Marmara Üniversitesi

İstatistik Bölümü

Örnekleme Teorisi (7)

Doç. Dr. Atıf Evren

Hipotez Testleri

Önceki bölümlerde olasılık kuramından yararlanarak ana kütle parametreleri ile ilgili **kestirimler yapmak** ve **kestirim hatasını** istenilen düzeye düşürmek için gerekli yöntemler üzerinde durduk. Fakat bazı durumlarda örnek istatistiklerinden yararlanarak ana kütle **parametreleri hakkında bir karara varmak** gerekebilir.

Örneğin bir fabrikadan satın alınacak hammaddenin belirli özelliklere sahip olup olmadığı, üretimde uygulanan bir yöntemin kullanılmasının verimliliği gerçekten arttırıp arttırmayacağı veya iki fabrikaya ait malların arasında kayda değer bir fark bulunup bulunmadığı gibi konularda bazı testler aracılığıyla karar vermek gerekebilir.

Genel olarak bir istatistiksel hipotez ana kütle olasılık dağılımını belirleyen bir parametre hakkında bir **iddia** olarak tanımlanabilir. Başka bir biçimde söylenecek olursa bir karara varabilmek için önce bazı varsayımlar ileri sürülür ki bu varsayımlara hipotez denilmektedir. Fakat istatistiksel hipotezlerin diğer hipotezlerden farkı ana kütle ile ilgili bir parametreyi ifade etmesidir. Böylece eğer ana kütle ortalaması ile ilgili bir hipotez ileri sürüyorsak, örneğin, $\mu = 130\ cm.$ gibi, bunun anlamı ana kütle ortalamasının 130 cm. olduğudur.

İstatistiksel karar alma sürecinde oluşturulan bu hipotezlerin örneklem bilgisinden ya da örnek istatistiklerinden yola çıkılarak test edilmesi yoluna gidilmektedir.

Test edilecek olan hipotez **sıfır hipotezi** (null hypothesis) olarak tanımlanmakta ve H_0 notasyonu ile gösterilmektedir. Testi yapanın bu hipotezi red veya kabul etmesi beklenmektedir. Test sonucu sıfır hipotezinin reddedilmesi diğer bir hipotezin kabul edilmesi anlamına gelmektedir. Bu hipotez alternatif hipotez olarak adlandırılmakta ve H_1 ile ifade edilmektedir. Örneğin $H_0: \mu = 130\ cm.$ ise $H_1: \mu \neq 130\ cm.$ veya $H_1: \mu < 130\ cm.$ veya $H_1: \mu > 130\ cm.$ biçimlerinden birinde ifade edilmektedir.

α ve β Hataları

Rassal nedenlerden ötürü aynı ana kütleden çekilmiş çok sayıda örneklerin ortalamaları ana kütle ortalamasından farklı olmaktadır ve örnekleme dağılımı büyük örnek hacimleri için normal dağılıma uymaktadır. Testten önce karar kurallarımızı, örnek ortalaması, ana kütle ortalaması μ 'den belirli bir uzaklıkta veya daha uzak ise sıfır hipotezini reddedecek şekilde belirlemişsek , normal eğri X eksenine asimptotik olarak yaklaştığından bir hata yapma riski , yani **hipotez doğru olmasına rağmen bu hipotezi reddetme** riski daima vardır. Bu riske istatistikte **birinci tür hata** denilmekte ve genellikle testten önce bu hatanın büyüklüğü belirlenmektedir.

α tipi hataya aynı zamanda testin **anlamlılık düzeyi** (the level of significance) denmektedir. Önceden belirlendiği için bu hatayı azaltmak olasıdır. Örneğin %5 yerine %1 anlamlılık düzeyi kullanırsak, α , yani doğru bir hipotezin yanlış olarak kabul edilerek reddedilmesi olasılığı azalmış olur. Fakat α'yı küçültmek ana kütle parametresinden daha uzak olan örnek istatistiklerini de kabul bölgesi içine dahil etmek demektir ki bu davranış **alternatif hipotezin doğru olduğu hallerde alternatif hipotezin kabul edilmemesi riskini** arttıracaktır. Bir hipotezin yanlış olmasına rağmen doğru kabul edilmesi olasılığı veya riski istatistikte **β hatası veya ikinci tür hata** olarak tanımlanmaktadır.

Bu kavramları bir tablo ile açıklayalım:

Verilen Karar/Gerçek Durum	Ho doğru	Ho yanlış
Ho kabul edilir.	Doğru karar (1-α)	İkinci tür hata (β)
Ho reddedilir	Birinci tür hata (α)	Doğru karar (1-β)

Bu hataları bir örnek ile ele alalım**:**

Örnek: Bir imalathaneden çıkan parçaların ağırlıklarının ortalamasının 100 gram ve standart sapmasının da 12 gram olduğu bilinmektedir. 64 birimlik bir örnek seçtiğimiz durumda % 95lik güven düzeyi için sıfır hipotezinin kabul ve red bölgelerini belirleyiniz.

