# LEBESGUE OLCUMU VE INTEGRAL KURAMI

Prof. Dr. Bilal ÇEKİÇ

Uzaktan Eğitim

23-27 Mart 2021

# Ölçülebilir Fonksiyonlar

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ya da kısaca $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

# Ölçülebilir Fonksiyonlar

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ya da kısaca $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem (1)

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

# Ölçülebilir Fonksiyonlar

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ya da kısaca $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem (1)

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

# Ölçülebilir Fonksiyonlar

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ya da kısaca $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem (1)

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $C_\alpha = f^{-1}([\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ya da kısaca $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

**Teorem (1)**

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $C_\alpha = f^{-1}([\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $D_\alpha = f^{-1}((-\infty, \alpha)) = \{x \in E : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$

## İspat:

$A_\alpha$ kümesi $B_\alpha$ kümesinin tümleyeni olduğundan biri ölçülebilir ise diğeri de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $(a)$ ve $(b)$ seçenekleri denktir. Benzer şekilde $(c)$ ve $(d)$ seçenekleri de denktir. Bu yüzden $(a) \Leftrightarrow (c)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

## İspat:

$A_\alpha$ kümesi $B_\alpha$ kümesinin tümleyeni olduğundan biri ölçülebilir ise diğeri de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $(a)$ ve $(b)$ seçenekleri denktir. Benzer şekilde $(c)$ ve $(d)$ seçenekleri de denktir. Bu yüzden $(a) \Leftrightarrow (c)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$(a) \Rightarrow (c)$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $A_\alpha \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $A_{\alpha - \frac{1}{n}} = \left\{ x \in E : f(x) > \alpha - \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{M}$ olur.

$$\begin{aligned}
\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha - \frac{1}{n}} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) \\
&= f^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right)\right) \\
&= f^{-1}\left([\alpha, \infty)\right) \\
&= C_\alpha
\end{aligned}$$

olduğundan $C_\alpha \in \mathcal{M}$ elde edilir.

## İspatın Devamı:

$(c) \Rightarrow (a)$

$\forall\alpha \in \mathbb{R}$ için $C_\alpha \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $C_{\alpha+\frac{1}{n}} = \left\{x \in E : f(x) \geq \alpha + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{M}$ olur.

$$
\begin{aligned}
C_{\alpha+\frac{1}{n}} &= \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[\alpha + \frac{1}{n}, \infty\right)\right) \\
&= f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\alpha + \frac{1}{n}, \infty\right)\right) \\
&= f^{-1}\left((\alpha, \infty)\right) \\
&= A_\alpha
\end{aligned}
$$

olduğundan $A_\alpha \in \mathcal{M}$ elde edilir.

## Örnek

Bir ölçülebilir küme üzerinde tanımlı herhangi bir sabit fonksiyon ölçülebilirdir.

## Örnek

Bir ölçülebilir küme üzerinde tanımlı herhangi bir sabit fonksiyon ölçülebilirdir.

## Çözüm

$E \in \mathcal{M}$ olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ foksiyonu $c$ bir sabit olmak üzere $f(x) = c$ olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned} \alpha &\geq c \text{ ise } f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \mathcal{M} \\ \alpha &< c \text{ ise } f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

olduğundan $f$ fonksiyonu bir ölçülebilir fonksiyondur.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_E$ fonksiyonuna $E$ kümesinin karekteristik fonksiyonu veya $E$ kümesinin belirteç fonksiyonu denir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_E$ fonksiyonuna $E$ kümesinin karekteristik fonksiyonu veya $E$ kümesinin belirteç fonksiyonu denir.

## Örnek

$E \in \mathcal{M}$ ise $\chi_E$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Aksi durumda ölçülebilir değildir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\chi_E$ fonksiyonuna $E$ kümesinin karekteristik fonksiyonu veya $E$ kümesinin belirteç fonksiyonu denir.

## Örnek

$E \in \mathcal{M}$ ise $\chi_E$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Aksi durumda ölçülebilir değildir.

## Çözüm

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; \quad \alpha < 0 \\ E & ; \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ \emptyset & ; \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

olduğundan istenen elde edilir.

## Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad x=1 \\ 2-x & ; \quad x>1 \end{cases}$ şeklinde tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

## Örnek

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; \quad x<1 \\ 2 & ; \quad x=1 \\ 2-x & ; \quad x>1 \end{cases}$ şeklinde tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

## Çözüm

$$f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=\begin{cases} (-\infty,2-\alpha) & ; \quad \alpha<0 \\ \left(-\infty,-\sqrt{\alpha}\right)\cup\left(\sqrt{\alpha},2-\alpha\right) & ; \quad 0\le\alpha<1 \\ \left(-\infty,-\sqrt{\alpha}\right)\cup\{1\} & ; \quad 1\le\alpha<2 \\ \left(-\infty,-\sqrt{\alpha}\right) & ; \quad 2\le\alpha \end{cases}$$

$\forall\alpha\in\mathbb{R}$ için $f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)\in\mathcal{M}$ olduğundan $f$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{R}$ de her bir $G$ açık kümesi için $f^{-1}(G)$ ters görüntüsünün ölçülebilir küme olmasıdır.*

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $\mathbb{R}$ de her bir $G$ açık kümesi için $f^{-1}(G)$ ters görüntüsünün ölçülebilir küme olmasıdır.*

## İspat:

$:\Rightarrow$ $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu kabul edelim. $G$, $\mathbb{R}$ de herhangi bir açık küme olsun. Bu durumda $g$ kümesi ayrık açık aralıkların sayılabilir birleşimi olarak yazılabilir. $I_n = (a_n, b_n)$ olmak üzere

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

olsun.

## İspatın Devamı:

Bu durumda

$$\begin{aligned} f^{-1}(G) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \in I_n\} \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{x \in E : f(x) > a_n\} \cap \{x \in E : f(x) < b_n\}] \end{aligned}$$

elde edilir. $f$ nin ölçülebilir olması $f^{-1}(G)$ kümesinin ölçülebilir olmasını gerektirir.

$\Leftarrow$: $\mathbb{R}$ de herhngi bir $G$ açık kümesi için $f^{-1}(G)$ kümesi ölçülebilir olsun. $\alpha$ keyfi bir reel sayı olmak üzere $G = (\alpha, \infty)$ olarak alalım.

$$f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

olduğundan $f$ bir ölçülebilir fonksiyondur.

### Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde sürekli ise $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde sürekli ise $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$f$ fonksiyonu $E$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme ölçülebilir olduğundan $f$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde sürekli ise $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$f$ fonksiyonu $E$ üzerinde sürekli olsun. Bu durumda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = f^{-1}((\alpha, \infty))$$

kümesi $\mathbb{R}$ de bir açık kümedir. Her açık küme ölçülebilir olduğundan $f$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

**Uyarı :** Teoremin tersi doğru değildir.

## Tanım

Bir $P$ önermesi bir $E$ kümesinde doğru olmadığı noktalar kümesinin ölçüsü sıfır ise $P$ önermesi $E$ üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.y.) doğrudur denir.

## Tanım

Bir $P$ önermesi bir $E$ kümesinde doğru olmadığı noktalar kümesinin ölçüsü sıfır ise $P$ önermesi $E$ üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.y.) doğrudur denir.

## Örnek

Bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesi sıfır ölçülü ise $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. süreklidir denir.

## Tanım

Bir $P$ önermesi bir $E$ kümesinde doğru olmadığı noktalar kümesinin ölçüsü sıfır ise $P$ önermesi $E$ üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.y.) doğrudur denir.

## Örnek

Bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesi sıfır ölçülü ise $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. süreklidir denir.

## Örnek

$f$ ve $g$ fonksiyonları ölçüsü sıfır olan küme dışında eşit ise bu iki fonksiyon h.h.h.y. eşittir denir.

## Tanım

Bir $P$ önermesi bir $E$ kümesinde doğru olmadığı noktalar kümesinin ölçüsü sıfır ise $P$ önermesi $E$ üzerinde hemen hemen her yerde (h.h.h.y.) doğrudur denir.

## Örnek

Bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir $f$ fonksiyonunun süreksizlik noktalarının kümesi sıfır ölçülü ise $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. süreklidir denir.

## Örnek

$f$ ve $g$ fonksiyonları ölçüsü sıfır olan küme dışında eşit ise bu iki fonksiyon h.h.h.y. eşittir denir.

## Örnek

$\mathbb{R}$ de tanımlı $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda h.h.h.y. $f(x) = 0$ dır.

