Solution dwt endterm-online

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018) (Technische Universität München)

Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (Online)

Klausur:	IN0018 / Endterm-Online	**Datum:**	Dienstag, 3. August 2021
Prüfer:	Prof. Dr. Susanne Albers	**Uhrzeit:**	14:15 – 16:15

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **20 Seiten** mit insgesamt **6 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 40 Punkte.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **handgeschriebener Spickzettel (DIN A4, beide Seiten)**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Unterschreiben Sie in dem obigen Unterschriftenfeld. Damit versichern Sie, dass Sie
  - alle Antworten selbstständig und ohne Austausch mit Dritten angefertigt haben,
  - keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutzt haben und
  - unter Ihrem eigenen Namen abgeben.
- Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der **Lösungsweg erkennbar ist.** Begründen Sie alle Antworten, solange es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.

Aufgabe 1 **Gewinnspiel (6.5 Punkte)**

Sie nehmen an folgendem Gewinnspiel teil: Zuerst ziehen Sie einen Ball beschriftet mit einer Zahl aus einer Urne. Die gezogene Zahl gibt an, wie viele Lose Sie anschließend ohne Zurücklegen aus einem Lostopf ziehen dürfen. In der Urne befinden sich drei Bälle beschriftet mit den Zahlen 1, 2 und 3. Im Lostopf befinden sich genau ein Gewinnlos und sieben Nieten. Angenommen Sie ziehen jeden Ball bzw. jedes noch übrige Los mit gleicher Wahrscheinlichkeit.

a) Zeigen Sie, dass Sie das Gewinnlos mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ ziehen.

Die verschiedenen Varianten dieser Aufgabe unterscheiden sich in der Anzahl m der Nieten im Lostopf. Seien A_1, A_2 und A_2 die Ereignisse, dass der Ball mit Zahl 1, 2 bzw. 3 aus der Urne gezogen wurde. Es gilt $\Pr[A_1] = \Pr[A_2] = \Pr[A_3] = \frac{1}{3}$. Sei G das Ereignis, dass das Gewinnlos aus dem Lostopf gezogen wird. Nach dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit gilt

$$\Pr[G] = \Pr[G \mid A_1] \cdot \Pr[A_1] + \Pr[G \mid A_2] \cdot \Pr[A_2] + \Pr[G \mid A_3] \cdot \Pr[A_3] .$$

Es muss nun nur noch $\Pr[G \mid A_i]$ für $i \in \{1,2,3\}$ bestimmt werden. Beim Ziehen von j Losen ohne Zurücklegen gibt es $\binom{m+1}{j}$ verschiedene Ziehungen (ohne Beachtung der Reihenfolge), die alle gleich wahrscheinlich sind. Des Weiteren gibt es $\binom{m}{j-1}$ verschiedene Ziehungen, bei denen das Gewinnlos gezogen wird (wir ziehen die anderen $j-1$ Lose aus den restlichen m). Mit dem Laplace-Prinzip folgt

$$\begin{aligned}\Pr[G] &= \Pr[G \mid A_1] \cdot \Pr[A_1] + \Pr[G \mid A_2] \cdot \Pr[A_2] + \Pr[G \mid A_3] \cdot \Pr[A_3] \\ &= \frac{\binom{m}{0}}{\binom{m+1}{1}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\binom{m}{1}}{\binom{m+1}{2}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{\binom{m}{2}}{\binom{m+1}{3}} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3(m+1)} + \frac{2}{3(m+1)} + \frac{3}{3(m+1)} = \frac{2}{m+1} .\end{aligned}$$

Varianten:

Anzahl Nieten m	$\Pr[G]$:
5	1/3
6	2/7
7	1/4
8	2/9

b) Ihr Kommilitone berichtet Ihnen, dass er das Gewinnlos gezogen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er zuvor den Ball mit Zahl 2 aus der Urne gezogen? Sind die Ereignisse »Der Ball mit Zahl 2 wird aus der Urne gezogen« und »Das Gewinnlos wird gezogen« stochastisch unabhängig?

0
1

Gesucht ist $\Pr[A_2 \mid G]$. Durch Umformen ergibt sich

$$\Pr[A_2 \mid G] = \frac{\Pr[A_2 \cap G]}{\Pr[G]} = \frac{\Pr[G \mid A_2] \cdot \Pr[A_2]}{\Pr[G]} = \frac{\frac{2}{m+1} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{2}{m+1}} = \frac{1}{3}\,.$$

Wir haben also gezeigt, dass $\Pr[A_2 \mid G] = \Pr[A_2]$ gilt. Durch Umformen erhalten wir $\Pr[A_2 \cap G] = \Pr[A_2] \cdot \Pr[G]$, woraus die Unabhängigkeit der Ereignisse A_2 und G folgt.
Dieses Ergebnis ist für alle Varianten gleich.

c) Wie viele zusätzliche Bälle beschriftet mit der Zahl 3 müsste man mindestens in die Urne hinzugeben, damit die Wahrscheinlichkeit, mit der das Gewinnlos gezogen wird, mindestens 1/3 ist?

0
1
2

In dieser Teilaufgabe soll die kleinste Anzahl an zusätzlichen Bällen beschriftet mit der Zahl 3 bestimmt werden, sodass die Wahrscheinlichkeit das Gewinnlos zu ziehen mindestens $\frac{3}{m+2}$ ist. Angenommen es werden $N-1$ Bälle beschriftet mit der Zahl 3 in die Urne hinzugegeben. Damit verändern sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A_1,A_2 und A_3 zu $\Pr[A_1] = \Pr[A_2] = \frac{1}{N+2}$ und $\Pr[A_3] = \frac{N}{N+2}$. Entsprechen erhalten wir nun

$$\begin{aligned}\Pr[G] &= \frac{1}{N+2} \cdot \frac{1}{m+1} + \frac{1}{N+2} \cdot \frac{2}{m+1} + \frac{N}{N+2} \cdot \frac{3}{m+1} \\ &= \frac{3N+3}{(N+2)(m+1)} \overset{!}{\geq} \frac{3}{m+2}\,.\end{aligned}$$

Durch Umformungen erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{3N+3}{(N+2)(m+1)} = \frac{3(N+1)}{(N+2)(m+1)} = \frac{N+1}{N+2} \cdot \frac{3}{m+1} &\geq \frac{3}{m+2} \\ \iff \frac{N+1}{N+2} &\geq \frac{m+1}{m+2}\,.\end{aligned}$$

Wir können folgern, dass $N+1 \geq m+1$ gelten muss, oder $N \geq m$. Wir müssen demnach mindestens $N-1 = m-1$ Bälle beschriftet mit der Zahl 3 in Urne 1 hinzugeben.
Varianten:

Anzahl Nieten m	Benötigte Bälle:
5	4
6	5
7	6
8	7

Aufgabe 2 **Forschungsreise (5.5 Punkte)**

Der Biologin Alison begegnen auf ihrer Forschungsreise an einem Tag X Wolpertinger. Die Dichte der diskreten Zufallsvariablen X ist gegeben durch

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(5)} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^k \cdot \frac{1}{k} & \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Alison an einem Tag mindestens zwei Wolpertinger sieht.

