Marmara Üniversitesi

İstatistik Bölümü

Örnekleme Teorisi (8)

Doç. Dr. Atıf Evren

Küçük Örneklere Dayalı Kestirim ve Hipotez Testleri

Ana kütle dağılımının normal veya normale yakın olduğu , ana kütle varyansının bilinmediği ve örnek mevcudunun az (n<30) olduğu hallerde ana kütle ortalaması için güven aralıkları hesaplamak ve hipotez testleri yardımıyla karar vermek , student-t dağılımı yardımı ile mümkün olmaktadır. Bu dağılım W.S. Gosset tarafından geliştirilmiştir. Sadece küçük örneklere değil, aynı zamanda büyük örneklere de uygulanabilmektedir.

Daha önceden ana kütle dağılımının normal olduğu, ana kütle varyansının bilindiği ya da ana kütle dağılımının bilinmediği, ana kütle varyansının bilindiği ama örneklem hacminin büyük olduğu (n>30) durumlarda kullandığımız test istatistiği

$$Z_{test} = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

şeklindeydi. Dağılımın normal, ana kütle varyansının bilinmediği ve örneklem hacminin küçük olduğu durumlarda ise test istatistiği

$T_{test} = \frac{\bar{X}-\mu}{\hat{s}/\sqrt{n}}$ olur.

Burada

$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n}}$; $\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{(n-1)}}s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$ olur. Buradan da

$T_{test} = \frac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n-1}}$ biçiminde de yazılabilir.

Örnek mevcudunun ana kitle mevcuduna oranla büyük olması halinde standart hata hesaplanırken (normal dağılımda olduğu gibi) (N-n)/(N-1) düzeltme faktörünün kullanılması gerekir.

T gibi bir istatistiğin hesaplanabilmesi için örnekten elde edilmiş gözlemlerin yanı sıra bazı ana kütle parametrelerinin de kullanılması gerekmektedir. Bu parametrelerin bilinmediği hallerde örnekten elde edilen bilgiler yardımı ile tahmin edildiklerini biliyoruz. Serbestlik derecesi olarak adlandırılan ve v ile belirtilen kavram örnek hacminden (n), tahmin edilmesi gereken parametre sayısının (k) çıkarılmasıyla bulunmaktadır:

v=n-k

T istatistiğini ele aldığımızda örnek hacmi n'dir ve örnekten yararlanarak $\bar{X}$ ve s hesaplanabilir. Buna karşılık ana kütle ortalaması bilinmemekte ve tahmin edilmesi gerekmektedir. Dolayısıyla t istatistiği için k=1'dir ve serbestlik derecesi n-1 olacaktır.

μ için %100(1-α)'lık Güven Aralığı Tahminleri

Aralık tahmini

$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha$ ya da

$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$ ile verilir.

Örnek: Dağılımı normal olan bir ana kütleden seçilmiş 17 parçalık örneğin ortalaması $\bar{X} = 8{,}5\ kg.\ ve\ s = 0{,}3\ kg.$ olarak hesaplanmıştır. An kütle ortalaması için %95'lik güven aralığını bulunuz.

Çözüm:

$$P\left(\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n-1}} < \mu < \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\frac{s}{\sqrt{n-1}}\right) = 1 - \alpha$$

17-1=16 serbestlik derecesi için

$$P\left(8{,}5 - 2{,}12\frac{0{,}3}{\sqrt{17-1}} < \mu < 8{,}5 + 2{,}12\frac{0{,}3}{\sqrt{17-1}}\right) = 0{,}95$$

$P(8{,}34 < \mu < 8{,}66) = 0{,}95$ bulunur.

Ortalamalarla İlgili Hipotez Testi

Örnek: Bir kazıda bulunan 8 adet kafatasının belirli bir kuş cinsine ait olup olmadığı araştırılmaktadır. Bu cins kuşların kafataslarının çevresinin ortalama 16 cm. olduğu çeşitli araştırmalarla belirlenmiştir. Bulunan 8 kafatasının çevrelerinin ortalaması 15,2 cm. ve standart sapma da 0,5 cm. olarak hesaplanmıştır. % 1 anlamlılık düzeyinde bu kafataslarının araştırma konusu olan kuş cinsine ait olduklarını söyleyebilir miyiz?

Çözüm:

$H_0: \mu = 16\ cm.$

$H_1: \mu \neq 16\ cm.$

Serbestlik derecesi v=n-1=8-1=7

$$T_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n-1}} = \frac{15{,}2 - 16}{0{,}5/\sqrt{7}} = -4{,}24$$

Karar kuralı

$$Eğer\ \ -T_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \leq T_{test} \leq T_{n-1,\frac{\alpha}{2}}\ \ ise\ \ H_0\ \ kabul$$

$T_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = T_{7,0,025} = 3{,}50 \Longrightarrow\ \ H_0$ reddedilir.

Başka bir deyişle bu kafataslarının söz konusu kuş cinsine ait olmadıklarını % 99 güvenle söyleyebiliriz.

Ortalama Farkları İle İlgili Hipotez Testleri

Farklarla ilgili hipotez testleri iki çeşittir: Bağımsız örneklerle ilgili olanlar ve bağımlı örneklerle ilgili olanlar. İlk durumda farklı örneklerle ilgili gözlem değerlerinin birbirlerinden etkilenmedikleri varsayılmaktadır. İki ayrı makinanın ürettiği parçaların boyutları veya iki ayrı öğrenci grubuna ait notlar bağımsız gözlemlere örnek olarak gösterilebilir. Buna karşılık tarımsal verimlilik (veya belirli ilaçların ya da yöntemlerin etkinliği) ölçülürken, aynı birimler üzerinde ölçüm yapılırsa, uygulamadan önce ve sonra elde edilen gözlemler birbirlerinden bağımsız olmayacaktır. Bu iki durum ayrı ayrı incelenecektir.

a)Bağımsız Örneklerle ilgili Testler

Önceki bölümlerde iki ayrı örneğin aynı ortalamaya sahip bir ana kütleye ait olup olmadıklarını test etmek için bazı yöntemlerden yararlanmıştık. Örneklem hacimleri büyük olduğundan ($(n_1 \geq 30 \quad ve \quad n_2 \geq 30)$ bu yöntemler farkların dağılımının normal olduğu ve dolayısıyla normal eğrinin kullanılabildiği varsayımına dayalı idi.

