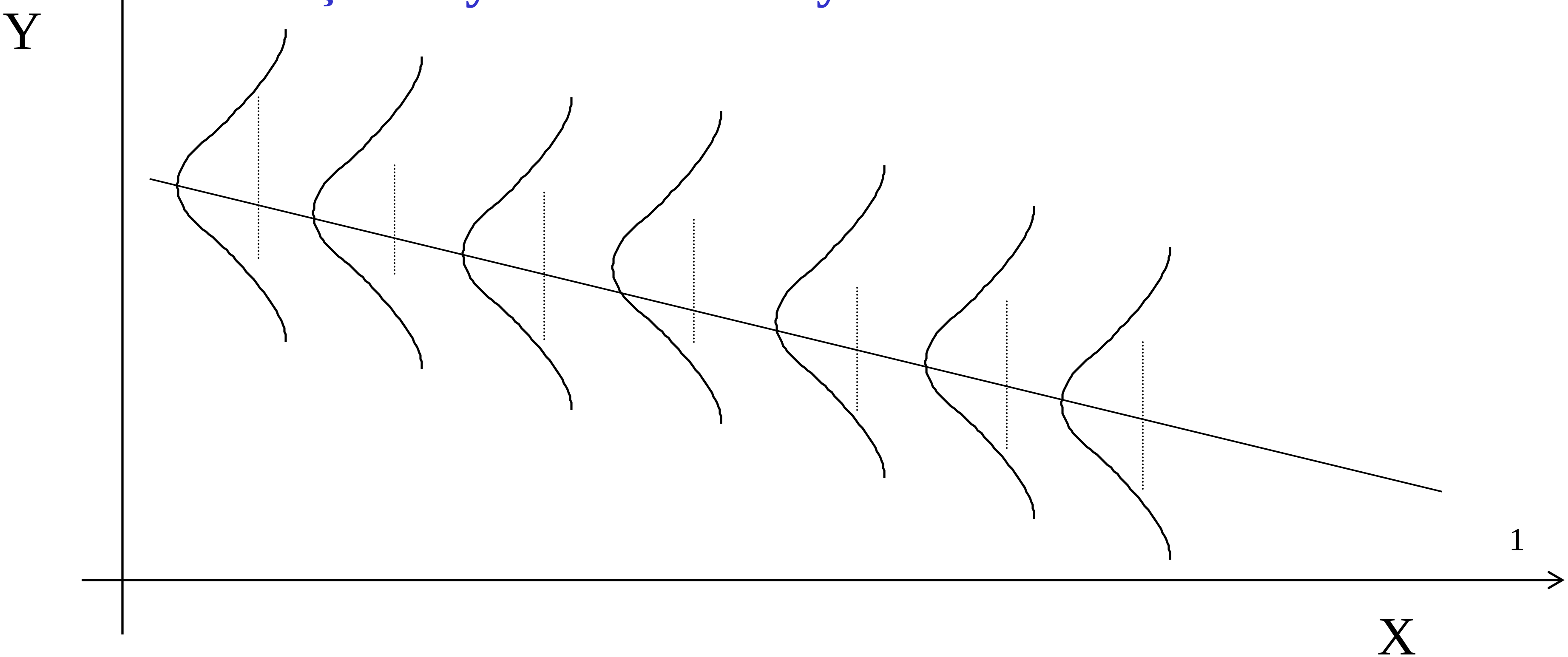
Sabit Varyans

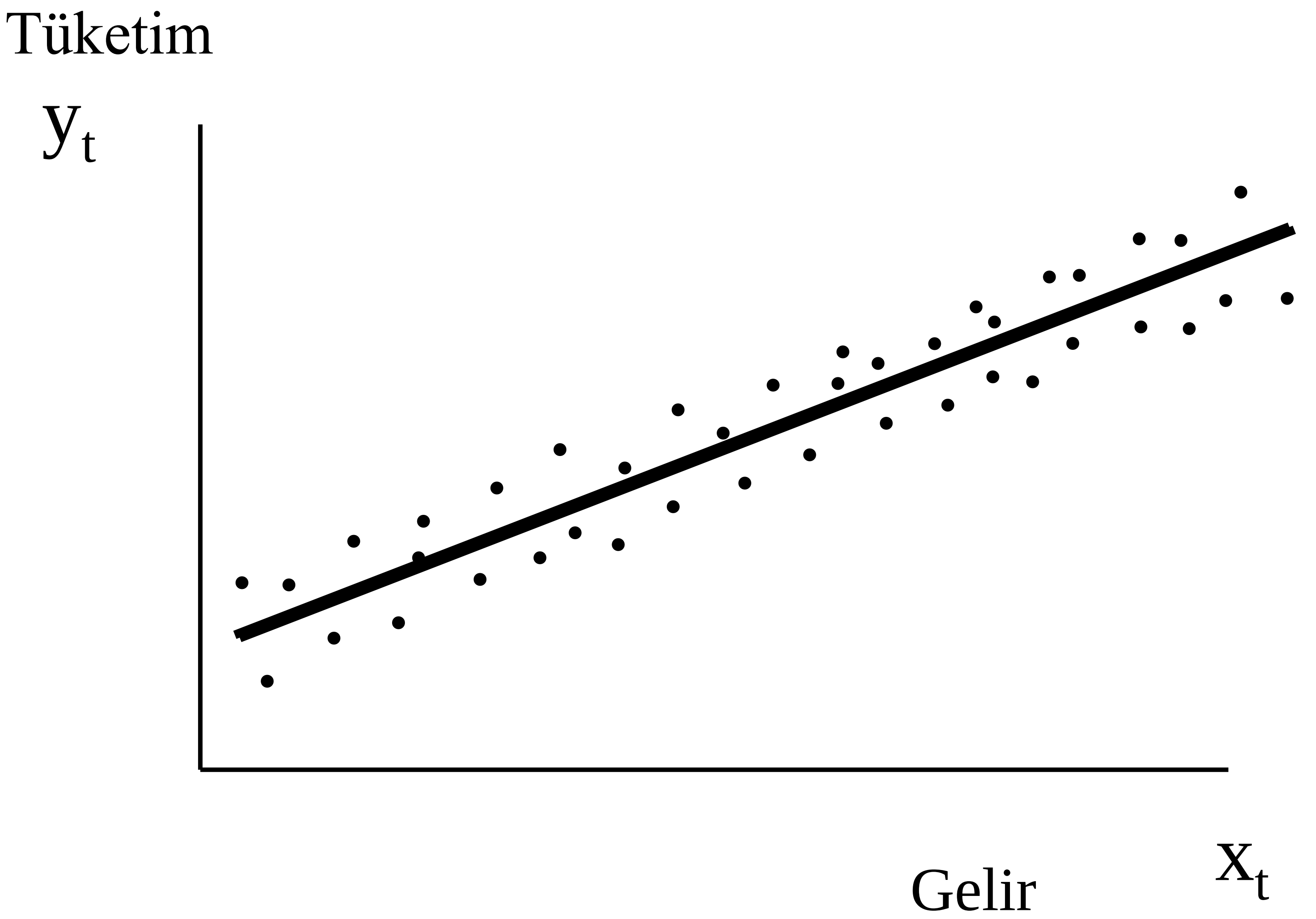
$$\boxed{Var(u_i|X_i) = Var(u_i) = E(u_i^2) = \sigma^2 \;\Rightarrow \text{Eşit Varyans}}$$

EKKY'nin varsayımlarından biri anakütle regresyon fonksiyonu u_i lerin eşit varyanslı olmasıdır.