Die Varianten dieser Aufgabe unterscheiden sich durch den Parameter $p \in \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\}$ in der Dichtefunktion

$$f_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{\ln\left(1/(1-p)\right)} \cdot \frac{p^k}{k} & \text{für } k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\Pr[X \geq 2]$ rechnen wir über das Gegenereignis und erhalten

$$\Pr[X \geq 2] = 1 - \Pr[X = 1] = 1 - \frac{p}{\ln\left(1/(1-p)\right)}.$$

Parameter p	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$4/5$
$\Pr[X \geq 2]$	$1 - \frac{1}{2\ln(2)}$	$1 - \frac{2}{3\ln(3)}$	$1 - \frac{3}{4\ln(4)}$	$1 - \frac{4}{5\ln(5)}$

b) Zeigen Sie, dass für alle $s \in [0,1]$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion von X gegeben ist durch

$$G_X(s) = -\frac{\ln\left(1 - (4/5)s\right)}{\ln(5)}.$$

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k = \ln\left(1/(1-x)\right)$ für $x \in [0,1)$.

Es soll in dieser Teilaufgabe gezeigt werden, dass

$$G_X(s) = -\frac{\ln(1-ps)}{\ln\left(1/(1-p)\right)}.$$

Wir setzen die Definition der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion an und rechnen:

$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \cdot f_{X_i}(k) = \sum_{k=1}^{\infty} s^k \cdot \frac{1}{\ln\left(1/(1-p)\right)} \cdot \frac{p^k}{k} = \frac{1}{\ln\left(1/(1-p)\right)} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ps)^k}{k}.$$

Für die hintere Reihe verwenden wir den Hinweis mit $x = ps$, wobei wir feststellen, dass $ps \in [0,1)$, da $s \in [0,1]$ und $p \in (0,1)$. Wir erhalten

$$G_X(s) = \frac{\ln(1/(1-ps))}{\ln\left(1/(1-p)\right)} = -\frac{\ln(1-ps)}{\ln\left(1/(1-p)\right)},$$

wobei wir im letzten Schritt $\ln\left(1/(1-x)\right) = -\ln(1-x)$ verwenden.

Parameter p	$1/2$	$2/3$	$3/4$	$4/5$
1/(1-p)	2	3	4	5
G_X	$-\frac{\ln(1-1/2\,s)}{\ln(2)}$	$-\frac{\ln(1-2/3\,s)}{\ln(3)}$	$-\frac{\ln(1-3/4\,s)}{\ln(4)}$	$-\frac{\ln(1-4/5\,s)}{\ln(5)}$

c) Die Dauer von Alisons Forschungsreise beträgt Y Tage, wobei Y eine mit Parameter $\lambda = \ln(5)$ Poisson-verteilte Zufallsvariable ist. Alison begegnet am i-ten Tag ihrer Reise X_i Wolpertingern, wobei alle X_i identisch verteilt zu X sind. Die Zufallsvariablen $Y, X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig. Wie vielen Wolpertingern begegnet Alison auf ihrer gesamten Forschungsreise erwartungsgemäß?

0 1 2 3

Je nach Variante ist Y Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \ln\left(1/(1-p)\right)$. Da die Dauer von Alisons Forschungsreise Y Tage beträgt, lässt sich die Gesamtzahl Z an getroffenen Wolpertinger schreiben als $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$. Da die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_Y$ und Y unabhängig sind, können wir Satz 77 anwenden. Da Y Poisson-verteilt ist mit Parameter λ, lautet die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Y(s) = e^{\lambda(s-1)}$. Es folgt

$$G_Z(s) = G_Y(G_X(s)) = \exp\left(\lambda\left(-\frac{\ln(1-ps)}{\ln\left(1/(1-p)\right)} - 1\right)\right) = \exp\left(-\ln(1-ps) - \ln\left(1/(1-p)\right)\right),$$

wobei der letzte Schritt aus der Wahl von $\lambda = \ln\left(1/(1-p)\right)$ folgt. Diesen Term können wir nun wie folgt vereinfachen:

$$G_Z(s) = \exp\left(-\ln(1-ps) - \ln\left(1/(1-p)\right)\right) = \frac{1}{1-ps} \cdot (1-p).$$

Um den Erwartungswert von Z zu bestimmen leiten wir G_Z ab:

$$G_Z'(s) = -\frac{1}{(1-ps)^2} \cdot (-p) \cdot (1-p) = p(1-p) \cdot \frac{1}{(1-ps)^2}.$$

Abschließend erhalten wir den Erwartungswert durch Einsetzen von $s = 1$:

$$\mathbb{E}[Z] = G_Z'(1) = p(1-p) \cdot \frac{1}{(1-p)^2} = \frac{p}{1-p}$$

Parameter p	1/2	2/3	3/4	4/5
1/(1-p)	2	3	4	5
λ	ln(2)	ln(3)	ln(4)	ln(5)
$\mathbb{E}[Z]$	1	2	3	4

Aufgabe 3 Quadratisches Beet (6 Punkte)

Landwirt Alfred legt ein quadratisches Beet an. Der Flächeninhalt (in Quadratmetern) ist durch die mit Parameter $\lambda = 1/5$ exponentialverteilte Zufallsvariable X gegeben.

0
1
2

a) Bestimmen Sie die Dichte der Seitenlänge S des quadratischen Beetes.

Die Varianten dieser Aufgabe unterscheiden sich in der Wahl des Parameters $\lambda \in \{\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}\}$. Sei $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Da X der Flächeninhalt eines quadratischen Beets ist, gilt für die Seitenlänge $S = \sqrt{X}$. Für $S \geq 0$ ist $F_S(s) = \Pr[\sqrt{X} \leq s] = F_X(s^2)$. Also

$$F_S(s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda s^2} & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Durch Ableiten erhalten wir nun die Dichtefunktion von S:

$$f_S(s) = \begin{cases} 2\lambda s e^{-\lambda s^2} & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Varianten:

Parameter λ	Verteilung $F_S(s)$	Dichte $f_S(s)$
1/5	$1 - e^{-s^2/5}$ für $s \geq 0$	$\frac{2}{5} s e^{-s^2/5}$ für $s \geq 0$
1/6	$1 - e^{-s^2/6}$ für $s \geq 0$	$\frac{1}{3} s e^{-s^2/6}$ für $s \geq 0$
1/8	$1 - e^{-s^2/8}$ für $s \geq 0$	$\frac{1}{4} s e^{-s^2/8}$ für $s \geq 0$
1/10	$1 - e^{-s^2/10}$ für $s \geq 0$	$\frac{1}{5} s e^{-s^2/10}$ für $s \geq 0$

b) Alfreds Nachbar Bernd möchte auch ein Beet anlegen. Der Flächeninhalt Y (in Quadratmetern) von Bernds Beet ist ebenfalls exponentialverteilt mit Parameter $\lambda = 1/5$ und unabhängig von X. Berechnen Sie die Dichte der Summe Z der Flächeninhalte der beiden Beete und geben Sie $\mathbb{E}[Z]$ an.