Her iki örnek haciminin de küçük olduğu hallerde ise T dağılımından yararlanılmaktadır. Fakat T'nin kullanılabilmesi için örneklerin geldiği ana kütlelerin normal ya da normale yakın olmaları ve standart sapmalarının da birbirine eşit olması gerekmektedir. $(\sigma_1 = \sigma_2)$ Dolayısıyla $n_1 < 30 \quad ve \quad n_2 < 30$ durumunda örneklerin aynı ana kütleden geldikleri hipotezi test edilmektedir. Örnek mevcutları 30 ve daha fazla olduğu hallerde ise ana kütle ortalamalarının aynı olduğu hipotesi sınanmakta idi.

Küçük ve bağımsız örneklere ilişkin testlerde kullanılan test istatistiği

$$T_{test} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \qquad \text{olur.}$$

Bu formüldeki σ , düzeltilmiş örnek varyansları olan $\widehat{s_1^2}$ ve $\widehat{s_2^2}$ 'nin ağırlıklı ortalamalarının karekökünün alınması ile hesaplanır.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1-1)\widehat{s_1^2}+(n_2-1)\,\widehat{s_2^2}}{(n_1-1)+(n_2-1)}}.$$

Bu durumda T istatistiğinin serbestlik derecesi $n_1 + n_2 - 2$ olmaktadır.

Örnek: Bir matematik dersi programı için yetenekleri eşit olan 15'er kişilik iki grup öğrenci seçilerek bu gruplardan birine yeni, diğerine de standart yöntem uygulanmıştır. Programın sonunda her iki gruba da verilen testte deneysel grupta not ortalaması $\bar{X}_1 = 78$ ve standart sapma 3,5; kontrol grubunda ise not ortalaması $\bar{X}_2 = 75$ ve standart sapma 2,8 olarak hesaplanmıştır. İki ana kütlenin varyanslarının aynı olduğu varsayımı altında iki grup ortalamaları arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını %1 anlamlılık düzeyinde test ediniz.

Çözüm:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(n_1-1)\widehat{s_1^2}+(n_2-1)\,\widehat{s_2^2}}{(n_1-1)+(n_2-1)}} = \sqrt{\frac{15*3{,}5^2+15*2{,}8^2}{15+15-2}}=\sqrt{10{,}763}=3{,}281$$

$$T_{test} = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} = \frac{78-75}{3{,}281\sqrt{\frac{1}{15}+\frac{1}{15}}} = 2{,}50$$

v=15+15-2=28

ve tek taraflı %1 anlamlılık düzeyi testi için kritik T değeri 2,47 olur. Bu durumda bulmuş olduğumuz T değeri red bölgesi içinde kaldığından sıfır hipotezi reddedilecektir.

b)Bağımlı Örneklerle İlgili Testler

Bağımlı durumda gözlemler aynı birimlere aittir ve yapılan anlamlılık testi bir uygulamanın etkili olup olmadığını ölçmeye yöneliktir. Testin yapılabilmesi için önce her birime ait uygulama öncesi ve uygulama sonrası gözlemler arasındaki cebirsel farklar hesaplanarak bu farkların aritmetik ortalaması ve standart sapması hesaplanır. Farklar d_i ile gösterilecek olursa, farkların ortalaması

$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n}$ ve standart sapması $s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i-\bar{d})^2}{n-1}}$

formülü ile belirlenmektedir. Farkların örnekleme bölünmesinin standart hatası ise

$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}}$ ile belirlenmektedir. Farkların örnekleme dağılımı t dağılımına uyduğundan test istatistiği $T_{test} = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}}$ ile hesaplanır ve n-1 serbestlik dereceli olur.

Örnek: 8 kişilik bir sekreter grubu ek bir kursa tabi tutularak önceki ve sonraki performansları sayfa başına yaptıkları daktilo hatası sayısına göre ölçülmüştür. Deneyin sonuçları aşağıdaki tablonun ilk üç sütununda yer almaktadır. Bu verilere dayanarak 0,05 hata payı ile ek kursun olumlu yönde etkili olup olmadığına karar veriniz.

Çözüm:

Sekreter	Hata sayısı (önce)	Hata sayısı (sonra)	Fark (d_i) (önce-sonra)	$d_i - \bar{d}$	$(d_i - \bar{d})^2$
1	4	3	1	0,625	0,390625
2	2	4	-2	-2,375	5,640625
3	6	5	1	0,625	0,390625
4	3	4	-1	-1,375	1,890625
5	7	6	1	0,625	0,390625
6	4	2	2	1,625	2,640625
7	2	2	0	-0,375	0,140625
8	3	2	1	0,625	0,390625
Toplam			3		11,875

Farkların ortalaması: $\bar{\mathrm{d}} = \frac{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{d_i}}{\mathrm{n}} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

Farkların standart sapması: $s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{11{,}875}{7}} = 1{,}30247$

D'nin standart hatası: $s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}30247}{\sqrt{8}} = 0{,}460493$

Bu testle ilgili sıfır hipotezi ve alternatif hipotez

$H_0: D = 0$

$H_1: D > 0$ olacaktır. Test istatistiği

$$T_{test} = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}} = \frac{0{,}375}{0{,}460493} = 0{,}814345$$

v=n-1=7 serbestlik dereceli, tek taraflı test için kritik T değeri 1,89 olduğu için sıfır hipotezi kabul edilir. Dolayısıyla bu verilerden hareketle kursun etkili olduğu söylenemez.

Ana kütle Varyansı İle ilgili Güven Aralığı Tahminleri Ve Hipotez Testleri

Örnek ortalaması, örnek oranı, iki ortalama farkı, iki oran farkınının örnekleme dağılımının yanısıra örneğe ait standart sapma, mod, medyan gibi istatistiklerin de örnekleme dağılımları mevcuttur. Bu istatistiklerden normal bölünmeye ait s ve s^2'nin özel bir yeri vardır.

Ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal bir dağılımdan n birimlik rassal bir örnek $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ çekilsin. Düzeltilmiş örnek varyansı

$\widehat{s^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$ olarak hesaplansın.

