5. ve 6. Hafta

Esneklik

İktisat derslerimizde talebin gelir esnekliği, talebin fiyat esnekliği, talebin gelir esneklikliği kavramlarını öğrendik. Örneğin talebin gelir esnekliği, gelirdeki değişimler karşısında tüketicinin tepkisini göstermektedir.

Doğrusal bir ilişkide *Y* değişkenin, *X* değişkenine göre esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varepsilon = \frac{Y\text{'deki yüzde değişim}}{X\text{'deki yüzde değişim}} = \frac{\Delta Y/Y}{\Delta X/X} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \times \frac{X}{Y}$$

$E\left(Y|X = X_i\right) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ ile verilen doğrusal ekonomik modelde, β_1'i aşağıdaki gibi tanımlamıştık.

$$\beta_1 = \frac{\Delta E(Y)}{\Delta X}$$

Bu durumda, gelire göre ortalama harcama esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\varepsilon = \frac{\Delta E(Y)/E(Y)}{\Delta X/X} = \frac{\Delta E(Y)}{\Delta X} \times \frac{X}{E(Y)} = \beta_1 \times \frac{X}{E(Y)}$$

Esnekliği hesaplamak için β_1 yerine, örnek verilerinden hesaplanan $\hat{\beta}_1$ gelir. Ayrıca "X" ve "$E(Y)$" de değiştirilmek zorundadır. Çünkü doğrusal bir modelde esneklik, regresyon doğrusu boyunca her bir noktada farklıdır. Çoğunlukla, esneklik "ortalamalar noktasından $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$ hesaplanır, çünkü regresyon doğrusunda bu uygun bir temsil noktasıdır. Buna göre ortalamalar noktasında gelir esnekliği için aşağıdaki formül kullanılır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}}$$

Ortalamaya göre esneklik hesaplanabileceği gibi *X'in* belli bir değere eşit ($X = X_i$) olduğu nokta için de hesaplanabilir. Bu durumda $X = X_i$ olduğu noktada regresyon denkleminden $\hat{Y}_{X=X_i}$'nin hesaplanması gerekir.

$$\hat{Y}_{X=X_i} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\left(X_i\right)$$

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X_i}{\hat{Y}_{X=X_i}}$$

formulü ile hesaplanır.

Örnek: Satış gelirleri-Reklam harcamaları

Satış gelirleri ile reklam harcamaları uygulamasında örnek verilerinden aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştı.

$\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i \quad \bar{Y} = 4.6 \quad \bar{X} = 3$

Yukarıdaki sonuçlara göre, ilk olarak satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliğini hesaplayalım. *X* ve *Y* örnek ortalama değerler $(\bar{X},\bar{Y}) = (3,4.6)$ olduğuna göre satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 1.2 \times \frac{3}{4.6} = 0.78$$

$(\bar{X},\bar{Y}) = (3,4.6)$ alındığında, reklam harcamalarındaki %1'lik bir artış, satışlarda ortalama %0.78'lik bir artışa yol açar. Tahmin edilen reklam harcamaları esnekliği birden küçük olduğu için, satışların arttırılması için reklam harcamalarının zorunlu olduğu sonucunu çıkarmak mümkündür.

İkinci olarak *X*=5 olduğu noktada satışların reklam harcamalarına göre ortalama esnekliğini hesaplayalım. X=5 ise $\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2(5) = 7$ 'dir. $(X_i,\hat{Y}_{x_i}) = (5,7)$ noktasında satışların reklam harcamalarına göre esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = X_i}{\hat{Y}_{X=X_i}} = 1.2 \times \frac{5}{7} = 0,86$$

$(X_i,\hat{Y}_{x_i}) = (5,7)$ noktasında birim esneklik söz konusudur. Reklam harcamalarındaki %1'lik bir artış, satışlarda %0,86'lik bir artışa yol açar.

Örnek: Tüketim Modeli

Örnek 1 verileri

$\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61X_i \qquad \bar{Y} = 121.1 \quad \bar{X} = 170$

Ortalamalar noktasında -$(\bar{X},\bar{Y}) = (170,121.1)$- gelir esnekliği aşağıdaki aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 0.61 \times \frac{170}{121.1} = 0.86$$

X ve *Y* örnek ortalama değerlerini $(\bar{X},\bar{Y}) = (170,121.1)$ aldığında, hane halkı gelirindeki %1'lik bir artış, ortalama olarak hane halkı tüketim harcamasında %0.86'lık bir artışa yol açar.

Tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, tüketim harcamaları “lüks” değil “zorunlu” dur -ki bu sonuç, ortalama bir hane halkı için beklentilerimizle ile tutarlıdır.

İkinci olarak X=160 olduğu noktada ortalama gelir esnekliğini hesaplayalım. X=160 ise $\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61(160) = 114.89$ ’dur. $(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (160,114,89)$ noktasında gelir esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = 160}{\hat{Y}_{X=160}} = 0.61 \times \frac{160}{114.89} = 0.85$$

Gelirin 160 olduğu noktada tüketimin gelir esnekliği 0.85’e eşittir. Diğer bir ifade ile gelir %1 artarsa, tüketim %0.85 artacaktır.

Örnek 2 verileri

$\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65 X_i \qquad \bar{Y} = 120.7 \quad \bar{X} = 170$

Ortalamalar noktasında -$(\bar{X}, \bar{Y}) = (170,120.7)$- gelir esnekliği aşağıdaki aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 0.65 \times \frac{170}{120.7} = 0.92$$

X ve Y örnek ortalama değerlerini $(\bar{X}, \bar{Y}) = (170,120.7)$ aldığında, hane halkı gelirindeki %1’lik bir artış, ortalama olarak hane halkı tüketim harcamasında %0.92’lık bir artışa yol açar. Bu örnek verilerinden de tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, tüketim harcamaları “lüks” değil “zorunlu” dur.

İkinci olarak X=220 olduğu noktada ortalama gelir esnekliğini hesaplayalım. X=220 ise $\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65(220) = 152.37$ ’dir. $(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (220,152.37)$ noktasında gelir esnekliği aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır.

$$\hat{\varepsilon} = \hat{\beta}_1 \times \frac{X = 220}{\hat{Y}_{X=220}} = 0.65 \times \frac{220}{152.37} = 0.94$$

$(X_i, \hat{Y}_{x_i}) = (220,152.37)$ noktasında hane halkı gelirindeki %1’lik bir artış, hane halkı tüketim harcamasında %0.94’lük bir artışa yol açar.

Örnek: Gıda Harcamaları

$\hat{Y}_i = 83,4160 + 10,21 X_i \qquad (\bar{X}, \bar{Y}) = (19,6048\,;\,283,5735)$

X_i ve Y_i ’nin örnek ortalama değerleri $(\bar{X}, \bar{Y}) = (19,6048\,;\,283,5735)$ aldığında, haftalık hane halkı gelirindeki %1’lik bir artış, ortalama olarak haftalık hane halkı gıda harcamasında

%0.71'lik bir artışa yol açar. Tahmin edilen gelir esnekliği birden küçük olduğu için, gıda "lüks" değil "zorunlu" maldır.

