LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Uzaktan Eğitim

2.Hafta- Mart 2021

Lebesgue İntegrali

1902 de başlayan yayınlarında, Henri Lebesgue analiz tarihindeki en heycan verici yeni fikirlerden birini sundu. Bazı fikirleri Borel ve Cantor tarafından öngörülmüştü, fakat Lebesgue ölçümü ve integrali olarak bilinen teoriyi tamamen geliştiren Henri Lebesgue dir.

Lebesgue'in tanımı integrallenebilir fonksiyonlar kapsamını genişletir. Bu üstünlüğün yanı sıra integral ve limit sırası Riemann integralinden daha zayıf koşullarda değiştirilebilir. Buna sık sık duyulan gereksinim Lebesgue integral kavramının Riemann integraline göre kullanılma üstünlüğünü kanıtlar.

Terimleri $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = nx(1-x)^n$ şeklinde tanımlanan (f_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ üzerinde $f(x) = 0$ fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ayrıca, $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \neq 0$ olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir. Buna rağmen

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

eşitliği sağlanır. Bu sonuç ileride kanıtlayacağımız Lebesgue Baskın Yakınsama teoreminden kolayca elde edilebilir.

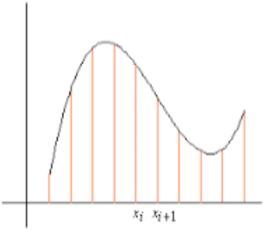
Benzer olarak, $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$ ile tanımlanan diziyi düşünelim. Kolaylıkla görülebileceği gibi, verilen fonksiyonların Riemann integralleri

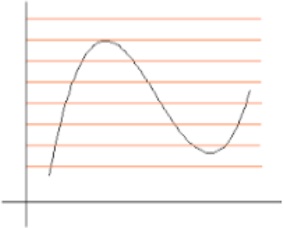
$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{x}} dx$$

olup, her $x > 0$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ dır. $\lim_{n\to\infty} \sup_{x>0} |f_n(x)| = \infty$ olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi düzgün yakınsak değildir. Fakat buna rağmen $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ dır ve bu sonuç ileride kanıtlayacağımız Lebesgue Baskın Yakınsama teoreminden kolayca elde edilebilir.

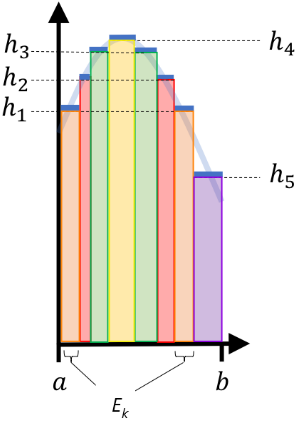
Lebesgue'in fikri temel olarak, Riemann integral tanımında yer alan tanım kümesinin bir bölüntüsü yerine görüntü kümesinin bir bölüntüsüyle başlayarak Riemann integralinin eksikliklerini ortadan kaldırmaktı.

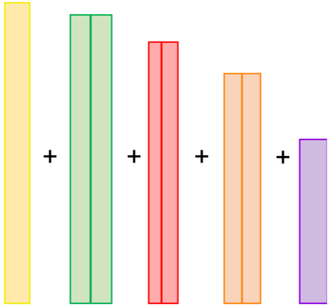
Riemann toplamını oluşturmak için verilen fonksiyondan bağımsız olarak tanım kümesinin bölüntüsü alınır. Lebesgue toplamında ise fonksiyonun almış olduğu değerlere göre görüntü kümesinin bölüntüsü alınır.





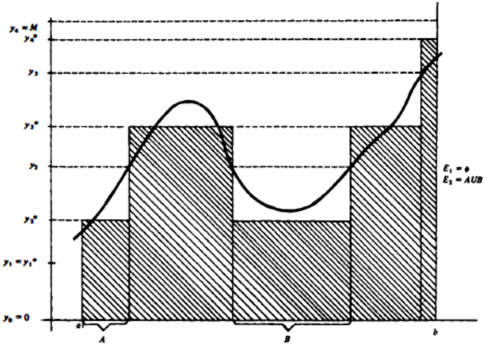
Bu durumda oluşan dikdörtgenlere dikkat ediniz. Aynı yüksekliğe sahip dikdörtgenler aynı renk ile gösterilmiştir.





Yukarıdaki toplama işlemini Riemann toplamından farklı olarak aşağıdaki şekilde oluşturabiliriz.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu negatif değerler almayan sınırlı bir fonksiyon olsun. $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) < M$ olduğunu kabul edelim. $[0, M]$ aralığının $y-$ekseni boyunca bir bölüntüsü $P = \{y_0, y_1, ..., y_n\}$ olsun ve $i = 1, 2, ..., n$ için $y_i^* \in [y_{i-1}, y_i]$ seçelim.



$$E_i = \{x \in [a, b] : y_{i-1} \leq f(x) < y_i\}$$

olarak tanımlayalım. $E_1 = \varnothing$ ve $E_2 = A \cup B$ dir. E_i kümelerinin uzunluğunu $L(E_i)$ ile gösterelim. Bu durumda f fonksiyonunun grafiğinin altında kalan alana bir yaklaşım olarak

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^* L(E_i) = y_1^* L(E_1) + y_2^* L(E_2) + \cdots + y_n L(E_n)$$

toplamı verilebilir. Bu toplama Lebesgue toplamı denir.

Lebesgue integralini bu toplamın limiti olarak tanımlayacağız.

Lebesgue'in yönteminin zorluğu reel sayı doğrusundaki alt kümelere "uzunluk" atamanın sistematik bir yolunu gerektirir. Yukarıdaki yöntemde öncelikle, E_2 kümesinin uzunluğunu belirlemek gerekir. Eğer E_2 kümesi bir aralık veya aralıkların bir birleşimi ise problem yok. Ancak durumun böyle olması gerekmez.

Örneğin E_2 kümesi $[0, 1]$ aralığındaki rasyonel sayılar kümesi ya da $[0, 1]$ aralığındaki irrasyonel sayılar kümesi olarak karşımıza gelirse bu kümenin uzunluğu ne olur? Uzunluk kavramı, aralıklardan daha karmaşık olan keyfi kümeler üzerine genişletilebilir mi?

Uzunluk fonksiyonunun genişlemesine ölçü fonksiyonu adı vereceğiz. Yukarıdaki toplamı hesaplayabilmek için E_i kümelerinin ölçülebilir olduğunu garantilememiz gerekir. Bunun için integrali alınanan fonksiyon üzerine koşul bırakacağız.

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

ele alınacaktır.

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

ele alınacaktır.

3. Bölüm de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve özellikleri

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

ele alınacaktır.

3. Bölüm de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve özellikleri
4. Bölüm de Sınırlı fonksiyonlar için Lebesgue integrali

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

ele alınacaktır.

3. Bölüm de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve özellikleri
4. Bölüm de Sınırlı fonksiyonlar için Lebesgue integrali
5. Bölüm de Sınırsız fonksiyonlar için Lebesgue integrali

Bu bölümde

1. Uzunluk kavramından hareketle ölçü kavramı
2. Dış Ölçü kavramı
3. Lebesgue dış ölçüsünden yararlanarak Lebesgue ölçüsünün tanımlanması
4. Ölçülebilir kümeler ve özellikleri

ele alınacaktır.

3. Bölüm de Lebesgue ölçülebilir fonksiyonlar ve özellikleri
4. Bölüm de Sınırlı fonksiyonlar için Lebesgue integrali
5. Bölüm de Sınırsız fonksiyonlar için Lebesgue integrali
ele alınacaktır.

Bir I aralığının uzunluğu uç noktalarının farkı olarak tanımlanır ve $L(I)$ ile gösterilir. $a < b$ olmak üzere uç noktaları a ve b olan bir I aralığının, kapalı, açık ya da yarı açık olmasına bakılmazsın $L(I)$ uzunluğu $b - a$ dır. $I = [a, a] = \{a\}$ ve $I = (a, a) = \emptyset$ olması durumunda $L(I) = 0$ dır. Bir sonsuz aralığın uzunluğu ise sonsuzdur.

Bir I aralığının uzunluğu uç noktalarının farkı olarak tanımlanır ve $L(I)$ ile gösterilir. $a < b$ olmak üzere uç noktaları a ve b olan bir I aralığının, kapalı, açık ya da yarı açık olmasına bakılmazsın $L(I)$ uzunluğu $b - a$ dır. $I = [a, a] = \{a\}$ ve $I = (a, a) = \emptyset$ olması durumunda $L(I) = 0$ dır. Bir sonsuz aralığın uzunluğu ise sonsuzdur.

Uzunluk, bir küme fonksiyonu örneğidir; yani bir kümeler ailesindeki her kümeyi genişletilmiş reel sayıya eşleyen bir fonksiyondur.

L küme fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Her $I \subset \mathbb{R}$ için $L(I) \geq 0$ olacak şekilde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyondur.

L küme fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Her $I \subset \mathbb{R}$ için $L(I) \geq 0$ olacak şekilde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyondur.
2. $\{I_i\}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ bir aralık olacak şekilde ikişer ayrık aralıkların sayılabilir bir ailesi ise bunların birleşimlerinin uzunluğu

$$L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L(I_i)$$

şeklindedir.

L küme fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. Her $I \subset \mathbb{R}$ için $L(I) \geq 0$ olacak şekilde genişletilmiş reel değerli bir fonksiyondur.
2. $\{I_i\}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ bir aralık olacak şekilde ikişer ayrık aralıkların sayılabilir bir ailesi ise bunların birleşimlerinin uzunluğu
$$L\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} L(I_i)$$
şeklindedir.
3. L fonksiyonu öteleme altında değişmezdir (invaryanttır). Yani, $y \in \mathbb{R}$ bir sabit ve $I + y := \{x + y : x \in I\}$ olmak üzere
$$L(I) = L(I + y)$$
dir.

Uzunluk fonksiyonunun tanım kümesi tüm aralıklar ailesidir. Uzunluk kavramı aralıklardan daha karmaşık olan keyfi kümeler üzerine genişletilebilir mi? Bu problemi araştıralım.

Uzunluk fonksiyonunun tanım kümesi tüm aralıklar ailesidir. Uzunluk kavramı aralıklardan daha karmaşık olan keyfi kümeler üzerine genişletilebilir mi? Bu problemi araştıralım.
O, $\mathbb{R}$ de bir açık küme olsun. Bu durumda O kümesi ikişer ayrık, sayılabilir sayıdaki I_i açık aralıklarının birleşimi şeklinde yazılabilir; bu yazılım, sıralama dikkate alınmadığında tek türlüdür:

$$O = \bigcup_i I_i .$$

O açık kümesinin uzunluğu

$$L(O) = \sum_i L(I_i)$$

şeklinde tanımlanır.

Sağ taraftaki toplam, toplama sürecinde kullanılan terimlerin sırasına bağlı olmadığından $L(O)$ iyi tanımlıdır. Böylece, bir açık kümenin uzunluğu, açık ve ikişer ayrık olan ve birleşimi bu kümeyi veren aralıkların uzunlukları toplamıdır.

