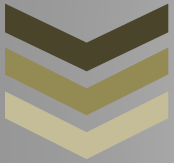


YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



8.DERS

ULAŞTIRMA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$P: \text{Min } Z = \sum_i \sum_j C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \quad \text{Kaynak (Sunum)}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad \text{Hedef (İstem)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Kaynaklara karşılık gelen dual değişkenler v_i

Hedeflere karşılık gelen dual değişkenler w_j ile gösterilsin

$$D: \text{Max } Z = \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j w_j$$

$$v_i + w_j \leq C_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

v_i, w_j işareti belirtilmemiş

Temeldeki değişkenler için $v_i + w_j = C_{ij}$

En iyilik koşulları;

Minimum problemi için; $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$

Maximum problemi için; $Z_{ij} - C_{ij} \geq 0$

Olması durumunda optimal çözüme ulaşılmıştır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

ÖRNEK PROBLEM: Problemin örnek çözümü bulunmuş. Başlangıç uygun çözüm için maliyet 1990 olarak belirlenmiştir. Verilen uygun çözümün optimal olup olmadığını kontrol etmek için temel dışı değişkenler ele alınır. Atama yapılmış gözeler temel değişkenler, boş gözeler temel dışı değişkenlerdir.

	1	2	3	4	5	QT	
A	9) $\begin{matrix} -5 \\ 0+4-9 \end{matrix}$	2) $\begin{matrix} - \\ 60 \end{matrix}$	6) $\begin{matrix} 0-6 \\ -7 \end{matrix}$	7) $\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}$	3) $\begin{matrix} + \\ 40 \end{matrix}$	100	$v_1 = 0 \rightarrow$ keyfi verilir.
B	7) $\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}$	5) $\begin{matrix} 5 \\ +1^* \end{matrix}$	2) $\begin{matrix} 2 \\ 80 \end{matrix}$	12) $\begin{matrix} 12 \\ 50 \end{matrix}$	6) $\begin{matrix} 6 \\ 30 \end{matrix}$	160	$v_2 = 3$
C	5) $\begin{matrix} 5 \\ 90 \end{matrix}$	4) $\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}$	9) $\begin{matrix} 9 \\ -9 \end{matrix}$	8) $\begin{matrix} 8 \\ 50 \end{matrix}$	10) $\begin{matrix} 10 \\ -6 \end{matrix}$	140	$v_3 = +1$
bj	90	60	80	100	70	400	

$w_1 = 4 \quad v_2 = 3 \quad w_3 = -1 \quad w_4 = 7 \quad w_5 = 3$

Temel dışı değişkenler için

$v_2 + w_5 = c_{12}$ den.

dolu gözeler için

x_{12} için $c_{12} = 3$

$v_1 + w_2 = c_{12}$

$0 + w_2 = 3$

$w_2 = 3$

$$Z_{ij} - C_{ij} = v_i + w_j - C_{ij}$$

Temel dışı değişkenler;

$$x_{11} \rightarrow Z_{11} - C_{11} = v_1 + w_1 - C_{11} = 0 + 4 - 9 = -5$$

$$x_{13} \rightarrow Z_{13} - C_{13} = v_1 + w_3 - C_{13} = 0 + (-1) - 6 = -7$$

$$x_{14} \rightarrow Z_{14} - C_{14} = v_1 + w_4 - C_{14} = 0 + 7 - 7 = 0$$

$$x_{21} \rightarrow Z_{21} - C_{21} = v_2 + w_2 - C_{21} = 3 + 4 - 7 = 0$$

$$x_{22} \rightarrow Z_{22} - C_{22} = v_2 + w_2 - C_{22} = 3 + 3 - 5 = \mathbf{1}$$

$$x_{32} \rightarrow Z_{32} - C_{32} = v_3 + w_2 - C_{32} = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$x_{33} \rightarrow Z_{33} - C_{33} = v_3 + w_3 - C_{33} = 1 + (-1) - 9 = -9$$

$$x_{35} \rightarrow Z_{35} - C_{35} = v_3 + w_5 - C_{35} = 1 + 3 - 10 = -6$$

Pozitiflerin en büyüğü temele alınır. Bu problem için en büyük pozitif değer x_{22} **temele alınır**.

Temelden ayrılacak olan değişkeni belirlemek için ulaştırma tablosundaki temel değişkenlere bir döngü oluşturulur.

Oluşturulacak Döngü İçin Kurallar:

- Döngü aynı temel olmayan değişkenle başlar ve biter.
- Döngüde temel değişkenler bir yatay bir dikey dal ile birleştirilir.
- Döngüde ard arda üç göze aynı satır ya da sütunda bulunamaz.
- Döngünün her köşe gözesi bir temel değişkene karşılık gelir.

