İ STATİ STİ K

Olağ an Olası lı k
dağ ı tı mlar

Bölüm Anahattı

• 5.1 Normal Dağ ı lı mlara Giriş ve
Standart Normal Dağ ı lı m

• 5.2 Normal Dağ ı lı mlar: Olası lı kları Bulma • 5.3

Normal Dağ ı lı mlar: Değ erleri Bulma • 5.4

Örnekleme Dağ ı lı mları ve Merkezi Limit
teorem

• 5.5 Binom Dağ ı lı mları na Normal Yaklaş ı mlar

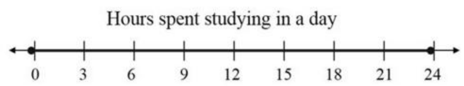
Bölüm 5.1

Normal Dağ ı lı mlara Giriş ve
Standart Normal Dağ ı lı mlar

Normal Dağ ı lı mı n Özellikleri (1/4)

Sürekli rastgele değ iş ken

• Sayı satı rı nda bir aralı kla temsil edilebilecek sonsuz sayı da olası değ ere sahiptir.



Ders çalı ş mak için harcanan zaman 0 ile 24 arası nda herhangi bir sayı olabilir.

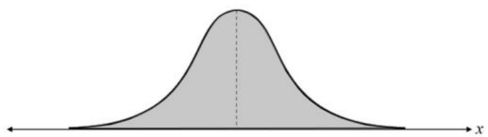
Sürekli olası lı k dağ ı lı mı

• Sürekli rastgele olası lı k dağ ı lı mı
değ iş ken.

Normal Dağılımın Özellikleri (2/4)

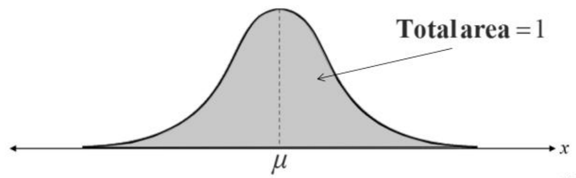
Normal dağılım

- Rastgele bir değişken olan x için sürekli bir olasılık dağılımı.
- İstatistikteki en önemli sürekli olasılık dağılımı.
- Normal dağılımın grafiğine normal eğri denir.



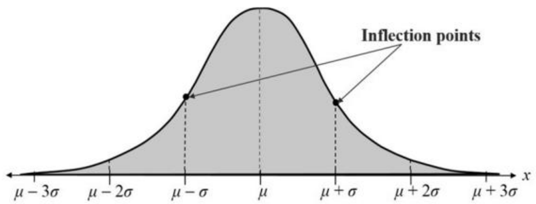
Normal Dağılımın Özellikleri (3/4)

1. Ortalama, medyan ve mod eşittir.
2. Normal eğri çan şeklindedir ve simetriktir ortalama hakkında.
3. Normal eğrinin altındaki toplam alan bire eşittir.
4. Normal eğri x eksenine yaklaşır, ancak eksenden gittikçe uzaklaştıkça x eksenine asla dokunmaz. Anlam.



Normal Dağılımın Özellikleri (4/4)

5. Grafik, $\mu-\sigma$ ve $\mu+\sigma$ (eğrinin ortasında) arasında aşağı doğru kıvrılır. Eğrinin yukarı doğru kıvrılmadan aşağı doğru kıvrılmaya geçtiği noktalara bükülme noktaları $\mu-\sigma$ $\mu+\sigma$. denir .



Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (PDF)

- Ayrık bir olasılık dağılımının grafiği çizilebilir bir histogram ile.
- Sürekli bir olasılık dağılımı için bir olasılık yoğunluk fonksiyonu (pdf) kullanabilirsiniz .
- Bir olasılık yoğunluk fonksiyonunun iki gereksinimi

  vardır: 1. eğrinin altındaki toplam alan 1 2'ye eşittir.

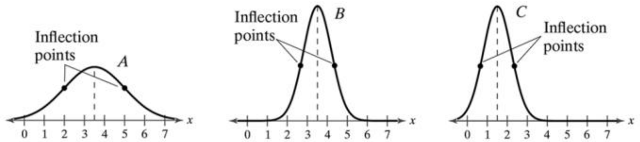
  fonksiyon asla negatif olamaz.

Ortalamalar ve Standart Sapmalar

• Bir normal dağ ı lı m herhangi bir ortalamaya sahip olabilir ve herhangi bir ortalamaya sahip olabilir.
pozitif standart sapma.

• Ortalama, simetri çizgisinin yerini verir. • Standart sapma,

hastalı ğ ı n yayı lması nı tanı mlar.
veri.



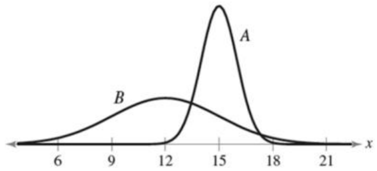
Anlam: $\mu = 3.5$ Standart sapma: $\sigma = 1.5$

Anlam: $\mu = 3.5$ Standart sapma: $\sigma = 0.7$

Anlam: $\mu = 1.5$ Standart sapma: $\sigma = 0.7$

Örnek: Ortalamayı Anlamak ve Standart Sapma (2'de 1)

1. Hangi eğ ri daha büyük ortalamaya sahiptir?

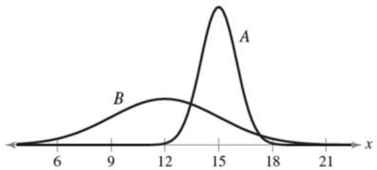


Çözüm:

Eğ ri A daha büyük ortalamaya sahiptir (A eğ risinin simetri doğ rusu . Simetri doğ rusu $x = 15$ noktası nda oluş ur. B eğ risi B noktası nda oluş ur $x = 12$

Örnek: Ortalamayı Anlamak ve Standart Sapma (2/2)

2. Hangi eğ ri daha büyük standart sapmaya sahiptir?



Çözüm: B

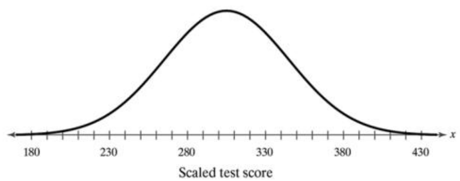
Eğ risi daha büyük standart sapmaya sahiptir (B Eğ risi, A Eğ risinden daha fazla yayı lmı ş tı r.)