Çözüm:

$\mathrm{H}_0 : \mu = 100 \text{ gram}$

$\mathrm{H}_1 : \mu \neq 100 \text{ gram}$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{12}{\sqrt{64}} = 1,5$$

$$Z_{\alpha/2} = 1,96$$

$$Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,96 * 1,5 = 2,94\, gram$$

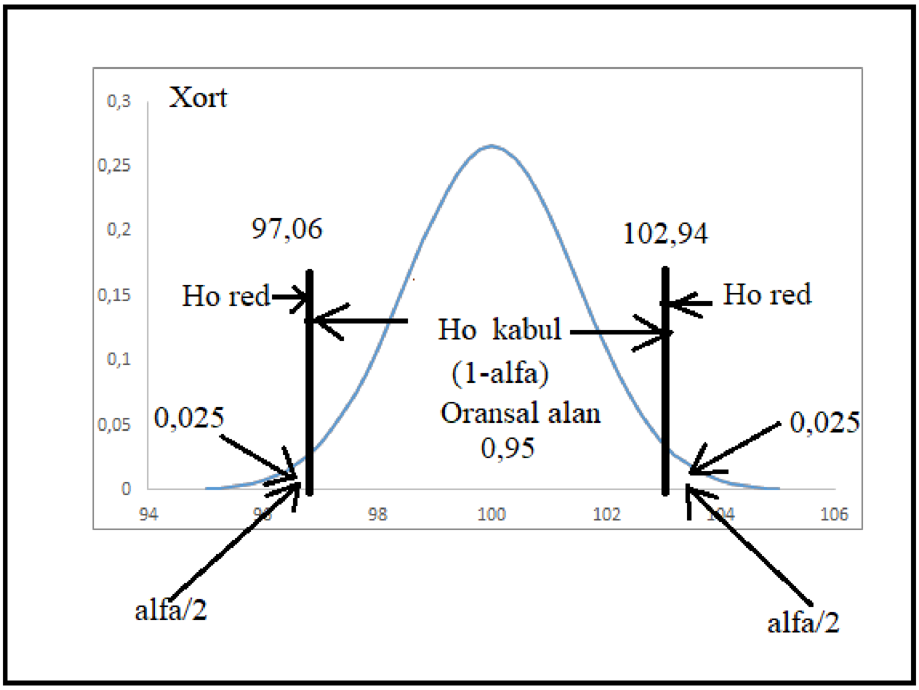
Hipotez testlerinde başlangıçta H_0 hipotezinin doğru olduğu varsayımından hareket edilir. Dolayısıyla örnek ortalamasının içine düşeceği aralığın alt sınırı

$$\mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 - 2,94 = 97,06\, gram$$

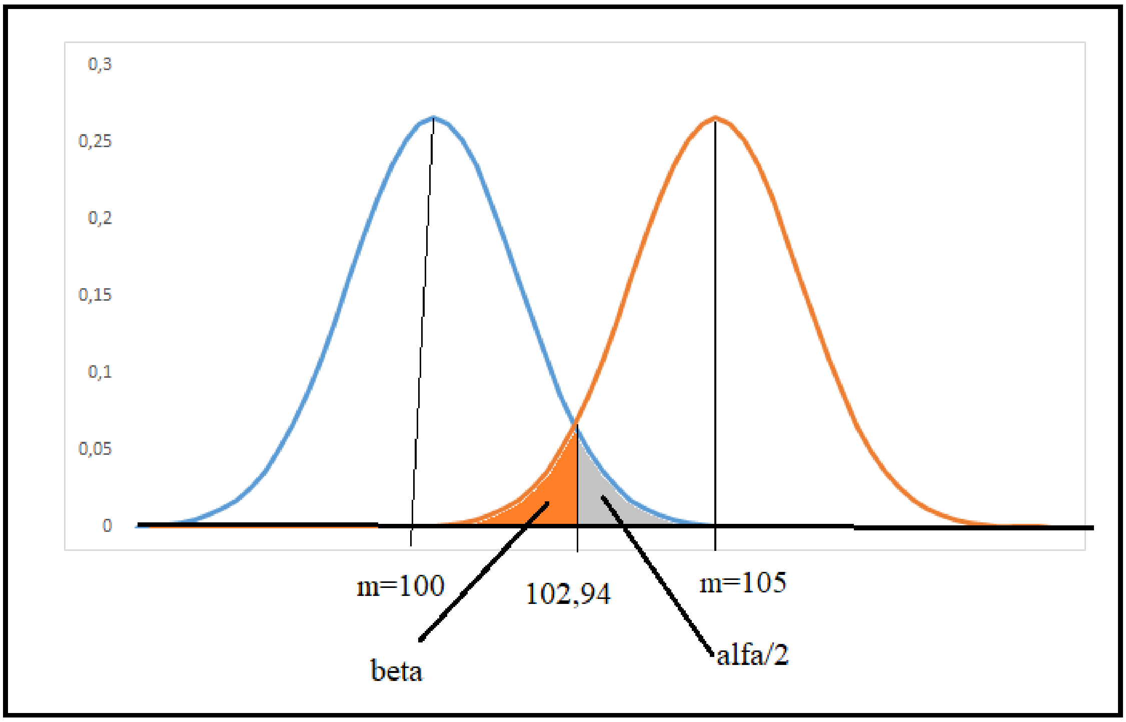
üst sınırı

$$\mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 + 2,94 = 102,94\, gram$$

olarak belirlenir. Buna göre örnek ortalamasının alacağı çeşitli değerlere göre sıfır hipotezinin kabul ve reddedileceği bölgeler aşağıdaki olur:



Şimdi de gerçek ortalamanın $\mu = 105\ gram$ olduğunu düşünelim. Bu durumda alfa ve beta hatalarının birbirleri ile nasıl ters orantılı olduğunu aşağıdaki şekil yardımı ile gösterelim.



