11. ve 12. Hafta

Çok Değişkenli Regresyon Modeli

Basit regresyon modelinin tahmini kolay olmasına karşın iktisadi ilişkilerin bazılarını açıklamada yetersiz kalmaktadır. Çoğu iktisadi ilişkide bağımlı değişkeni etkileyen iki veya daha fazla değişken vardır. Bu değişkenlerden bazıları model dışında bırakılır ve iktisadi ilişkiler basit regresyon modeli ile tahmin edilirse, önemli değişkenler model dışında kalacak ve model spesifikasyon hatalarından dışlanmış değişken durumda ortaya çıkan olumsuzluklara maruz kalacaktır. Ekonometrik model mümkün olduğunca sade (cimri) olmalıdır ancak modelde bağımlı değişkeni etkileyen önemli bağımsız değişkenlere mutlaka yer verilmelidir.

Basit regresyon modelinde bağımlı değişken Y sadece bir bağımsız değişken X ile ilişkili olduğu için model basit regresyon ile adlandırılır. Bu model pek çok durum için yararlı olmasına karşın, çoğu iktisadi modelde bağımlı değişken Y'yi etkileyen iki veya daha fazla bağımsız değişken etkilemektedir. Örneğin talep denkleminde, bir malın talep edilen miktarı, bu malın fiyatına, ikame ve tamamlayıcı malların fiyatlarına ve gelire bağlıdır. Bir üretim fonksiyonundaki çıktı, bir girdiden daha fazlasının bir fonksiyonudur. Toplam para talebi, toplam gelir ve faiz oranın bir fonksiyonudur. Yatırım ise faiz oranı ve gelirdeki değişime bağlıdır.

Birden fazla açıklayıcı değişkenli bir iktisadi modeli, buna uygun ekonometrik modeline dönüştürüldüğünde bu model, çok değişkenli regresyon modeli (çoklu regresyon modeli) olarak adlandırılmaktadır. Basit regresyon modeli için geliştirilen sonuçların çoğu, çok değişkenli regresyon modeli için genişletilebilir. β parametresinin yorumunda küçük değişiklikler söz konusudur, t-dağılımı için serbestlik derecesi değişecektir ve açıklayıcı değişkenlerin (X) özellikleri ile ilgili varsayıma ilave varsayıma ihtiyaç vardır. Çok değişkenli regresyon modelinin anlaşılabilmesi için basit regresyon modelinin özümsenmiş olması gerekir.

İktisadi Model

Basit regresyon modeli ile reklam harcamalarının farklı düzeylerinin satışlar üzerindeki ortalama etkisini tespit ettik. Firma reklam harcamalarının farklı düzeylerinin yanı sıra farklı fiyat yapılarının da etkilerini değerlendirmek isteyebilir. Şöyle ki;

Firma reklam harcamalarının düzeyi değiştikçe, satış rakamlarının nasıl değişecek? Reklam harcamasındaki bir artış, satışlarda bir artışa yol açar mı? Eğer bu mümkünse, satışlardaki artış, artan reklam harcamasını savunmak için yeterli midir? Firma ayrıca, fiyatlama stratejisi ile de ilgilidir. Düşen fiyatlar, satış hasılatında bir artışa mı yoksa bir azalışa mı yol açmaktadır? Fiyattaki bir azalma, satılan miktarda yalnızca küçük bir artışa yol açıyorsa, satış hasılatı azalır (talep, düşük fiyat esnekliğine sahiptir); satılan miktarda büyük bir artışa yol açan bir fiyat düşüşü, hasılatta bir artışı sağlayacaktır (talep fiyata göre, esnektir). Bu iktisadi bilgi, etkili yönetim için temeldir.

İlk adım, satış hasılatının bir veya daha fazla açıklayıcı değişkene bağlı olduğu bir iktisadi model kurmaktır. Satış hasılatının (Y) , fiyat (X_1) ve reklam harcaması (X_2) ile doğrusal olarak ilişkili olduğunu hipotezi altında iktisadi model aşağıdaki gibidir:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$$

Bu denklemde, Y aylık satış hasılatını temsil etmektedir, X_1 fiyat ve X_2 ise reklam harcamasını temsil etmektedir. Satış hasılatı (Y) ve reklam harcamaları (X_1) bin dolar, fiyat (X_2) ise dolar cinsinden ölçülmektedir. β_0, β_1 ve β_2 , satışların (Y) fiyat (X_1) ve reklam harcamalarına (X_2) bağımlılığını gösteren, bilinmeyen parametreler. Matematiksel olarak kesim (otonom) parametresi β_0 , bağımsız değişkenler sıfır değerini aldığında bağımlı değişkenin değeridir. Ancak basit regresyon bahsinde de belirtildiği gibi çoğu durumda kesim parametresinin, açık bir iktisadi yorumu yoktur. Örneğin bu örnekte fiyatın ve reklam harcamalarının sıfır olması ($X_1 = X_2 = 0$) durumu iktisadi açıdan gerçekçi değildir. Çok özel durumlar haricinde, doğrudan bir iktisadi yorumu olmasa bile, her zamanda modele bir sabit eklenir. Sabiti ihmal etmek, modelin veriye zayıf uyum göstermesine ve iyi öngörü yapamamasına yol açar.

Modeldeki diğer parametreler (β_1 ve β_2) diğer tüm değişkenler sabit tutulduğunda, bağımsız değişkende bir birim değişim veri iken, bağımlı değişkenin değerindeki değişimi ölçer. Buna göre :

β_1: reklam harcamaları (X_2) sabit iken fiyat bir birim (1 lira) arttırıldığında satışların (1000 lira) tepkisini verir ve

$$\beta_1 = \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X_1}\right|_{X_2 \text{ sabit iken}} \quad \text{veya} \quad \beta_1 = \left.\frac{\partial Y}{\partial X_1}\right|_{X_2 \text{ sabit iken}}$$

ile gösterilir. Aynı şekilde β_2, fiyat (X_1) sabit iken reklam harcamaları bir birim (1000 lira) arttırıldığında satışlardaki değişimi verir ve

$$\beta_2 = \left.\frac{\Delta Y}{\Delta X_2}\right|_{X_1 \text{ sabit iken}} \quad \text{veya} \quad \beta_2 = \left.\frac{\partial Y}{\partial X_2}\right|_{X_1 \text{ sabit iken}}$$

ile gösterilir. Burada "∂" sembolü, "kısmi türev almayı" temsil etmektedir. Yukardaki satışların fiyata göre kısmi türevi, diğer faktörler, yani reklam harcamaları sabit tutulduğunda, fiyat değiştikçe satışların değişim oranıdır. β_1'nin işareti pozitif veya negatif olabilir. Fiyattaki bir artış, satış hasılatında bir artışa yol açıyorsa $\beta_1 > 0$ olup, talep fiyata göre esnek değildir. Aksine, fiyattaki bir artış, satışlarda bir azalışa yol açıyorsa, talep fiyata göre esnektir ve bu durumda, $\beta_1 < 0$ olur. Böylece, β_1'nin işaret bilgisi, talebin fiyat esnekliği hakkında genel bilgi sağlar. β_1'nin büyüklüğü ise veri bir fiyat değişimi karşısında, satış gelirlerindeki değişim miktarını ölçer. Diğer taraftan reklam harcamalarının satışlar üzerindeki etkisini gösteren β_2'in işaretinin pozitif olmasını bekleriz, reklam çok kötü olmadıkça, reklam harcamasındaki bir artış satış hasılatında bir artışa yol açacaktır. $\beta_2 < 1$ ise reklam harcamasında 1,000 dolarlık bir artış, satış gelirlerinde 1,000 lira' dan daha az bir artış sağlayacaktır. $\beta_2 > 1$ ise 1000 dolardan daha fazla bir artış sağlayacaktır. Bu sebeple, firmanın reklam politikası açısından, β_2 bilgisi çok önemlidir.