Örnek: Grafikleri Yorumlama Normal Dağ ı lı mlar

New York Eyaleti 4. Sı nı f Ortak Çekirdek Matematik Testi için ölçeklendirilmiş test puanları normal olarak dağ ı tı lı r. Aş ağ ı da gösterilen normal eğ ri bu dağ ı lı mı temsil etmektedir. Ortalama test puanı nedir? Bu normal dağ ı lı mı n standart sapması nı tahmin edin.

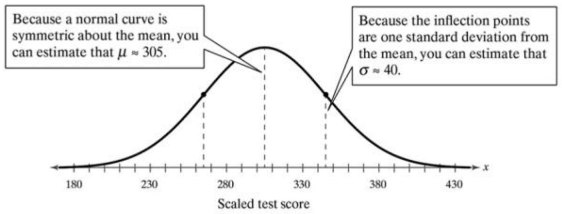
(New York Eyaleti Eğ itim Departmanı ndan uyarlanmı ş tı r)

Matematik Testi



Çözüm: Grafikleri Yorumlama Normal Dağ ı lı mlar (1/2)

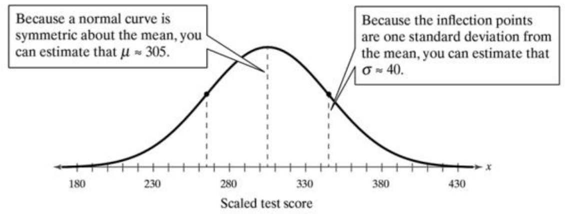
Çözüm:



New York Eyaleti 4. Sı nı f Ortak Çekirdek Matematik Testi için ölçeklendirilmiş test puanları , yaklaş ı k 305 ortalama ve yaklaş ı k 40 standart sapma ile normal olarak dağ ı tı lı r.

Çözüm: Grafikleri Yorumlama Normal Dağ ı lı mlar (2/2)

Çözüm:

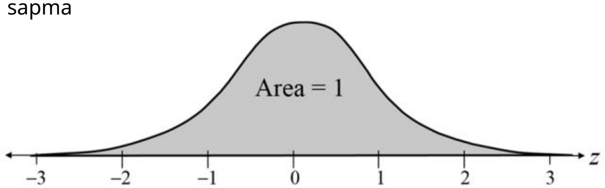


Deneysel'i kullanarak yaklaş ı k puanları n 265 ile 68% 345 arası nda, yaklaş ı k puanları n 225 ile 385 95% arası nda arası nda ve yaklaş ı k puanları n 185 ile 425 99.7% arası nda olduğ unu bilirsiniz.

Standart Normal Dağ ı lı m (1/2)

standart normal dağ ı lı m

- Ortalaması 0 ve standardı olan bir normal dağ ı lı m 1 sapma

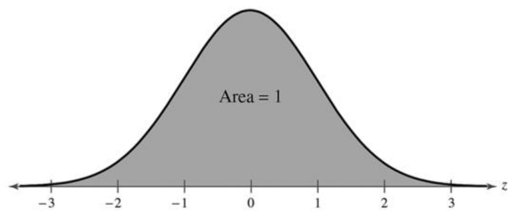


- Herhangi bir x değ eri ş u ş ekilde bir z puanı na dönüş türülebilir: formülü kullanarak

$$z = \frac{\text{Value} - \text{Mean}}{\text{Standard deviation}} = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

Standart Normal Dağ ı lı m (2/2)

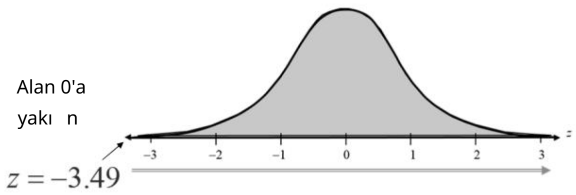
Standart normal dağ ı lı m, ortalaması 0 ve standart sapması 1 olan bir normal dağ ı lı mdı r. Normal eğ risinin altı ndaki toplam alan 1'dir.



Standart Normal Dağ ı lı m

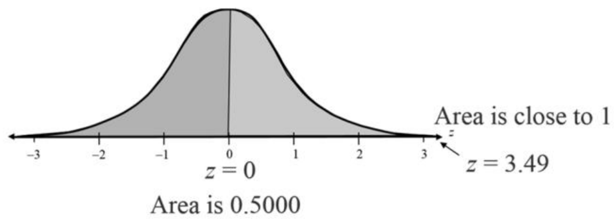
Standart Normalin Özellikleri Dağ ı tı m (1/2)

1. z-skorları için kümülatif alan 0'a yakı n ile $z = -3.49$.
2. Kümülatif alan, z-skorları arttı kça artar.



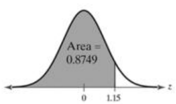
Standart Normalin Özellikleri Dağ ı tı m (2/2)

3. için kümülatif alan $z = 0$ 0,5000'dir.
4. z-skorları için kümülatif alan 1'e yakı n ile $z = 3.49$.



Örnek: Standart Normal'i Kullanma Tablo (1/2)

1. Az puanı 1.15'e karş ı lı k gelen kümülatif alanı bulun.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279

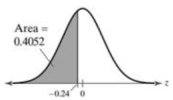
Çözüm: Sol sütunda 1.1'i bulun.

Satı r boyunca 0,05'in altı ndaki sütuna gidin, 0,8749'dur.

Soldaki alan $z = 1.15$

Örnek: Standart Normal'i Kullanma Tablo (2/2)

2. az'a karş ı lı k gelen kümülatif alanı bulun puanı -0.24.



z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03
−3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
−3.3	.0003	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004
−3.2	.0005	.0005	.0005	.0006	.0006	.0006	.0006
−0.5	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981
−0.4	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336
−0.3	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707
−0.2	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090
−0.1	.4247	.4286	.4325	.4364	.4404	.4443	.4483
−0.0	.4641	.4681	.4721	.4761	.4801	.4840	.4880

Çözüm: Sol taraftaki -0.2 sütunda bulun.