EKK Tahmincilerinin Değerlendirilmesi

60 ailenin harcanabilir gelir ve tüketim harcamalarının yer aldığı ana kütleyi tanıtmış, bu ana kütleden çekilen iki örnek verileri kullanılarak, $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ regresyon modeli için iki ayrı parametre tahminleri elde etmiştik. Elde edilen sonuçlara göre, β_0 ve β_1'in EKK tahminlerinin ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) örnekten örneğe değiştiği görülmüştür (*Hatırlatma*; Örnek 1 için $\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61 X_i$, Örnek 2 için $\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65 X_i$). "Bu tahminlerin hangisi daha iyi?" sorusunu sormak doğaldır ancak bu soru cevaplanamaz. Çünkü ana kütle parametreleri β_0 ve β_1'in gerçek değerleri bilinemediği için $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ parametrelerinin gerçek ana kütle değerlerine ne kadar yakın olduğunu söylemek olanaksızdır.

Örnek 1 ve Örnek 2 'deki gibi aynı gelir gruplarına sahip hane halklarını seçilmiş bile, *farklı* bir ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) tahminleri elde edilmesi *örnekleme değişkenliği*'nden kaynaklanmakta olup, bu *örnekleme değişkenliği* kaçınılmazdır. Bir tahmincinin örnekleme doğruluğunu ve güvenilebilirliğini değerlendirmek açısından örnekleme değişkenliğini anlamak önem arz eder. Hane halkı tüketim harcamaları, Y_i, i=1,....,60 rassal değişkenler olduğu için, farklı örnekler farklı tahminler verecektir. Sonuç olarak, bir tahmin süreci olarak düşündüğümüzde ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) 'de rassal değişkenlerdir, çünkü değerleri *Y* rassal değişkenine bağlıdır. Bu bağlamda $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ *EKK tahmincileri* olarak isimlendirilir. En küçük kareler tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ rassal değişkenler ise, bu durumda, bunların beklenen değerleri, varyansları, kovaryansları ve olasılık dağılımları ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) tahmincilerinin *örnekleme özellikleri* ile ilgilidir.

Doğrusallık

EKK normal denklemleri veya EKK ortalamadan sapmalar biçimi, en küçük kareler tahminleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'yi hesaplamak için kullanılabilir. Ne var ki, bu formüller tahmincilerin teorik özelliklerini incelemek için yeterince uygun değildir. Tahmin edilen parametreler, regresyon modelindeki bağımlı değişken *Y* gibi rassal bir değişkenin doğrusal bir fonksiyonudur. $\hat{\beta}_1$ için doğrusallık özelliğini göstermek amacıyla, $\hat{\beta}_1$'in ortalamadan sapmaya göre EKK tahmincisi yeniden yazılacaktır.

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum(X_i - \bar{X})^2}$$

Burada

$$k_i = \frac{(X_i - \bar{X})}{\sum(X_i - \bar{X})^2} = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

k_i 'nin özellikleri:

1. X_i'lerin olasılık dağılımı olmadığı (rassal olmadığı) için, k_i'ler de olasılık dağılımı (rassal değildir) yoktur.

2. $\sum k_i = 0 \rightarrow \sum k_i = \sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right) = \frac{1}{\sum x_i^2}\underbrace{\sum x_i}_{0} = 0$

3. $\sum k_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$

4. $\sum k_i X_i = \sum k_i x_i \rightarrow \sum\left(\frac{x_i}{\sum x_i^2}\right)x_i = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1$

le de tanımlanabilir.

X	$x_i = X_i - \bar{X}$	x_i^2	k_i	k_i^2	$\sum k_i X_i$	$\sum k_i x_i$
1	-2	4	-2/10	4/100	-2/10	
2	-1	1	-1/10	1/100	-2/10	
3	0	0	0	0	0	
4	1	1	1/10	1/100	4/10	
5	2	4	2/10	4/100	10/10	

$\bar{X} = 3$ $\quad \sum x_i^2 = 10 \quad \sum k_i = 0 \quad \sum k_i^2 = 10/100 = 1/10 \quad \sum k_i X_i = 1$

$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2}$ eşitliği bilindiğine göre, $\hat{\beta}_1$ doğrusal bir tahminci olarak aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i Y_i$$

k_i terimi, sadece rassal olmayan X_i 'den hesaplandığı için k_i de rassal değildir $\hat{\beta}_1 = \sum x_i Y_i / \sum x_i^2$ gibi Y_i 'nin tartılı ortalaması olan herhangi bir tahminci, *doğrusal tahminci* olarak isimlendirilir. Bu durumda, $\hat{\beta}_1$ 'ni daha uygun bir teorik biçimde aşağıdaki gibi elde edebiliriz.

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i Y_i \qquad\qquad Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$$

$$\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} k_i Y_i = \sum_{i=1}^{n} k_i (\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i)$$

$$\hat{\beta}_1 = \beta_0 \sum_{i=1}^{n} k_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} k_i X_i + \sum_{i=1}^{n} k_i u_i$$

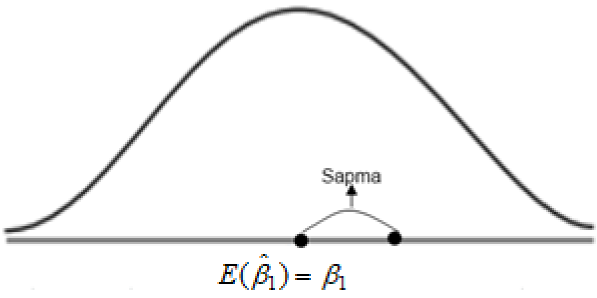
Burada $\sum k_i X_i = 1$ ve $\sum k_i = 0$ bilindiğine göre $\hat{\beta}_1$ 'nin teorik biçimi aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i u_i$$

burada, u_i doğrusal regresyon modeli $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ 'deki rassal hatadır. Bu formül hesaplamalar için kullanışlı değildir. Çünkü, değerini bilmediğimiz β_1 'ye ve gözlemlenemeyen u_i 'lere bağlıdır. Bununla birlikte, en küçük kareler tahmincileri örnekleme özelliklerini anlamak için açısından çok yararlıdır.

Sapmasızlık (Eğilimsizlik, Sistematik Hatasızlık)

$\hat{\beta}_1$ tahmincisinin alacağı değer örnek toplanıncaya kadar bilinmediği için, $\hat{\beta}_1$ tahmincisi rassaldır. Model varsayımları sağlanırsa, $\hat{\beta}_1$ 'in beklenen değeri, gerçek parametre değeri β_1 'e eşit olur, $E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1$. Herhangi bir parametre tahmincisinin beklenen değeri, gerçek parametre değerine eşitse, bu tahminci *sapmasız (eğilimsiz, sistematik hatasız)* dır. $E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1$ olduğu için, EKK tahmincisi $\hat{\beta}_1$, anakütle parametresi β_1 'nin sapmasız bir tahmincisidir. Sapmasızlığın sezgisel manası, matematiksel beklentinin tekrarlanan örnekleme yorumundan gelmektedir. *n* ölçeğinde pek çok örnek toplarsak ve bu örneklerin her birinde β_1 ' yi tahmin etmek için $\hat{\beta}_1$ nin formülü kullanılırsa, varsayımlar sağlandığı takdirde, tüm örneklerden elde edilecek olan $\hat{\beta}_1$ tahminlerinin ortalama değeri ana kütle değeri β_1 'ye eşit olacaktır.



Sapma $= E\left(\hat{\beta}_1\right) - \beta_1$

İspat

$\hat{\beta}_1$ 'nin teorik biçimini yeniden yazalım.