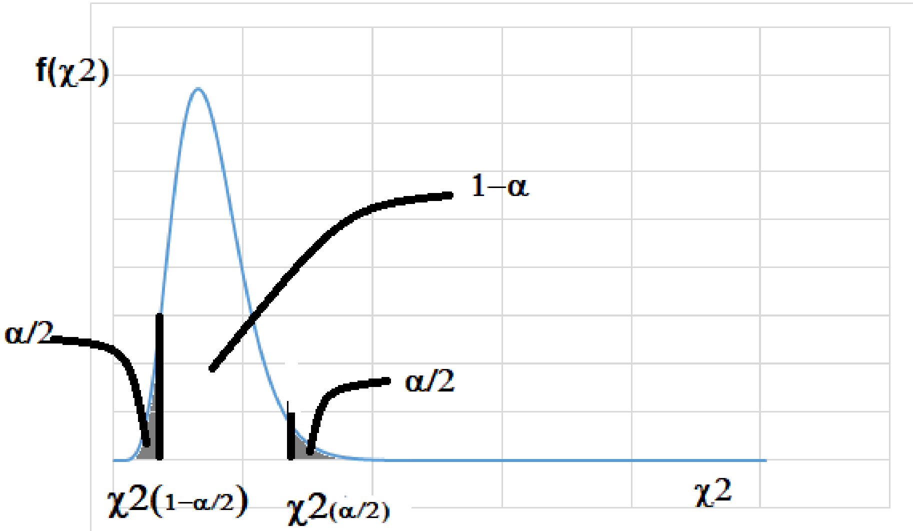
Bu durumda $\frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\sigma^2}$ istatistiği (n-1) serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımına uyar.

Dolayısıyla $P(\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} < \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\sigma^2} < \chi^2_{\frac{\alpha}{2}})$=1-$\alpha$

ve normal dağılan bir ana kütle varyansı için %100(1-α)'lık aralık tahmini

$$P(\frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{\alpha/2}}<\sigma^2 < \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}) = 1-\alpha$$

şeklindedir.



Şekil 1: σ^2 **için %100(1-α)'lık güven aralığı**

Örnek: Bir pazar araştırmacısı bir malın 15 ayrı şehirdeki fiyatlarını inceleyerek bu fiyatlarla ilgili aritmetik ortalama ve varyansı hesaplanmıştır. Buna göre fiyat ortalaması 280000 TL. ve düzeltilmiş varyans 250000TL'dir. Ana kütleyi meydana getiren bütün şehirlerdeki fiyatlar ile ilgili varyans ve standart sapma için %95'lik güven aralığını bulunuz.

Çözüm: n=15, $\widehat{s^2} = 250000 \Longrightarrow \hat{s} = 500$

v=15-1=14 serbestlik derecesi için

$\chi^2_{0,975} = 5{,}628$ ve $\chi^2_{0,025} = 26{,}119$ olacaktır.

$P(\frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\chi^2_{1-\alpha/2}}) = 1-\alpha$

$P(\frac{(15-1)250000}{26{,}119} < \sigma^2 < \frac{(15-1)250000}{5{,}628}) = 0{,}95$

$P(133997 < \sigma^2 < 621670) = 0{,}95$

Ana kütle varyansı için hesapladığımız %95'lik güven aralığı sınır değerlerinin kareköklerini aldığımız zaman ana kütle standart sapması için %95'lik güven aralığını elde etmiş oluruz.

$P(366 < \sigma < 788) = 0{,}95$

Not: n'in büyük olduğu hallerde $\hat{s}$ 'lerin dağılımı yaklaşık normal olmaktadır. Bu dağılımın ortalaması σ ve standart hatası

$\sigma_{\hat{s}} = \frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ olduğundan %100(1-α)'lık güven aralığı

$\hat{s} \pm Z_{\alpha/2}\sigma_{\hat{s}} = \hat{s} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ formülü ile verilir.

Örnek: Az önceki örnek için ana kütle standart sapması için %95'lik güven aralığını yukarıdaki yaklaşım ile bulunuz**.**

Çözüm: $\hat{s} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ aralığını oluşturabilmek için σ değerinin bilinmesi gerekmektedir.

Ana kütle standart sapmasını düzeltilmiş örnek standart sapması ile kestirelim.

Gerçi burada örneklem hacminin yeterince büyük olmadığına dikkat edilmelidir. Dolayısıyla bu yaklaşım çok uygun değildir. Bununla birlikte sadece fikir vermesi açısından ve az önce ki-kare yaklaşımı ile bulunan aralık ile kıyaslama yapmak için bu işlemin yapıldığının altını çizelim.

Bu durumda $\hat{s} \pm Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$

$500 \pm 1{,}96\frac{500}{\sqrt{30}} \Rightarrow 321{,}07<\sigma< 678{,}92$ bulunur.

Örnek: Bir makinanın montajında kullanılacak parçaların normal dağılıma uyduğu bilinmektedir. Bu parçaların kullanılabilmesi için standart sapmasının 0,2 cm. den farklı olmaması gerekmektedir. Bir imalathaneden rastgele seçilmiş 81 parçaya ait standart sapma s=0,35 cm. olarak hesaplanmıştır. Buna göre üretilen bu parçaların standart sapmasının belirtilen spesifikasyona uyduğu α=0,05 seviyesinde söylenebilir mi?

Çözüm:

$$H_0{:}\sigma^2 = 0{,}2^2 cm^2$$

$$H_1{:}\sigma^2 \neq 0{,}2^2 cm^2$$

Test istatistiği:

$$\chi^2_{test} = \frac{ns^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)\widehat{s^2}}{\sigma^2} = \frac{(81)0{,}35^2}{0{,}2^2} = 248$$

Test istatistiğinin değeri red bölgesi içinde kaldığından ana kütle standart sapmasının 0,2 cm. olduğu hipotezi reddedilir.

