

13. Hafta

$$Y_i A + X_i B = U_i$$

$$Y_i = X_i \pi + \varepsilon_i \quad -BA^{-1} = \pi$$

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + u_i \quad C - \beta_1 Y + 0I = u_i$$

$$Y = C + I \quad -1C + 1Y - 1I = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\pi = -BA^{-1}$$

$$\pi = -\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + u_i$$

$$C = \beta_0 + \beta_1 (C + I) + u_i$$

$$C - \beta_1 C = \beta_0 + \beta_1 I + u_i$$

$$C(1 - \beta_1) = \beta_0 + \beta_1 I + u_i$$

$$C = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$Y = C + I$$

$$Y = (\beta_0 + \beta_1 Y + u_i) + I$$

$$Y - \beta_1 Y = \beta_0 + I + u_i$$

$$Y(1 - \beta_1) = \beta_0 + I + u_i$$

$$Y = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$C = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$Y = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$\begin{bmatrix} C \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta_0}{1-\beta_1} & \frac{\beta_1}{1-\beta_1} \\ \frac{\beta_0}{1-\beta_1} & \frac{1}{1-\beta_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\beta_1} u_i \\ \frac{1}{1-\beta_1} u_i \end{bmatrix}$$

π

Rank Koşulunun Daraltılmış Biçime Uygulanması

G^* belli bir denklemdeki bağımlı değişken sayısı olmak üzere, G^* sayıda bağımlı değişkenli bir denklem, bu denklemde bulunmayan bağımsız değişkenlerin daraltılmış biçim katsayılarından, satır sütun sayısı $G^* - 1$ olan, sıfırdan farklı en az bir tane determinant oluşturulabiliyorsa tanımlanabilir.

1. Aşama: Yapısal biçim daraltılmış biçime geçirilir.

Yapısal biçim

Daratılmış Biçim

$$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + u_1$$

$$Y_1 = 4X_1 - 2X_2 + 3X_3$$

$$Y_2 = Y_3 + X_3 + u_2$$

$$Y_2 = 2X_1 - X_2 + X_3$$

$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + u_3$$

$$Y_3 = 2X_1 - X_2$$

2. Aşama: Daraltılmış biçim katsayılar çizelgesi hazırlanır.

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

3. Aşama: Tanımlanması istenen denklemde yer almayan bağımlı değişkenlere karşılık gelen satırlar çizilir.

1. Denklem için tanımlama testi

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

Söz konusu denklemin yapısal biçiminde yer alan bağımsız değişkenlere karşılık gelen sütunlar çizilir.

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

4. Aşama: Denklemde yer almayan bağımsız değişkenlerin, dartılmış biçim katsayılarından oluşan determinantın satır sütun sayısı bulunup determinant değeri hesaplanır. Satır-sütun sayısı en büyük sıfırdan farklı determinantın satır sütun sayısı $G^* - 1$ ise denklem tanımlanabilir. Aksi halde tanımlanamaz.

$$G^* = 2 \quad (Y_1, Y_2) \quad \text{1. Denklemdaki bağımlı değişken sayısı}$$

$$G^* - 1 = 2 - 1 = 1 \quad \text{1x1 boyutlu sıfırdan farklı en az bir determinant değerinin bulunması gerekir.}$$

1. Denklemden yer almayan bağımsız değişkenlerin daraltılmış biçim katsayıları

X_3
3
1

$$\Delta_1 = |3| = 3 \neq 0$$

Denklem rank koşuluna göre tanımlanabilir.

5. Aşama: sayma koşulu

$$K_1 = G - 1 \quad K_1 = 2 \quad (Y_3, X_3)$$

$$2 = 3 - 1 \quad 2 = 2$$

1. Denklem tam tanımlanmıştır.

2. Denklem için tanımlama testi

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

$G^* = 2$ (Y_2, Y_3) 2. Denklemdeki bağımlı değişken sayısı

$G^* - 1 = 2 - 1 = 1$ 1x1 boyutlu sıfırdan farklı en az bir determinant değerinin bulunması gerekir.

