4. Hafta

BASİT DOĞRUSAL REGRESYON MODELİ

Regresyon analizinde amaç, örnek verilerinden ana kütle regresyon modeli için en uygun tahmini elde etmektir.

$$E(Y|X = X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

Yukarıdaki anakütle regresyon modelinde yer alan ana kütle parametreleri β_0 ve β_1 'i tahmin etmek için, örnek verisini kullanmak temeldir. Çünkü ana kütle ile ilgili verilerin sağlanması her zaman mümkün olmayabilir. Ana kütle regresyon modelinde yer alan unsurlar (Y ve X) doğrudan gözlenemediği için, bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasında ilişki kuran $E(Y|X = X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ regresyon doğrusunun koordinat sisteminde yerinin belirlenmesi sorundur. Bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ortalama ilişkiyi gösteren ana kütle regresyon doğrusunun tüm veri noktalarının ortasında bir yerde olacağı beklenmektedir.

Amacımız örnek verilerinden hareket ederek $E(Y|X = X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ regresyon doğrusunun tahmin edilmesidir. Bu amaç için, ana kütle parametreleri β_0 ve β_1 'in tahmin edilmesi gerekir. İkinci bölümde de ifade edildiği üzere β_0 ve β_1 'in örnek verilerinden tahminleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ile gösterilmektedir.

Tahmin Yöntemleri

Örnek verileri kullanılarak β_0 ve β_1 'in tahmin edilebilmesi için, yönteme ihtiyaç vardır. Bu amaç için kullanılan başlıca parametre tahmin yöntemleri:

- Momentler yöntemi
- En Çok Benzerlik (EÇB) yöntemi (Maksimum Olabilirlik yöntemi)
- En Küçük Kareler (EKK) yöntemi'dir.

EKK yöntemi diğer tahmin yöntemleri ile karşılaştırıldığında, uygulaması daha basit olduğu ve ekonometrik modelin lehine doyurucu sonuçlar verdiği için tercih edilmektedir. Bundan dolayı En Çok Benzerlik Yöntemi dışındaki diğer tahmin yöntemleri bazı yönleri ile EKK yönteminin düzeltilmiş şeklini içermektedir. Bu dersimizde uygulamada en yaygın kullanılan En Küçük Kareler (EKK) tahmin yöntemi ile basit doğrusal regresyon modelinin tahmini detayları ile verilecektir.

Basit Regresyon Modelinin Tahmini İçin En Küçük Kareler Yöntemi

Regresyon analizinde, örnek verileri temel alınarak ana kütle regresyon fonksiyonunu ($E(Y|X = X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$) mümkün olduğu kadar doğru tahmin etmek temel hedeftir. Ana kütle regresyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

$E(Y|X = X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ ana kütle regresyon fonksiyonu olduğu bilindiğine göre;

Ana kütle regresyon modelinin diğer bir gösterimi aşağıdaki gibidir.

$$Y_i = E(Y|X = X_i) + u_i$$

En Küçük Kareler ilkesine göre veri değerlerine uygun *doğru* için, *n* tane X_i ve Y_i veriyken örnek regresyon fonksiyonundan elde edilen $\hat{Y}_i$ 'ler, gözlemlenen (teorik) Y_i 'lere olabildiğince yakın olmalıdır. Bunun için kıstas, gözlemlenen Y_i 'ler ile tahmin edilen $\hat{Y}_i$ arasındaki fark olarak tanımlanan kalıntı ($\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$) karelerinin toplamını minimize eden $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ değerlerini bulunmasıdır. Pozitif uzaklıkların negatif uzaklıklarla ortadan kaldırılmasını önlemek için, Y_i ile $\hat{Y}_i$ arasındaki dikey uzaklıkların ($\hat{u}_i$) karesi alınmaktadır.

Bu durumda her bir veri noktasından (Y_i) örnek regresyon doğrusuna ($\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$) dikey uzaklıklar ($\hat{u}_i$) aşağıda verilmiştir.

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$$

Buradan kalıntıların karelerinin toplamı aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2 \Rightarrow \min$$

Kalıntı kareler toplamının minimum ($\sum \hat{u}_i^2 \to \min$) olması durumda, tahmin edilen β_0 ve β_1 parametreleri doğrusal, sapmasız (eğilimsiz) ve en iyi (tesirli, en küçük varyanslı) -BLUE- tahminlerdir. Kalıntı kareler toplamını minimum yapma koşulu ise, kalıntı kareler toplamı fonksiyonunda $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametrelerine göre birinci dereceden kısmi türevlerin sıfıra eşitlenmesi ile mümkündür. Kısaca,

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0$$

olarak ifade edebiliriz. Kalıntı kareler toplamı fonksiyonunda $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametrelerine göre kısmi türev alınır ve sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \Rightarrow (-2)\sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = \frac{\partial \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \Rightarrow (-2)\sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(X_i) = 0$$

Eşitliklerin her iki yanı (-2)' ye bölünür.

$$\frac{(-2)\sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)}{(-2)} = \frac{0}{(-2)} \Rightarrow \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

$$\frac{(-2)\sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(X_i)}{(-2)} = \frac{0}{(-2)} \Rightarrow \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(X_i) = 0$$

Toplama işlemcisi (Σ), parantez içine dağıtılır ve sadeleştirmeler yapılırsa aşağıdaki denklemler elde edilir. (*Not:* Σ 'nın sabit bir terim olan $\hat{\beta}_0$ ile çarpımından "n $\hat{\beta}_0$" elde edilir.)

$$\sum Y_i - n\hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i X_i - \hat{\beta}_0 \sum X_i - \hat{\beta}_1 \sum X^2{}_i = 0$$

Bağımlı değişkeni içeren unsurlar eşitliğin sol tarafında bırakılarak, aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\sum Y_i X_i = \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2$$

Yukarıdaki iki denklem birlikte bir denklem sistemini oluşturur ve *normal denklemler* olarak adlandırılır ve orjin (0,0) noktasıdır.. Burada *n* örneklem büyüklüğüdür.