0 1 2 3

Für jede Variante ist Y identisch verteilt zu X, das heißt ebenfalls exponentialverteilt mit gleichem λ. Es gilt $Z = X + Y$, wobei X und Y unabhängig sind. Demnach können wir die Dichte von Z mithilfe von Satz 105 (Faltung) bestimmen. Für $z \geq 0$ gilt:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,\mathrm{d}x = \lambda^2 e^{-\lambda z} \cdot \int_0^z 1\,\mathrm{d}x = \lambda^2 z e^{-\lambda z}\,.$$

Da $W_X = W_Y = \mathbb{R}_0^+$, gilt offensichtlich $f_Z(z) = 0$ für $z < 0$. Außerdem folgt aus der Linearität des Erwartungswerts

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}\,.$$

Varianten:

Parameter λ	Dichte $F_Z(z)$	Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$
$1/5$	$\frac{1}{25} z e^{-z/5}$ für $z \geq 0$	10
$1/6$	$\frac{1}{36} z e^{-z/6}$ für $z \geq 0$	12
$1/8$	$\frac{1}{64} z e^{-z/8}$ für $z \geq 0$	16
$1/10$	$\frac{1}{100} z e^{-z/10}$ für $z \geq 0$	20

c) Alfred und Bernd legen zusammen insgesamt 25 Beete an, deren Größe jeweils unabhängig und identisch zu X bzw. Y verteilt sind. Berechnen Sie die erwartete Größe des kleinsten Beetes.

0 1

Je nach Variante war eine andere Anzahl n an gemeinsamen Beeten von Alfred und Bernd gegeben. Seien $X_1, \ldots, X_n$ die Flächeninhalte. Es gilt, dass jedes Beet unabhängig anderer Beete exponentialverteilt ist mit Parameter λ. Sei nun $K = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$ die Größe des kleinsten Beetes. Nach Satz 102 ist K ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_K = n\lambda$. Also ist $\mathbb{E}[K] = 1/(n\lambda)$.
Varianten:

Parameter λ	Anzahl n	Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$
$1/5$	25	$1/5$
$1/6$	24	$1/4$
$1/8$	24	$1/3$
$1/10$	20	$1/2$

Aufgabe 4 **Weltraummission (7 Punkte)**

Astronaut Alex bereitet sich auf eine 200 Tage lange Weltraummission vor, für die mehrere Sauerstoffflaschen benötigt werden. Die Anzahl an Tagen, die eine Flasche benutzt werden kann bevor sie verbraucht ist und ausgetauscht werden muss, ist geometrisch verteilt mit einem Erwartungswert von 2 Tagen und unabhängig von den anderen Flaschen. Sobald eine Sauerstoffflasche vollständig verbraucht wurde, wird sie am Ende des Tages durch eine neue ersetzt.

0 1 2 3

a) Angenommen es besteht ein unendlich großer Vorrat an Sauerstoffflaschen. Zeigen Sie, dass der Erwartungswert und die Varianz der Anzahl an vollständig verbrauchten Flaschen A während der gesamten Weltraummission gegeben ist durch $\mathbb{E}[A] = 100$ bzw. $\mathrm{Var}[A] = 50$.

Die Varianten dieser Aufgabe unterscheiden sich in der Länge a der Weltraummission in Tagen. Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Anzahl Tage, die die verschiedenen Sauerstoffflaschen durchhalten. Es gilt, dass $T_1, T_2, \ldots$ alle unabhängig geometrisch verteilt sind mit Parameter $p = \frac{1}{2}$. Hierbei entspricht p der Trefferwahrscheinlichkeit im Sinne der geometrischen Verteilung.
Gesucht ist die Anzahl A der verbrauchten Flaschen während der gesamten a Tage langen Weltraummission. Gemäß Vorlesung gilt: Wenn die zeitlichen Abstände T_i der Treffer geometrisch verteilt ist, so ist die Anzahl der Treffer A in einem festen Zeitraum binomialverteilt. Die entsprechenden Parameter sind $p = \frac{1}{2}$ für die Trefferwahrscheinlichkeit und a für die Anzahl an Versuchen.
Alternativ kann dies auch direkt berechnet werden: Aufgrund der Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung ist die Wahrscheinlichkeit, dass an einem bestimmten Tag die aktuell benutzte Flasche i leer wird, gleich $\Pr[T_i = 1] = p(1-p)^0 = p$. Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit, dass die aktuelle Flasche nicht leer wird gleich $1 - p$.
Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A = k]$ für $k \in \{0, \ldots, a\}$ entspricht nun der Wahrscheinlichkeit, dass die aktuelle Flasche an genau k der insgesamt a Tage leer wird. An allen anderen Tagen wird die Flasche nicht aufgebraucht. Da es $\binom{a}{k}$ Möglichkeiten für die Ausfalltage gibt, folgt

$$\Pr[A = k] = \binom{a}{k} p^k (1-p)^{a-k} \quad \text{für } k \in \{0, \ldots, a\}$$

Damit ist A binomialverteilt mit Parametern a und $p = \frac{1}{2}$.
Der Erwartungswert von A ist demnach $\mathbb{E}[A] = \frac{a}{2}$ und die Varianz $\mathrm{Var}[A] = \frac{a}{4}$.
Varianten:

Länge der Mission a	$\mathbb{E}[A]$	$\mathrm{Var}[A]$
120	60	30
160	80	40
200	100	50
240	120	60

b) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der vollständig verbrauchten Flaschen mindestens den halben Wert der Varianz vom Erwartungswert abweicht, mithilfe der Chebyshev-Ungleichung nach oben ab.