β_0, β_1 ve β_2 'den yukarıdaki bilgilere ulaşabilmenin yolu bu iktisadi modeli, ekonometrik bir modele dönüştürmektir.

Ekonometrik Model

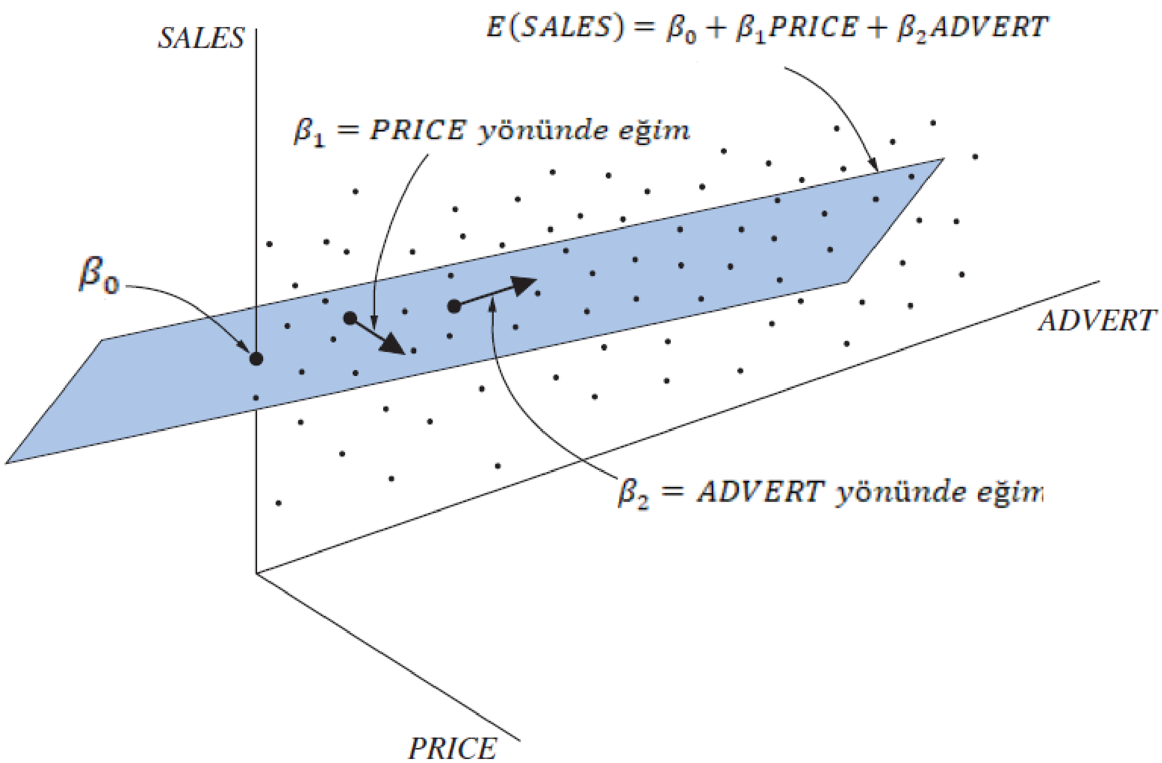
$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

Yukarıdaki iktisadi model satışalar için beklenen veya ortalama davranışını açıklamaktadır. Böylece, bu durumu, $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}$ olarak yazabiliriz, burada , $E(Y_i)$ satış gelirlerinin "beklenen değeri" dir. Satış hasılatı, fiyat ve reklam verileri, tam bir doğrusal ilişki izlemeyecektir. Çok değişkenli bu model bir doğruyu göstermemekte, bir düzlemi göstermektedir. Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, düzlem, dikey ekseni β_0'da kesmektedir. β_1 ve β_2 parametreleri, sırasıyla, "fiyat ekseni" ve "reklam harcamaları ekseni" yönlerinde düzlemin eğimini ölçmektedir. Satış gelirleri, fiyatı ve reklam harcamalarını temsil eden gözlemler Tabloda gösterilmiştir. Bu veriler, tam olarak bir düzlem üstüne düşmez.

Gözlemlenebilir satış geliri ile beklenen satış geliri değeri arasındaki fark, rassal hata terimi ’dir $u_i = Y_i - E(Y_i)$. Rassal hata, satış gelirinin, beklenen değerinden farklı olmasına yol açan, fiyat ve reklam haricindeki tüm faktörleri temsil eder. Bu faktörler, hava koşullar, rakiplerin davranışı, tüketici davranışındaki farklar olabilir. Hata terimini eklemek aşağıdaki modeli sağlar,

$$Y_i = E(Y_i) + u_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + u_i$$

İktisadi model, satış gelirleri ile fiyat ve reklam harcamaları ortalama sistematik ilişkiyi açıklar. Beklenen değer $E(Y_i)$ rassal olmayan, sistematik bileşendir. Ancak satış gelirlerinin beklenen değerine rassal hata eklendiği için satışlar da rassal bir değişkendir. Satış gelirinin değerinin ne olacağı, gözlemleninceye kadar bilinmez.



Çoklu regresyon düzlemi

City	*SALES* \$1,000 units	*PRICE* \$1 units	*ADVERT* \$1,000 units
1	73.2	5.69	1.3
2	71.8	6.49	2.9
3	62.4	5.63	0.8
4	67.4	6.22	0.7
5	89.3	5.02	1.5
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
73	75.4	5.71	0.7
74	81.3	5.45	2.0
75	75.0	6.05	2.2
Summary statistics			
Sample mean	77.37	5.69	1.84
Median	76.50	5.69	1.80
Maximum	91.20	6.49	3.10
Minimum	62.40	4.83	0.50
Std. Dev.	6.49	0.52	0.83

Hata terimi ve dağılımı ile ilgili varsayımların kullanılmaya başlanması ile iktisadi model, ekonometrik modele dönüşmektedir. Ekonometrik model, değişkenler arasındaki ilişkilerin daha gerçekçi bir açıklamasını ve bunun yanı sıra bilinmeyen parametrelerin tahmincilerinin değerlendirilmesi ve geliştirilmesi için bir çerçeve sağlamaktadır.