Normal denklemler $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ için Cramer yöntemi ile çözülürse;

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum YX & \sum X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y \sum X_i^2 - \sum Y_i X_i \sum X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

eşitlikleri elde edilir. Normal denklemlerin çözümünden sağlanan bu eşitlikler, ***En Küçük Kareler tahmincileri***dir. X_i ve Y_i'in örnek değerleri normal denklemlere uygulanırsa, β_0 ve β_1 parametrelerinin ***En Küçük Kareler tahminleri*** elde edilir.

Ana kütleden çekilen örnek verileri örnekten örneğe değişeceği için, EKK tahminleri de değişecektir. Bu durumda β_0 ve β_1 rassal değişkenlerdir.

- EKK tahmincileri, genel formüller ve rassal değişkenlerdir.
- EKK tahminleri, gözlemlenen verilere genel genel formüllerin uygulanması ile elde edilen sayısal değerlerdir.

En Küçük Kareler Yönteminin Sapmalar Kuralı İle Uygulaması

Normal denklemlerde X_i ve Y_i'ye ait örneklem değerlerinin sıfırdan uzaklıkları kullanılmaktadır. Bu durumda orjin O(0;0) noktasıdır. Aritmetik ortalamanın sağladığı kolaylıklardan yararlanılarak, EKK tahmincilerini daha basit biçimde formüle etmek mümkündür. En küçük kareler tahmincilerinin yukarıdaki eşitliklerden farklı olarak X_i ve Y_i'in örnek değerlerinin örnek ortalama değerlerinden ($\bar{X}$, $\bar{Y}$) farkları ile gösterimi EKK yönteminin diğer bir uygulama biçimi *sapmalar yöntemi*dir. Örnek değerlerinin örnek ortalama değerlerinden uzaklıklarının dikkate alındığı söz konusu durumda orjin O ($\bar{X}$; $\bar{Y}$) noktasıdır. En küçük karelerin sapmalar yöntemine göre tahmincileri aşağıdaki gibi elde edilir.

$\hat{\beta}_1$ için normal denklemlerden elde edilen EKK tahmincisinin pay ve paydasını gözlem sayısı *n*'e bölünür.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\left(n\sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i\right)/n}{\left(n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2\right)/n} = \frac{\sum Y_i X_i - \left(n\bar{X} \times n\bar{Y}\right)/n}{\sum X_i^2 - \left(n\bar{X}\right)^2/n}$$

$\bar{X} = \sum X_i / n$ ve $\bar{Y} = \sum Y_i / n$, X ve Y gözlemlerinin örnek ortalamalarıdır. $\sum X_i / n = \bar{X}$ ve $\sum Y_i / n = \bar{Y}$ olduğu bilindiğine göre yukarıdaki denklemde $\sum X_i / n$ yerine $\bar{X}$ ve $\sum Y_i / n$ yerine $\bar{Y}$ yazılır ise aşağıdaki denklem elde edilecektir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2}$$

Burada $\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} = \sum x_i y_i$ ve $\sum X_i^2 - n\bar{X}^2 = \sum x_i^2$ eşitlikleri söz konusudur. $x_i = X_i - \bar{X}$, $y_i = Y_i - \bar{Y}$, Y ve X gözlem değerlerinin örnek ortalamalarından farklarıdır. Kısaca x_i ve y_i ortalamadan sapmadır. Sonuç olarak sapmalar yöntemine göre β_1 'in EEK tahmincisi aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

Sapmalar kuralına göre EKK yönteminin uygulamasında öncelikle $\hat{\beta}_1$, ikinci aşamada $\hat{\beta}_0$ 'ın hesaplanması gerekir. En küçük kareler yönteminin sapmalar kuralına göre uygulamasında $\hat{\beta}_1$'den sonra $\hat{\beta}_0$ tahmincisinin elde edilmesi için normal denklemlerden birincisi kullanılır ve denklemin her iki yanı gözlem sayısı n'e bölünür.

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

$$\sum Y_i \big/ n = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i \big/ n$$

Buradan

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

elde edilir. Eşitlik $\hat{\beta}_0$ için yeniden düzenlendiğinde

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Böylece sapmalar kuralına göre EKK tahmincileri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

İspat

$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$ eşitliğini aşağıdaki gibi gösterebiliriz. $x_i = X_i - \bar{X}$ eşitliği bilindiğine göre;

$$\sum x_i^2 = \sum\left(X_i - \bar{X}\right)^2 = \sum\left(X_i - \bar{X}\right)\left(X_i - \bar{X}\right)$$

$$= \sum\left(X_i^2 - \bar{X}X_i - \bar{X}X_i + \bar{X}^2\right)$$

Toplama işlemcisi parantez içine dağıtılır. Burada $\bar{X}$ bir sabit olduğu için $n\bar{X}$ 'dır.

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \bar{X}\sum X_i - \bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2$$

$$= \sum X_i^2 - 2\bar{X}\sum X_i + n\bar{X}^2$$

Yine $\sum X_i / n = \bar{X}$ eşitliğinden $\sum X_i = n\bar{X}$ yazılabilir ve

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - 2\bar{X}\left(n\bar{X}\right) + n\bar{X}^2$$

$$= \sum X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2$$

Buradan;

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - n\bar{X}^2$$

eşitliğine ulaşılır. $\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}$ olduğunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i y_i}{\sum x_i^2}$$

İspat

$\sum x_i y_i = \sum x_i Y_i$ eşitliği aşağıdaki gibi gösterilir.

$y_i = Y_i - \bar{Y}$ eşitliği bilindiğine göre;

$\sum x_i y_i = \sum x_i\left(Y_i - \bar{Y}\right)$ yazılır ve $\sum x_i$ parantez içine dağıtılır.

$$\sum x_i y_i = \sum x_i Y_i - \bar{Y}\sum x_i$$

Aritmetik ortalamanın özelliklerinden $\sum x_i = \sum\left(X_i - \bar{X}\right) = 0$ olduğu bilinmektedir. Buna göre;

$$\sum x_i y_i = \sum x_i Y_i - \bar{Y}\left(0\right) = \sum x_i Y_i - \left(0\right)$$

olacak ve

$$\sum x_i y_i = \sum x_i Y_i$$

eşitliği elde edilecektir. $\sum x_i y_i = \sum y_i X_i$ olduğunun ispatı okuyucuya bırakılmıştır.