2. Denklemde yer almayan bağımsız değişkenlerin daraltılmış biçim katsayıları

X_1	X_2
2	-1
2	-1

$$\Delta_1 = |2| = 2 \neq 0$$

Denklem rank koşuluna göre tanımlanabilir.

$$K_2^> = G - 1 \quad K_2 = 3 \quad (Y_1, X_1, X_2)$$

$$3^> = 3 - 1 \quad 3 > 2$$

2. Denklem aşırı tanımlanmıştır.

3. Denklem için tanımlama testi

Denklem	Değişkenler		
	X_1	X_2	X_3
1. Denklem	4	-2	3
2. Denklem	2	-1	1
3. Denklem	2	-1	0

$G^* = 3$ (Y_1, Y_2, Y_3) 3. Denklemdeki bağımlı değişken sayısı

$G^* - 1 = 3 - 1 = 2$ 2x2 boyutlu sıfırdan farklı en az bir determinant değerinin bulunması gerekir.

3. Denklemde yer almayan bağımsız değişkenlerin daraltılmış biçim katsayıları

X_1	X_2
4	-2
2	-1
2	-1

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4) - (-4) = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2) - (-2) = 0$$

3. Denklem rank koşulunun sonucuna göre tanımlanmamıştır. Eksik tanımlama

3. Denklem eksik tanımlandığı için daraltılmış biçim katsayılarından yapısal biçim katsayıları bulunamaz. Modelin spesifikasyonunun değiştirilmesi gerekir.

Dolaylı En Küçük Kareler Yöntemi

Tam tanımlanmış eşanlı bir denklem sisteminin yapısal biçim parametreleri dolaylı EKK yöntemi ile tahmin edilebilir. Yöntemin birinci aşamasında tanımlama testi uygulanır ve yapısal biçim daraltılmış biçime geçirilir. Daraltılmış biçim denklemlerinin herbiri EKK yöntemi ile tahmin edilir. Yapısal biçim parametrelerinin fonksiyonun olan ve tahmin edilen daraltılmış biçim parametrelerinden yapısal biçim parametrelerine geçilir.

Yapısal Biçim

$$C = \beta_0 + \beta_1 Y + u_i$$

$$Y = C + I$$

Daraltılmış Biçim

$$C = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\beta_1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$Y = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{1}{1 - \beta_1} I + \frac{1}{1 - \beta_1} u_i$$

$$\hat{C} = \hat{\pi}_{10} + \hat{\pi}_{11} I$$

$$\hat{Y} = \hat{\pi}_{20} + \hat{\pi}_{21} I$$

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{\beta_1}{1 - \beta_1}$$

$$\hat{\pi}_{10} = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}$$

$$\hat{\pi}_{11}(1 - \beta_1) = \beta_1$$

$$\hat{\pi}_{10}(1 - \beta_1) = \beta_0$$

$$\hat{\pi}_{11} - \beta_1 \hat{\pi}_{11} = \beta_1$$

$$\hat{\pi}_{10} \left(1 - \frac{\hat{\pi}_{11}}{1 + \hat{\pi}_{11}} \right) = \beta_0$$

$$\hat{\pi}_{11} = \beta_1 + \beta_1 \hat{\pi}_{11}$$

$$\hat{\pi}_{10} \left(\frac{1 + \hat{\pi}_{11} - \hat{\pi}_{11}}{1 + \hat{\pi}_{11}} \right) = \beta_0$$

$$\hat{\pi}_{11} = \beta_1 (1 + \hat{\pi}_{11})$$

$$\hat{\pi}_{10} \frac{1}{1 + \hat{\pi}_{11}} = \beta_0$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\hat{\pi}_{11}}{1 + \hat{\pi}_{11}}$$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\hat{\pi}_{10}}{1 + \hat{\pi}_{11}}$$

