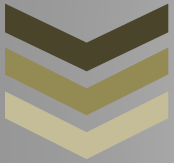


# YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



**12.DERS**

### ATAMA MODELİ

Atama modeli veya problemleri genel doğrusal programlama problemlerinin özel bir durumudur. Atama problemi türlü kaynakların değişik görevlere en uygun biçimde dağıtımını sağlamayı amaçlar. Bu modele daha çok, işçilerin işlere ve işlerin makinalara atanmasında baş vurulur. Programlama, bir işe veya makinaya bir işçi atanması biçiminde yapılır. Atama modelinde amaç, etkinliği maksimum kılmak için kaynak kullanımının bire bir dağılımını sağlamaktır. Modelde iş veya işçi sayısının makine sayısına eşit olduğu kabul edilir.  $m$  işçi sayısını  $n$  makine sayısını gösterdiğinde  $m > n$  ise  $m - n$  miktarda kukla makine,  $n > m$  ise  $n - m$  miktarda kukla işçi modele katılarak eşitlik sağlanır. Kukla işçi veya makinanın maliyeti sıfırdır. İşlerin en kısa zamanda veya en düşük toplam maliyetle gerçekleşmesi istenir. Problemin doğrusal programlama olarak matematiksel modeli;

Amaç:  $Min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \text{ veya } 1$$

$x_{ij}$  karar değişkeni olup,

$x_{ij} = 0$  ise  $i$  işçisi  $j$  işine atanmaz,  $x_{ij} = 1$  ise  $i$  işçisi  $j$  işine atanır.

Modelin kısıtları gereği en iyi çözümde  $n$  tane karar değişkeni 1 değerini, diğerleri 0 değerini alacaktır. Atama problemlerinin çözümü için geliştirilen algoritmalardan en yaygın kullanılanı Macar Algoritmasıdır.

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

**ÖRNEK:** Toplam giderlerin en küçüklenmesi istenen bir atama probleminde işlerin yapılacağı işlem noktalarına ilişkin maliyetler aşağıda verilmiştir. Maliyeti minimum yapacak atama biçimini belirleyiniz.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	5	6	3	2*
2	4	3	2*	4
3	5	4	3	2*
4	6	5	4	3*

Önce satırların minimum değerleri belirlenir ve satır indirgemesi yapılır.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	3	4	1	0*
2	2*	1*	0*	2
3	3	2	1	0
4	3	2	1	0

Sonra sütunların minimum değerleri belirlenir ve sütun indirgemesi yapılır.

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Sıfırlar kapanacak biçimde satır ve sütunlar kapatılır.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	1	3	1	0
2	0	0	0	2
3	1	1	1	0
4	1	1	1	0

Kapatan çizgi sayısı işlem sayısından az olduğu için: Üzerinden çizgi geçmeyen öğelerden en küçüğü seçilerek (örnek için bu değer 2 dir.) çizgilerin dışında kalan diğer öğelerden bu değer çıkartılır. Çizgilerin kesişim noktalarındaki öğelere eklenir.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	0	2	0	0
2	0	0	0	3
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Oluşan yeni tabloda sıfırları örtmek için kullanılan çizgi sayısı dörtten az olamayacağından işlem durdurulur ve sıfır olan gözeler kullanılarak atama yapılır. Bu örnek için alternatif çözümler mevcuttur.

Bunlardan biri:

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	0	2	0	0
2	0	0	0	3
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{22} \\ x_{33} \\ x_{44} \end{bmatrix} \text{ Min } Z=5+3+3+3=14 \text{ biçimindedir.}$$

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bir başka çözüm;

	İşlem Noktaları			
İşlemler	1	2	3	4
1	0	2	0	0
2	0	0	0	3
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{32} \\ x_{44} \end{bmatrix} \text{ Min } Z=5+2+4+3=14 \text{ biçimindedir.}$$

Her iki çözümde de minimum maliyet 14 olarak elde edilmiştir.

Alternatif çözümlerde farklı işlemler farklı iş noktalarına atansa da maliyetleri eşit olmak durumundadır.

### ATAMA PROBLEMİ KAR YAPILI OLDUĞUNDA

Atama probleminin kar yapılı olması, yapılacak olan atamadan en büyük kazancı sağlamak üzere problemin modellenmesi anlamına gelir. Matrisin öğeleri atamalar sonucunda elde edilecek geliri göstermektedir. Bu durumda macar algoritmasının uygulanması aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

Verilen dağıtım tablosunun (fiyat matrisinin) her satırında en büyük değer belirlenerek satırın tüm elemanları bu değerden çıkartılır. Bulunan tablo üzerinden macar algoritması uygulanır.