Açıklayıcı Örnekler

Uygulama 1: Satış Gelirleri İle Reklam Harcamaları

Aşağıda bir spor giyim mağazasının 5 aylık satış gelirleri ile reklam harcamalarına ilişkin veriler yer almaktadır. Bu verileri kullanarak örnek regresyon denklemini ($\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$) tahmin ediniz.

Aylar	Satış Gelirleri (1000 L)	Reklam Harcamaları (1000 L)
1	3	1
2	4	2
3	2	3
4	6	4
5	8	5

Tablo: Satış gelirleri ve reklam harcamaları

Örnek regresyonunun tahmin edilebilmesi için öncelikle bağımlı ve bağımsız değişkenlerin belirlenmesi gerekir. Satışlar, reklam harcamalarının bir fonksiyonu olduğu diğer bir ifade ile nedensellik reklam harcamalarından satışlara doğru olduğu için satışlar bağımlı değişken reklam harcamaları bağımsız değişkendir.

Y= Satışlar (1000 lira)

X= Reklam harcamaları (1000 lira)

$$\text{Satışlar}(Y) \leftarrow \text{Reklam Harcamaları}(X)$$

Örnek regresyon fonksiyonu, EKK yöntemiyle yukarıda anlatıldığı üzere *X* ve *Y*'nin gözlemlenen (teorik) değerlerinden veya *X* ve *Y* 'nin gözlemlenen değerlerinin (X_i, Y_i) kendi ortalamalarından ($\bar{X}, \bar{Y}$) farklarından (x_i, y_i) olmak üzere iki şekilde tahmin edilebilir.

Öncelikle *X* ve *Y* 'nin gözlem değerleri kullanılarak örnek regresyonu tahmin edilecektir. Bu amaçla

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$
$$\sum Y_i X_i = \hat{\beta}_0 \sum X_i + \hat{\beta}_1 \sum X_i^2$$

normal denklemlerdeki değişkenlerle ilgili unsurların ($\sum Y_i$, $\sum X_i$, $\sum Y_i X_i$, $\sum X_i^2$) hesaplanması gerekecektir. Gözlem sayısı (n) 5'e eşittir.

Y	X	X^2	XY
3	1	1	3
4	2	4	8
2	3	9	6
6	4	16	24
8	5	25	40
$\sum Y_i$ =23	$\sum X_i$ =15	$\sum X_i^2$ =55	$\sum Y_i X_i$ = 81

Tablo- .2: Satışlar ve reklam harcamalarının ara sonuçları

Tablonun son satırı ara sonuçlar kullanılarak tahmin değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \Sigma Y & \Sigma X \\ \Sigma YX & \Sigma X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\Sigma Y \Sigma X_i^2 - \Sigma Y_i X_i \Sigma X_i}{n \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i)^2} = \frac{23.55 - 81.15}{5.55 - (15)^2} = 1.0$$

ve

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \Sigma Y_i \\ \Sigma X_i & \Sigma Y_i X_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \Sigma X_i \\ \Sigma X_i & \Sigma X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n \Sigma Y_i X_i - \Sigma X_i \Sigma Y_i}{n \Sigma X_i^2 - (\Sigma X_i^2)^2} = \frac{5.81 - 15.23}{5.55 - (15)^2} = 1.2$$

EKK tahminleri $\hat{\beta}_0 = 1.0$, $\hat{\beta}_1 = 1.2$ 'dir. Buna göre; Satışlar ile reklam harcamaları arasındaki ortalama ilişkinin tahmini örnek regresyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2 X_i$$

İkinci olarak EKK yönteminin diğer bir uygulama biçimi olan sapmalar yöntemiyle de aynı sonuca ulaşmak mümkündür. Bu amaç için aşağıdaki denklemler kullanılacaktır.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Öncelikle yine denklemlerde yer alan unsurların ($\sum x_i y_i$, $\sum x_i^2$, $\bar{Y}$, $\bar{X}$)

hesaplanması gerekecektir. Bu amaç için yukarıdaki tabloda elde edilen sonuçlar kullanılacaktır. Öncelikle $\bar{X}$ ve $\bar{Y}$ 'nin hesaplanması gerekir.

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{15}{5} = 3 \qquad \bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{23}{5} = 4.6$$

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y} = 81 - 5.3.(4.6) = 12$$

$$\Sigma x_i^2 = \Sigma X_i^2 - n\bar{X}^2 = 55 - 5.(3)^2 = 10$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{12}{10} = 1.2$$

ve

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_2 \bar{X} = 4.6 - (1.2).3 = 1.0$$

olarak hesaplanır. Örnek regresyon fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i$$

Görüldüğü üzere EKK yönteminin her iki uygulanmasının sonuçları aynıdır. Şimdi reklam harcamaları ile satışlar arasında ilişki kuran $\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i$ regresyon fonksiyonunu yorumlayalım. $\hat{\beta}_0 = 1.0$ sabit parametredir ve geometrik açıdan regresyon doğrusunun dikey ekseni kestiği noktadır. Reklam harcamaları (*X*) sıfıra eşit olduğu durumda satış gelirleri 1000 lira olacaktır. $\hat{\beta}_1 = 1.2$ eğim katsayısıdır. *X* değişkeni ΔX miktarı kadar değişirse, *Y* deki değişme $\Delta Y = 1.2\Delta X$ kadardır. Reklam harcamaları 1 birim (1000 lira) artarsa satış gelirleri ortalama 1.2 birim (1200 lira) artacaktır.

EKK tahminleri elde edildikten sonraki aşamada örnek regresyon doğrusunu koordinat sistemi üzerinde gösterebiliriz. Daha önce belirtildiği üzere örnek regresyon doğrusu bağımlı değişkenin tahmini değerleri ($\hat{Y}_i$) üzerinden geçer. Buna göre öncelikle $\hat{Y}_i$ 'lerin hesaplanması gerekir. X_i 'in değerleri (1,2,3,4,5) $\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i$ denkleminde yerine konur ve hesaplamalar yapılırsa $\hat{Y}_i$ 'ler elde edilecektir.