Örnek

Yapısal biçim

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{1t}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + u_{2t}$$

$$Y_t = C_t + I_t$$

Aşağıdaki ara sonuçları kullanarak,

$$\sum (Y_t - \bar{Y})(r_t - \bar{r}) = -16 \quad \sum (C_t - \bar{C})(r_t - \bar{r}) = -12 \quad \sum (r_t - \bar{r})^2 = 4 \quad \bar{Y} = 60 \quad \bar{C} = 55 \quad \bar{r} = 3$$

gelir ve tüketim denklemleri için daraltılmış biçim katsayılarını tahmin edin.

Yapısal Modelin Parametreler Çizelgesi

Denklem	Değişkenler			
	C	Y	I	r_t
Tüketim Denklemi	1	$-\alpha_1$	0	0
Yatırım Denklemi	0	0	1	$-\beta_1$
Gelir Denklemi	-1	1	-1	0

Tüketim denklemi için tanımlama testi

Denklem	Değişkenler			
	C	Y	I	r_t
Tüketim Denklemi	1	$-\alpha_1$	0	0
Yatırım Denklemi	0	0	1	$-\beta_1$
Gelir Denklemi	-1	1	-1	0

I	r_t
1	$-\beta_1$
-1	0

$$G=3 \quad G-1=3-1=2 \quad 2 \times 2$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-\beta_1) = -\beta_1 \neq 0$$

$$K_C^> = G - 1 \quad K_C = 2 \quad (I, r_t)$$

$$2 \stackrel{>}{=} 3 - 1 \quad 2 = 2$$

Tüketim denklemi tam tanımlanmıştır.

Yatırım denklemi için tanımlama testi

Denklem	Değişkenler			
	C	Y	I	r_t
Tüketim Denklemi	1	$-\alpha_1$	0	0

Yatırım Denklemi	0	0	1	$-\beta_1$
Gelir Denklemi	-1	1	-1	0

C	Y
1	$-\alpha_1$
-1	1

2x2

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \alpha_1$$

$\alpha_1 \neq 1$ denklem rank koşuluna göre tanımlanabilir.

$$K_I = G - 1 \quad K_I = 2 \quad (C, Y)$$

$$2 = 3 - 1 \quad 2 = 2$$

Yatırım denklemi tam tanımlanmıştır.

Modelin çözümü için uygun tahmin yöntemi **Dolaylı EKK** yöntemidir.

Modelin daraltılmış biçimi

$$Y_t = C_t + I_t$$

$$Y_t = (\alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{1t}) + (\beta_0 + \beta_1 r_t + u_{2t})$$

$$Y_t - \alpha_1 Y_t = (\alpha_0 + \beta_0) + \beta_1 r_t + (u_{1t} + u_{2t})$$

$$(1 - \alpha_1) Y_t = (\alpha_0 + \beta_0) + \beta_1 r_t + (u_{1t} + u_{2t})$$

$$Y_t = \frac{\alpha_0 + \beta_0}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1} r_t + \frac{u_{1t} + u_{2t}}{1 - \alpha_1}$$

$$I_t = \beta_0 + \beta_1 r_t + u_{2t}$$

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{1t}$$

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 \left(\frac{\alpha_0 + \beta_0}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1} r_t + \frac{u_{1t} + u_{2t}}{1 - \alpha_1} \right) + u_{1t}$$

$$C_t = \frac{\alpha_0 - \alpha_1 \beta_0}{1 - \alpha_1} + \frac{\beta_1}{1 - \alpha_1} r_t + \frac{u_{1t} + u_{2t}}{1 - \alpha_1} + u_{1t}$$

$$C_t = \pi_{10} + \pi_{11} r_t + \varepsilon_{1t}$$

$$I_t = \pi_{20} + \pi_{21} r_t + \varepsilon_{2t}$$

$$Y_t = \pi_{30} + \pi_{31} r_t + \varepsilon_{3t}$$

$$\sum (Y_t - \bar{Y})(r_t - \bar{r}) = -16 \quad \sum (C_t - \bar{C})(r_t - \bar{r}) = -12 \quad \sum (r_t - \bar{r})^2 = 4 \quad \bar{Y} = 60 \quad \bar{C} = 55 \quad \bar{r} = 3$$