Sağ taraftaki toplam, toplama sürecinde kullanılan terimlerin sırasına bağlı olmadığından $L(O)$ iyi tanımlıdır. Böylece, bir açık kümenin uzunluğu, açık ve ikişer ayrık olan ve birleşimi bu kümeyi veren aralıkların uzunlukları toplamıdır.
O_1 ve O_2, $O_1 \subset O_2$ koşulunu sağlayan $\mathbb{R}$ nin iki açık kümesi ise

$$L(O_1) \leq L(O_2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu nedenle (a, b) tarafından kapsanan herhangi bir O açık kümesi için

$$0 \leq L(O) \leq b - a$$

yazılabilir.

Sağ taraftaki toplam, toplama sürecinde kullanılan terimlerin sırasına bağlı olmadığından $L(O)$ iyi tanımlıdır. Böylece, bir açık kümenin uzunluğu, açık ve ikişer ayrık olan ve birleşimi bu kümeyi veren aralıkların uzunlukları toplamıdır.
O_1 ve O_2, $O_1 \subset O_2$ koşulunu sağlayan $\mathbb{R}$ nin iki açık kümesi ise

$$L(O_1) \leq L(O_2)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu nedenle (a, b) tarafından kapsanan herhangi bir O açık kümesi için

$$0 \leq L(O) \leq b - a$$

yazılabilir.
F bir (a, b) aralığı tarafından kapsanan bir kapalı küme olsun. Bu durumda F kümesinin uzunluğu

$$L(F) = b - a - L(F^c)$$

şeklinde tanımlanır.

Uzunluk kavramını açık ve kapalı kümelere genişlettik. Bu genişletmeyi mümkünse $\mathbb{R}$ nin tüm kümelerine genişletmek istiyoruz. $\mathbb{R}$ nin her bir E kümesine negatif olmayan genişletilmiş reel sayı karşılık getiren, $m(E)$ şeklinde yazılan, E nin ölçüsü adı verilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir m fonksiyonu düşünelim:

Uzunluk kavramını açık ve kapalı kümelere genişlettik. Bu genişletmeyi mümkünse $\mathbb{R}$ nin tüm kümelerine genişletmek istiyoruz. $\mathbb{R}$ nin her bir E kümesine negatif olmayan genişletilmiş reel sayı karşılık getiren, $m(E)$ şeklinde yazılan, E nin ölçüsü adı verilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir m fonksiyonu düşünelim:

1. Her $E \in \wp(\mathbb{R})$ için $m(E)$ tanımlı olsun.

Uzunluk kavramını açık ve kapalı kümelere genişlettik. Bu genişletmeyi mümkünse $\mathbb{R}$ nin tüm kümelerine genişletmek istiyoruz. $\mathbb{R}$ nin her bir E kümesine negatif olmayan genişletilmiş reel sayı karşılık getiren, $m(E)$ şeklinde yazılan, E nin ölçüsü adı verilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir m fonksiyonu düşünelim:

1. Her $E \in \wp(\mathbb{R})$ için $m(E)$ tanımlı olsun.
2. Herbir I aralığı için $m(I) = L(I)$ olsun.

Uzunluk kavramını açık ve kapalı kümelere genişlettik. Bu genişletmeyi mümkünse $\mathbb{R}$ nin tüm kümelerine genişletmek istiyoruz. $\mathbb{R}$ nin her bir E kümesine negatif olmayan genişletilmiş reel sayı karşılık getiren, $m(E)$ şeklinde yazılan, E nin ölçüsü adı verilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir m fonksiyonu düşünelim:

1. Her $E \in \wp(\mathbb{R})$ için $m(E)$ tanımlı olsun.
2. Herbir I aralığı için $m(I) = L(I)$ olsun.
3. Eğer (E_n) ayrık bir dizi ve m bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \quad \text{(sayılabilir toplamsallık)}$$

Uzunluk kavramını açık ve kapalı kümelere genişlettik. Bu genişletmeyi mümkünse $\mathbb{R}$ nin tüm kümelerine genişletmek istiyoruz. $\mathbb{R}$ nin her bir E kümesine negatif olmayan genişletilmiş reel sayı karşılık getiren, $m(E)$ şeklinde yazılan, E nin ölçüsü adı verilen ve aşağıdaki özellikleri sağlayan bir m fonksiyonu düşünelim:

1. Her $E \in \wp(\mathbb{R})$ için $m(E)$ tanımlı olsun.
2. Herbir I aralığı için $m(I) = L(I)$ olsun.
3. Eğer (E_n) ayrık bir dizi ve m bunların herbiri üzerinde tanımlı ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n). \quad \text{(sayılabilir toplamsallık)}$$

4. m öteleme altında değişmez(invaryant) olsun. Yani, m fonksiyonu E ve $E + y$ kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

$$m(E + y) = m(E)$$

olsun.

Ne yazık ki yukarıdaki özelliklerin hepsini sağlayan bir küme fonksiyonu bulmak imkansızdır. (1) koşulunu zayıflatmak en kullanışlı kısıtlamadır. Bu durumda $m(E)$ nin tanımlı olduğu en geniş kümeyi bulmaya çalışacağız.

Ne yazık ki yukarıdaki özelliklerin hepsini sağlayan bir küme fonksiyonu bulmak imkansızdır. (1) koşulunu zayıflatmak en kullanışlı kısıtlamadır. Bu durumda $m(E)$ nin tanımlı olduğu en geniş kümeyi bulmaya çalışacağız.

(1) özelliğini zayıflatmak tek yaklaşım değildir. (3) de verilen sayılabilir toplamsallık özelliği yerine sonlu toplamsallık gibi daha zayıf özellikte yazılabilir. Sonlu toplamsallık, ayrık kümelerin herhangi sonlu (E_i) dizisi için $m\left(\cup E_n\right) = \sum m(E_n)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Ne yazık ki yukarıdaki özelliklerin hepsini sağlayan bir küme fonksiyonu bulmak imkansızdır. (1) koşulunu zayıflatmak en kullanışlı kısıtlamadır. Bu durumda $m(E)$ nin tanımlı olduğu en geniş kümeyi bulmaya çalışacağız.

(1) özelliğini zayıflatmak tek yaklaşım değildir. (3) de verilen sayılabilir toplamsallık özelliği yerine sonlu toplamsallık gibi daha zayıf özellikte yazılabilir. Sonlu toplamsallık, ayrık kümelerin herhangi sonlu (E_i) dizisi için $m(\cup E_n) = \sum m(E_n)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

(3) özelliğine bir başka alternatif, dış ölçü tarafından sağlanan sayılabilir alt toplamsallıktır. Dolayısıyla, ilk olarak $\mathbb{R}$ nin tüm alt kümeleri için tanımlı olan ve dış ölçü adı verilen küme fonksiyonunu tanımlayalım.

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Her $E \in \wp(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Her $E \in \wp(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
3. $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonluk)

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Her $E \in \wp(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
3. $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonluk)
4. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \wp(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ (sayılabilir alt toplamsallık)

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Her $E \in \wp(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
3. $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonluk)
4. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \wp(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ (sayılabilir alt toplamsallık)

Dış Ölçü

X bir küme ve $\wp(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $\wp(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$
2. Her $E \in \wp(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$
3. $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonluk)
4. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \wp(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

   (sayılabilir alt toplamsallık)

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir dış ölçü adı verilir.

Lebesgue Dış Ölçüsü

(I_k) , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A = \{(I_k) : A \subset \cup I_k\}$$

olsun. $\wp(\mathbb{R})$ üzerinde

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan m^* fonksiyonuna Lebesgue dış ölçüsü adı verilir.

Şimdi bu fonksiyonun gerçekten dış ölçü şartlarını sağladığını gösterelim.

Şimdi bu fonksiyonun gerçekten dış ölçü şartlarını sağladığını gösterelim.

1. İnfimumu alınan kümenin her elemanı pozitif ya da sıfır olduğundan kümenin infimumu negatif olamaz. Bu yüzden her $E \subset \mathbb{R}$ için $m^*(E) \geq 0$ dır.

Şimdi bu fonksiyonun gerçekten dış ölçü şartlarını sağladığını gösterelim.

1. İnfimumu alınan kümenin her elemanı pozitif ya da sıfır olduğundan kümenin infimumu negatif olamaz. Bu yüzden her $E \subset \mathbb{R}$ için $m^*(E) \geq 0$ dır.

2. $\forall \varepsilon > 0$ için en az bir (I_k) dizisi bulunabilir ki $\varnothing \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} L(I_k) < \varepsilon$ olur. Örneğin; $I_k = (0, \frac{\varepsilon}{2^{k+1}})$ olarak alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Dolayısıyla $0 \leq m^*(\varnothing) < \varepsilon$ eşitsizliğinden $m^*(\varnothing) = 0$ elde edilir.

3. $E_1 \subset E_2$ olsun. E_2 nin her açık örtüsü aynı zamanda E_1 inde açık örtüsü olduğundan

$$
\begin{aligned}
m^*(E_1) &= \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_{E_1}\right\} \\
&\leq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_{E_2}\right\} \\
&= m^*(E_2)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

4. (E_n), $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \infty$$

ise

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır.

4. (E_n), $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin herhangi bir dizisi olsun. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) = \infty$$

ise

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

eşitsizliğinin sağlanacağı açıktır. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) < \infty$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. İnfimum özelliğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} L(I_{n,k}) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

olacak şekilde en az bir $(I_{n,k}) \in \tau_{E_n}$ vardır. $E_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_{n,k}$ olduğundan

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{n,k}\right)$$

yazılabilir.

Lebesgue dış ölçüsünün tanımından

$$\begin{aligned} m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} L(I_{n,k}) \\ &< \sum_{n=1}^{\infty}\left(m^*(E_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}\right) \\ &= \varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n) \end{aligned}$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n)$$

elde edilir.

Şimdi Lebesgue dış ölçüsünün bazı özelliklerini verelim.

Şimdi Lebesgue dış ölçüsünün bazı özelliklerini verelim.

Teorem

Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ *nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani* $I \subset \mathbb{R}$ *bir aralık ise* $m^*(I) = L(I)$ *dır.*

Şimdi Lebesgue dış ölçüsünün bazı özelliklerini verelim.

Teorem

Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir, yani $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise $m^*(I) = L(I)$ dır.

İspat:

(1. Durum) $I = (a, b)$ ise $I \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ özelliğini sağlayan her bir (I_k) dizisi için

$$L(I) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) \Rightarrow b - a \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k)$$

olduğu açıktır. Özel olarak, $I_1 = I$ ve $k > 1$ için $I_k = \emptyset$ alınırsa $(I_k) \in \tau_I$ olur ve bu dizi için

$$\sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = b - a = L(I)$$

bulunur.

İspatın Devamı:

O halde

$$m^*(I) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_I \right\} = b - a = L(I)$$

olacaktır.