Örneğin $X_2 = 2$ olduğu 2. gözlem için $\hat{Y}_2$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{Y}_2 = 1.0 + 1.2X_2 = 1.0 + 1.2(2) = 3.4$$

İkinci gözlemde satışların gözlemlen değeri (Y_2) 4 iken, satışların tahmini ($\hat{Y}_2$) 3.4'e eşittir. Hesaplanan diğer sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Y	X	X^2	XY	$\hat{Y}_i$
3	1	1	3	2.2
4	2	4	8	3.4
2	3	9	6	4.6
6	4	16	24	5.8
8	5	25	40	7.0
$\sum Y_i$=23	$\sum X_i$=15	$\sum X_i^2$=55	$\sum Y_i X_i$ = 81	$\sum \hat{Y}_i$=23

Bu aşamada her bir veri noktasından (Y_i) örnek regresyon doğrusuna ($\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$) dikey uzaklıklar olan kalıntılar ($\hat{u}_i$) ve kalıntı kareler toplamı ($\sum \hat{u}_i^2$) hesaplanacaktır.

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y} = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i$$

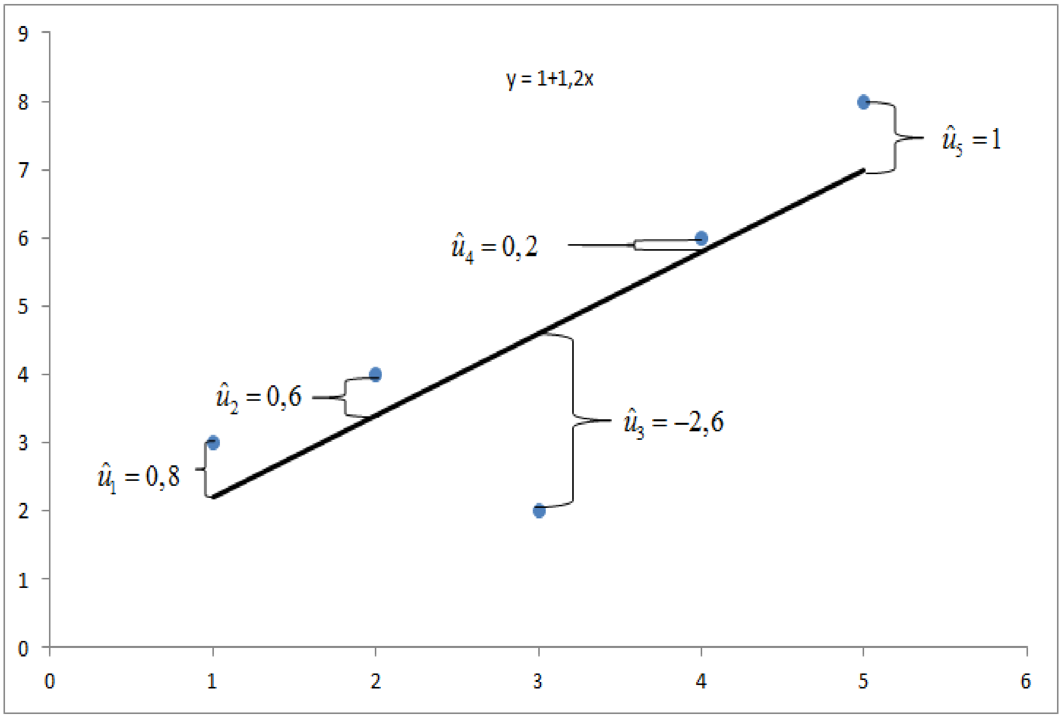
Örneğin 2. gözlem için kalıntı ($\hat{u}_2$) aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{u}_2 = Y_2 - \hat{Y}_2 = 4 - 3{,}4 = 0.6$$

Hesaplanan diğer sonuçlar aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Y	***X***	X^2	XY	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i$	$\hat{u}_i^2$
3	1	1	3	2.2	0.8	$(0.8)^2$
4	2	4	8	3.4	0.6	$(0.6)^2$
2	3	9	6	4.6	-2.6	$(-2.6)^2$
6	4	16	24	5.8	0.2	$(0.2)^2$
8	5	25	40	7.0	1	$(1)^2$
$\sum Y_i =$ 23	$\sum X_i =$ 15	$\sum X_i^2 =$ 55	$\sum Y_i X_i =$ 81	$\sum \hat{Y}_i =$ 23	$\sum \hat{u}_i =$ 0	$\sum \hat{u}_i^2 =$ 8.8

i=1,…,5'e kadar hesaplanan kalıntı kareler toplamının ($\sum \hat{u}_i$) sıfıra eşittir $\sum \hat{u}_i = 0$. Tablodan görüldüğü üzere kalıntı kareler toplamı ($\sum \hat{u}_i^2$) , 8.8'e eşittir, $\sum \hat{u}_i^2 = 8.8$.



Şekil-: Serpilme diyagramı, örnek regresyon doğrusu, kalıntılar

Yukarıdaki şekilde görüldüğü üzere EKK örnek regresyon doğrusu gözlemlenen değerlerin arasından geçmektedir.

Uygulama 2: Gelir İle Tüketim Harcamaları

60 ailenin haftalık tüketim rakamları ve haftalık harcanabilir gelirlerine ilişkin hipotetik verilerin yer aldığı ana kütleden "Örnek 1" ve "Örnek 2" olmak üzere iki örnek çekildiğini hatırlayalım.

60 ailenin haftalık tüketim rakamları ile haftalık harcanabilir gelirler verilerinden hesaplanan ana kütle regresyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$E(Y \mid X_i) = 17 + 0.6X_i$$

Örnek 1 ve Örnek 2 verileri aşağıda verilmiştir. Bu uygulamada her iki örnek verileri için örnek regresyon fonksiyonu tahmin edilecektir. Not: İşlemlerle basitlik olması amacıyla ara sonuçlar verilmiştir. Okuyucu verilen ara sonuçları Uygulama 1'de izlenen yolu uygulayarak hesaplayabilir.