### Teorem

*Ölçülebilir bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı $f$ ve $g$ fonksiyonları h.h.h.y. eşit ve $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $g$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*Ölçülebilir bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı $f$ ve $g$ fonksiyonları h.h.h.y. eşit ve $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $g$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$E_1 = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ ve $E_2 = \{x \in E : f(x) \neq g(x)\}$ olsun. Bu durumda $E = E_1 \cup E_2$ ve $m(E_2) = 0$ dır. $\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$A = \{x \in E : g(x) > \alpha\}$$

kümesini ele alalım. $A \cap E_2 \subset E_2$ olduğundan $m(A \cap E_2) = 0$ dır. Ayrıca

$$A \cap E_1 = \{x \in E : g(x) > \alpha\} \cap E_1$$

olduğundan $A \cap E_1$ ölçülebilirdir. $A = (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \in \mathcal{M}$ olduğundan $g$ ölçülebilirdir.

## Sonuç

*Ölçülebilir bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. sürekli ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## Sonuç

*Ölçülebilir bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. sürekli ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$f$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E_1$ olsun. $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. sürekli ise $m(E_1) = 0$ dır. $\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$A = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

kümesini ele alalım. $A \cap E_1 \subset E_1$ olduğundan $m(A \cap E_1) = 0$ dır. $f$ fonksiyonu $E - E_1$ üzerinde sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} A - E_1 &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} - E_1 \\ &= \{x \in E - E_1 : f(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

kümesi ölçülebilirdir. $A = (A \cap E_1) \cup (A - E_1) \in \mathcal{M}$ olduğundan $f$ ölçülebilirdir.

## Sonuç

*Ölçülebilir bir $E$ kümesi üzerinde tanımlı $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. sürekli ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$f$ fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E_1$ olsun. $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde h.h.h.y. sürekli ise $m(E_1) = 0$ dır. $\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$A = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

kümesini ele alalım. $A \cap E_1 \subset E_1$ olduğundan $m(A \cap E_1) = 0$ dır. $f$ fonksiyonu $E - E_1$ üzerinde sürekli olduğundan

$$\begin{aligned} A - E_1 &= \{x \in E : f(x) > \alpha\} - E_1 \\ &= \{x \in E - E_1 : f(x) > \alpha\} \end{aligned}$$

kümesi ölçülebilirdir. $A = (A \cap E_1) \cup (A - E_1) \in \mathcal{M}$ olduğundan $f$ ölçülebilirdir.

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $C_\alpha = f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$

Ölçülebilir fonksiyonların tanımı benzer olarak genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar için de verilebilir.

## Tanım

$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilir ise $f$ fonksiyonuna $E$ üzerinde ölçülebilir fonksiyon denir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler denktir.*

(a) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $A_\alpha = f^{-1}((\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$

(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $B_\alpha = f^{-1}([-\infty, \alpha]) = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $C_\alpha = f^{-1}([\alpha, \infty]) = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{M}$

(d) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *için* $D_\alpha = f^{-1}([-\infty, \alpha)) = \{x \in E : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{M}$

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ bir ölçülebilir küme olmak üzere $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu verilsin. $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul*

$$E_1 = \{x \in E : f(x) = \infty\}, \; E_2 = \{x \in E : f(x) = -\infty\}$$

*kümelerinin ölçülebilir ve*

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \notin E_1 \cup E_2 \\ 0 & ; \quad x \in E_1 \cup E_2 \end{cases}$$

*şeklinde tanımlı reel değerli $f_1$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.*

## İspat:

:$\Rightarrow$ $f$ fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$E_1 = \{x \in E : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\}$$
$$E_2 = \{x \in E : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \leq -n\}$$

olduğundan $E_1$ ve $E_2$ kümeleri ölçülebilirdir. $\alpha \geq 0$ ise

$$\{x \in E : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} - E_1$$

ve $\alpha < 0$ ise

$$\{x \in E : f_1(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup E_2$$

yazılabilir. Her iki durumda da sağdaki iki küme ölçülebilir olduğundan $\{x \in E : f_1(x) > \alpha\} \in \mathcal{M}$ dir. Dolayısıyla $f_1$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

## İspatın Devamı:

$\Leftarrow$: $E_1$ ve $E_2$ kümeleri ölçülebilir ve $f_1$ fonksiyonu ölçülebilir fonksiyon olsun. $\alpha \geq 0$ ise

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \{x \in E : f_1(x) > \alpha\} \cup E_1$$

ve $\alpha < 0$ ise

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \{x \in E : f_1(x) > \alpha\} - E_2$$

olduğundan $f$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

# Ölçülebilir Fonksiyonlar ile ilgili Teoremler

## Teorem

*Eğer* $f$ *fonksiyonu* $E$ *kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda* $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ *için* $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ *kümesi ölçülebilirdir.*

**Teorem**

*Eğer $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $\forall \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ için $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ kümesi ölçülebilirdir.*

Uyarı: Teoremin tersi doğru değildir.

