# Marmara Üniversitesi

# İstatistik Bölümü

# Örnekleme Teorisi (5)

**Doç. Dr. Atıf Evren**

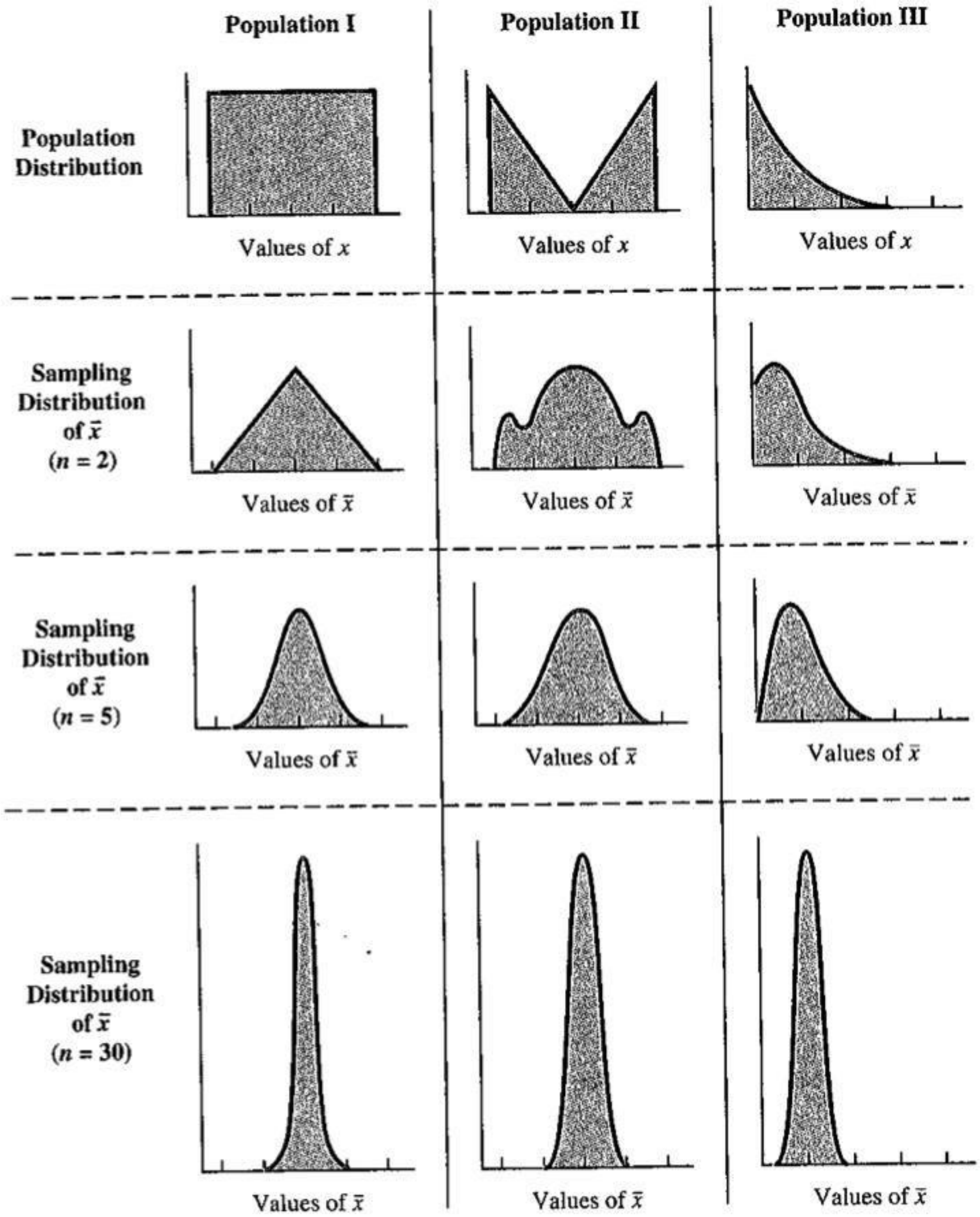
## Bazı Kavramlar ve Örnekleme Dağılımları

### Olasılığa Dayalı Örnekleme ve Basit Rassal Örnekleme (Simple Random Sampling)

Olasılığa dayalı örnekleme bir ana kütlenin her bir biriminin belirli bir olasılıkla örneğe dahil edilebileceği bir örnekleme planıdır. Bu örnekleme planının bir türü olan basit rassal örneklemede ise daha önce örneğe dahil edilmemiş her birimin seçilme olasılığı **aynı** olmaktadır.

Genel olarak bir örnekteki birim sayısını n, ana kütledeki birim sayısını da N ile gösterirsek **basit rassal örneklemenin** kullanılması halinde her birimin örneğe dahil edilme olasılığı **n/N** olacaktır. Yine $X_1, X_2, \ldots, X_n$ gibi örneklerden özel olarak bir tanesinin (sıralama önemli olmamak kaydıyla) çekilme olasılığı da $\frac{\mathbf{1}}{\binom{\boldsymbol{N}}{\boldsymbol{n}}}$ olur.
Fakat N, n çok büyük olduğu hallerde bir örneğin seçilme olasılığını hesaplamak güçleşmektedir. Bu durumlarda bu durumu basitleştirmek için **Merkezi Limit Teorem**i'nden yararlanılmakta ve belirli bir örneğin ortaya çıkma olasılığının hesaplanması yerine belirli bir örnek ortalaması $\bar{X}$ 'nın ortaya çıkma olasılığı hesaplanmaktadır.