Genel Model

Çok değişkenli regresyon modelinde, bağımlı değişken Y, doğrusal denklem boyunca $k-1$ sayıda bağımsız değişken (açıklayıcı değişken) $X_1, X_2, \ldots, X_{k-1}$ ile ilişkilidir. Çok değişkenli regresyon modeli aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \cdots + \beta_{k-1} X_{ik-1} + u_i$$

$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k$; Y ile $X_1, X_2, \ldots X_{k-1}$ değişkenleri arasında ilişki kuran modelin bilinmeyen parametreleridir. Parametrelerin yorumu basit regresyonda olduğundan küçük bir farklılık göstermektedir. Örneğin β_2 parametresi diğer değişkenler sabit tutulduğunda X_2

değişkenindeki bir birim değişimin, Y'nin beklenen değeri üzerindeki etkisini ölçer. β_2, kısmi türev ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\beta_2 = \frac{\Delta E(Y)}{\Delta X_2} = \left.\frac{\partial E(Y)}{\partial X_2}\right|_{X_1,\, X_3,\ldots,X_{(k-1)} \text{ sabit iken}}$$

β_0 parametresi, kesim terimi (otonom parametre)'dir. Çok değişkenli regresyon modelinin tahmini, çok değişkenli regresyon modellerinin en basiti olan iki bağımsız değişkenli model çerçevesinde incelenecektir. İkiden fazla bağımsız değişkenli modellerin tahmini daha fazla matematiksel işlemler gerektirdiği için Ekonometri Paket Programları ile yapılmaktadır. İki bağımsız değişkenli çok değişkenli regresyon modeli aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + u_i$$

Yukarıda verilen modelde parametre sayısı (k) 3' e eşittir. Bu parametreler için uygulanacak nokta ve aralık tahminleri, daha fazla bağımsız değişkenli modeller $(k > 3)$ için de geçerlidir.

Çok Değişkenli Regresyon Modelin Varsayımları

Çok değişkenli ekonometrik model için bağımlı değişken (Y_i) ve rassal hataların u_i olasılık dağılımı ile ilgili varsayımlar, basit regresyon modelindeki varsayımlara benzerdir. Bunlar,

1. $E(u_i) = 0$

Her alt ana kütle için rassal hata, sıfır ortalamalı bir olasılık dağılımına sahiptir. Hataların bazıları pozitif, bazıları negatif olacaktır. Çok büyük gözlemler için, bunların ortalamada sıfır olacağı beklenmektedir.

2. $E(u_i^2) = Var\left(u_i\right) = \sigma^2$

Her alt ana kütle için rassal hata, σ^2 varyanslı bir olasılık dağılımına sahiptir. Basit regresyondan bilindiği üzere, varyans bilinmeyen bir parametredir ve modeldeki belirsizliği ölçer. Rassal hatanın varyansı her bir gözlem için aynıdır. Böylece herhangi bir gözlem için model belirsizliği daha fazla veya az değildir ve hata terimi iktisadi değişkenle doğrudan ilişkili değildir. Bu özelliğe sahip hatalar, sabit varyanslı (homoskedastik; eşit varyanslı) olarak isimlendirilir.

3. $Cov(u_i, u_j) = 0 \quad i \neq j$

İki farklı rassal hata arasındaki kovaryans sıfırdır. Bir gözlemin hatasının büyüklüğü, diğer bir gözlemin hatasının olası büyüklüğünü etkilemez. Bu sebeple, herhangi bir hata çifti korelasyonlu değildir. Bu varsayım sağlanmazsa otokorelasyon olarak adlandırılan ve modelin aleyhine sonuçlar doğuran ekonometrik bir problem söz konusu olur.

4. Rassal hatalar u_i, normal dağılımına sahiptir, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$.

Yine basit regresyondan bilindiği üzere bağımlı değişken Y'deki her bir gözlem, rassal hata terimi u_i'ya bağlı olduğu için, Y'de rassal bir değişkendir. Y'nin istatistiksel özellikleri, u'nun özelliklerinden elde edilir. Bu özellikler aşağıdaki gibidir:

5. $E(Y|X_1, X_2) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$

Y'nin beklenen değeri (koşullu ortalama), bağımsız değişkenlerin ve bilinmeyen parametrelerin değerlerine bağlıdır. $E(u_i) = 0$ olduğu varsayımı, Y'nin ortalama değerinin her bir gözlem için değişeceğini ve $E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2$ regresyon fonksiyonu ile belirleneceği anlamına gelmektedir.

6. $Var(Y_i) = Var(u_i) = \sigma^2$.

Y'nin olasılık dağılımının varyansı her bir gözlem için sabittir. Y'nin bazı gözlemleri, diğerlerine göre, regresyon fonksiyonundan daha uzakta değildir. Y'nin varyansı ile u'nun varyansı eşittir, ancak beklenen değerleri farklıdır.

7. $Cov(Y_i, Y_j) = Cov(u_i, u_j) = 0 \qquad i \neq j$

Bağımlı değişkenin herhangi iki gözlemi korelasyonlu değildir. Örneğin, bir gözlem $E(Y)$ 'nin üzerindeyse (pozitif ise), sonraki gözlem muhtemelen $E(Y)$ 'nin altında (negatif)' dır.

8. Y 'nin değerleri, ortalamaları etrafında normal dağılır

$Y \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2, \sigma^2)$.

Bu varsayım, $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ varsayımına eşittir.

9. Bağımsız değişkenler rassal değildir. Bu varsayım göre bağımlı değişkenin değerleri gözlemlenmeden önce, bağımsız değişkenin değerleri bilinmektedir.

Çok değişkenli regresyon modeli için yukarıdaki hata terimi (ve dolayısıyla bağımlı değişken) ile ilgili varsayımlara ek olarak, açıklayıcı değişken ile ilgili ek bir varsayım vardır.

10. Bağımsız değişkenlerden herhangi biri, diğerlerinin tam doğrusal bir fonksiyonu değildir. Bu varsayım, hiçbir değişkenin gereksiz olmadığı varsayımına eşdeğerdir. Bu varsayım sağlanamazsa, -tam doğrusal bağlantı olarak isimlendirilen bir durum- en küçük kareler yöntemi başarısız olur.

Çoklu Değişkenli Regresyon Modeli Parametrelerinin Tahmini:
En Küçük Kareler Yöntemi

Çok değişkenli regresyon modelinin bilinmeyen parametrelerinin tahmini için en küçük kareler ilkesinin kullanımı, çok değişkenli regresyon modelinin en basiti aşağıda verilen iki bağımsız değişkenli model çerçevesinde ele alınacaktır.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + u_i$$

Basit regresyondan bilindiği üzere EKK ilkesi ile Y_i'nin gözlemlenen değerleri (Y_i) ile beklenen değerleri $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$ arasındaki farkların kareli toplamını minimize eden $\beta_0, \beta_1\ ve\ \beta_2$ değerlerinin bulunmasına dayanmaktadır. Bu amaçla örnek verilerinden hareket edilir ve örnek regresyon modeli aşağıdaki gibi yazılır.

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \hat{u}_i$$

i. gözlem için Y_i'nin değeri $\hat{Y}_i$ ve $\hat{u}_i$'ye bağlıdır. EKK yöntemi ile bilinmeyen parametrelerin tahmini için yine bilinmeyen parametrelerin bir fonksiyonu olan kalıntı kareler toplamı fonksiyonunun minimize edilmesi gerekir. Kalıntı kareler toplamı fonksiyonunun ($\sum \hat{u}_i^2$) minimizasyonu için, fonksiyonda $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\ ve\ \hat{\beta}_2$'ye göre kısmi türev alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 0$$

Gerekli matematiksel işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa, aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}$$

$$\sum Y_i X_{1i} = \hat{\beta}_0 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum X_{1i} X_{2i} \qquad \text{Normal Denklemler}$$

$$\sum Y_i X_{2i} = \hat{\beta}_0 \sum X_{2i} + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} X_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}^2$$

Yukarıdaki denklem sistemi, üç bilinmeyenli üç denklemden oluşmakta ve EKK'in normal denklemleri adını almaktadır. Denklemler eş anlı çözümlendiğinde modelin bilinmeyenleri $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 \ ve \ \hat{\beta}_2$ hesaplanır. Normal denklemlerde yer alan unsurlar değişkenlerin gözlemlenen değerleridir. Orijin 0 noktası olup değişkenlerin 0'a uzaklığı hesaplamalara katılmıştır.