İspatın Devamı:

(2. Durum) $J = [a, b]$ olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için $I_1 = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, b + \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ve $k \geq 2$ için $I_k = \emptyset$ olarak seçilirse

$$m^*(J) \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = b - a + \varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $m^*(J) \leq b - a = L(J)$ bulunur. Şimdi eşitsizliğin tersini ispat etmeye çalışalım. $(I_k) \in \tau_J$ olsun. Bu $J \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ demektir. J kapalı ve sınırlı (kompakt) olduğundan Heine-Borel teoremi gereği J, I_k aralıklarının sonlu tanesi ile örtülebilir. O halde öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki $J \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} I_k$ olur.

İspatın Devamı:

Böylece

$$b-a \leq \sum_{k=1}^{N} L(I_k)$$

ve dolayısıyla

$$b-a \leq \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k)$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

Böylece

$$b - a \le \sum_{k=1}^{N} L(I_k)$$

ve dolayısıyla

$$b - a \le \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k)$$

yazılabilir.İnfimum özelliğinden

$$L(J) = b - a \le \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_J \right\} = m^*(J)$$

olur. Böylece

$$L(J) \le m^*(J) \le L(J)$$

eşitsizliğinden $m^*(J) = L(J)$ sonucu elde edilir.

İspatın Devamı:

(3.Durum) $(a,b) \subset (a,b] \subset [a,b]$ ve m^* fonksiyonunun monotonluk özelliğinden

$$b-a = m^*\left((a,b)\right) \leq m^*\left((a,b]\right) \leq m^*\left([a,b]\right) = b-a$$

yazılabilir. Buradan $m^*\left((a,b]\right) = b-a$ elde edilir. Benzer şekilde $m^*\left([a,b)\right) = b-a$ olduğu gösterilebilir.

İspatın Devamı:

(4.Durum) I bir sınırsız aralık olsun. Bu durumda herhangi bir $k > 0$ sayısı için $L(J) = k$ olacak şekilde $J \subset I$ sınırlı alt aralığı vardır.

$$k = L(J) = m^*(J) \leq m^*(I)$$

yani herhangi $k > 0$ sayısı için $m^*(I) \geq k$ dır. O halde $m^*(I) = \infty = L(I)$ elde edilir.

Teorem

Lebesgue dış ölçüsü ötelemeye göre değişmezdir.

Teorem

Lebesgue dış ölçüsü ötelemeye göre değişmezdir.

İspat:

$$\tau_A = \left\{ (I_k) = ((a_k, b_k)) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \right\} \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} m^*(A) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k : (I_k) \in \tau_A \right\} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

İspatın Devamı:

$$\tau_{A+x} = \left\{ (I_k + x) = ((a_k + x, b_k + x)) : A + x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k + x, b_k + x) \right\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} m^*(A+x) &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k + x) : (I_k + x) \in \tau_{A+x} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k : (I_k) \in \tau_A \right\} \\ &= m^*(A) \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi bu teoremlerin bazı sonuçlarını verelim.

Şimdi bu teoremlerin bazı sonuçlarını verelim.

Sonuç

E sayılabilir bir küme ise $m^*(E) = 0$ dır.

Şimdi bu teoremlerin bazı sonuçlarını verelim.

Sonuç

E sayılabilir bir küme ise $m^*(E) = 0$ dır.

İspat:

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $E = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$ olmak üzere $I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, a_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$ seçilirse

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$$

olur. Bu durumda

$$0 \leq m^*(E) \leq m^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = \varepsilon$$

olur ki bu $m^*(E) = 0$ olacağını gösterir.

Örnek

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin her biri sayılabilir olduğundan, her birinin dış ölçüsü sıfırdır.

Örnek

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin her biri sayılabilir olduğundan, her birinin dış ölçüsü sıfırdır.

Yukarıdaki önermenin lojik eşitini şu şekilde ifade edebiliriz.

Örnek

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin her biri sayılabilir olduğundan, her birinin dış ölçüsü sıfırdır.

Yukarıdaki önermenin lojik eşitini şu şekilde ifade edebiliriz.

Sonuç

Dış ölçüsü sıfırdan farklı her küme sayılamazdır.

Örnek

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin her biri sayılabilir olduğundan, her birinin dış ölçüsü sıfırdır.

Yukarıdaki önermenin lojik eşitini şu şekilde ifade edebiliriz.

Sonuç

Dış ölçüsü sıfırdan farklı her küme sayılamazdır.

Örnek

$[0, 1]$ kümesi sayılmazdır.

Örnek

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ve $\mathbb{Q}$ kümelerinin her biri sayılabilir olduğundan, her birinin dış ölçüsü sıfırdır.

Yukarıdaki önermenin lojik eşitini şu şekilde ifade edebiliriz.

Sonuç

Dış ölçüsü sıfırdan farklı her küme sayılamazdır.

Örnek

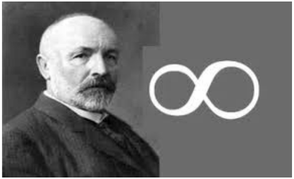
$[0, 1]$ kümesi sayılmazdır.

Çözüm

$m^* ([0, 1]) = L ([0, 1]) = 1 \neq 0$ olduğundan, $[0, 1]$ kümesi sayılmazdır.

CANTOR KÜMESİ

"Dış ölçüsü sıfır olan küme sayılabilirdir." önermesi her zaman doğru değildir.



Alman matematikçisi Georg Cantor (1845–1918), modern matematiğin temeli olan kümeler teorisinin kurucusu olarak kabul edilir. Cantor, 19. yüzyılın sonlarında yazdığı makalelerinde, sonsuzluğu ve sonsuz kümeleri matematiksel ciddiyetle inceleyen ilk kişidir.

Çeşitli sonsuzlukları birbirleriyle karşılaştırmış ve sonsuz büyüklüklerin de kendi aralarında bir aritmetiği olduğunu farketmiştir.

Cantor, trigonometrik serilerle ilgili bir problemi çözmek için bulduğu Cantor kümelerinin insanın sezgisine çok aykırı gelen özellikleri vardır. Bundan dolayı daha çok, ilk bakışta doğru gibi görünen bazı iddiaların yalışlığını göstermede örnek olarak kullanılırlar.

Cantor, trigonometrik serilerle ilgili bir problemi çözmek için bulduğu Cantor kümelerinin insanın sezgisine çok aykırı gelen özellikleri vardır. Bundan dolayı daha çok, ilk bakışta doğru gibi görünen bazı iddiaların yalışlığını göstermede örnek olarak kullanılırlar.

$C_0 := [0, 1]$ olsun. C_0 aralığını eşit olarak üçe bölelim ve ortadaki üçte birlik kısım olan

$$J_{1,1} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

açık aralığını çıkartalım. Geriye uzunlukları $\frac{1}{3}$ olan iki kapalı aralığı sırasıyla

$$I_{1,1} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{ve} \quad I_{1,2} = \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

ile gösterelim. Bu iki aralığın birleşimine C_1 diyelim; yani $C_1 = I_{1,1} \cup I_{1,2} = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$.

Şimdi $I_{1,1}$ ve $I_{1,2}$ den ortalarındaki üçte birlik açık aralıklardan meydana gelen

$$V_2 = J_{2,1} \cup J_{2,2} = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

kümesini atalım. Geriye kalan C_2 kümesi uzunlukları $\frac{1}{9}$ olan dört kapalı aralıktan oluşur:

$$\begin{aligned} C_2 &= I_{2,1} \cup I_{2,2} \cup I_{2,3} \cup I_{2,4} \\ &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]. \end{aligned}$$

$V_1 = J_{1,1}$ diyebiliriz.

Bu süreci yukarıdaki şekilde devam ettirelim. Genel olarak n.aşamada atılan açık aralıklar 2^{n-1} tanedir ve

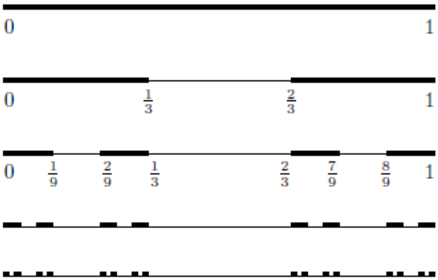
$$V_n = J_{n,1} \cup J_{n,2} \cup \cdots \cup J_{n,2^{n-1}} = \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} J_{n,k}$$

ile gösterilir. Kalan kapalı aralıklar ise 2^n tanedir ve

$$C_n = I_{n,1} \cup I_{n,2} \cup \cdots \cup I_{n,2^n} = \bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$$

ile gösterilir. V_n ve C_n'yi meydana getiren her bir parçanın uzunluğu $\frac{1}{3^n}$ dir ve bu parçalar birbirinden ayrıktır.

İlk bir kaç aşamada elde edilenler aşağıdaki şekildedir.



Bu kümeler arasında $n = 1, 2, 3, \ldots$ için

$$V_n \cup C_n = C_{n-1}$$

ve

$$[0, 1] = C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$$

bağıntıları geçerlidir. Ortadaki açık aralığı atma işlemini elimize geçen her kapalı aralık için yapıp, bu süreci hiç bir sınır tanımadan devam ettirelim; yani n yi sonsuza gönderelim. O zaman iki yeni kümemiz olur:

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{ve} \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

V atılan kümelerin hepsidir; C ise elimizde kalan kısımlardır.

$$V \cup C = [0, 1] \quad \text{ve} \quad V \cap C = \emptyset$$

olduğu açıktır.

Tanım

$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kümesine **Cantor kümesi** adı verilir.

Tanım

$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kümesine **Cantor kümesi** adı verilir.

$I_{n,k}$ kapalı aralıklarının her birinin uç noktaları C dedir. Sonsuz sayıda $I_{n,k}$ aralığı var olduğundan Cantor kümesi sonsuz sayıda nokta içerir.

Tanım

$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ kümesine **Cantor kümesi** adı verilir.

$I_{n,k}$ kapalı aralıklarının her birinin uç noktaları C dedir. Sonsuz sayıda $I_{n,k}$ aralığı var olduğundan Cantor kümesi sonsuz sayıda nokta içerir.

Teorem

C Cantor kümesinin her elemanı $j \in \mathbb{N}$ için $x_j = 0$ ya da $x_j = 2$ olmak üzere

$$x = (0, x_1 x_2 x_3 \cdots)_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

şeklinde tek türlü seri açılımına sahiptir. Ayrıca bu ifadenin terside doğrudur.

İspat:

$x \in [0,1]$ olsun. x_n ler için $0, 1$ ve 2 rakamlarını kullanarak x sayısı

$$x = (0, x_1 x_2 x_3 \cdots)_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

biçiminde bir açılıma sahiptir. Bazı sayılar için bu cinsten biri sonlu, diğer sonsuz iki açılım vardır; örneğin

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= (0,1)_3 = (0,02222\ldots)_3 \\ \frac{2}{3} &= (0,2)_3 = (0,12222\ldots)_3 \end{aligned}$$

İspat:

Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için, x in sonlu açılımının son rakamı 2 ise sonlu açılımı, değil ise sonsuz açılımı tercih edeceğiz; yani

$$\frac{1}{3} = (0,02222\ldots)_3 \quad \text{ve} \quad \frac{2}{3} = (0,2)_3$$

şeklinde alacağız. Şimdi Cantor kümesinin elemanları ile ilgilenelim. $V_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ olduğundan V_1 kümesinin elemanları x_n lerin hepsi birden sıfır veya hepsi birden 2 olmamak üzere

$$x = \frac{1}{3} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

$V_2 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ olduğundan V_2 kümesinin elemanları x_n lerin hepsi birden sıfır veya hepsi birden 2 olmamak üzere

$$x = \frac{1}{3^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad \text{veya} \quad x = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

$V_3 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)$ olduğundan V_3 kümesinin elemanları x_n lerin hepsi birden sıfır veya hepsi birden 2 olmamak üzere

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{3^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad \text{veya} \quad x = \frac{1}{3^3} + \frac{2}{9} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \\ x &= \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \quad \text{veya} \quad x = \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \end{aligned}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir.