$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i u_i$

Burada β_1 parametresi rassal olmayıp, tahmin edilmeye çalışılan ana kütle parametresidir. X_i rassal değildir. k_i 'da sadece rassal olmayan X_i değerlerine bağlı olduğu için rassal değildir. $\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i u_i$ 'de tek rassal faktör, rassal hata terimi u_i 'dir. $\hat{\beta}_1$ 'in beklenen değeri, " bir toplamın beklenen değeri, beklenen değerlerin toplamına eşittir." özelliği kullanılarak, aşağıdaki gibi gösterilebilinir.

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = E\left(\beta_1 + \sum k_i u_i\right) = E\left(\beta_1 + k_1 u_1 + k_2 u_2 + \cdots + k_n u_n\right)$$

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = E\left(\beta_1\right) + E\left(k_1 u_1\right) + E\left(k_2 u_2\right) + \cdots + E\left(k_n u_n\right)$$

$E(\hat{\beta}_1) = E\left(\beta_1\right) + \sum E\left(k_i u_i\right)$ $\quad$ k_i rassal olmadığı, $E\left(\beta_1\right) = \beta_1$ ve $E\left(k_i\right) = k_i$ için

$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1 + \sum k_i E\left(u_i\right)$ $\quad$ $E\left(u_i\right) = 0$ olduğu için,

$$E\left(\hat{\beta}_1\right) = \beta_1$$

$E\left(u_i\right) \neq 0$ ise $E\left(\hat{\beta}_1\right) \neq \beta_1$ olacağı için $\hat{\beta}_1$, β_1 'in sapmalı bir tahmincisidir. Hata teriminin (u_i) kaynaklarından biri Y_i etkileyen ancak iktisadi modelde dışlanan faktörleri içermekteydi. Önemli olan bir değişken dışlanırsa $E\left(u_i\right) \neq 0$ ve $E\left(\hat{\beta}_1\right) \neq \beta_1$ sebep olacaktır. Bu sebeple, EKK tahmincilerinin sapmasız olması için tüm ilgili açıklayıcı değişkenleri içeren doğru tanımlanmış bir iktisadi modele sahip olmak bir zorunluluktur.

Tahminci $\hat{\beta}_1$ 'in sapmasızlığı önemli bir örnekleme özelliğidir. Bir ana kütleden tekrarlı örnekleme yapıldığında, EKK tahmincisi ortalama olarak "doğru" olup, bu özellik bir tahminci için arzulanan bir özelliktir. Sapmasızlık ortalamaya dayandığı için tek başına $\hat{\beta}_1$, β_1 'in iyi bir tahmincisi olduğu anlamına gelmez. Sapmasızlık özelliği, aynı ana kütleden *pek çok* veri örneklerinin olmasına bağlıdır. $\hat{\beta}_1$ 'in sapmasız olması, *sadece bir örnekte* ne ortaya çıkabileceği ile ilgili *hiç bir şey* söylemez. Tek bir tahmin (bir sayı) $\hat{\beta}_1$, belki β_1 'e yakın veya çok uzak olabilir. Çünkü β_1 asla bilinmez, tahminiz β_1 'ye çok yakın olsun veya olmasın, sadece bir verili örnekle β_1 'i asla bilemeyeceğiz. $E(u_i)=0$ ise en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_1$, β_1 'in sapmasız bir tahmincisidir.

Sapmasızlık gerekli fakat yeterli olmayan bir özelliktir. Sadece ortalamaya dayandığından ancak küçük bir varyansla birlikte önemli hale gelir.

Sapmasız tahminci kavramını daha farklı bir şekilde göstermek için, Tüketim ile gelir arasında ortalama ilişinin arandığı ana kütleden çekilmiş 10 rassal örnekten elde edilen tüketim harcaması modelinin EKK tahminleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Uygulamada, regresyon modelini tahmin etmek için mevcut tüm gözlemleri 60 büyüklüğünde bir büyük örnekte kullanırız. Burada tekrarlı örnekleme özelliklerini göstermek için verileri 10 alt örneğe ayırdık. Örnekten örneğe en küçük kareler parametre tahminleri değişkenlik arz eder. Bu örnekleme değişkenliği, her bir örnekte 10 farklı hane halkı seçmemiz ve onların haftalık tüketim harcamasının rassal olarak değişmesinden kaynaklanmaktadır.

Örnek 1		**Örnek 2**		**Örnek 3**		**Örnek 4**		**Örnek 5**	
Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i
65	80	55	80	60	80	75	80	70	80
80	100	74	100	74	100	88	100	70	100
79	120	90	120	90	120	94	120	98	120
113	140	103	140	80	140	113	140	108	140
125	160	107	160	107	160	107	160	125	160
115	180	135	180	135	180	130	180	110	180
144	200	144	200	145	200	144	200	136	200
157	220	160	220	152	220	152	220	157	220

155	240	189	240	189	240	145	240	137	240
178	260	150	260	175	260	178	260	185	260
Örnek 6		Örnek 7		Örnek 8		Örnek 9		Örnek 10	
Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i	Y_i	X_i
55	80	75	80	55	80	70	80	65	80
70	100	85	100	88	100	80	100	88	100
98	120	79	120	94	120	84	120	90	120
103	140	93	140	95	140	93	140	113	140
110	160	116	160	118	160	110	160	107	160
130	180	140	180	110	180	135	180	115	180
136	200	120	200	145	200	144	200	144	200
162	220	135	220	140	220	157	220	162	220
145	240	165	240	175	240	155	240	145	240
192	260	191	260	178	260	150	260	175	260

10 örnek verisinden elde edilen tahminler

Örnek	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$
1	17.29	0.61
2	9.37	0.65
3	-1.54	0.72
4	33.37	0.52
5	23.37	0.56
6	6.91	0.66
7	17.43	0.60
8	12.23	0.63
9	25.69	0.54
10	25.09	0.56

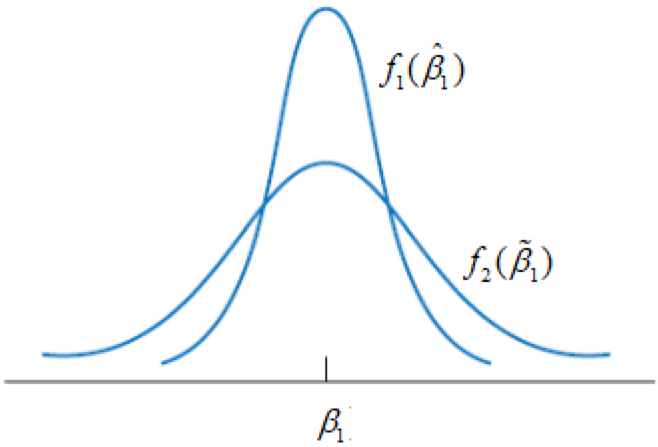
Sapmasızlık özelliği, aynı büyüklükte pek çok örneğin aynı ana kütleden çekildiği durumda, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ‘in ortalama değerlerini konu almaktadır. Bu 10 örnekteki $\hat{\beta}_0$ ’ın ortalama değeri, $\bar{\hat{\beta}}_0 = 16,92$'dir. $\hat{\beta}_1$'in ortalama değeri, $\bar{\hat{\beta}}_1 = 0,6$ 'dır. Pek çok örnekten elde edilen tahminlerin ortalaması alınırsa, bu ortalamalar $\left(\bar{\hat{\beta}}_0, \bar{\hat{\beta}}_1\right)$ $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ 'in doğru parametre değerlerine yaklaşacaktır. Sapmasızlık, her hangi bir örnekten elde edilen tahminin doğru parametre değerine yakın olacağını göstermez . Bu sebeple, bir tahminin sapmasız olduğunu söylemek mümkün değildir. Söyleyebilceğimiz tek sonuç, en küçük kareler tahmini yönteminin (veya en küçük kareler tahmincisinin) sapmasız olduğudur.