Ancak bu normal denklemlerin çözümü oldukça fazla zaman alır. Bundan dolayı üç değişkenli regresyon modelinin EKK tahmini için değişkenlerin ortalamadan farkları ($Y_i - \bar{Y} = y_i$, $X_{1i} - \bar{X}_1 = x_{1i}$, $X_{2i} - \bar{X}_2 = x_{2i}$) kullanılacaktır.

Öncelikle normal denklemlerden birincisinin

$$\sum Y_i = n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum X_{1i} + \hat{\beta}_2 \sum X_{2i}$$

her iki yanı n gözlem sayısına bölünür ve

$$\bar{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

sonucuna ulaşılır. Daha sonraki aşamada i. gözlem için $\hat{Y}_i$ ile $\bar{\hat{Y}}_i$ arasındaki fark alınır. EKK yönteminin özelliklerinden $\bar{\hat{Y}}_i = \hat{Y}_i$, çok değişkenli regresyon içinde geçerlidir.

$$\hat{Y}_i - \bar{\hat{Y}} = \hat{Y}_i - \bar{Y} = \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}\right) - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{X}_2\right)$$

Yukarıda $\hat{\beta}_0$ sadeleşir ve gerekli kısaltma yapılırsa

$$\hat{Y}_i - \bar{Y} = \hat{\beta}_1\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right) + \hat{\beta}_2\left(X_{2i} - \bar{X}_2\right)$$'dan

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i}$$

sonucuna ulaşılır ki; bu gösterim ortalamadan farklara göre örnek regresyon fonksiyonudur. Daha önce $Y_i = \hat{Y}_i + \hat{u}_i$ eşitliğinin, değişkenlerin ortalamalarında farklarıyla $y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$ ile gösterilebileceği bilinmektedir. Buna göre;

i. gözlem için

$y_i = \hat{y}_i + \hat{u}_i$'den

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - \left(\hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i}\right)$$

olarak yeniden yazılabilir. $i = 1 \ldots\ldots n$'e kadar her iki tarafın kareler toplamı alınır ve hata terimi kalıntı kareler toplamı fonksiyonunda $\hat{\beta}_1 \ ve \ \hat{\beta}_2$'e göre kısmi türev alınarak sıfıra eşitlenir.

$$\sum \hat{u}_i^2 = \sum\left(y_i - \left(\hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i}\right)\right)^2$$

$$\frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \sum \hat{u}_i^2}{\partial \hat{\beta}_2} = 0$$

Kısmi türevlerin sıfıra eşitlenip çözümlenmesinden aşağıdaki denklem sistemi elde edilir.

$$\sum x_{1i} y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{1i}^2 + \hat{\beta}_2 \sum x_{1i} x_{2i}$$

$$\sum x_{2i} y_i = \hat{\beta}_1 \sum x_{1i} x_{2i} + \hat{\beta}_2 \sum x_{2i}^2$$

Yukarıdaki denklem sistemine Cramer kuralı uygulanarak $\hat{\beta}_1$ *ve* $\hat{\beta}_2$ hesaplanır.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_{1i} y_i \sum x_{2i}^2 - \sum x_{2i} y_i \sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{1i} y_i \sum x_{1i} x_{2i} - \sum x_{2i} y_i \sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2}$$

$\hat{\beta}_0$ ise, $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$ eşitliğinden hesaplanır.

Basit doğrusal regresyon modeli uzayda bir doğru belirlerken, çok değişkenli regresyon modelleri bir düzlem belirlediğini bir kez daha hatırlatalım.

En küçük kareler ilkesini, en küçük kareler tahmincileri ve en küçük kareler tahminleri arasındaki farkı anlamak önemlidir. Örnek verileri kullanılarak kalıntıların karelerinin toplamı fonksiyonu minimize edilerek elde edilen $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ *ve* $\hat{\beta}_2$ için formüller, bilinmeyen parametrelerin en küçük kareler tahmincileri olarak isimlendirilen tahmin yöntemleridir. Genelde, bunların değerleri, veriler gözlemlenene kadar ve tahminler hesaplanana kadar bilinmediği için, en küçük kareler tahmincileri de rassal değişkenlerdir. En küçük kareler tahminleri ise sayısal değerlerdir.

Örnek: İthalat Modeli

Aşağıdaki tabloda ithalat, GSMH ve ithal malları fiyat endeksi verileri yer almaktadır. 1986-1989 dönemi için ithalat denklemi EKK yöntemi ile tahmin edilecektir. Not: Bu uygulamada 3 parametre tahmin edilmekte, ancak 4 gözlem kullanılmaktadır. Bu durum ekonometrik uygulama için uygun değildir, daha fazla sayıda gözlemin olması gereklidir. Ancak buradaki amaç EKK tahminlerinin nasıl elde edildiğini göstermek olduğu için, matematiksel işlemlerde basitlik olması açısından gözlem sayısı sınırlı tutulmuştur.

Yıllar	İthalat (Milyar Lira) Y	GSMH (Milyar Lira) X1	İthal Malları Fiyat Endeksi X2

1986	1	10	2
1987	3	12	1
1988	5	16	2
1989	7	22	3

İthalat denklemi $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}$'de yer alan $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1 \; ve \; \hat{\beta}_2$ için EKK tahmincileri aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_{1i} y_i \sum x_{2i}^2 - \sum x_{2i} y_i \sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\sum x_{1i} y_i \sum x_{1i} x_{2i} - \sum x_{2i} y_i \sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}_1 - \hat{\beta}_2 \bar{X}_2$$

Burada $Y_i - \bar{Y} = y_i$, $X_{1i} - \bar{X}_1 = x_{1i}$, $X_{2i} - \bar{X}_2 = x_{2i}$'dir . Öncelikle EKK tahmincilerinde yer alan aşağıdaki unsurların hesaplanması gerekir.

$$\sum y_i x_{1i} = \sum Y_i X_{1i} - n\bar{X}_1 \bar{Y} \qquad \sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y}$$

$$\sum y_i x_{2i} = \sum Y_i X_{2i} - n\bar{X}_2 \bar{Y} \qquad \sum x_{1i}^2 = \sum X_{1i}^2 - n\bar{X}_1^2$$

$$\sum x_{1i} x_{2i} = \sum X_{1i} X_{2i} - n\bar{X}_1 \bar{X}_2 \qquad \sum x_{2i}^2 = \sum X_{2i}^2 - n\bar{X}_2^2$$

Yıllar	Y	X_1	X_2	Y^2	X_1^2	X_2^2	YX_1	YX_2	X_1X_2
1986	1	10	2	1	100	4	10	2	20
1987	3	12	1	9	144	1	36	3	12
1988	5	16	2	25	256	4	80	10	32
1989	7	22	3	49	484	9	154	21	66