Genel olarak, V_n kümesinin elemanları a_i ler 0 ya da 2 fakat x_i lerin hepsi birden sıfır veya hepsi birden 2 olmamak üzere

$$x = \frac{1}{3^n} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x_i}{3^i}$$

şeklinde bir gösterime sahiptir. Böylece $x \in V_n$ olması için gerek ve yeter koşul $i < n$ için $x_i = 0$ ya da $x_i = 2$; $x_n = 1$; $i > n$ için x_i lerin hepsi birden sıfır veya hepsi birden 2 olmamak üzere

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}$$

olmasıdır. Demek ki $x \in V_n$ ise x in açılımında daima 1 vardır. Bu yüzden Cantor kümesi $[0,1]$ aralığındaki, 3 tabanına göre açılımlarında sadece 0 veya 2 rakamları bulunan sayılardan oluşur.

x_n ve y_n sayıları 0 ya da 2 olmak üzere, eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{3^n}$$

ise her n için $x_n = y_n$ olduğunu gösterelim. Aksine en az bir n için $x_n \neq y_n$ olsun. N, $x_n \neq y_n$ koşulunu sağlayan en küçük doğal sayı ise bu durumda $|x_N - y_N| = 2$ ve her n için $|x_N - y_N| \leq 2$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=N}^{\infty} \frac{x_n - y_n}{3^n} \right| &\geq \frac{1}{3^N} \left[|x_N - y_N| - \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{3^{n-N}} \right] \\
&\geq \frac{1}{3^N} \left[2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \right] = \frac{1}{3^N}
\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Demek ki her n için $x_n = y_n$ dir, yani böyle bir açılım bir tektir.

Not : Bu teorem yardımıyla Cantor kümesinde $I_{n,k}$ aralıklarının uç noktaları dışında başka eleman bulunup bulunmadığını görebiliriz.

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2n}} = (0,020202\ldots)_3$$

olduğundan $\frac{1}{4} \in C$ dir. $\frac{1}{5}$ sayısının Cantor kümesine ait olup-olmadığını araştırınız.

Teorem

Cantor kümesi sayılamaz bir kümedir ve $m^*(C) = 0$ *dır.*

Teorem

Cantor kümesi sayılamaz bir kümedir ve $m^*(C) = 0$ *dır.*

İspat:

Cantor kümesinin sayılabilir olduğunu kabul edelim. Bu durumda $C = \{x_1, x_2, \ldots\}$ şeklinde listelenebilir. C deki tüm elemanları 3 lük tabanda yazalım.

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, a_{11} a_{12} a_{13} \ldots)_3 \\ x_2 &= (0, a_{21} a_{22} a_{23} \ldots)_3 \\ &\vdots \\ x_n &= (0, a_{n1} a_{n2} a_{n3} \ldots)_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

a_{ij} ler 0 ya da 2 dir.

İspatın Devamı:

$$a_n = \begin{cases} 0 & ; \quad a_{nn} = 2 \\ 2 & ; \quad a_{nn} = 0 \end{cases}$$

olmak üzere $x = (0, a_1 a_2 a_3 \ldots)$ olsun. Bu durumda $x \in C$ dir. Fakat x yukarıdaki listede yer almadığından C cantor kümesi sayılabilir değildir.

$m^*(C) = 0$ olduğunu gösterelim. $C_n = \bigcup\limits_{k=1}^{2^n} I_{n,k}$ ve

$m^*(I_{n,k}) = L(I_{n,k}) = \frac{1}{3^n}$ olduğu göz önüne alınırsa

$$m^*(C_n) = m^*\left(\bigcup_{k=1}^{2^n} I_{n,k}\right) \leq \sum_{k=1}^{2^n} m^*(I_{n,k}) = 2^n \frac{1}{3^n}$$

elde edilir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $C \subset C_n$ olduğundan

$0 \leq m^*(C) \leq m^*(C_n) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ dir. Bu yüzden $m^*(C) = 0$ dir.

Cantor Fonksiyonu

$f : C \longrightarrow [0,1]$, $f\left((0,x_1x_2x_3\ldots)_3\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ ile tanımlı fonksiyona Cantor fonksiyonu adı verilir.

Cantor Fonksiyonu

$f : C \longrightarrow [0, 1]$, $f\left((0, x_1x_2x_3\ldots)_3\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ ile tanımlı fonksiyona Cantor fonksiyonu adı verilir.

Teorem

Cantor fonksiyonu artan ve örtendir fakat birebir değildir.

Cantor Fonksiyonu

$f : C \longrightarrow [0,1]$, $f((0,x_1x_2x_3\ldots)_3) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}}$ ile tanımlı fonksiyona Cantor fonksiyonu adı verilir.

Teorem

Cantor fonksiyonu artan ve örtendir fakat birebir değildir.

İspat:

$x, y \in C$ ve $x < y$ olsun. Bu durumda $\exists k \in \mathbb{N} \ni x$ ve y nin üç tabanındaki açılımında k. basamağa kadar tüm basamaklar aynı ancak $(k+1)$. basamakta x in açılımında 0, y nin açılımında 2 bulunur. dolayısıyla $f(x) \leq f(y)$ olduğu görülür.
$[0,1]$ aralığındaki her sayı 2 tabanında 0 ve 1 kullanılarak yazılabilir.

$$f((0,x_1x_2x_3\ldots)_3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n+1}} = \left(0,\frac{x_1}{2}\frac{x_2}{2}\frac{x_3}{2}\ldots\right)_2$$

olduğu dikkate alınarak f fonksiyonunun örten olduğu görülür.

İspatın Devamı:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}) &= f\left((0,0222\ldots)_3\right) = (0,0111\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2} \\ f(\frac{2}{3}) &= f\left((0,2000\ldots)_3\right) = (0,1000\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu birebir değildir.

İspatın Devamı:

$$
\begin{aligned}
f(\frac{1}{3}) &= f\left((0,0222\ldots)_3\right) = (0,0111\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2} \\
f(\frac{2}{3}) &= f\left((0,2000\ldots)_3\right) = (0,1000\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

olduğundan f fonksiyonu birebir değildir.

Sonuç

Cantor kümesi sayılamazdır.

İspatın Devamı:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{3}) &= f((0,0222\ldots)_3) = (0,0111\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2} \\ f(\frac{2}{3}) &= f((0,2000\ldots)_3) = (0,1000\ldots)_2 = (0,1)_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan f fonksiyonu birebir değildir.

Sonuç

Cantor kümesi sayılamazdır.

İspat:

Cantor fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerine örten fonksiyon olduğundan, Cantor kümesi sayılamazdır.

F_σ ve G_δ Kümeleri

F_σ ve G_δ Kümeleri

Tanım

Kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilen kümeye bir $F_\sigma-$küme adı verilir.

F_σ ve G_δ Kümeleri

Tanım

Kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilen kümeye bir $F_\sigma-$küme adı verilir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerin her biri bir $F_\sigma-$kümedir.

F_σ ve G_δ Kümeleri

Tanım

Kapalı kümelerin sayılabilir birleşimi olarak yazılabilen kümeye bir $F_\sigma-$küme adı verilir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerin her biri bir $F_\sigma-$kümedir.

(a) Kapalı küme
(b) Sayılabilir küme
(c) $F_\sigma-$kümelerinin sayılabilir birleşimi
(d) Açık küme ve özel olarak (a, b) açık aralığı

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right]$$

Tanım

Açık kümelerin sayılabilir kesişimi olarak yazılabilen kümeye bir $G_\delta-$küme adı verilir. Bir $F_\sigma-$kümenin tümleyeni bir $G_\delta-$kümedir ve tersine $G_\delta-$kümenin tümleyeni bir $F_\sigma-$kümedir.

Tanım

Açık kümelerin sayılabilir kesişimi olarak yazılabilen kümeye bir $G_\delta-$küme adı verilir. Bir $F_\sigma-$kümenin tümleyeni bir $G_\delta-$kümedir ve tersine $G_\delta-$kümenin tümleyeni bir $F_\sigma-$kümedir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerden her biri bir $G_\delta-$kümedir.

Tanım

Açık kümelerin sayılabilir kesişimi olarak yazılabilen kümeye bir $G_\delta-$küme adı verilir. Bir $F_\sigma-$kümenin tümleyeni bir $G_\delta-$kümedir ve tersine $G_\delta-$kümenin tümleyeni bir $F_\sigma-$kümedir.

Örnek

Aşağıdaki kümelerden her biri bir $G_\delta-$kümedir.

(a) Açık küme ve özel olarak bir açık aralık
(b) $G_\delta-$kümelerinin sayılabilir kesişimi
(c) $G_\delta-$kümelerinin sonlu birleşimi
(d) Kapalı küme ve özel olarak $[a,b]$ kapalı aralığı

$$[a,b]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\left(a-\frac{1}{n},b+\frac{1}{n}\right)$$

Şimdi herhangi bir kümenin dış ölçüsü ile açık kümelerin ve onları içeren $G_\delta-$kümelerinin dış ölçüsü arasında kullanışlı bağıntı veren bir sonuç verelim.

Şimdi herhangi bir kümenin dış ölçüsü ile açık kümelerin ve onları içeren $G_\delta-$kümelerinin dış ölçüsü arasında kullanışlı bağıntı veren bir sonuç verelim.

Teorem

E herhangi bir küme olsun. Bu durumda

(a) *Her $\varepsilon > 0$ için bir $E \subset O$ açık kümesi vardır öyle ki*

$$m^*(O) \leq m^*(E) + \varepsilon.$$

$m^*(E) < \infty$ *durumunda bu eşitsizlik kesindir.*
$m^*(E) = \inf \{m^*(O) : E \subset O,\ O \text{ bir açık küme}\}$

(b) *Bir $G \in G_\delta-$kümesi vardır öyle ki $E \subset G$ ve $m^*(E) = m^*(G)$.*

İspat:

(a) $m^*(E) = \infty$ durumu aşikar olduğundan $m^*(E) < \infty$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $E \subset \bigcup_n I_n$ ve

$$\sum_n L(I_n) < m^*(E) + \varepsilon$$

olacak şekilde açık aralıkların bir (I_n) sayılabilir ailesi vardır. $O = \bigcup_n I_n$ olsun. O bir açık kümedir ve

$$m^*(O) = m^*\left(\bigcup_n I_n\right) \leq \sum_n m^*(I_n) = \sum_n L(I_n) < m^*(E) + \varepsilon.$$

İspatın Devamı:

(b) $\varepsilon = \frac{1}{n}$ olarak seçelim. (a) seçeneğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $E \subset O_n$ açık kümesi vardır öyle ki

$$m^*(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ olsun. $G \in G_\delta -$kümedir ve $E \subset G$ sağlanır. Monotonluk özelliğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

olduğundan $m^*(E) = m^*(G)$ eşitliği elde edilir.