En Küçük Kareler Tahmincilerinin Varyans ve Kovaryansları

Yukarıda da görüldüğü üzere ana kütle parametreleri β_0 ve β_1 'in en küçük kareler tahminleri örnekten örneğe değişmektedir. Tahminlerin güvenirliliği açısından, bu değişkenliği anlamak, bir tahmincinin örnekleme doğruluğu ve güvenilebilirliği değerlendirilmelidir. Bu amaç için β_0 ve β_1 tahmincilerinin varyans ve kovaryanslarını hesaplanır. Rassal değişken $\hat{\beta}_1$'nin varyansı, bu rassal değişkenin olası değerleri $\hat{\beta}_1$ ve ortalaması $E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$ arasındaki farkların kareli ortalamasıdır ve aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$Var(\hat{\beta}_1) = E\left[\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right]^2$$

$Var(\hat{\beta}_1)$, $\hat{\beta}_1$'nin olasılık dağılımının yayılımını, kısaca tahmincinin doğruluğunu ölçer. Bir tahmincinin daha küçük varyansı, o tahmincinin daha fazla örnekleme doğruluğu anlamına gelmektedir. Bir tahmincinin örnekleme varyansı, diğer tahmincininkinden daha küçükse, diğer tahminciden daha iyidir (doğrudur, tesirlidir) .



β_1 tahmini için iki olası olasılık yoğunluk fonksiyonu: $Var\left(\hat{\beta}_1\right) < Var\left(\tilde{\beta}_1\right)$

Basit regresyon modeli varsayımları 1-5 varsayımları $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ 'nin varyans ve kovaryansları aşağıdaki gibidir:

$$Var(\hat{\beta}_0) = \sigma^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \sigma^2 \left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2} \right]$$

İspat

$$Var(\hat{\beta}_1) = E\left[\hat{\beta}_1 - E(\hat{\beta}_1)\right]^2 \qquad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1 \qquad \hat{\beta}_1 = \beta_1 + \sum k_i u_i$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E\left[(\beta_1 + \sum k_i u_i) - \beta_1\right]^2 \qquad \beta_1 \text{ sabit}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\sum k_i u_i)^2$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = E(\sum k_i^2 u_i^2 + 2\sum\sum k_i k_j u_i u_j) \qquad \text{Genelleştirilmiş varyans kuralı}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sum k_i^2 E(u_i^2) + 2\sum\sum k_i k_j E(u_i u_j) \qquad E(u_i u_j)\text{=0} \qquad E(u_i^2) = \sigma^2 \qquad \sum k_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Yukarıda verilen varyans ve kovaryansı tahmincilerini etkileyen faktörleri aşağıdaki gibidir.

Rassal hata teriminin varyansı σ^2, varyans ve kovaryans denklemlerinin her birinde yer almaktadır. Rassal hata teriminin varyansı σ^2, Y 'nin gözlemlen değerlerinin beklenen değerleri $E\left[Y \middle| X = X_i\right]$ etrafında yayılımını yansıtmaktadır. Daha büyük varyans σ^2, daha fazla yayılım anlamına gelmektedir. Y değerlerinin ortalamalarına $E(Y)$ göre uzağa düştüğü durum belirsizliğin daha fazla olması anlamına gelmektedir. σ^2 nin daha büyük olduğu zaman, ana kütle parametreleri β_0 ve β_1 hakkında sahip olduğumuz bilginin doğruluğu daha azdır. İstatistikte varyans belirsizlik ölçüsü olduğu için, daha büyük varyans (σ^2) en küçük kareler varyans ve kovaryanslarının da daha büyük olması anlamına gelmektedir.

X değerlerinin ortalamadan farklarının kareleri toplamı $\sum x_i^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2$ *X* 'deki değişimdir ve, varyans ve kovaryans denklemlerinde yer almaktadır. Bu ifade, bağımsız değişken *X*'in örnek değerlerinin, ortalamaları etrafında nasıl yayıldığını ölçer. Bunlar, daha geniş yayıldıkça, daha büyük kareler toplamı ortaya çıkar. Aynı şekilde, daha dar bantta yayıldıkça, daha küçük kareler toplamı ortaya çıkar. Daha büyük kareler toplamı $\sum x_i^2$, en küçük kareler tahmincilerinin daha küçük varyansı anlamına gelip, bilinmeyen parametreleri daha doğru bir şekilde tahmin edebiliriz. Bu durumda *X* değerleri, X-ekseni boyunca genişçe yayılım göstermektedir. $\sum x_i^2$ verisi küçük ise veri belli bir noktada "toplanmış"tır.

Daha büyük örnek büyüklüğü *n*, daha küçük EKK tahmincileri varyans ve kovaryansları anlamına gelir. Örnek büyüklüğü *n* yukardaki varyans ve kovaryans denklemlerinin her birinde yer almaktadır, çünkü toplamların her biri, *n* terimden oluşmaktadır. Ayrıca *n*, $Var(\hat{\beta}_0)$ 'da açıkca görülmektedir. *n* arttıkça kareler toplamı terimi ($\sum x_i^2$) daha büyür çünkü, toplamdaki her bir terim pozitif veya sıfırdır (X'in bir gözlem değeri, örnek ortalamasına eşit olursa, toplam sıfır ortaya çıkar, $\sum x_i^2 = \sum (X_i - \bar{X})^2 = 0$. Sonuç olarak, n daha büyük oldukça, hem $Var(\hat{\beta}_0)$ hem de $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ daha küçük olur, kareler toplamı, paydalarında yer almaktadır. $Var(\hat{\beta}_0)$ ın pay ve paydasındaki toplamların her ikisi de *n* büyüdükçe, artarlar ve birisindeki artış diğeri tarafından dengelenir, ancak belirleyici terim olarak paydadaki n denklemde yerini konulunca ve *n* daha büyüdükçe, $Var(\hat{\beta}_0)$ daha da küçüleceği kesindir.

$\sum X_i^2$ terimi $Var(\hat{\beta}_0)$ 'da yer almaktadır. Bu terim büyüdükçe, en küçük kareler tahmincisi $\hat{\beta}_0$'ın varyansı büyür. Çünkü sabit parametre β_0, *X*=0 iken *Y*'nin beklenen değeridir, $E[Y|X=0] = \beta_0$. *X*=0'dan daha uzağa verilerimiz düşerse, tüketim harcaması örneğinde olduğu gibi, β_0 'ı yorumlamak daha zor olacaktır ve β_0 ı doğru bir şekilde tahmin etmek de daha zor olacaktır. $\sum X_i^2$ terimi, X'in orjinden (X=0) olan kareli uzaklığı ölçer. X değerleri, sıfıra yaklaşırsa, bu durumda, $\sum X_i^2$ daha küçük olacak ve bu $Var(\hat{\beta}_0)$'ı azaltacaktır. Fakat pozitif veya negatif, X değerleri büyük olursa, diğer şartlar sabitken, $\sum X_i^2$ daha büyük olacak ve bu $Var(\hat{\beta}_0)$'ı daha büyük olacaktır.