$\sum Y_i = 16$	$\sum X_{i1} = 60$	$\sum X_{i2} = 8$	$\sum Y_i^2 =$	$\sum X_1^2 =$	$\sum X_2^2 =$	$\sum Y_i X_1 =$	$\sum YX_2 =$	$\sum X_1 X_2 =$
$\bar{Y} = 4$	$\bar{X}_1 = 15$	$\bar{X}_2 = 2$	84	984	18	280	36	130

$$\sum y_i x_{1i} = \sum Y_i X_{1i} - n\bar{X}_1\bar{Y} = 280 - 4\times 15\times 4 = 40$$
$$\sum y_i x_{2i} = \sum Y_i X_{2i} - n\bar{X}_2\bar{Y} = 36 - 4\times 2\times 4 = 4$$
$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - n\bar{Y} = 84 - 4\times(4)^2 = 20$$
$$\sum x_{1i}^2 = \sum X_{1i}^2 - n\bar{X}_1^2 = 984 - 4\times(15)^2 = 84$$
$$\sum x_{2i}^2 = \sum X_{2i}^2 - n\bar{X}_2^2 = 18 - 4\times(2)^2 = 2$$
$$\sum x_{1i} x_{2i} = \sum X_{1i} X_{2i} - n\bar{X}_1\bar{X}_2 = 130 - 4\times 15\times 2 = 10$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{(40\times 2) - (4\times 10)}{(84\times 2) - (10)^2} = 0.58$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{(40\times 10) - (4\times 84)}{(84\times 2) - (10)^2} = -0.94$$

$$\hat{\beta}_0 = 4 - (0.58\times 15) - (-0.94\times 2) = -2.9412$$

$$\hat{Y}_i = -2.94 + 0.58X_1 - 0.94X_2$$

İthalat malları fiyat indeksi sabit iken, GSMH'daki 1 milyar liralık artış, ithalatı ortalama olarak 0.58 milyar lira arttıracaktır. GSMH sabit iken, ithal malları fiyat indeksindeki 1 br'lik artış ithalatı 0.94 milyar lira azaltır. GSMH ve ithalat fiyat indeksi dışındaki değişkenlerin ithalat üzerindeki ortalama etkisi -2.94 milyar liradır.

İthalatın gelir ve fiyata göre ortalama esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\varepsilon_{YX_1} = \frac{\partial Y}{\partial X_1}\times\frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = \hat{\beta}_1\times\frac{\bar{X}_1}{\bar{Y}} = (0.58)\frac{15}{4} = 2.175$$

$$\varepsilon_{YX_2} = \frac{\partial Y}{\partial X_2}\times\frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = \hat{\beta}_2\times\frac{\bar{X}_2}{\bar{Y}} = (-0.94)\frac{2}{4} = -0.47$$

GSMH'daki %1'lik artış, ithalatı ortalama olarak % 2.2 arttırmaktadır. Fiyatlardaki %1'lik artış, ithalatı ortalama olarak % 0.47 azaltmaktadır.

Bu aşamada $X_1 = 16$ ve $X_2 = 2$ olduğu noktada ithalatın gelir ve fiyata için elastikiyetini hesaplayarak yorumlayalım.

Öncelikle $X_1 = 16$ ve $X_2 = 2$ olduğu noktada ithalatın tahmini değerini bulmamız gerekir.

$$\hat{Y}_i = -2.94 + 0.58X_1 - 0.94X_2 = -2.94 + 0.58(16) - 0.94(2) = 4.46$$

$X_1 = 16$ olduğu noktada ithalatın gelir esnekliği

$$\varepsilon_{YX_1} = \frac{\partial Y}{\partial X_1} \times \frac{X_{1i}}{\hat{Y}} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X_1 = 14}{\hat{Y}} = (0.58)\frac{14}{4.46} = 1.82$$

$X_2 = 2$ olduğu noktada ithalatın fiyat esnekliği

$$\varepsilon_{YX_2} = \frac{\partial Y}{\partial X_2} \times \frac{X_{2i}}{\hat{Y}} = \hat{\beta}_2 \times \frac{X_2 = 2}{\hat{Y}} = (-0.94)\frac{2}{4.46} = -0.42$$

Bu sonuca göre $X_1 = 16$ ve $X_2 = 2$ olduğu noktada ithalat gelire göre esnek değil, fiyata göre esnektir.

Uygulama: Satış Modeli

Tablo Satış, fiyat, reklam harcamaları verileri

Şehir	Satışlar (1000 $)	Fiyat (1 $)	Reklam harcamaları (1000 $)
1	73.2	5.69	1.3
2	71.8	6.49	2.9
3	62.4	5.63	0.8
4	67.4	6.22	0.7
5	89.3	5.02	1.5
-	-	-	-
-	-	-	-
-	-	-	-
73	75.4	5.71	0.7
74	81.3	5.45	2.0
75	75.0	6.05	2.2
Özet İstatistikler			
Ortalama	77.37	5.69	1.84
Medyan	76.50	5.69	1.80

Maksimum	91.20	6.49	3.10
Minimum	62.40	4.83	0.50
Std. Sapma	6.49	0.52	0.83

75 şehir verilerine göre satışların (Y) fiyat (X_1) ve reklam harcamaları (X_2) ile açıklandığı satış denkleminin EKK tahminleri aşağıda verilmiştir. Tahmin edilen parametreleri yorumlayalım.

$$\hat{Y}_i = 118,91 - 7,908X_1 + 1,863X_2$$

Yukarıdaki denklemden bilgiden hareketle, fiyatın (X_1) negatif katsayısı, talebin fiyata göre esnek olduğunu göstermektedir. Reklam harcamaları sabit tutulduğunda, fiyat 1 dolar artışın, aylık satış gelirlerinin (7,908x1000) 7908 dolar azalışa yol açacağı tahmin edilmektedir. Veya farklı bir şekilde ifade edersek, fiyattaki 1 dolarlık düşüş, satış gelirlerinde 7908 dolar kadar bir artışa yol açar.

Reklam harcamalarının (X_2) parametresinin işareti pozitiftir. Buna göre fiyat sabit tutulduğunda, reklam harcamasındaki 1000 dolarlık bir artış, satış gelirlerinde 1863 dolar kadar bir artışa yol açacaktır.

Tahmin edilen otonom parametrenin değeri, hem fiyat hem de reklam harcaması sıfır olursa, satış hasılatının 118914 dolar olacağını göstermektedir. Açık bir şekilde, bu sonuç mümkün değildir; iktisadi gerçeklere göre sıfır fiyat, sıfır satış hasılat anlamına gelir. Otonom parametrenin modele ilave edilmesi, doğrudan yorumlanamasa bile tahmini iyileştireceği için tercih edilen bir yoldur.

Fiyat veya reklam değiştiğinde, satışların nasıl değişeceği ile ilgili bilgi sağlamasına ilave olarak, tahmin edilen denklem, öngörü için de kullanılabilir. Fiyat 5.50 dolar ve reklam harcaması 1200 dolar iken, satış gelirini öngörmek istersek, aşağıdaki işlemi uygularız. (Dikkat: reklam harcamasının birimi 1000 dolar olduğu için 1200 dolar denklemde 1.2 olarak yer alacaktır.)

$$\hat{Y}_i = 118.914 + 1.863X_1 - 7.908X_2$$

$$\hat{Y}_i = 118.914 + 1.863(5.5) - 7.908(1.2)$$

$$\hat{Y}_i = 77.656$$

Yukarıdaki sonuca göre fiyat 5.50 dolar ve reklam harcaması 1200 dolar iken, satış gelirinin öngörülen değeri 77656 dolardır.