0
1

In Teilaufgabe a) haben wir gezeigt, dass $\mathbb{E}[A] = \frac{a}{2}$ und $\mathrm{Var}[A] = \frac{a}{4}$ gilt. Nun ist nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, dass die Anzahl der verbrauchten Flaschen mindestens $\mathrm{Var}[A]/2$ vom Erwartungswert abweicht, also $\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq \mathrm{Var}[A]/2]$. Die Chebyshev-Ungleichung liefert.

$$\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq \mathrm{Var}[A]/2] \leq \frac{\mathrm{Var}[A]}{(\mathrm{Var}[A]/2)^2} = \frac{4}{\mathrm{Var}[A]} = \frac{8}{a}.$$

Varianten:

Länge der Mission a	Chebyshev-Ungleichung
120	$\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq 15] \leq \frac{2}{15}$
160	$\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq 20] \leq \frac{1}{10}$
200	$\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq 25] \leq \frac{2}{25}$
240	$\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq 30] \leq \frac{1}{15}$

0
1
2

c) Jeden Tag während der Weltraummission schaut Alex aus dem Fenster und sieht dabei am i-ten Tag S_i Sternschnuppen vorbeifliegen. Aus Erfahrung weiß Alex, dass für alle $i \in [200]$ $\mathbb{E}[S_i] = \frac{1}{20}$ und $\mathrm{Var}[S_i] = \frac{1}{50}$ gilt und dass $S_1, S_2, \ldots, S_{200}$ unabhängig sind. Approximieren Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Alex während der gesamten Weltraummission mehr als 7 Sternschnuppen sieht, mithilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Hinweis: Benutzen Sie die Tabelle der Standardnormalverteilung am Ende der Klausur.

Je nach Variante war $\mathbb{E}[S_i] = \frac{10}{a}$ bzw. $\mathrm{Var}[S_i] = \frac{4}{a}$ gegeben. Sei S die Anzahl an Sternschnuppen, die Alex während der gesamten a Tage langen Weltraummission sieht. Es gilt $S = \sum_{i=1}^{a} S_i$. Gesucht ist $\Pr[S > 7] = 1 - \Pr[S \leq 7]$. Aus dem zentralen Grenzwertsatz folgt

$$\begin{aligned} \Pr[S \leq 7] &= \Pr\left[\frac{S - a \cdot \mathbb{E}[S_i]}{\sqrt{a \cdot \mathrm{Var}[S_i]}} \leq \frac{7 - a \cdot \mathbb{E}[S_i]}{\sqrt{a \cdot \mathrm{Var}[S_i]}}\right] \\ &= \Phi\left(\frac{7 - 10}{\sqrt{4}}\right) = \Phi(-1.5)\,. \end{aligned}$$

Nun benutzen wir die Identität $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ und lesen aus der Tabelle ab

$$\Pr[S > 7] = 1 - \Pr[S \leq 7] = 1 - (1 - \Phi(1.5)) = \Phi(1.5) = 0.933\,.$$

Dieses Ergebnis ist für alle Varianten gleich.

Aufgabe 5 **Dreiecksverteilung (7 Punkte)**

Die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariable X sei abhängig von einem Parameter $c \in (0,1)$ gegeben durch

$$f_c(x) = \begin{cases} 2\,\frac{x}{c} & \text{für } x \in [0,c] \\ 2\,\frac{1-x}{1-c} & \text{für } x \in (c,1] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion f_c für alle Werte $c \in (0,1)$ eine zulässige Dichtefunktion ist.

Die Varianten dieser Aufgabe unterscheiden sich in der Wahl von $k \in \{1,2,3,4\}$ für $c \in (0,k)$ und der Dichte

$$f_c(x) = \begin{cases} \frac{2}{k}\,\frac{x}{c} & \text{für } x \in [0,c] \\ \frac{2}{k}\,\frac{k-x}{k-c} & \text{für } x \in (c,k] \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist leicht zu prüfen, dass f_c für alle $c \in (0,k)$ eine wohldefinierte, integrierbare, nicht-negative Funktion auf den reellen Zahlen ist. Es bleibt zu überprüfen, ob

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)dx = 1.$$

Wir teilen das Integral auf die definierten Teilintervalle auf und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)dx &= \int_0^c \frac{2}{kc}\,x\;dx + \int_c^k \frac{2}{k(k-c)}\,(k-x)\;dx \\
&= \frac{2}{kc}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^c + \frac{2}{k(k-c)}\left[kx - \frac{1}{2}x^2\right]_c^k \\
&= \frac{2}{kc}\,\frac{1}{2}\,c^2 + \frac{2}{k(k-c)}\left(k^2 - \frac{1}{2}k^2 - \left(kc - \frac{1}{2}c^2\right)\right) \\
&= \frac{c}{k} + \frac{2}{k(k-c)}\,\frac{1}{2}\left(k^2 - 2kc + c^2\right) \\
&= \frac{c}{k} + \frac{1}{k(k-c)}(k-c)^2 \\
&= \frac{c}{k} + \frac{k-c}{k} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

0 1 2

b) Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Stichprobenvariablen der Zufallsvariable X. Konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer U für den Parameter c und zeigen Sie die Erwartungstreue von U.
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}(1 + c)$.

Der gegebene Hinweis ist in Abhängigkeit von k: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{3}(k + c)$.
Sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ das Stichprobenmittel von $X_1, \dots, X_n$. Wir definieren $U := 3\overline{X} - k$. Nach Vorlesung ist der Schätzer U erwartungstreu, falls gilt: $\mathbb{E}[U] = c$. Wir setzen mit Hilfe der Linearität des Erwartungswerts an:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[U] &= \mathbb{E}\left[3\overline{X} - k\right] \\ &= 3\ \mathbb{E}[\overline{X}] - k \\ &= 3\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}[X_i]\right) - k \\ &= 3\left(\frac{1}{n}\,n\,\mathbb{E}[X]\right) - k \\ &= 3\ \mathbb{E}[X] - k\end{aligned}$$

Mit Hinzunahme des Erwartungswerts von X vereinfachen wir weiter:

$$\mathbb{E}[U] = 3\left(\frac{1}{3}\,(k + c)\right) - k = k + c - k = c$$

0 1 2

c) Ist ihr konstruierter Schätzer U auch konsistent im quadratischen Mittel?
Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\mathrm{Var}[X]$ endlich ist.