# Ölçülebilir Fonksiyonlar ile ilgili Teoremler

## Teorem

*Eğer $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $\forall\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ için $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ kümesi ölçülebilirdir.*

Uyarı: Teoremin tersi doğru değildir.

## İspat:

Herhangi $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f^{-1}(\alpha) &= \{x \in E : f(x) = \alpha\} \\ &= \{x \in E : f(x) \geq \alpha\} \cap \{x \in E : f(x) \leq \alpha\} \end{aligned}$$

olduğundan $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ kümesi ölçülebilirdir.

## İspatın Devamı:

$\alpha = \infty$ ise

$$\{x \in E : f(x) = \infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > n\}$$

ve $\alpha = -\infty$ ise

$$\{x \in E : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) \leq -n\}$$

yazılabilir. Ölçülebilir kümelerin sayılabilir arakesiti ölçülebilir olduğundan soldaki kümeler ölçülebilirdir.

## Örnek

$E \subset (0,1)$ ve $E \notin \mathcal{M}$ olsun. $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \in E \\ -x^2 & ; \quad x \in (0,1) - E \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz. $f$ fonksiyonu ölçülebilir değildir. Neden?

## Örnek

$E \subset (0,1)$ ve $E \notin \mathcal{M}$ olsun. $f:(0,1) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x \in E \\ -x^2 & ; \quad x \in (0,1) - E \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\} \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz. $f$ fonksiyonu ölçülebilir değildir. Neden?

## Çözüm

Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}(\alpha) = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

en fazla bir eleman içerir, bu nedenle ölçülebilirdir. Ancak,

$$f^{-1}((0,\infty)) = \{x \in E : f(x) > 0\} = E$$

olduğundan $f$ fonksiyonu ölçülebilir değildir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme olsun. $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ olmasıdır.*

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme olsun. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ olmasıdır.Küçük sembolü veya sembolleri yerine küçük eşit kullanılabilir.*

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme olsun. $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ olmasıdır.Küçük sembolü veya sembolleri yerine küçük eşit kullanılabilir.*

## İspat:

$:\Rightarrow$ $f$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Herhangi $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için

$$\begin{aligned} f^{-1}((\alpha, \beta)) &= \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \\ &= \{x \in E : \alpha < f(x)\} \cap \{x \in E : f(x) < \beta\} \end{aligned}$$

olduğundan $f^{-1}((\alpha, \beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ dir.

## Teorem

*$E \subset \mathbb{R}$ ölçülebilir bir küme olsun. $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Lebesgue ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul her bir $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için $f^{-1}((\alpha,\beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ olmasıdır.Küçük sembolü veya sembolleri yerine küçük eşit kullanılabilir.*

## İspat:

$:\Rightarrow$ $f$ fonksiyonu ölçülebilir olsun. Herhangi $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için

$$\begin{aligned} f^{-1}((\alpha,\beta)) &= \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \\ &= \{x \in E : \alpha < f(x)\} \cap \{x \in E : f(x) < \beta\} \end{aligned}$$

olduğundan $f^{-1}((\alpha,\beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ dir.
$\Leftarrow$: Her bir $\alpha$ ve $\beta$ farklı reel sayıları için
$f^{-1}((\alpha,\beta)) = \{x \in E : \alpha < f(x) < \beta\} \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda ölçülebilir fonksiyonun tanımı gereği $f$ fonksiyonu ölçübilirdir.

## Teorem

*Her bir* $r \in \mathbb{Q}$ *için* $\{x \in E : f(x) > r\} \in \mathcal{M}$ *ise* $f$ *fonksiyonu* $E$ *kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*Her bir $r \in \mathbb{Q}$ için $\{x \in E : f(x) > r\} \in \mathcal{M}$ ise $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı ve $(r_n)$ dizisi $\alpha$ sayısına yakınsayan azalan bir dizi olsun.

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f(x) > r_n\}$$

yazılabilir. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{x \in E : f(x) > r_n\}$ ölçülebilir olduğundan $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ kümesi ölçülebilirdir. Bu yüzden $f$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

**Teorem**

*$f$ fonksiyonu bir $E_1$ kümesi üzerinde ölçülebilir ve $E_2 \subset E_1$ kümesi ölçülebilir ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E_2$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f$ fonksiyonu bir $E_1$ kümesi üzerinde ölçülebilir ve $E_2 \subset E_1$ kümesi ölçülebilir ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E_2$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$\{x \in E_2 : f(x) > \alpha\} = \{x \in E_1 : f(x) > \alpha\} \cap E_2$$

yazılabilir. $f$ fonksiyonu $E_1$ üzerinde ölçülebilir ve $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğundan sağ taraf ölçülebilirdir. Bu yüzden $f$ fonksiyonu $E_2$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.