Hata Terimi Varyansının (σ^2)Tahmini

Çok değişkenli regresyon modelinde, modelin parametreleri $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$'nın tahminlerinden sonra tahmin edilmesi gereken bir diğer parametre de hata terimi varyansıdır.

$$\sigma^2 = Var(u_i) = E(u_i^2)$$

Hata terimi varyansını (σ^2), kareli hataların (u_i^2) beklenen değeri veya ana kütle ortalaması olarak düşünebiliriz. Ancak kareli hatalar (u_i^2) gözlemlenemez. Bu nedenle σ^2 için EKK kalıntılarının karelerine dayanan bir tahminci geliştirilir. $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}$ için, bu kalıntılar aşağıdaki gibidir:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}\right)$$

σ^2'nin u_i 'deki değişkenliği veya eşdeğer olarak, Y_i'nin ortalama fonksiyon $\beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$ etrafında değişkenliği ölçmesi nedeniyle $\hat{u}_i$ de σ^2 ile ilgili bilgi sağlayacaktır. $\hat{u}_i^2$'den elde edilen bu bilgiyi kullanan ve istatistiksel açıdan iyi özellikleri sahip olan σ^2 için bir tahminci aşağıdaki gibidir:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_i^2}{n-k}$$

Burada k, çok değişkenli regresyon modelinde tahmin edilen parametre sayısıdır. $\hat{\sigma}^2$, ortalama işlemindeki n yerine $n-k$ olan payda ile $\hat{u}_i^2$'nın bir ortalaması olarak düşünülebilir. $\hat{\sigma}^2$ sapmasız olması için, u_i^2'yi, $\hat{u}_i^2$ ile yer değiştirmek, n yerine $n-k$ 'nin kullanılmasını gerektirir.

$\hat{u}_i$, u_i'in tahminleri olduğu için, $\hat{u}_i$'nın büyük değerleri, σ^2'nin büyük olduğu anlamına gelmektedir. Diğer yandan $\hat{u}_i$'nın küçük değerleri, σ^2'nin küçük olduğunu ifade etmektedir. $\hat{u}_i$'nın "büyük" değerleri, büyük pozitif ve büyük negatif değerler anlamındadır. Kalıntı karelerini $\hat{u}_i^2$'yi kullanmanın amacı pozitif değerlerin $\hat{u}_i^2$ negatif değerleri yok etmesini önlemektir, böylece, kalıntı kareler toplamı ($\hat{u}_i^2$) , σ^2 ile ilgili bilgi sağlamaktadır.

Hata varyansını tahmin etmenin temel sebebi, en küçük kareler tahmincilerinin bilinmeyen varyans ve kovaryanslarının bir tahminini elde etmeyi bize sağlamasıdır.

Örnek: Satış Modeli

Satış modelinde de ithalat modelinde olduğu gibi 75 gözlem için gözlemlenen Y_i değerlerinden tahmin edilen $\hat{Y}_i$ değerleri çıkarılarak kalıntılar hesaplamış, daha sonra kalıntıların karelerin $\hat{u}_i^2$ toplamı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır. Satış modeli için ilk olarak hata terimi varyansı tahmin edilecek, daha sonra tahminin standart hatası hesaplanacaktır.

$$\sum_{i=1}^{75} \hat{u}_i^2 = 1718.943$$

k=3 olduğuna göre hata terimi varyansının tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{75} \hat{u}_i^2}{n-k} = \frac{1718.943}{75-3} = 23.874$$

Tahminin standart hatası ise:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{23.874} = 4.8861$$

$\hat{\sigma}$, bazen regresyonun standart hatası olarak da isimlendirilir.

En Küçük Kareler Tahmincilerinin Örnekleme Özellikleri

EKK tahmincileri $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ rassal değişkenlerdir; farklı örneklerde farklı değerler alırlar ve değerleri, bir örnek toplanana kadar ve değerleri hesaplanana kadar bilinmez. En küçük kareler tahmincisinin örnekleme özellikleri, tahminlerin örnekten örneğe nasıl değiştiğini gösterir. Bunlar, tahminlerin güvenilirliğini değerlendirmede bir temel sağlar. Eğer model için 1-5 varsayımları sağlanırsa, en küçük kareler tahmincisi sapmasızdır ve daha küçük bir varyansa sahip başka bir doğrusal sapmasız tahminci yoktur. Bu sonuç, genel çok değişkenli regresyon modeli için doğru olmaya devam etmektedir.

Gauss Markov Teoremi: Çok değişkenli regresyon modeli için 1-5 varsayımları sağlanırsa, EKK Tahmincileri parametrelerin en iyi doğrusal sapmasız tahmincilerdir (BLUE).

Hataların normal dağıldığı varsayımı altında, Y de normal dağılan rassal değişkendir. En küçük kareler tahmincileri de, Y 'nin doğrusal fonksiyonları olduğu için normal olasılık dağılımlarına sahip olacaktır. Hatalar normal dağılmazsa EKK tahmincileri, büyük örneklerde yaklaşık olarak normal dağılacaktır. Burada "büyük "den kastın ne olduğu karmaşıktır. Bu, her ayrı uygulamaya özgü çok sayıda faktöre bağlıdır. Genelde, $n-k=50$ ise yeterince büyük sayılır. Normal veya yaklaşık olarak normal dağılım gösteren en küçük kareler tahmincilerine sahip olmak, aralık tahminlerini oluşturmak ve regresyon modelindeki parametreler ile ilgili hipotezleri test etmek için önemlidir.

En Küçük Kareler Tahmincilerinin Varyans ve Kovaryansları

En küçük kareler tahmincilerinin varyans ve kovaryansları, $\beta_0, \beta_1\ ve\ \beta_2$ tahmincilerinin güvenilirliği ile ilgili bilgi sağlar. EKK tahmincileri sapmasız olduğu için, daha küçük varyanslar doğru parametre değerlerine "yakın" tahminler sağlama olasılığının daha yüksek olması anlamına gelecektir.

$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i}$ için, en küçük kareler tahmincilerinin varyans ve kovaryansları, aşağıdaki gibidir.

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1^2 \sum x_{2i}^2 + \bar{X}_2^2 \sum x_{1i}^2 - 2\bar{X}_1\bar{X}_2 \sum x_{1i}x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i}x_{2i}\right)^2}\right]\sigma^2$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i}x_{2i}\right)^2}\sigma^2 = \text{veya} = \frac{\sigma^2}{\sum x_{1i}^2 (1-r_{12}^2)}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i}x_{2i}\right)^2}\sigma^2 = \text{veya} = \frac{\sigma^2}{\sum x_{2i}^2 (1-r_{12}^2)}$$

$$Kov(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) = \frac{-r_{12}\sigma^2}{(1-r_{12}^2)\sqrt{\sum x_{1i}^2}\sqrt{\sum x_{2i}^2}}$$

Burada r_{12}, X_1 ile X_2 arasındaki örnek korelasyon katsayıdır.

$$r_{12} = \frac{\sum x_{1i}x_{2i}}{\sqrt{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2}}$$

$\hat{\beta}_1$'nin varyansını etkileyen faktörler aşağıdaki gibidir.