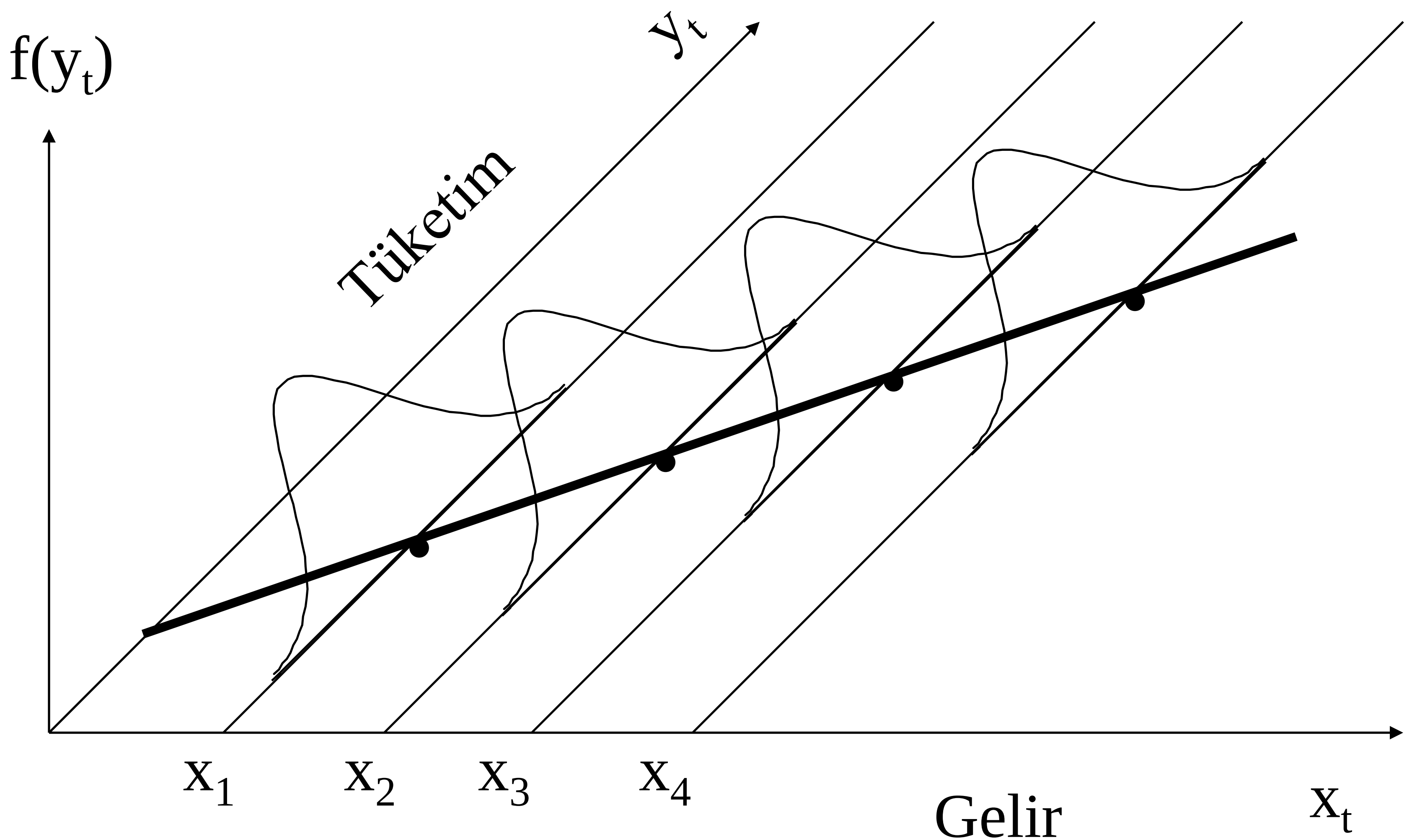
Her hata terimi varyansı bağımsız değişkenlerin verilen değerlerine göre σ^2 ye eşit aynı (sabit) bir değerdir. Bu nedenle **eşit varyansa sabit varyans** da denir.



Sabit Varyansta Hataların Dağılımı



Sabit Varyans Durumu



Farklı Varyans Kavramı

- "Sabit varyans"(homoscedasticity) varsayımına göre verili X_i açıklayıcı değişkenlerine bağlı olarak Y_i'nin koşullu varyansı sabittir:

$$E(u_i^2) = \sigma^2 \qquad i=1, 2,..,n$$

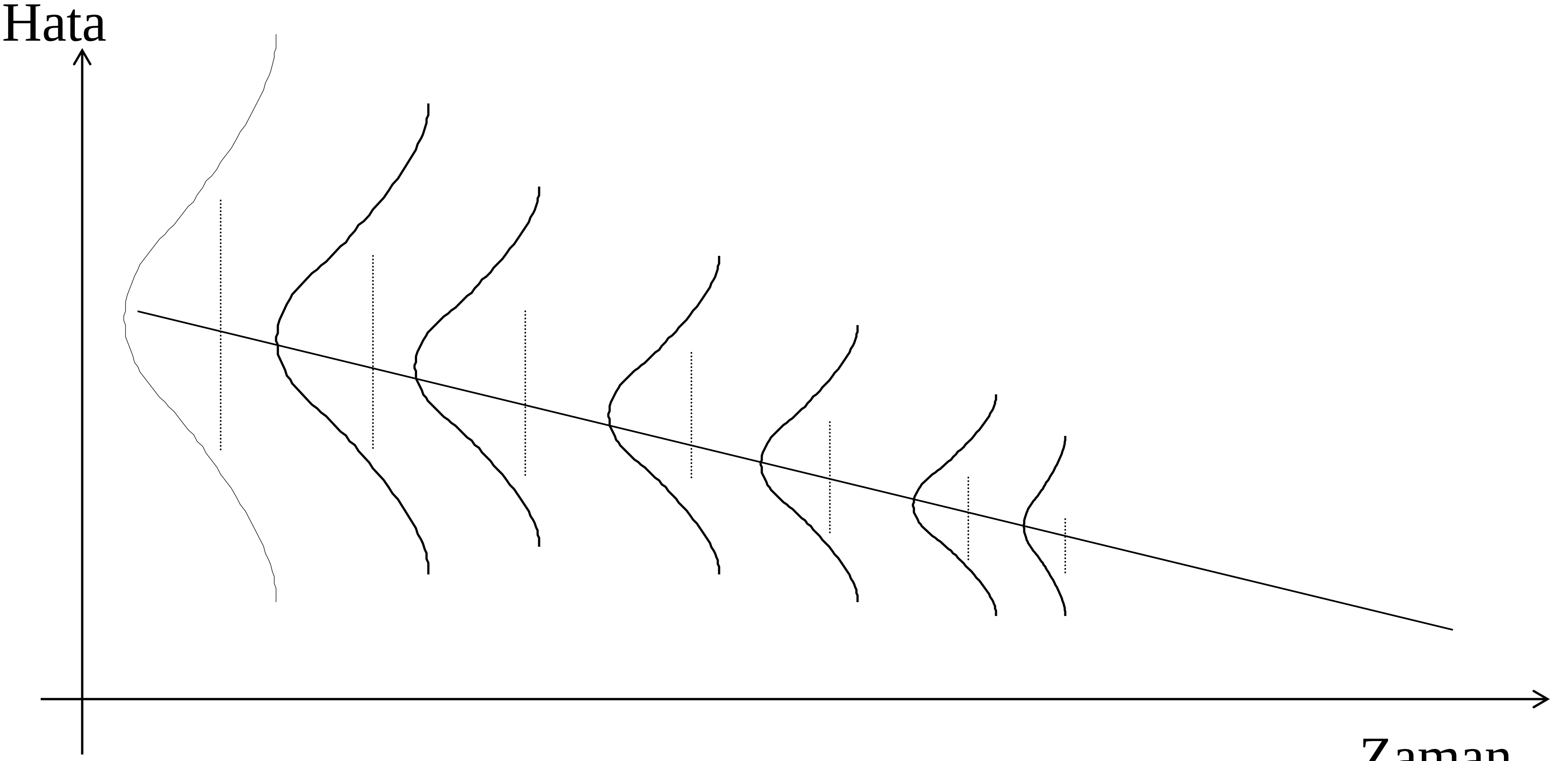
- "Farklı varyans" (heteroscedasticity) durumunda ise X_i değiştikçe Y_i 'nin koşullu varyansı da değişir:

$$E(u_i^2) = \sigma_i^{\,2}$$

- Farklı varyansa bir örnek olarak tasarrufların varyansının gelirle birlikte artmasını verebiliriz.
- Yüksek gelirli ailelerin tasarrufları, düşük gelirli ailelere oranla hem ortalama olarak daha çoktur hem de değişirliği daha fazladır.

