Marmara Üniversitesi

İstatistik Bölümü

Örnekleme Teorisi (4)

Doç. Dr. Atıf Evren

İstatistiksel Tahmin

İstatistiksel tahmin dendiğinde genellikle bir olasılık dağılımının parametresini (ya da parametrelerini) öngörebilmek için elde edilen bir örnek yardımı ile gerçekleştirilen tahmin anlaşılmaktadır. Yine parametrelere ilişkin hipotez testleri de bu konunun önemli bir parçasıdır. Burada ana kütle olasılık fonksiyonunun bilindiği ama parametre ya da parametrelerinin bilinmediği varsayılmaktadır. Ana kütle dağılımının çok değişkenli ya da tek değişkenli olabileceği, rastlantı değişkenlerinin kesikli ya da sürekli olabileceğini belirtmek gerekiyor. Aşağıdaki tabloda istatistikte çok kullanılan bazı parametreler ve onların örneklemdeki karşılığı olan kestirimcileri (istatistikler) verilmektedir.

Paramete	İstatistik
Ana kütle ortalaması (μ)	Örnek ortalaması ($\bar{X}$)
Ana kütle oranı (π)	Örnek oranı ($\hat{p}$)
Ana kütle Varyansı (σ^2)	Örnek Varyansı (S^2)
İki ana kütle ortalaması farkı ($\mu_1 - \mu_2$)	İki örnek ortalaması farkı ($\bar{X}_1 - \bar{X}_2$)
İki ana kütle oranı farkı ($\pi_1 - \pi_2$)	İki örnek oranı farkı ($\hat{p}_1 - \hat{p}_2$)

Parametre- İstatistik

İstatistik'te Bayesçi yaklaşım ayrı tutulacak olursa bir olasılık fonksiyonunun sabitleri, parametreler olarak adlandırılmaktadır. Örneğin X~Poisson(λ) olsun. Burada λ dağılımın tek parametresidir. λ'nın bilinmesi halinde dağılım bütünüyle belirlenmiş olmaktadır. Örnekleme rassal olduğunda, her biri örnek değerlerinin birer reel değerli fonksiyonu olarak tanımlanan istatistiklerin de rastlantı değişkeni olacağını belirtmek gerekiyor. $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$; $f(X;\theta)$ dağılımından çekilen n birimlik bağımsız bir örnek olsun. Burada örnek aritmetik ortalaması $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$; $Min\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n\}, Maks\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n\}$

$Medyan\{X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n\}$, $\overline{X}^2 + 3\overline{X} - 5 \quad \overline{X} + 3$, $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ vb. gözlem

değerlerinin reel değerli bir fonksiyonu oldukları için birer istatistiktir. Bununla birlikte sözgelimi $\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \theta)}{n}$, $Min\{X_1 - \theta, X_2 - \theta, ..., X_{n-1} - \theta, X_n - \theta\}$ 'nın alacağı değerler bilinmeyen θ parametresine bağlı olduklarından birer istatistik olarak nitelendirilmezler.

İkinci bir örnek olarak 1,2,3 ve 4 değerlerinden oluşan bir ana kütle ele alınabilir. Bu basit örnek çerçevesinde ana kütle ortalaması olan μ yü bulabilmek için iadesiz yöntemle 2 birimlik örnekler çekildiği varsayılsın. Bu örnekleme planı çerçevesinde bütün elde edilebilecek örnekler aşağıdadır:

(X_1, X_2)	$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2}{2}$
(1,2)	1,5
(1,3)	2
(1,4)	2,5
(2,3)	2,5
(2,4)	3
(3,4)	3,5

$\overline{X}$, alacağı değer örnek değerlerine bağlı olduğu için rastlantı değişkenidir. Bu değişkenin olasılık dağılımı şu şekilde oluşturulabilir:

$\overline{X}$	$P(\overline{X})$
1,5	1/6
2	1/6
2,5	2/6
3	1/6
3,5	1/6

Örnekleme Dağılımı

Yukarıdaki örnekteki olasılık dağılımı ortalamanın (örnek ortalamasının) örnekleme dağılımı olarak adlandırılmaktadır. İstatistik'te örnekten hareketle hesaplanan istatistiklerin olasılık dağılımları örnekleme dağılımı olarak nitelendirilmektedir. Bu çerçevede ortalamanın örnekleme dağılımının yanı sıra medyanın örnekleme dağılımı, oranın örnekleme dağılımı, varyansın örnekleme dağılımı, standart sapmanın örnekleme dağılımı, ortalama farklarının örnekleme dağılımı, oran farklarının örnekleme dağılımı, varyans oranlarının örnekleme dağılımı gibi pek çok örnekleme dağılımından söz etmek anlamlı olacaktır.

Genelde örnekleme dağılımlarının belirlenmesi güçtür. Örnekleme dağılımları bazı durumlarda ana kütle dağılımının bilinmesi halinde tümdengelimci bir çerçevede belirlenmektedir. Örneğin ana kütle dağılımının normal dağılıma uyması halinde örnek ortalaması; normal dağılan bu ana kütleden gelen gözlem değerlerinin doğrusal bir fonksiyonu olacağı için; normal dağılıma uyacaktır.

