

# İŞLETMEDE SAYISAL YÖNTEMLER



DR. ÖĞR. ÜYESİ PEMBE GÜÇLÜ

# DOĞRUSAL PROGRAMLAMA



DUALİTE

# Ders İçeriği

1. Sayısal Yöntemler – Tanımı, Kapsamı, Tarihsel Gelişimi
2. Doğrusal Programlama- Tanımı, Varsayımları, Model Kurma
3. Doğrusal Programlama- Grafik Çözüm
4. Doğrusal Programlama- Simpleks Çözüm
5. Doğrusal Programlama- Simpleks Çözüm (Büyük M)
6. Doğrusal Programlama-İki Aşamalı Yöntem, Özel Durumlar
7. Doğrusal Programlama- Dualite
8. Doğrusal Programlama- Duyarlılık Analizleri
9. Doğrusal Programlama Excel Solver Uygulaması
10. Özel Amaçlı Algoritmalar-Atama Problemi
11. Özel Amaçlı Algoritmalar-Ulaştırma Problemi Başlangıç Çözüm Yöntemleri
12. Özel Amaçlı Algoritmalar-Ulaştırma Problemi, Atlama Taşı Yöntemi
13. Özel Amaçlı Algoritmalar-Ulaştırma Problemi MODI Yöntemi
- 14.Ulaştırma Atama Problemi Excel Solver Uygulaması

# DUALİTE

- ∞ Dual=İkincil
- ∞ Primal ve dual modellerin sonuçları aynıdır. Primal modelin sonuçlarından dual, dual modelin sonuçlarından primal çözüm sonuçları okunabilir.
- ∞ Doğrusal programlamada her maksimizasyon ( $Z_{max}$ ) probleminin minimizasyonu ( $Q_{min}$ ) veya her minimizasyon probleminin ( $Z_{min}$ ) bir maksimizasyonu ( $Q_{max}$ ) bulunmaktadır.

# Dual Model

- ∞ Dual model yazılmadan önce primal modelin kanonik formda olmasına dikkat edilir (Kanonik formdaki modelde amaç fonksiyonu maksimizasyon ise kısıtların hepsi, amaç fonksiyonu minimizasyon ise kısıtların hepsi  $\geq$ 'tir.
- ∞ Primal modelin karar değişkenleri dual modelde kısıta, primal modelin kısıtları ise dual modelde karar değişkenine dönüşür. Primal modelde m tane karar değişkeni, n tane kısıt varsa, dual modelde m tane kısıt, n tane karar değişkeni bulunacaktır.

# Dual Model

- Primal modelde amaç fonksiyonu minimizasyon ise dualde maksimizasyona dönüşür. Primal modeldeki maksimizasyon amacı dualde minimizasyona dönüşür.
- Primal modeldeki kısıtların sağ tarafı, dual modelde amaç fonksiyonu katsayılarına dönüşür.
- Primal modeldeki amaç fonksiyonu katsayıları, dual modelde kısıtların sağ tarafına dönüşür.
- Primal modeldeki kısıt katsayıları matrisinin dual modelde transpozesi kullanılır.
- Primal modeldeki eşitlik kısıtına karşılık gelen dual karar değişkeninin işareti kısıtlanmaz (Bu karar değişkeni için pozitiflik koşulu aranmaz).

# ÖRNEK 1

## Primal Model

$$\begin{aligned}Z_{enb} &= 6X_1 + 8X_2 \\4X_1 + 5X_2 &\leq 40 \\4X_1 + 10X_2 &\leq 60 \\X_1, X_2 &\geq 0\end{aligned}$$

## Dual Model

$$\begin{aligned}Q_{enk} &= 20V_1 + 60V_2 \\4V_1 + 4V_2 &\geq 6 \\5V_1 + 10V_2 &\geq 8 \\V_1, V_2 &\geq 0\end{aligned}$$

# ÖRNEK 2

## Primal Model

$$Z_{enk} = 12X_1 + 4X_2$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$1/2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

### *KANONİK FORM*

$$Z_{enk} = 12X_1 + 4X_2$$

$$-3X_1 - 2V_2 \geq -6$$

$$-\frac{1}{2}V_1 - X_2 \geq -4$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

## Dual Model

$$Q_{enb} = -6V_1 - 4V_2$$

$$-3V_1 - \frac{1}{2}V_2 \leq 12$$

$$-2V_1 - V_2 \leq 4$$

$$V_1, V_2 \geq 0$$



# ÖRNEK

## Primal Model

$$\begin{aligned}Z_{enk} &= x_1 + x_2 \\2x_1 + x_2 &\geq 6 \\x_1 + 2x_2 &= 4 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

KANONİK FORM

$$\begin{aligned}Z_{enk} &= x_1 + x_2 \\2x_1 + x_2 &\geq 6 \\x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\-x_1 - 2x_2 &\geq -4 \\x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

## Dual Model

$$\begin{aligned}Q_{enb} &= 6V_1 + 4V_2 - 4V_3 \\2V_1 + V_2 - V_3 &\leq 1 \\V_1 + 2V_2 - 2V_3 &\leq 1 \\V_1, V_2, V_3 &\geq 0\end{aligned}$$

$$V_2 - V_3 = V_{23} \text{ OLSUN}$$

$$\begin{aligned}Q_{enb} &= 6V_1 + 4V_{23} \\2V_1 + V_{23} &\leq 1 \\V_1 + 2V_{23} &\leq 1 \\V_1 &\geq 0\end{aligned}$$

