OLASILIK ve OLASILIK DAĞILIMLARI

hesap makinesi:

35 soru

40-45 dk

OLASILIĞIN TARİHÇESİ

- 17. yy’da Pascal’ın yazışmaları
- 18.Bernolli ve Moivre’nin çalışmaları
- Cotes, Simpson ve Laplace’in hata olasılıkları üzerine olan çalışmaları

OLASILIK NEDİR?

- Olasılık, bir olayın gerçekleşme oranıdır. Klasik olasılık tanımına göre bir A olayının gerçekleşme olasılığı ilgilendiğimiz sonuçların, karşılaşılabilir sonuçlara olan oranıdır.

- Olasılık kuramı **istatistik**, **matematik**, **bilim** ve **felsefe** alanlarında mümkün olayların olabilirliği ve karmaşık sistemlerin altında yatan mekanik işlevler hakkında sonuçlar ortaya atmak için çok geniş bir şekilde kullanılmaktadır.

$$P(A) = \frac{M}{N}$$

M: İlgilenilen sonuç sayısı

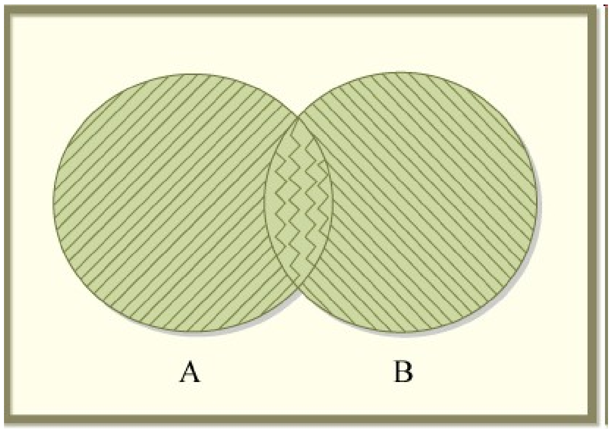
N:Karşılaşılabilir sonuç sayısı

OLASILIK NEDİR?

- Olasılık, **P** ile gösterilir ve her olasılık değeri **0** ile **1** arasındadır.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

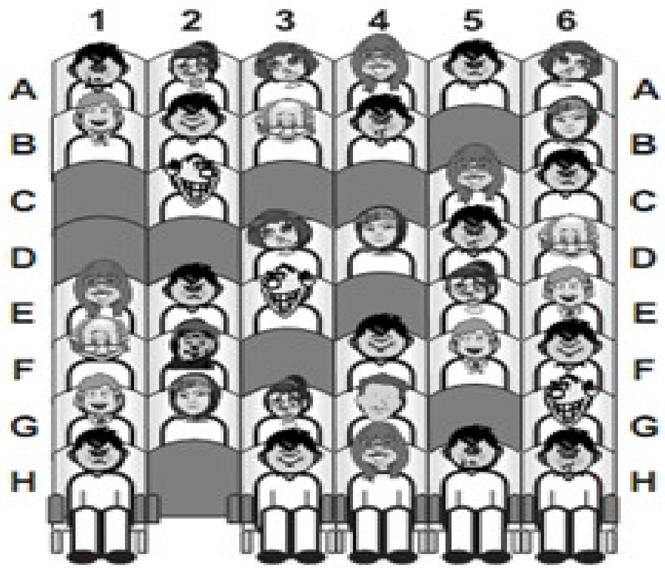
$$P(A) = \frac{\text{A durumunun eleman sayısı}}{\text{örnek uzayın eleman sayısı}} = \frac{s(A)}{s(E)}$$



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

OLASILIK NEDİR?

Örnek



Şekilde bir konferans salonundaki boş ve dolu koltukların yerleri belirtilmiştir. Bu salona sonradan gelen bir kişinin C sırasında veya çift numaralı bir koltuğa oturma olasılığı nedir?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{3}{10}$ D) $\frac{3}{5}$

OLASILIK ÇEŞİTLERİ NELERDİR?

- Teorik olasılık
- Deneysel olasılık
- Öznel olasılık

maçta bir gool girecek gibi tahmini

TEORİK OLASILIK

- Bir olasılık deneyinden teorik olarak beklenen olasılığa denir.