Ana kütle dağılımının bilinmediği durumlarda ise örnek büyüklüğünün elvermesi halinde bazı limit teoremlerinden yararlanılmaktadır. Örnek vermek gerekirse dağılım özellikleri bilinmeyen ama ortalama ve varyans gibi momentleri sonlu olan bir dağılımdan büyük sayılarda ($n>=30$) örnekler çekilmesi halinde bu örneklerin ortalaması bir tür normal dağılım ile incelenebilmektedir. Verilen örneklerden birincisinde örnek ortalamasının dağılımı tam (exact) olarak belirlenebilmekte ikinci örnekte ise örnek ortalamasının dağılımı asimptotik olarak incelenebilmektedir. Burada "asimptotik" kavramı matematikteki kullanımına paralel olarak "örneğin büyük olması" anlamındadır. İstatistiğin önerilen olasılık dağılımı ile incelenmesindeki isabetlilik örnek büyüklüğünün artmasına paralel olarak artmaktadır.

Örnekleme dağılımının belirlenmesine ilişkin matematik güçlüğün yanısıra, "örnekleme dağılımı" kavramının soyutluğu da konunun algılanmasındaki bir diğer güçlüktür. Başka bir ifade ile örnekleme dağılımı kavramı İstatistik'te kavranması en güç, en soyut kavramlardan biridir. Çünkü örnekleme dağılımının belirlenmesi ancak ana kütlenin tam olarak bilinmesi halinde ve belirli bir örnekleme planı çerçevesinde mümkündür. Yine de örnekleme dağılımı (ve buradan türeyen standart hata türünden kavramlar) bütün soyutluklarına karşılık belirli bir metodolojinin oluşturulmasında gerekli kavramsal altyapıyı sunmaktadır. Kavramlar soyut olabilir ama kavramsız düşünme olmayacağına göre başka türlü olması da düşünülemez.

Nokta Tahmini-Aralık Tahmini

İstatistiksel araştırmalarda genellikle iki tür tahminden yararlanılmaktadır:

- Nokta tahmini (tek değer tahmini) ve,
- Aralık tahmini.

Bu kavramları daha yakından inceleyelim.

Normal dağılan bir ana kütlenin ortalaması μ'nün bilinmediği varsayılsın. μ'nün tahmin edilebilmesi amacıyla bu dağılımdan n birimlik rassal bir örnek $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ çekilsin. Bu örnekten yola çıkarak örnek ortalaması $\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ hesaplansın. Bu durumda $\overline{X}$, μ'nün bir nokta tahmincisi olmaktadır.

Bu bölümün başındaki tabloda istatistikte çok kullanılan bazı nokta tahmincileri verilmektedir. Bununla birlikte parametre tahmincilerinin ya da istatistiklerin olasılık dağılımlarının tam ya da asimptotik olarak belirlenmesi halinde belirli bir olasılık ile parametrelerin aralık tahminleri gerçekleştirilebilmektedir. Bu da nokta tahminine göre daha isabetli tahminde bulunma olanağını verecektir.

<u>Örnek:</u> Ortalaması μ ve standart sapması σ olan bir dağılımdan n birimlik rassal bir örnek $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ çekilsin. $n \to \infty$ için $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$~Normal(0,1) olur. Buradan hareketle μ için %100(1-α) 'lık aralık tahmini $P(\overline{X} - Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$ şeklindedir.

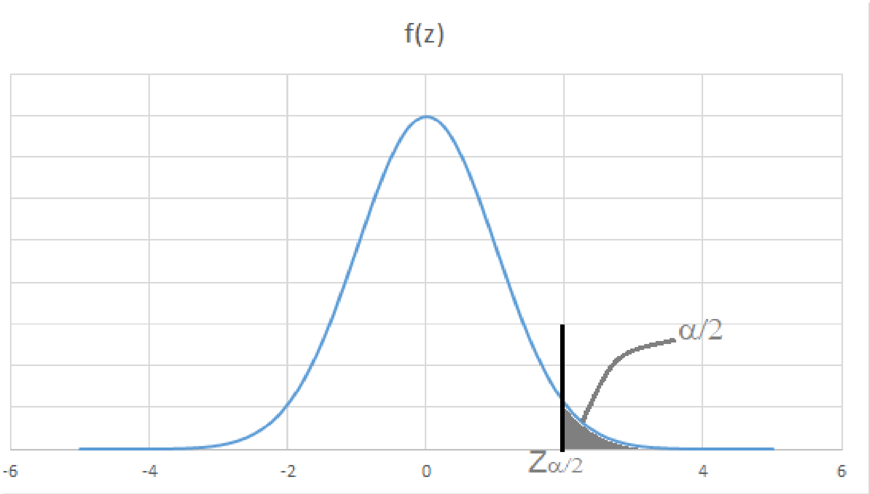
Başka bir ifade ile gerçek ana kütle ortalamasının %100(1-α) **güven** ile içine düşeceği aralık

$$\left[\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

biçiminde ifade edilir. Burada α **anlamlılık seviyesi**, 1-α **güven seviyesi**, $Z_{\alpha/2}$ ise standart normal dağılım eğrisinin sağ kuyruğunda α/2'lik alan bırakan Z değeridir. Başka bir deyişle

$$P(Z \geq Z_{\alpha/2}) = \alpha/2$$

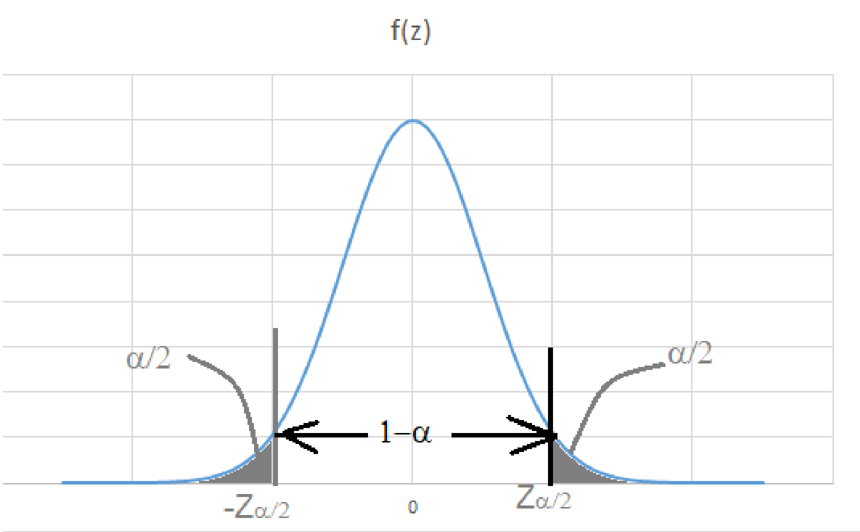
Bu durum aşağıdaki şekilden de izlenebilir:



Şekil 1: Standart normal dağılımın sağ kuyruk olasılığının gösterilmesi.

Benzer bir biçimde $P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$

Bu durum, sözel olarak standart normal dağılım eğrisi, $Z = -Z_{\alpha/2}$ ve $Z = Z_{\alpha/2}$ doğruları arasında kalan alanın 1-α olduğu şeklinde ifade edilebilir.



Şekil 2: Güven aralığının geometrik açıklaması

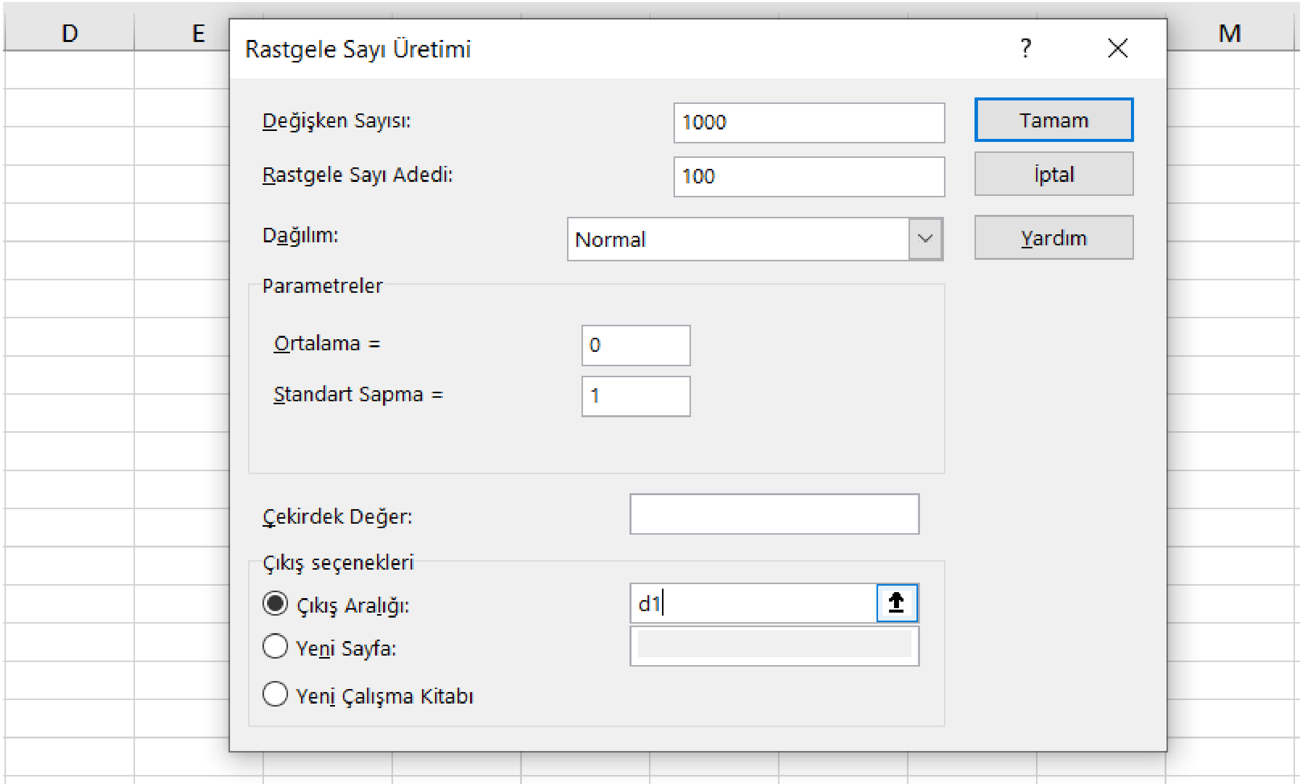
Bu arada

$$P(\overline{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

gösteriminin tartışmalı bir yapısı olduğundan da söz etmek gerekir. Çünkü ana kütle parametresi μ bir sabittir ve bir parametrenin bu şekilde belirlenen bir aralığa düşme olasılığından söz etmek saçmadır. Bununla birlikte burada olasılığın tanımının göreli sıklık yaklaşımına göre yapıldığını belirtmek gerekmektedir. Bu yaklaşıma göre %100(1-α)'lık bir güven aralığından söz edildiğinde bunun yorumu yukarıdaki şekilde oluşturulan aralıkların %100(1-α)'lık bir kısmının ana kütle parametresi μ'yü içerdiğini söylemek gerekir. Daha somut olarak örnek vermek gerekirse %95'lik bir güven aralığı, oluşturulan her 100 güven aralığından 95 tanesinin ana kütle parametresi μ'yü içerdiği bir aralık anlamına gelmektedir. Başka bir deyişle bu şekilde oluşturulan 100 aralıktan 5 tanesi de μ'yü ıskalamaktadır. Bu durum aşağıdaki simülasyon çalışması ile daha detaylı ele alınmaktadır.