**Teorem**

*$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n$ üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n$ üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E_n : f(x) > \alpha\}$$

yazılabilir. Hipotez gereği sağ taraf ölçülebilir olduğundan $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n$ üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $f$ fonksiyonu $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesi üzerinde de ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$\{x \in E : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in E_n : f(x) > \alpha\}$$

yazılabilir. Hipotez gereği sağ taraf ölçülebilir olduğundan $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise $\{x \in E : f_1(x) < f_2(x)\}$ kümesi ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise $\{x \in E : f_1(x) < f_2(x)\}$ kümesi ölçülebilirdir.*

## İspat:

$f_1(x) < f_2(x)$ eşitsizliğinin sağlanması için g.v.y.k. $f_1(x) < r < f_2(x)$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ sayısının var olmasıdır. Buna göre

$$\{x \in E : f_1(x) < f_2(x)\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f_1(x) < r\} \cap \{x \in E : f_2(x) > r\}$$

yazılabilir. $\{x \in E : f_1(x) < r\}$ ve $\{x \in E : f_2(x) > r\}$ kümeleri ölçülebilir olduğundan istenen sonuç elde edilir.

## Teorem

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $c$ bir sabit olmak üzere $f+c$ ve $cf$ fonksiyonları da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $c$ bir sabit olmak üzere $f+c$ ve $cf$ fonksiyonları da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun. $f$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\{x \in E : f(x) + c > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha - c\}$$

olduğundan $f + c$ fonksiyonu ölçülebilirdir.
$c = 0$ olması durumunda $cf$ fonksiyonu sabit fonksiyon olduğundan ölçülebilirdir. $c \neq 0$ olduğunu varsayalım. $f$ fonksiyonu ölçülebilir ve

$$\{x \in E : cf(x) > \alpha\} = \begin{cases} \{x \in E : f(x) > \frac{\alpha}{c}\} & ; \quad c > 0 \\ \{x \in E : f(x) < \frac{\alpha}{c}\} & ; \quad c < 0 \end{cases}$$

olduğundan $cf$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

## Teorem

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $f^2$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $f^2$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha < 0$ ise

$$\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = E \in \mathcal{M}$$

dir. $\alpha \geq 0$ ise

$$\{x \in E : f^2(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \sqrt{\alpha}\} \cup \{x \in E : f(x) < -\sqrt{\alpha}\}$$

olur. $f$ ölçülebilir olduğundan sağdaki iki küme ölçülebilirdir. Bunların birleşimleri de ölçülebilir olduğundan $f^2$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$f$ ve $g$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f+g$, $f-g$, $fg$ ve $E$ kümesi üzerinde $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f$ ve $g$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olsun. Bu durumda $f+g$, $f-g$, $fg$ ve $E$ kümesi üzerinde $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun. $(f+g)(x) > \alpha$ olması için g.v.y.k. $f(x) > r$ ve $g(x) > \alpha - r$ olacak şekilde bir $r \in \mathbb{Q}$ sayısının var olmasıdır. Böylece $\{x \in E : (f+g)(x) > \alpha\}$ kümesi

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x \in E : f(x) > r\} \cap \{x \in E : g(x) > \alpha - r\}$$

şeklinde yazılabilir. $f$ ve $g$ fonksiyonları $E$ üzerinde ölçülebilir olduğundan bu küme ölçülebilirdir. Dolayısıyla $f+g$ fonksiyonu ölçülebilirdir. $(-1)g = -g$ olduğundan $-g$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Dolayısıyla $f + (-g) = f - g$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