İspatın Devamı:

(b) $\varepsilon = \frac{1}{n}$ olarak seçelim. (a) seçeneğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için bir $E \subset O_n$ açık kümesi vardır öyle ki

$$m^*(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}.$$

$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ olsun. $G \in G_\delta -$kümedir ve $E \subset G$ sağlanır. Monotonluk özelliğinden her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$m^*(E) \leq m^*(G) \leq m^*(O_n) \leq m^*(E) + \frac{1}{n}$$

olduğundan $m^*(E) = m^*(G)$ eşitliği elde edilir.

Keyfi bir E kümesi, aynı dış ölçüye sahip basit tipte, örneğin bir $G_\delta -$küme tarafından içerilebildiğine dikkat ediniz.

Bir kümenin dış ölçüsü kavramının tanımında E kümesini örten açık aralıkların bir (I_n) ailesini kullandık. Şimdiki sorumuz, ailedeki aralıkların açık olma kısıtlaması kaldırılabilir mi? Cevap evettir. Bunu aşağıda ispatlayalım.

Bir kümenin dış ölçüsü kavramının tanımında E kümesini örten açık aralıkların bir (I_n) ailesini kullandık. Şimdiki sorumuz, ailedeki aralıkların açık olma kısıtlaması kaldırılabilir mi? Cevap evettir. Bunu aşağıda ispatlayalım.

Teorem

$m^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ dış ölçü fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için

(i) *I_n yarı açık aralık*

(ii) *I_n kapalı aralık*

(iii) *I_n herhangi bir aralık*

olması durumunda da elde edilebilir.

İspat:

(iii) durumunu ispatlamak yeterlidir. J_n herhangi tipte aralıklar, E herhangi bir küme ve $m_J^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} L(J_k) : E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right\}$ olsun. $m^*(E) = m_J^*(E)$ olduğunu gösterelim. $m_J^*(E) \leq m^*(E)$ olduğu açıktır. $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda her bir J_n için öyle bir I_n açık aralığı vardır öyle ki $J_n \subset I_n$ ve $L(I_n) = (1+\varepsilon) L(J_n)$. Böylece, (I_n), $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ koşulunu sağlayan açık aralıkların bir dizisidir ve

$$\begin{aligned} (1+\varepsilon)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) &< m_J^*(E) + \varepsilon \\ \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) &< (1+\varepsilon) m_J^*(E) + (1+\varepsilon)\varepsilon \end{aligned}$$

Bu ise $m^*(E) \leq m_J^*(E)$ olduğunu gösterir.

Lebesgue Ölçüsü

Dış ölçü $\mathbb{R}$ deki tüm kümeler için tanımlı olmasına rağmen genel olarak sayılabilir toplamsallığı sağlamaz. Sayılabilir toplamsallık özelliğini sağlatmak için m^* fonksiyonu için tanım kümesini $\wp(\mathbb{R})$ kuvvet kümesini uygun bir $\mathcal{M}$ alt kümesine kısıtlamak zorundayız. Bu $\mathcal{M}$ kümesinin elemanları aşağıda tanımlanan ölçülebilir kümelerdir.

Dış ölçü $\mathbb{R}$ deki tüm kümeler için tanımlı olmasına rağmen genel olarak sayılabilir toplamsallığı sağlamaz. Sayılabilir toplamsallık özelliğini sağlatmak için m^* fonksiyonu için tanım kümesini $\wp(\mathbb{R})$ kuvvet kümesini uygun bir $\mathcal{M}$ alt kümesine kısıtlamak zorundayız. Bu $\mathcal{M}$ kümesinin elemanları aşağıda tanımlanan ölçülebilir kümelerdir.
Bir E kümesi verilsin. Her bir $T \subset \mathbb{R}$ kümesi için

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitliği sağlanırsa E kümesine Lebesgue ölçülebilir ya da kısaca ölçülebilir küme denir.

Bu tanım Caratheodory tarafından verilmiştir. Yukarıdaki eşitlik ile verilen koşula Caratheodory koşulu denir. T kümesine ise ölçülebilirliği test ettiği için test kümesi adı verilir.

Bu tanım Caratheodory tarafından verilmiştir. Yukarıdaki eşitlik ile verilen koşula Caratheodory koşulu denir. T kümesine ise ölçülebilirliği test ettiği için test kümesi adı verilir.
$T = (T \cap E) \cup (T \cap E^c)$ ve m^* fonksiyonu alt toplamsal olduğu için

$$m^*(T) \leq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitsizliği daima sağlanır. Bu yüzden E kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek için her bir T kümesi için

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Ayrıca $m^*(T) = \infty$ ise yukarıdaki eşitsizliğin sağlanacağı aşikardır. Bu yüzden E kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek için $\mathbb{R}$ nin $m^*(T) < \infty$ koşulunu sağlayan her bir T alt kümesi için

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Ayrıca $m^*(T) = \infty$ ise yukarıdaki eşitsizliğin sağlanacağı aşikardır. Bu yüzden E kümesinin ölçülebilir olduğunu göstermek için $\mathbb{R}$ nin $m^*(T) < \infty$ koşulunu sağlayan her bir T alt kümesi için

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Tanım

$m^* : \wp(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ dış ölçü fonksiyonun $\mathcal{M} \subset \wp(\mathbb{R})$ alt kümesine kısıtlamasına yani $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$, $m = m^*|_{\mathcal{M}}$ küme fonksiyonuna Lebesgue ölçü fonksiyonu denir.
Her bir $E \in \mathcal{M}$ için $m^*(E) = m(E)$ dir. $m(E)$ genişletilmiş reel sayısına E nin Lebesgue ölçüsü ya da kısaca ölçüsü denir.

Ölçülebilir Kümelerin Özellikleri

Teorem

(*a*) *E ölçülebilir bir küme ise* E^c *kümesi de ölçülebilirdir.*

Ölçülebilir Kümelerin Özellikleri

Teorem

(a) E ölçülebilir bir küme ise E^c kümesi de ölçülebilirdir.
(b) $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ ölçülebilir kümelerdir.

Ölçülebilir Kümelerin Özellikleri

Teorem

(a) E ölçülebilir bir küme ise E^c kümesi de ölçülebilirdir.
(b) $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ ölçülebilir kümelerdir.

İspat:

(a) $E \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$ nin sonlu ölçüye sahip herbir T alt kümesi için

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$m^*(T \cap E^c) + m^*(T \cap (E^c)^c) \leq m^*(T)$$

olduğundan $E^c \in \mathcal{M}$ dir.

Ölçülebilir Kümelerin Özellikleri

Teorem

(a) E ölçülebilir bir küme ise E^c kümesi de ölçülebilirdir.
(b) $\emptyset$ ve $\mathbb{R}$ ölçülebilir kümelerdir.

İspat:

(a) $E \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\mathbb{R}$ nin sonlu ölçüye sahip herbir T alt kümesi için

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T)$$

eşitsizliği sağlanır.

$$m^*(T \cap E^c) + m^*(T \cap (E^c)^c) \leq m^*(T)$$

olduğundan $E^c \in \mathcal{M}$ dir.
(b) $E = \emptyset$ ise $m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) = m^*(T)$ olduğundan $E \in \mathcal{M}$ dir. (a) seçeneği gereği $\mathbb{R} \in \mathcal{M}$ dir.

Teorem

$m^*(E) = 0$ ise $E \in \mathcal{M}$ dir. Ayrıca E nin her alt kümesi birer ölçülebilir kümedir.

Teorem

$m^*(E) = 0$ ise $E \in \mathcal{M}$ dir. Ayrıca E nin her alt kümesi birer ölçülebilir kümedir.

İspat:

E herhangi bir küme olsun. $T \cap E \subset E$ olduğundan

$$m^*(T \cap E) \leq m^*(E) = 0$$

dır. $T \cap E^c \subset T$ olduğundan

$$m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T)$$

eşitsizliği sağlanır. Dolayısıyla her $T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \leq m^*(T)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu yüzden $E \in \mathcal{M}$ dir. $E_1 \subset E$ ise $m^*(E_1) \leq m^*(E) = 0$ olduğundan $E_1 \in \mathcal{M}$ dir.

Sonuç

Sayılabilir her küme ölçülebilirdir ve sıfır ölçüye sahiptir.

Sonuç

Sayılabilir her küme ölçülebilirdir ve sıfır ölçüye sahiptir.

İspat:

E sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda $m^* (E) = 0$ dır ve bu yüzden $E \in \mathcal{M}$ ve $m(E) = 0$ dır.

Sonuç

Sayılabilir her küme ölçülebilirdir ve sıfır ölçüye sahiptir.

İspat:

E sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda $m^*(E) = 0$ dır ve bu yüzden $E \in \mathcal{M}$ ve $m(E) = 0$ dır.

Sonuç

C Cantor kümesi ve her alt kümesi ölçülebilirdir ve her birinin ölçüsü sıfırdır.

Sonuç

Sayılabilir her küme ölçülebilirdir ve sıfır ölçüye sahiptir.

İspat:

E sayılabilir bir küme olsun. Bu durumda $m^*(E) = 0$ dır ve bu yüzden $E \in \mathcal{M}$ ve $m(E) = 0$ dır.

Sonuç

C Cantor kümesi ve her alt kümesi ölçülebilirdir ve her birinin ölçüsü sıfırdır.

İspat:

$m^*(C) = 0$ olduğu daha önce ispatlanmıştı. Bu yüzden $C \in \mathcal{M}$ ve $m(C) = 0$ dır. Cantor kümesinin her alt kümesi de ölçülebilirdir ve ölçüsü sıfırdır.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ *ise* $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ *dir.*

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

İspat:

Herhangi $T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m^*\left(T \cap [E_1 \cup E_2]^c\right) \leq m^*\left(T\right)$$

olduğunu göstermeliyiz. $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ olduğundan herhangi $T \subset \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} m^*\left(T\right) &= m^*\left(T \cap E_1\right) + m^*\left(T \cap E_1^c\right) \\ &= m^*\left(T \cap E_1\right) + m^*\left(\left(T \cap E_1^c\right) \cap E_2\right) + m^*\left(\left(T \cap E_1^c\right) \cap E_2^c\right) \\ &= m^*\left(T \cap E_1\right) + m^*\left(T \cap E_2 \cap E_1^c\right) + m^*\left(T \cap E_1^c \cap E_2^c\right) \\ &\geq m^*\left(T \cap [E_1 \cup E_2]\right) + m^*\left(T \cap [E_1 \cup E_2]^c\right) \end{aligned}$$

olduğundan $E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$ dir. $T \cap [E_1 \cup E_2] = \left(T \cap E_1\right) \cup \left(T \cap E_2 \cap E_1^c\right)$

Sonuç

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ *ise* $E_1 \cap E_2,\ E_1 - E_2,\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M}$ *dir.*

Sonuç

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise $E_1 \cap E_2,\ E_1 - E_2,\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

İspat:

$E_1 \cap E_2 = \left(E_1^c \cup E_2^c\right)^c$ olduğundan $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

Sonuç

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise $E_1 \cap E_2,\ E_1 - E_2,\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

İspat:

$E_1 \cap E_2 = \left(E_1^c \cup E_2^c\right)^c$ olduğundan $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ dir.
$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$ olduğundan $E_1 - E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

Sonuç

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ *ise* $E_1 \cap E_2,\ E_1 - E_2,\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M}$ *dir.*

İspat:

$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c$ olduğundan $E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}$ dir.
$E_1 - E_2 = E_1 \cap E_2^c$ olduğundan $E_1 - E_2 \in \mathcal{M}$ dir.
$E_1 \triangle E_2 = (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1)$ olduğundan $E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M}$ dir.