Standar normal dağılımdan 100 birimlik örnekler 1000 kere çekilsin. Bunu EXCEL Veri Çözümleme paketi ile yapabilmek için gerekli işlemler aşağıdaki sırada gerçekleştirilir:

1) “Veri” ⟶ “Veri Çözümleme” ⟶ “Rastgele Sayı Üretimi”



Şekil 3: Standart normal dağılımdan 100’er birimlik simülasyon. Simülasyon sayısı 1000.

2) Rastgele üretilen her 100 birimin bulunduğu satırın altında örnek ortalamaları hesaplanır.

=ORTALAMA(D1:D100)

C	D	E	F	G
	-0,39526	3,263995	-0,10288	-0,4321
	0,947721	1,614644	-0,43622	1,222702
	0,260052	-0,87461	-0,20706	0,289207
	0,864227	0,993671	0,97936	0,95542
	0,048788	0,832867	-0,14977	-0,59218
	1,340197	-0,43824	-1,16257	-0,82952
	-2,83108	0,704151	0,636719	0,238745
	-1,45336	-0,60004	0,402222	0,04067
	0,438743	1,163025	1,533608	0,228603
	-0,65918	-0,12675	-1,11631	0,229467
	-0,05683	1,554013	0,546481	-0,9694
	-1,51527	0,479461	-1,29007	0,491596
	-0,39957	1,01636	-0,29823	-0,75598
	-0,28466	2,047072	0,207451	0,34634
	0,768152	0,609687	0,223109	0,828654
	-2,34948	0,348534	0,562989	1,616336
	-0,00165	-1,35595	1,105814	-0,98307
	-0,70631	-0,31025	-0,38338	1,67468
	-1,5206	1,305157	-0,53277	2,123734
	0,102342	-0,05423	0,543996	1,424291
	-0,01511	0,747864	-1,1206	-0,20636
	-1,04433	1,193503	1,915078	-0,87742
	1,266176	-1,97597	-0,23395	-0,65557
	0,522041	-0,41344	1,567719	-0,588
	-1,30785	1,037095	0,205418	-1,79474
	1,06231	0,039752	0,351624	-1,96267
xort	0,056378	0,137794	0,006594	-0,06036

Şekil 4: EXCEL çalışma sayfasının 101. satırında örnek ortalamaları hesaplanmıştır.

% 95lik alt güven limitleri

$$\bar{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

formülü ile hesaplanır.

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96

$$\bar{X} - 1{,}96 \frac{1}{\sqrt{100}}$$

=D101-1,96/10

C	D	E	F	G
	-0,39526	3,263995	-0,10288	-0,4321
	0,947721	1,614644	-0,43622	1,222702
	0,260052	-0,87461	-0,20706	0,289207
	0,864227	0,993671	0,97936	0,95542
	0,048788	0,832867	-0,14977	-0,59218
	1,340197	-0,43824	-1,16257	-0,82952
	-2,83108	0,704151	0,636719	0,238745
	-1,45336	-0,60004	0,402222	0,04067
	0,438743	1,163025	1,533608	0,228603
	-0,65918	-0,12675	-1,11631	0,229467
	-0,05683	1,554013	0,546481	-0,9694
	-1,51527	0,479461	-1,29007	0,491596
	-0,39957	1,01636	-0,29823	-0,75598
	-0,28466	2,047072	0,207451	0,34634
	0,768152	0,609687	0,223109	0,828654
	-2,34948	0,348534	0,562989	1,616336
	-0,00165	-1,35595	1,105814	-0,98307
	-0,70631	-0,31025	-0,38338	1,67468
	-1,5206	1,305157	-0,53277	2,123734
	0,102342	-0,05423	0,543996	1,424291
	-0,01511	0,747864	-1,1206	-0,20636
	-1,04433	1,193503	1,915078	-0,87742
	1,266176	-1,97597	-0,23395	-0,65557
	0,522041	-0,41344	1,567719	-0,588
	-1,30785	1,037095	0,205418	-1,79474
	1,06231	0,039752	0,351624	-1,96267
xort	0,056378	0,137794	0,006594	-0,06036
AS	-0,13962	-0,05821	-0,18941	-0,25636

Şekil 5:Alt güven limitlerinin hesaplanması($\overline{X} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$**)**

%95'lik üst güven sınırları da aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$\overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$;

