir. Modelin tahmini için uygun yöntem Araç değişkenler yöntemidir. Yöntemde Y_{t-1} yerine X_{t-1} geçer. Böylece Y_{t-1} ile v_t ilişki iken, X_t ve X_{t-1} değişkenleri v_t ilişkisizdir.

Ortanca Gecikme

Ortanca gecikme, *X*'teki bir birimlik kalıcı bir değişmeyi izleyen *Y*'deki değişmenin ilk yarısının yani %50 sinin sağlanması için gereken zamandır.

Koyck modeli için ortanca gecikme: $-\dfrac{\log 2}{\log \lambda}$

Örneğin $\lambda = 0,2$ ise ortanca gecikme 0,4306 değerine eşittir. *Y*'deki toplam değişmenin %50si yarım dönemden kısa bir sürede gerçekleşmektedir. $\lambda = 0,8$ ortanca gecikme 3,1067 olup, *Y*'deki toplam değişmenin %50 si için 3 dönemden uzun bir süre geçmesi gerekmektedir.

Ortalama Gecikme

Koyck modeli için ortalama gecikme: $\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$

Örneğin $\lambda = 1/2$ ise ortalama gecikme 1'e eşittir.

Ortanca ve ortalama gecikme Y'nin X'e tepki hızının bir ölçüsüdür.

Örnek

$$KBTH_t = -841,8568 + 0,7117 KBHG_t + 0,2954 KBTH_{t-1}$$

$$Y_t = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + v_t$$

Buna göre

$\lambda = 0,2954$

Ortanca gecikme: $-\dfrac{\log 2}{\log \lambda} = -\dfrac{\log 2}{\log 0,2954} = 0,5684$

Ortalama gecikme: $\dfrac{\lambda}{1-\lambda} = \dfrac{0,2954}{1-0,2954} = 0,4192$

KBTH, KBHG göre daha kısa sürede uyarlanmaktadır.