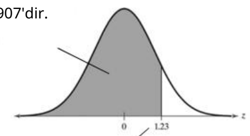
Satı r boyunca 0,04'ün altı ndaki sütuna gidin.

Soldaki alan $z = -0.24$ 0,4052'dir.

Standardı   n Altı   nda Alan Bulma Normal Eğ ri (3'te 1)

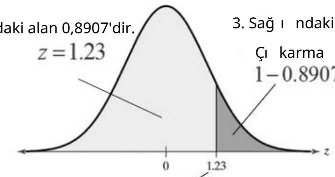
1. Standart normal eğ riyi çizin ve eğ rinin altı   ndaki uygun alan.
2. Gösterilen her durum için yönergeleri izleyerek alanı   bulun.

A. z'nin solundaki alanı   bulmak için, Standart Normal Tabloda z'ye karş ı   lı   k gelen alanı   bulun.



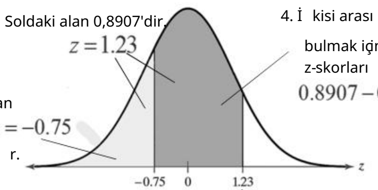
Standardı   n Altı   nda Alan Bulma Normal Eğ ri (2/3)

B. z'nin sağ ı   ndaki alanı   bulmak için, z'ye karş ı   lı   k gelen alanı   bulmak için Standart Normal Tablosunu kullanı   n. Ardı   ndan alanı   1'den ç   karı   n.



Standardı   n Altı   nda Alan Bulma Normal Eğ ri (3/3)

C. İ   ki z puanı   arası   ndaki alanı   bulmak için, Standart Normal Tablosunda her bir z puanı   na karş ı   lı   k gelen alanı   bulun. Daha sonra küçük alanı   büyük alandan ç   karı   n.

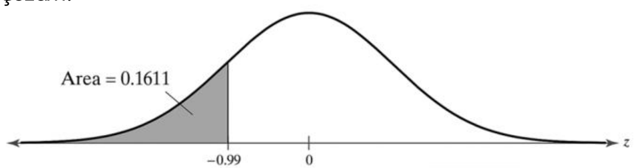


Örnek: Altı   nda Alan Bulma Standart Normal Eğ ri (3'te 1)

Soldaki standart normal eğ rinin altı   ndaki alanı   bulun.

$z = -0.99.$

Çözüm:



Standart Normal Tablodan, alan 0,1611'e eş ittir.

EXCEL

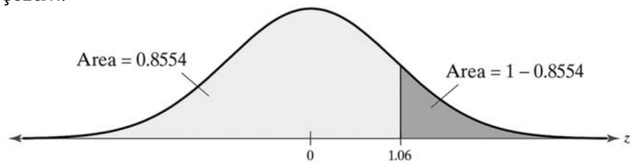
	A	B
1	NORM.S.DIST(-0.99,TRUE)	
2		0.16108706

Örnek: Altı nda Alan Bulma Standart Normal Eğ ri (2/3)

Sağ daki standart normal eğ rinin altı ndaki alanı bulun.

$z = 1.06.$

Çözüm:



Standart Normal Tablodan, alan 0,1446'ya eş ittir.

EXCEL

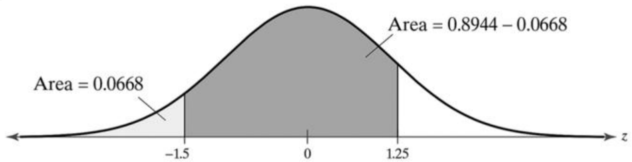
	A	B
1	1-NORM.S.DIST(1.06,TRUE)	
2		0.1445723

Örnek: Altı nda Alan Bulma Standart Normal Eğ ri (3/3)

arası ndaki standart normal eğ ri altı ndaki alanı bulun.

$z = -1.5$ Ve $z = 1.25$.

Çözüm:



Standart Normal Tablodan, alan 0,8276'ya eş ittir.

Böylece, eğ rinin altı ndaki alan ve arası nda düş er 82.76%

$z = -1.5$

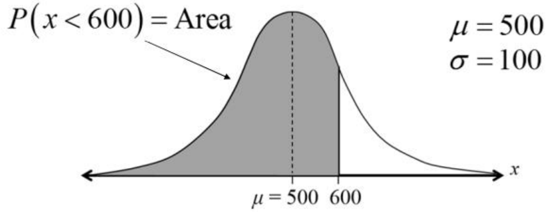
$z = 1.25.$

Bölüm 5.2

Normal Dağ ı lı mlar: Olası lı kları Bulma

Olası lı k ve Normal Dağ ı lı mlar (1/2) • Bir x rastgele

değ iş keni normal dağ ı lı m gösteriyorsa, x'in belirli bir aralı kta düş me olası lı ğ ı nı o aralı k için normal eğ rinin altı ndaki alanı hesaplayarak bulabilirsiniz.

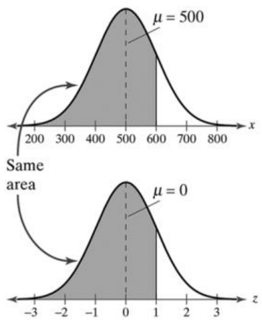


Olası lı k ve Normal Dağ ı lı mlar (2/2)

- (sağ üst) ile normal bir eğ ri düş ünün. $\mu = 500$ Ve $\sigma = 100$. Ortalamanı n üzerinde x bir standart sapma değ eri

$$\mu + \sigma = 500 + 100 = 600.$$

- Ş imdi standardı normal kabul edin eğ ri (sağ alt).
- Ortalamanı n bir standart sapma üzerindeki z değ eri, $\mu + \sigma = 0 + 1 = 1$.
- 1'lik z-skoru, 600'lük bir x-değ erine karş ı lı k gelir ve alanlar standart bir normal eğ riye dönüş türülerek değ iş mez, sağ daki taralı alanlar eş ittir.