Temel dışı kalacak değişkenin belirlenmesi:

$\Delta = \text{Min} \{ \text{Temel olmayan gözenin temel gözelerle oluşturduğu döngü boyunca çift sayılı (-) pozisyonda bulunan temel değişken değerleri} \}$

$$\Delta = \text{Min} \{ 60, 30 \} = 30 \rightarrow x_{25} \text{ Temelden ayrılır}$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

x_{22} temele alındı, x_{25} temelden ayrıldı. Bu durumda yeni tablo;

	1	2	3	4	5	RT	
A	3) -4	3) (30)	6) -6	2) (7) * 1	3) (70)	100	$v_1=0$
B	7) 0	5) (30)	2) (80)	10) (50)	4) -1	160	$v_2=2$
C	5) (90)	4) -1	9) -9	8) (50)	10) -7	140	$v_3=0$
bj	90	60	80	100	70		
	$w_1=5$	$w_2=3$	$w_3=0$	$w_4=8$	$w_5=3$		

$x_{25} \rightarrow 30$ olduğundan
 diğerleri + lardan 30
 ekle - lardan 30
 çıkar.

$$Z_{ij} - C_{ij} = v_i + w_j - C_{ij}$$

$$x_{14} \rightarrow Z_{14} - C_{14} = v_1 + w_4 - C_{14} = 0 + 8 - 7 = 1$$

Diğerleri hesaplandığında tümünün (-) olduğu görülür.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Böylece x_{14} temele alınır. Temelden Ayrılanı belirlemek için;

$\Delta = \text{Min} \{50, 30\} = 30 \rightarrow x_{12}$ Temelden ayrılır. Bu durumda yeni tablo;

	1	2	3	4	5	AT	
A	9) -5	3) -1	6) -7	7) <u>30</u>	3) <u>40</u>	100	$u_1 = 0$
B	7) 0	5) <u>60</u>	2) <u>80</u>	10) <u>20</u>	6) 0	160	$u_2 = 3$
C	5) <u>90</u>	4) -1	9) -9	8) <u>50</u>	10) -6	140	$u_3 = +1$
b _j	90	60	80	100	70		
	$w_1 = 4$	$w_2 = 2$	$w_3 = -1$	$w_4 = 7$	$w_5 = 3$		

Tüm $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$ olduğundan optimallik sağlandı.

$$x^* = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{15} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \\ 60 \\ 80 \\ 20 \\ 90 \\ 50 \end{bmatrix} \quad Z^* = 1930$$

ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE DUYARLILIK ÇÖZÜMLEMESİ

Ulaştırma problemlerin üç tür değişim ve bu değişimlere karşılık duyarlılık çözümlemesinden söz edilebilir.

1. Temel dışı değişkenlere ilişkin amaç fonksiyonu katsayılarının değişimi.
2. Temeldeki değişkenlerin fiyatlarındaki değişim.
3. İstem ve sunumdaki değişim.

Değişim 1: Temel dışı değişkenlere ilişkin fiyatlardaki (C_{ij}) değişim

Aşağıda, amaç fonksiyonu en küçükleme biçiminde olan bir ulaştırma probleminin en iyi çözümüne ilişkin ulaştırma tablosu yer almaktadır.

	1	2	3	4	a_i	v_i
A	8	6 10	10 25	9	35	0
B	9 45	12	13 5	7	50	3
C	1	9 10	1	5 30	40	3
b_j	45	20	30	30		
w_j	6	6	10	2		

Temeldeki C_{ij} ler değişmediği için v_i ve w_j ler de değişiklik meydana gelmez. Çünkü bu değerler temeldeki değişkenlerin C_{ij} leri kullanılarak hesaplanmaktadır.

Temel uygun çözüm bozulmadan birinci kaynaktan birinci hedefe gönderilen bir birim malın ulaştırma giderindeki değişim ne kadar olabilir?

Birinci kaynaktan birinci hedefe 1 birim malın gönderilme maliyeti C_{11} deki değişim;

$\hat{C}_{11} = 8 + \Omega$ biçimindedir. Optimalliğin bozulmaması için;

$Z_{11} - \hat{C}_{11} \leq 0$ olmalıdır. Buradan,

$$v_1 + w_1 - \hat{C}_{11} \leq 0$$

$$0 + 6 - (8 + \Omega) \leq 0$$

$\Omega \geq -2$ olmalı buna bağlı olarak da $\hat{C}_{11} \geq 6$ olmalıdır.

Değişim -2 den büyük olduğu sürece optimallik bozulmaz.

Bir başka örnek;

C_{14} deki değişim ne kadar olmalı ki optimallik bozulmasın?