Rastlantı değişkenleri her zaman normal dağılmayabilirler. Buna rağmen bazı durumlarda bağımsız rastlantı değişkenlerinin bölünmeleri normal olmasa da değişkenlerin **toplamının** (ya da **ortalamasının**) bölünmeleri Merkezi Limit Teoremine göre normal olmaktadır.




Bu teorem bazı değişkenlerin bölünmesinin neden normal olduğunu ispat etmemekle birlikte normal dağılımın bir açıklamasını yapmaktadır. Örneğin belirli yaştaki kız veya erkeklerin boy uzunluklarının normale uyduğu bilinmektedir. Fakat bir rastlantı değişkeni olan boy uzunluğu **çok sayıda bağımsız faktörün** etkisi altındadır (kalıtım, gıda, yaşama şartları vb. gibi) Bu etkenleri toplayarak Merkezi Limit Teoremi yardımı ile boy uzunluklarının dağılımının normale uymasının bir açıklamasını yapabiliriz.

n sayıda rastlantı değişkeni $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (değişkenlerin dağılımı ne şekilde olursa olsun her biri aynı dağılımdan gelmek üzere); $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ toplamını ifade eden X değişkeninin dağılımı yaklaşık olarak normal olacaktır. Bu durumda X'in aritmetik ortalaması ve varyansı da , toplamı oluşturan $X_i$ değişkenlerinin aritmetik ortalama ve varyanslarının toplamına eşit olacaktır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ aynı dağılımdan gelen bağımsız rastlantı değişkenleri olarak kabul edildiğine göre

$$E(X_i) = \mu_i = \mu,\ \ i = 1,2, \ldots, n\ \ için$$

$$Var(X_i) = \sigma_i^2\ \ ,\ \ i = 1,2, \ldots, n\ \ için$$

ve

$$Cov\left(X_i, X_j\right) = 0\ ,\quad i \neq j\quad için$$

varsayımları altında

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = n\mu$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = n\sigma^2$$

olur.

$n \to \infty$ için $\frac{X-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ değişkeni standart normal dağılıma uyar.

İki rastlantı değişkenini aynı dağılımdan gelmelerinin ( ya da özdeş dağılıma sahip olmalarının) anlamı şudur:

i)Her iki değişkenin dağılımlarının aynı türden olması (binom, normal, dikdörtgen gibi),

ii)Değişkenlerin aritmetik ortalamalarının birbirine eşit olması,

iii)Değişkenlerin varyanslarının birbirine eşit olması.

Rastlantı değişkenlerinin aritmetik ortalaması cinsinden de Merkezi Limit Teoremi şu şekilde ifade edilebilir:

Aritmetik ortalaması $\mu$ ve varyansı $\sigma^2$ olan bir ana kütleden n birimlik rassal bir örnek

çekersek bu değişkenlerin aritmetik ortalaması büyük n değerleri için ortalaması

E(X¯)=μ ve varyansı

iadeli örnekleme durumunda (sampling with replacement)

$$Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

iadesiz örnekleme durumunda (sampling without replacement) ise

$$Var(\bar{X}) = \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

olur.

$n \to \infty$ için $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ standar normal dağılır.

**Örnek:** 1,3,4 ve 6 değerlerinden oluşan bir ana kütle mevcut olsun.

a)Bunlar arasından **iadeli** olarak seçilebilecek 2'şer birimlik örneklerin tümü nedir?

b)Ana kütle ortalaması nedir?

c)Ana kütlenin standart sapması nedir?

d)Örnekleme dağılımının aritmetik ortalaması nedir?

e)Örnekleme dağılımının standart sapması nedir?

**Çözüm:**

a)(1,1), (1,3), (1,4), (1,6)

(3,1), (3,3), (3,4), (3,6)

(4,1), (4,3), (4,4), (4,6)

(6,1), (6,3), (6,4), (6,6)

b)$\mu = \frac{1+3+4+6}{4} = 3,5$

c)$\sigma^2 = \frac{(1-3,5)^2+(3-3,5)^2+(4-3,5)^2+(6-3,5)^2}{4} = 3,25$

$\sigma = \sqrt{3,25} = 1,8$

d)Yukarıdaki 16 örneğin ortalaması

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 2,5 | 3,5 |
| 2 | 3 | 3,5 | 4,5 |
| 2,5 | 3,5 | 4 | 5 |
| 3,5 | 4,5 | 5 | 6 |

$E(\bar{X}) = \frac{1+2+\cdots+5+6}{16}$=3,5

Burada dikkat edilirse ortalamanın örnekleme dağılımının ortalaması ana kütle ortalamasına eşit olmaktadır. Başka bir deyişle

$E(\bar{X}) = \mu$

e)Örnekleme dağılımının varyansı

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(1-3,5)^2 + (2-3,5)^2 + \cdots + (5-3,5)^2 + (6-3,5)^2}{16} = 1,625$$

ve $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{1,625} \cong 1,27$ bulunur.