X-değerlerinin örnek ortalaması, $Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$'de yer almaktadır. Kovaryansın mutlak büyüklüğü, örnek ortalaması $\bar{X}$'ın büyüklüğündeki artışla artış gösterir ve kovaryans $\bar{X}$'ın işaretinin tersi bir işarete sahiptir. Bunun sebebi, EKK regresyon doğrusunun *X* ve *Y*'nin ortalama noktalarından geçmek zorunda olmasıdır.

Gauss-Markov Teoremi

Gauss-Markov Teoremine göre doğrusal regresyon modelinin temel varsayımları veri iken $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahmincileri, β_0 ve β_1 in tüm doğrusal ve sapmasız tahmincileri arasında en düşük varyansa sahiptir. (Best Linear Unbiased Estimators –BLUE-).

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahmincileri, doğrusal ve sapmasız olan benzer tahmincilerle karşılaştırıldığında "en iyi"'dir, ancak $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in tüm olası tahmincilerin en iyisi olduğunu anlamına gelmez.

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ tahmincileri, en düşük varyansa sahip oldukları için kendi sınıflarında en iyidir. İki doğrusal ve sapmasız tahminci karşılaştırıldığında, her zaman en düşük varyanslı olanı tercih edilir, Gauss–Markov teoreminin sağlanması için klasik doğrusal regresyon modelinin 1-5 varsayımları geçerli olmak zorundadir. Bu varsayımlardan herhangi biri geçersiz olursa bu durumda, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$, β_0 ve β_1 in en iyi doğrusal sapmasız tahmincileri değildir.

Gauss–Markov teoremi normallik varsayımına dayanmaz. Gauss–Markov teoremi, en küçük kareler tahmincilerini kullanır. Tek bir örnekten elde edilen en küçük kareler tahminlerini kullanmaz.

İspat

$\hat{\beta}_1 = \sum k_i Y_i$ $\qquad$ $\hat{\beta}_1$, EEK tahmincisi

$\tilde{\beta}_1 = \sum w_i Y_i$ $\qquad$ $\tilde{\beta}_1$, diğer bir tahminci $\qquad$ $w_i = \text{sabit}$ $\qquad$ $w_i = k_i + c_i$

$$\tilde{\beta}_1 = \sum w_i Y_i = \sum (k_i + c_i)(\beta_0 + \beta_1 X_i + u_i)$$

$$= \sum (k_i + c_i)\beta_0 + \sum (k_i + c_i)\beta_1 X_i + \sum (k_i + c_i)u_i$$

$$= \beta_0 \sum k_i + \beta_0 \sum c_i + \beta_1 \sum k_i X_i + \beta_1 \sum c_i X_i + \sum (k_i + c_i)u_i \qquad \sum k_i = 0 \qquad \sum k_i X_i = 1$$

$$= \beta_0 \sum c_i + \beta_1 + \beta_1 \sum c_i X_i + \sum (k_i + c_i)u_i$$

Her iki tarafın beklenen değeri alınır.

$$E(\tilde{\beta}_1) = E(\beta_0 \sum c_i + \beta_1 + \beta_1 \sum c_i X_i + \sum (k_i + c_i)u_i$$

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_0 \sum c_i + \beta_1 + \beta_1 \sum c_i X_i + \sum (k_i + c_i)E(u_i) \qquad E(u_i) = 0$$

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_0 \sum c_i + \beta_1 + \beta_1 \sum c_i X_i$$

Doğrusal tahminci $\tilde{\beta}_1 = \sum w_i Y_i$ 'nin sapmasız(eğilimsiz) olması için aşağıdaki şartların yerine gelmesi gerekir.

$$\sum c_i = 0 \quad \text{ve} \quad \sum c_i X_i = 0$$

Doğrusal ve sapmasız tahminciler olması için bu koşulların yerine geldiği varsayılır.

$$E(\tilde{\beta}_1) = \beta_1$$

$$\tilde{\beta}_1 = \sum w_i Y_i = \beta_1 + \sum (k_i + c_i)\hat{u}_i \qquad \tilde{\beta}_1 = \beta_1 + \sum w_i u_i = \beta_1 + \sum (k_i + c_i)u_i$$

$$\sum c_i k_i = \sum \left[\frac{c_i (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] = \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sum c_i X_i - \frac{\bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \sum c_i$$

$$\sum c_i k_i = \sum \left[\frac{c_i (X_i - \bar{X})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right] = \frac{1}{\sum (X_i - \bar{X})^2}(0) - \frac{\bar{X}}{\sum (X_i - \bar{X})^2}(0) = 0$$

Doğrusal sapmasız tahminci $\tilde{\beta}_1$ 'nin varyansı ise aşağıdaki gibidir.

$$Var(\tilde{\beta}_1) = Var\left[\beta_1 + \sum (k_i + c_i)u_i\right] = \sum (k_i + c_i)^2 Var(u_i)$$

$$Var(\tilde{\beta}_1) = \sigma^2 \sum (k_i + c_i)^2 = \sigma^2 \sum k_i^2 + \sigma^2 \sum c_i^2$$

$$Var(\tilde{\beta}_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} + \sigma^2 \sum c_i^2$$

$$Var(\tilde{\beta}_1) = Var(\hat{\beta}_1) + \sigma^2 \sum c_i^2 \qquad \sum c_i^2 > 0$$

$$Var(\tilde{\beta}_1) > Var(\hat{\beta}_1)$$

Not: $Var(\tilde{\beta}_1) = Var(\hat{\beta}_1)$ eşitliğinin sağlanması için tek koşul $c_i = 0$ dır, bu durumda $\tilde{\beta}_1 = \hat{\beta}_1$.

Tahmin edilen parametre eğilimsizlik ve en küçük varyans özellikleri birarada geçerli ise **etkin** bir tahmindir. Eğilimsizlik ölçütü tahmin edicilerin ortalamaları ile sınırlı kaldığından dağılımları hakkında bilgi vermemektedir. Örnekleme dağılımları ise sadece ortalamalar değil aynı zamanda tahmin edicilerin varyansları da önemli bir yere sahiptir. Tahmin edicilerin değerlendirilmesinde hem oertalamaları hem de varyansları dikkate alınmalıdır. Ortalama hata karesi tahmin edilen parametrenin hem varyansını hem de ortalamalamasını dikkate alan bir ölçüdür.

$$OHK(\hat{\beta}_i) = E(\hat{\beta}_i - \beta_i)^2 \qquad Var(\hat{\beta}_i) = E\left[\hat{\beta}_i - E(\hat{\beta}_i)\right]^2$$

$$OHK(\hat{\beta})_i = Var(\hat{\beta}_i) + Sapma\ \hat{\theta}^2$$

$Var(\hat{\beta}_i)$, $\hat{\beta}_i$’nin kendi ortalaması diğer bir ifade ile beklenen değeri etrafındaki yayıklığı ölçerken, $OHK(\hat{\beta}_i)$, $\hat{\beta}_i$’nin ana kütle parametresinin gerçek değeri etrafındaki yayıklığı ölçer.