## İspatın Devamı:

$fg = \frac{1}{4}\left[(f+g)^2 - (f-g)^2\right]$ olduğu dikkate alınırsa $(f+g)^2$ ve $(f-g)^2$ fonksiyonlarının ölçülebilirliğinden $fg$ nin ölçülebilir olduğuğu görülür.
$E$ kümesi üzerinde $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir olduğunu göstermek için $g(x) \neq 0$ olmak üzere $\frac{1}{g}$ fonksiyonunun $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir olduğunu göstermek yeterlidir.
$A = \{x \in E : g(x) > 0\}$ ve $B = \{x \in E : g(x) < 0\}$ olmak üzere $\alpha = 0$ ise $\left\{x \in E : \frac{1}{g(x)} > 0\right\} = A$, $\alpha > 0$ ise
$\left\{x \in E : \frac{1}{g(x)} > \alpha\right\} = A \cap \left\{x \in E : g(x) < \frac{1}{\alpha}\right\}$ ve $\alpha < 0$ ise

$$\left\{x \in E : \frac{1}{g(x)} > \alpha\right\} = A \cup \left\{B \cap \left\{x \in E : g(x) < \frac{1}{\alpha}\right\}\right\}$$

olduğundan $\frac{1}{g}$ fonksiyonu ölçülebilirdir.

**Teorem**

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun. $\alpha < 0$ ise $\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = E \in \mathcal{M}$ ve $\alpha \geq 0$ ise

$$\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f(x) < -\alpha\} \in \mathcal{M}$$

olduğundan $|f|$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

**Teorem**

*$f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir ise bu durumda $|f|$ fonksiyonu da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

**İspat:**

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun. $\alpha < 0$ ise $\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = E \in \mathcal{M}$ ve $\alpha \geq 0$ ise

$$\{x \in E : |f(x)| > \alpha\} = \{x \in E : f(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f(x) < -\alpha\} \in \mathcal{M}$$

olduğundan $|f|$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

Uyarı : Teoremin tersi doğru olmayabilir. Ters örnek veriniz.

## Teorem

*$f$, bir $E$ kümesi üzerinde reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon ve $g$ fonksiyonuda $f$ nin görüntü kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon ise $g \circ f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir. Diğer bir deyişle bir ölçülebilir fonksiyonun sürekli fonksiyonu ölçülebilirdir. Bununla birlikte bir sürekli fonksiyonun ölçülebilir fonksiyonu ölçülebilir olmak zorunda değildir.*

## Teorem

*$f$, bir $E$ kümesi üzerinde reel değerli ölçülebilir bir fonksiyon ve $g$ fonksiyonuda $f$ nin görüntü kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon ise $g \circ f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir. Diğer bir deyişle bir ölçülebilir fonksiyonun sürekli fonksiyonu ölçülebilirdir. Bununla birlikte bir sürekli fonksiyonun ölçülebilir fonksiyonu ölçülebilir olmak zorunda değildir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.
$\{x \in E : (g \circ f)(x) > \alpha\} = \{x \in E : g(f(x)) > \alpha\}$ kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermeliyiz. $g$ fonksiyonu $f$ nin görüntü kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyon olduğundan $G = \{u : g(u) > \alpha\}$ kümesi bir açık kümedir.

$$\{x \in E : (g \circ f)(x) > \alpha\} = \{x \in E : f(x) \in G\}$$

ve sağ taraftaki küme ölçülebilir olduğundan $g \circ f$ fonksiyonu $E$ üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ise bu durumda $f_1$ ve $f_2$ fonksiyonlarının maksimum ve minimumları da ölçülebilirdir, yani* $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ *ve* $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ *fonksiyonları da ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ise bu durumda $f_1$ ve $f_2$ fonksiyonlarının maksimum ve minimumları da ölçülebilirdir, yani* $\max\{f_1(x), f_2(x)\}$ *ve* $\min\{f_1(x), f_2(x)\}$ *fonksiyonları da ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun. $f^*(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ ve $f_*(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ ile gösterelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\{x \in E : f^*(x) > \alpha\} &= \{x \in E : f_1(x) > \alpha\} \cup \{x \in E : f_2(x) > \alpha\}, \\
\{x \in E : f_*(x) > \alpha\} &= \{x \in E : f_1(x) > \alpha\} \cap \{x \in E : f_2(x) > \alpha\}.
\end{aligned}$$

$f_1$ ve $f_2$ fonksiyonları $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar olduğundan sağdaki kümeler ölçülebilirdir. Bu yüzden $f^*$ ve $f_*$ fonksiyonları $E$ üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $F(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ ve $G(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ fonksiyonları da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $F(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ ve $G(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ fonksiyonları da $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\alpha$ herhangi bir reel sayı olsun.

$$\left\{x \in E : \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \leq \alpha\right\} = \{x \in E : f_1(x) \leq \alpha,\ f_2(x) \leq \alpha,\ \ldots\}$$

$$\begin{aligned} &= \{x \in E : f_1(x) \leq \alpha\} \cap \{x \in E : f_2(x) \leq \alpha\} \cap \cdots \\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E : f_n(x) \leq \alpha\} \end{aligned}$$

yazılabilir.