Bu sonuca $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{3,25}{2} = 1,625$ şeklinde teorik değerlerden yola çıkarak da ulaşmak olasıdır. Burada dikkat edilecek olursa örnekleme yönteminin iadeli olmasından dolayı $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$ değil de $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$ formülü kullanılmaktadır.

**Örnek:** 1,3,4 ve 6 değerlerinden oluşan bir ana kütle mevcut olsun.

a)Bunlar arasından **iadesiz** olarak seçilebilecek 2'şer birimlik örneklerin tümü nedir?

b)Ana kütle ortalaması nedir?

c)Ana kütlenin standart sapması nedir?

d)Örnekleme dağılımının aritmetik ortalaması nedir?

e)Örnekleme dağılımının standart sapması nedir?

**Çözüm:**

a)(1,3), (1,4), (1,6)

(3,1), (3,4), (3,6)

(4,1), (4,3), (4,6)

(6,1), (6,3), (6,4)

b ) Bir önceki sorudan $\mu = 3{,}5$ bulunmuştu.

c)Bir önceki sorudan $\sigma^2 = 3{,}25$ ve $\sigma = \sqrt{3{,}25} = 1{,}8$ bulunmuştu.

d)Yukarıdaki 12 örneğin ortalaması

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 2,5 | 3,5 |
| 2 | 3,5 | 4,5 |
| 2,5 | 3,5 | 5 |
| 3,5 | 4,5 | 5 |

$E(\bar{X}) = \frac{2+2{,}5 \ldots +4{,}5+5}{9}$=3,5

Burada da $E(\bar{X}) = \mu$ olduğuna dikkat edilmelidir.

e)Örnekleme dağılımının varyansı

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(2-3{,}5)^2 + (2{,}5-3{,}5)^2 + \cdots + (5{,}5-3{,}5)^2}{12} = \frac{13}{12} \cong 1{,}083$$

Bu sonuca

$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}\frac{N-n}{N-1} = \frac{3{,}25}{2}\left(\frac{4-2}{4-1}\right) \cong 1{,}083$ formülü ile de ulaşılabilir. Buradan da

$\sigma_{\bar{X}} \cong 1{,}04$ bulunur.

Örnek hacminin 30 veya daha büyük olduğu hallerde ana kütlenin dağılımı normal olmasa bile

örnek ortalamasının dağılımı Merkezi Limit Teoremine uygun olarak normale yaklaşmaktadır. Ana kütle dağılımının normal veya normale yakın olduğu hallerde ise örnek hacmi 30'dan küçük olsa da örnekleme dağılımının şekli normale yakın olmaktadır. Ana kütle hacminin çok bütük olduğu hallerde $\frac{N-n}{N-1}$ oranı 1'e yaklaşacağından iadeli seçimdekine yakın bir durum ortaya çıkacak ve bu düzeltme faktörünün kullanılmasına gerek kalmayacaktır.

## Standart Hata

Bir istatistiğin örnekleme dağılımının standart sapması standart hata olarak tanımlanmaktadır. Örneğin yukarıdaki örneklerde bulunan $\sigma_{\bar{X}} \cong 1{,}27$ ve $\sigma_{\bar{X}} \cong 1{,}04$ değerleri iadeli ve iadesiz seçim durumlarında ortaya çıkan örnekleme dağılımlarının standart hatalardır. Benzer şekilde örneklere ait diğer istatistiklerin de ($\sigma, p\ vs.\ gibi$) standart hatalarını hesaplamak mümkündür. Ana kütle parametrelerinin bilinmediği hallerde örnek istatistiklerine dayanarak parametrelerin tahmini yapılabilmektedir. Örneğin bir örnek istatistiği olan s yani örnek standart sapması veya örnek hacminin az olduğu durumda düzeltilmiş $\hat{s}$=$\sqrt{n/(n-1)}$s ana kütle standart sapması $\sigma$'nın bir tahmini olarak kullanılabilmektedir.

**Örnek:** Bir fabrikanın haftalık imalatı olan 2300 parçanın ağırlıklarının dağılımı $\mu = 46\ gram$ ve $\sigma = 2\ gram$ olmak üzere normale uymaktadır. Bunlar arasından

a)iadeli, ve,

b)iadesiz

olarak 30'ar birimlik 60 örnek seçersek elde edeceğimiz örnek ortalamalarının örnekleme dağılımının aritmetik ortalaması ve standart hatası ne olacaktır?

**Çözüm:**

a)Ana kütle ortalaması ile örnekleme dağılımının ortalamasının birbirine eşit olması bekleneceğinden

$E(\bar{X}) = \mu = 46\ gram$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{30}} \cong 0{,}365\ gram$ olacaktır.

b)$E(\bar{X}) = \mu = 46\ gram$

$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{2}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{2300-30}{2300-1}} \cong 0{,}362\ gram$ bulunur.