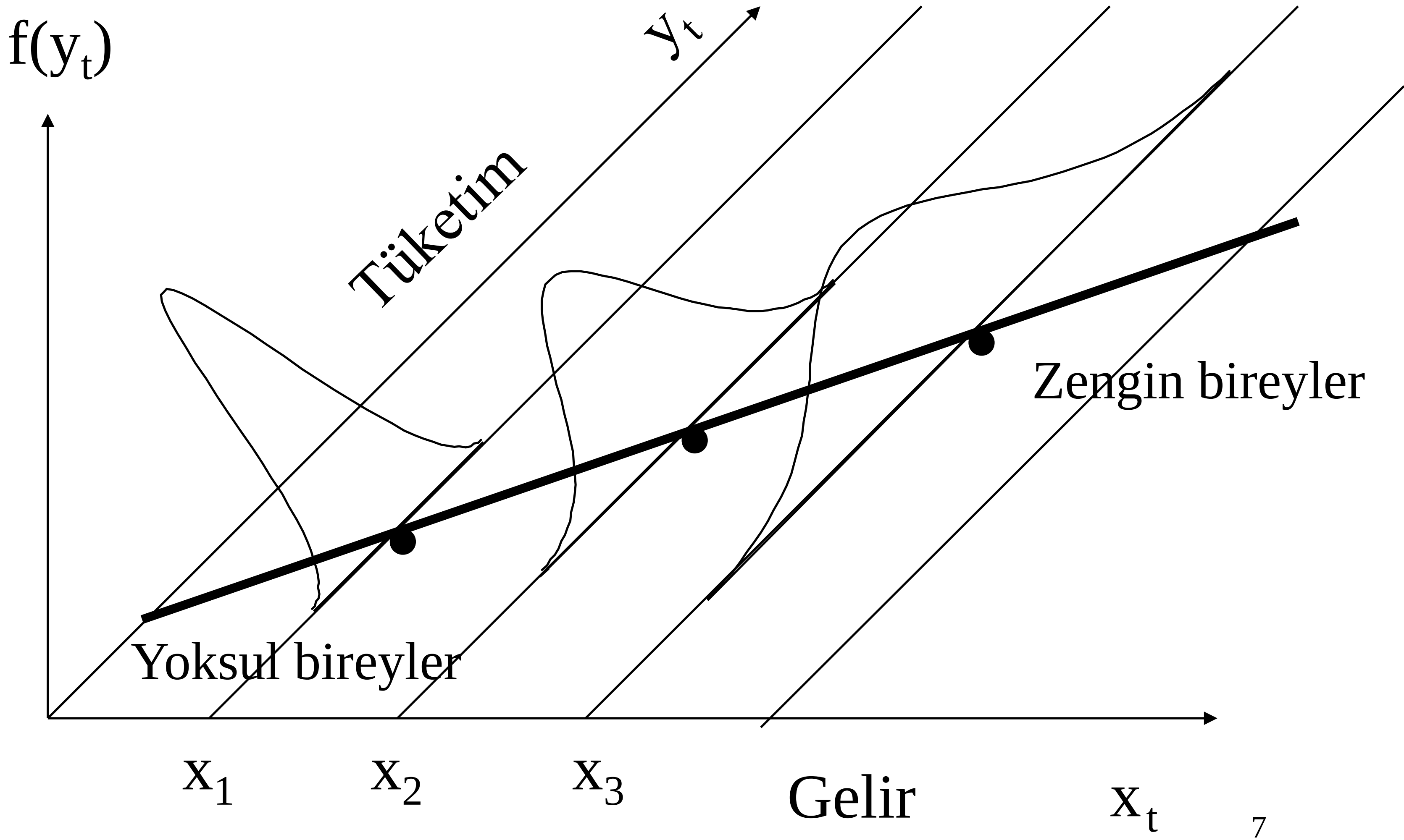
Farklı Varyans

$\text{Var}(u_i|X_i) = \text{Var}(u_i) = E(u_i^2) = \sigma_i^2 \Rightarrow$ Farklı Varyans



Farklı Varyansta Hataların Dağılımı

Farklı Varyans Durumu



Farklı Varyansın Nedenleri

- Hata terimi varyansının değişken olma nedenlerinden bazıları şunlardır:

1. “Hata öğrenme” (error learning) modellerine göre bireyler bazı konuları öğrendikçe daha az hata yaparlar. Buna göre de σ^2 nin de zamanla küçülmesi beklenir.

Örnek olarak, bilgisayarda klavye kullanma süresi arttıkça hem klavye hataları hem de bunların varyansları azalır.

Farklı Varyansın Nedenleri

2. Gelir düzeyi arttıkça gelirin harcanabileceği seçenekler de genişler. Böylece, gelir düzeyi ile birlikte hem harcamaların hem de bunların varyanslarının artması beklenir.

3. Zaman içerisinde veri derleme tekniklerinin gelişmesine koşut olarak σ_i^2 de düşebilir.

4. Farklı varyans "dışadüşen"(outlier) gözlemlerin bir sonucu olarak da ortaya çıkabilir.Böyle gözlemlerin alınması ya da bırakılması, özellikle de örneklem küçükken sonuçları önemli ölçüde değiştirebilir.

Farklı Varyansın Nedenleri

5. Farklı varyansın bir diğer nedeni de model belirleme (spesifikasyon) hatasıdır. Özellikle de önemli bir değişkenin modelden çıkartılması farklı varyansa yol açabilir.

6. Farklı varyans sorunu yatay kesit verilerinde zaman serisi verilerine oranla daha fazla görülebilmektedir. Bunun nedeni, zaman serilerinde değişkenlerin zaman içerisinde yakın büyüklüklerde olma eğilimidir.

Farklı Varyans ile Karşılaşılan Durumlar

Kar dağıtım modelleri, Sektör modelleri, Ücret modelleri ve Deneme - Yanılma modelleri gibi kesit verilerinde karşılaşılır.

En Küçük Kareler İle İlgili Özellikleri

1. En Küçük Kareler Tahmincileri doğrusal ve sapmasızdır.

2. Katsayı tahmincileri etkin değildir.

3. En Küçük kareler tahmincilerinin standart hataları doğru değildir.

4. Standart hata formulleri doğru olmadığından güven aralıkları ve hipotez testleri geçerli değildir.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + e_t$$

Farklı varyans durumunda:

En küçük kareler varyans formulu geçersizdir:

$$\mathrm{var}(b_2) = \frac{\sigma^2}{\Sigma\,(x_t - \bar{x})^2}$$

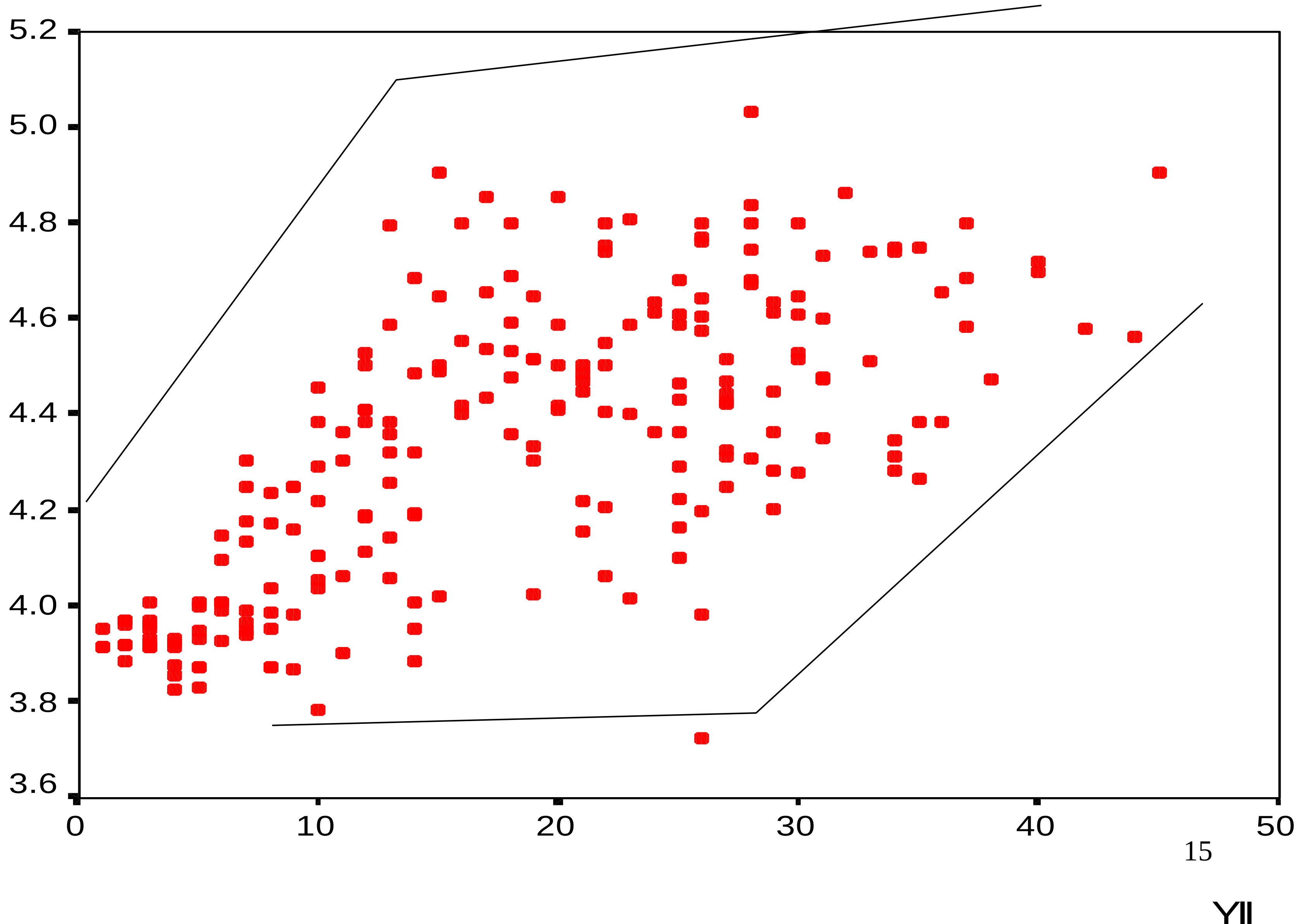
Enküçük kareler varyans formulu aşağıdaki gibi düzeltilmelidir.:

$$\mathrm{var}(b_2) = \frac{\Sigma\,\sigma_t^{\,2}(x_t - \bar{x})^2}{[\Sigma\,(x_t - \bar{x})^2]^2}$$

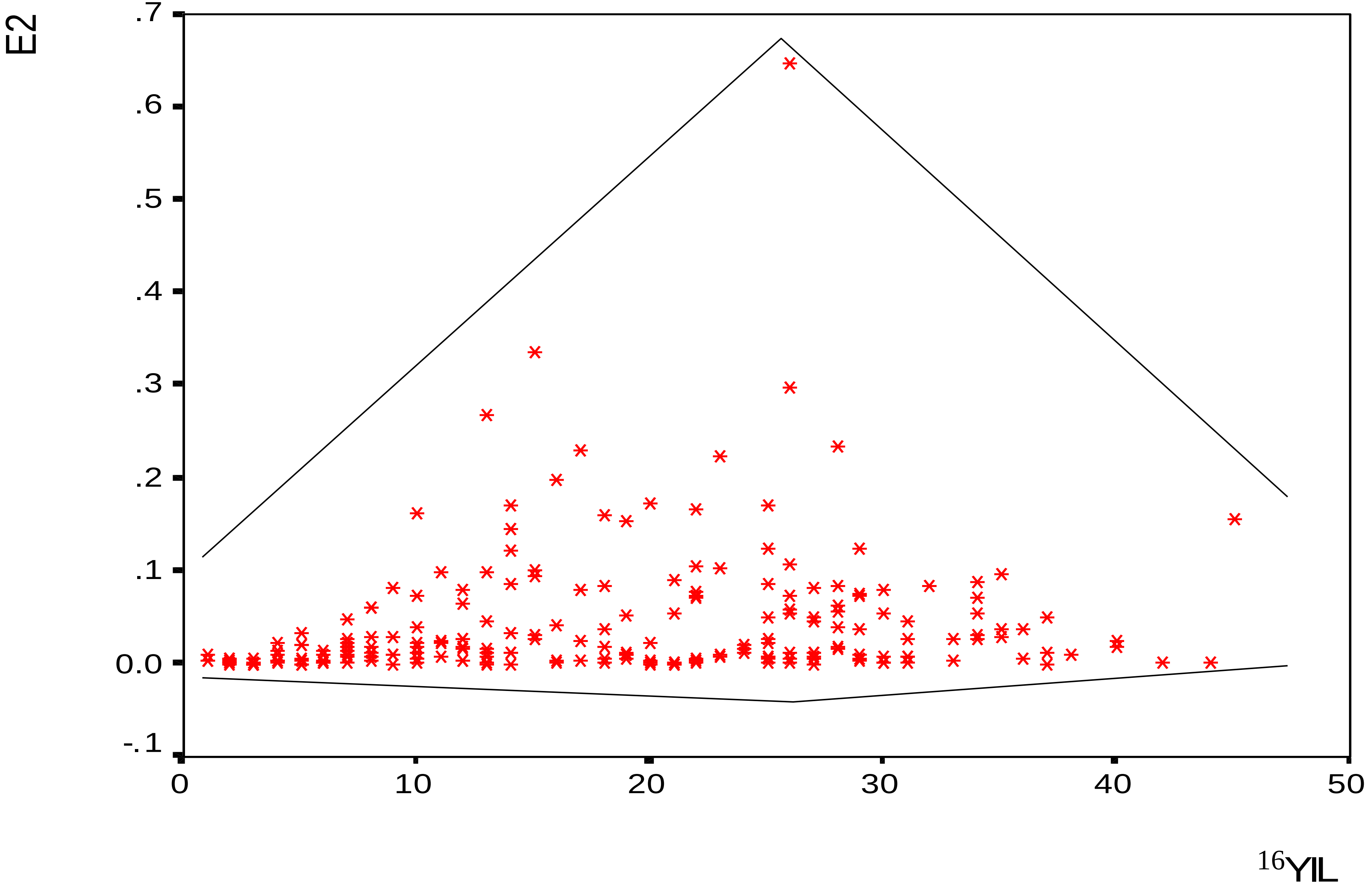
Farklı Varyansın Belirlenmesi

- Grafik Yöntemle.
- Sıra Korelasyonu testi ile.
- Goldfeld-Quandt testi ile.
- White testi ile.
- Lagrange çarpanları testi ile