F-Dağılımı ve Normal Dağılan İki Ana Kütle Varyansının Kıyaslanması

Eğer dağılımı normale uyan bir ana kütleden seçilebilecek n_1 ve n_2 hacimli tüm örnekleri seçer ve bunların herbirine ait düzeltilmiş varyansları hesaplarsak, varyans değerlerinden meydana gelen ve biri n_1 ve diğeri n_2 mevcutlu örneklere ait iki örnekleme dağılımı elde etmiş oluruz. n_1 ve n_2 birimlik örnekler ile ilgili varyanslar birbirlerine oranlandığı zaman elde edilen ve

$$F = \frac{\widehat{s_1^2}}{\widehat{s_2^2}} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{n_1}(X_{1i}-\bar{X}_1)^2}{n_1-1}}{\frac{\sum_{i=1}^{n_2}(X_{2i}-\bar{X}_2)^2}{n_2-1}}$$

formülü ile ifade edilen oran F istatistiği olarak bilinmekte ve bu oranların oluşturduğu bölünme, bölünmeyi geliştiren R.A. Fisher'in baş harfi ile tanımlanmıştır. F dağılımında

$\nu_1 = n_1 - 1$ ve $\nu_2 = n_2 - 1$ sırası ile pay ve payda ile ilgili serbestlik dereceleridir. Yukarıdaki denklemden de anlaşılacağı gibi n_1 ve n_2 birimlik iki örnekten hareketle hesaplanacak iki varyans tahmininin birbirine yakın olması halinde F oranı 1'e yakın olacaktır. Bu durumdan hareketle varyansların eşitliği hipotezi test edilebilmektedir.

Varyansların eşitliği hipotezinin testinde önce iki ayrı örneğe ait varyans değerleri birbirlerine oranlanır, daha sonra pay ve payda için serbestlik dereceleri belirlenerek F dağılımı tablosundan kritik F değeri bulunur. Verilere ilişkin F değeri bu değerin üzerinde ise sıfır hipotezi reddedilir. F oranı büyük varyansın paya küçük varyansın paydaya yazılması ile elde edildiğinden, 1 veya daha büyük olmaktadır. Bu yüzden F testi tek taraflı ve dağılımın sağ ucunu dikkate alan bir testtir.

Örnek: A ve B otoyolları üzerinde seyreden araçların hız değişkenlikleri arasında fark bulunup bulunmadığı araştırılacaktır. Bu amaçla A otoyolundan seçilen 41 araç ile b otoyolundan seçilen 61 aracın hızlarının düzeltilmiş varyansları sırası ile 65 km^2 ve 79 km^2'dir. Ana kütle varyanslarının eşit olduğu hipotezini 0,05 hata payı ile test ediniz.

Çözüm:

H_0: $\sigma_A^2 = \sigma_B^2$

H_0: $\sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Test istatistiği

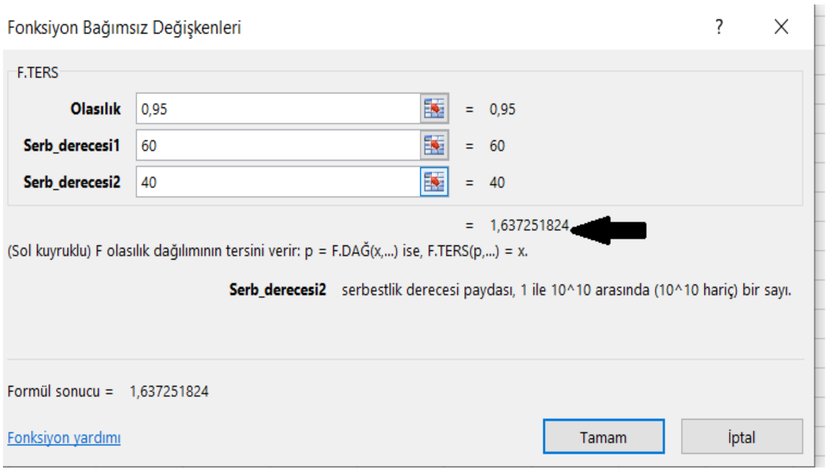
$$F_{test} = \frac{\widehat{s_B^2}}{\widehat{s_A^2}} = \frac{79}{65} = 1{,}215$$

Kritik F değerinin belirlenmesinde payın serbestlik derecesi

$\nu_B = n_B - 1 = 60$ ve paydanın serbestlik derecesi $\nu_A = n_A - 1 = 40$ olarak bulunur. Daha sonra α=0,05 için $F_{60,40,0,05} = 1{,}64$ olarak belirlenir.

Buradan da ana kütle varyanslarının eşit olduğu hipotezi kabul edilir. Bu değer EXCEL'deki

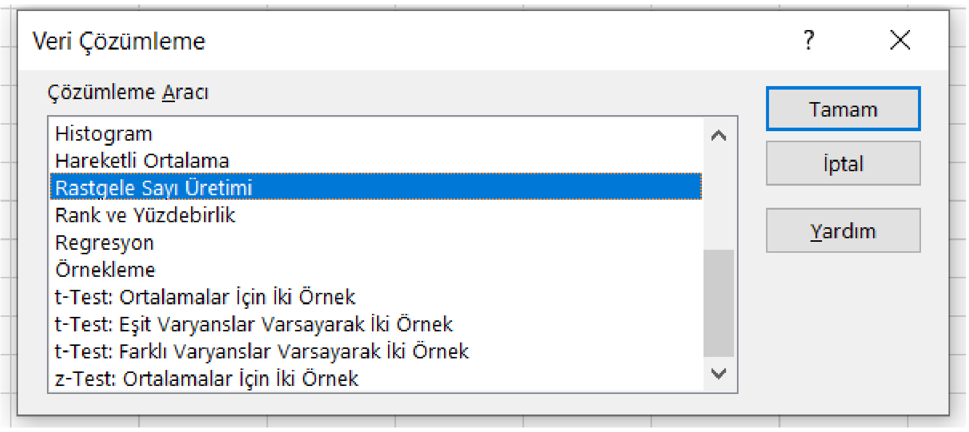
“FTERS” fonksiyonu yardımı ile aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:



Microsoft EXCEL ile Kimi Uygulamalar

Hipotez testleri konusunda EXCEL Veri Çözümleme paketinde de bazı uygulamalar bulunmaktadır. Bu bölümde bu uygulamalarla ilgili örnekler çözülecektir.