**Örnek:** Yukarıdaki örnekte seçilmiş olan 60 örnekten kaç tanesinde örnek ortalamasının 45 ile 47 arasında olması beklenir?

**Çözüm:** Ana kütlenin normale uyması nedeniyle örnek ortalamasının dağılımı da normale uyacaktır. Dolayısıyla

$$P(45 < \bar{X} < 47) = P(\frac{45-46}{0{,}365} < \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{47-46}{0{,}365})$$
$$= P(-2{,}74 < Z < 2{,}74) = 2 * P(0 < Z < 2{,}74) = 0{,}9938$$

Dolayısıyla 60 örnekten yaklaşık olarak hepsinin ortalamalarının 45 gram ile 47 gram arasında olması beklenir.

## Oranların Örnekleme Dağılımı (Bölünmesi)

Şimdiye kadar aritmetik ortalamanın örnekleme dağılımı ele alındı. Aynı ilkelerden hareket ederek örnek oranının örnekleme dağılımı üzerinde durmak da anlamlı olacaktır.

Oranların örnekleme bölünmesinin önemli bir özelliği ana kütlenin bölünmesinin asimetrik binoma uymasına karşılık oranların örnekleme bölünmesinin simetrik normale yaklaşmasıdır. Genellikle örnek mevcudunun 30 ve daha büyük olduğu durumlarda örnekleme dağılımı ile problemlerde normal bölünmeden yararlanılmaktadır.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ , p parametreli Bernoulli dağılımdan gelen bağımsız rastlantı değişkenleri olsun.

Öyle ki

$$X_i = \begin{cases} 0 & başarısızlık\ gözlendiyse \\ 1 & başarı\ gözlendiyse \end{cases}$$

Burada her bir $X_i$ değişkeni p parametreli bir Bernoulli dağılımına uyduğundan

$E(X_i) = p$ ve $Var(X_i) = p(1-p)$ ve

$Cov(X_i, X_j) = 0\ , \quad i \neq j \ \ için$ olur.

$$\hat{p} = Örnek\ (başarı) oranı = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$E(\hat{p}) = E\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{n} = \frac{np}{n} = p$ olur.

$E(\hat{p}) = p$ Dolayısıyla örnek oranı ana kütle oranının yansız bir kestiricisi olur.

$Var(\hat{p}) = \sigma_{\hat{p}}^2 = Var\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right] = \frac{\sum_{i=1}^{n} VarE(X_i)}{n^2} = \frac{np(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$ olur.

Yine bu örnek oranının örnekleme dağılımının standart sapması olan $\sigma_{\hat{p}}$ istatistiğine örnek oranının standart hatası denir ve

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ formülü ile hesaplanır.

Örnekler bağımsız olmadığı durumda Bernoulli sürecinden söz edilemez. Bu durumda örnek ortalamalarının iadesiz örnekleme sürecinden elde edildiği durumdaki gibi "sonlu ana kütle çarpanı" kullanılır. Başka bir deyişle

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ formülü kullanılır. Yine, örnekleme oranı $\frac{n}{N} \leq 0{,}05$ olduğunda pratik gerekçeler ile $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ çarpanını kullanmaya gerek kalmaz.

Ana kütle oranının bilinmediği durumlarda elde büyük örneklem mevcut ise standart hata Örneklemenin iadeli ya da iadesiz olmasına göre

$\widehat{\sigma_{\hat{p}}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ ya da

$$\widehat{\sigma_{\hat{p}}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

formülleri ile tahmin edilir.

Öte yandan örnek oranı da bir tür ortalama olduğu için ( 0 veya 1 değerlerinden oluşan gözlemler dizisinin ortalaması) büyük n değerleri için Merkezi Limit Teoremi uyarınca normal dağılım ile modellenebilir. Başka bir deyişle

$n \rightarrow \infty$ için $Z = \frac{\grave{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ standart normal dağılır.

**Örnek:** Bir şehirdeki ailelerin %30'unun belirli bir gazeteyi her gün aldıkları bilinmektedir. Şehirdeki aileler arasından tesadüfi seçimle 135 ailelik bir örnek seçersek, örnek oranının %35 veya daha yüksek olma olasılığı nedir?

**Çözüm:**

p=0,30

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,30 * 0,70}{135}} = 0,0394$$

$P(\hat{p} > 0,35) = P\left(\frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}} > \frac{0,35-0,30}{0,394}\right) = P(Z > 1,267) = 0,102$ olarak bulunur.