Örnek Hilesiz bir zar atıldığında üst yüzünde 5 gelme olasılığını hesaplayalım.

E={1,2,3,4,5,6}

B={5}

$$O(5)=\frac{s(B)}{s(E)}=\frac{1}{6}$$

teorik olasılık

Bulduğumuz olasılık değeri $\frac{1}{6}$'dır. Hesaplayarak bulduğumuz bu olasılık "Teorik Olasılık" olarak adlandırılır.

DENEYSEL OLASILIK

- Yapılan bir deney sonucunda hesaplanan olasılığa denir.

Örnek Mete, hilesiz bir zar atarak üst yüzünde 5 gelme olasılığını hesaplamak istiyor. Zarı 100 kez atıyor ve 63 tanesi 5 geliyor.

Bulduğu olasılık değeri $\frac{63}{100} \approx \frac{1}{6}$ oluyor.

Mete zarı 10 000 kez attığında üst yüzünde 1659 kez 5 geliyor. Yani $\frac{1659}{10000} \approx \frac{1}{6}$ oluyor.

Mete'nin deneyerek yaptığı bu olasılık hesabı "Deneysel Olasılık" olarak adlandırılır. Deneme sayısı arttıkça deneysel olasılık değeri, teorik olasılık değerine yaklaşmaktadır.

DENEYSEL OLASILIK ve OLASILIĞIN GÖRELİ SIKLIK TANIMI

Olasılık istatistikte,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{M}{N}$$

Deneyi yapan	*Atış sayısı*	*Yazı gelme sayısı*	*Göreli Sıklık*
Buffon	***4040***	***2048***	***0,5080***
Karl Pearson	***12000***	***6019***	***0,5016***
Karl Pearson	***24000***	***12012***	***0,5005***

ÖZNEL OLASILIK

- Kişilerin kendi düşüncelerine göre karar verdikleri olasılığa denir.

a. Geminin batma olasılığı

% ....

b. Topun kaleye girme olasılığı

% ....

c. Yağmur yağma olasılığı

% ....

OLASILIKLA İLGİLİ TERİMLER

- Deney
- Olay
- Sonuç
- Örnek uzay
- Örnek nokta
- İmkansız olay
- Mutlak (kesin) olay
- Rassal olay

OLASILIKLA İLGİLİ TERİMLER

- **Deney:** Bir olasılığı doğrulamak için yapılacak işler kümesine deney denir.

- Örneğin bir paranın, bir zarın atılması veya deneyde kullanılmak üzere 4 kobaydan birinin seçilmesi bir deneydir.

OLASILIKLA İLGİLİ TERİMLER

- **Olay:** Bir örnek uzayın her bir alt kümesine denir.

- **İstatistiksel Olay:** Araştırmaya, incelemeye konu teşkil eden gözlenebilen, deneysel olarak varlığı kanıtlanabilen ve sayılarak, ölçülerek ya da tartılarak sayısal biçimde ifade edilebilen olaydır.

- **Sonuç:** Bir deneyin her bir görüntüsüne (çıktısına) denir.

- **Örnek Uzay:** Bir deneyin bütün sonuçlarını eleman kabul eden kümeye denir.

- **Örnek Nokta:** Örnek uzayın her bir elemanına denir.

OLASILIKLA İLGİLİ TERİMLER

- **Olanaksız Olay:** Gerçekleşmesi imkansız olan olaylardır.

$$P(A) = 0$$

- **Kesin Olay:** Gerçekleşmesi kesin olaylardır. 1 atm basınç ve 0^{o}C sıcaklıkta suyun buza dönüşmesi bir kesin olaydır.

$$P(A) = 1$$

- **Rassal Olay:** Gerçekleşmesi rastlantıya bağlı olaylardır.

$$0 < P(A) < 1$$

PERMÜTASYON ve KOMBİNASYON

- **Permütasyon:** Sıralama durumunda kullanılır. $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

  Örnek: Ali ismi ile harflerin yerleri değiştirilerek, anlamlı anlamsız kaç kelime yazabiliriz?