Örnek: Normal Dağ ı lı mlar İ çin Olası lı kları Bulma (1/2)

Ulusal bir araş tı rma, iş i olan üniversite öğ rencilerinin haftada ortalama 22 saat çalı ş tı ğ ı nı buldu. Standart sapma 9 saattir. İ ş i olan bir üniversite öğ rencisi rastgele seçilir. Öğ rencinin haftada 4 saatten az çalı ş ma olası lı ğ ı nı bulunuz.

Üniversite öğ rencilerinin çalı ş ma sürelerinin normal olarak dağ ı ldı ğ ı nı ve x değ iş keni ile temsil edildiğ ini varsayalı m.

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Normal Dağ ı lı mlar (1/3)

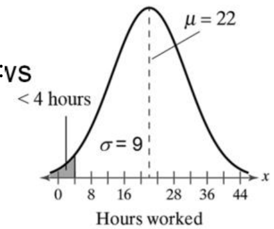
Çözüm

- 4 saate karş ı lı k gelen z-skoru:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{4 - 22}{9} = -2 \,.$$

- Standart Normal Tablo ş unları gösterir: VS
O $P(z < -2) = 0.0228$.
- Öğ rencinin haftada 4 saatten az çalı ş ma olası lı ğ ı 0,0228'dir. İ ş i olan

2.28% üniversite öğ rencilerinin oranı , haftada 4 saatten az So için çalı ş tı . Çünkü bundan daha az 2.28% olması 5%, olağ andı ş ı bir olaydı r.



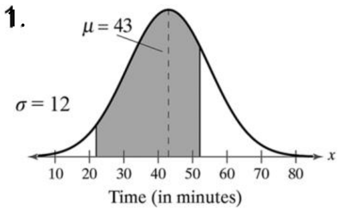
Örnek: Normal Dağ ı lı mlar İ çin Olası lı kları Bulma (2/2)

Bir anket, bir süpermarkete yapı lan her yolculuk için, bir müş terinin mağ azada 12 dakikalı k standart sapma ile ortalama 43 dakika harcadı ğ ı nı gösteriyor. Mağ azada geçirilen süre normal olarak dağ ı tı lı r ve x değ iş keni ile temsil edilir. Bir müş teri mağ azaya girer. a) Müş terinin aş ağ ı da listelenen her bir zaman aralı ğ ı nda mağ azada olma olası lı ğ ı nı bulunuz. b)Mağ azaya 200 müş teri girdiğ inde, aş ağ ı da listelenen her zaman aralı ğ ı nda kaç kiş inin mağ azada olması nı beklersiniz?

1. 22 ile 52 dakika arası
2. 37 dakikadan fazla

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Normal Dağ ı lı mlar (2/3)

1.



A) $z_1 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{22-43}{12} = -1.75$

$z_2 = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{52-43}{12} = 0.75$

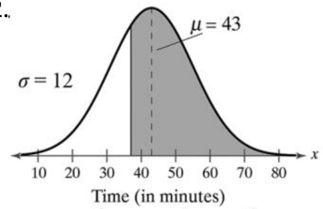
$$P(22 < x < 52) = P(-1.75 < z < 0.75)$$
$$= 0.7734 - 0.0401 = 0.7333$$

b) Mağ azaya 200 müş teri girdiğ inde, müş terilerin mağ azada 22 ile 52 dakika arası nda olması nı beklersiniz.

$$200(0.7333) = 146.66 \approx 147$$

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Normal Dağ ı lı mlar (3/3)

2.



A) $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma} = \dfrac{37-43}{12} = -0.5$

$$P(x > 37) = P(z > -0.5) = 1 - 0.3085 = 0.6915$$

b) Mağ azaya 200 müş teri girdiğ inde, müş terilerin mağ azada 37 dakikadan fazla kalması nı beklersiniz.

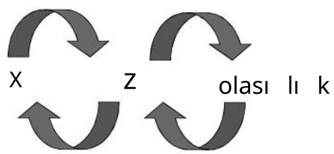
$$200(0.6915) = 138.3 \approx 138$$

Bölüm 5.3

Normal Dağ ı lı mlar: Değ erleri Bulma

Olası lı k Verilen değ erleri bulma

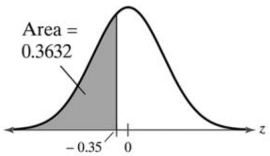
- Önceki bir bölümde bize normal olarak verildi x dağ ı tı lmı ş rasgele değ iş ken ve bizden bir olası lı k bulmamı z istendi.
- Bu bölümde bize bir olası lı k verilecek ve x rastgele değ iş keninin değ erini bulmamı z istenecek.



Örnek: Verilen bir z-Puanı nı bulma Alan (1/2)

1. Kümülatif değ ere karş ı lı k gelen z-skorunu bulun. 0.3632 alanı .

Çözüm:



Çözüm: Verilen bir z-Puanı nı bulma Alan (1/2)

- Standart Normal'in gövdesinde 0,3632'yi bulun Masa.

z	.09	.08	.07	.06	.05	.04	.03
−3.4	.0002	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003
−0.5	.2776	.2810	.2843	.2877	.2912	.2946	.2981
−0.4	.3121	.3156	.3192	.3228	.3264	.3300	.3336
−0.3	.3483	.3520	.3557	.3594	.3632	.3669	.3707
−0.2	.3859	.3897	.3936	.3974	.4013	.4052	.4090

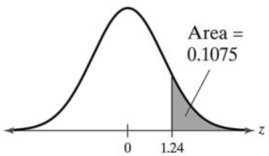
- Karş ı lı k gelen satı rı n baş ı ndaki ve sütunun üstündeki değ erler z-skorunu verir.

z puanı -0.35.