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $\overline{\lim}\ f_n(x)$ ve $\underline{\lim} f_n(x)$ $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $\overline{\lim}\ f_n(x)$ ve $\underline{\lim} f_n(x)$ $E$ üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

$\overline{\lim} f_n(x) = \inf\limits_{m\in\mathbb{N}} \left( \sup\limits_{n\geq m} f_n(x) \right)$ ve $\underline{\lim} f_n(x) = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \left( \inf\limits_{n\geq m} f_n(x) \right)$ olduğunu biliyoruz. Herbir $m \in \mathbb{N}$ için

$$g_m(x) = \sup_{n\geq m} f_n(x) \quad \text{ve} \quad h_m(x) = \inf_{n\geq m} f_n(x)$$

dersek, bir önceki teoremden herbir $g_m$ ve $h_m$ ölçülebilirdir. Yine bir önceki teoremden $\inf g_m(x)$ ve $\sup h_m(x)$ ölçülebilirdir. $\overline{\lim} f_n(x) = \inf g_m(x)$ ve $\underline{\lim} f_n(x) = \sup h_m(x)$ olduğundan $\overline{\lim}\ f_n(x)$ ve $\underline{\lim} f_n(x)$ $E$ üzerinde ölçülebilirdir.

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## Teorem

*$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Bu durumda $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.*

## İspat:

Bir önceki teoremden dolayı $\overline{\lim}\ f_n(x)$ ve $\underline{\lim} f_n(x)$ $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ise bu durumda

$$f(x) = \overline{\lim} f_n(x) = \underline{\lim} f_n(x)$$

ve bu yüzden $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilirdir.

## Tanım

$(f_n)$, $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. $E_1 \subset E$ ve $m^*(E_1) = 0$ olmak üzere her $x \in E - E_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $(f_n)$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsaktır denir.

## Tanım

$(f_n)$ , $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. $E_1 \subset E$ ve $m^*(E_1) = 0$ olmak üzere her $x \in E - E_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $(f_n)$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsaktır denir.

## Örnek

$E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = (-1)^n x^n$ ile tanınlı $(f_n)$ fonksiyon dizisi verilsin. $(f_n)$ fonksiyon dizisi . $f(x) = 0$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsaktır.

## Tanım

$(f_n)$ , $E$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olsun. $E_1 \subset E$ ve $m^*(E_1) = 0$ olmak üzere her $x \in E - E_1$ için

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $(f_n)$ fonksiyon dizisi $f$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsaktır denir.

## Örnek

$E = [0,1]$ üzerinde $f_n(x) = (-1)^n x^n$ ile tanınlı $(f_n)$ fonksiyon dizisi verilsin. $(f_n)$ fonksiyon dizisi . $f(x) = 0$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsaktır.

## Alıştırma

Ölçülebilir fonksiyonların bir $(f_n)$ dizisi bir $f$ fonksiyonuna h.h.h.y. yakınsak ise $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

# Borel Ölçülebilir Fonksiyonlar

Lebesgue ölçülebilir fonksiyonun tanımına benzer şekilde Borel ölçülebilir fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

## Tanım

Bir $E$ Borel kümesi üzerinde tanımlı $f$ fonksiyonu verildiğinde, her $\alpha$ reel sayısı için

$$f^{-1}\left((\alpha,\infty)\right)=\{x\in E: f(x)>\alpha\}$$

kümesi bir Borel kümesi oluyorsa bu fonksiyona $E$ üzerinde Borel ölçülebilir fonksiyon denir.

# Borel Ölçülebilir Fonksiyonlar

Lebesgue ölçülebilir fonksiyonun tanımına benzer şekilde Borel ölçülebilir fonksiyon aşağıdaki gibi tanımlanır.

**Tanım**

Bir $E$ Borel kümesi üzerinde tanımlı $f$ fonksiyonu verildiğinde, her $\alpha$ reel sayısı için

$$f^{-1}((\alpha,\infty)) = \{x \in E : f(x) > \alpha\}$$

kümesi bir Borel kümesi oluyorsa bu fonksiyona $E$ üzerinde Borel ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanımdan hemen şu sonucu çıkarabiliriz: Her bir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir fakat Lebesgue ölçülebilir her fonksiyon Borel ölçülebilir değildir.

## Alıştırma

$f$, bir $E$ Borel kümesi üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz.