  P(3,3)=3!=1.2.3=6 ALİ-AİL-LAİ-LİA-İAL-İLA

- **Kombinasyon:** Seçme durumunda kullanılır.

$$C(n,r) = \binom{n}{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!.r!} = \binom{n}{r}$$

  Örnek: 10 mendil arasında 3 mendil kaç farklı şekilde seçilebilir?

$$\binom{10}{3} = \frac{10.9.8}{3.2.1} = 120$$

OLAY ÇEŞİTLERİ

- Bağımlı olay

- Bağımsız olay

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMLI OLAY

- A ve B gibi iki olay olsun.
- A olayının gerçekleşme şekli, B olayının sonucuna göre değişebiliyorsa, bu iki olaya bağımlı olaylar denir.
- **P(A):** A olayının gerçekleşme olasılığı;
- **P(B):** B olayının gerçekleşme olasılığı;
- **P(A|B):** B verilmişken A olayının gerçekleşme olasılığı olarak gösterilir.
- A ve B olayları bağımlı iki olay ise, A ve B olayının birlikte gerçekleşme olasılığı $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$ şeklinde tanımlanabilir.

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMLI OLAY

- **Örnek:** İçerisinde **4** mavi **5** kırmızı top bulunan bir torbadan, çekilen bir top yerine konulmaksızın art arda **2** top çekiliyor. Çekilen iki topun da mavi olma olasılığı nedir?

- **Çözüm:** A olayı, çekilen ilk topun mavi olması, B olayı, çekilen ikinci topun mavi olması olsun.

Bu durumda;

P(A) = 4/9 ve P(B|A)= 3/8 olacaktır.

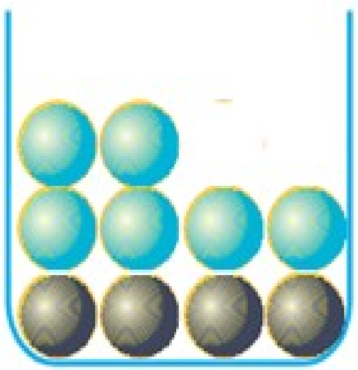
OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMLI OLAY

Örnek Bir torbada 6 mavi, 4 siyah top vardır. Bu torbadan sırayla iki top çekilecektir. **Çekilen topun geri konulmaması koşulu ile olası durumları inceleyelim.**

a. Çekilen ilk topun mavi, ikinci topun da mavi olma olasılığı kaçtır?

İlk topun mavi olma olasılığı

$$P(M_1) = \frac{s(M_1)}{s(E)} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ 'tir.}$$



Birinci top mavi olduğu ve torbaya geri konulmadığı için torbada 5 mavi olmak üzüre 9 top kalır.

Buna göre ikinci topun da mavi olma olasılığı $P(M_2) = \frac{5}{9}$ 'dur.

Bu durumda her iki topun da mavi olma olasılığı $P(M_1 M_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}$ 'tür.

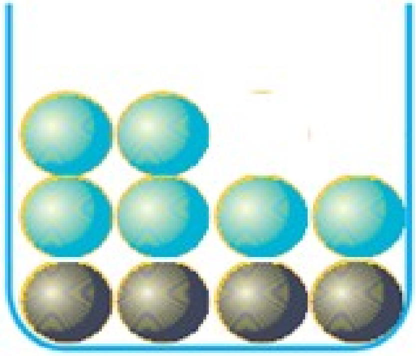
OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMLI OLAY

b. Çekilen ilk topun mavi, ikinci topun siyah olma olasılığı kaçtır?

İlk topun mavi olma olasılığı $P(M_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ 'tir.

Birinci top alındıktan sonra torbada 4'ü siyah olmak üzere 9 top kalır.
İkinci topun siyah olma olasılığı $P(S_2) = \frac{4}{9}$'dur.

Buna göre ilk topun mavi, ikincisinin ise siyah olma olasılığı $P(M_1 S_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{15}$ 'tir.



OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMLI OLAY

c. Çekilen ilk topun siyah, ikinci topun da siyah olma olasılığı kaçtır?

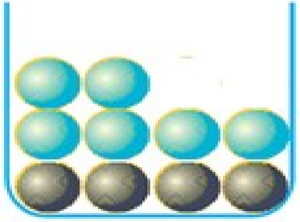
İlk topun siyah olma olasılığı $P(S_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$'tir.

Birinci top torbaya geri konulmadığı için torbada 3'ü siyah olmak üzere 9 top kalır.