Eğilimsiz bir tahminci sözkonusu ise, $\hat{\beta}_i$’nin ortalama hata karesi ile varyansı birbirine eşittir. $OHK(\hat{\beta}_i) = Var(\hat{\beta}_i)$

Eğilimsizlikten (sistematik hatasızlık; sapmasızlık) bahsedebilmek için anakütleden çekilmesi mümkün örneklerin çekilmesi veya örnekleme dağılımının bilinmesi gerekir. Aksi halde tek bir örnek çekildiğinde, eğilimlilik yerine örneklem hatası söz konusudur. Örnekleme hatası ise $\hat{\beta}_i - \beta_i$ olarak tanımlanmaktadır.

Eğilimsizlik, en küçük varyans (tesirli), etkin tahmin ve doğrusallık **küçük örnek özellikleridir.**

Uygulama

	X_i		
	2	**4**	**8**
Y_{ij}	1	2	4
	7	8	10
$E(Y \mid X = X_i)$	4	5	7
$E\left[Y_i - E\left(Y \mid X = X_i\right)\right]^2$	9	9	9
u_{ij}	-3	3	3
	3	-3	-3
$E(u \mid X = X_i)$	0	0	0
$E\left[u_i - E\left(u \mid X = X_i\right)\right]^2$	9	9	9

$$E(Y \mid X = X_i) = 3 + 0,5X_i$$

Örnek	Örnek Birimleri	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\sum \hat{u}_i^2$
1	(2,7) (4,8) (8,10)	6	0,5	0

2	(2,7) (4,8) (8,4)	9	-0,5714	2,571428
3	(2,7) (4,2) (8,10)	3	0,7143	23,142857
4	(2,7) (4,2) (8,4)	6	-0,3571	10,285714
5	(2,1) (4,8) (8,10)	0	1,3571	10,285714
6	(2,7) (4,2) (8,4)	3	0,2857	23,142857
7	(2,1) (4,2) (8,10)	-3	1,5714	2,571428
8	(2,1) (4,2) (8,4)	0	0,5	0
				72

$$E(\hat{\beta}_0) = \frac{1}{8}6 + \frac{1}{8}9 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}6 + \frac{1}{8}0 + \frac{1}{8}3 + \frac{1}{8}(-3) + \frac{1}{8}0 = 3$$

$$E(\hat{\beta}_0) = 3 = \beta_0$$

$$E(\hat{\beta}_1) = \frac{1}{8}(0,5 - 0,5714 + 0,7148 - 0,3571 + 1,3571 + 0,2857 + 1,5714 + 0,5) = 0,5$$

$$E(\hat{\beta}_1) = 0,5 = \beta_1$$

$$Var(u) = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n} = \frac{72}{8} = 9$$

$$Var(\hat{\beta}_0 - \beta_0) = E(\hat{\beta}_0 - E(\hat{\beta}_0))^2 = E(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2$$

$$= \frac{1}{8}\left[(6-3)^2 + (9-3)^2 + (3-3)^2 + (6-3)^2 + (0-3)^2 + (3-3)^2 + (-3-3)^2 + (0-3)^2\right] = \frac{108}{8}$$

$$Var(\hat{\beta}_0 - \beta_0) = E(\hat{\beta}_0 - \beta_0)^2 = 13,5$$

$$Var(\hat{\beta}_1 - \beta_1) = E(\hat{\beta}_1 - \beta_1)^2$$

$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix} (0,5-0,5)^2 + (-0,5714-0,5)^2 + (0,7148-0,5)^2 + (-0,3571-0,5)^2 \\ +(+1,3571-0,5)^2 + (0,2857-0,5)^2 + (0,2857-0,5)^2 + (0,5-0,5)^2 \end{bmatrix} = 0,4821$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = E\left[(\hat{\beta}_0 - \beta_0)(\hat{\beta}_1 - \beta_1)\right] =$$

$$= \frac{1}{8}\left[(6-3)(0,5-0,5) + (9-3)(-0,5714-0,5) + \cdots + (-3-3)(1,5714-0,5) + (0-3)(0,5-0,5)\right]$$

$$= \frac{1}{8}(17,99) = 2,249$$

En Küçük Kareler Tahmincilerinin Olasılık Dağılımları: Merkezi Limit Teoremi

EKK yönteminin uygulaması normallik varsayımına dayanmaz. Amacımız sadece nokta tahminlerini elde etmek olsa idi, EKK yönteminin temel özellikleri yeterli olacaktı. Ancak parametrelerin tahminleri kullanılarak, ana kütlede bilinmeyen parametreler hakkında hipotez testleri ve güven aralıkları yöntemlerinin uygulaması ile çıkarsamalar yaparız. Hipotez testleri ve güven aralıkları uygulamaları dağılım bilinmesini gerektirmektedir. En küçük kareler tahmincilerinin normalliği, hipotez testleri ve aralık tahminleri istatistiksel çıkarsamının pek çok boyutunda büyük öneme sahiptir.

Rassal hatalar (u_i) sıfır ortalama ve σ^2 varyansla normal dağılırlar -$u_i \sim N(0,\sigma^2)$ -, bu durumda, EKK tahmincilerinin olasılık dağılımları da normal olur. Bu sonuç iki adımda elde edilir. Eğer u_i normal dağılıyor ise u_i 'lerin doğrusal fonksiyonu Y_i de normal dağılacaktır. $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ eşitliğinden Y_i 'nin rassal hata u_i 'lerin doğrusal fonksiyonu olduğunu görebilirsiniz.

İkincisi EKK tahmincileri, $\beta_1 = \sum k_i Y_i$ eşitliğinden Y_i 'lerin doğrusal fonksiyonudur. Y_i 'ler normal dağıldığı için doğrusal fonksiyonu EKK tahmincileri de normal dağılıma uygundur. Ayrıca normal rassal değişkenlerin toplamları da normal dağılırlar. Sonuç olarak, hata terimi için normallik varsayımını yaparılırsa, en küçük kareler tahmincileri normal dağılırlar.

Merkezi Limit Teoremi'ne göre temel varsayımlar sağlanırsa ve örnek büyüklüğü n yeterince büyükse, aşağıdaki en küçük kareler tahmincileri, normal dağılımlara yaklaşan bir dağılıma sahiptiler.