Yukarıda soldaki grafikte

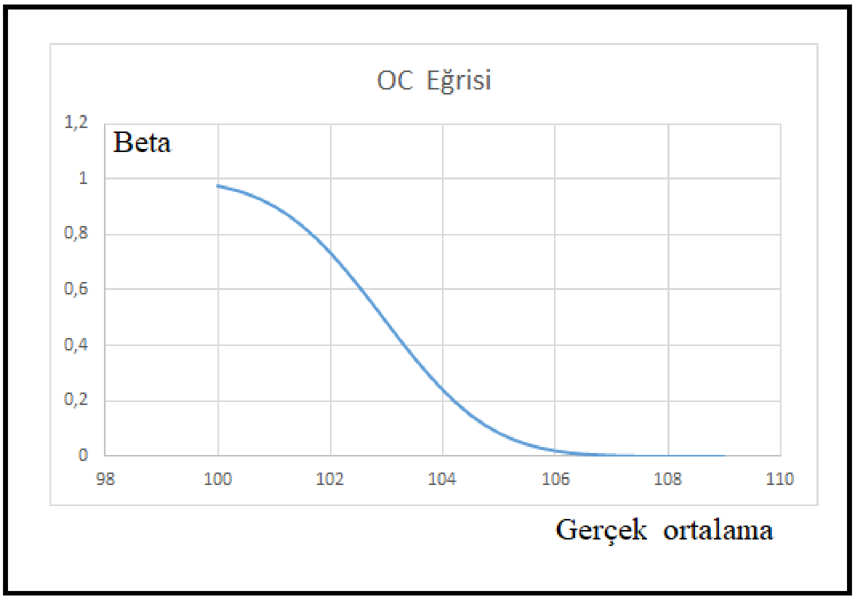
$\mathrm{H_0}: \mu = 100$ gram

$\mathrm{H_1}: \mu \neq 100$ gram

Şeklinde bir durum düşünüldüğünden H_0 hipotezinin reddedilmesi ancak örnek ortalamasının 97,06 gramdan küçük ya da 102,94 gramdan fazla olması durumunda gerçekleşecektir. Şimdi de gerçek ortalamanın 105 gram olması halini ifade eden sağdaki normal dağılım eğrisini düşünelim. Burada $\mathrm{H_0}: \mu = 100$ gram hipotezinden hareket eden bir kişinin gerçekleştireceği hata (ikinci tür hata) yukarıda kavuniçi renkle taranan alan kadar olacaktır. Çünkü bu kişi örnek ortalaması 102,94 gramdan fazla çıkmadığı (ya da 97,06 gramdan az olmadığı) müddetçe sıfır hipotezini kabul etmeye devam edecektir. Bu olasılık $\beta = P(\frac{\bar{X}-105}{1{,}5} < \frac{102{,}94-105}{1{,}5} = P(Z < -1{,}37) = 0{,}085$ olarak bulunur. Yine şekilden takip edilebileceği gibi alfanın azaltılması betanın artmasına ya da alfanın artırılması betanın azalmasına yol açacaktır. Öte yandan örnek hacmini arttırarak β hatasını küçültmek mümkün olsa da pratikte bu hatayı tamamen bertaraf edebilmek mümkün değildir.

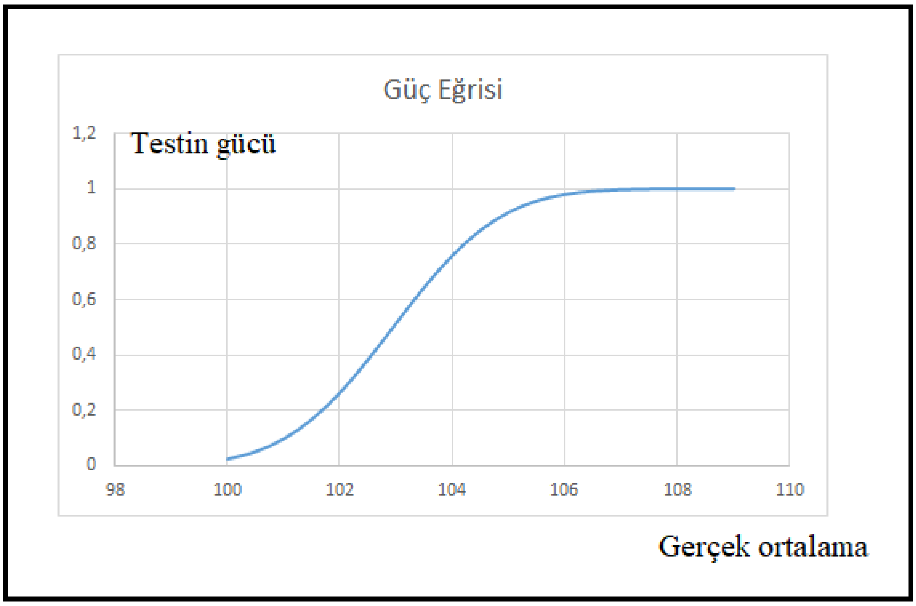
Buna rağmen çeşitli hipotezlere göre β hatalarının olasılıkları hesaplanarak belirli hipotez testlerinin bu hata üzerindeki etkileri ölçülebilir. X ekseninde gerçek anakütle ortalamaları ve Y ekseninde β hatalarının olasılıkları gösterilerek meydana getirilen eğriye OC eğrisi (operating characteristic curve) ya da işletim karakteristiği eğrisi denilmektedir.