Örnek: Verilen bir z-Puanı nı bulma Alan (2/2)

2. Sağ ı nda alanı olan z-skorunu 10.75% dağ ı tı mı n bulun.

Çözüm:



Sağ daki alan 0,1075 olduğ undan, kümülatif alan

$$1-0.1075=0.8925.$$

Çözüm: Verilen bir z-Puanı nı bulma Alan (2/2)

- Standart Normal'in gövdesinde 0,8925'i bulun Masa.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131

- Karş ı lı k gelen satı rı n baş ı ndaki ve sütunun üstündeki değ erler z-skorunu verir.

z-skoru 1.24'tür.

z-Puanı nı x-Değ erine Dönüş türme

Belirli bir popülasyonda standart bir z-skorunu x veri değ erine dönüş türmek için aş ağ ı daki formülü kullanı n

$$x = \mu + z\sigma$$

Örnek: Bir x-Değ eri Bulma Bir z puanı na karş ı lı k gelen (1/2)

Bir veteriner klinikte tedavi edilen kedilerin ağ ı rlı kları nı kaydeder. Ağ ı rlı klar, ortalama 9 pound ve 2 pound standart sapma ile normal olarak dağ ı tı lı r. Her bir z puanı na karş ı lı k gelen x ağ ı rlı kları nı bulun. Sonuçları yorumlayı n. 1. 2.

$z = 1.96$ $z = -0.44$ 3. $z = 0$.

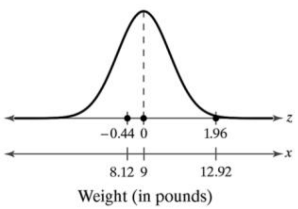
Çözüm: Formülü kullanı n $x = \mu + z\sigma$

1. $z = 1.96$: $x = 9 + 1.96(2) = 12.92$ pounds
2. $z = -0.44$: $x = 9 + (-0.44)(2) = 8.12$ pounds
3. $z = 0$: $x = 9 + 1.96(0) = 9$ pounds

Örnek: Bir x-Değ eri Bulma Bir z puanı na karş ı lı k gelen (2/2)

Çözüm:

Ş ekilden, 12,92 pound'un ortalamanı n sağ ı nda, 8,12 pound'un ortalamanı n solunda ve 9 pound'un ortalamaya eş it olduğ unu görebilirsiniz.

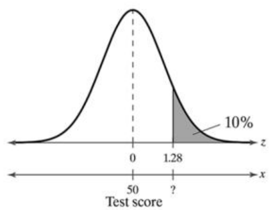


Örnek: Belirli Bir Veriyi Bulma Belirli Bir Olası lı k için Değ er

Kaliforniya Barı ş Görevlisi Standartları ve Eğ itimi testi puanları , ortalama 50 ve standart sapma 10 olacak ş ekilde normal olarak dağ ı tı lı r . Ajans?

10% . Nedir

Çözüm:

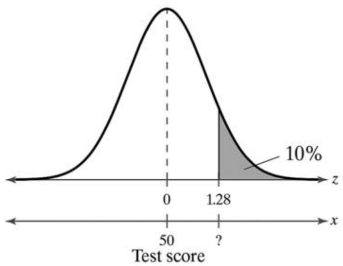


En üstteki bir sı nav puanı , 10% 90. yüzdelik dilimin üzerindeki herhangi bir puandı r . 0,9 kümülatif alana karş ı lı k gelen z-skorunu bulun.

Çözüm: Belirli Bir Veriyi Bulma Belirli Bir Olası lı ğ ı n Değ eri (3'te 1)

Standart Normal Tablodan 0,9'a en yakı n alan 0,8997'dir. Yani 0,9'luk bir alana karş ı lı k gelen z-skoru

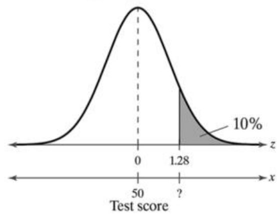
$z = 1.28$.



Çözüm: Belirli Bir Veriyi Bulma Verilen Olası lı k Değ eri (2/3)

Denklemi kullanma $x = \mu + z\sigma$

$$x = 50 + 1.28(10) \approx 62.8$$



Kazanabileceğ iniz ve yine de ajans tarafı ndan iş e alı nmaya hak kazanabileceğ iniz en düş ük puan yaklaş ı k 63'tür.

Bölüm 5.4

Örnekleme Dağ ı lı mları ve Merkezi Limit teorem

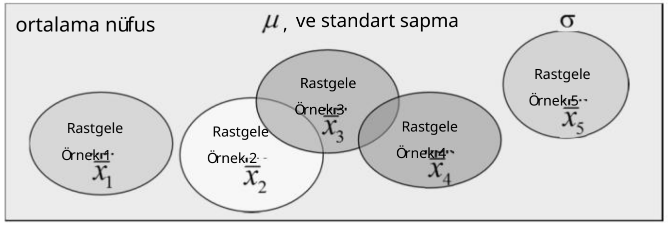
Örnekleme Dağ ı lı mları

Örnekleme dağ ı lı mı •

Bir popülasyondan n büyüklüğ ünde rastgele örnekler tekrar tekrar alı ndı ğ ı nda oluş an bir örnek istatistiğ inin olası lı k dağ ı lı mı .

• Örnek istatistiğ i örnek ortalama ise, dağ ı lı m, örnek ortalamanı n Örnekleme dağ ı lı mı dı r

Numunenin Numune Dağ ı lı mı Araç



Örnekleme dağ ı lı mı , örnek ortalamaları n değ erlerinden oluş ur, $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4, \bar{x}_5, \ldots$

Örnek Ortalamaları n Örnekleme Dağ ı lı mları nı n Özellikleri

1. Numunenin ortalaması , popülasyon $\mu_{\bar{x}}$, eş ittir ortalaması anlamı na gelir. μ

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$

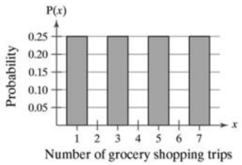
2. Örnek ortalamanı n standart sapması , popülasyon standart $\sigma_{\bar{x}}$ sapması na eş ittir, σ örneklem boyutunun kareköküne bölünür, n.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

- Ortalamanı n standart hatası denir .