Hata terimi varyansının (σ^2) büyük olması, EKK tahmincileri varyanslarının da büyük olmasına yol açar. Bu beklenen durumdur, çünkü σ^2 model tanımlamasındaki tüm belirsizliği ölçmektedir. σ^2 büyükse, veri değerleri regresyon fonksiyonu $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$ etrafında geniş bir şekilde yayılacak ve verilerde, parametre değerleri ile ilgili daha az bilgi söz konusu olacaktır. σ^2 küçükse, veri değerleri regresyon fonksiyonu $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i}$ etrafında yoğun bir şekilde yayılacak ve verilerde, parametre değerlerinin ne olabileceği ile ilgili daha fazla bilgi söz konusu olacaktır.

Daha büyük örnekler (n) ile çalışılması, EKK tahmincilerinin varyanslarının daha küçük olmasını sağlar. Şöyle ki; n'nin daha büyük değeri, X'deki değişmenin $\sum\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2 = \sum x_{1i}^2$ değerinin daha büyük olması anlamına gelir. Bu terim, varyans formülünün paydasında yer alır ve $\sum x_{1i}^2$ teriminin değeri büyük olduğunda, $Var\left(\hat{\beta}_1\right)$ küçük olur. Daha fazla gözlem, daha kesin parametre tahmini sağlar.

Bağımsız bir değişkenin $\sum\left(X_{1i} - \bar{X}_1\right)^2 = \sum x_{1i}^2$ ile ölçülen ortalama etrafındaki değişiminin daha fazla olması EKK tahmincisinin daha küçük varyansa sahip olmasını sağlar. β_1'yi hassas bir şekilde tahmin etmek için X_1'de daha fazla değişim istenir bir özelliktir. X_1'de değişim küçük olursa, değişimin etkisini ölçmek zordur. Bu zorluk, β_1 için daha büyük varyans olarak yansıtılacaktır.

X_1 ile X_2 arasındaki yüksek korelasyon, β_1'nin varyansının da büyük olmasına yol açar. Varyans formülünün paydasında $\left(1-r_{12}\right)$ vardır. $\left|r_{12}\right|$'ün değeri 1'e yakınsa, $\left(1-r_{12}\right)$ küçük olacak, bu da $Var\left(\hat{\beta}_1\right)$'nin büyük çıkmasına sebep olacaktır. Bu durum nedeni ise; X_1'in ortalaması etrafındaki değişim, diğer açıklayıcı değişkenlerdeki değişimle ilişkili olmadığında tahmin kesinliğine daha fazla katkı yapar. Bir açıklayıcı değişkendeki değişim, diğer bir açıklayıcı değişkendeki değişimle ilişkili olduğunda, onların farklı etkilerini ayrıştırmak zordur. Doğrusal bağlantı ile adlandırılan bu durum EKK tahmincilerinin büyük varyansları olmasına sebep olur.

En küçük kareler tahmincilerinin tahmin edilen varyans ve kovaryanslarını, matris olarak isimlendirilen bir kare dizilimde düzenlemek gelenek olmuştur. Bu matrisde, köşegen varyansları ve köşegen dışı unsurlar ise kovaryansları ifade eder.r. Varyans-kovaryans matrisi veya daha basitçe kovaryans matrisi olarak isimlendirilir. $k = 3$ iken, kovaryans matrisinde varyans ve kovaryansların sıralaması aşağıdaki gibidir,

$$Var - Cov\left(\hat{\beta}_i\right) = \begin{vmatrix} Var\left(\hat{\beta}_0\right) & Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) & Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) & Var\left(\hat{\beta}_1\right) & Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2\right) & Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) & Var\left(\hat{\beta}_2\right) \end{vmatrix}$$

Varyans –Kovaryans matrisi simetrik bir matristir.

Örnek: İthalat modeli

Bu aşamada İthalat modelindeki parametrelere uygulanacak hipotez testleri ve aralık tahmini için gerekli olan parametrelerin varyansları tahmin edilecektir.

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}_1^2 \sum x_{2i}^2 + \bar{X}_2^2 \sum x_{1i}^2 - 2\bar{X}_1 \bar{X}_2 \sum x_{1i} x_{2i}}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2}\right] \hat{\sigma}^2$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = \left[\frac{1}{4} + \frac{(15)^2 2 + (2)^2 84 - 2\times 15\times 2\times 10}{84\times 2 - (10)^2}\right] 0.56 = 150.9$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{\sum x_{2i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2} \hat{\sigma}^2$$

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \frac{2}{84\times 2 - (10)^2} 0.56 = 0.01647$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{\sum x_{1i}^2}{\sum x_{1i}^2 \sum x_{2i}^2 - \left(\sum x_{1i} x_{2i}\right)^2} \hat{\sigma}^2$$

$$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = \frac{84}{84\times 2 - (10)^2} 0.56 = 0.69176$$

$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ tahmin edilen varyanslarının karekökleri standart hatalarıdır. Hesaplanmış standart hatalar gibidir:

$Se\left(\hat{\beta}_0\right) = \sqrt{150.9} = 12.28$

$Se\left(\hat{\beta}_1\right) = \sqrt{0.01647} = 0.128$

$Se\left(\hat{\beta}_2\right) = \sqrt{0.69176} = 0.832$

Bu aşamaya kadar ulaştığımız sonuçları aşağıdaki gibi raporlayabiliriz.

$$\hat{Y}_i = -2.82 + 0.58X_1 - 0.94X_2 \qquad \hat{\sigma} = 0,7483$$

$$Se(\hat{\beta}_i) \ \ (12.28)(0.128) \ \ (0.832)$$

Örnek: Satış Modeli

Satış örneğinde $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ için tahmin edilen varyans ve kovaryans matrisi aşağıdaki gibidir. $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ ve $\hat{\beta}_2$ için standart hataları hesaplayınız.

$$Var - Cov\left(\hat{\beta}_i\right) = \begin{bmatrix} 40.343 & -6.795 & -0.7484 \\ -6.795 & 1.201 & -0.0197 \\ -0.7484 & -0.0197 & 0.4668 \end{bmatrix} \quad Var - Cov\left(\hat{\beta}_i\right) = \begin{vmatrix} Var\left(\hat{\beta}_0\right) & Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right) & Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right) & Var\left(\hat{\beta}_1\right) & Cov\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\right) \\ Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_2\right) & Cov\left(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_2\right) & Var\left(\hat{\beta}_2\right) \end{vmatrix}$$

Varyans kovaryans matrisinin köşegen elemanları tahmin edilen parametrelerin varyansınn verdiğine göre, varyansın karekökünü alarak standart hatalara ulaşırız.

$Var\left(\hat{\beta}_0\right) = 40.343 \Rightarrow Se\left(\hat{\beta}_0\right) = 6.351$

$Var\left(\hat{\beta}_1\right) = 1.201 \Rightarrow Se\left(\hat{\beta}_1\right) = 1.096$

$Var\left(\hat{\beta}_2\right) = 0.4668 \Rightarrow Se\left(\hat{\beta}_2\right) = 0.683$

Ayrıca tahmin edilen parametreler arasındaki kovaryanslar aşağıdaki gibidir.

$Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = -6.795$

$Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_2\right) = -0.7484$

$Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2\right) = -0.0197$

Yukarıda hesaplanmış standart hatalar, 75'den daha büyük örneği elde ettiğimizde, en küçük kareler tahminlerinin aralığı ile ilgili bir şey söylemek için kullanılabilir. Örneğin, $\hat{\beta}_1$'nin standart hatası yaklaşık olarak $Se\left(\hat{\beta}_1\right)=1.096$ 'dir. En küçük kareler tahmincisinin sapmasız olduğu böylece ortalamasının ana kütle değerine eşit olduğu bilinmektedir $E\left(\hat{\beta}_1\right)=\beta_1$.