Hatırlatma

$$\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Gelir denklemi daraltılmış biçiminin tahmini ($\hat{Y}_t = \hat{\pi}_{30} + \hat{\pi}_{31} r_t$)

$$\hat{\pi}_{31} = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})(r_t - \bar{r})}{\sum (r_t - \bar{r})^2} = \frac{-16}{4} = -4$$

$$\hat{\pi}_{30} = \bar{Y} - \hat{\pi}_{31} \bar{r} = 60 - (-4) \times 3 = 72$$

$$\hat{Y}_t = 72 - 4r_t$$

Tüketim denklemi daraltılmış biçiminin tahmini ($\hat{C}_t = \hat{\pi}_{10} + \hat{\pi}_{11} r_t$)

$$\hat{\pi}_{11} = \frac{\sum (C_t - \bar{C})(r_t - \bar{r})}{\sum (r_t - \bar{r})^2} = \frac{-12}{4} = -3$$

$$\hat{\pi}_{10} = \bar{C} - \hat{\pi}_{11} \bar{r} = 55 - (-3) \times 3 = 64$$

$$\hat{C}_t = 64 - 3r_t$$

İki Aşamalı En Küçük Kareler

2AEKK yöntemi aşırı tanımlanmış modllerin yapısal biçim parametrelerinin tahmini için, tek denklem yöntemlerinin en önemlisi olarak kabul edilmektedir. 2AEKK yöntemi, esasen EKK yönteminin iki aşamada uygulanmasıdır.

$Y_i = G$ sayıda bağımlı değişken

$X_i = K$ sayıda bağımsız değişken

i.yapısal denklem

$$Y_i = \alpha_{1i}Y_1 + \alpha_{2i}Y_2 + \dots + \alpha_{Gi}Y_G + \beta_{1i}X_1 + \beta_{2i}X_2 + \dots + \alpha_{Ki}X_K + u_i$$

İlk aşamada daraltılmış biçim katsayıları (π) tahmin etmek için, daraltılmış biçim denklemlerine EKK yöntemi uygulanır. Daraltılmış biçim katsayılarının tahminleri ($\hat{\pi}$) kullanılarak bağımlı değişkelerin tahmini değeri ($\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{Y}_3, \dots, \hat{Y}_G$) ve kalıntılar hesaplanır.

i.denklem için;

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i$$

$$\hat{Y}_i = \hat{\pi}_{1i}X_1 + \hat{\pi}_{2i}X_2 + \dots + \hat{\pi}_{Ki}X_K$$

İkinci aşamada yapısal denklemin sağ tarafında yer alan bağımlı değişkenlerin değerleri tahmini değerleri ile değiştirilir ve dönüştürülmüş bu denkleme EKK yöntemi uygulanarak yapısal denklemin parametreleri tahmin edilir.

$$Y_i = \alpha_{1i}\hat{Y}_1 + \alpha_{2i}\hat{Y}_2 + \dots + \alpha_{Gi}\hat{Y}_G + \beta_{1i}X_1 + \beta_{2i}X_2 + \dots + \alpha_{Ki}X_K + u_i^*$$

$$u_i^* = u_i + \beta_{1i}\varepsilon_1 + \beta_{2i}\varepsilon_2 + \dots + \beta_{Gi}\varepsilon_G$$

İki-aşamalı en küçük kareler tahmin edicisinin özellikleri aşağıdaki gibidir:

2AEKK tahmin edicisi eğilimli bir tahmin edicidir, ancak tutarlıdır. Büyük örneklerde 2AEKK tahmin edici yaklaşık olarak normal dağılmaktadır.