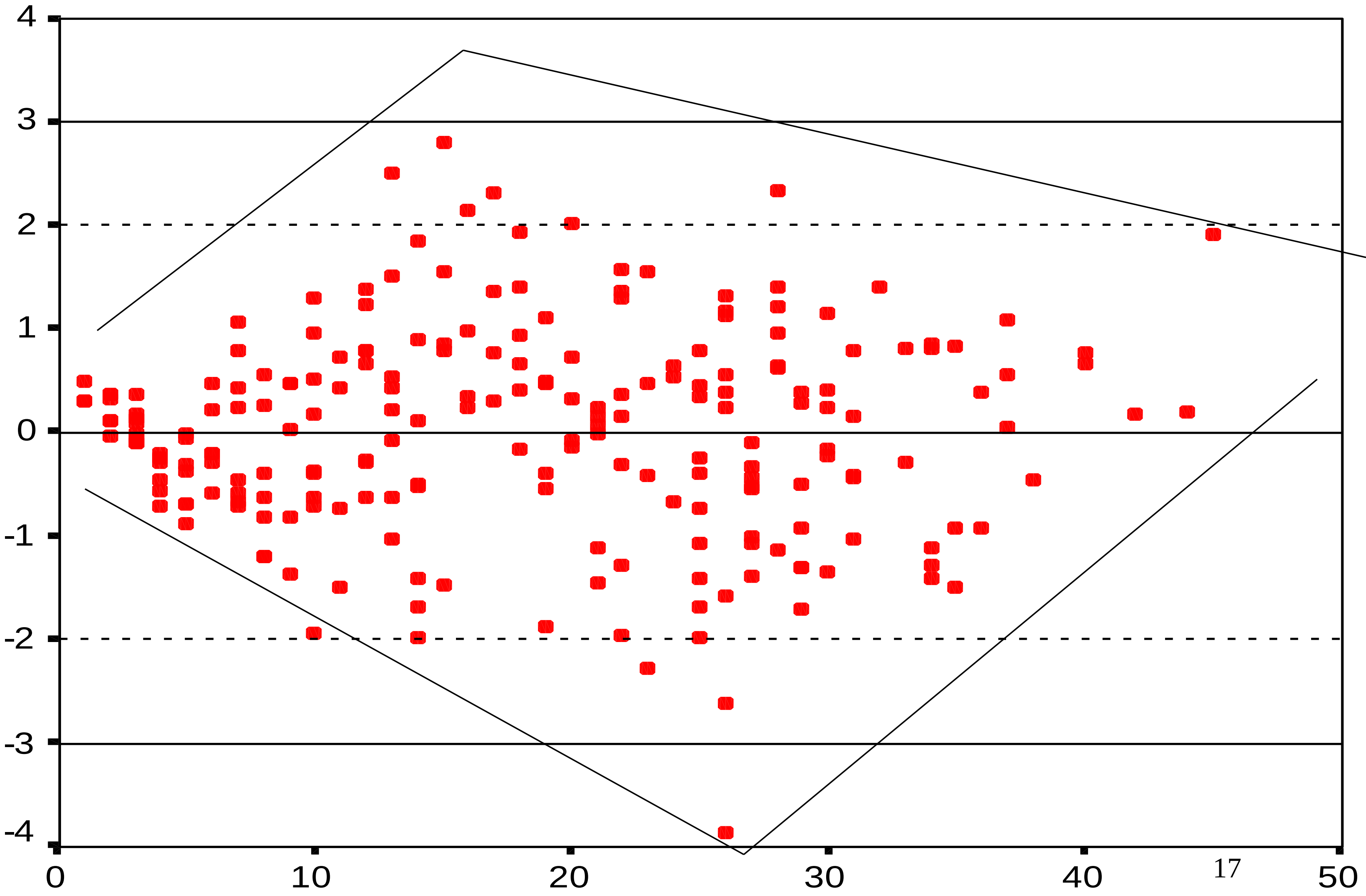
Grafik Yöntem



Grafik Yöntem



Grafik Yöntem



Sıra Korelasyonu Testi

1.Aşama **H_0: ρ = 0**
H_1: ρ ≠ 0

2.Aşama **α = ?** **s.d.=?** **t_{tab} =?**

3.Aşama

$$t_{hes} = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} = ?$$

$$r_s = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)} \right] \right\} = ?$$

4.Aşama **$t_{hes} > t_{tab}$**

H_0 hipotezi reddedilebilir

Sıra Korelasyonu Testi

Y	**X**	**e**	X_s	e_s	d_i	d_i^2
75	**80**	7.0545	1	5	-4	16
88	**100**	4.7091	2	3	-1	1
95	**120**	-3.6364	3	2	1	1
125	**140**	11.0182	4	7	-3	9
115	**160**	-14.327	5	8	-3	9
127	**180**	-17.672	6	9	-3	9
165	**200**	4.9818	7	4	3	9
172	**220**	-3.3636	8	1	7	49
183	**240**	-7.7091	9	6	3	9
225	**260**	18.9455	10	10	0	0

Mutlak değerli olarak bulundukları yer itibariyle küçükten büyüğe sıra numarası verilir

$d=X-e$

$\mathbf{\Sigma d_i^2=112}$

Sıra Korelasyonu Testi

$$r_s = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)} \right] \right\} = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{112}{10(10^2 - 1)} \right] \right\} \mathbf{= 0.3212}$$

1.Aşama

H_0: $\rho = 0$
H_1: $\rho \neq 0$

2.Aşama **α = 0.05 s.d.= 8** **t_{tab} = 2.306**

3.Aşama

$$t_{hes} = \frac{0.3212\sqrt{10-2}}{\sqrt{1-(0.3212)^2}} = \mathbf{0.9593}$$

4.Aşama **$t_{hes} < t_{tab}$**

H_0 hipotezi reddedilemez.

Goldfeld-Quandt Testi

Büyük örneklere uygulanan bir F testidir. Bu test σ^2_i nin farklı varyansının bağımsız değişkenlerden biri ile pozitif ilişkili olduğunu varsayar.

$$\sigma_i^2 = \sigma^2 . X_i^2$$

σ^2_i X_i ile pozitif (aynı yönde) ilişkilidir ve σ^2_i farklı varyansı X'in karesi ile orantılıdır. Yani X_i değerleri arttıkça σ^2_i değeri de artmaktadır.

Goldfeld-Quandt Testi

$$Y = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + \ldots + b_k X_k + u$$

$Y \quad X_{2s} \quad X_3 \quad \ldots \quad X_k$

I.Alt Örnek

n_1

$$Y_I = b_{11} + b_{21} X_2 + b_{31} X_3 + \ldots + b_{k1} X_k + u$$

$$\Sigma e_1^2 = ?$$

Çıkarılan Gözlemler

$$n(1/6) < c < n(1/3)$$

II.Alt Örnek

n_2

$$Y_{II} = b_{12} + b_{22} X_2 + b_{32} X_3 + \ldots + b_{k2} X_k + u$$

$$\Sigma e_2^2 = ?$$

Goldfeld-Quandt Testi

1.Aşama **H_0: Eşit Varyans**
H_1: Farklı Varyans

2.Aşama **α = ?** $$f_1 = f_2 = \frac{(n - c - 2k)}{2} = ?$$ **F_{tab} =?**

3.Aşama

$$F_{hes} = \frac{\Sigma e_2^2}{\Sigma e_1^2} = ?$$

X bağımsız değişkeninin değerleri küçükyen büyüğe doğru ilgili Y bağımlı değişkeninin değerleri de taşınarak sıralanır. Ortadan c kadar gözlem çıkarılır.

4.Aşama $\mathbf{F_{hes} > F_{tab}}$

H_0 hipotezi reddedilebilir

Yıl	Tasarruf	Gelir
1	264	8777
2	105	9210
3	90	9954
4	131	10508
5	122	10979
6	107	11912
7	406	12747
8	503	13499
9	431	14269
10	588	15522
11	898	16730
12	950	17663
13	779	18575
14	819	19635
15	1222	21163
16	1702	22880
17	1578	24127

Tasarruf	Gelir
1654	25604
1400	26500
1829	27670
2200	28300
2017	27430
2105	29560
1600	28150
2250	32100
2420	32500
2570	35250
1720	33500
1900	36000
2100	36200
2300	38200

Gelir bağımsız değişkenine göre tasarrufu da sıralıyoruz.

n_1	Tasarrfuf	Gelir	n_2	Tasarrfuf	Gelir
1	264	8777	1	1829	27670
2	105	9210	2	1600	28150
3	90	9954	3	2200	28300
4	131	10508	4	2105	29560
5	122	10979	5	2250	32100
6	107	11912	6	2420	32500
7	406	12747	7	1720	33500
8	503	13499	8	2570	35250
9	431	14269	9	1900	36000
10	588	15522	10	2100	36200
11	898	16730	11	2300	38200

Gelire göre sırandı.

Ortadan 31/4=8 veya 9 gözlem çıkarılacak.