Şimdi de gerçek ortalamanın 101, 101,5 ,…,108, 108,5, 109 cm. olması durumunda ikinci tür hataları hesaplayalım ve bu olasılıkları OC eğrisi üzerinde işaretleyelim:



Yukarıdaki işletim karakteristiği eğrisi incelendikçe varsayılan ortalama (100 gram) ile gerçek ortalama arasındaki fark arttıkça ikinci tür hata azalmaktadır.

İşletim karakteristiği eğrisine benzer bir eğri de güç eğrisidir. **Güç eğrisi** işletim karakteristiği eğrisinden bir farkla ayrılır. O da dikey eksende ikinci tür hata olasılıklarının (β değerlerinin) değil testin gücü değerlerinin ($1-\beta$ değerlerinin) temsil edilmesidir. Az önceki veriler için güç eğrisi oluşturulacak olursa aşağıdaki şekil elde edilecektir:



Yukarıdaki şekilden yola çıkılarak da benzer yorumlar yapmak olasıdır. Gerçek ortalama ile varsayılan ortalama (100 gram) arasındaki fark açıldıkça testin gücü artmakta başka bir deyişle sıfır hipotezinin reddedilme olasılığı artmaktadır.

İstatistik Hipotez Testlerinin Aşamaları

a)Sıfır hipotezi ve alternatif hipotezin belirlenmesi.

b)Testin anlamlılık düzeyinin seçilmesi.

Her iki tip hatayı en aza indirecek şekilde α'nın çeşitli yöntemlerle belirlenmesi mümkünse de testi yapanın α ve β hatalarına vereceği önem de α'nın seçiminde rol oynamaktadır. Genellikle 0,05 ve 0,01 anlamlılık düzeyleri kullanılmakta ve kararı etkilememesi için α'nın değeri testin başlangıcında belirlenmektedir.

c)Kritik bölge veya red bölgesinin belirlenmesi.

Testin anlamlılık düzeyinin seçilmesi ile kritik bölge de belirlenmiş olur. Alternatif hipotezin sıfır hipotezinden farklı, küçük veya büyük oluşuna göre testler, çift veya tek taraflı olmaktadır. Kritik bölgelerin sınırları gerçek değerlerle veyaz değerleri ile ifade edilebilir**.**

d)Test istatistiğinin hesaplanması.

İstatistiksel karar ileri sürülen sıfır hipotezi ile örneklerden elde edilmiş olan ortalama, oran vb. istatistiklerin kıyaslanması sonucunda verileceğine göre, bu kıyaslamayı yapmamızı sağlayan ve sıfır hipotezi ile örnek ortalaması arasındaki farkı standart hata cinsinden ifade eden bir ölçüye ihtiyaç vardır. Bu ölçü test istatistiği olarak tanımlanmaktadır ve ortalamalarla ilgili testler söz konusu olduğu zaman $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}$ formülü ile hesaplanmaktadır.

e)İstatistik kararın verilmesi.

Test istatistiği yardımı ile hesaplanan z değerinin red veya kabul bölgelerinden birinin içinde bulunması sonucu sıfır hipotezi kabul veya reddedilecektir.

Ortalamalarla İlgili Hipotez Testleri

Büyük bir anakütleden , anakütle ortalamasının μ_0 olup olmadığını test etmek için n birimlik l bir örnek çekilmiş ve örnek ortalaması $\bar{X}$ olarak bulunmuş olsun. Anakütle ortalaması ile ilgili şu üç alternatif hipotez formülasyonunu ele alalım:

1)Çift taraflı Test

$H_0: \mu = \mu_0$

$H_1: \mu \neq \mu_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

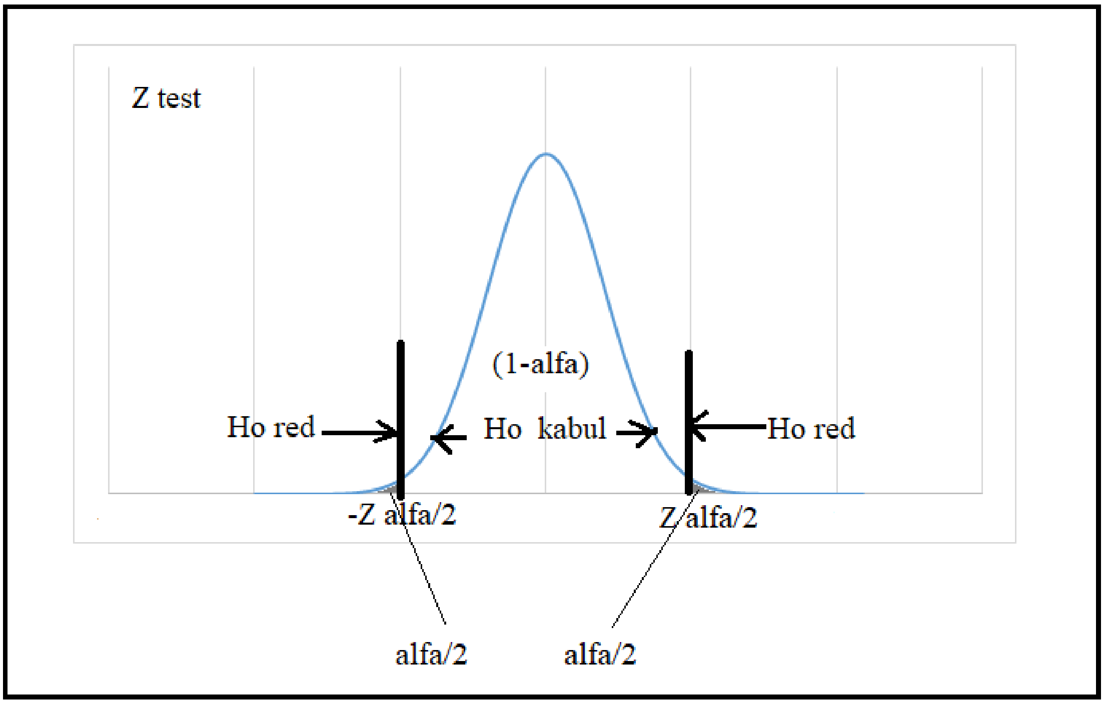
$Z_{test} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $-Z_{\alpha/2} \leq Z_{test} \leq Z_{\alpha/2}$ biçiminde ifade edilir. Eğer ana kütle standart sapması bilinmiyorsa büyük örneklem sözkonusu olduğu için σ yerine örnek standart sapması s kullanılabilir. Yine iadesiz örnekleme yapılıyor ve örnekleme oranı n/N>0,05 ise standart hata formülü $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ şeklinde hesaplanır.

Son olarak ana kütle dağılımı normal ve σ biliniyorsa da (n ne olursa olsun örnek ortalamalarının dağılımı normal olacağından) aynı test istatistiği ve aynı karar kuralı uygulanır. Ana kütle dağılımı normal n<30, σ bilinmiyor ve yerine örnek standart sapması s kullanılıyorsa test istatistiğinin dağılımı n-1 serbestlik dereceli bir student-t dağılımına uyar. Test istatistiğinin kritik değerlerle kıyaslanmasında student-t dağılımından yararlanmanın dışında bir farklılık yoktur.

Çift taraflı hipotez testinde karar sürecinin görsel özeti aşağıdaki şekilde gösterilmektedir:



2)Tek Taraflı Testler

Bazı hallerde araştırmacı ana kütle ortalamasının belirli bir eşik değeri (belirli bir minimum ya da maksimum değeri) aşıp aşmadığı sorunu ile ilgilenebilir. Örneğin üretilen bir ürünün miktarı tüketici açısından belirli bir değerin altında olmamalıdır. (Tüketicinin ürünün ambalajında ifade eden ortalama miktarın üzerinde bir ürün almış olması tüketiciyi rahatsız etmez.) Bu durumda tüketici açısından önemli olan söz konusu ürünün satıcı tarafından taahhüt edilen bir minimum değerin altında olmamasıdır.

İkinci bir örnek olarak arabaların trafikteki ortalama yakıt tüketimi örneği verilebilir. Burada da tüketiciler açısından sorunun arabanın satıcının taahhüt ettiği belirli bir üst değerden fazla yakmasıdır. Dolayısıyla birinci örnekte tüketici hipotez testini aşağıdaki gibi oluşturacaktır.