Tanım

Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan, boştan farklı bir $\mathcal{A}$ ailesi için $\emptyset \in \mathcal{A}$ ve

(a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X - A \in \mathcal{A}$

koşulları sağlanıyor ise bu aileye $\wp(X)$ deki kümelerin bir cebiri (Boolen cebiri) adı verilir.

Tanım

Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan, boştan farklı bir $\mathcal{A}$ ailesi için $\emptyset \in \mathcal{A}$ ve

(a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X - A \in \mathcal{A}$

koşulları sağlanıyor ise bu aileye $\wp(X)$ deki kümelerin bir cebiri (Boolen cebiri) adı verilir.

Tümevarım yardımıyla, $\mathcal{A}$ cebirinin sonlu kesişim ya da sonlu birleşim altında kapalı olduğu gösterilebilir.

Yani, $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ ve $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

Tanım

Bir X kümesinin alt kümelerinden oluşan, boştan farklı bir $\mathcal{A}$ ailesi için $\varnothing \in \mathcal{A}$ ve

(a) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

(b) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c = X - A \in \mathcal{A}$

koşulları sağlanıyor ise bu aileye $\wp(X)$ deki kümelerin bir cebiri (Boolen cebiri) adı verilir.

Tümevarım yardımıyla, $\mathcal{A}$ cebirinin sonlu kesişim ya da sonlu birleşim altında kapalı olduğu gösterilebilir.

Yani, $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A}$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ ve $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$ dir.

Sonuç

Tüm ölçülebilir kümelerin ailesi $\mathcal{M}$, $\wp(\mathbb{R})$ üzerinde bir cebirdir. Özel olarak, $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{M}$ ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$ ve $\bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{M}$ dir.

Teorem

T herhangi bir küme ve $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi olsun. Her bir n için*

$$m^*\left(T \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*\left(T \cap E_k\right)$$

dır.

Teorem

T herhangi bir küme ve $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi olsun. Her bir n için

$$m^*\left(T \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*\left(T \cap E_k\right)$$

dır.

İspat:

Tümevarım yöntemi ile ispatlayınız.

Teorem

T herhangi bir küme ve $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi olsun. Her bir n için

$$m^*\left(T \cap \left[\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right]\right) = \sum_{k=1}^{n} m^*\left(T \cap E_k\right)$$

dır.

İspat:

Tümevarım yöntemi ile ispatlayınız.

Sonuç

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi ise*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(E_k\right).$$

Sonuç

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi ise*

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(E_k\right).$$

İspat:

Yukarıdaki teoremde $T = \mathbb{R}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi ise

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(E_k\right).$$

İspat:

Yukarıdaki teoremde $T = \mathbb{R}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ve $E_1 \subset E_2$ ise $m\left(E_1\right) \leq m\left(E_2\right)$ dir.

Sonuç

$\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ ölçülebilir ayrık kümelerin bir ailesi ise

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m\left(E_k\right).$$

İspat:

Yukarıdaki teoremde $T = \mathbb{R}$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ve $E_1 \subset E_2$ ise $m\left(E_1\right) \leq m\left(E_2\right)$ dir.

İspat:

$m\left(E_1\right) = m^*\left(E_1\right)$ ve $m\left(E_2\right) = m^*\left(E_2\right)$ olduğundan dış ölçünün monotonluk özelliğinden istenen sonuç elde edilir.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ve $E_1 \subset E_2$ ve $m(E_1) < \infty$ ise bu durumda

$$m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$$

dir.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ve $E_1 \subset E_2$ ve $m(E_1) < \infty$ ise bu durumda

$$m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$$

dir.

İspat:

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise $E_2 - E_1 = E_2 \cap E_1^c \in \mathcal{M}$ dir. $E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$ ve $E_1 \cap (E_2 - E_1) = \emptyset$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(E_2) &= m(E_1 \cup (E_2 - E_1)) \\ &= m(E_1) + m(E_2 - E_1) \end{aligned}$$

yazılabilir. $m(E_1) < \infty$ ise buradan

$$m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$$

elde edilir.

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise bu durumda

$$m\left(E_1 \cup E_2\right) + m\left(E_1 \cap E_2\right) = m\left(E_1\right) + m\left(E_2\right).$$

Teorem

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$ ise bu durumda

$$m\left(E_1 \cup E_2\right) + m\left(E_1 \cap E_2\right) = m\left(E_1\right) + m\left(E_2\right).$$

İspat:

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ise $m\left(E_1 \cap E_2\right) = 0$ olup eşitlik sağlanır. $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$ olsun. $m\left(E_1 \cap E_2\right) = \infty$ ise eşitliğin sağlanacağı aşikardır. $m\left(E_1 \cap E_2\right) < \infty$ kabul edelim. $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup \left(E_2 - E_1\right)$ olduğundan

$$m\left(E_1 \cup E_2\right) = m\left(E_1\right) + m\left(E_2 - E_1\right)$$

yazılabilir. Ayrıca $E_2 = \left(E_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_2 - E_1\right)$ olarak yazılabileceğinden

$$m\left(E_2\right) = m\left(E_1 \cap E_2\right) + m\left(E_2 - E_1\right)$$

gerçeklenir. Bu iki eşitlikten istenen sonuç elde edilir.

Teorem

Ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimleri ölçülebilirdir.

Teorem

Ölçülebilir kümelerin sayılabilir birleşimleri ölçülebilirdir.

İspat:

Bir sayılabilir birleşimde ikişerli arakesitleri boş küme olacak şekilde kümeler daima seçilebilir. $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{M}$ iken $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{M}$ olduğunu göstermeliyiz. Herhangi $T \subset \mathbb{R}$ için

$$
\begin{aligned}
m^*(T) &= m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)^c\right) \\
&\geq m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) + m^*\left(T \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{n} m^*(T \cap E_k) + m^*(T \cap E^c)
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

$m^*(T)$, n den bağımsız olduğundan $n \to \infty$ iken

$$\begin{aligned} m^*(T) &\geq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(T \cap E_k) + m^*(T \cap E^c) \\ &\geq m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu yüzden

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$$

ölçülebilirdir.

Tanım

Bir $\mathcal{A}$ cebiri, kümelerin sayılabilir birleşimi altında kapalı, yani $\mathcal{A}$ da yer alan sayılabilir sayıdaki $\{A_n\}$ kümeleri için $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ birleşimi $\mathcal{A}$ da yer alıyorsa $\mathcal{A}$ ya bir $\sigma-$cebir denir.

Tanım

Bir $\mathcal{A}$ cebiri, kümelerin sayılabilir birleşimi altında kapalı, yani $\mathcal{A}$ da yer alan sayılabilir sayıdaki $\{A_n\}$ kümeleri için $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ birleşimi $\mathcal{A}$ da yer alıyorsa $\mathcal{A}$ ya bir $\sigma-$cebir denir.

De Morgan kuralından bir $\sigma-$cebirin kümelerin sayılabilir kesişimi altında da kapalı olduğu görülür.

Tanım

Bir $\mathcal{A}$ cebiri, kümelerin sayılabilir birleşimi altında kapalı, yani $\mathcal{A}$ da yer alan sayılabilir sayıdaki $\{A_n\}$ kümeleri için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ birleşimi $\mathcal{A}$ da yer alıyorsa $\mathcal{A}$ ya bir $\sigma-$cebir denir.

De Morgan kuralından bir $\sigma-$cebirin kümelerin sayılabilir kesişimi altında da kapalı olduğu görülür.

Sonuç

$\mathcal{M}$ ölçülebilir kümeler ailesi $\wp(\mathbb{R})$ de bir $\sigma-$cebirdir.

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{M}$ ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{M}$ ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$m^*(T) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T \cap E_n) + m^*(T \cap E^c)$ eşitliğinde T yerine $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{M}$ ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$m^*(T) = \sum_{n=1}^{\infty} m^*(T \cap E_n) + m^*(T \cap E^c)$ eşitliğinde T yerine $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Bu teorem $m : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ küme fonksiyonunun sayılabilir toplamsal olduğunu gösterir.

Teorem

Lebesgue ölçüsü ötelemeye göre değişmezdir. $E \in \mathcal{M}$ *olmak üzere herhangi bir* y *reel sayısı için* $E + y$ *kümesi ölçülebilirdir ve*

$$m(E + y) = m(E)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem

Lebesgue ölçüsü ötelemeye göre değişmezdir. $E \in \mathcal{M}$ olmak üzere herhangi bir y reel sayısı için $E + y$ kümesi ölçülebilirdir ve

$$m(E + y) = m(E)$$

eşitliği geçerlidir.

$E + y$ kümesinin ölçülebilir olması için her $T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(T) = m^*(T \cap (E + y)) + m^*(T \cap (E + y)^c)$$

olduğunu göstermeliyiz.

İspat:

$$
\begin{aligned}
T \cap (E + y) &= [(T - y) \cap E] + y \\
T \cap (E + y)^c &= [(T - y) \cap E^c] + y
\end{aligned}
$$

eşitliklerinden

$$m^*\left(T \cap (E + y)\right) = m^*\left([(T - y) \cap E] + y\right) = m^*\left((T - y) \cap E\right)$$

ve

$$m^*\left(T \cap (E + y)^c\right) = m^*\left([(T - y) \cap E^c] + y\right) = m^*\left((T - y) \cap E^c\right)$$

elde edilir.

