Aufgabe 1

R (Reel Sayılar) $R^2 \to (x,y)$
C (Kompleks sayılar) $R^3 \to (x,y,z)$
K (Normun bir kümesi)

a) $-2(1,-2)+3(0,1)$. Bu iki vektör işlemi

$\Rightarrow [(-2.1)+(3.0), (-2.-2)+(3.1)) = (-2+0, 4+3) = (-2,7)$

Determinant

$-2\begin{bmatrix}1 & -2\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 7\end{bmatrix}$

b) $(-1,2,1).(3,2,3)$ iki vektörün skalerin çarpımı

$\Rightarrow \cancel{-3}+4+\cancel{3}=4$

c) $(2,5i).(3,i)$ Kompleks (vektörün) sayıların skaler çarpımı

$(2.3)+(5i.i) = 6+5i^2 = 6+5(-1) = 1$

Boz

$i^0 = 1$
$i = \sqrt{-1} = -1$
$i^2 = -1$
$i^3 = (-1)i =$
$i^4 = i^2 i^2 = 1$

$i^5 = i^4 . i^1$
$i^8 = i^7 . i = 1$

d) $\|(i,-i)\|_1$ Kompleks vektörün 1-normu

Vektor $\boxed{R^2}$ K_1

$i^2, -i^2 \xrightarrow{1}$ aynı sonuç

$|i|+|-i| = 1+1 = 2$

i (unique)

d.1) $\|(i^2,-i^2)\|_1$

$|i^2|+|-i^2| = 1+1 = 2$

$|i^4|+|-i^4| = 1+1 = 2$

Sadece i^3 te değişir. $i^3 = i^2(i) = -i$

$|i^3|+|-i^3| = i+i = 2i$

Norm Kuralı (Bir vektör ile bir vektör arasındaki mutlak uzaklıktır.

R^2 $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+2^2}$

R^3 $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{3^2+5^2+7^2}$

A $\overset{3}{(x_1,y_1)}$ .... C $\overset{2}{\underset{-7}{(x_2,y_2)}}$

-7 Tanı ondalık

$\sqrt{|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2}$

e) $\|(i,-i)\|_\infty$ Kompleks vektörün Sonsuz normu

$\max(|i|,|-i|) = \max(1,1) = 1$

Görünme 2(2)

f) $\|(1,-2,2)\|_2$ 3 boyutlu vektörün 2 normu

$\|(1,-2,2)\|_2 = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

(cos)

g) $\|(-1,-2,2)\|_3^3$ 3 boyutlu vektörün 3-normunun kübü

$3-2=1$

$\|(-1,-2,2)\|_3^3 = \sqrt[2]{(-1)^{\overset{3}{\downarrow}} + (-2)^{\overset{3}{\downarrow}} + 2^{\overset{3}{\downarrow}}} = (-1)^3 + 2^3 + (-2)^3 = -1 + \cancel{8} \cancel{-8} = -1$

norm norm norm (alttaki)

g.1) $\|(-1,-2,2)\|_3^{4-2} = \sqrt{(-1)^3 + 2^3 + (-2)^3} = \sqrt{-1} = -1$ $\|(x,y)\|_2$

$(4-2)=2$ 'den kökün geri geldi. Normun

g.2) $\|(-1,-2,2)\|_2^{6-2} = \sqrt[4]{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt[4]{-1}$

$6-2=4$

! Hiçbirşey üstte (1) (karekök derecesi) olmasaydı (2) altta (üs)

$\|(-1,-2,2)\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$

$\|(-1,-2,2)\|_1 = |-1| + |-2| + |2| = 1+2+2 = 5$

$\|(-1,-2,2)\|_3^{6-2} = \sqrt[4]{(-1)^3 + (-2)^3 + 2^3} = \sqrt[4]{-1 \cancel{-8} \cancel{+8}} = \sqrt[4]{-1}$ $\left(\frac{1}{4}\right)$

h) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\sin k, \frac{3}{2-3k}\right)$ R^2 limitli yakınsama

$\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\sin k\right) = 0$ (tanımsız) $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{3}{2-3k}\right) = 0$

$\frac{1}{k} = \frac{1}{\infty} = 0$ $\quad \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{-3k} = \frac{3}{\infty} = 0$

$\lim\limits_{k\to\infty} (x,y)$ için R^2 de $(0,0)$

i) $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1+ik}{k}, 2-i \right)$. Grenzwert in C^2 (x_i, y_i) Yarısı Teorik

Grenzwert in C^3 (x_i, y_i, z_i) Yarısı Proof

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} + i \right) = \frac{1}{\infty} + i = 0+i \Rightarrow i \qquad \lim_{k\to\infty} (2,-i) = 2-i$$

C^2 üzerinde $\lim_{k\to\infty} (x_i, y_i) = (i, 2-i)$

j) $\overset{(xy)}{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ birim matris $\qquad \overset{xyz}{I} = \begin{bmatrix} 1_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(3,3)} \end{bmatrix}$