a)$H_0 : \mu = \mu_0$

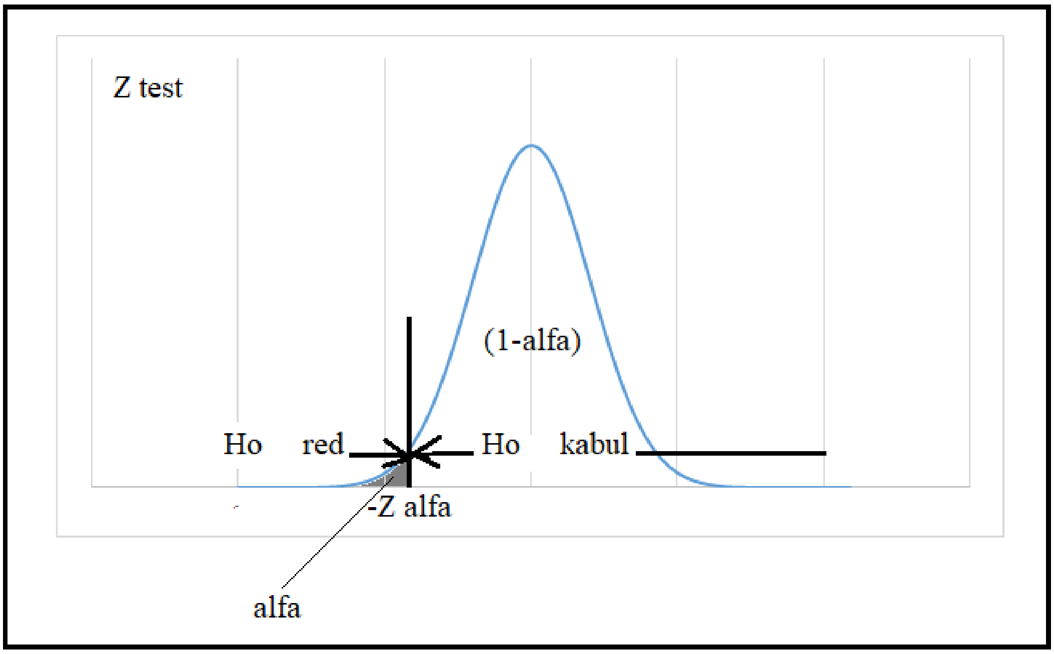
$H_1 : \mu < \mu_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

$Z_{test} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} > -Z_\alpha$ biçiminde ifade edilir. İlgili şekil aşağıdaki gibidir:



İkinci örnekte ise tüketici hipotez testini aşağıdaki gibi kuracaktır:

b)$H_0: \mu = \mu_0$

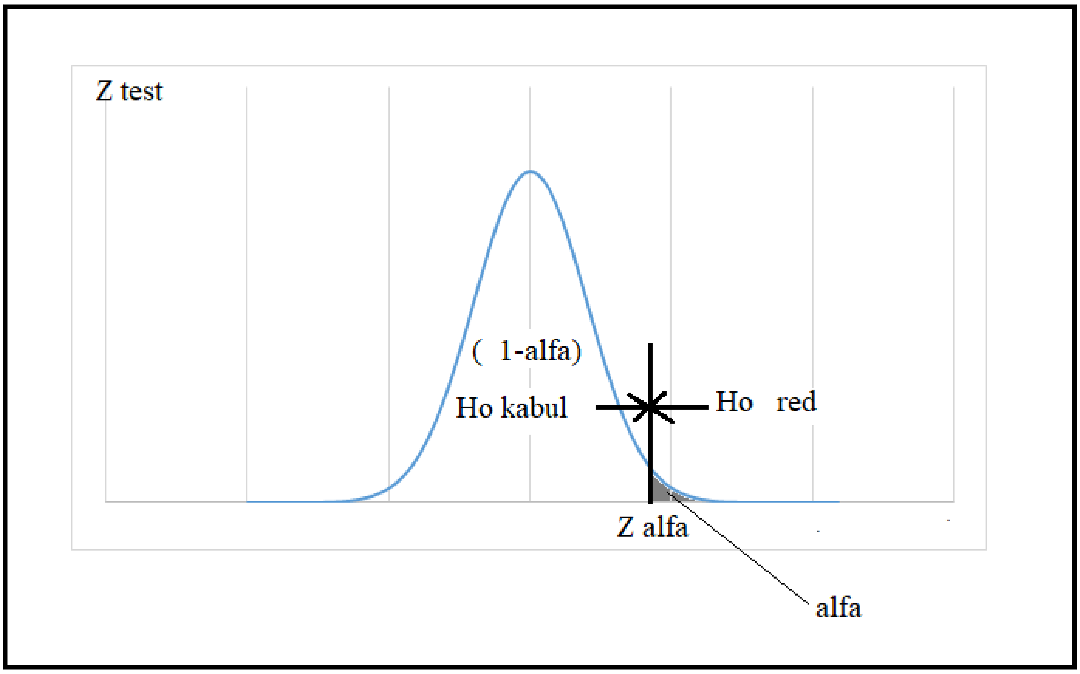
$H_1: \mu > \mu_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

$Z_{test} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} < Z_\alpha$ biçiminde ifade edilir. İlgili şekil aşağıdaki gibidir:



Örnek: bir bölgedeki ailelerin yıllık ortalama gelirlerinin 90 bin TL olduğu tahmin edilmektedir. Bu bölgeden tesadüfi olarak seçilen 100 ailenin yıllık gelir ortalaması 80,2 bin TL ve standart sapması 14 bin TL olarak hesaplanmıştır. Bölgedeki ailelerin yıllık ortalama gelirlerinin 90 bin TL olduğunu 0,01 anlamlılık düzeyi için söyleyebilir miyiz?

Çözüm:

$H_0: \mu = 90\ bin\ TL$

$H_1: \mu \neq 90\ bin\ TL$

Burada %1'lik anlam seviyesinde (çift taraflı) kritik Z değeri

$Z_{\alpha/2}$=2,58 ve test istatistiğinin değeri

$Z_{test} == \frac{\bar{X}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{80{,}2-90}{14/\sqrt{100}} = -7$ olur.