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{n \sum x_i^2}\right) \qquad \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}\right)$$

Hata Terimi Varyansının Tahmini

Ana kütle parametrelerinin tahmininden sonra, bilinmeyen ve örnek verilerinden tahmin edilmesi gereken diğer bir parametre sabit olduğu varsayılan ana kütle hata teriminin varyansıdır. Klasik doğrusal regresyon modelinin temel varsayımlarından biri gözlemler (alt ana kütle) itibariyle hata teriminin varyansının eşit olmasıdır. Hata teriminin beklenen değerinin sıfır olduğu ($E(u_i) = 0$) varsayımı doğru ise, u_i 'nin varyansı aşağıdaki gibidir.

$$Var(u_i) = \sigma^2 = E[u_i - E(u_i)]^2 = E(u_i^2) \qquad E(u_i) = 0$$

"Beklenti" ortalama bir değer olduğu için, tahmin edilen σ^2'yi, hata karelerinin ortalaması olarak aşağıdaki gibi düşünülebilir.

$$\sigma^2 = \frac{\sum u_i^2}{n}$$

Ana kütle bilinmediği için rassal hatalar u_i gözlemlenemeyecek bu nedenle yukarıdaki formülün kullanımı ysöz konusu olmayacaktır. Ancak bilinmeyen rassal hataların yerine örnekten hesaplanan EKK kalıntıları kullanılabilir. Rassal hatalar:

$$u_i = Y_i - E(Y|X = X_i) \qquad E(Y|X = X_i) = E(Y) = \beta_0 + \beta_1 X_i$$

$$u_i = Y_i - (\beta_0 + \beta_1 X)$$

$$u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X$$

EKK kalıntıları ($\hat{u}_i$), bilinmeyen parametrelerin (β_0 ve β_1) EKK tahminleri ($\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$) ile yer değiştirilmesi ile elde edilebilir:

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{Y}_i \qquad \hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \text{'den}$$

$$\hat{u}_i = Y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X)$$

$$\hat{u}_i = Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X$$

Böylece, rassal hatalar ile kalıntılar yer değiştirerek hata terimi varyansının tahmini için aşağıdaki gibi kullanılabilir,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n}$$

Büyük örneklerde oldukça tatmin edici olmasına karşın, bu tahminci, σ^2 nın sapmalı bir tahmincisidir. Fakat sapmasız tahminciyi elde etmek için basit bir değişiklik aşağıdaki gibi yapılır,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}$$

Paydada çıkarması yapılan 2, modeldeki regresyon parametreleri (β_0 ve β_1)'lerin sayısı olup, bu çıkarım, $\hat{\sigma}^2$'yi sapmasız yapar böylece,

$$E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

olur.

En Küçük Kareler Tahmincilerinin Varyans ve Kovaryanslarının Tahmini

Hata varyansının sapmasız bir tahmincisine sahip olmak, en küçük kareler tahmincileri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in varyansları ve onlar arasındaki kovaryansı tahmin edebileceğimiz anlamına gelir. Aşağıda verilen varyans ve kovaryansları elde etmek için, bilinmeyen hata varyansı σ^2 yerine $\hat{\sigma}^2$ yi yazarsak;

$$Var(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2} \right]$$

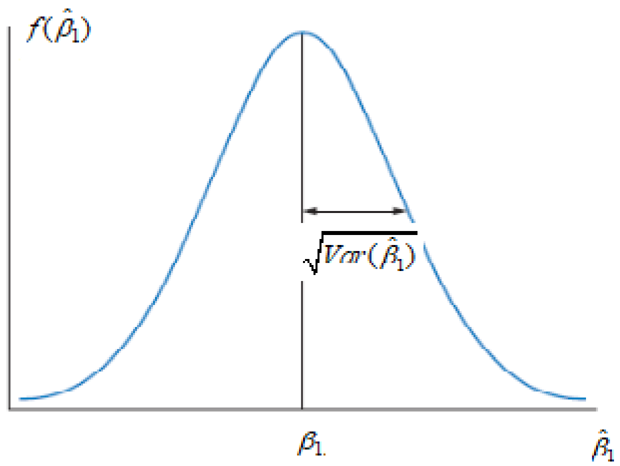
Tahmin edilen varyansların kare kökleri, $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in "standart hataları"dır. Bu sayılar, hipotez testi ve aralık tahmininde kullanılır.

$$Se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} \qquad Se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$$

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ 'in standart hataları, tekrarlı örneklerdeki EKK tahminleri $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in örnekleme değişkenliğinin ölçümleridir. Uygulama 2' de gösterildiği gibi, farklı veri örnekleri topladığımızda, parametre tahminleri örnekten örneğe değişir. $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in tahmincileri, örnek verileri nasıl oluşursa oluşsun kullanılan genel formüllerdir. Yani tahminciler, rassal değişkenlerdir. Bu sebeple, olasılık dağılımlarına, ortalamalara ve varyanslara sahiptirler. Özellikle, hata terimlerinin normal dağıldığı varsayımı sağlanırsa diğer bir ifade ile rassal hata terimleri u_i normal dağılırsa, bu durumda $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, Var(\hat{\beta}_1) = \sigma^2 / \sum x_i^2$ olur.

Varyans tahmincisi $Var(\hat{\beta}_1)$ veya $\hat{\beta}_1$ nin standart hatası olarak isimlendirilen $Var(\hat{\beta}_1)$ kare kökü $\sigma_{\hat{\beta}_1} = Se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}$, $\hat{\beta}_1$ tahminlerinin örnekleme değişkenliğini ölçer. Daha büyük $Se(\hat{\beta}_1)$ en küçük kareler tahmincileri $\hat{\beta}_1$ de örnekten örneğe daha fazla değişkenlik gösterdiği anlamına gelir. $Se(\hat{\beta}_1)$ büyük olursa, tahminler örnekten örneğe büyük oranda değişebilir. Parametre $Se(\hat{\beta}_1)$ bilinmesi önemlidir. Çünkü $Se(\hat{\beta}_1)$, β_1 parametresine göre büyük olursa, en küçük kareler tahmincilerinin doğru olmayacak ve EKK tahminleri tahmin edilmeye çalışan β_1'in doğru değerinin oldukça uzağında kalabilecektir. Diğer yandan $Se(\hat{\beta}_1)$,

β_1 parametresine göre küçük olursa, EKK tahmini yüksek olasılıkla β_1'in yakınına düşecektir. İstatistik dersinden hatırlayacak olursanız normal dağılım için, değerlerin %99.99'u, ortalamadan üç standart sapma aralığı içine düşer, böylece, en küçük kareler tahminlerinin %99.99'u, $\beta_1 - 3\times Se(\hat{\beta}_1)$;, $\beta_1 + 3\times Se(\hat{\beta}_1)$ aralığına düşer.



Şekil: EKK tahmincisi $\hat{\beta}_1$ olasılık dağılım fonksiyonu

Tüketim ile gelir arasındaki ilişkinin arandığı uygulamada 10 örnek verisinden tahminler elde edilimiştir. . Bu tahminlerin ortalama değerleri ise , $\bar{\hat{\beta}}_0 = 16,92$ ve $\bar{\hat{\beta}}_1 = 0,6$ 'dır. Hatalarla açıklanmak istenilen, tahminlerin, ortalamaları etrafında örnekten örneğe ne kadar değişkenlik gösterdiğidir.