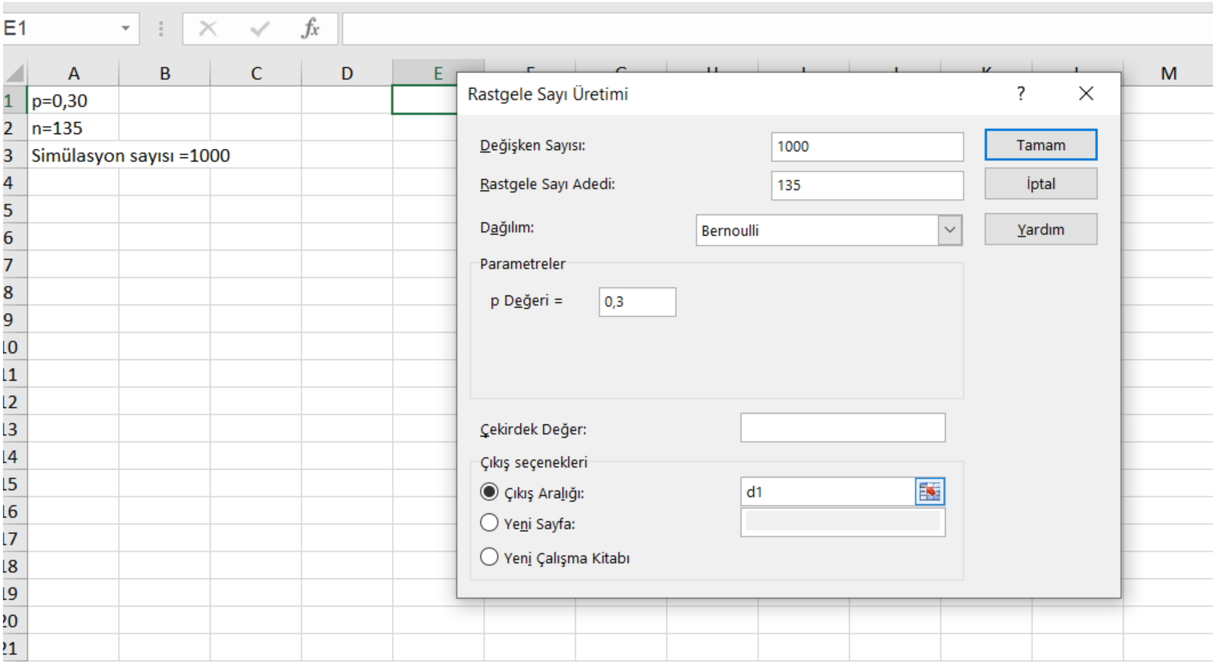
**Not:** Oranlarla ilgili problemlerde normal dağılımın kullanılabilmesi için normal dağılımın binom yerine kullanılmasında olduğu gibi süreklilik için bir düzeltme faktörüne gerek vardır. Bu durumda düzeltme faktörü $\frac{1}{2n}$ olmakta ve gereğine göre p'ye eklenmekte ya da çıkarılmaktadır.

**Aynı Olasılığın Simülasyon ile Tahmin Edilmesi:**

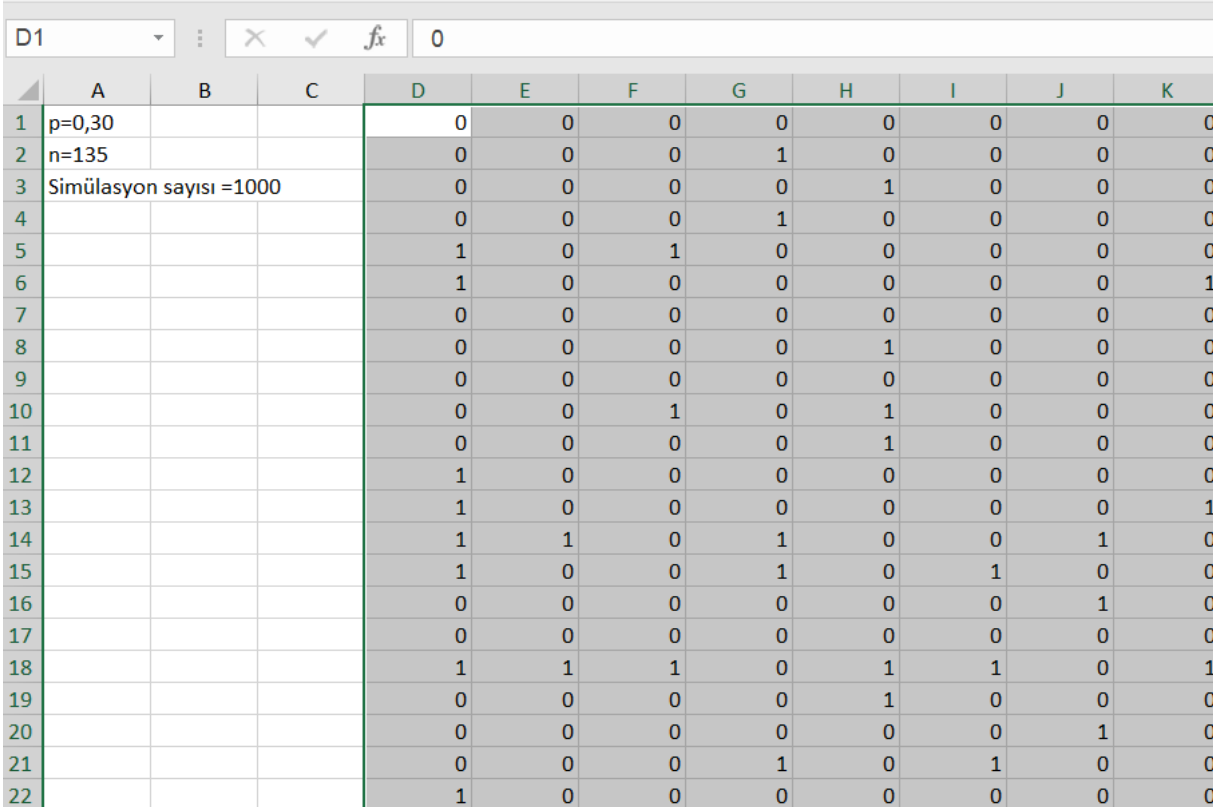
Aslında bilimsel çalışmalarda bu simülasyon sayısının 3000, 5000 gibi daha büyük değerler alması gerekir. Buradaki amaç pedagojik amaçlı bir gösterim yapabilmek için simülasyon sayısı 1000'de tutulmuştur.