ÖRNEK 1	
Y	X
65	80
80	100
79	120
113	140
125	160
115	180
144	200
157	220
155	240
178	260

ÖRNEK 2	
Y	X
55	80
74	100
90	120
103	140
107	160
135	180
144	200
160	220
189	240
150	260

Örnek 1

Örnek 1 için hesaplanan ara sonuçlar aşağıdaki gibidir.

n=10 $\sum Y = 1211$ $\sum X_i = 1700$ $\sum X_i^2 = 322000$ $\sum Y_i X_i = 226020$ $\bar{X} = 170$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum YX & \sum X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y \sum X_i^2 - \sum Y_i X_i \sum X_i}{n \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$= \frac{(1211 \times 322000) - (226020 \times 1700)}{(10 \times 322000) - (1700)^2} = 17.29$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$= \frac{(10\times 226020)-(1700\times 1211)}{(10\times 322000)-(1700)^2} = 0.61$$

$$\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61 X_i$$

veya

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{226020-(10\times 170\times 121.1)}{322000-(10\times 170^2)} = 0.61$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 121.1-(0.61).170 = 17.29$$

$$\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61 X_i$$

Beklenildiği üzere En Küçük Kareler yönteminin her iki uygulama biçimi de aynı sonucu vermiştir.

Örnek 2

Örnek 2 için hesaplanan ara sonuçlar aşağıdaki gibidir.

n=10 $\sum Y = 1207$ $\sum X_i = 1700$ $\sum X_i^2 = 322000$ $\sum Y_i X_i = 226800$ $\bar{X} = 170$ $\bar{Y} = 120.7$

$$\hat{\beta}_0 = \frac{\begin{vmatrix} \sum Y & \sum X \\ \sum YX & \sum X^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{\sum Y \sum X_i^2 - \sum Y_i X_i \sum X_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}$$

$$= \frac{(1207\times 322000)-(226800\times 1700)}{(10\times 322000)-(1700)^2} = 9.37$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum Y_i X_i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix}} = \frac{n\sum Y_i X_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - (\sum X_i^2)^2}$$

$$= \frac{(10\times 226800)-(1700\times 1207)}{(10\times 322000)-(1700)^2} = 0.65$$

$$\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65 X_i$$

veya

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum X_i Y_i - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X_i^2 - n\bar{X}^2} = \frac{226800 - (10 \times 170 \times 120.7)}{322000 - (10 \times 170^2)} = 0,65$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} = 120,7 - (0,65).170 = 9,37$$

$$\hat{Y}_i = 9,37 + 0,65 X_i$$

Böylece aynı ana kütleden çekilen iki farklı örneğe ait örnek regresyon fonksiyonların ve regresyon doğrularının farklı olduğu görülmüştür.

En küçük kareler tahminleri, incelenen iktisadi model bağlamında yorumlanır. Haftalık harcanabilir gelir ile tüketim harcamaları arasındaki ilişkinin araştırıldığı Örnek 1 verilerinden tahmin edilen regresyon doğrusuna ($\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61 X_i$) göre $\hat{\beta}_1 = 0.65$ değeri, β_1’nin tahminidir. Haftalık harcanabilir gelir 100 lira birimi cinsinden ölçülmektedir. Matematiksel olarak regresyon doğrusunun eğimini veren β_1, haftalık harcanabilir gelir 100 lira arttığında, haftalık beklenen tüketim harcamasının artış miktarıdır. Böylece haftalık gelir 100 lira arttığında, haftalık gıda harcaması 0.61 lira artacağını tahmin edebiliriz. Tüketim modelinde, gelirdeki 1 birimlik değişmenin tüketimi ne kadar değiştireceğini gösteren β_1 parametresi *marjinal tüketim meyli*’ni verir. Böylece $\hat{\beta}_1 = 0.65$ değeri iktisadi açıdan, örnek 1 verilerden ana kütle marjinal tüketim meylinin tahminini verir. (*Not*: Ana kütle marjinal tüketim meyli Örnek 2 verilerinden 0.65 tahmin edilmiştir.)

Regresyon doğrusunun Y eksenini kesim noktası sabit parametre, $\hat{\beta}_0 = 17.29$, sıfır gelire sahip bir hane halkı için haftalık gıda harcamasının tahminidir. Tahmin edilen modele gör sıfır gelire sahip bir hane halkının haftalık 17.29 lira harcama yapacağını ortaya koymasına karşın, bu tahmini her zaman kullanmak mümkün değildir. β_0’ın bu yorumu X’in 0 etrafında veri bulmasına bağlıdır ki; biz Örnek 1’de X=0 ‘a yakın herhangi bir veri noktasına sahip değiliz.

Uygulama 3.

Gözlem(Hanehalkı) i	**Gıda harcaması (dolar)** Y_i	**Haftalık gelir (100 dolar)** X_i
1	115,22	3,69
2	135,99	4,39
⋮	⋮	⋮

39	257,95	29,40
40	375,73	33,40
	Özet İstatistikler	
Örnek Ortalaması	283,5735	19,6048
Medyan	264,4800	20,0300
Maksimum	587,6600	33,4000
Minimum	109,7100	3,6900
Standart sapma	112,6752	6,8478

$$\sum x_i y_i = 18671,2684 \qquad \sum x_i^2 = 1828,7876$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{18671,2684}{1828,7876} = 10,2096$$