İşlem noktası sayısı iş sayısına eşit değilse yapay satır ya da sütun eklenerek fiyatları sıfır olarak belirlenir.

Problemin yapısı gereği tabloda negatif işaretli değerler varsa algoritmanın uygulanabilmesi için ilgili satır veya sütunun öğelerine negatif işaretli elemanı sıfır yapacak büyüklükte değer eklenir.



## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Bazı işlem noktalarına bazı işlerin atanması mümkün değilse, ilgili hücreye kar yapılı problemler için yeterince küçük, maliyet yapılı problemler için yeterince büyük fiyat değerleri verilerek bu gözele atama yapılması engellenir.

**ÖRNEK:** Bir firma yöneticisi 4 satış elemanını 5 pazarda görevlendirmek istemektedir. Her satış elemanın daha önceki yıllarda şirket pazarlarında yapmış oldukları aylık satış miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Firmanın hangi satış elemanını hangi pazara göndermesi gerektiğini ve gerçekleştireceği aylık satış miktarını belirleyiniz.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	100	500	300	300	300
2	800	600	500	600	400
3	800	600	400	100	500
4	500	100	400	200	400

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Pazar sayısı Satış elemanı sayısından fazla olduğu için problemi çözebilmek üzere bir adet kukla satış elemanı probleme eklenmelidir ve her satırın en büyük değeri belirlenir.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	100	500*	300	300	300
2	800*	600	500	600	400
3	800*	600	400	100	500
4	500*	100	400	200	400
KUKLA	0	0	0	0	0

Belirlenen bu değerden satırın tüm elemanları çıkarılarak matris aşağıdaki gibi düzenlenir.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	400	0	200	200	200
2	0	200	300	200	400
3	0	200	400	700	300
4	0	400	100	300	100
KUKLA	0	0	0	0	0

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Satır indirgemesi yapılmış olan matriste sütun indirgemesi yapılmalıdır. Bu soruda kukla satış elemanı kullanıldığından her sütunun minimumu sıfırdır ve sütun indirgemesine gerek kalmamıştır.

Son matriste sıfır değerli gözeleri örten çizgiler çekildiğinde matris;

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	400	0	200	200	200
2	0	200	300	200	400
3	0	200	400	700	300
4	0	400	100	300	100
KUKLA	0	0	0	0	0

Örten çizgi sayısı (3) işlem sayısından (5) az olduğundan, çizgi dışında kalan öğelerden en küçük olanı belirlenir. Çizgi dışında kalan öğelerden bu değer çıkartılır çizgilerin kesicim noktasına eklenir ve matris;

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	500	0	200	200	200
2	0	100	200	100	300
3	0	100	300	600	200
4	0	300	0	200	0
KUKLA	100	0	0	0	0

Örten çizgi (4) sayısı işlem sayısından (5) az olduğundan, çizgi dışında kalan öğelerden en küçük olanı belirlenir. Çizgi dışında kalan öğelerden bu değer çıkartılır çizgilerin kesicim noktasına eklenir ve matris;

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	600	0	200	200	200
2	0	0	100	0	200
3	0	0	200	500	100
4	100	300	0	200	0
KUKLA	200	0	0	0	0

Örten çizgi sayısı (5) = İşlem sayısı (5) olduğundan durulur ve sıfır olan gözeler dikkate alınarak en iyi atama gerçekleştirilir.

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

	Pazarlar				
Satış Elemanları	1	2	3	4	5
1	600	0	200	200	200
2	0	0	100	0	200
3	0	0	200	500	100
4	100	300	0	200	0
KUKLA	200	0	0	0	0

Birinci satış elemanının ikinci pazara gitmenin dışında bir alternatifi yok, bu sebeple birinci satış elemanı ikinci pazara gönderilir.

İkinci pazara satış elemanı gönderildiğinden üçüncü satış elemanı birinci pazara gönderilmek durumunda.

Birinci ve ikinci pazarlara eleman atandığı için ikinci satış elemanı dördüncü pazara atanmak durumunda.