$\int_I f(x,y) = xy$ integral alma sınır (boundaries $= I$)

$$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx\, dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{y}{2} dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

j.1) $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y) = x^3 3y^4 = \int_1^2 \int_3^4 x^3 3y^4 \, dx\, dy \qquad 1<y<2, \quad 3<x<4$

$$= \int_1^2 \frac{x^4 3y^4}{4} \Big|_3^4 dy = \int_1^2 \frac{\overset{64}{256} (3y^4)}{4} dy = 192y^4$$

$$\Rightarrow 192y^4 - \frac{243y^4}{4} = \int \frac{(792-243)y^4}{4} = \int_1^2 \frac{549y^4}{4} dy = \frac{594y^5}{20} \Big|_1^2$$

$$\Rightarrow 594\left(\frac{32}{20} - \frac{1}{20} \right) = \frac{594 \cdot 31}{20} = 920{,}7$$

i) $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1+ik}{k}, 2-i \right)$. Grenzwert in C^2 (x_i, y_i) Yarısı Teorik

Grenzwert in C^3 (x_i, y_i, z_i) Yarısı Proof

$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k} + i \right) = \frac{1}{\infty} + i = 0+i \Rightarrow i$ $\quad \lim_{k\to\infty} (2,-i) = 2-i$

C^2 üzerinde $\lim_{k\to\infty} (x_i, y_i) = (i, 2-i)$

j) $\underset{\text{birim matris}}{\overset{(xy)}{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad \overset{xyz}{I} = \begin{bmatrix} 1_{(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{(2,2)} & 0 \\ 0 & 0 & 1_{(3,3)} \end{bmatrix}$

$\int_I f(x,y) = xy$ integral olma sınır (boundaries $= I$)

$\int_0^1 \int_0^1 xy \, dx\,dy = \int_0^1 \left(\frac{x^2 y}{2} \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 \frac{y}{2} \, dy = \frac{y^2}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$

j.1) $\int_1^2 \int_3^4 f(x,y) = x^3 3y^4 = \int_1^2 \int_3^4 x^3 3y^4 \, dx\,dy$ $\qquad 1<y<2$, $3<x<4$

$= \int_1^2 \frac{x^4 3y^4}{4} \Big|_3^4 dy = \int_1^2 \frac{\overset{64}{256}(3y^4)}{4} dy = 192y^4$

$\Rightarrow 192y^4 - \frac{243y^4}{4} = \frac{(792-243)y^4}{4} = \int_1^2 \frac{549y^4}{4} dy = \frac{594y^5}{20} \Big|_1^2$

$\Rightarrow 594 \left(\frac{32}{20} - \frac{1}{20} \right) = \frac{594 \cdot 31}{20} = 920{,}7$

Aufgabe 2

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = 2y + \sin(xy - 3z)$

a) $\partial_x f(x,y,z)$

Türev

$\sin \xrightarrow{} \cos$

$\cos \quad -\sin$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + \sin(xy - 3z))$$

$$= \frac{\partial \sin(xy-3z)}{\partial x} + 0 = \frac{\partial}{\partial x}(xy - 3z) = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow y\cos(xy - 3z)$$

b) $$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2y + \sin(xy - 3z))$$

$-\sin \to -\cos$

$$= 2 + x\cos(xy - 3z)$$

$-\cos \to +\sin$

c) $$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(2y + \sin(xy - 3z))$$

$$= 0 + -3\cos(xy - 3z) = -3\cos(xy - 3z)$$

d) $\nabla f(0,1,0) \qquad \nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$

Gradient tüm kısmi türevlerin bir vektörü

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,0) = 1\cos(\underbrace{0(1)}_{0} - \underbrace{3(0)}_{0}) = 1\underbrace{\cos(0)}_{1} = 1$$

$\boxed{\cos 90 = 0}$ Ek bilgi

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,0) = 2 + \underbrace{0\underbrace{\cos(0)}_{1}}_{0} = 2$$

$\nabla f(0,1,0) = (1, 2, -3)$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,0) = -3\underbrace{\cos(0)}_{1} = -3$$

e) $R^2 \to R$ $\nabla g(x,y) = (xy, -y^2) \to (2,1)$

$\dfrac{\partial g}{\partial(3,2)}(2,1) \Rightarrow$

$\partial(3,2) \to$ Norm uygulayacağım (Payda)

$\dfrac{\partial g(2,1)}{\partial(3,2)} \to$ Norm Payda

$\sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{1}$

$\nabla g(x,y) = (xy, -y^2)$

$\nabla g(2,1) = (2.1, -(-1)^2) = (2,-1) \Rightarrow$ D(vektör)

Norm $(\|.\|) = \left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial(3,2,5)}(2,1,4) \to$ ilk fonk aynen yere yaz