Başarı oranı 0,30 olan bir Bernoulli dağılımından 135 birimlik 1000 simülasyon yapmak için aşağıdaki aşamalar takip edilmiştir:

Öncelikle Veri Çözümleme paketinden "Rastgele Sayı Üretimi" paketi seçilerek ilgili girişler aşağıdaki gibi doldurulur:



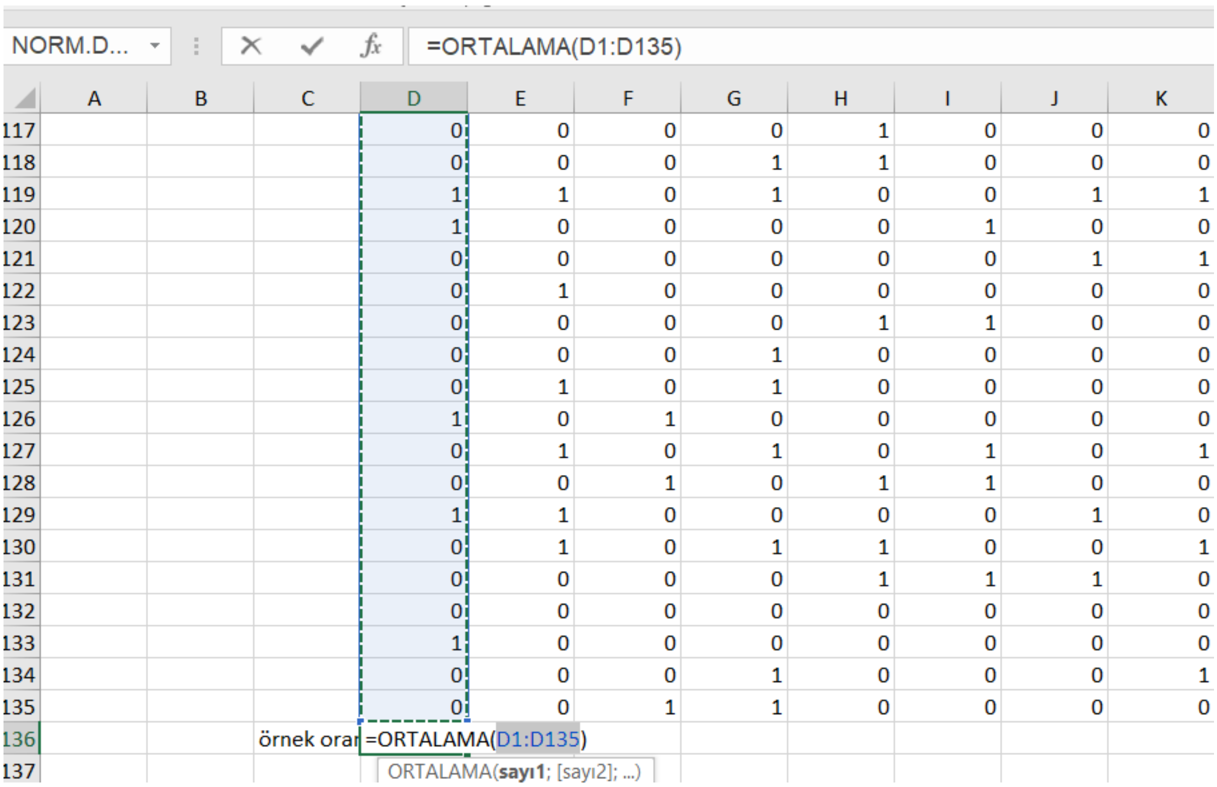

Bu program çalıştırıldıktan sonra aşağıdaki gibi bir ekran çıktısı elde edilir:



D1 | 0

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | p=0,30 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | n=135 | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | Simülasyon sayısı =1000 | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 6 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 7 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 8 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 9 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 10 | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 12 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 13 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 14 | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 15 | | | | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 16 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 17 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 18 | | | | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 19 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 20 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 21 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 22 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

Daha sonra D136 hücresine birinci sütunun ortalamasını (örnek oranını) hesaplamak için aşağıdaki çıktıda formül çubuğunda görülen ifade yazılır:



NORM.D... | =ORTALAMA(D1:D135)

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 117 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 118 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 119 | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 120 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 121 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 122 | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 123 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 124 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 125 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 126 | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 127 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 128 | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 129 | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 130 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 131 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 132 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 133 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 134 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 135 | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 136 | | | örnek orar | =ORTALAMA(D1:D135) | | | | | | | |
| 137 | | | | ORTALAMA(sayı1; [sayı2]; ...) | | | | | | | |

Daha sonra bu formül 135. satırda bulunan diğer hücrelere de aşağıdaki gibi kopyalanır.