İki alt grup oluşturuldu.

$$S_1 = -738.84 + 0.008X$$

(189.4) (0.015)

$$\Sigma e_1^2 = 1447771$$

$$S_2 = 1141.07 + 0.029X$$

(709.8) (0.02)

$$\Sigma e_2^2 = 769899$$

$f_1=f_2=(n-c-2k)/2=9$ sd de $F_{tab}=3.18$

$$F_{test} = \frac{\Sigma e_2^2}{\Sigma e_1^2} = \frac{769899}{144771} = 5$$

White Testi

$Y = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + u$

White Testi için yardımcı regresyon:

$u^2 = a_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_2^2 + a_5 X_3^2 + a_6 X_2 X_3 + v$

$R_y^2 = ?$

White Testi Aşamaları:

1.Aşama H_0: $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$

H_1 : a_i'lerin en az bir tanesi anlamlıdır

2.Aşama $\boldsymbol{\alpha = ?}$ **s.d.= k-1** $\boldsymbol{\chi^2_{tab} = ?}$

3.Aşama $W = n.R_y^2 = ?$

4.Aşama $\boldsymbol{W > \chi^2_{tab}}$ H_0 hipotezi reddedilebilir

White Testi

$\ln Maaş = 3.8094 + 0.439\ Yıl + 0.06\ eğitim \qquad n=222$

<u>White Testi için yardımcı regresyon:</u>

$e^2 = -0.0018 + 0.02\ Yıl + 0.07\ Yıl^2 - 0.03\ Eğitim + 0.004\ Eğitim^2 + 0.014\ Yıl*Eğitim$

$R_y^2 = 0.0901$

1.Aşama H_0: $a_2 = a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 0$

H_1 : a_i'lerin en az bir tanesi anlamlıdır

2.Aşama $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ **s.d.=6-1=5** $\boldsymbol{\chi^2_{tab} = 11.07}$

3.Aşama $W = n.R_y^2 = 222(0.0901) = 20.0022$

4.Aşama $\boldsymbol{W > \chi^2_{tab}}$ H_0 hipotezi reddedilebilir

Lagrange Çarpanları(LM) Testi

$Y = b_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 + u$

LM testi için yardımcı regresyon:

$$e^2 = a^* + b^* \hat{Y}^2 + v \qquad R_y^2 = ?$$

LM Testi Aşamaları:

1.Aşama $H_0: b = 0$

$H_1 : b \neq 0$

2.Aşama $\boldsymbol{\alpha = ?}$ **s.d.= 1** $\boldsymbol{\chi^2_{tab} = ?}$

3.Aşama $LM = n.R_y^2 = ?$

4.Aşama $\boldsymbol{LM > \chi^2_{tab}}$ H_0 hipotezi reddedilebilir

Lagrange Çarpanları(LM) Testi

$\ln Maaş = 3.8094 + 0.439\ Yıl + 0.06\ Eğitim \qquad n=222$

LM Testi için yardımcı regresyon:

$e^2 = -0.2736 + 0.0730\ (\widehat{\ln Maas})^2$

$R_y^{\,2} = 0.0537$

1.Aşama $H_0:\ b = 0$

$H_1 : b \neq 0$

2.Aşama $\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ **s.d.=1** $\boldsymbol{\chi^2_{tab} = 3.84146}$

3.Aşama $LM = n.R_y^{\,2} = 222(0.0537) = 11.9214$

4.Aşama $\mathbf{LM > \chi^2_{tab}}$ H_0 hipotezi reddedilebilir

UYGULAMA: 32 ailenin yıllık gıda harcamaları (Y) ve aylık ortalama gelirleri (X) aşağıda verilmiştir.

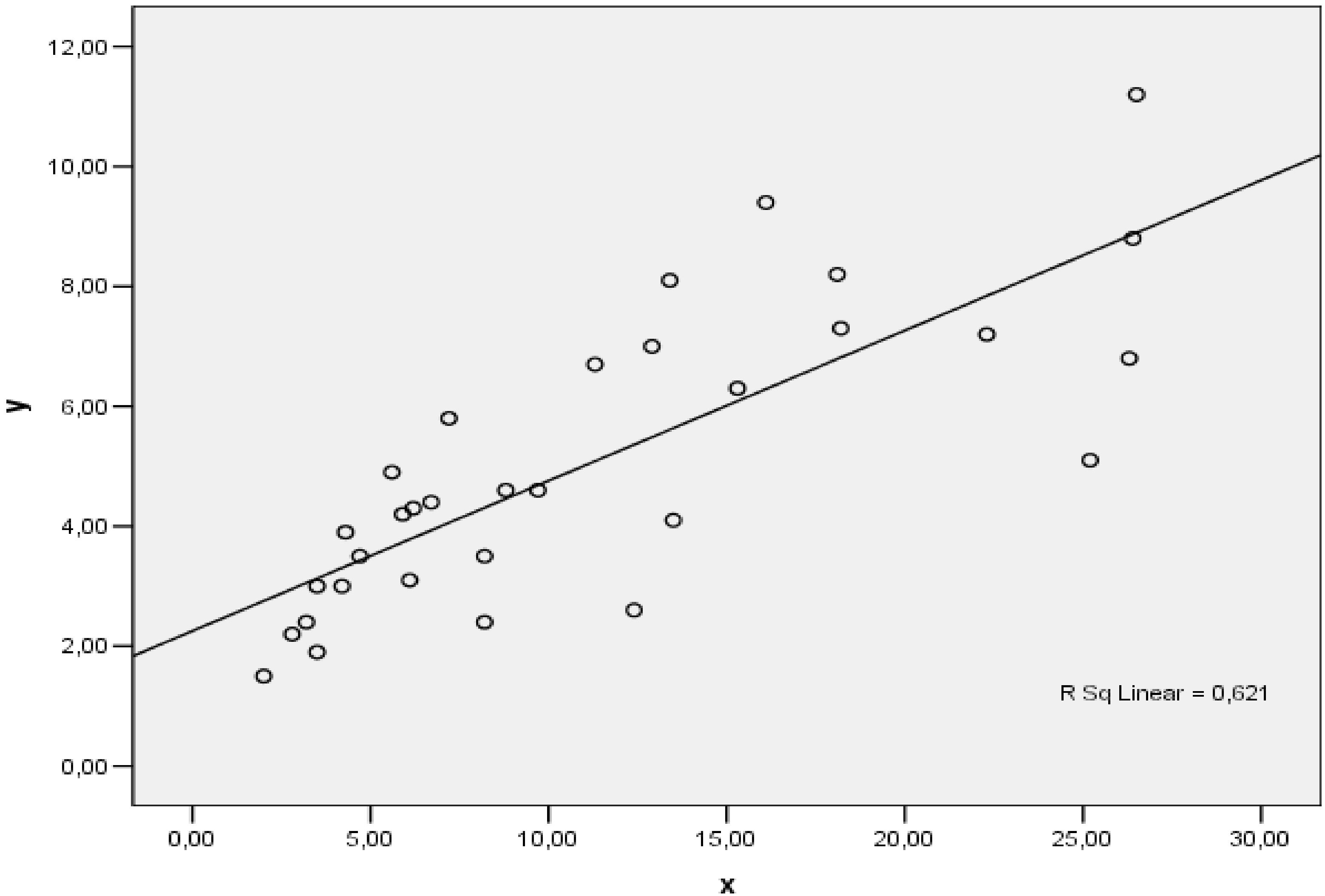
Aile Sayısı	**Y**	**X**	**u**	**Aile Sayısı**	**Y**	**X**	**u**
1	2.2	2.8	-0.75464	17	1.5	2	-1.25412
2	3	3.5	-0.1301	18	5.8	7.2	1.74247
3	4.1	13.5	-1.53666	19	8.2	18.1	1.41032
4	3.5	8.2	-0.80818	20	4.3	6.2	0.49313
5	4.2	5.9	0.46833	21	9.4	16.1	3.11164
6	6.3	15.3	0.21216	22	5.1	25.2	-3.46933
7	4.6	9.7	-0.08417	23	2.4	8.2	-1.90818
8	8.8	26.4	-0.07012	24	8.1	13.4	2.48841
9	7.3	18.2	0.48526	25	4.9	5.6	1.24352
10	4.4	6.7	0.4678	26	3	4.2	-0.30556
11	6.7	11.3	1.61478	27	4.6	8.8	0.14142
12	3.5	4.7	0.06911	28	1.9	3.5	-1.2301
13	6.8	26.3	-2.04505	29	2.6	12.4	-2.76094
14	7.2	22.3	-0.64243	30	3.9	4.3	0.56938
15	3.1	6.1	-0.68181	31	7	12.9	1.51373
16	2.4	3.2	-0.6549	32	11.2	26.5	2.30482

UYGULAMA: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i$ modeli için sabit varyans varsayımının geçerli olup olmadığını

- •Grafik Yöntemle.
- •Sıra Korelasyonu testi ile.
- •Goldfeld-Quandt testi ile.
- •White testi ile.
- •Lagrange çarpanı testi ile

inceleyiniz.