Der Schätzer U ist konsistent im quadratischen Mittel, falls für $n \to \infty$ gilt, dass $\mathrm{MSE} \to 0$. Für erwartungstreue Schätzer U gilt weiterhin $\mathrm{MSE} = \mathrm{Var}[U]$. Es gilt also

$$\mathrm{MSE} = \mathrm{Var}[U] = \mathrm{Var}[3(\overline{X}) - k] = 9\,\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{9}{n}\mathrm{Var}[X].$$

wobei wir im letzten Schritt rechnen wie auf Folie 307 der Vorlesung. Da die Varianz von X endlich ist, folgt direkt $\mathrm{MSE} \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 6 Markov-Kette (8 Punkte)

Es sei eine Markov-Kette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ über der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2, 3\}$ durch die Übergangsmatrix P gegeben.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

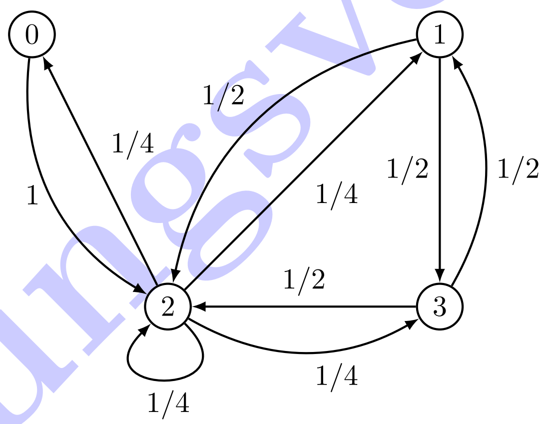
a) Zeichnen Sie das zugehörige Übergangsdiagramm und begründen Sie, dass die Markov-Kette irreduzibel ist.

Die vier Varianten dieser Aufgabe ergeben sich durch Umnummerierung der Zustände. Die verschiedenen Matrizen bezeichnen wir mit P_k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

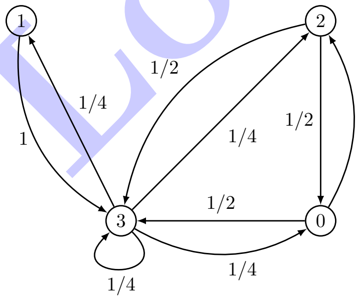
$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \quad P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}$$

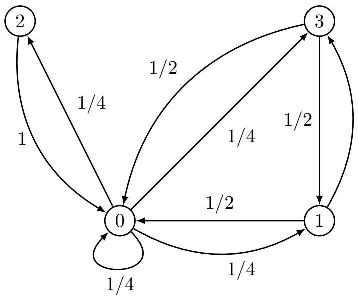
$$P_2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

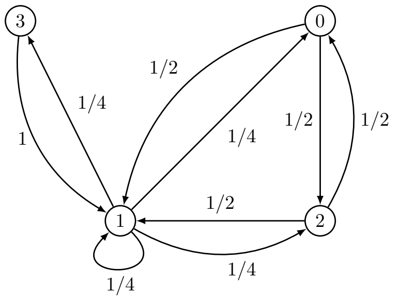
Das Übergangsdiagramm der Markov-Kette mit Matrix P_k lässt sich folgendermaßen darstellen: P_0 in groß; P_1, P_2 und P_3 drunter von links nach rechts.



Varianten:







Wir zeigen noch, dass die Markov-Kette irreduzibel ist. Nach Vorlesung ist eine endliche Markov-Kette genau dann irreduzibel, wenn der Graph des Übergangsdiagramms stark zusammenhängend ist. Dies ist leicht anhand des obigen Diagramms zu sehen. Alternativ kann auch argumentiert werden, dass jeder Zustand von jedem anderen Zustand aus mit positiver Wahrscheinlichkeit erreichbar ist.

0
1
2

b) Es sei der Startvektor $q_0 = (1/2, 0, 0, 1/2)$ gegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette sich nach zwei Schritten im Zustand 3 befindet.

Je nach Variante $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ war ein anderer Startvektor gegeben und nach der Wahrscheinlichkeit sich nach zwei Schritten im Zustand k zu befinden gefragt.
Varianten:

- $k = 0$: $q_0 = (1/2, 1/2, 0, 0)$
- $k = 1$: $q_0 = (0, 1/2, 1/2, 0)$
- $k = 2$: $q_0 = (0, 0, 1/2, 1/2)$
- $k = 3$: $q_0 = (1/2, 0, 0, 1/2)$

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X_2 = k]$ unter der Startverteilung q_0. Nach Definition entspricht diese Wahrscheinlichkeit der k-ten Komponente von q_2. Wir berechnen den Zustandsvektor durch die Formel $q_2 = q_0 \cdot P^2$. Lösung Variante $k = 0$:

$$\begin{aligned} q_2 &= (1/2, 1/2, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot P_0 \\ &= (0, 0, 3/4, 1/4) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (3/16, 5/16, 5/16, 3/16). \end{aligned}$$

Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch $(q_2)_0 = 3/16$.
Die Ergebnisse der Varianten:

- $k = 1$: $q_2 = (3/16, 3/16, 5/16, 5/16)$
- $k = 2$: $q_2 = (5/16, 3/16, 3/16, 5/16)$
- $k = 3$: $q_2 = (5/16, 5/16, 3/16, 3/16)$

Es gilt $(q_2)_k = 3/16$ für alle Varianten.

c) Leiten Sie eine stationäre Verteilung der Markov-Kette her.

0
1
2

Eine stationäre Verteilung π der Kette kann mit Hilfe des Gleichungssystems $\pi \cdot P_k = \pi$ bestimmt werden. Dieses lässt sich folgendermaßen aufschreiben (Variante $k = 0$):

$$
\begin{aligned}
&\text{(I)} & \tfrac{1}{4} \cdot \pi_2 &= \pi_0 \\
&\text{(II)} & \tfrac{1}{4} \cdot \pi_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \pi_3 &= \pi_1 \\
&\text{(III)} & \pi_0 + \tfrac{1}{2} \cdot \pi_1 + \tfrac{1}{4} \cdot \pi_2 + \tfrac{1}{2} \cdot \pi_3 &= \pi_2 \\
&\text{(IV)} & \tfrac{1}{2} \cdot \pi_1 + \tfrac{1}{4} \cdot \pi_2 &= \pi_3.
\end{aligned}
$$

Aus (I) folgt direkt, dass $\pi_2 = 4\pi_0$ gilt. Dies setzen wir in (II) ein und erhalten $\pi_1 = \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_3$. Als Nächstes setzen wir beide Ergebnisse in (IV) ein:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{4}\pi_3 + \pi_0 &= \pi_3 \\
\implies \frac{3}{2}\pi_0 &= \frac{3}{4}\pi_3 \\
\implies 2\pi_0 &= \pi_3,
\end{aligned}
$$

und damit auch $\pi_1 = 2\pi_0$ nach Gleichung (II). Zur Überprüfung setzen wir diese Ergebnisse in (III) ein und erhalten korrekterweise $4\pi_0 = \pi_2$.
Bisher haben wir also berechnet, dass $\pi = (\pi_0, 2\pi_0, 4\pi_0, 2\pi_0)$. Abschließend benutzen wir noch die notwendige Eigenschaft einer stationären Verteilung, dass die Einzelwahrscheinlichkeiten sich zu 1 summieren müssen:

$$\pi_0 + 2\pi_0 + 4\pi_0 + 2\pi_0 = 9\pi_0 = 1 \implies \pi_0 = \frac{1}{9}$$

Damit ergibt sich für die stationäre Verteilung: $\pi = (1/9, 2/9, 4/9, 2/9)$.
Varientenlösungen:

- $k = 1$: $\pi = (2/9, 1/9, 2/9, 4/9)$
- $k = 2$: $\pi = (4/9, 2/9, 1/9, 2/9)$
- $k = 3$: $\pi = (2/9, 4/9, 2/9, 1/9)$

d) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit h_j für alle Zustände $j \in \{0, 1, 2, 3\}$.