$Z_{\frac{\alpha}{2}}$ =1,96

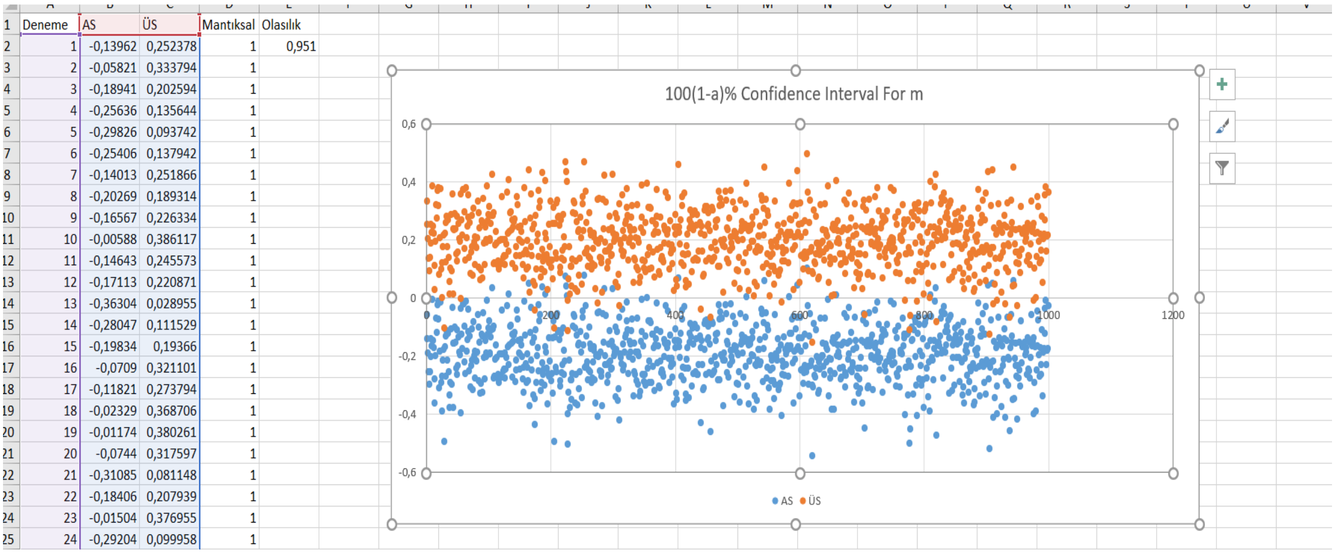
$$\overline{X} + 1{,}96\frac{1}{\sqrt{100}}$$

=D101+1,96/10

C	D	E	F	G
	-0,39526	3,263995	-0,10288	-0,4321
	0,947721	1,614644	-0,43622	1,222702
	0,260052	-0,87461	-0,20706	0,289207
	0,864227	0,993671	0,97936	0,95542
	0,048788	0,832867	-0,14977	-0,59218
	1,340197	-0,43824	-1,16257	-0,82952
	-2,83108	0,704151	0,636719	0,238745
	-1,45336	-0,60004	0,402222	0,04067
	0,438743	1,163025	1,533608	0,228603
	-0,65918	-0,12675	-1,11631	0,229467
	-0,05683	1,554013	0,546481	-0,9694
	-1,51527	0,479461	-1,29007	0,491596
	-0,39957	1,01636	-0,29823	-0,75598
	-0,28466	2,047072	0,207451	0,34634
	0,768152	0,609687	0,223109	0,828654
	-2,34948	0,348534	0,562989	1,616336
	-0,00165	-1,35595	1,105814	-0,98307
	-0,70631	-0,31025	-0,38338	1,67468
	-1,5206	1,305157	-0,53277	2,123734
	0,102342	-0,05423	0,543996	1,424291
	-0,01511	0,747864	-1,1206	-0,20636
	-1,04433	1,193503	1,915078	-0,87742
	1,266176	-1,97597	-0,23395	-0,65557
	0,522041	-0,41344	1,567719	-0,588
	-1,30785	1,037095	0,205418	-1,79474
	1,06231	0,039752	0,351624	-1,96267
xort	0,056378	0,137794	0,006594	-0,06036
AS	-0,13962	-0,05821	-0,18941	-0,25636
ÜS	0,252378	0,333794	0,202594	0,135644

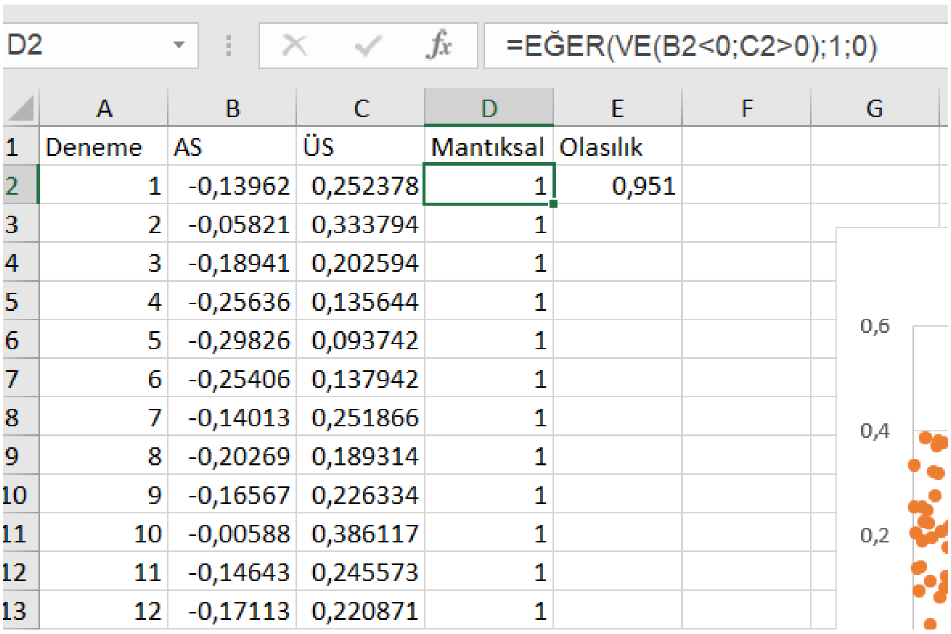
Şekil 6: Üst güven limitlerinin hesaplanması: $\overline{X} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

µ için %95'lik güven aralıkları aşağıda gösterilmiştir:



Deneme	AS	ÜS	Mantıksal	Olasılık
1	-0,13962	0,252378	1	0,951
2	-0,05821	0,333794	1	
3	-0,18941	0,202594	1	
4	-0,25636	0,135644	1	
5	-0,29826	0,093742	1	
6	-0,25406	0,137942	1	
7	-0,14013	0,251866	1	
8	-0,20269	0,189314	1	
9	-0,16567	0,226334	1	
10	-0,00588	0,386117	1	
11	-0,14643	0,245573	1	
12	-0,17113	0,220871	1	
13	-0,36304	0,028955	1	
14	-0,28047	0,111529	1	
15	-0,19834	0,19366	1	
16	-0,0709	0,321101	1	
17	-0,11821	0,273794	1	
18	-0,02329	0,368706	1	
19	-0,01174	0,380261	1	
20	-0,0744	0,317597	1	
21	-0,31085	0,081148	1	
22	-0,18406	0,207939	1	
23	-0,01504	0,376955	1	
24	-0,29204	0,099958	1	

Şekil 7: Birlikte gösterilen 1000 güven aralığı



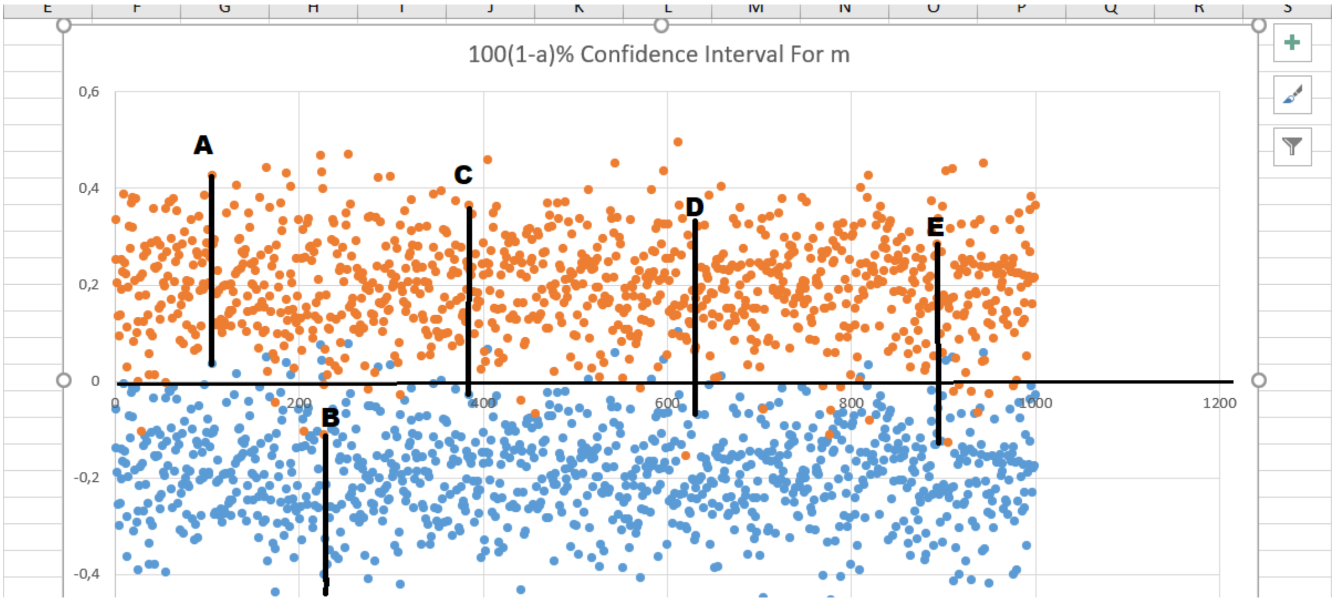
D2 =EĞER(VE(B2<0;C2>0);1;0)

Deneme	AS	ÜS	Mantıksal	Olasılık
1	-0,13962	0,252378	1	0,951
2	-0,05821	0,333794	1	
3	-0,18941	0,202594	1	
4	-0,25636	0,135644	1	
5	-0,29826	0,093742	1	
6	-0,25406	0,137942	1	
7	-0,14013	0,251866	1	
8	-0,20269	0,189314	1	
9	-0,16567	0,226334	1	
10	-0,00588	0,386117	1	
11	-0,14643	0,245573	1	
12	-0,17113	0,220871	1	

Şekil 8 : Güven aralığının gerçek parametreyi yakalayıp yakalamadığına yönelik mantıksal test.

Birinci aralık tahmininin alt limiti -0,13963 ve üst limiti de 0,252378’dir. Ana kütle ortalaması 0 bu aralığa düşeceği için mantıksal fonksiyonun değeri 1 olacaktır. D sütunu bütün bu mantıksal sınamaların yapılıp, mantıksal fonksiyona 0 veya 1 değerlerinin atandığı sütundur. D2:D1001 hücrelerindeki değerlerin toplamı da güven aralıklarının gerçek parametreyi içerdiği hücre sayısını verecektir. Bu sayının 1000’e bölünmesi ise güven aralığının ana kütle parametresini içerme olasılığını başka bir ifade ile **güven seviyesini** verecektir.

Bu olasılık E2 hücresine "=D1002/1000" formülü yazılarak hesaplanmıştır. Bu değer 0,951 olarak bulunmuştur ve bu değerin önsel olarak belirlenmiş %95'lik güven seviyesine çok yakın olduğuna dikkat edilmelidir.



Şekil 9: Güven aralığı kavramının anlamı.