Veri Çözümleme paketi seçildikten sonra açılan pencere aşağıdaki gibidir:



Burada en alt sırada yer alan dört uygulama ele alınacaktır. Bunlar sırası ile

1) F-Test Varyanslar için iki Örnek
2) t-Test: Ortalamalar için iki Örnek
3) t-Test:Eşit Varyanslar Varsayarak iki Örnek
4) t-Test:Farklı Varyanslar Varsayarak iki Örnek

5) z-Test: Ortalamalar için iki Örnek

şeklindedir. Bu uygulamaları sırası ile ele alalım:

1)F-Test Varyanslar için İki Örnek

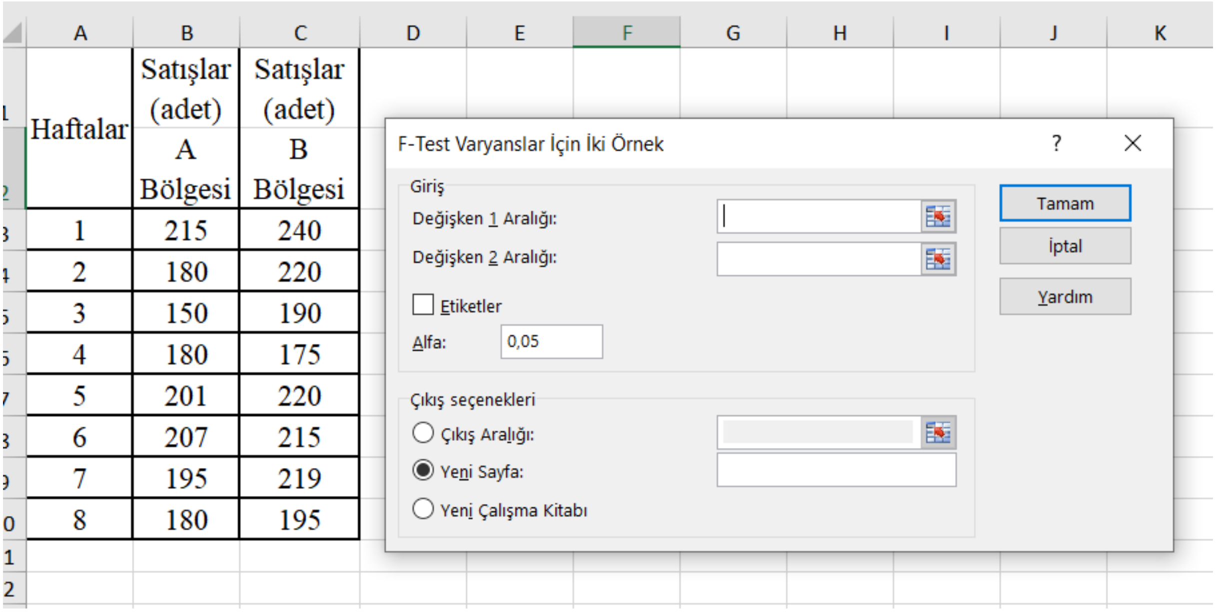
Örnek : Bir şirketin A ve B gibi iki satış bölgesinde pazarladığı bir ürününün satış miktarları verilmektedir. Satış miktarlarının normal dağıldığı varsayımından hareketle şirket iki bölgedeki satışlardaki değişkenlikleri kıyaslamak istemektedir. Söz konusu satışlar şöyledir:

Haftalar	Satışlar (adet) A Bölgesi	Satışlar (adet) B Bölgesi
1	215	240
2	180	220
3	150	190
4	180	175
5	201	220
6	207	215
7	195	219
8	180	195

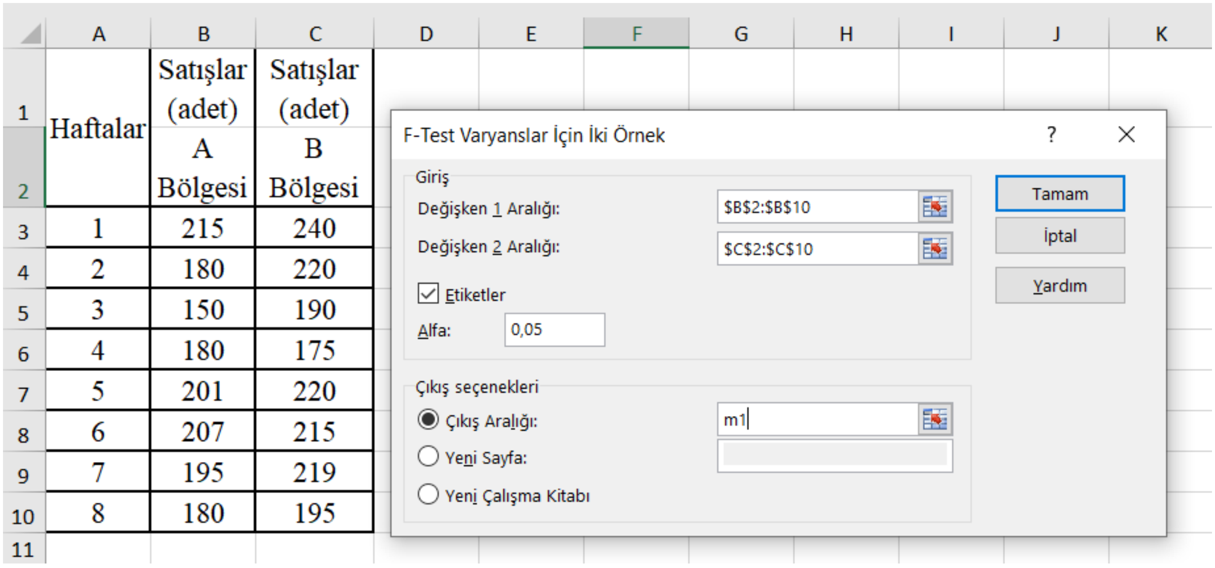
Bu verilere göre varyansların eşit olduğu $\alpha=0,05$ anlamlılık seviyesinde söylenebilir mi?

Çözüm:

Öncelikle bu veriler bir EXCEL çalışma sayfasına işlenir. Daha sonra ilgili makro Veri Analizi menüsünden çağrılır.