0
1

Da die Markov-Kette wie in der ersten Teilaufgabe gezeigt irreduzibel ist, können wir Satz 136 aus den Vorlesungsunterlagen anwenden. Wir erhalten, dass die stationäre Verteilung aus Teilaufgabe 3 eindeutig ist, und dass gilt $\pi_j = 1/h_j$ für alle $j \in \{0, 1, 2, 3\}$. Damit können wir direkt die erwarteten Rückkehrzeiten bestimmen: $h_0 = 9, h_1 = 9/2, h_2 = 9/4, h_3 = 9/2$.
Varianten:

- $k = 1$: $h_0 = 9/2, h_1 = 9, h_2 = 9/2, h_3 = 9/4$
- $k = 2$: $h_0 = 9/4, h_1 = 9/2, h_2 = 9, h_3 = 9/2$
- $k = 3$: $h_0 = 9/2, h_1 = 9/4, h_2 = 9/2, h_3 = 9$

1 Gewinnspiel $\sum = 6.5$

(a) 3 Punkte:

- 0.5: Satz der totalen Wahrscheinlichkeit (Implizit durch Anwendung reicht aus)
- 0.5: Wahrscheinlichkeit der Ereignisse A_i
- 1.5: Für die bedingten Wahrscheinlichkeiten das Los zu ziehen
  - Jeweils 0.5 Punkte pro $\Pr[G \mid A_i]$
- 0.5: Begründung, wie man auf $\Pr[G \mid A_i]$ gekommen ist (Baum oder Rechnung)
- -0.5: Falls nicht ordentlich zusammengefasst wurde
- Lösung über Erwartungswert wird nicht akzeptiert.

(b) 1.5 Punkte:

- 1.0: $\Pr[A_2 \mid G]$
  - 0.5: Umformung wie im Satz von Bayes (muss nicht erwähnt werden). Nur für Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit ohne Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Schnitts im Zähler: 0. Falls ersichtlich, dass Wert für Schnitt aus Teilaufgabe a kommt: 0.5
  - 0.5: Richtiges Ergebnis
- 0.5: Unabhängigkeit argumentieren (auf richtigen Schluss achten im Bezug auf Folgefehler)

(c) 2 Punkte:

- Standardlösung wie in der Musterlösung:
  - 1.0: Aufstellen von $\Pr[G] \geq 3/(m+2)$ mit neuen Wahrscheinlichkeiten für A_i
  - 1.0: Umformen (0.5) und richtiges Ergebnis (0.5)
- Alternativlösung durch Raten:
  - 1.0: Richtigen Wert raten und zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit für diesen Wert exakt $3/(m+2)$ ist
  - 1.0: Argumentation, warum dies die Mindestanzahl darstellt, d.h. Monotonie erwähnen, oder alle kleineren Werte probieren (0.5 wenn nur einzelner kleinerer Wert ausprobiert wurde).
- Ansatz über Erwartungswert: maximal 1.0 für Umformen und Ergebnis (sofern Rechnung vergleichbar schwer)

2 Forschungsreise $\sum = 5.5$

(a) 1 Punkt:

- 0.5: Ansatz $\Pr[X \geq 2]$ und Gegenereignis
- 0.5: Wahrscheinlichkeit aus Dichte richtig ablesen und korrekte Ergebnis
- Sonderfälle
  - Trivialisierung $\Pr[X \geq 1] = 1 - \Pr[X = 0] = 1$: 0P
  - $\Pr[X = \dots]$ oder $\Pr[X \leq \dots]$: 0P
  - $\Pr[X > 2]$ und Gegenereignis und Ergebnis: 0.5P
  - Direkt $1 - \Pr[X = 1]$ (ohne $\Pr[X \geq 2]$): 1P
  - $1/0$: -0.5P
  - $\sum_{n=2}^{\infty} f_X(n)$: 0P (falls zuende gerechnet: 1P)

(b) 1.5 Punkte:

- 0.5: Ansatz und Dichte einsetzen
- 0.5: Bedingung überprüfen, ob der Hinweis angewendet werden darf
  - $s \in [0, 1]$ ist ausreichend
- 0.5: Anwendung des Hinweises und Berechnung der Reihe
- Sonderfälle
  - $\sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \frac{1}{\ln(\cdot)} \cdot (\cdot)^k \cdot \frac{1}{k}$ (Summe beginnt bei $k = 0$): max 1P
  - $\sum_{k=1}^{\infty} s^k \cdot \frac{1}{\ln(\cdot)} \cdot (\cdot)^k \cdot \frac{1}{k} = -\frac{\ln(1-ps)}{\ln(1/(1-p))}$, also keine Zwischenschritte: 0.5P
  - Ausreichende Zwischenschritte: $(sp)^k$ oder $\frac{\ln(1/(1-ps))}{\ln(1/(1-p))}$

(c) 3 Punkte:

- Standardlösung wie in Musterlösung:
  - 0.5: Ansatz $G_Z(s) = G_Y(G_X(s))$ (Satz 77 oder $Z = \sum_{i=1}^{Y} X_i$ muss nicht erwähnt werden)
  - 0.5: Werte in $G_Y(G_X(s))$ eingesetzt
  - 0.5: Unabhängigkeit der X_i und Y erwähnen (Bedingung von Satz 77)
  - 0.5: Umformen
  - 0.5: Ableiten
  - 0.5: Berechnung $G'_Z(1)$
- Alternativlösung durch Ausnutzen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$
  - 1.0: Begründen, warum $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ allgemein gilt
    - $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X \cdot Y]$: 0P
    - $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Y} X_i] \overset{X_i \text{ id. zu } X \text{ vert.}}{=} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{Y} X] = \mathbb{E}[Y \cdot X] \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[X]$: 1P (+ 0.5P für Unabhängigkeit)
    - $\mathbb{E}[Z] = G'_Z(1) = G'_X(1) \cdot G'_Y(G_X(1)) = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, da $G_X(1) = 1$: 1P
    - $\sum_{i=1}^{\ln(p)} \mathbb{E}[X]$: 0P
    - Alternativ-Ansatz: $\mathbb{E}[Z] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i \mid Y = n] \cdot \Pr[Y = n]$: volle Punkte möglich
  - 0.5: Unabhängigkeit der X_i und Y erwähnen
  - 1.0: $\mathbb{E}[X]$ berechnen
  - 0.5: $\mathbb{E}[Z]$ korrekt bestimmen