A136 | Formül Çubuğu

| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 117 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 118 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 119 | | | | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 120 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 121 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 122 | | | | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 123 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 124 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 125 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 126 | | | | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 127 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 128 | | | | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 129 | | | | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 130 | | | | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 131 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 132 | | | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 133 | | | | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 134 | | | | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 135 | | | | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 136 | | | örnek orar | 0,392593 | 0,266667 | 0,281481 | 0,325926 | 0,281481 | 0,288889 | 0,2 | 0,281481 | 0,296296 |
| 137 | | | | | | | | | | | | |
| 138 | | | | | | | | | | | | |

Elde edilen bu 1000 ortalama daha sonra başka bir sayfaya aşağıdaki gibi kopyalanır:

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | örnek orar | Mantıksal sınama | | Olasılık |
| 2 | | 0,392593 | 1 | | 0,103 |
| 3 | | 0,266667 | 0 | | |
| 4 | | 0,281481 | 0 | | |
| 5 | | 0,325926 | 0 | | |
| 6 | | 0,281481 | 0 | | |
| 7 | | 0,288889 | 0 | | |
| 8 | | 0,2 | 0 | | |
| 9 | | 0,281481 | 0 | | |
| 10 | | 0,296296 | 0 | | |
| 11 | | 0,348148 | 0 | | |
| 12 | | 0,340741 | 0 | | |
| 13 | | 0,296296 | 0 | | |
| 14 | | 0,296296 | 0 | | |
| 15 | | 0,288889 | 0 | | |
| 16 | | 0,296296 | 0 | | |
| 17 | | 0,362963 | 1 | | |
| 18 | | 0,259259 | 0 | | |
| 19 | | 0,288889 | 0 | | |
| 20 | | 0,340741 | 0 | | |
| 21 | | 0,296296 | 0 | | |
| 22 | | 0,237037 | 0 | | |
| 23 | | 0,259259 | 0 | | |

Burada $P(\hat{p} > 0{,}35)$ olasılığı hesaplanacağına göre, (135 birimlik bu) 1000 örnek ortalamasının herbirinin, 0,35'den büyük olup olmadığını belirlemek için D2:D1001 hücrelerine mantıksal sınama konmuştur. Sözgelimi D2 hücresindeki formül aşağıdaki tablodaki formül çubuğundaki gibidir. Başka bir deyişle örnek ortalaması 0,35'den büyük ise bu hücre 1, değilse 0 değerini almaktadır. D2 hücresine yazılan bu formül daha sonra D2:D1001 adresindeki bütün diğer hücrelere de kopyalanmıştır.

C2 | $f_x$ =EĞER(B2>0,35;1;0)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | örnek orar | Mantıksal sınama | | Olasılık | | |
| 2 | | 0,392593 | 1 | | 0,103 | | |
| 3 | | 0,266667 | 0 | | | | |
| 4 | | 0,281481 | 0 | | | | |
| 5 | | 0,325926 | 0 | | | | |
| 6 | | 0,281481 | 0 | | | | |
| 7 | | 0,288889 | 0 | | | | |
| 8 | | 0,2 | 0 | | | | |
| 9 | | 0,281481 | 0 | | | | |
| 10 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 11 | | 0,348148 | 0 | | | | |
| 12 | | 0,340741 | 0 | | | | |
| 13 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 14 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 15 | | 0,288889 | 0 | | | | |

Hatırlanacağı gibi $E(\hat{p}) = p$ Dolayısıyla yaklaşık olarak elde edilen bu 1000 örnek oranının ortalamasının 0,30'a yakın olması gerekir. Bu durumu test etmek için B1002 hücresine aşağıdaki şekildeki formül girilmiş ve sonuç yaklaşık olarak 0,301 olarak bulunmuştur. Bunun iki nedeni olabilir. Birincisi simülasyon sayısı daha yüksek tutulabilirdi. İkinci neden de simülasyon ile örnekleme arasındaki farklılıktan kaynaklanıyor olabilir. Çünkü örnekleme dağılımında bir ana kütleden bütün olası örnekler çekilmektedir. Simülasyonda ise bir ana kütleden önceden belirlenen miktarda simülasyon gerçekleştirilmektedir. Buradaki simülasyon sayısı 1000'dir. Yeterince büyüktür ama elde edilen 1000 örnek ortalamasının dağılımının tam anlamıyla bir örnekleme dağılımı yerine geçtiği söylenemez. Simülasyon ile yapılan tahmin yaklaşıktır. Dolayısıyla bir miktar hata içermesi kaçınılmazdır.

