LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Peter Philip,
Paula Reichert, Lukas Emmert

Sommersemester 2024

Analysis 2 (Statistik)
Hausaufgabenblatt 3

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Sei X der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Folgen in $\mathbb{K}$, die schließlich konstant Null sind (siehe Beispiel 1.33b) im Skript), mit $||x|| := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$ für $x = (x_1, x_2, ...)$. Betrachten Sie die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{für } 1 \leq n < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass (x^k) eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeigen Sie, dass (x^k) nicht in $(X, ||\cdot||)$ konvergiert. Damit haben wir einen normierten Vektorraum gefunden, der kein Banachraum ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Gegeben sei ein normierter Raum X. Bestimmen Sie jeweils

(a) das Innere von A;

(b) den Abschluss von A;

(c) den Rand von A;

(d) die Menge der Häufungspunkte von A;

(e) die Menge der isolierten Punkte von A

für die folgenden Mengen:

(i) $X = \mathbb{R}$ mit $||x - y|| := |x - y|$ und

$$A = \{-2\} \cup]0, 1] \cup \{2 + 1/k, k \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) $X = \mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Norm und

$$A = B_1\big((0, 1)\big) \cup \{(t, 0), t \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) $X = B(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist beschränkt}\}$ mit

$$||f|| := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \quad \forall f \in B(\mathbb{R})$$

und A der Menge aller konstanten Funktionen.

Beweisen Sie Ihre Antworten zu iii). Für i) und ii) reicht es, die Resultate ohne Begründung anzugeben.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

(a) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\} \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x,y) := \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

Wie können wir f auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ definieren, so dass f überall stetig ist?

(b) Es sei $g : R^2 \setminus \{(0,0)\}$ definiert als

$$g(x,y) := \frac{\sin x \sin y^2}{1 - \cos(x^2 + y^2)}.$$

Kann g an der Stelle $(0,0)$ so definiert werden, dass g in $(0,0)$ stetig ist?

Abgabe bis Montag, 13.05.24, 12 Uhr auf Moodle als ein pdf-Dokument.