3 Quadratisches Beet $\sum = 6$

(a) 2 Punkte:

- 0.5: Ansatz bis $F_S(s) = F_X(s^2)$
- 0.5: $F_S(s) = 1 - e^{-\lambda s^2}$ (optional, Verteilung muss nicht explizit angegeben werden)
- 0.5: Ableiten und Angabe der Dichte für den Fall $s \geq 0$
- 0.5: Erkennen, dass die Dichte immer 0 ist, falls $s < 0$ (0 sonst oder ähnliches)
  - Explizite Angabe von $s \geq 0$ reicht aus
  - 0 Punkte für
    - Exponential-Verteilung
    - Dichte von X
    - „für $s^2 \geq 0$"
- Sonderfälle
  - Rayleigh-Verteilung $\rightarrow$ kein VL-Stoff $\rightarrow$ 0P

(b) 3 Punkte:

- 0.5: Faltungsformel + Unabhängigkeit von X und Y für Satz 105 (Faltungsformel alleine reicht nicht aus)

- 1.5: Berechnung der Dichte im Fall $z \geq 0$ durch Faltung (-0.5 Punkte pro Fehler)
  - Rechenschritte $f_Z(z)$
    $= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx \quad \to$ 0P
    $= \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} f_Y(z-x)dx \quad \to$ 0P
    $= \int_0^{z} \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}dx \quad \to$ 0.5P
    $= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z 1dx \quad \to$ 1.0P
    $= \lambda^2 z e^{-\lambda z} \quad \to$ 1.5P
  - Sonderfälle
    * Erlangen-Verteilung $\to$ kein VL-Stoff $\to$ 0P
    * $\int_0^{\infty} 1dx = \infty \quad \to$ max 1P
    * $\int_0^{\infty} 1dx = 1 \quad \to$ max 0.5P
    * kleiner Rechenfehler (z.B. $1/6 \cdot 1/6 = 1/32$): kein Punktabzug
- 0.5: Erkennen, dass die Dichte immer 0 ist falls $z < 0$ (0 sonst oder ähnliches)
- 0.5: Erwartungswert $\mathbb{E}[Z]$
  - $\mathbb{E}[Z]$ berechnet, falls Z exponentialverteilt $\to$ 0P (wegen Trivialisierung)
  - $\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = \lambda + \lambda$ oder $\frac{1}{\lambda+\lambda} \quad \to$ 0P
  - kleiner Rechenfehler: kein Punktabzug

(c) 1 Punkt:

- 0.5: Satz 102: Parameter und Exponentialverteilung
- 0.5: Erwartungswert berechnen
- Sonderfälle
  - $\min\{X, Y\}$ berechnet: max 0.5P
  - $\mathbb{E}[K] = \lambda_K$ (statt $1/\lambda_K$): max 0.5P
  - kleiner Rechenfehler (z.B. $24/6 = 3$): kein Punktabzug

4 Weltraummission $\sum = 7$

(a) 3 Punkte:

- 0.5: Parameter $p = 1/2$ erkennen
- 0.5: Angeben, dass A Binomialverteilt ist mit dem richtigen Parameter n
- 1.5: Korrekte Begründung, warum die Binomialverteilung vorliegt (Argumentation nach Vorlesung oder über die Eigenschaften der geometrischen Verteilung)
  - Zeitlicher Abstand zwischen Treffern geometrisch verteilt, also Anzahl Treffer in fester Zeitspanne binomialverteilt: 1.5
  - $X(t) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid \sum_{i=1}^{n} T_i \leq t\}$ mit $A = X(120) \Rightarrow A \sim \text{Bin}(120, \frac{1}{2})$: 1.5
  - Aktuelle Flasche wird *unabhängig* vom Tag mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ verbraucht, also $A \sim \text{Bin}(120, \frac{1}{2})$: 1.5
  - Äquivalente Begründung in Notation: Indikatorvariablen sauber eingeführt, Bernulliverteilung genannt, Unabhängigkeit genannt: 1.5
  - 0.5 Abzug, wenn in letzten beiden Argumentationen Unabhängigkeit nicht genannt wird.
- 0.5: Nachrechnen, dass sich $\mathbb{E}[A]$ und $\text{Var}[A]$ tatsächlich wie angegeben ergeben (nur wenn $A \sim \text{Bin}$ genannt ist)

(b) 1.5 Punkte:

- 0.5: Ansatz, dass $\Pr[|A - \mathbb{E}[A]| \geq \text{Var}[A]/2]$ gesucht ist
- 0.5: Richtige Anwendung der Chebyshev-Ungleichung
- 0.5: Vollständig vereinfachtes (und gekürztes) Ergebnis

(c) 2.5 Punkte:

- 0.5: Ansatz über Gegenereignis
- 1.0: Richtige Anwendung des zentralen Grenzwertsatzes. 0.5 wenn nur Z richtig definiert ist und standardnormalverteilt, aber Φ nicht (sinnvoll) genutzt wird.
- 0.5: Identität $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ benutzen. 0 falls z.B. durch Vorzeichenfehler trivialisiert wurde.
- 0.5: Ablesen aus Tabelle. 0 falls gar nicht ersichtlich ist, woher der in Φ eingesetzte Wert kommt.
- $\Pr[\sum_{i=1}^n S_i \geq 7]$ als Ansatz akzeptiert. Trotzdem 0.5 Abzug, falls falsche Umformumg wie $\Pr[\sum_{i=1}^n S_i \geq 7] = 1 - \Pr[\sum_{i=1}^n S_i \leq 7]$.