Karar kuralı:

H_0 kabul eğer -2,58$\leq Z_{test} \leq 2{,}58$

Z_{test} bu aralığa düşmediği için ailelerin ortalama gelirlerinin 90 bin Tl olduğunu öne süren sıfır hipotezi reddedilir.

Örnek: Bir konserve fabrikasında üretilen ve üzerinde 500 gram yazan konserve domates salçaları ile ilgili bir örnekleme çalışması sonucunda 196 birimlik bir örneklemin ortalaması 496 gram, standart sapması da 18 gram olarak hesaplanmıştır. α=0,01 için fabrikada üretilen konserve salça kutularının ortalama ağırlıklarının 500 gram olduğunu söyleyebilir miyiz?

Çözüm:

$H_0: \mu = 500\ gram$

$H_1: \mu < 500\ gram$

Burada %1'lik anlam seviyesinde (tek taraflı) Z değeri

$Z_\alpha = 2{,}33$ ve test istatistiğinin değeri

$Z_{test} = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{496-500}{18/\sqrt{196}} = -3{,}11$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} > -Z_\alpha$

Bu koşul yerine gelmediği için konserve salça kutularının 500 gram olduğunu ileri süren sıfır hipotezini reddederiz.

Örnek: Bir fabrikanın halen kullanılmakta olduğu bir tezgah saatte ortalama 135 parça imal edebilmektedir. Yeni bir tezgahın çalışması sırasında rastgele seçilen 36 saat içinde ortalama 138 parça imal ettiği ve standart sapmanın 10 parça olduğu belirlenmiştir α=0,01 anlamlılık seviyesinde yeni tezgahın diğerinden üstün olduğunu söyleyebilir miyiz?

Çözüm:

$H_0: \mu = 135\ parça$

$H_1: \mu > 135\ parça$

Burada %1'lik anlam seviyesinde (tek taraflı) Z değeri

$Z_\alpha = 2{,}33$ ve test istatistiğinin değeri

$Z_{test} = \frac{138-135}{10/\sqrt{36}} = 1{,}81$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} < Z_\alpha$

Bu koşul yerine geldiğine göre sıfır hipotezi kabul edilir. Başka bir ifade ile α=0,01 anlamlılık seviyesinde yeni tipteki tezgahın belirli bir zaman diliminde ortalama olarak ürettiği parça bazında eskisine göre daha üstün olduğu söylenemez.

Ortalama Farkları ile İlgili Hipotez Testleri

Ortalama farklarının standart hatası

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

formülü ile belirlenmektedir. Yine $n_1 \geq 30$ ve $n_2 \geq 30$ olduğunda ana kütlelerin dağılımı normale uymasa bile $\bar{X}_1-\bar{X}_2$'nin dağılımı normale uymaktadır. Yine σ_1 ve σ_2 $yerine$ s_1 ve s_2 kullanılması önemli bir hataya neden olmamaktadır. Bu durumda sıfır hipotezi

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ olarak formüle edilir. Test istatistiği olarak

$$Z_{test} = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$ alınır.

σ_1 ve σ_2 $bilinmediği\ zamanlarda\ yerlerine$ s_1 ve s_2 kullanılması durumunda

$$Z_{test} = \frac{\bar{X}_1-\bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}}$$ olur.

Testin tek veya çift taraflı olmasına bağlı olarak almaşık (alternatif) hipotez

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, veya $H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$, ya da $H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$ formlarından birini alacaktır.

Örnek: Bir otomobil fabrikası ürettiği otomobiller için lastik satın alacaktır. A marka lastiklerin B marka lastiklerden daha dayanıklı oldukları ileri sürüldüğünden, fabrika bu iddianın doğruluğunu test edecektir. Bu amaçla tesadüfi olarak seçilmiş 120 adet A marka lastik ile 120 adet B marka lastiğin eşit şartlar altında dayanıklılıkları ölçülmüştür**.** Test sonucu A marka lastiklerin ortalama ömrü 42000 Km. ve standart sapma 2500 Km. ; B marka lastiklerin ortalama ömrü 40500 Km. ve standart sapma 3000 Km. olarak hesaplanmıştır. % 5 hata payı ile A marka lastiklerin B marka lastiklerden daha dayanıklı oldukları söylenebilir mi?

Çözüm:

$H_0 : \mu_A - \mu_B = 0$

$H_1 : \mu_A - \mu_B > 0$

% 5 anlamlılık seviyesinde (tek taraflı) Z değeri

$Z_\alpha = 1{,}645$

Test istatistiği

$$Z_{test} = \frac{\bar{X}_A - \bar{X}_B}{\sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}} = \frac{42000 - 40500}{\sqrt{\frac{2500^2}{120} + \frac{3000^2}{120}}} = 4{,}2$$

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} < Z_\alpha$

Bulmuş olduğumuz Z değeri sıfır hipotezini red bölgesinde bulunduğundan A marka lastiklerin daha dayanıklı olduğunu % 5'lik hata payı ile söyleyebiliriz.