Dördüncü satış elemanı üçüncü veya beşinci pazara atanabilir. Her iki durumda da kazanç aynı olacaktır. Yani alternatif çözümler;

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

---

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{43} \end{bmatrix} \quad \text{Max } Z = 500 + 600 + 800 + 400 = 2300 \text{ biçimindedir.}$$

$$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{45} \end{bmatrix} \quad \text{Max } Z = 500 + 600 + 800 + 400 = 2300 \text{ biçimindedir.}$$

### AĞ ANALİZLERİ

Doğrusal programlamanın gerçek hayatta en yaygın kullanılması alanlarından biri de karşılıklı ilişkileri grafik veya şekillerle ifade edilebilen problemlerdir. Elemanlarla bunların arasındaki ilişkilerin şekillerle ifade edilmesinden hareketle bu tür modellere ağ (network ya da şebeke) modelleri denir. Ağ analizi bir programlama tekniği olup genellikle büyük ölçekli projelerin modellenmesi, bir noktadan bir başka noktaya en kısa yolun bulunması, yeni ürün pazarlamasının planlanması, belirli sistemlerdeki en büyük akışın belirlenmesi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Ağ analizinde kullanılacak tekniklere geçmeden önce bazı terimlere değinmek gerekmektedir.

**Grafik:** İki veya daha fazla noktanın bir ya da birkaç çizgi ile birleştirilmesiyle ortaya çıkan seriye grafik denir.

**Düğüm:** Grafik üzerindeki bağlantı noktalarına bağlantı denir.

**Ayrıt:** İki düğümü birleştiren çizgiye ayrıt denir.

**Ağ (Şebeke):** Ayırıtlarında ayırım olan grafiğe ağ (şebeke) denir.

Düğüm noktaları olayları, ayırıtlar ise faaliyetleri gösterir.

**Olay:** Bir olay, zamanda öyle bir anı ifade eder ki, bu anda bir faaliyet bitmiş diğer bir faaliyet başlamaya hazırdır.

**Faaliyet:** Bir işin tamamlanması için zaman ve kaynak gerektiren hareketi ifade eder.

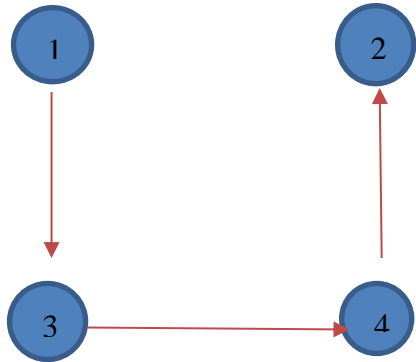
Düğüm	Ayırıt	Akım
Kavşak	Yollar	Araçlar
Vanalar	Borular	Su
Hava Limanı	Hava Yolları	Uçak

**Zincir:** i ve j gibi iki düğümü birleştiren dallar dizisine i ve j düğümleri arasındaki zincir denir.

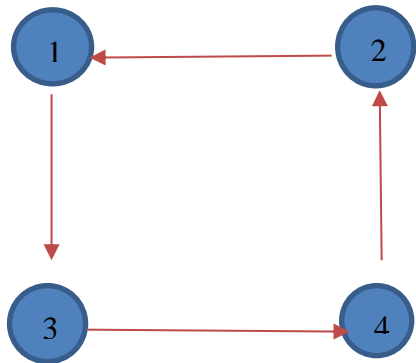
**Yol:** Üzerinde gidiş yönü belirlenen zincire yol denir.



**Döngü:** Bir düğümü kendisine bağlayan zincire döngü denir.

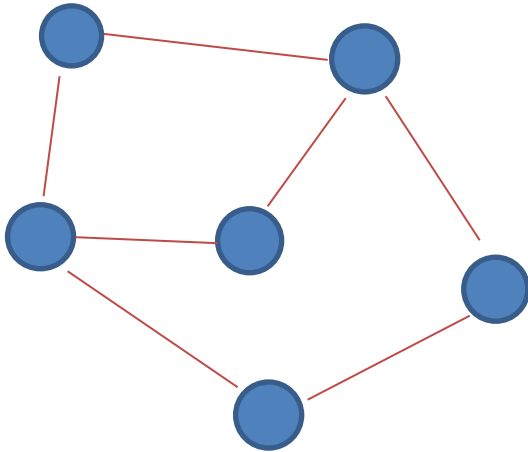


Zincir aynı zamanda yol (yön belli)



Döngü

**Bağlantılı grafik:** Bir grafikte her düğüm noktasını birleştiren bir zincir varsa bu grafiğe bağlantılı grafik denir.



**Ağaç:** Döngüsü olmayan bağlantılı grafiğe ağaç denir.