$\hat{C}_{14} = 9 + \Omega$ biçimindedir. Optimalliğin bozulmaması için;

$Z_{14} - \hat{C}_{14} \leq 0$ olmalıdır. Buradan,

$$v_1 + w_4 - \hat{C}_{14} \leq 0$$

$$0 + 2 - (9 + \Omega) \leq 0$$

$\Omega \geq -7$ olmalı buna bağlı olarak da $\hat{C}_{14} \geq 2$ olmalıdır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Değişim 2: Temeldeki değişkenlerin fiyatlarındaki değişim

Temeldeki C_{ij} ler değiştiği için v_i ve w_j ler de değişiklik meydana gelir. Temeldeki bir değişken olan C_{13} e ilişkin değişimi incelemek istersek.

$$C_{13} = 10 \rightarrow \hat{C}_{13} = 10 + \Omega$$

$$Z_{13} - C_{13} = 0 \text{ (Temelde olduğu için)} \rightarrow Z_{13} = C_{13}$$

$$\hat{C}_{13} = v_1 + w_3 = 10 + \Omega$$

	1	2	3	4	a_i	v_i
A	8	6 10	10+ Ω 25	9	35	0
B	9 45	12	13 5	7	50	3- Ω
C	1	9 10	1	5 30	40	3
b_j	45	20	30	30		
w_j	6+ Ω	6	10+ Ω	2		

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Temel dışı değişkenlere ilişkin tüm $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$ olmalı.

$$Z_{11} - C_{11} = v_1 - w_1 - C_{11} = 0 + 6 + \Omega - 8 \leq 0 \rightarrow \Omega \leq 2$$

$$Z_{14} - C_{14} = v_1 - w_4 - C_{14} = -7 \leq 0$$

$$Z_{22} - C_{22} = v_2 - w_2 - C_{22} = 3 - \Omega + 6 - 12 \leq 0 \rightarrow \Omega \geq -3$$

$$Z_{24} - C_{24} = v_2 - w_4 - C_{24} = 3 - \Omega + 2 - 7 \leq 0 \rightarrow \Omega \geq -2$$

$$Z_{31} - C_{31} = v_3 - w_1 - C_{31} = 3 + 6 + \Omega - 14 \leq 0 \rightarrow \Omega \leq 5$$

$$Z_{33} - C_{33} = v_3 - w_3 - C_{33} = 3 + 10 + \Omega - 16 \leq 0 \rightarrow \Omega \leq 3$$

Tüm belirlenen aralıklar kullanılarak Ω için; $-2 \leq \Omega \leq +2$

Aralığı elde edilir. Buradan;

$$-2 + 10 \leq C_{13} \leq 2 + 10$$

$$\mathbf{-8 \leq C_{13} \leq 12}$$

Olursa optimallik bozulmaz.

Değişim 3: Sunum ve istemdeki değişim

İki durum düşünülebilir:

1. Eğer x_{ij} temel değişken ise;

x_{ij} , Ω kadar artar ve maliyet üzerindeki etkisi

$\hat{Z} = Eski\ Değer + \Omega v_i + \Omega w_j$ biçimindedir.

Örneğin; Birinci kaynaktan, ikinci hedefe taşınacak mal miktarında 2 birim artış olsun. x_{12} temeldeki bir değişken ve iki birimlik değişimin maliyete etkisi

$$\hat{Z} = Eski\ Değer + \Omega v_i + \Omega w_j$$

$$= 1020 + 2*(0) + 2*(6) = 1032$$

Maliyette 12 birimlik bir artış olmuştur.,

2. Eğer x_{ij} temel dışı değişken ise; x_{ij} yi içeren bir döngü çizilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Örneğin; birinci kaynaktan birinci hedefe taşınacak mal miktarında 1 birim artış olsun. x_{11} de değişim olacak. Optimal çözümü bulma sürecinde kullanılan döngü ile aynı özelliklere sahip bir döngü kurulur.

	1	2	3	4	a_i
A	8 ⁺	6 ¹⁰	10 ^{- 25}	9	35
B	9 ⁴⁵	12	13 ⁵	7	50
C	1	9 ¹⁰	1	5 ³⁰	40
b_j	45	20	30	30	

(-) ile işaretlenmiş gözelerle $\Omega = 1$ eklenir

(+) ile işaretlenmiş gözelerden $\Omega = 1$ çıkartılır.

	1	2	3	4	a_i
A	8	6 ¹⁰	10 ²⁵	9	35+1=36
B	9 ⁴⁶	12	13 ⁴	7	50
C	1	9 ¹⁰	1	5 ³⁰	40
b_j	45+1=46	20	30	30	

$$Z = 60 + 260 + (9 * 45) + (9 * 10) + (5 * 30) = 1026$$