Örnek: Satış Gelirleri İle Reklam Harcamaları

Satışlar ile reklam harcamaları arasındaki doğrusal ilişki örnek verilerinden $\hat{Y}_i = 1.0 + 1.2X_i$ ve $\sum \hat{u}_i^2 = 8,8$ olarak hesaplanmıştı. Şimdi $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in varyansları, standart hatalarını ve $\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ arasındaki kovaryansı hesaplayacağız.

$$Var(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2} \right]$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}$$

$$Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\hat{\sigma}^2\left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2}\right]$$

$Var(\hat{\beta}_0)$,$Var(\hat{\beta}_1)$ ve $Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)$ ’in hesaplanabilmesi için öncelikle hata terimi varyansının tahmin edilmesi gerekir. Hata terimi varyansının tahmini ($\hat{\sigma}^2$) aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}^2=\frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2}=\frac{8.8}{5-2}=\frac{8.8}{3}=2.93$$

$\sum X_i^2$ =55 , $\sum x_i^2=10$, $\bar{X}=3$ olduğu bilindiğine göre;

$$Var(\hat{\beta}_0)=\hat{\sigma}^2\left[\frac{\sum X_i^2}{n\sum x_i^2}\right]=2.93\frac{55}{5.10}=3.223$$

$$Var(\hat{\beta}_1)=\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2}=\frac{2.93}{10}=0.293$$

$$Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\hat{\sigma}^2\left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2}\right]=2.93\left[\frac{(-3)}{10}\right]=-0.879$$

$$Var-Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\begin{vmatrix} Var(\hat{\beta}_0) & Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1) \\ Cov(\hat{\beta}_1,\hat{\beta}_0) & Var(\hat{\beta}_1) \end{vmatrix}$$

$$Var-Cov(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\begin{vmatrix} 3,223 & -0,879 \\ -0,879 & 0,293 \end{vmatrix}$$

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$ ’in standart hataları ise,

$$Se(\hat{\beta}_0)=\sqrt{Var(\hat{\beta}_0)}=\sqrt{3.223}=1.795$$

$$Se(\hat{\beta}_1)=\sqrt{Var(\hat{\beta}_1)}=\sqrt{0.293}=0.541$$

olarak hesaplanır. Şu ana kadar yaptığımız hesaplamalar toplu biçimde aşağıdaki gibi raporlanır.

$$\hat{Y}_i=1.0+1.2X_i \qquad \hat{\sigma}^2=2.93 \qquad n=5$$
$$Se(\beta_i)(1.795)(0.541)$$

Örnek: Tüketim Gelir

Örnek 1

Öneclikle hata teriminin varyansını tahmin etmek için $\sum \hat{u}_i^2$ tolamının hesaplanması gerekir.

ÖRNEK 1				
Y_i	X_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$	$\hat{u}_i^2$
65	80	66.09	-1.09	1.1881
80	100	78.29	1.71	2.9241
79	120	90.49	-11.49	132.0201
113	140	102.69	10.31	106.2961
125	160	114.89	10.11	102.2121
115	180	127.09	-12.09	146.1681
144	200	139.29	4.71	22.1841
157	220	151.49	5.51	30.3601
155	240	163.69	-8.69	75.5161
178	260	175.89	2.11	4.4521
$\sum Y_i = 1211$	$\sum X_i = 1700$	$\sum \hat{Y}_i = 1209.9$	$\sum \hat{u}_i = 1.1$	$\sum \hat{u}_i^2 = 623.321$

Önemli not: $\sum \hat{u}_i = 0$, $\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i = 1211$ **olarak hesaplanması gerekir. Hesaplamalardaki ufak farklılıklar** $\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61X_i$ **denkleminde virgülden sonra iki hane alındığı içindir.**

Hata terimi varyansının tahmini ($\hat{\sigma}^2$) aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2} = \frac{623.321}{10-2} = \frac{623.321}{8} = 77.92$$

$\sum X_i^2 = 322000$, $\bar{X} = 170$, $\sum x_i^2 = 33000$ olduğu bilindiğine göre;

$$Var(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \right] = 77.92 \frac{322000}{10 \times 33000} = 76.03$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} = \frac{77.92}{33000} = 0.002361$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2} \right] = 77.92 \left[\frac{(-170)}{33000} \right] = -0.401$$

$$Var - Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \begin{vmatrix} 76,03 & -0,401 \\ -0,401 & 0,002361 \end{vmatrix}$$

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in standart hataları ise,

$$Se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{76.03} = 8.72$$
$$Se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.002361} = 0.049$$

olarak hesaplanır. Şu ana kadar yaptığımız hesaplamalar toplu biçimde aşağıdaki gibi raporlanır.

$$\hat{Y}_i = 17.29 + 0.61X_i \qquad \hat{\sigma}^2 = 77.92 \qquad n = 10$$
$$Se(\beta_i)(8.72)(0.049)$$

Örnek 2

$\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65X_i$

ÖRNEK 2				
Y_i	X_i	$\hat{Y}_i$	$\hat{u}_i$	$\hat{u}_i^2$
55	80	61.37	-6.37	40.5769
74	100	74.37	-0.37	0.1369
90	120	87.37	2.63	6.9169
103	140	100.37	2.63	6.9169
107	160	113.37	-6.37	40.5769
135	180	126.37	8.63	74.4769
144	200	139.37	4.63	21.4369
160	220	152.37	7.63	58.2169
189	240	165.37	23.63	558.3769
150	260	178.37	-28.37	804.8569
$\sum Y_i = 1211$	$\sum X_i = 1700$	$\sum \hat{Y}_i = 1198.7$	$\sum \hat{u}_i = 8.3$	$\sum \hat{u}_i^2 = 1612.489$

***Önemli not*: $\sum \hat{u}_i = 0$, $\sum \hat{Y}_i = \sum Y_i = 1211$ olarak hesaplanması gerekir. Hesaplamalardaki ufak farklılıklar, $\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65X_i$ denkleminde virgülden sonra iki hane alındığı içindir.**

Hata terimi veryansının tahmini ($\hat{\sigma}^2$) aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum \hat{u}_i^2}{n-2} = \frac{1612.489}{10-2} = \frac{1612.489}{8} = 201.56$$

$\sum X_i^2 = 322000$, $\bar{X} = 170$, $\sum x_i^2 = 33000$ olduğu bilindiğine göre;

$$Var(\hat{\beta}_0) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{\sum X_i^2}{n \sum x_i^2} \right] = 201.56 \frac{322000}{10 \times 33000} = 196.675$$

$$Var(\hat{\beta}_1) = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum x_i^2} = \frac{201.56}{33000} = 0.006$$

$$Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \hat{\sigma}^2 \left[\frac{-\bar{X}}{\sum x_i^2} \right] = 201.56 \left[\frac{(-170)}{33000} \right] = -1.038$$

$$Var - Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \begin{vmatrix} 196,635 & -1,038 \\ -1,038 & 0,006 \end{vmatrix}$$

$\hat{\beta}_0$ ve $\hat{\beta}_1$'in standart hataları ise,

$$Se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_0)} = \sqrt{196.675} = 14.02$$

$$Se(\hat{\beta}_1) = \sqrt{Var(\hat{\beta}_1)} = \sqrt{0.006} = 0.08$$

olarak hesaplanır. Şu ana kadar yaptığımız hesaplamalar toplu biçimde aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\hat{Y}_i = 9.37 + 0.65X_i \qquad \hat{\sigma}^2 = 201.56 \qquad n = 10$$
$$Se(\beta_i)(14.02)(0.08)$$

Sonuç: Yukarıdaki sonuçlara göre parametre tahminlerin standart hataları Örnek 1'de, Örnek 2'den daha küçük hesaplanmıştır. Buna göre Örnek 1, Örnek 2'ye tercih edilir.

Örnek: Gıda harcaması-Gelir

$\hat{Y}_i = 83,4160 + 10,21X_i$ $\qquad n = 40 \qquad \sum \hat{u}_i^2 = 304505,2$

$$Var - Cov(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) = \begin{vmatrix} 1884,442 & -85,90316 \\ -85,90316 & 4,381752 \end{vmatrix}$$

$$\hat{Y}_i = 83,4160 + 10,21X_i \qquad \hat{\sigma}^2 = 8013,29$$
$$Se(\hat{\beta}_i)\ (43,410) \quad (2,093)$$