31002 =ORTALAMA(B2:B1001)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 87 | | 0,362963 | 1 | | | | |
| 88 | | 0,414815 | 1 | | | | |
| 89 | | 0,222222 | 0 | | | | |
| 90 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 91 | | 0,259259 | 0 | | | | |
| 92 | | 0,340741 | 0 | | | | |
| 93 | | 0,281481 | 0 | | | | |
| 94 | | 0,303704 | 0 | | | | |
| 95 | | 0,311111 | 0 | | | | |
| 96 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 97 | | 0,340741 | 0 | | | | |
| 98 | | 0,288889 | 0 | | | | |
| 99 | | 0,362963 | 1 | | | | |
| 000 | | 0,311111 | 0 | | | | |
| 001 | | 0,244444 | 0 | | | | |
| 002 | ortalama | 0,301207 | | | | | |
| 003 | s.sapma | 0,038717 | | | | | |
| 004 | toplam | | 103 | | | | |

Benzer şekilde standart hatanın teorik değeri

$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,30*0,70}{135}} = 0,0394$ olarak bulunmuştu. Bunun simülasyon yardımı ile bir tahminini gerçekleştirmek için B1003 satırında; B2:B1001 hücrelerine kopyalanmış bulunan örnek oranlarının örnek standart sapması hesaplanmıştır. Bu değer de 0,0387'dir ve 0,0394 değerine çok uzak değildir. Bu durum aşağıdaki tablo yardımı ile incelenebilir:

B1003 =STDSAPMA.S(B1:B1000)

| | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 987 | | 0,362963 | 1 | | | | |
| 988 | | 0,414815 | 1 | | | | |
| 989 | | 0,222222 | 0 | | | | |
| 990 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 991 | | 0,259259 | 0 | | | | |
| 992 | | 0,340741 | 0 | | | | |
| 993 | | 0,281481 | 0 | | | | |
| 994 | | 0,303704 | 0 | | | | |
| 995 | | 0,311111 | 0 | | | | |
| 996 | | 0,296296 | 0 | | | | |
| 997 | | 0,340741 | 0 | | | | |
| 998 | | 0,288889 | 0 | | | | |
| 999 | | 0,362963 | 1 | | | | |
| 1000 | | 0,311111 | 0 | | | | |
| 1001 | | 0,244444 | 0 | | | | |
| 1002 | ortalama | 0,301207 | | | | | |
| 1003 | s.sapma | 0,038717 | | | | | |
| 1004 | toplam | | 103 | | | | |

Son olarak $P(\hat{p} > 0{,}35)$ olasılığını bulabilmek için C2:C1001 adresindeki değerlerin toplamı 1000'e bölünmüştür. Bu toplam C1004 satırındadır. Bu toplam C2:C1001 sütününda 0,35 değerinden büyük olan örnek oranlarının sayısını vermektedir.Bu sayı 1000'e bölündüğünde ise $P(\hat{p} > 0{,}35)$ olasılığının bir tahmini elde edilmektedir.

C1004 =TOPLA(C2:C1001)

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 987 | | 0,362963 | 1 | | | |
| 988 | | 0,414815 | 1 | | | |
| 989 | | 0,222222 | 0 | | | |
| 990 | | 0,296296 | 0 | | | |
| 991 | | 0,259259 | 0 | | | |
| 992 | | 0,340741 | 0 | | | |
| 993 | | 0,281481 | 0 | | | |
| 994 | | 0,303704 | 0 | | | |
| 995 | | 0,311111 | 0 | | | |
| 996 | | 0,296296 | 0 | | | |
| 997 | | 0,340741 | 0 | | | |
| 998 | | 0,288889 | 0 | | | |
| 999 | | 0,362963 | 1 | | | |
| 1000 | | 0,311111 | 0 | | | |
| 1001 | | 0,244444 | 0 | | | |
| 1002 | ortalama | 0,301207 | | | | |
| 1003 | s.sapma | 0,038717 | | | | |
| 1004 | toplam | | 103 | | | |
| 1005 | | | | | | |

Bu olasılık tahmini E2 sütununda aşağıdaki gibi elde edilmektedir. Bu sonuç 0,103 olarak tahmin edilmiştir. Problemin a şıkkındaki tahmin ise 0,102 olarak bulunmuştu. Burada önemli olan her iki değerin de bir tahmin olduğunun (ama bu iki değerin birbirine yakın olduğunun) bilinmesidir.

E2 =C1004/1000

| | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | örnek orar | Mantıksal sınama | | Olasılık | |
| 2 | | 0,392593 | 1 | | 0,103 | |
| 3 | | 0,266667 | 0 | | | |
| 4 | | 0,281481 | 0 | | | |
| 5 | | 0,325926 | 0 | | | |
| 6 | | 0,281481 | 0 | | | |
| 7 | | 0,288889 | 0 | | | |
| 8 | | 0,2 | 0 | | | |