Oranlarla ile Hipotez Testleri

$X_1, X_2, \ldots, X_n$, p parametreli Bernoulli dağılımdan gelen bağımsız rastlantı değişkenleri olsun. Burada $\hat{p} = Örnek\ (başarı)oranı = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ olmak üzere

$Var(\hat{p}) = \frac{p(1-p)}{n}$ olur.

Yine bu örnek oranının standart hatası

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ formülü ile hesaplanır.

$n \to \infty$ için $Z = \frac{\grave{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ standart normal dağılır. Bu istatistik ana kütle oranı p ile ilgili hipotez testlerinin gerçekleştirilmesinde kullanılmaktadır. Buna göre hipotez testleri aşağıdaki gibi oluşturulur.

1)Çift taraflı Test

$H_0: p = p_0$

$H_1: p \neq p_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

$Z_{test} = \frac{\hat{p}-p_0}{\sigma_{\hat{p}}} = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ olur.

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $-Z_{\alpha/2} \leq Z_{test} \leq Z_{\alpha/2}$ biçiminde ifade edilir.

2)Tek Taraflı Testler

a)$H_0: p = p_0$

$H_1: p < p_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

$Z_{test} = \frac{\hat{p}-p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} > -Z_\alpha$

b)$H_0: p = p_0$

$H_1: p > p_0$

Burada %100α'lık anlam seviyesinde test istatistiği

$$Z_{test} = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Buna göre karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} < Z_\alpha$ biçiminde ifade edilir.

Örnek: Bir fabrikanın ürünlerinin % 10'unun kusurlu olduğu bilinmektedir. Üretilen ürünler arasından rastgele seçilen 100 parçanın 15 tanesi kusurlu bulunmuştur. Buna göre %5 hata payı ile fabrikanın mallarının % 10'dan fazlasının kusurlu olduğu söylenebilir mi?

Çözüm:

$H_0: p = 0{,}10$

$H_1: p > 0{,}10$

Burada %5'lik anlam seviyesinde (tek taraflı) Z tablo değeri

$Z_\alpha = 1{,}645$ ve test istatistiği

$$Z_{test} = \frac{0{,}15 - 0{,}10}{\sqrt{\frac{0{,}10 * 0{,}90}{100}}} = 1{,}66$$

olarak bulunur. Bu durumda karar kuralı

H_0 kabul eğer $Z_{test} < Z_\alpha$

biçiminde ifade edileceğine göre sıfır hipotezi reddedilir ve bu

fabrika için kusurlu oranının % 10'dan fazla olduğuna karar verilir.

İki Oran Farkı için Hipotez Testleri

Hacimleri n_1 ve n_2 olan iki büyük örneğe ait oranlar $\hat{p}_1$ ve $\hat{p}_2$ olsun.

p_1 ve p_2 arasında bir fark bulunup bulunmadığını test edebiliriz. Bu durumda

sıfır hipotezini

$H_0: p_1 = p_2 = p$

şeklinde ifade edebiliriz.

Burada p her iki oranın da eşit olduğu temsili bir oran olsun. Daha önceden örnek oranlarının

farkının standart hatası

$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$ şeklinde bulunmuştu.

Bu formülde $p_1 = p_2 = p$ yerine konacak olursa

$$\sigma_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

Öte yandan bu ortak oran örnek oranlarının tartılı ortalaması olarak

tahmin edilecek olursa

$$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1 + n_2}$$

Standart hatanın tahmini değeri de

$$\hat{\sigma}_{\hat{p}_1-\hat{p}_2} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}$$

biçiminde bulunur. Bu durumda ilgili test istatistiği de

$Z_{test} = \frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\hat{\sigma}_{\hat{p}_1-\hat{p}_2}} = \frac{\hat{p}_1-\hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2})}}$ olur.

Örnek: A ve B şehirlerinden rassal olarak seçilmiş 200 ve 250'şer seçmenlik örnekler yardımıyla yapılan araştırmada A örneği içinde X partisini destekleyenlerin oranının % 60 ve B örneği içinde X partisini destekleyenlerin oranının % 52 olarak belirlenmiştir. Bu verilere dayanarak % 5 anlamlılık düzeyinde A ve B şehirleri oranları arasındaki farkın anlamlı olduğu söylenebilir mi?

Çözüm:

$H_0: p_1 = p_2$

$H_1: p_1 \neq p_2$

$\hat{p} = \frac{n_1\hat{p}_1 + n_2\hat{p}_2}{n_1+n_2} = \frac{200*0,60+250*0,52}{200+250} = 0,556$

$$Z_{test} = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}} = \frac{0,60 - 0,52}{\sqrt{0,556 * (1 - 0,556) * (\frac{1}{200} + \frac{1}{250})}} = 1,7$$

Burada %5'lik anlam seviyesinde (çift taraflı) Z tablo değeri

$Z_{\alpha/2} = 1,96$ ve karar kuralı

H_0 kabul eğer $-Z_{\alpha/2} \leq Z_{test} \leq Z_{\alpha/2}$ biçimindedir. Bu koşul yerine geldiği için oranlar arasında önemli bir fark olmadığı sonucuna varabiliriz.