İlgili yerler aşağıdaki gibi doldurulur:



Elde edilen çıktı aşağıdaki gibi olur:

M	N	O
F-Test Varyanslar İçin İki Örnek		
	A Bölgesi	*B Bölgesi*
Ortalama	188,5	209,25
Varyans	420,2857	435,9286
Gözlem	8	8
df	7	7
F	0,964116	
P(F<=f) tek	0,481396	
F Kritik iki-	0,264058	

$F_{test} = 0{,}964$

ve p-değeri 0,481396>0,05 olduğu varyansların eşit olduğunu ileri süren sıfır hipotezi kabul edilir.

2)t-Test: Ortalamalar için iki Örnek

Yukarıda ele alınan daktilo yazım hataları ile ilgili örneği yeniden ele alalım:

Sekreter	**Hata sayısı (önce)**	**Hata sayısı (sonra)**	**Fark (d_i) (önce-sonra)**	$d_i - \bar{d}$	$(d_i - \bar{d})^2$
1	**4**	**3**	**1**	**0,625**	**0,390625**
2	**2**	**4**	**-2**	**-2,375**	**5,640625**
3	**6**	**5**	**1**	**0,625**	**0,390625**
4	**3**	**4**	**-1**	**-1,375**	**1,890625**
5	**7**	**6**	**1**	**0,625**	**0,390625**
6	**4**	**2**	**2**	**1,625**	**2,640625**
7	**2**	**2**	**0**	**-0,375**	**0,140625**
8	**3**	**2**	**1**	**0,625**	**0,390625**

Burada elle hesaplanan T istatistiği şu şekilde bulunmuştu:

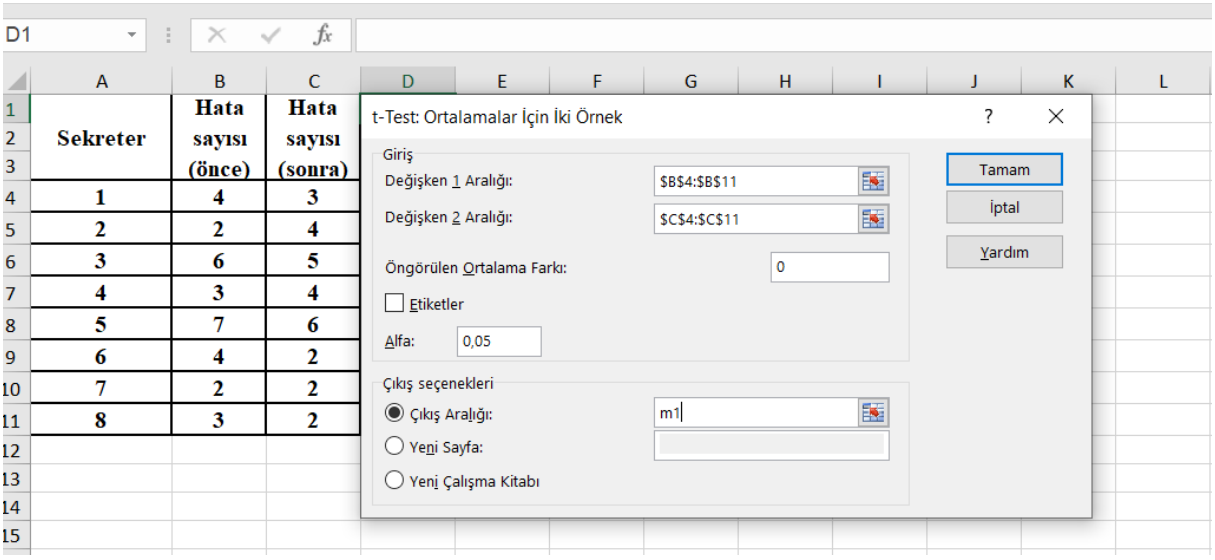
Farkların ortalaması: $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{3}{8} = 0{,}375$

$$s_d = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{11{,}875}{7}} = 1{,}30247$$

$$s_{\bar{d}} = \frac{s_d}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}30247}{\sqrt{8}} = 0{,}460493$$

$$T_{test} = \frac{\bar{d}}{s_{\bar{d}}} = \frac{0{,}375}{0{,}460493} = 0{,}814345$$

Bu örneği t-Test: Ortalamalar için iki Örnek modülü ile bulalım. Öncelikle açılan bir çalışma sayfasının ilk iki sütununa sekterterlerin eğitim öncesi ve sonrası yaptıkları hata miktarlarını aşağıdaki gibi yazıp bu modülü çağıralım:



Programı çalıştırdıktan sonra elde edilen çıktı ise aşağıdaki gibidir:

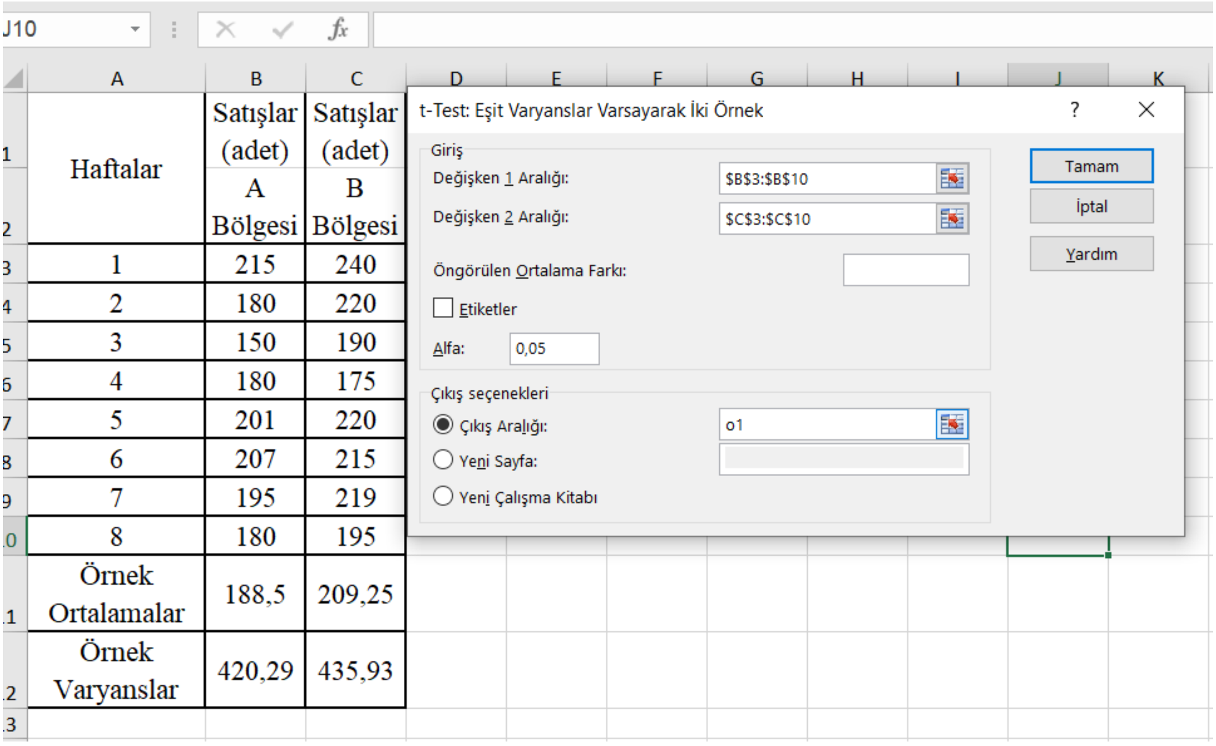
t-Test: Ortalamalar İçin İki Örnek

	Değişken 1	*Değişken 2*
Ortalama	3,875	3,5
Varyans	3,267857	2,285714
Gözlem	8	8
Pearson Ko	0,705656	
Öngörülen	0	
df	7	
t Stat	0,814345	
P(T<=t) tek	0,221133	
t Kritik tek-	1,894579	
P(T<=t) iki-	0,442266	
t Kritik iki-u	2,364624	

Burada da dikkat edilecek olursa aynı T test istatistiği elde edilmiştir. Tek taraflı P-değeri (yaklaşık olarak 0,221) 0,05'den büyük olduğu için sıfır hipotezi kabul edilecektir. Bu bağlamda verilen bu eğitimin daktilo yazım hatalarını azaltma konusunda olumlu etkisi olduğu söylenemez.

3) t-Test:Eşit Varyanslar Varsayarak iki Örnek

Az önce varyansların eşitliğini test ettiğimiz ve varyansların eşit olduğuna hükmettiğimiz örneği buraya taşıyıp bu kez de ortalamaların testi için kullanalım.



Makroyu çalıştırdığımızda elde edeceğimiz çıktı şu şekildedir:

O	P	Q
t-Test: Eşit Varyanslar Varsayarak İki Örnek		
	Değişken 1	*Değişken 2*
Ortalama	188,5	209,25
Varyans	420,2857143	435,928571
Gözlem	8	8
Birikimli Varyans	428,1071429	
Öngörülen Ortalama	0	
df	14	
t Stat	-2,00572718	
P(T<=t) tek-uçlu	0,032304784	
t Kritik tek-uçlu	1,761310136	
P(T<=t) iki-uçlu	0,064609568	
t Kritik iki-uçlu	2,144786688	

Hipotez testini tek taraflı yani

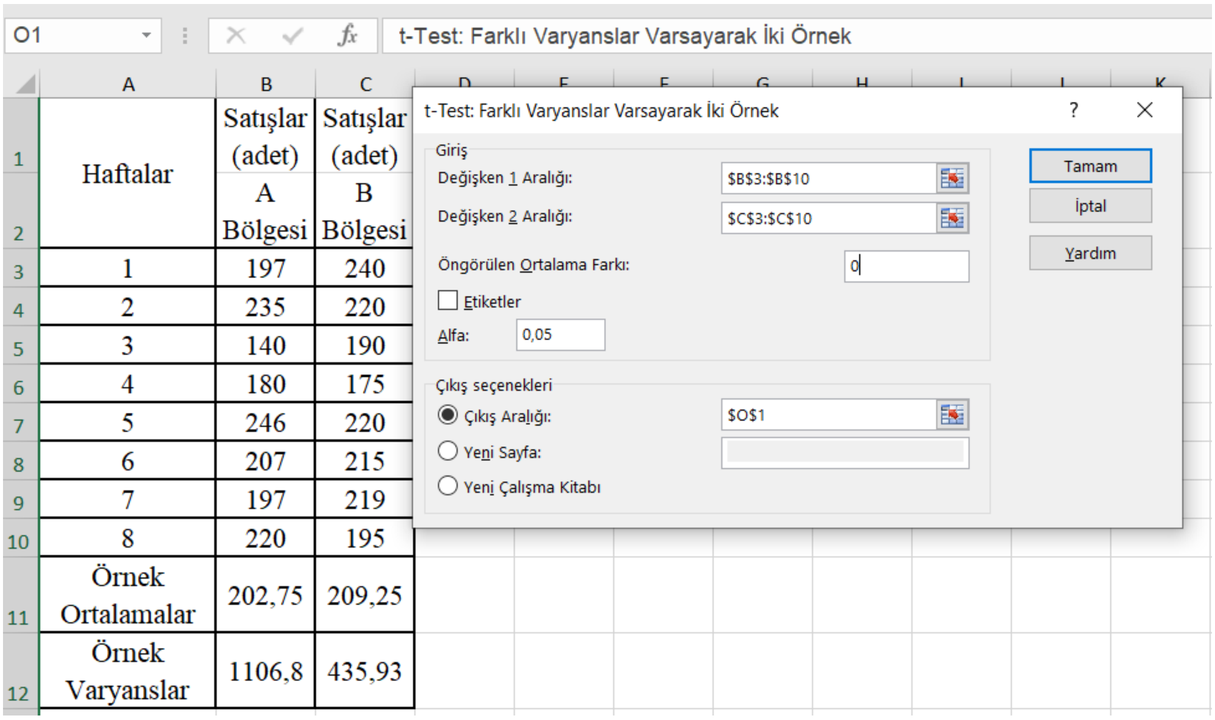
$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 < \mu_2$

şeklinde kurduğumuzda α=0,05 anlamlılık düzeyi için sıfır hipotezini **reddederiz.**

4) t-Test:Farklı Varyanslar Varsayarak iki Örnek

Şimdi de aşağıdaki veri için farklı varyanslar varsayarak iki örnek ortalaması arasındaki fark olup olmadığını test etmek için ilgili makroyu çağırarak ilgili yerleri aşağıdaki gibi dolduralım:



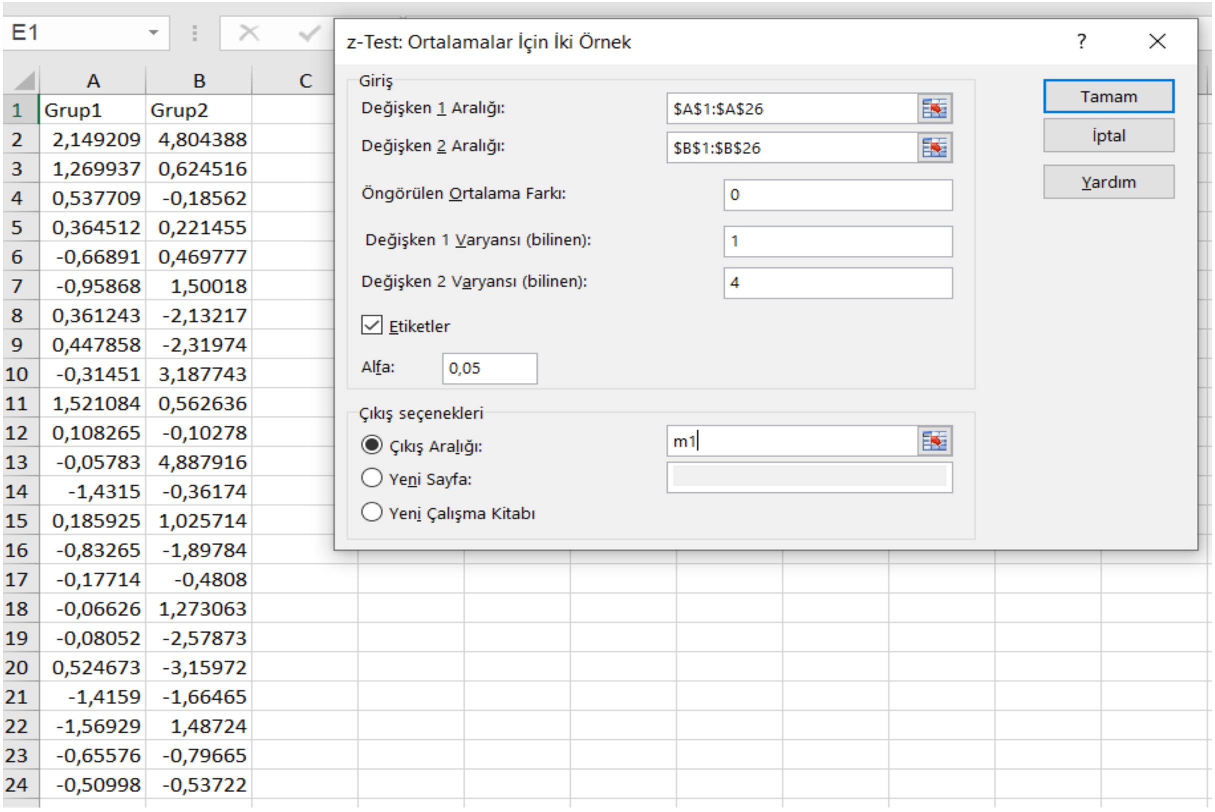
Elde edilen çıktı şu şekildedir:

O	P	Q
t-Test: Farklı Varyanslar Varsayarak İki Örnek		
	Değişken 1	*Değişken 2*
Ortalama	202,75	209,25
Varyans	1106,785714	435,928571
Gözlem	8	8
Öngörülen Ortalama	0	
df	12	
t Stat	-0,46807517	
P(T<=t) tek-uçlu	0,324058996	
t Kritik tek-uçlu	1,782287556	
P(T<=t) iki-uçlu	0,648117993	
t Kritik iki-uçlu	2,17881283	

Buna göre α=0,05 seviyesinde iki ortalama arasındaki farkın olmadığı hipotezini kabul ederiz.

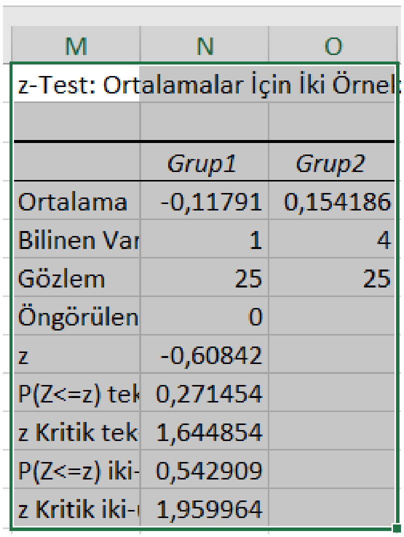
5)z-Test: Ortalamalar için iki Örnek

Aşağıdaki varyanslar 1 ve 4 olarak bilinen dağılımlardan çekilen 25 birimlik iki örnek aşağıdaki gibi olsun:



	A	B
1	Grup1	Grup2
2	2,149209	4,804388
3	1,269937	0,624516
4	0,537709	-0,18562
5	0,364512	0,221455
6	-0,66891	0,469777
7	-0,95868	1,50018
8	0,361243	-2,13217
9	0,447858	-2,31974
10	-0,31451	3,187743
11	1,521084	0,562636
12	0,108265	-0,10278
13	-0,05783	4,887916
14	-1,4315	-0,36174
15	0,185925	1,025714
16	-0,83265	-1,89784
17	-0,17714	-0,4808
18	-0,06626	1,273063
19	-0,08052	-2,57873
20	0,524673	-3,15972
21	-1,4159	-1,66465
22	-1,56929	1,48724
23	-0,65576	-0,79665
24	-0,50998	-0,53722

Makro çalıştırıldığında aşağıdaki çıktı elde edilir:



M	N	O
z-Test: Ortalamalar İçin İki Örnel		
	Grup1	*Grup2*
Ortalama	-0,11791	0,154186
Bilinen Var	1	4
Gözlem	25	25
Öngörülen	0	
z	-0,60842	
P(Z<=z) tek	0,271454	
z Kritik tek	1,644854	
P(Z<=z) iki-	0,542909	
z Kritik iki-(	1,959964	

Buna göre 0,05’lik hata payı ile ortalamaların aynı olduğu hipotezi kabul edilir.