İkinci topun da siyah olma olasılığı $P(S_2)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$'tür.

Bu durumda her iki topun da siyah olma olasılığı $P(S_1\,S_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$'tir.

d. Çekilen ilk topun siyah, ikinci topun mavi olma olasılığı kaçtır?



İlk topun siyah olma olasılığı $P(S_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$'tir.

İkinci top alındıktan sonra torbada 6'sı mavi olmak üzere 9 top vardır.

Buna göre $P(M_2)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$'tür.

O hâlde; ilk topun siyah, ikinci topun mavi olma olasılığı $P(S_1\,M_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{15}$'tir.

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

- A ve B gibi iki olay olsun.

- A olayının sonucu B olayının elde edilme olasılığını etkilemiyorsa ve B olayının sonucu A olayını etkilemiyorsa, bu olaylara bağımsız olaylar denir.

- **P(A):** A olayının gerçekleşme olasılığı;

- **P(B):** B olayının gerçekleşme olasılığı;

- A ve B olayı bağımsız ise

  P(A∩B) = P(A) . P(B) ’dir. <u>“olasılık çarpım kuralı”</u>

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

Örnek:

- Bir para ile bir zarın birlikte atılması durumunda paranın tura ve zarın tek gelme olasılığı nedir?

Çözüm:

- A olayı, paranın tura gelmesi,

  B olayı, zarın tek gelmesi olsun.

  P(A) = 1/2 'dir.

  P(B) = 3/6 = 1/2 'dir.

  P(A). P(B) = 1/2 . 1/2 = 1/4 olarak elde edilir.

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

Örnek **Bir madenî para ve bir zarın birlikte atılması deneyinde paranın üst yüzüne yazı ve zarın üst yüzüne 4'ten büyük bir sayı gelme olasılığı kaçtır?**

A olayı: Paranın üst yüzüne yazı gelmesi

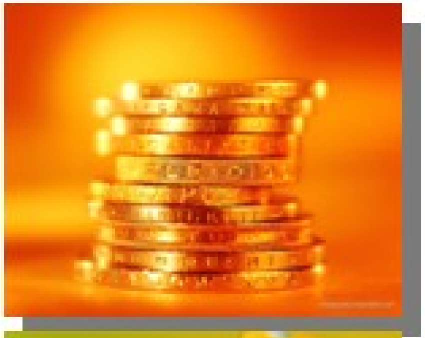
$$P(A)=\frac{1}{2}$$

B olayı: Zarın üst yüzüne 4'ten büyük bir sayı gelmesi

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ tür.

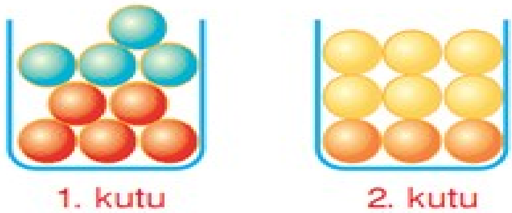
$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

$$=\frac{1}{2} \, . \, \frac{1}{3}=\frac{1}{6}\text{'dır.}$$



OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

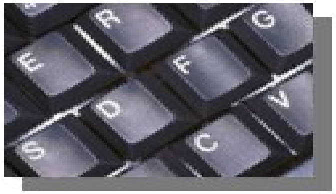
Örnek



Yukarıdaki şekilde görülen 1. kutudan çekilen bir topun kırmızı ve 2. kutudan çekilen bir topun sarı olma olasılığı kaçtır?

Örnek

Bir klavyede alfabenin sadece 29 harfi ile ilgili tuşlar vardır. **Tuşlara rastgele ve tek tek basıldığında BABA yazılma olasılığını bulalım.**



Örnek

Bir kasada 20 tane yeşil, 30 tane kırmızı renkte elma vardır.

Kasaya geri bırakmak koşulu ile rastgele alınan iki elmadan, birincinin yeşil ve ikincinin kırmızı renkte olma olasılığı kaçtır?

OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

SPOR TOTO oyunu, listede belirtilen haftaya ait 15 maçın sonucunu tahmin etmeye dayanır. Her maç için 3 tane ayrı sonuç tahmin seçeneği bulunmaktadır:

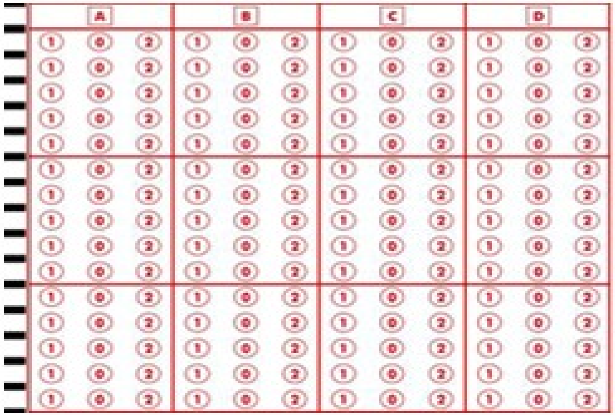
1: ev sahibi takımın galibiyeti,

2: deplasman takımının galibiyeti,

0: beraberlik.

Örnek

Spor toto oyununda (A kolonunda) bütün sonuçların doğru bilinme olasılığını bulunuz



OLAY ÇEŞİTLERİ > BAĞIMSIZ OLAY

Örnek

30 öğrencinin bulunduğu bir sınıftan seçilen bir öğrencinin erkek olma olasılığı $\frac{2}{5}$ tir.

Buna göre, bu sınıftan art arda seçilecek 2 farklı öğrencinin kız olma olasılığı kaçtır?

A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{22}{145}$ C) $\frac{51}{145}$ D) $\frac{4}{25}$

Örnek

A okulundan seçilen bir öğretmenin erkek olma olasılığı $\frac{4}{5}$, B okulundan seçilen bir öğretmenin erkek olma olasılığı $\frac{3}{8}$ dir.

Buna göre, her iki okuldan seçilen birer öğretmenin bayan olma olasılığı kaçtır?

KOŞULLU OLASILIK

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$: B verildiğinde A'nın olasılığı

KOŞULLU OLASILIK

Örnek: A ve B bağımsız iki olay iken A’nın gerçekleşme olasılığı 0,5 ; B’nin gerçekleşme olasılığı 0,4 olsun. Buna göre;

B verildiğinde A’nın koşullu olasılığını,

A verildiğinde B’nin koşullu olasılığını bulunuz.

TOPLAM OLASILIK KURALI

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A/B_i)$$

BAYES KURALI

$$P(B_r / A) = \frac{P(B_r).P(A/B_r)}{\sum_{i=1}^{k} P(B_i).P(A/B_i)}$$

Soru:

Cıvata üretilen bir fabrikada toplam üretimin 30/100'ü A, 30/100'ü B, 40/100'ü C, makineleri tarafından yapılmaktadır. Bu makinelerin, sırasıyla üretimlerinin 1/100, 3/100, 2/100'ü kusurlu cıvatalardır. Bir günlük üretim sonunda bir cıvata seçiliyor ve kusurlu olduğu görülüyor. Bu cıvata'nın A makinesi, B makinesi, C makinesin de üretilmiş olması olasılığı nedir?

Cevap:

3/20 , 9/20 , 8/20

OLASILIK DAĞILIMLARI

- **KESİKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI**
  - Bernoulli Dağılımı
  - Binom Dağılımı
  - Poisson Dağılımı
  - Geometrik Dağılım
  - Negatif Binom
  - Çok Terimli Dağılım
  - Hipergeometrik Dağılım
- **SÜREKLİ OLASILIK DAĞILIMLARI**
  - Düzgün Dağılım
  - Normal Dağılım
  - Üstel Dağılım
  - Gamma Dağılımı
  - Beta Dağılımı
  - Cauchy Dağılımı
  - Weibull Dağılımı

BİNOM DAĞILIMI

Olasılık kuramı ve istatistik bilim kollarında, binom dağılımı n sayıda iki kategori (yani başarı/başarısızlık, evet/hayır, 1/0 vb) sonucu veren denemelere uygulanır.

$$f(k;n,p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

n: Toplam olay sayısı

k: İlgilendiğimiz olay sayısı

n-k: İlgilenmediğimiz olay sayısı

p: İlgilendiğimiz olayın olasılığı

(1-p): İlgilenmediğimiz olayın olasılığı

BİNOM DAĞILIMI

Örnek: 4 çocuğa sahip olacak bir ailenin 2 erkek çocuğu olma olasılığı nedir?