Örnek: Örnekleme Dağ ı lı mı Örnek Araçlar

Dört kiş inin bir ayda market alı ş veriş i yapma sayı sı nüfus değ erleri {1, 3, 5, 7} ile verilmektedir. Veriler için bir olası lı k histogramı gösterilir.



Dört kiş iden ikisini rastgele seçerek değ iş tiriyorsunuz. Tüm olası boyut örneklerini listeleyin $n = 2$ ve ortalaması nı hesaplayı n her biri. Bu araçlar, numune araçları nı n örnekleme dağ ı lı mı nı oluş turur. Örnek ortalamanı n ortalaması nı , varyansı nı ve standart sapması nı bulun. Sonuçları nı zı popülasyonun ortalama $\mu = 4$, varyans $\sigma^2 = 5$, ve standart sapması ile karş ı laş tı rı n. $\sigma = \sqrt{5} \approx 2.2$

Çözüm: Bir Örnekleme Dağ ı lı mı Örnek Araçlar (4'ten 1'i)

Çözüm:

Popülasyondan alı nan 2 numara 16 örneğ in tümünü ve her örneğ in ortalaması nı listeleyin.

Sample	Sample mean, $\bar{x}$	Sample	Sample mean, $\bar{x}$
1, 1	1	5, 1	3
1, 3	2	5, 3	4
1, 5	3	5, 5	5
1, 7	4	5, 7	6
3, 1	2	7, 1	4
3, 3	3	7, 3	5
3, 5	4	7, 5	6
3, 7	5	7, 7	7

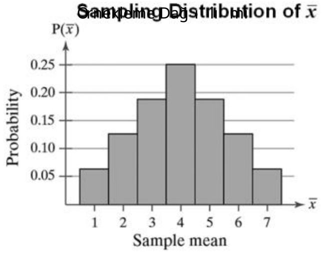
Çözüm: Bir Örnekleme Dağ ı lı mı Örnek Araçlar (2/4)

Numune araçları nı n bir olası lı k dağ ı lı mı nı oluş turun. Ardı ndan, bir olası lı k histogramı kullanarak örnekleme dağ ı lı mı nı n grafiğ ini çizebilirsiniz.

Örnek Ortalamaları n Olası lı k Dağ ı lı mı

$\bar{x}$	f	Probability
1	1	1/16
2	2	2/16
3	3	3/16
4	4	4/16
5	3	3/16
6	2	2/16
7	1	1/16

Olası lı k Histogramı



Çözüm: Bir Örnekleme Dağ ı lı mı Örnek Araçlar (3/4)

16 örnek ortalamanı n ortalaması , varyansı ve standart sapması

$$\mu_{\bar{x}} = 4$$

örneğ in ortalaması araç

$$\left(\sigma_{\bar{x}}\right)^2 = \frac{5}{2} = 2.5$$

Numunenin varyansı araç

Ve

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{2.5} \approx 1.6$$

Numune ortalamaları nı n standart sapması

Çözüm: Bir Örnekleme Dağ ı lı mı Örnek Araçlar (4/4)

Bu sonuçlar, örnekleme dağ ı lı mları nı n özelliklerini karş ı lar çünkü

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 4$$

Ve

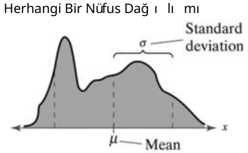
$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \approx 1.6 .$$

Merkezi Limit Teoremi (1/3)

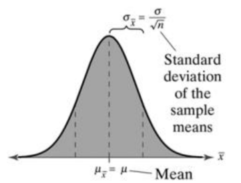
1. Herhangi bir $n \geq 30$, vardı r popülasyondan alı nan büyüklükte örnekler ve mean $= \mu$ standard deviation $= \sigma$, o zaman numune araçları nı n numune dağ ı lı mı normal bir dağ ı lı ma yaklaş ı r.

Örnek boyutu ne kadar büyük olursa, yaklaş ı m o kadar iyi olur.

1. Herhangi Bir Nüfus Dağ ı lı mı



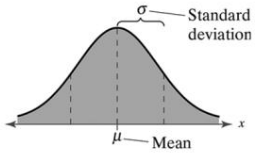
Örnek Ortalamaları n Dağ ı lı mı, $n \geq 30$



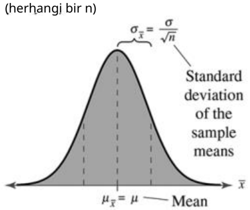
Merkezi Limit Teoremi (2/3)

2. Popülasyonun kendisi normal dağ ı lı m gösteriyorsa, örneklem araḑarı nı n örnekleme dağ ı lı mı , herhangi bir örneklem büyüklüğ ü n için normal dağ ı lı mdı r.

2. Normal Nüfus Dağ ı lı mı



Örnek Ortalamaları n Dağ ı lı mı (herhangi bir n)



Merkezi Limit Teoremi (3/3)

- Her iki durumda da, örneklem araḑarı nı n örnekleme dağ ı lı mı popülasyon ortalaması na eş it bir ortalamaya sahiptir.

$$\mu_{\bar{x}} = \mu$$ Numunenin ortalaması

- Numune araḑarı nı n numune dağ ı lı mı nı n bir popülasyona eş it $1/n$ çarpı varyansı varyans ve popülasyon standart sapması nı n n'nin kareköküne bölünmesine eş it bir standart sapma.