(a) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ bir Borel kümesidir.

(b) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) \geq \alpha\}$ bir Borel kümesidir.

(c) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) < \alpha\}$ bir Borel kümesidir.

(d) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$ bir Borel kümesidir.

## Alıştırma

$f$ ve $g$ fonksiyonları $E$ üzerinde tanımlı Borel ölçülebilir fonksiyonlar ve $c$ herhangi bir sabit olsun. Bu durumda aşağıdaki fonksiyonların her birinin $E$ üzerinde Borel ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

1. $f + c$
2. $cf$
3. $f \pm g$
4. $|f|$
5. $f^2$
6. $fg$
7. $f \div g$ ($g$ nin $E$ üzerinde sıfırı yoktur)

## Alıştırma

1. Bir Borel kümesi üzerinde tanımlı sürekli fonksiyonun Borel ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
2. $f$ bir Borel ölçülebilir fonksiyon, $B$ bir Borel kümesi ise $f^{-1}(B)$ nin bir Borel kümesi olduğunu gösteriniz.
3. $f$ bir Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ve $B$ bir Borel kümesi ise $f^{-1}(B)$ nin bir Lebesgue ölçülebilir küme olduğunu gösteriniz.
4. $f$ ve $g$ fonksiyonları Borel ölçülebilir ise $f \circ g$ nin de Borel ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
5. $f$ bir Borel ölçülebilir fonksiyon ve $g$ bir Lebesgue ölçülebilir fonksiyon ise $f \circ g$ nin bir Lebesgue ölçülebilir fonksiyon olduğunu gösteriniz.

## Alıştırma

6. $f$, $\mathbb{R}$ de artan bir fonksiyon ise $f$ nin Borel ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
7. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & ; \quad 0 < x < 1 \\ 5 & ; \quad x = 0 \\ 7 & ; \quad x = 1 \end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
8. $f$ ve $g$ fonksiyonları bir $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyonlar ise $\{x \in E : f(x) \leq g(x)\}$ ve $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ kümelerinin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
9. $E_1$ ve $E_2$ ölçülebilir kümeler olmak üzere $f$ fonksiyonu $E_1 \cup E_2$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonun $E_1 \cup E_2$ üzerinde ölçülebilir olması için gerek ve yeter koşul $f$ nin $E_1$ ve $E_2$ kümelerine kısıtlanışının ölçülebilir olmasıdır. Gösteriniz.

## Alıştırma

10. $E \in \mathcal{M}$ olmak üzere $f$, $E$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $f$ fonksiyonun ölçülebilir olması için g.v.y.k.

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

ile tanımlı $g$ fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır. Gösteriniz.

11. Sıfır ölçülü küme üzerinde tanımlı her fonksiyonun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

12. $f$ ölçülebilir ise $f$ nin herhangi bir doğal sayı kuvvetinin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

13. $E \subset [0,1]$ bir Lebesgue ölçülemeyen küme olsun. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in E \\ 2 + e^x & ; \quad x \notin E \end{cases}$ biçiminde tanımlanıyor. $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}(\{a\})$ kümesinin ölçülebilir olduğunu gösteriniz. $f$ fonksiyonu ölçülebilir midir?

## Alıştırma

14. $E \in \mathcal{M}$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun.

$$\begin{aligned} f^{-1}([c,d)) &= \{x \in E : c \leq f(x) < d\} \\ f^{-1}((c,d]) &= \{x \in E : c < f(x) \leq d\} \\ f^{-1}((c,d)) &= \{x \in E : c < f(x) < d\} \\ f^{-1}(\{c\}) &= \{x \in E : f(x) = c\} \end{aligned}$$

kümelerinin ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

15. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad x < 1 \\ 2 & ; \quad x = 1 \\ 2 - x & ; \quad x > 1 \end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

16. $f : (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

## Alıştırma

17. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; \quad 0<x\leq 1\\ 0 & ; \quad x=0\end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
18. $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\tan x & ; \quad -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\\ \infty & ; \quad x=\pm\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
19. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\\ 0 & ; \quad x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}^c\end{cases}$ ile tanımlı $f$ fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösteriniz.
20. $E\in\mathcal{M}$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $E$ kümesi üzerinde ölçülebilir fonksiyon olsun. $f^+:=\max\{f,0\}$ ve $f^-=\min\{-f,0\}$ ile tanımlı fonksiyonların ölçülebilir olduğunu gösteriniz.

Alıştırmalar daha sonra güncellenecektir.