İspatın Devamı:

$E \in \mathcal{M}$ olduğundan

$$\begin{aligned} m^*\left(\left(T-y\right)\cap E\right)+m^*\left(\left(T-y\right)\cap E^c\right) &= m^*\left(T-y\right) \\ &= m^*\left(T\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak $E+y \in \mathcal{M}$ dir. Lebesgue dış ölçüsü ötelemeye göre değişmez olduğundan

$$m(E+y)=m(E)$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem

(E_n) ölçülebilir kümelerin artan bir dizisi ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Teorem

(E_n) ölçülebilir kümelerin artan bir dizisi ise

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

İspat:

Eğer bazı n ler için $m(E_n) = \infty$ ise eşitliğin her iki yanı sonsuz olur. Her n için $m(E_n) < \infty$ olsun.

$$S_1 = E_1 \text{ ve } n \geq 2 \text{ için } S_n = E_n - E_{n-1}$$

biçiminde tanımlanan (S_n) dizisi ölçülebilir kümelerin ayrık dizisi olur. Ayrıca

$$E_n = \bigcup_{k=1}^{n} S_k \text{ ve } \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

Böylece

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) &= m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m(S_n) \\ &= m(S_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m(S_k) \\ &= m(S_1) + \lim_{n\to\infty} [m(E_n) - m(S_1)] \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E_n) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem

(E_n) ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve $m(E_1) < \infty$ ise

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Teorem

(E_n) ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve $m(E_1) < \infty$ ise

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

İspat:

$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ olsun.

$$\begin{aligned} E_1 - E &= E_1 - \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \\ &= E_1 \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n - E_{n+1}) \end{aligned}$$

olduğu göz önüne alınarak

İspatın Devamı:

$$m\left(E_1 - E\right) = m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(E_n - E_{n+1}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m\left(E_n - E_{n+1}\right)$$

yazılabilir. $E \subset E_1$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_{n+1} \subset E_n$ olduğundan

$$m(E_1) - m(E) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} m\left(E_k\right) - m(E_{k+1}) = m(E_1) - \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

bulunur. $m(E_1)$ solu olduğundan

$$m(E) = m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

elde edilir.

Alıştırma

(E_n) ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $m(E_n) < \infty$ ise

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma

(E_n) ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $m(E_n) < \infty$ ise

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

olduğunu gösteriniz.

Uyarı: Yukarıdaki teoremde yer alan $m(E_1) < \infty$ veya alıştırmada yer alan en az bir $n \in \mathbb{N}$ için $m(E_n) < \infty$ koşulu kaldırılamaz.

(E_n) bir artan dizi olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$$

ve (T_n) bir azalan dizi olduğunda

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} T_n$$

olduğunu bildiğimizden aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç

(a) (E_n) ölçülebilir kümelerin bir artan dizisi ise

$$m\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

Sonuç

(a) (E_n) *ölçülebilir kümelerin bir artan dizisi ise*

$$m\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(E_n).$$

(b) (T_n) *ölçülebilir kümelerin bir azalan dizisi ve* $m(T_1) < \infty$ *ise*

$$m\left(\lim_{n\to\infty} T_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(T_n).$$

Teorem

$\mathcal{M}$ nin kardinalitesi 2^c dir.

Teorem

$\mathcal{M}$ nin kardinalitesi 2^c dir.

İspat:

$\mathcal{M} \subset \wp(\mathbb{R})$ olduğundan $card(\mathcal{M}) \leq 2^c$ dir. $card(C) = c$ olduğundan $card(\wp(C)) = 2^c$ dir. $\wp(C) \subset \mathcal{M}$ olduğundan $2^c \leq card(\mathcal{M})$ dir. Bu yüzden $card(\mathcal{M}) = 2^c$ dir.

Teorem

$\mathcal{M}$ nin kardinalitesi 2^c dir.

İspat:

$\mathcal{M} \subset \wp(\mathbb{R})$ olduğundan $card(\mathcal{M}) \leq 2^c$ dir. $card(C) = c$ olduğundan $card(\wp(C)) = 2^c$ dir. $\wp(C) \subset \mathcal{M}$ olduğundan $2^c \leq card(\mathcal{M})$ dir. Bu yüzden $card(\mathcal{M}) = 2^c$ dir.

$\mathcal{M}$, $\wp(\mathbb{R})$ nin öz alt kümesi olmasına rağmen kardinaliteleri aynıdır. Böylece, neredeyse $\wp(\mathbb{R})$ de yer alan küme kadar ölçülebilir küme bulunduğu ortaya çıkar.

Bir X kümesi üzerindeki $\sigma-$cebirlerinin herhangi sayıdaki kesişimleri yine bir $\sigma-$cebirdir. $\mathcal{K}$, X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin bir en küçüğü vardır. Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) $\sigma-$cebiri denir.

Borel Kümeleri ve Borel Ölçülebilirlik

Bir X kümesi üzerindeki $\sigma-$cebirlerinin herhangi sayıdaki kesişimleri yine bir $\sigma-$cebirdir. $\mathcal{K}$, X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin bir en küçüğü vardır. Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) $\sigma-$cebiri denir.

$\mathbb{R}$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu $\sigma-$cebirine Borel Cebiri denir ve $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel Cebirinin her elemanına bir Borel Kümesi ve Borel ölçülebilir küme denir.

Borel Kümeleri ve Borel Ölçülebilirlik

Bir X kümesi üzerindeki $\sigma-$cebirlerinin herhangi sayıdaki kesişimleri yine bir $\sigma-$cebirdir. $\mathcal{K}$, X in boş olmayan bir sınıfı olsun. $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin bir en küçüğü vardır. Bir $\mathcal{K}$ sınıfını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğüne $\mathcal{K}$ nın ürettiği (doğurduğu) $\sigma-$cebiri denir.

$\mathbb{R}$ deki bütün açık (a, b) aralıklarının doğurduğu $\sigma-$cebirine Borel Cebiri denir ve $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ile gösterilir. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel Cebirinin her elemanına bir Borel Kümesi ve Borel ölçülebilir küme denir.

Borel Cebiri tüm açık aralıkları içeren bir $\sigma-$cebirdir. $\mathbb{R}$ nin her açık alt kümesi ayrık açık aralıkların sayılabilir birleşimi olarak yazılabildiğinden $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ nin tüm açık alt kümelerini kapsar.

Aşağıdaki Teorem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin açık kümeler dışında $\mathbb{R}$ nin başka tipteki alt aralıklarını da kapsadığını gösterir.

Aşağıdaki Teorem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin açık kümeler dışında $\mathbb{R}$ nin başka tipteki alt aralıklarını da kapsadığını gösterir.

Teorem

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel Cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından da üretilebilir.

(a) *$\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı*

(b) *$\mathbb{R}$ nin $(-\infty, b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı*

(c) *$\mathbb{R}$ nin $(a, b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı*

Aşağıdaki Teorem $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ nin açık kümeler dışında $\mathbb{R}$ nin başka tipteki alt aralıklarını da kapsadığını gösterir.

Teorem

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$ Borel Cebiri aşağıdaki sınıflar tarafından da üretilebilir.

(a) *$\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerinin sınıfı*

(b) *$\mathbb{R}$ nin $(-\infty, b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı*

(c) *$\mathbb{R}$ nin $(a, b]$ biçimindeki alt aralıklarının sınıfı*

İspat:

$\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ ve $\mathcal{B}_3$ teoremin (a), (b) ve (c) seçeneklerinde belirtilen sınıfların doğurduğu $\sigma-$cebirler olsun. $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ nin tüm açık alt kümelerini kapsadığından aynı zamanda $\mathbb{R}$ nin tüm kapalı alt kümelerini de kapsar. kapalı alt kümelerin doğurduğu $\sigma-$cebiri $\mathcal{B}_1$ olduğundan $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$ dir.

İspatın Devamı:

$(-\infty, b]$ biçimindeki kümeler kapalı olduğundan bu kümeler aynı zamanda $\mathcal{B}_1$ sınıfına aittir. Dolayısıyla

$$\mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1$$

dir. $(a, b] = (-\infty, b] \cap (-\infty, a]^c$ yazılabildiğinden $(a, b]$ tipindeki her aralık $\mathcal{B}_2$ sınıfına aittir. Bu yüzden

$$\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2$$

olur. Buna göre

$$\mathcal{B}_3 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

yazılabilir. Diğer taraftan $(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a, b - \frac{1}{n}]$ yazılabildiğinden $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}_3$ dür. Sonuç olarak $\mathcal{B}_3 = \mathcal{B}_2 = \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ elde edilir.

Teorem

Her bir Borel kümesi Lebesgue ölçülebilirdir; yani $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ dir.

Teorem

Her bir Borel kümesi Lebesgue ölçülebilirdir; yani $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ dir.

İspat:

$a \in \mathbb{R}$ için (a, ∞) aralığının ölçülebilir olduğunu gösterelim. T sonlu dış ölçüye sahip bir küme olsun.

$$T_1 = T \cap (a, \infty) \quad \text{ve} \quad T_2 = T \cap (a, \infty)^c$$

olmak üzere

$$m^*(T) \geq m^*(T_1) + m^*(T_2)$$

eşitsizliğinin doğru olduğunu göstermeliyiz.

İspatın Devamı:

$\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda infimum özelliğinden

$$T \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad \text{ve} \quad \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) < m^*(T) + \varepsilon$$

olacak şekilde (I_n) açık aralıklarının bir dizisi bulunabilir. $I_n' = I_n \cap (a, \infty)$ ve $I_n'' = I_n \cap (a, \infty)^c$ olsun. $I_n' \cup I_n'' = I_n$ ve $I_n' \cap I_n'' = \emptyset$ olduğundan

$$L(I_n) = L(I_n') + L(I_n'') = m^*(I_n') + m^*(I_n'')$$

dir. $T_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'$ olacağından $m^*(T_1) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n') \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n')$ ve $T_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n''$ olacağından $m^*(T_2) \leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n'') \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n'')$ elde edilir.

İspatın Devamı:

Böylece

$$\begin{aligned} m^*(T_1)+m^*(T_2) &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left[m^*(I_n')+m^*(I_n'')\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[L(I_n')+L(I_n'')\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) \\ &< m^*(T)+\varepsilon \end{aligned}$$

olur. ε keyfi olduğundan $m^*(T_1)+m^*(T_2) \leq m^*(T)$ eşitsizliği elde edilir. Demek ki $(a,\infty) \in \mathcal{M}$ dir.

İspatın Devamı:

$\mathcal{M}$ bir $\sigma-$cebir olduğundan $(-\infty, a] = (a, \infty)^c \in \mathcal{M}$ dir. Bu yüzden

$$(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n}]$$

aralığı ölçülebilirdir. Şu halde $(a, b) = (-\infty, b) \cap (a, \infty)$ açık aralığı $\mathcal{M}$ ye aittir. (a, b) aralıklarını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğü $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$$

bulunur.

Analizde karşılaştığımız kümelerin çoğu ölçülebilirdir. Ancak, G. Vitali (1905), Van Vleck (1905), F. Bernstein (1908) ve diğerleri tarafından verilen ölçülemeyen küme örnekleri de mevcuttur. Bu örnekler küme teorisindeki seçme aksiyomu geçerli olduğunda oluşturulabilir.

Analizde karşılaştığımız kümelerin çoğu ölçülebilirdir. Ancak, G. Vitali (1905), Van Vleck (1905), F. Bernstein (1908) ve diğerleri tarafından verilen ölçülemeyen küme örnekleri de mevcuttur. Bu örnekler küme teorisindeki seçme aksiyomu geçerli olduğunda oluşturulabilir.

Teorem (Vitali Kümesi)

$[0,1]$ *aralığının ölçülemeyen bir alt kümesi vardır.*

Analizde karşılaştığımız kümelerin çoğu ölçülebilirdir. Ancak, G. Vitali (1905), Van Vleck (1905), F. Bernstein (1908) ve diğerleri tarafından verilen ölçülemeyen küme örnekleri de mevcuttur. Bu örnekler küme teorisindeki seçme aksiyomu geçerli olduğunda oluşturulabilir.