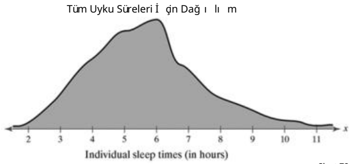
$$\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$$ Örnek ortalamanı n varyansı

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ Numune araḑarı nı n standart sapması (Ortalamanı n standart hatası)

Örnek: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (2'den 1)

Bir araş tı rma, üniversite öğ rencilerinin uyku alı ş kanlı kları nı analiz etti. Çalı ş ma, ortalama uyku süresinin 6,8 saat olduğ unu ve standart sapmanı n 1,4 saat olduğ unu buldu. Bu popülasyondan rastgele 100 uyku süresi örneğ i alı nı r ve her örneğ in ortalaması belirlenir. Örnek ortalamaları n örnekleme dağ ı lı mı nı n ortalaması nı ve standart sapması nı bulun. Daha sonra örnekleme dağ ı lı mı nı n bir grafiğ ini çizin. (The Journal of American College Health'ten uyarlanmı ş tı r)

Tüm Uyku Süreleri İ çin Dağ ı lı m



Çözüm: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (4'te 1)

- Örnekleme dağ ı lı mı nı n ortalaması popülasyon ortalaması na eş ittir

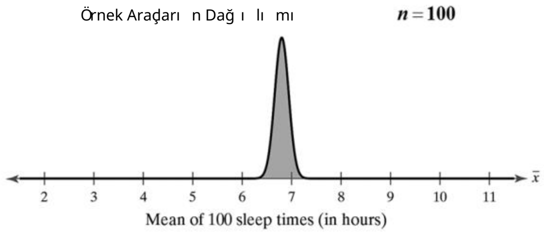
$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 6.8$$

- Ortalamanı n standart hatası , popülasyon standart sapması nı n ile bölünmesine eş ittir. $\sqrt{n}$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.4}{\sqrt{100}} = 0.14$$

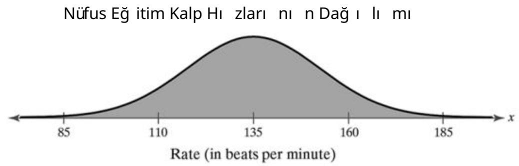
Çözüm: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (2/4)

- Örneklem büyüklüğ ü 30'dan büyük olduğ u için, örnekleme dağ ı lı mı , ortalama 6,8 saat ve standart sapma 0,14 saat olan bir normal dağ ı lı mla tahmin edilebilir.



Örnek: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (2/2)

20 yaş ı ndaki tüm sporcuları n antrenman kalp atı ş hı zları , ortalama dakikada 135 atı ş ve dakikada 18 atı ş standart sapma ile normal olarak dağ ı tı lı r. Bu popülasyondan 4 büyüklüğ ünde rastgele örnekler çekilir ve her örneğ in ortalaması belirlenir. Örnekleme dağ ı lı mı nı n ortalaması nı n ortalaması nı ve standart hatası nı bulun. Ardı ndan, numune araçları nı n örnekleme dağ ı lı mı nı n bir grafiğ ini çizin.



Çözüm: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (3/4)

- Numunenin ortalaması

$$\mu_{\bar{x}} = \mu = 135 \text{ beats per minute}$$

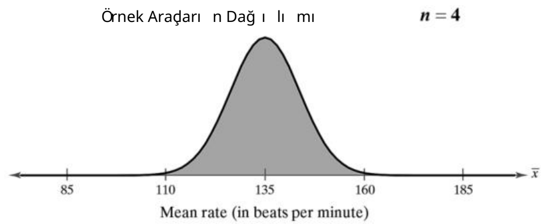
- Örnek ortalamanı n standart sapması

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{4}} = 9 \text{ beats per minute}$$

Çözüm: Merkezi Yorumlama Limit Teoremi (4/4)

- Popülasyon normal dağ ı ldı ğ ı için, numune araçları nı n örnekleme dağ ı lı mı da normal olarak dağ ı tı lı r.

$$\mu_{\bar{x}} = 135 \qquad \sigma_{\bar{x}} = 9$$



Olası lı k ve Merkezi Limit teorem

• z puanı na dönüş $\bar{x}$ türmek için

$$z = \frac{\text{Value} - \text{Mean}}{\text{Standard Error}} = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

Örnek: için Olası lı kları Bulma Örnekleme Dağ ı lı mları (1/2)

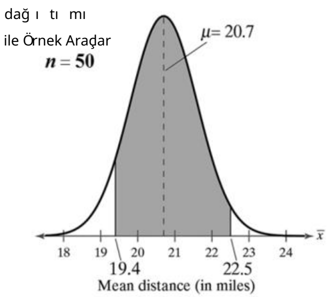
Ş ekil, sürücülerin her gün kat ettikleri ortalama mesafeleri göstermektedir. Yaş ları 16 ila 19 arası nda olan 50 sürücüyü rastgele seçiyorsunuz. Her gün katedilen ortalama mesafenin 19,4 ila 22,5 mil arası nda olma olası lı ğ ı nedir? Farz etmek $\sigma = 6.5\,\text{miles}$.

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (7'de 1)

Merkezi Limit Teoreminden (örnek boyutu 30'dan büyüktür), örnek ortalamaları nı n örnekleme dağ ı lı mı yaklaş ı k olarak normaldir.

$\mu_{\bar{x}} = \mu = 20.7\,\text{miles}$ Ve

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{6.5}{\sqrt{50}} \approx 0.9\,\text{miles}$$



Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (2/7)

• 19,4 ve 22,5 millik örneklem ortalamaları na karş ı lı k gelen z-skorları gösterildiğ i gibi bulunur.

$$z_1 = \frac{19.4 - 20.7}{6.5/\sqrt{50}} \approx -1.41$$

$$z_2 = \frac{22.5 - 20.7}{6.5/\sqrt{50}} \approx 1.96$$

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (7/3)

• Katedilen ortalama mesafenin olası lı ğ ı 50 kiş ilik örneklem tarafı ndan her gün 19,4 ile 22,5 mil arası ndadı r.

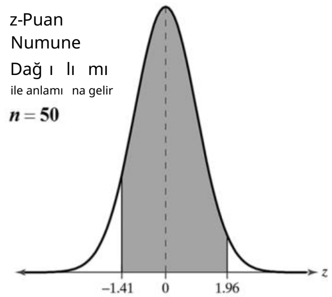
$$P(19.4 < \bar{x} < 22.5) = P(-1.41 < z < 1.96)$$
$$= P(z < 1.96) - P(z < -1.41)$$
$$= 0.9750 - 0.0793$$
$$= 0.8957$$

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (4/7)

Yaş ları 16 ila 19 arası nda değ iş en 50 sürücüden oluş an tüm örneklemlerden yaklaş ı k olarak, grafikte gösterildiğ i gibi, her gün 19,4 ila 22,5 mil arası nda ortalama bir mesafe kat edecek. Bu, değ erinin doğ ru olduğ u varsayı ldı ğ ı nda, $\mu = 20.7$ bu tür örnek ortalamaları nı n yaklaş ı k olarak verilen aralı ğ ı n dı ş ı nda kalacağ ı anlamı na gelir.