Grafik Yöntem



Sıra Korelasyonu Testi

1.Aşama **$H_0: \rho = 0$**
$H_1: \rho \neq 0$

2.Aşama **$\alpha = 0.05$ s.d.=?** **t_{tab} =?**

3.Aşama

$$t_{hes} = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} = ?$$

$$r_s = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)} \right] \right\} = ?$$

4.Aşama **$t_{hes} > t_{tab}$**

H_0 hipotezi reddedilebilir

Sıra Korelasyonu Testi

$$r_s = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{\Sigma d_i^2}{n(n^2 - 1)} \right] \right\} = 1 - \left\{ 6 \left[\frac{3630}{32(32^2 - 1)} \right] \right\}$$

1.Aşama **H_0: $\rho = 0$**

H_1: $\rho \neq 0$

2.Aşama **$\alpha = 0.05$ s.d.= 30** **$t_{tab} = 2.042$**

$$t_{hes} = \frac{0.3347\sqrt{32-2}}{\sqrt{1-(0.3347)^2}} = \mathbf{1.9454}$$

4.Aşama **$t_{hes} < t_{tab}$**

H_0 hipotezi reddedilemez.

Goldfeld-Quandt Testi

$c = 32 / 5 = 6.4$ 6 gözlem atılacak. (14.-19. gözlemler)

13 gözlemden oluşan iki grup için modeller

1.-13. gözlemler için

$Y_i = 0.5096 + 0.6078X_i$ $\sum e_1^2 = 3.6201$

20.-32. gözlemler için

$Y_i = 3.8153 + 0.1723X_i$ $\sum e_2^2 = 49.9631$

Goldfeld-Quandt Testi

1.Aşama **H_0: Eşit Varyans**
H_1: Farklı Varyans

2.Aşama **α = 0.05**

$$f_1 = f_2 = \frac{(32-6-2*2)}{2} = 11$$

F_{tab} =2.82

3.Aşama

$$F_{hes} = \frac{\Sigma e_2^2}{\Sigma e_1^2} = \frac{49.9631}{3.6201} = 13.8016$$

4.Aşama $$\mathbf{F_{hes} > F_{tab}}$$

H_0 hipotezi reddedilebilir

White Testi

$$Y = 2.2528 + 0.2507X_i$$

White Testi için yardımcı regresyon:

$e^2 = -0.6909 + 0.3498X - 0.0058X^2$ $\qquad R_y^2 = 0.2296$

1.Aşama H_0: $a_2 = a_3 = 0$;

H_1 : a_i'lerin en az bir tanesi anlamlıdır

2.Aşama **α = 0.05 s.d.=3-1=2 χ^2_{tab}=5.99**

3.Aşama $W = n.R_y^2 = 32(0.2296) = 7.3472$

4.Aşama **$W > \chi^2_{tab}$** H_0 hipotezi reddedilebilir

Lagrange Çarpanları(LM) Testi

$$Y = 2.2528 + 0.2507X_i$$

LM Testi için yardımcı regresyon:

$$e^2 = 0.417 + 0.060\,\widehat{Y}^2 \qquad R_y^{\,2} = 0.201$$

1.Aşama H_0: $b = 0$

H_1 : $b \neq 0$

2.Aşama **α = 0.05 s.d.=2-1=1 χ^2_{tab}=3.84146**

3.Aşama LM= $n.R_y^{\,2} = 32(0.201) = 6.432$

4.Aşama **LM > χ^2_{tab}** H_0 hipotezi reddedilebilir

FARKLI VARYANSI ORTADAN KALDIRMA YOLLARI

Farklı varyans durumunda EKKY tahmincileri etkinlik özelliklerini kaybettiklerinden güvenilir değildirler. Bu sebeple farklı varyans ortadan kaldırılmadan EKKY uygulanmamalıdır. Y_i lerin (veya u_i lerin) farklı varyansları σ^2_i nin bilinip bilinmemesine göre farklı varyansı kaldıran iki yol vardır:

- σ_i^2 nin BİLİNMESİ HALİ
- σ_i^2 nin BİLİNMEMESİ HALİ

σ_i^2 nin BİLİNMESİ HALİ

- Genelleştirilmiş EKKY(GEKKY)

$$Y_i = b_1 + b_2 X_i + u_i \longrightarrow \sigma_i^2$$

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = b_1 \frac{1}{\sigma_i} + b_2 \frac{X_i}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i} \longrightarrow Y_i^* = b_1^* + b_2^* X_i^* + u_i^*$$

$$E\left(\frac{u_i}{\sigma_i}\right)^2 = \frac{1}{\sigma_i^2} E\left(u_i^2\right) = \frac{1}{\sigma_i^2} \sigma_i^2 = 1$$

Genelleştirilmiş EKKY(GEKKY)

- Sabit terimi yoktur.

- İki tane bağımsız değişken vardır.

$$\frac{Y_i}{\sigma_i} = b_1 \frac{1}{\sigma_i} + b_2 \frac{X_i}{\sigma_i} + \frac{u_i}{\sigma_i}$$

Genelleştirilmiş EKKY(GEKKY)

$$Y_i^* = b_1^* + b_2^* X_i^* + \hat{e}_i^* \qquad e_i^* = e_i / \sigma_i$$

$$\sum e_i^{2*} = \sum \left(Y_i^* - b_1^* - b_2^* X_i^* \right)^2 \rightarrow \min$$

$$\sum \left(e_i / \sigma_i \right)^2 = \sum \left[\left(Y_i / \sigma_i \right) - b_1^* \left(1/\sigma_i \right) - b_2^* \left(X_i / \sigma_i \right) \right]^2 \Rightarrow w_i = \left(1/\sigma_i^2 \right)$$

$$\sum w_i e_i^2 = \sum w_i \left(Y_i - b_1^* - b_2^* X_i \right)^2$$

Genelleştirilmiş EKKY(GEKKY)

$$\partial\sum w_i e_i^2/\partial\, b_1^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial\sum w_i e_i^2/\partial b_1^* = 2\sum w_i\left(Y_i - b_1^* - b_2^* X_i\right)(-1)$$

$$\partial\sum w_i e_i^2/\partial\, b_2^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial\sum w_i e_i^2/\partial b_2^* = 2\sum w_i\left(Y_i - b_1^* - b_2^* X_i\right)(-X_i)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum w_i Y_i &= b_1^*\sum w_i + b_2^*\sum w_i X_i \\ \sum w_i X_i Y_i &= b_1^*\sum w_i X_i + b_2^*\sum w_i X_i^2\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} b_1^* &= \overline{Y}^* - b_2^*\overline{X}^* \\ b_2^* &= \frac{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i Y_i\right)-\left(\sum w_i X_i\right)\left(\sum w_i Y_i\right)}{\left(\sum w_i\right)\left(\sum w_i X_i^2\right)-\left(\sum w_i X_i\right)^2}\end{aligned}$$

$$\overline{Y}^* = \sum w_i Y_i / w_i \qquad \overline{X}^* = \sum w_i X_i / w_i$$