$\to \dfrac{3}{\sqrt{38}}, \dfrac{2}{\sqrt{38}}, \dfrac{5}{\sqrt{38}}$

Formolü D.Norm

$\nabla g(2.1) \cdot \|\partial(3,2)\|$

$D.g(2,1) = (2,-1)\left(\dfrac{3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$ $[x, y]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = [x]$

$= \dfrac{2.3 + (-1)(2)}{\sqrt{13}} = \dfrac{6-2}{\sqrt{13}} = \dfrac{4}{\sqrt{13}}$

f) $p = (2,0,1)$ $x = \left(2, \frac{1}{2}, 3\right)$ R^3 için skaler çarpım (Boyutlar aynı)

$x^p = \left(2, \frac{1}{2}, 3\right) = 2^2 + \frac{1}{2}^0 + 1^3 = 4 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{2} = 5{,}5$

$x.p = 2 + 0 + 3 = 7$

g) $P(x,y,z) = \underbrace{x^3 + y^2 z} + \underbrace{xyz} + \underbrace{z^5}$

$x^3 y^2 z = 3+2+1 = 6$

$xyz = 1+1+1 = 3$

$z^5 = 5$ $\deg(P) = 6$

→boundary (sınır noktası)

h) $\partial[1,3]\ \mathbb{R} = \{1,3\}$ 1 0

i) $\partial[1,3]\ \mathbb{C} = \{1,3\}$ $|1|+|3|=4$ $3i$, $5i$, 6, 6 } ∂ (mutlak)

j) $\partial[1,3]^{\circ}\ \mathbb{C} = \emptyset$ $\sqrt{1^{0}+3^{0}} = 0 = \emptyset$ (norm al)

h.1) $\partial[1, 3i]\ \mathbb{R} = \{1\}$ (sayılar) $\mathbb{R} \subset \mathbb{N}$ (sub)

i.1) $\partial[1, 3i]\ \mathbb{C} = \{1, 3i\}$ $\mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ (sub)

j.1) $[1, 3i]^{\circ}\ \mathbb{C} = \{3\} = 3.(i)$ i^{0}, i

$[1, 3] = 1, 2, 3$
$(1, 3) = 2$

Soru 5) Son konu Hessen matrices

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x^2 - xy + y^2$

1. Adım Kısmi Türev al, sıfıra eşitle.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y = 0 \Rightarrow 2x = y \quad x = \frac{y}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = x$$

$2(2y) - y = 0$ $2y = x$
$3y = 0$ $0 = x$
$y = 0$ Kritik (0,0)

2. Adım

$-x + 2(2x) = 3x = 0$ $y = 2x$ idi (Yerine koy)
$x = 0$ $y = 0$

Critical values (0,0) → Böyle çıkarsa Hessen yap

3. Adım [Hessen için 2. mertebe türev]

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1 \qquad H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Yerel Min ve Max
Det(H) > 0 → yerel min (kritik nokta)
Det(H) < 0 → yerel max (" ")
Det(H) = 0 → Kritik nokta yoktur.

$\det(H) = 2.2 - (-1.(-1)) = 4 - 1 = 3$

$\det(H) = 3 > 0$ old. kritik nokta bir yerel minimumdur.

4) a) $R^+ \to R$, $\emptyset(x) = \frac{x}{e^x}$ $y' = \frac{y}{x} - y$, $(x, y) \in R^+ \times R^+$

$\emptyset(x)' = \frac{d}{dx} \frac{x}{e^x} = e^x$ e^x Türevde hep aynı integralde üs başa gelir ama payda sabit

y'nin yerine koy.

$y' = \frac{y}{x} - y$

$= \frac{e^x}{x} - e^x \Rightarrow e^x = \frac{e^x}{x}$ $\frac{\cancel{e^x}}{e^x} = \frac{1}{x}$

$1 = \frac{1}{x}$

$y' = xy - y$ $\emptyset(x) = \frac{x}{e^x}$ $x = 1$

Q(x) y''ni 1 noktasında sağlar.

4) a.1) $\emptyset(y) = \frac{y}{e^y}$ $x' = \frac{x}{y} - x$

b) $y' = -y^2$ $\boxed{y(0) = 1}$ (x)

1. Adım

$\frac{dy}{dx} = -y^2$ / Her iki tarafı y^2'ye böl

$\frac{1}{y^2} \frac{dy}{dx} = -1$

$\frac{1}{y^2} dy = -dx$ / integral alabiliriz artık

$\int \frac{1}{y^2} dy = \int -dx$

$\int y^{-2} dy = y^{-2+1} = -1y^{-1} = -y^{-1} = -\frac{1}{y}$

2. Adım

$y(0) = 1$

Formül $\boxed{-\frac{1}{y} = x - C} \rightarrow -\frac{1}{1} = 0 - C \Rightarrow -1 = -C$

$C = 1$