90%

10%



Örnek: için Olası lı kları Bulma Örnekleme Dağ ı lı mları (2/2)

Dört yı llı k kolejlerde yı llı k ortalama oda ve yemek masrafı $10,453. Rastgele 9 dört yı llı k kolej seçersiniz. Ortalama oda ve yemekhane giderlerinin, (Ulusal Eğ itim İ statistikleri Merkezi'nden uyarlanmı ş tı r) değ erindeki bir standart sapma $1650. ile normal olarak dağ ı tı ldı ğ ı nı varsayalı m'dan küçük olma olası lı ğ ı nedir? $10,750?

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (5/7)

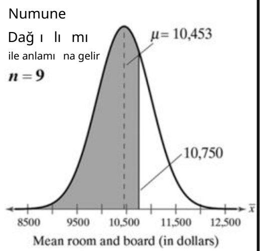
• Popülasyon normal olarak dağ ı ldı ğ ı için, örnek ortalamaları nı n dağ ı lı mı nı n ortalama ve standart sapma ile normal olarak dağ ı ldı ğ ı sonucuna varmak için Merkezi Limit Teoremini kullanabilirsiniz.

$\mu_{\bar{x}} = \mu = \$10{,}453$ Ve $\sigma_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{\$1650}{\sqrt{9}} == \$550$.

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (6/7)

• Soldaki alan $\$10,750$ gölgeli. Karş ı lı k gelen z-skoru $\$10,750$

$$z = \frac{10,750 - 10,453}{1650/\sqrt{9}} = \frac{297}{550} = 0.54.$$



• Dolayı sı yla, ortalama oda ve yemek masrafı nı n ş u değ erden düş ük olma olası lı ğı $\$10,750$

$$P(x < 10,750) = P(z < 0.54) = 0.7054.$$

Çözüm: Olası lı kları Bulmak Örnekleme Dağ ı lı mları (7/7)

Bu cevabı teknolojiyi kullanarak kontrol edebilirsiniz. Örneğ in, x değ erini bulmak için bir TI-84 Plus kullanabilirsiniz,

Yani, 71% ile bu tür örneklerin $n = 9$ bu örneklerden yaklaş ı k ortalama daha küçük $\$10,750$ ve yaklaş ı k 29% birine sahip olacak ortalama daha büyük olacaktı r $\$10,750$.

Örnek: x ve x çubuk için Olası lı kları Bulma (4'te 1)

Bazı üniversite öğ rencileri, okulla ilgili masrafları ödemek için kredi kartı kullanı r. Bu nüfus için, ödenen miktar ortalama ile normal olarak dağ ı lı r. $\$1615$ ve bir standart sapma . (Sallie $\$550$ Mae/Ipsos Halkla İ liş kiler'den uyarlanmı ş tı r)

1. Okulla ilgili masrafları nı ödemek için kredi kartı kullanan rastgele seçilmiş bir üniversite öğ rencisinin, okulla ilgili harcamaları $\$1400?$
2. Okulla ilgili masrafları ödemek için kredi kartı kullanan 25 üniversite öğ rencisini rastgele seçersiniz. Ödenen ortalama tutarı n aş ağ ı dakilerden az olma olası lı ğ ı nedir? $\$1400?$
3. Bölüm 1 ve 2'deki olası lı kları karş ı laş tı rı n.

Çözüm: x ve x çubuğ u için Olası lı kları Bulma

1. Bu durumda, x rasgele değ iş keninin belirli bir değ eriyle iliş kili olası lı ğ ı bulmanı z istenir. Karş ı lı k gelen z-skoru

$$x = \$1400$$

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1400 - 1615}{550} = \frac{-215}{550} \approx -0.39.$$

Yani, öğ rencinin daha az ödemiş olma olası lı ğ ı $\$1400$

$$P(x < 1400) = P(z < -0.39) = 0.3483.$$

Örnek: x ve x çubuk için Olası lı kları Bulma (2/4)

2. Burada sizden olası lı ğ ı bulmanı z istenmektedir.
   bir örnek ortalama x ile iliş kili. Karş ı lı k gelen z-skoru

$$x = \$1400$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{1400 - 1615}{550/\sqrt{25}} = \frac{-215}{110} = -1.95$$

Dolayı sı yla, 25 kart sahibinin ortalama kredi kartı bakiyesinin,

$\$1400$

$$P(x < 1400) = P(z < -1.95) = 0.0256 \cdot$$

Örnek: x ve x çubuk için Olası lı kları Bulma (3/4)

1. ve 2. bölüm için cevapları teknolojiyi kullanarak kontrol edebilirsiniz. Örneğ in, olası lı kları bulmak için Excel'i kullanabilirsiniz.

EXCEL

	A	B	C
1	NORM.DIST(1400,1615,550,TRUE)		
2			0.347932217

EXCEL

	A	B	C
1	NORM.DIST(1400,1615,110,TRUE)		
2			0.025318372

Örnek: x ve x çubuk için Olası lı kları Bulma (4/4)

3. Okulla ilgili masrafları ödemek için kredi kartı kullanan bir üniversite öğ rencisinin daha az ödeme olası lı ğ ı yaklaş ı k olsa da, 25 üniversite öğ rencisinin ödeyeceğ i ortalama miktarı n yalnı zca yaklaş olarak daha az olması olası lı ğ ı vardı r. Çünkü 25 üniversite öğ rencisinden oluş an bir örneklemin ödeyeceğ i ortalama miktarı n ödeyeceğ i ortalama miktarı n,

35% $\$1400$ 3% $\$1400$ 3%

$\$1400$, bu alı ş ı lmadı k bir olay.