EKKY ve GEKKY Arasındaki Fark

EKKY $\rightarrow$ $$\underbrace{\sum e_i^2}_{\text{min}} = \sum \left(Y_i - b_1 - b_2 X_i \right)^2$$

GEKKY $\rightarrow$ $$\underbrace{\sum w_i e_i^2}_{\text{min}} = \sum w_i \left(Y_i - b_1^* - b_2^* X_i \right)^2$$

$$w_i = 1/\sigma_i^2$$

☐ σ_i^2 nin BİLİNMEMESİ HALİ

1.HAL: LOGARİTMİK DÖNÜŞÜMLER

$$Y_i = b_1 + b_2 X_i + u_i \quad \Rightarrow \quad \ln Y_i = \ln b_1 + b_2 \ln X_i + v_i$$

2 .HAL: $E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$

$$Y_i = b_1 + b_2 X_i + u_i \quad \Rightarrow \quad Y_i / X_i = b_1\left(1/X_i\right) + b_2 X_i \left(1/X_i\right) + u_i / X$$

$$= b_1\left(1/X_i\right) + b_2 + v_i$$

$$E\left(v_i^2\right) = E\left(u_i / X_i\right)^2 = 1/X_i^2\, E\left(u_i^2\right) = \frac{1}{X_i^2} \sigma^2 X_i^2 = \sigma^2$$

σ_i^2 nin BİLİNMEMESİ HALİ

3 .HAL: $E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$

$$Y_i = b_1 + b_2 X_i + u_i$$

$$\Downarrow$$

$$Y_i / \sqrt{X_i} = b_1 \left(1/\sqrt{X_i}\right) + b_2 X_i \left(1/\sqrt{X_i}\right) + u_i / \sqrt{X_i}$$

$$= b_1 \left(1/\sqrt{X_i}\right) + b_2 \sqrt{X_i} + v_i$$

$$E\left(v_i^2\right) = E\left(u_i / \sqrt{X_i}\right)^2 = 1/X_i \, E\left(u_i^2\right) = 1/X_i \left(\sigma_i^2 X_i\right) = \sigma^2$$

❑ σ_i^2 nin BİLİNMEMESİ HALİ

4 .HAL: $E\left(u_i^2\right)=\sigma_i^2=\sigma^2\left(a_0+a_1X_i\right)^2$

$$E\left(u_i^2\right)=\sigma_i^2=\sigma^2 f(X)$$

$$\sqrt{f(X)}=\sqrt{\left(a_0+a_1X_i\right)^2}=\left(a_0+a_1X_i\right)$$

$Y_i=b_1+b_2X_i+u_i \Rightarrow \left(a_0+a_1X_i\right)$ bölünür

σ_i^2 nin BİLİNMEMESİ HALİ

5 .HAL: $$E\left(u_i^2\right)=\sigma_i^2=\sigma^2\left[E\left(Y_i\right)\right]^2$$

$$Y_i=b_1+b_2X_i+u_i$$

$$\Downarrow$$

$$Y_i/E\left(Y_i\right)=b_1/E\left(Y_i\right)+b_2\left(X_i/E\left(Y_i\right)\right)+u_i/E\left(Y_i\right)$$

$$=b_1\left[1/E\left(Y_i\right)\right]+b_2X_i/E\left(Y_i\right)+v_i$$

UYGULAMA: 32 ailenin yıllık gıda harcamaları (Y) ve aylık ortalama gelirleri (X) aşağıda verilmiştir.

Aile Sayısı	Y	X	u	Aile Sayısı	Y	X	u
1	2.2	2.8	-0.75464	17	1.5	2	-1.25412
2	3	3.5	-0.1301	18	5.8	7.2	1.74247
3	4.1	13.5	-1.53666	19	8.2	18.1	1.41032
4	3.5	8.2	-0.80818	20	4.3	6.2	0.49313
5	4.2	5.9	0.46833	21	9.4	16.1	3.11164
6	6.3	15.3	0.21216	22	5.1	25.2	-3.46933
7	4.6	9.7	-0.08417	23	2.4	8.2	-1.90818
8	8.8	26.4	-0.07012	24	8.1	13.4	2.48841
9	7.3	18.2	0.48526	25	4.9	5.6	1.24352
10	4.4	6.7	0.4678	26	3	4.2	-0.30556
11	6.7	11.3	1.61478	27	4.6	8.8	0.14142
12	3.5	4.7	0.06911	28	1.9	3.5	-1.2301
13	6.8	26.3	-2.04505	29	2.6	12.4	-2.76094
14	7.2	22.3	-0.64243	30	3.9	4.3	0.56938
15	3.1	6.1	-0.68181	31	7	12.9	1.51373
16	2.4	3.2	-0.6549	32	11.2	26.5	2.30482

1.HAL: LOGARİTMİK DÖNÜŞÜMLER

$$\ln(Y_i) = 0.2546 + 0.5742 \ln X_i \qquad R^2 = 0.6866$$

$$\begin{array}{lll} t & (1.5691) & (8.1077) \\ \text{prob} & (0.1271) & (0.0000) \end{array}$$

$$\ln(e^2) = 0.0472 + 0.0123 \ln \hat{Y}^2 \qquad R^2 = 0.0178$$

1.Aşama $H_0: b = 0$

$H_1: b \neq 0$

2.Aşama **α = 0.05** **s.d.=2-1=1** **χ^2_{tab}=3.84146**

3.Aşama $LM = n.R_y^2 = 32(0.0178) = 0.5696$

4.Aşama **LM < χ^2_{tab}** H_0 hipotezi reddedilemez.

2 .HAL: $E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i^2$

$$Y_i / X_i = 1.277\left(1/X_i\right) + 0.3652 \qquad R^2 = 0.4694$$

$$\begin{array}{lll} t & (5.151) & (8.109) \\ \text{prob} & (0.000) & (0.000) \end{array}$$

$$e^2 = 0.0118 + 0.0297\hat{Y}^2 \qquad R^2 = 0.0509$$

1.Aşama $H_0: b = 0$

$H_1: b \neq 0$

2.Aşama **$\alpha = 0.05$ s.d.=2-1=1 χ^2_{tab}=3.84146**

3.Aşama LM= $n.R_y^2 = 32(0.0509) = 1.6288$

4.Aşama **LM < χ^2_{tab}** H_0 hipotezi reddedilemez.

3 .HAL: $E\left(u_i^2\right) = \sigma_i^2 = \sigma^2 X_i$

$$Y_i \big/ \sqrt{X_i} = -22.246\left(1 \big/ \sqrt{X_i}\right) + 8.3144\sqrt{X_i} \qquad R^2 = 0.7938$$

$$\begin{array}{lll} t & (-4.686) & (15.337) \\ prob & (0.001) & (0.000) \end{array}$$

$$e^2 = 2.7482 + 0.0749\hat{Y}^2 \qquad R^2 = 0.2365$$

1.Aşama $H_0: b = 0$

$H_1: b \neq 0$

2.Aşama **α = 0.05** **s.d.=2-1=1** **χ^2_{tab}=3.84146**

3.Aşama LM= $n.R_y^2$ = 32(0.2365) = 7.568

4.Aşama **LM > χ^2_{tab}** H_0 hipotezi reddedilebilir.

5 .HAL: $$E\left(u_i^2\right)=\sigma_i^2=\sigma^2\left[E\left(Y_i\right)\right]^2$$

$$Y_i/E\left(Y_i\right)=1.839\frac{1}{E\left(Y_i\right)}+0.292\frac{1}{\left(X_i/E\left(Y_i\right)\right)} \qquad R^2=0.0442$$

t	(5.2630)	(7.4167)
prob	(0.0000)	(0.0000)

$$e^2=-0.0439+0.1182\hat{Y}^2 \qquad R^2=0.0290$$

1.Aşama H_0: b = 0

H_1: b $\neq$ 0

2.Aşama **α = 0.05** **s.d.=2-1=1** **χ^2_{tab}=3.84146**

3.Aşama LM= n.R_y^2 = 32(0.0290) = 0.928

4.Aşama **LM < χ^2_{tab}** H_0 hipotezi reddedilemez.