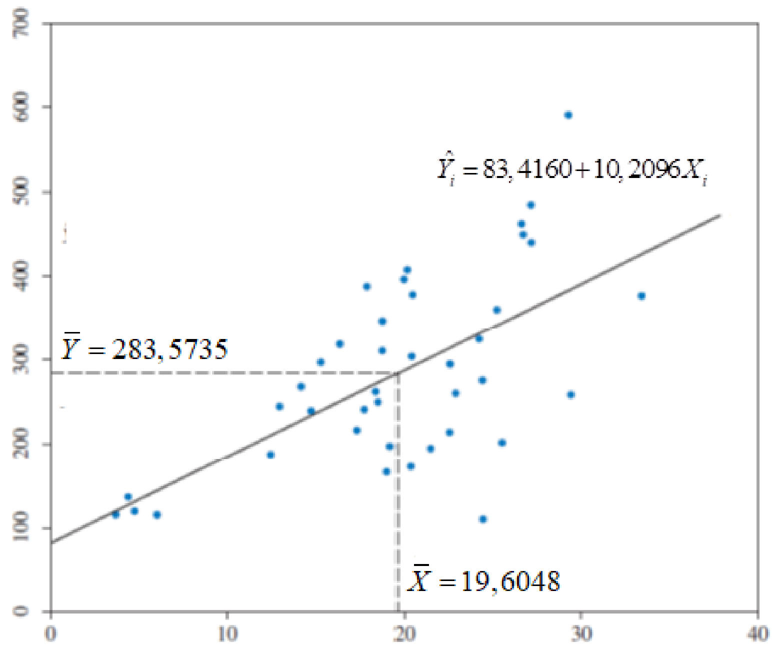
$$(\overline{X}, \overline{Y}) = (19,6048\,;\,283,5735)$$

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1 \overline{X} = 283,5735 - (10,2096) \times 19,6048 = 83,4160$$

$$\hat{Y}_i = 83,4160 + 10,2096 X_i$$

Regresyon eğimi β_1, hane halkı haftalık geliri 100$ olarak arttığında, hane halkı başına haftalık beklenen gıda harcamasının artış miktardır. Böylece, haftalık hane halkı geliri, 100$ arttığında, haftalık beklenen gıda harcamasının yaklaşık 10,21$ artacağını tahmin ederiz. Bir bölgedeki hane halkı sayısı ve gelirindeki olası değişimler üzerine bilgiye sahip bir süper markete yöneticisi, gelirdeki her 100$'lık artış için tipik bir hane halkına haftalık 10.21$ daha fazla satacağını tahmşn edebilir. Bu, uzun dönem planlama için çok değerli bir bilgidir.

Açıkçası, kesim noktası tahmini $\hat{\beta}_0 = 83,4160$ sıfır gelire sahip bir hane halkı için haftalık gıda harcaması tahminidir. Çoğu iktisadi modelde, tahmin edilen kesim noktasını yorumlarken çok dikkatli olmalıyız. Sorun şu ki, genelde *X*= 0'a yakın herhangi bir veri noktasına sahip değilizdir -ki bu aşağıdaki şekilde gösterilen gıda harcaması için doğru olan birşeydir. Gelirin sıfır olduğu bölgedeki gözlemlere sahip değilsek, bu durumda, tahmin ettiğimiz ilişki, bu bölgede gerçeğe iyi bir yakınlaştırma olmayabilir. Böylece, tahmin ettiğimiz model, sıfır gelire sahip bir hane halkının, haftalık 83.42$ gıda harcaması yapacağını ortaya koymasına karşın, bu tahmini motomot kullanmamız riskli olabilir. Bu, tahmin ettiğiniz her bir ekonomik modelde göz önüne almanız gereken bir husustur.



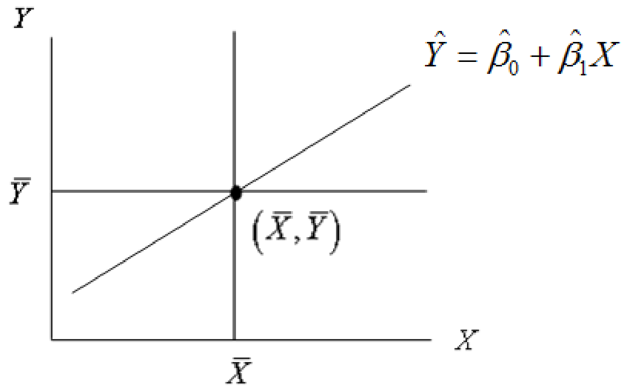
En Küçük Kareler Yönteminin Özellikleri

En Küçük Kareler yönteminin özellikleri aşağıdaki gibi sıralanabilir.

1. En Küçük Kareler tahmin edicileri ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) X ve Y değişkenlerin gözlenen değerleri ile hesaplanabilir.

2. EKK tahmin edicileri nokta tahminlerdir. Örnek veriyken, örnekten tahmin edilen parametre, ana kütledeki karşılığı için tek bir nokta tahmini verir.

3. Regresyon doğrusu $A(\bar{X}, \bar{Y})$ noktasından geçer.



Şekil: Örneklem regresyon doğrusunun gösterimi

4. Bağımlı değişkenin tahmini değerlerinin ortalaması ($\bar{\hat{Y}}$), gözlemlenen değerlerinin ortalamasına ($\bar{Y}$) eşittir, $\bar{\hat{Y}} = \bar{Y}$.

İspat

Örnek regresyon fonksiyonunda $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$, $\hat{\beta}_0$ yerine eşiti olan $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$ yazılır.

$$\hat{Y}_i = (\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}) + \hat{\beta}_1 X = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})$$

i. gözlem için verilen bu eşitlik, $i = 1,2\ldots\ldots n$'e kadar tüm gözlemler için eşitliğin her iki tarafının toplamı alındığında;

$$\sum \hat{Y}_i = \sum [\bar{Y} - \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X})] = n\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \sum x_i$$

sonucuna ulaşılır. $\Sigma(X_i - \bar{X}) = \sum x_i = 0$ olduğundan

$$\sum \hat{Y}_i = n\bar{Y}$$

ulaşılır. Eşitliğin her iki taraf gözlem sayısı n ile bölünürse;

$$\sum \hat{Y}_i \big/ n = n\bar{Y} \big/ n$$

$$\bar{\hat{Y}}_i = \bar{Y}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu özellik modelde sabit parametre de olduğu sürece geçerlidir.

5. Kalıntıların toplamı diğer bir ifade ile ortalaması sıfıra eşittir. Bu özellik de yine modelde sabit parametre varsa geçerlidir.

$$\sum \hat{u}_i = \sum (Y_i - \hat{Y}_i) = 0 \qquad , \qquad \bar{\hat{u}} = 0$$

Bu özellik EKK yönteminin $\Sigma \hat{u}_i^2$'nın minimum olması varsayımına dayanmaktadır.