$\hat{\beta}_1$ normal dağılırsa istatistiksel teoriye dayanarak, EKK tahmincisinin diğer örneklere uygulanması ile elde edilen $\hat{\beta}_1$ tahminlerinin %95'nin, yaklaşık olarak β_1'nin ortalamasının iki standart sapması içinde olacağı beklenir. Burada $2\times Se\left(\hat{\beta}_1\right)=2\times1.1=2.2$ dir. Böylece, $\hat{\beta}_1$ değerlerinin %95'nin, $\beta_1\pm2.2$ aralığı içinde yayılacağı tahmin edilir. $\hat{\beta}_1$'nin tahmin edilen varyansı ve dolayısıyla standart hatası, en küçük kareler tahminlerinin güvenirliği bakımından bize yol göstericidir. Eğer $\hat{\beta}_1$ ve $\beta_1$arasındaki fark büyük olursa, $\hat{\beta}_1$ güvenilmezdir. Eğer $\hat{\beta}_1$ ve β_1 arasındaki fark muhtemelen küçük olursa, $\hat{\beta}_1$ güvenilirdir. Belirli bir farkın "büyük" veya "küçük" olup olmadığı, sorunun bağlamına ve tahminlerin kullanımına bağlı olacaktır. Bu konu sonraki bölümlerde, tahmin edilen varyans ve kovaryansları, parametreler ile ilgili hipotezleri test etmek için ve aralık tahminlerini oluşturmak için kullandığımızda, tekrar ele alınacaktır.

Uyum İyiliğinin Ölçülmesi

Basit regresyon modeli için, bağımsız değişkenle açıklanan değişmenin toplam değişmeye oranı ile ölçülen belirlilik katsayısını r^2, çok değişkenli regresyon modeli için de kullanılır aynı formüller geçerlidir. Belirlilik katsayısı aşağıdaki gibi hesaplandığı basit regresyon modelinden bilinmektedir.

$$R^2=\frac{\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}=\frac{\sum\hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

veya

$$R^2=1-\frac{\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sum(Y_i-\bar{Y})^2}=1-\frac{\sum\hat{u}_i^2}{\sum y_i^2}$$

Burada

$\sum(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$;Y'deki toplam değişimin model (regresyon kareler toplamı) tarafından "açıklanan" kısmı,

$\sum(Y_i-\bar{Y})^2$;Y'nin ortalaması etrafındaki toplam değişimi (bütün kareler toplamı) ve $\sum(Y_i-\hat{Y}_i)^2$, EKK kalıntı (hata) kareler toplamı olup, Y'deki değişimin model tarafından açıklanamayan kısmıdır.

$\hat{Y}_i$ simgesi, bağımsız değişkenlerin örnek değerlerinin her biri için Y' nin tahmini değerini gösterdiğine göre, (k-1) değişken için $\hat{Y}_i$ aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$\hat{Y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1X_{1i}+\hat{\beta}_2X_{2i}+\cdots+\hat{\beta}_{k-1}X_{(k-1)i}$$

Model bir kesim terimi ($\hat{\beta}_0$) içerdikçe, bağımlı değişkenin örnek ortalaması $\bar{Y}$, hem Y_i 'nin hem de $\bar{\hat{Y}}$ ortalamasıdır ($\bar{Y}=\bar{\hat{Y}}$)

Y için örnek standart sapması aşağıdaki gibi ifade edilebilir,

$$\sigma_Y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2$$

$$\sigma_Y=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2}=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$$

ve böylece, $\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}y_i^2=(n-1)\sigma_Y^2$ olur.

Belirginlik katsayısı 0 ile 1 arasında değer alır. R^2'nin değeri yükseldikçe regresyon düzleminin örnek gözlemlerine uyumu artar. k-1 sayıda bağımsız değişkeni olan çok değişkenli bir regresyon modeli için R^2 formülünü genişletilirse;

$$R^2=\frac{\sum\hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}=\frac{\hat{\beta}_1\sum x_{1i}y_i+\hat{\beta}_2\sum x_{2i}y_i+\cdots+\hat{\beta}_{k-1}\sum x_{(k-1)i}y_i}{\sum Y_i^2-n\bar{Y}^2}$$

sonucuna ulaşılır. Bağımlı değişken üzerinde etkili olsun veya olmasın modele giren her değişken belirginlik katsayısı R^2 nin değerini arttıracaktır. Şöyle ki; R^2 eşitliğindeki toplam değişme ($\sum y_i^2$) bağımsız değişkenlerden bağımsızdır ve değeri sabittir. Modele giren her değişken regresyonla açıklanan değişmeyi ($\sum\hat{y}_i^2$) arttıracaktır. Paydanın ($\sum y_i^2$) değeri sabit iken payın ($\sum\hat{y}_i^2$) değerinin artması belirginlik katsayısının yanıltıcı şekilde artmasına neden olur. Bu mahsuru ortadan kaldırmak için çok değişkenli regresyon modellerinde genellikle R^2 yerine düzeltilmiş R^2 hesaplanır. Düzeltilmiş belirginlik katsayısı $\bar{R}^2$ ile gösterilir ve

$$\bar{R}^2 = 1-(1-R^2)\frac{n-1}{n-k}$$

'e eşittir. Düzeltilmiş R^2 ($\bar{R}^2$), belirginlik katsayısının serbestlik derecesiyle yeniden düzenlenmiş halidir. Gözlem sayısı yeterince büyükse $\bar{R}^2$ ile R^2 birbirine yakındır. Ancak gözlem sayısı küçükse düzeltilmiş belirginlik katsayısı, belirginlik katsayısından daha küçüktür ($\bar{R}^2 \le R^2$)hatta belirginlik katsayısı negatif değer almazken (orijinden geçen regresyon hariç) $\bar{R}^2$ negatif değer alabilmektedir. Belirsizlik katsayısı yine $1-R^2$ 'ye eşittir.

$$\bar{R}^2 \le R^2$$

Alternatif modellerin R^2 kriterine göre karşılaştırılabilmesi için bağımlı değişkenin aynı olması gerekir. Şöyle ki; aynı değişkenler arasındaki ilişkiyi açıklayan

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2}$$

ile

$$\ln \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \ln X_{i1} + \hat{\beta}_2 \ln X_{i2}$$

modelleri arasında tercih yapmak için R2 uygun bir ölçü değildir. Çünkü Y'deki toplam değişim ile ln Y'deki toplam değişim aynı değildir.

Y ile X arasındaki ilişkinin derecesini gösteren basit korelasyon katsayısını (r), basit regresyon modelinde belirginlik katsayısının (r^2) karekökünden elde etmenin mümkün olduğunu biliyoruz. Çok değişkenli regresyon modelinde belirginlik katsayısının (R2) karekökü çoklu korelasyon katsayısına eşittir. Çoklu korelasyon katsayısı da bağımlı değişken ile bağımsız değişkenler arasındaki ilişkinin derecesini gösterir. Ancak kısmi korelasyon katsayılarının işareti farklı olduğu için, belirginlik katsayısından hesaplanan çoklu korelasyon katsayısına artı veya eksi işaret verilemez. Bu nedenden dolayı, uygulamada genellikle belirginlik katsayısı hesaplanır ve yorumlanır.