Teorem (Vitali Kümesi)

$[0,1]$ *aralığının ölçülemeyen bir alt kümesi vardır.*

İspat:

$\mathbb{Q}_1 = \mathbb{Q} \cap [-1,1]$ olarak tanımlansın. $x, y \in [0,1]$ verildiğinde $x - y \in \mathbb{Q}_1$ ise x ile y denktir diyelim ve $x \sim y$ olarak yazalım. Bu şekilde tanımlanan denklik bağıntısı $[0,1]$ aralığını ikişer ikişer ayrık denklik sınıflarına ayırır; yani aynı sınıfa ait iki elemanın farkı bir rasyonel sayı iken farklı iki sınıfın elemanlarının farkı bir irrasyonel sayıdır. V kümesini her bir denklik sınıfından sadece bir eleman alarak oluşturalım. Bu durum seçme aksiyomundan dolayı mümkündür. V kümesine Vitali kümesi denir ve $V \subset [0,1]$ olduğu açıktır. V kümesinin ölçülebilir olmadığını göstereceğiz.

İspatın Devamı:

Aksine V kümesi ölçülebilir olsun. $\mathbb{Q}_1$ kümesini $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ şeklinde terimleri indislenerek yazılır ve V kümesi r_n ile ötelenirse

$$V_n = V + r_n = \{v + r_n : v \in V\}$$

kümeleri elde edilir. $n \neq k$ ise $V_n \cap V_k = \emptyset$ ve $[0,1] \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subset [-1,2]$ dir. Lebesgue ölçüsü öteleme altında değişmediğinden

$$3 = m([-1,2]) \geq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V)$$

yazılabilir. Eşitsizliğin sağlanması için $m(V) = 0$ olmalıdır. Ancak

$$1 = m([0,1]) \leq m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) = \sum_{n=1}^{\infty} m(V)$$

olduğundan çelişki elde edilir. O halde $V \notin \mathcal{M}$ dir.

Teorem

Pozitif ölçülü her küme ölçülemeyen bir küme içerir.

Teorem

Pozitif ölçülü her küme ölçülemeyen bir küme içerir.

Teorem

E, $0 < m(E) < \infty$ *olan bir ölçülebilir küme olsun. Bu durumda*
a) $A \cup B = E, \ \ A \cap B = \emptyset$
b) $m(E) < m^*(A) + m^*(B)$
olacak şekilde E *kümesinin ölçülemeyen* A *ve* B *alt kümeleri vardır.*

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ olsun. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \emptyset$ olduğundan (I_k) dizisi ayrıktır.

$$\begin{aligned} m(A) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Örnek

$B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{3^k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left(0, \frac{1}{3^k}\right)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_{n+1} \subset I_n$ olduğundan (I_n) dizisi azalandır.

$$m(B) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = m(I_1) = \frac{1}{3}$$

Örnek

$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{3^k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{3^k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left(0, \frac{1}{3^k}\right)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_{n+1} \subset I_n$ olduğundan (I_n) dizisi azalandır ve $m(I_1) = \frac{1}{3} < \infty$.

$$m(C) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(I_k) = 0$$

Örnek

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : 2 + \frac{1}{k} < x < 5 - \frac{1}{k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 2 + \frac{1}{k} < x < 5 - \frac{1}{k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left(2 + \frac{1}{k}, 5 - \frac{1}{k}\right)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_n \subset I_{n+1}$ olduğundan (I_n) dizisi artandır.

$$m(D) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(I_k) = 3$$

Örnek

Cantor kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

Cantor kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm (1)

Daha önce Cantor kümesinin dış ölçüsünün sıfır olduğunu bu nedenle ölçülebilir ve sıfır ölçülü bir küme olduğu gösterilmişti. Şimdi farklı yollarla Cantor kümesinin Lebesgue ölçüsünü hesaplayalım.

(C_n) ölçülebilir kümelerin azalan bir dizisi ve $m(C_1) < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(C) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \lim_{n\to\infty} m(C_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm (2)

Diğer bir yol alarak, $[0,1]$ aralığından silinen aralıklar yardımı ile Cantor kümesinin ölçüsünü hesaplayabiliriz. V ve C kümelerinin tanımını hatırlayalım.

$$V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \quad \text{ve} \quad C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

şeklindeydi ve

$$V \cup C = [0,1] \quad \text{ve} \quad V \cap C = \emptyset$$

olduğu daha önce gösterilmişti.

Çözüm (devamı)

$$1 = m\left(V \cup C\right) = m\left(V\right) + m(C)$$

ve $i \neq j$ için $V_i \cap V_j = \emptyset$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(C) &= 1 - m(V) \\ &= 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma

1. $A, B \in \mathcal{M}$ ise
$$|m(A) - m(B)| \leq m(A \triangle B)$$
olduğunu gösteriniz.
2. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi, $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ şeklinde listelenmek üzere
$$\mathbb{R} - \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{1}{n^2}, r_n + \frac{1}{n^2} \right) \neq \varnothing$$
olduğunu gösteriniz.
3. $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $A \subset I$ olsun. $A \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k. $L(I) = m^*(A) + m^*(I - A)$ bağıntısının doğru olmasıdır. Gösteriniz.

Genelleştirilmiş Cantor Kümesi : $0 < \alpha < 1$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n > 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ olmak üzere bir (a_n) dizisi alalım. $[0, 1]$ aralığının tam ortasından a_1 uzunlukta bir açık aralık silinsin, geriye iki kapalı aralık kalır. Bu iki aralığın her birinin ortasından $\frac{a_2}{2}$ uzunlukta birer açık aralık silinirse geriye 2^2 tane kapalı aralık kalır. Bu süreç böyle devam ettirilirse n. adımda 2^{n-1} tane aralığın her birinin ortasından $\frac{a_n}{2^{n-1}}$ uzunluğunda açık aralık silindiğinde geriye 2^n tane kapalı aralık kalır. Bu süreç sonsuza kadar devam ettirildiğinde kalan kümeye genelleştirilmiş Cantor kümesi denir ve $C(\alpha)$ ile gösterilir.

Alıştırma

4. $C(\alpha)$ kümesinin boştan farklı, kapalı ve sayılamaz olduğunu gösteriniz.
5. $m^*(C(\alpha)) = 1 - \alpha$ olduğunu gösteriniz.

n bir doğal sayı, k ise $0 < k < n-1$ koşulunu sağlayan bir doğal sayı olsun. $[0,1]$ aralığında yer alan ve $a_i \in \{0,1,..,k-1,k+1,...,(n-1)\}$ olmak üzere

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{n^i}$$

biçiminde $n-$li açılıma sahip x noktalarından oluşan kümeye Cantor $n-$li küme adı verilir.

Alıştırma

6. Her bir Cantor $n-$li kümesinin ölçüsünün sıfır olduğunu gösteriniz.
7. $[0,1]$ aralığını 5 eşit paraçaya bölüp, 2. ve 4. açık aralıklar silindikten sonra geriye kalan kümeyi Γ_1 ile gösterelim.

$$\Gamma_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

Geriye kalan parçalara aynı işlemi uygulamaya devam edelim. $C_{\frac{1}{5}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ olmak üzere $m\left(C_{\frac{1}{5}}\right) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Alıştırma

8. Aşağıdaki kümelerin ölçüsünü bulunuz.

   1. $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x : \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$
   2. $B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x : \frac{1}{2^k} \leq x < \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$
   3. $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x : 0 < x < \frac{1}{5^k} \right\}$

9. $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ve $T \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$m^*(T) = m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2) + m^*(A - (E_1 \cup E_2))$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma

10. $A \in \mathcal{M}$ ve $m(A) < \infty$ ise herhangi bir $A \subset B \subseteq \mathbb{R}$ için

$$m^*(B - A) = m^*(B) - m^*(A)$$

olduğunu gösteriniz.

11. $m^*(A) = 0$ ise $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.
$m^*(A) = 0$ ve $B \subset A$ ise $m^*(B) = 0$ olduğunu gösteriniz.

12. $E \subset (0, 1)$ kümesi ondalık açılımında 5 ve 7 rakamı bulundurmayan tüm sayıların kümesi olsun. $m(E) = ?$

13. $E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T - (T \cap E))$$

olduğunu gösteriniz.

Alıştırma

14. $E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(E \cup T) + m^*(E \cap T) = m(E) + m^*(T)$$

olduğunu gösteriniz.

15. E, $m^*(E) < \infty$ olacak şekilde herhangi bir küme olsun. Bu durumda $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k. $m(B) = m^*(E)$ eşitliğini sağlayan bir $B \in \mathcal{M}$ kümesinin var olmasıdır. Gösteriniz.

16. $A \in \mathcal{M}$ ve $m(A) < \infty$ olsun. Bu durumda bir $E \subset A$ kümesinin ölçülebilir olması için g.v.y.k.

$$m(A) = m^*(E) + m^*(A - E)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Alıştırma

17. Bir E kümesi verilsin. Bu durumda aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz.

    1. E kümesi ölçülebilirdir.
    2. $\forall \varepsilon > 0$ için bir O açık kümesi vardır öyle ki $m^*(O - E) < \varepsilon$.
    3. $E \subset G$ ve $G \in G_\delta$ kümesi vardır öyle ki $m^*(G - E) = 0$
    4. $\forall \varepsilon > 0$ için bir F kapalı kümesi vardır öyle ki $m^*(E - F) < \varepsilon$.
    5. $F \subset E$ ve $F \in F_\sigma$ kümesi vardır öyle ki $m^*(E - F) = 0$.

18. $E \in \mathcal{M}$ olsun. $B_1 \subset E \subset B_2$ ve $m(B_1) = m(E) = m(B_2)$ olacak şekilde $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ kümelerinin var olduğunu gösteriniz.

Alıştırma

19. E_1 ve E_2 sonlu ölçülü ölçülebilir kümeler olsun. Aşağıdaki önermelerin denk olduğunu gösteriniz.
    1. $m(E_1 \triangle E_2) = 0$
    2. $m(E_1 - E_2) = 0 = m(E_2 - E_1)$
    3. $m(E_1) = m(E_1 \cap E_2) = m(E_2)$
20. $E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^*(E_1 \triangle E_2) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.
21. E, $\mathbb{R}$ de herhangi bir küme ve $k > 0$ için $kE = \left\{x : k^{-1}x \in E\right\}$ olsun.
    1. $m^*(kE) = km^*(E)$ olduğunu gösteriniz.
    2. $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k. $kE \in \mathcal{M}$ olmasıdır. Gösteriniz.

Alıştırma

22. Aşağıdaki kümelerin ölçüsünü bulunuz.

1. $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x : \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{2k-1}\right\}$
2. $a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \int_1^{k+1} \frac{dx}{x}$ ve $I_k = (a_k, a_{k+1})$ olmak üzere

   $B := \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$
3. $E_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right)$ olmak üzere $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$
4. $F_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \ln k\right)$ olmak üzere $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$
5. $G_k = \left\{x \in [0, 2\pi] : \sin x < \frac{1}{k}\right\}$ olmak üzere $G := \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$