İspat

Kalıntıların karelerinin toplamı fonksiyonunda $\hat{\beta}_1$'e göre birinci mertebeden kısmi türevi alınarak $\sum \hat{u}_i = 0$ olduğu gösterilebilir:

$$\Sigma \hat{u}_i^2 = \sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)^2$$

$$\frac{\partial \Sigma \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = \sum 2(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-1) = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = -2\sum (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i) = 0$$

Eşitliğin her iki tarafı (-2)'ye bölünür.

$$= \sum \left[Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X \right] = 0$$

$$= \sum \left[Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X) \right] = 0$$

$$= \sum \left(Y_i - \hat{Y}_i \right) = 0$$

$$= \sum \hat{u}_i = 0$$

Eşitliğin her iki yanı n'e bölündüğünde,

$$\sum \hat{u}_i / n = 0 / n \quad \text{'den}$$

$\bar{\hat{u}} = 0$ olacaktır.

Bu özellik ile örnek regresyon modeli, sadece gözlemlenen X_i ve Y_i değerleriyle değil, X ve Y'nin ortalama değerlerinden sapmaları biçiminde de yazılabilmektedir.

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_i \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

İspat

Bağımlı değişkenin gözlemlenen değerini $Y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i$ ile ifade etmiştik. Tek bir gözlem için yazılmış bu denklem i=1,2……n için tüm gözlemler için yazılıp, her iki tarafın toplamı alınırsa,

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i + \sum \hat{u}_i$$

sonucuna ulaşılır. Burada $\sum \hat{u}_i = 0$ olduğu için, denklem

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_i$$

şekline indirgenir. Her iki taraf gözlem sayısı n'e bölünürse

($\sum Y_i / n = \bar{Y}$, $\sum X_i / n = \bar{X}$ eşitliklerinden)

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

elde edelir. Sonraki aşamada $Y_i - \bar{Y}$ oluşturulur.

$$\begin{aligned} Y_i - \bar{Y} &= (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i + \hat{u}_i) - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}) \\ &= \hat{\beta}_1 (X_i - \bar{X}) + \hat{u}_i \\ y_i &= \hat{\beta}_1 x_i + \hat{u}_i \end{aligned}$$

elde edilir. Yeni elde edilen ana regresyon modelinde X_i ve Y_i yerini kendi örneklem ortalamalarından sapmalarına $y_i (= Y_i - \bar{Y})$ ve $x_i (= X_i - \bar{X})$ bırakmıştır. Bundan dolayı regresyon modelinin *sapmalı kalıbı* olarak adlandırılır. Bu durumda örnek regresyon modeli,

$$y_i = \hat{\beta}_1 x_i + \hat{u}_i \qquad \hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_i \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

ile gösterilir ve

$$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i \quad \text{ve} \quad \hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

eşitlikleri geçerlidir.

6. Kalıntılar ile bağımsız değişkenler arasında bir ilişki yoktur, $\sum \hat{u}_i X_i = 0$.

İspat

Bu durum kalıntıların karelerinin toplamı fonksiyonunda $\hat{\beta}_1$'e göre birinci mertebeden kısmi türev alınarak gösterilebilir.

$$\frac{\partial \Sigma \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = \sum 2(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_i)(-X) = 0$$

$$= \sum \left[Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) \right](X_i) = 0 \qquad Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i) = u_i \text{ eşit olduğu için}$$

$$= \sum \hat{u}_i X_i = 0$$

7. Kalıntılar($\hat{u}_i$) ile bağımlı değişkenin tahmin edilen değerleri($\hat{Y}$) arasında ilişki yoktur, Bu özellik yukarıda elde edilen sapmalı kalıp yardımıyla açıklanabilir. $\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_i$

İspat

$$\sum \hat{y}_i \hat{u}_i = \sum (\hat{\beta}_1 x_i)\hat{u}_i$$

$$\sum \hat{y}_i \hat{u}_i = \hat{\beta}_1 \sum x_i \hat{u}_i \qquad \hat{y}_i = \hat{\beta}_1 \sum x_i \qquad \hat{u}_i = y_i - \hat{\beta}_1 x_i$$

$$= \hat{\beta}_1 \sum x_i (y_i - \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$= \hat{\beta}_1 \Sigma x_i y_i - \hat{\beta}_1^2 \Sigma x_i^2 \qquad \hat{\beta}_1 = \frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} \quad \text{eşitliğinden}$$

$$= \hat{\beta}_1 \Sigma x_i y_i - \left(\frac{\Sigma x_i y_i}{\Sigma x_i^2} \right)^2 \Sigma x_i^2$$

$$= \hat{\beta}_1 \Sigma x_i y_i - \hat{\beta}_1 \Sigma x_i y_i = 0$$

elde edilir.

Öngörü

Tahmin edilen denklem, öngörü veya geleceği tahmin amaçları için de kullanılabilir. Varsayalım ki, haftalık geliri 2,000$ olan bir hane halkı için haftalık gıda harcamasını öngörmek istedik. Bu öngörüyü yapmak için, *X*=20 tahmin edilen denklemde yerine konulur.

$$\hat{Y}_i = 83,4160 + 10,21(20) = 287,61$$

Haftalık geliri 2,000$ olan bir hane halkının, haftalık gıdaya yapacağı harcama 287.61$ olacağını öngörebiliriz.

Esneklik

İktisat derslerimizde talebin gelir esnekliği, talebin fiyat esnekliği, talebin gelir esneklikliği kavramlarını öğrendik. Örneğin talebin gelir esnekliği, gelirdeki değişimler karşısında tüketicinin tepkisini göstermektedir.