n=4

k=2

n-k=2

p=1/2

(1-p)=1/2

$$\frac{4!}{(4-2)!2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}=0,375$$

POISSON DAĞILIMI

Poisson dağılımı, olasılık kuramı ve istatistik bilim kollarında bir kesikli olasılık dağılımı olup belli bir sabit zaman birim aralığında meydana gelme sayısının olasığını ifade eder.

$$f(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

λ: Verilen sabit aralıkta ortaya çıkması beklenen olayın beklenen değeri
k: İlgilendiğimiz olay sayısı
e: doğal logaritmanın tabanı (e = 2,71828…)

POISSON DAĞILIMI

Örnek: Bir bölge hastanesine gece başvuran hasta sayısının Poisson dağılımına uyduğunu varsayalım. Bu hastaneye gece başvuran hasta sayısı ortalaması 4 olsun. Herhangi bir gece 2 hastanın başvurma olasılığı nedir?

$\lambda = 4$

$k = 2$

$$\frac{4^2}{2!} e^{-4} = 0{,}144$$

NORMAL DAĞILIMI

- Normal dağılım, frekans dağılımları çan eğrisi biçiminde simetrik görünüme sahip olan sürekli değişkenlerin uyduğu bir teorik dağılımdır.

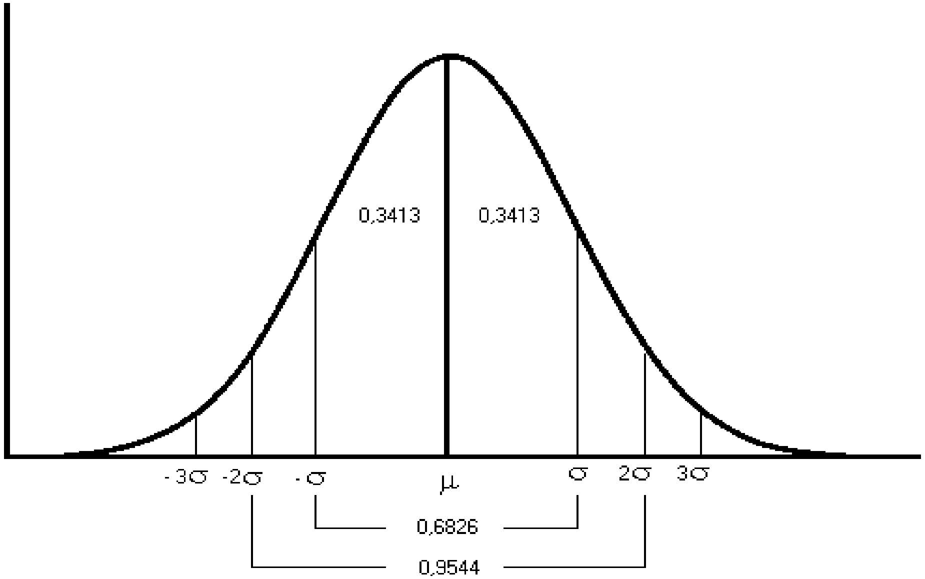
- Sürekli sağlık değişkenlerinin çok büyük bir bölümünün (örneğin; Boy uzunluğu, ağırlık, skb, dkb (diastolik kan basıncı), hemoglobin düzeyi, total kolestrol düzeyi... gibi) yapılan araştırmalarda normal dağılım gösterdiği, bazı kesikli değişkenlerin belirli varsayımlarla dağılımlarının normal dağılıma dönüştürülebildiği saptanmıştır.

- Sağlık bilimlerinde kararların önemli bir bölümü Normal dağılım varsayımları kullanılarak alınmaktadır.

NORMAL DAĞILIMI

2 parametresi var

$$f(x) = \frac{1}{\sigma / \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty < X < +\infty$$



- Eğri eksi sonsuz ile artı sonsuz arasında süreklilik gösterir. ($-\infty \leq f(x) \leq +\infty$)
- Eğrinin altında kalan alan 1’e eşittir ya da % l00 olarak alınır.

μ : X değişkeninin toplum ortalaması

σ : X değişkeninin toplum standart sapması

SORULARINIZ?