$V_{23}$  işareti kısıtlanmamış

# DUALİTE TEOREMLERİ

$$Z_{max} = Q_{min} \quad \text{veya} \quad Z_{min} = Q_{max}$$

$$X_j \cdot L_j = 0, \forall j$$

$$s_i \cdot V_i = 0, \forall i$$

*X: Primal karar değişkeni*

*s: Primal boşluk değişkeni*

*V : Dual karar değişkeni*

*L: Dual boşluk değişken*

# ÖRNEK 1 (Bakır ve Altunkaynak, 2003, s. 104-105)

$$Z_{enb} = 6X_1 + 8X_2$$

$$4X_1 + 5X_2 \leq 40$$

$$4X_1 + 10X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

$$Q_{enk} = 20V_1 + 60V_2$$

$$4V_1 + 4V_2 \geq 6$$

$$5V_1 + 10V_2 \geq 8$$

$$V_1, V_2 \geq 0$$

PRİMAL OPTİMAL TABLO						
Cj			6	8	0	0
	D.K.	NiC	X1	X2	S1	S2
6	X1	5,00	1,00	0,00	0,50	-0,25
8	X2	4,00	0,00	1,00	-0,20	0,20
	Zi	62,00	6,00	8,00	1,40	0,10
	Cj-Zj		0,00	0,00	-1,40	-0,10

L1      L2      V1=1.4    V2=0.10

$$Z_{enb} = Q_{enk} = 62$$

$$X_1 * L_1 = 0$$

$$X_1=5 \quad L_1=0$$

$$X_2 * L_2 = 0$$

$$X_2=4 \quad L_2=0$$

$$S_1 * V_1 = 0$$

$$S_1=0 \quad V_1=1.4$$

$$S_2 * V_2 = 0$$

$$S_2=0 \quad V_2=0.1$$

DUAL OPTİMAL TABLO								
Bj			40	60	0	0	M	M
	D.K.	NiC	V1	V2	L1	L2	Y1	Y2
40	V1	1,40	1,00	0,00	-0,50	0,20	0,50	-0,20
60	V2	0,10	0,00	1,00	0,25	-0,20	-0,25	0,20
	Qj	62,00	40,00	60,00	5,00	-4,00	5,00	4,00
	Bj-Zj		0,00	0,00	5,00	4,00	M-5	M-4

# Örnek 2 (Aladağ, 2011, s.121-123)

$$\begin{aligned}
 Z_{enb} &= 13X_1 + 20X_2 \\
 0,4X_1 + 0,8X_2 &\leq 1600 \\
 1,2X_1 + 1,5X_2 &\leq 3900 \\
 X_1 &\leq 2700 \\
 X_2 &\leq 1800 \\
 X_1, X_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

**PRİMAL OPTİMAL TABLO**

<u>Cj</u>			13	20	0	0	0	0
	D.K.	Niç.	X1	X2	S1	S2	S3	S4
13	X1	2000,00	1,00	0,00	-4,17	2,22	0,00	0,00
0	S4	800,00	0,00	0,00	-3,33	1,11	0,00	1,00
0	S3	700,00	0,00	0,00	4,17	-2,22	1,00	0,00
20	X2	1000,00	0,00	1,00	3,33	-1,11	0,00	0,00
	<u>Zj</u>	46000,00	9,00	12,00	12,50	6,67	0,00	0,00
		<u>Cj-Zj</u>	0,00	0,00	-12,50	-6,67	0,00	0,00

**DUAL OPTİMAL TABLO**

<u>Bj</u>			1600	3900	2700	1800	0,00	0,00	M	M
	D.K.	Niç	V1	V2	V3	V4	S1	S2	Y1	Y2
3900	V2	6,67	0,00	1,00	2,22	-1,10	-2,22	1,11	2,22	-1,11
1600	V1	12,50	1,00	0,00	-4,16	3,33	4,16	-3,33	-4,16	3,33
	<u>Zj</u>	46000,00	1600,00	3900,00	2000,00	1000,00	-1000,00	-2000,00	2000,00	1000,00
		<u>Bj-Zj</u>	0,00	0,00	700,00	800,00	1000,00	2000,00	M-2000	M-1000

# Bölüm Kaynakları

- ✎ Tütek, H., Gümüšoğlu, Ş., & Özdemir, A. (2012). *Sayısal Yöntemler: Yönetmel Yaklaşım*. Beta.
- ✎ Tütek, H., Gümüšoğlu, Ş., Özdemir, A. & Özdemir, A.(2011). *Sayısal yöntemlerde Problem Çözümleri ve Bilgisayar Destekli Uygulamalar*. Beta.
- ✎ Bakır, M. A. ve Altunkaynak, B. (2003). *Tam Sayılı Programlama Teori Modeller ve Algoritmalar*. Nobel Yayın Dağıtım.
- ✎ Aladağ, Z. (2011). *Yöneylem Araştırması 1*. Umuttepe Yayınları.