Peter Philip,
Paula Reichert, Lukas Emmert

Sommersemester 2024

Analysis 2 (Statistik)
Präsenzaufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Wir betrachten den Vektorraum $C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f \,\text{ist stetig}\}$ mit

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &:= f(x) + g(x),\\ (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x) \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{und} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Dazu betrachten wir die Funktion $||\cdot||$ gegeben durch

$$||f|| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \forall f \in C([0,1]). \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $||\cdot||$ wohldefiniert ist, mit anderen Worten, dass das Maximum in Gl. (1) immer existiert.

(b) Zeigen Sie, dass $||\cdot||$ eine Norm auf $C([0,1])$ ist.

(c) Für beliebiges $x \in [0,1]$ betrachten wir die folgende Funktion:

$$T_x : C([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad T_x(f) := f(x).$$

Zeigen Sie mithilfe der Definition der Stetigkeit, dass T_x stetig ist.

Aufgabe 2

Sei X der $\mathbb{K}$-Vektorraum der Folgen in $\mathbb{K}$, die schließlich konstant Null sind (siehe Beispiel 1.33b) im Skript), mit $||x|| := \sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n|\}$ für $x = (x_1, x_2, ...)$. Betrachten Sie die Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X mit

$$x_n^k = \begin{cases} 1/n & \text{für } 1 \le n < k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass (x^k) eine Cauchy-Folge ist.

(b) Zeigen Sie, dass (x^k) nicht in $(X, ||\cdot||)$ konvergiert. Damit haben wir einen normierten Vektorraum gefunden, der kein Banachraum ist.

Dieses Blatt wird im Tutorium in der Woche vom 06.05.24 – 10.05.24 besprochen.