Doğrusal bir ilişkide *Y* değişkenin, *X* değişkenine göre esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varepsilon = \frac{Y\text{'deki yüzde değişim}}{X\text{'deki yüzde değişim}} = \frac{\Delta Y / Y}{\Delta X / X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{X}{Y}$$

$E\left(Y \middle| X = X_i\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ ile verilen doğrusal ekonomik modelde, β_1'i aşağıdaki gibi tanımlamıştık.

$$\beta_1 = \frac{\Delta E(Y)}{\Delta X}$$

Bu durumda, gelire göre ortalama harcama esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E(Y) / E(Y)}{\Delta X / X} = \frac{\Delta E(Y)}{\Delta X} \times \frac{X}{E(Y)} = \beta_1 \times \frac{X}{E(Y)}$$

Esnekliği hesaplamak için β_1 yerine, örnek verilerinden hesaplanan $\hat{\beta}_1$ gelir. Ayrıca "X" ve "$E(Y)$" de değiştirilmek zorundadır. Çünkü doğrusal bir modelde esneklik, regresyon doğrusu boyunca her bir noktada farklıdır. Çoğunlukla, esneklik "ortalamalar noktasından $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ hesaplanır, çünkü regresyon doğrusunda bu uygun bir temsil noktasıdır. Buna göre ortalamalar noktasında gelir esnekliği için aşağıdaki formül kullanılır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

Ortalamaya göre esneklik hesaplanabileceği gibi *X'in* belli bir değere eşit ($X = X_i$) olduğu nokta için de hesaplanabilir. Bu durumda $X = X_i$ olduğu noktada regresyon denkleminden $\hat{Y}_{X=X_i}$'nin hesaplanması gerekir.

$$\hat{Y}_{X=X_i} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \left(X_i\right)$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X_i}{\hat{Y}_{X=X_i}}$$

formulü ile hesaplanır.

Örnek: Satış gelirleri-Reklam harcamaları

Satış gelirleri ile reklam harcamaları uygulamasında örnek verilerinden aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştı.

$\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i \quad \bar{Y} = 4.6 \quad \bar{X} = 3$

Yukarıdaki sonuçlara göre, ilk olarak satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliğini hesaplayalım. X ve Y örnek ortalama değerler $(\bar{X}, \bar{Y}) = (3, 4.6)$ olduğuna göre satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 1.2 \times \frac{3}{4.6} = 0.78$$

$(\bar{X}, \bar{Y}) = (3, 4.6)$ alındığında, reklam harcamalarındaki %1'lik bir artış, satışlarda ortalama %0.78'lik bir artışa yol açar. Tahmin edilen reklam harcamaları esnekliği birden küçük olduğu için, satışların arttırılması için reklam harcamalarının zorunlu olduğu sonucunu çıkarmak mümkündür.

İkinci olarak X=5 olduğu noktada satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliğini hesaplayalım. X=5 ise $\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2(5) = 7$ 'dir. $(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (5, 7)$ noktasında satışların reklam harcamalarına göre esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = X_i}{\hat{Y}_{X=X_i}} = 1.2 \times \frac{5}{7} = 0,86$$

$(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (5, 7)$ noktasında birim esneklik söz konusudur. Reklam harcamalarındaki %1'lik bir artış, satışlarda %0,86'lik bir artışa yol açar.

Örnek: Tüketim Modeli

Örnek 1 verileri

$\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61X_i \qquad \bar{Y} = 121.1 \quad \bar{X} = 170$

Ortalamalar noktasında -$(\bar{X}, \bar{Y}) = (170, 121.1)$- gelir esnekliği aşağıdaki aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = 0.61 \times \frac{170}{121.1} = 0.86$$

X ve *Y* örnek ortalama değerlerini $(\overline{X},\overline{Y}) = (170,121.1)$ aldığında, hane halkı gelirindeki %1'lik bir artış, ortalama olarak hane halkı tüketim harcamasında %0.86'lık bir artışa yol açar. Tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, tüketim harcamaları "lüks" değil "zorunlu" dur -ki bu sonuç, ortalama bir hane halkı için beklentilerimizle ile tutarlıdır.

İkinci olarak *X*=160 olduğu noktada ortalama gelir esnekliğini hesaplayalım. X=160 ise $\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61(160) = 114.89$ 'dur. $(X_i,\hat{Y}_{x_i}) = (160,114,89)$ noktasında gelir esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = 160}{\hat{Y}_{X=160}} = 0.61 \times \frac{160}{114.89} = 0.85$$

Gelirin 160 olduğu noktada tüketimin gelir esnekliği 0.85'e eşittir. Diğer bir ifade ile gelir %1 artarsa, tüketim %0.85 artacaktır.

Örnek 2 verileri

$$\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65X_i \qquad \overline{Y} = 120.7 \quad \overline{X} = 170$$

Ortalamalar noktasında -$(\overline{X},\overline{Y}) = (170,120.7)$- gelir esnekliği aşağıdaki aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\overline{X}}{\overline{Y}} = 0.65 \times \frac{170}{120.7} = 0.92$$

X ve *Y* örnek ortalama değerlerini $(\overline{X},\overline{Y}) = (170,120.7)$ aldığında, hane halkı gelirindeki %1'lik bir artış, ortalama olarak hane halkı tüketim harcamasında %0.92'lık bir artışa yol açar. Bu örnek verilerinden de tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, tüketim harcamaları "lüks" değil "zorunlu" dur.

İkinci olarak *X*=220 olduğu noktada ortalama gelir esnekliğini hesaplayalım. X=220 ise $\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65(220) = 152.37$ 'dir. $(X_i,\hat{Y}_{x_i}) = (220,152.37)$ noktasında gelir esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = 220}{\hat{Y}_{X=220}} = 0.65 \times \frac{220}{152.37} = 0.94$$

$(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (220{,}152.37)$ noktasında hane halkı gelirindeki %1'lik bir artış, hane halkı tüketim harcamasında %0.94'lük bir artışa yol açar.

Örnek: Gıda Harcamaları

$\hat{Y}_i = 83{,}4160 + 10{,}21 X_i$ $\qquad (\bar{X}, \bar{Y}) = (19{,}6048\,;\,283{,}5735)$

X_i ve Y_i'nin örnek ortalama değerleri $(\bar{X}, \bar{Y}) = (19{,}6048\,;\,283{,}5735)$ aldığında, haftalık hane halkı gelirindeki %1'lik bir artış, ortalama olarak haftalık hane halkı gıda harcamasında %0.71'lik bir artışa yol açar. Tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, gıda "lüks" değil "zorunlu" maldır.