A,B,C,D ve E ile etiketlenmiş bulunan beş aralık tahminini ele alalım. A ve B'nin gerçek parametre değeri olan 0'ı ıskaladığını, C,D,E gibi aralıkların ise yakaladığı açıktır. **Dolayısıyla %95'lik bir güven aralığının ortalama olarak her yüz tahminden 95 tanesinin C,D,E gibi aralık tahminlerinden oluştuğunu, 5 tanesinin ise A ve B gibi noktalardan oluştuğunu söyleyebiliriz.**

%99'luk bir güven aralığının ise %95'lik bir aralığa göre daha geniş olduğunu ama parametreyi içerme yüzdesinin ise daha fazla olduğunu belirtmek gerekiyor. Dolayısıyla burada bir tür değiş tokuş (trade-off) olduğunu vurgulamak gerekiyor. Hatanın azaltılması için daha geniş güven aralıkları kurmak gerekiyor ama daha geniş güven aralığı da tahmindeki belirsizliği artırıyor.

Örnek: Ortalaması μ ve standart sapması σ olan normal bir dağılımdan n birimlik rassal bir örnek $X_1, X_2, ..., X_{n-1}, X_n$ çekilsin. Örnek varyansı $S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}{n-1}$ şeklinde hesaplansın.

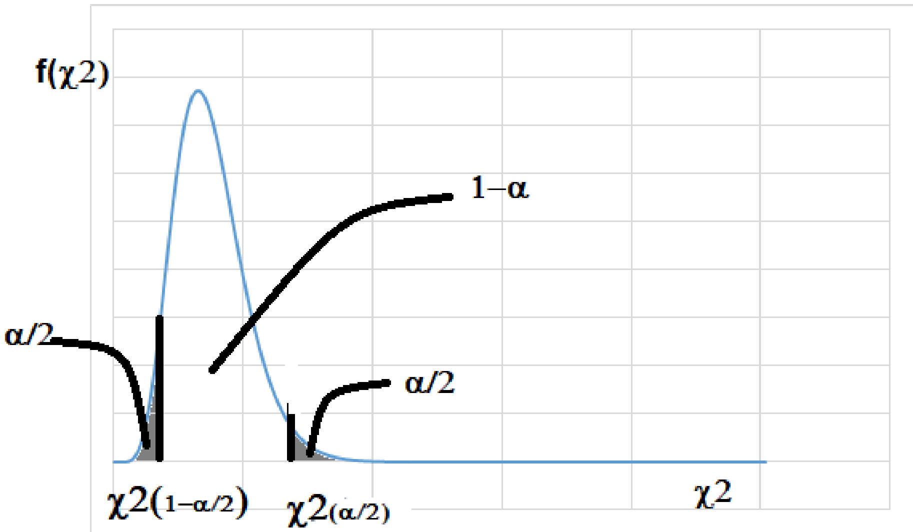
Bu durumda $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ istatistiği (n-1) serbestlik dereceli bir ki-kare dağılımına uyar.

Dolayısıyla ana kütle varyansı σ^2 için aralık tahmini $P(\chi^2_{1-\alpha/2} < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}) = 1-\alpha$

eşitliğinden hareketle gerçekleştirilebilir. Buradan $P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}) = 1-\alpha$

şeklinde tahmine gidilebilir.

Geometrik açıklama için aşağıdaki şekil incelenebilir:



Şekil 10: σ^2 **için %100(1-α)'lık güven aralığı**

+

Simülasyon ile Gösterim

Standart normal dağılımdan 100 birimlik 1000 simülasyon gerçekleştirilmiştir. Bu örneklere dayanarak örnek varyansları hesaplanmıştır. Bu değerlerden hareketle standart normal dağılımın varyansı için %100(1-α)’lık güven aralığı aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$P(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}}) = 1-\alpha$$

n-1=99 ve dolayısıyla serbestlik derecesi 99 olarak belirlenmiştir. Güven seviyesi 0.95 olarak seçildiğine göre kritik ki-kare değerleri

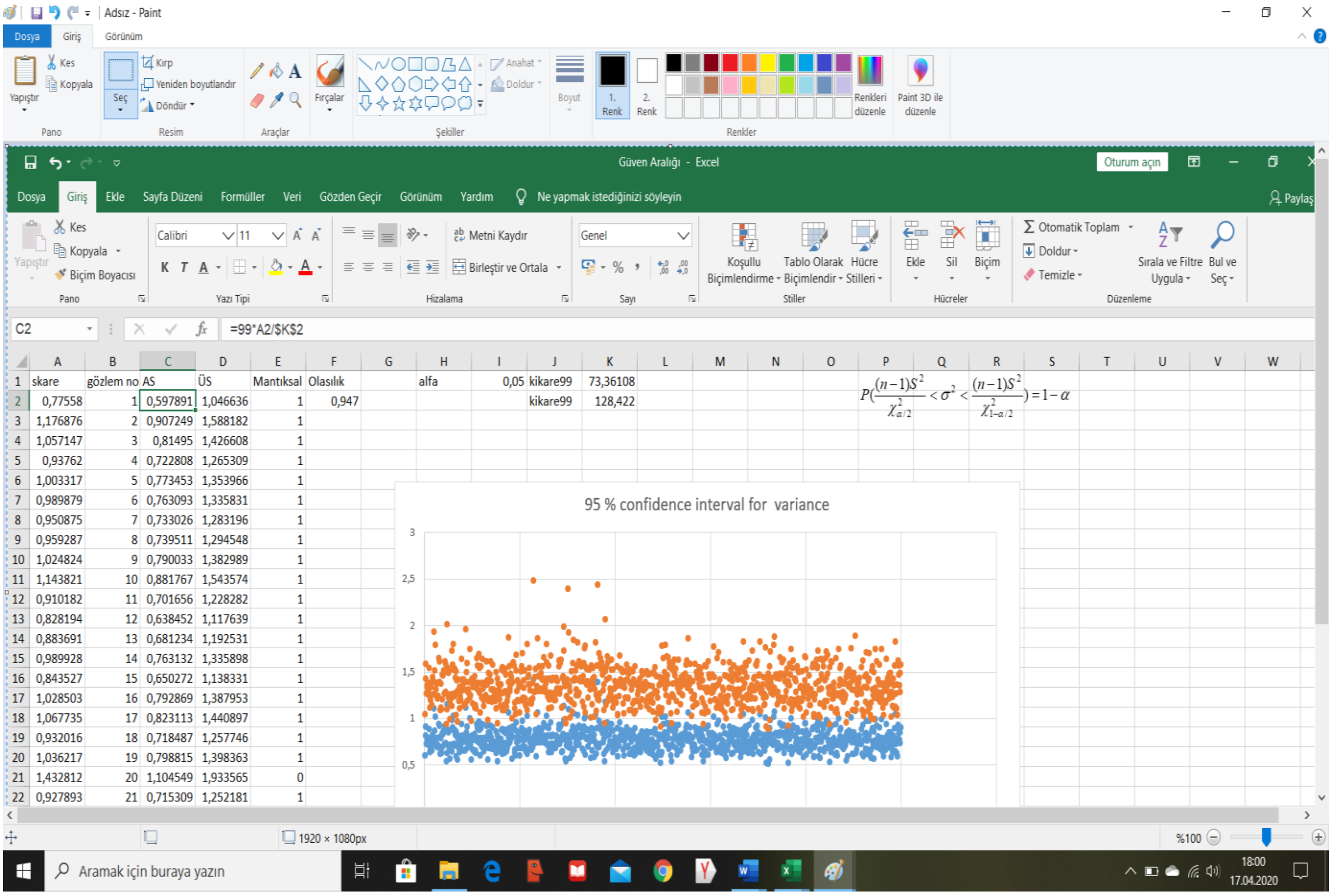
$$\chi^2_{\alpha/2} = 128,422$$

ve

$$\chi^2_{1-(\alpha/2)} = 73,361$$

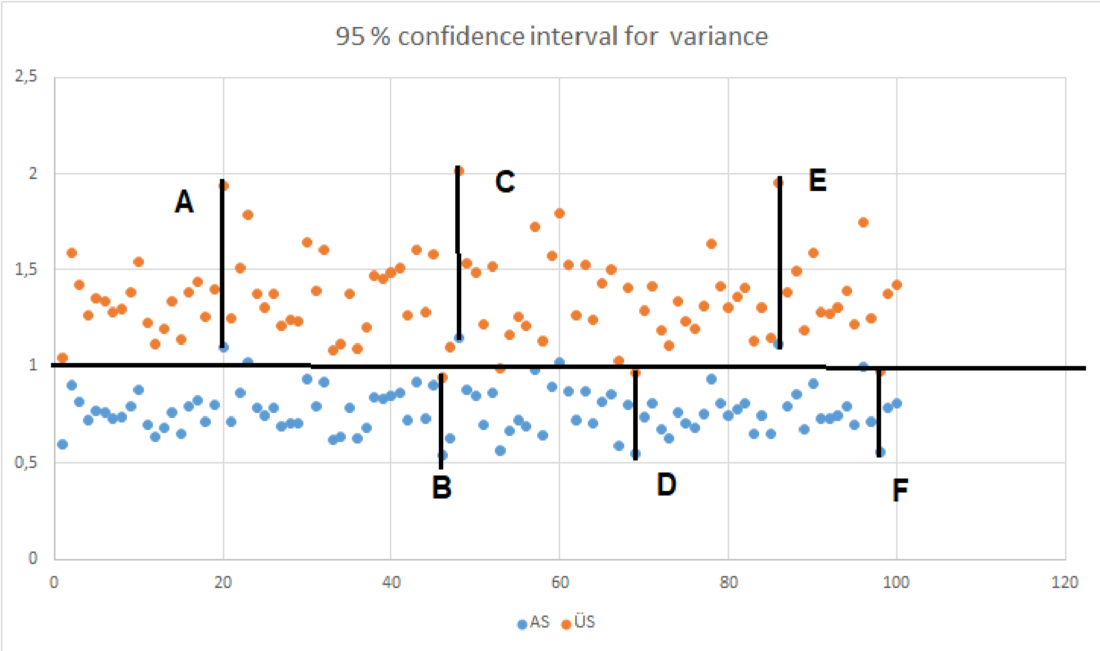
olarak belirlenir.

Aşağıdaki şekil gerçekleştirilen aralık tahminlerini vermektedir. Burada 1000 simülasyon içinden 947 tanesinde gerçek parametre 1, güven aralığı tahmini tarafından yakalanmıştır. Buradan hareketle bu olasılığın 0,947 olduğunu bu değerin de 0,95 olan güven katsayısına çok yakın olarak bulunduğunu söyleyebiliriz.



Şekil 11: Standart normal dağılımın varyans tahmini için her biri 100 gözlem değerine karşılık gelen 1000 simülasyon sonucu.

Yukarıdaki şeklin karmaşık olmasından dolayı daha basit bir şekli aşağıdaki gibi ele alalım:



Şekil 12: Standart normal dağılımın varyansı için 100 birimlik 100 simülasyon sonucu.

Yukarıdaki şekide A,B,C,D,E ve F gibi 6 nokta gerçek parametre değerini ıskalamaktadır. Buradan hareketle gözlenen güven düzeyinin 0.94 olduğunu söyleyebiliriz. Bu sayının da gerçek güven seviyesi olan 0,95'e çok yakın olduğunu söyleyebiliriz.