5 Dreiecksverteilung $\sum = 7$

(a) 3 Punkte:

- 0.5: Dichte überall nicht-negativ
  - Es ist ausreichend diese Bedingung zu erwähnen, sie muss nicht gezeigt werden
  - $f_c(x) : \mathbb{R} \to [0, 1]$ reicht alleine nicht aus. Falls in der Argumentation davon aber $f_c(x) \geq 0$ für alle x gezeigt wurde, wurde das geradeso noch akzeptiert
- 0.5: Ansatz $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\mathrm{d}x = 1$
  - $\int_0^k f_c(x)\mathrm{d}x = 1$ wurde auch akzeptiert
  - „$= 1$“ muss nur irgendwo stehen
  - Falls direkt *richtig* aufgeteilt (und eingesetzt) wurde, und irgendwo „$= 1$“ steht, ist das auch für hier ok
- 2.0: Berechnung des Integrals
  - 0.5: Integral korrekt aufteilen *und* korrekt einsetzen
    * Insbesondere $\int_{-\infty}^{\infty} f_c(x)\mathrm{d}x = \int_0^c f_c(x)\mathrm{d}x + \int_c^k f_c(x)\mathrm{d}x$ reicht nicht!
    * Falls die einzelnen Teile des Integrals getrennt „berechnet“ wurden, müssen die Ergebnisse addiert werden für diesen halben Punkt
  - 0.5: Stammfunktionen ausrechnen (beide müssen richtig sein)
  - 1.0: Korrekt fertig rechnen und zeigen, dass 1 rauskommt (pro Rechenfehler -0.5P)
    * Zielführende Umformungen bis (ausschließlich) zum „Trick“ geben maximal 0.5P
    * Ein einziger Folgefehler, sodass das Ergebnis $\neq 1$ ist, aber komplett vereinfacht angegeben wurde, gibt nur -0.5P

(b) 2 Punkte:

- 1.0: Konstruktion des Schätzers U
  - 0 Punkte, falls X anstelle von $\bar{X}$ oder X_1 verwendet wurde (und X nicht neu definiert wurde, oder offensichtlich X das Stichprobenmittel bezeichnen soll („Strich vergessen“))
  - 0 Punkte, falls c in der Definition des Schätzers verwendet wird
  - dumme (korrekt definierte) Schätzer wie $U = 3X_1 - k$ sind erlaubt
- 1.0: Nachweis, dass der konstruierte Schätzer erwartungstreu ist
  - $U = \frac{3c}{c+k}\bar{X}$ bzw. $U = \frac{3c}{c+k}X$ wurde als Folgefehler gewertet und korrektes Nachrechnen $\mathbb{E}[U] = c$ gibt 1P
  - $U = \bar{X}$ mit Rechnung $\mathbb{E}[U] = \frac{1}{3}(k + c)$ gibt 0P
- Falls $\mathbb{E}[U] = c$ als Ansatz verwendet wurde und bis $U = \ldots$ umgeformt wurde
  - 2P falls ohne Fehler
  - 1.5P falls ungenau argumentiert
  - 1P falls Fehler in der Umformung

(c) 2 Punkte:

- 0.5: $\mathrm{MSE} = \mathrm{Var}[U]$, da U erwartungstreu ist („erwartungstreu“ oder $\mathbb{E}[U] = c$ *muss* erwähnt werden)
  - $(\mathrm{MSE} =)\mathbb{E}[(U - c)^2] = \mathrm{Var}[U]$ ohne explizites „erwartungstreu“ ok

- 1.0: Umformung von $\mathrm{Var}[U]$ zu $\ldots \mathrm{Var}[X]$
  - $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \mathrm{Var}[X]/n$ darf ohne Begründung verwendet werden
  - Falls $U = 3X - k$ oder $U = \bar{X}$ definiert, gibt es auf die Umformungen maximal 0.5P
  - Falls $U = \frac{3c}{c+k}\bar{X}$ bzw. $U = \frac{3c}{c+k}X$ definiert, kann volle Punktzahl erreicht werden
- 0.5: „Folgerung", dass aus $\mathrm{Var}[X]$ endlich $\mathrm{MSE} \to 0$ für $n \to \infty$ folgt
  - $\mathrm{Var}[X]$ „endlich" oder „konstant" muss explizit erwähnt werden
  - Falls U nicht konsistent ist, muss eine Antwort kommen
- Sonderfall zu den letzten beiden Punkten:
  - $\mathrm{Var}[U] = \ldots = 9\mathrm{Var}[\bar{X}] \to 0$ für $n \to \infty$ gibt keinen Abzug, falls $\mathrm{Var}[X]$ „endlich" oder „konstant" erwähnt wurde, sonst insgesamt einen Punkt Abzug (-0.5P auf nicht vollständige Umformung und -0.5P auf endlich vergessen)

6 Markov-Kette $\sum = 8$

(a) 2.5 Punkte:

- 2.0: Zeichnung (-0.5 pro falschen Wert oder Pfeil)
  - Übergangsdiagramm von P^T: max 1P
  - Zustandsmenge nicht $S = \{0, 1, 2, 3\}$: -0.5P
  - Graph komplett ohne Gewichte: 0P
  - Verschobene Kanten werden als nur eine falsche Kante gezählt
- 0.5: Begründung irreduzibel
  - Falls der gezeichnete Graph nicht irreduzibel ist, gibt es immer 0P, egal ob es erkannt wurde oder nicht
  - Begründung mit nur „zusammenhängend" reicht nicht
  - Schlechte Übersetzungen wie „fest zusammenhängend", „fest verbunden" usw. wurden akzeptiert

(b) 2 Punkte:

- Ansatz $(q_0 \cdot P) \cdot P$
  - 0.5: Ansatz $q_2 = q_o \cdot P^2$ bzw. verdeutlichen, was man rechnet (q_0, q_1, q_2 wurde akzeptiert)
  - 1.0: Rechnung
    - 0.5P pro Vektor-Matrix-Produkt
    - Rechenfehler, die keine Auswirkung auf das Ergebnis haben, wurden nicht bestraft
  - 0.5: Richtige Angabe $(q_2)_k$
- Ansatz $q_0 \cdot P^2$
  - 0.5: Ansatz $q_2 = q_o \cdot P^2$ bzw. verdeutlichen, was man rechnet
  - 1.0: Rechnung
    - 0.5 auf die „Berechnung" von P^2
      - $P^2 =$ Ergebnis zählt nicht
      - $P^2 = P \cdot P =$ Ergebnis oder $P^2 = (\cdot) \cdot (\cdot) =$ Ergebnis zählt
    - 0.5 auf das korrekte Vektor-Matrix-Produkt $q_0 \cdot P^2$
    - Rechenfehler, die keine Auswirkung auf das Ergebnis haben, wurden nicht bestraft
  - 0.5: Richtige Angabe $(q_2)_k$
- Ansatz über die Wege im Graphen
  - 0.5: Identifizierung der korrekten Wege
  - 0.5: „Erklärung"/„Erwähnung" der betrachteten Wege (minimal reicht aus)
  - 1.0: Rechnung (Falsche Wege, aber Rechnung richtig, ist Folgefehler. Ausnahme: Trivialisierung)
    - 0.5 Wahrscheinlichkeiten der Wegkanten mit Startwahrscheinlichkeit multipliziert
    - 0.5 Addieren der Wahrscheinlichkeiten

(c) 2.5 Punkte:

- Ansatz mit Gleichungssystem
  - 1.0: Ansatz mit 4 korrekten Gleichung aus $\pi = \pi \cdot P$
    - Nur $\pi = \pi \cdot P$ gibt 0.5P
    - Korrekte Schreibweise nach Gauß wurde auch akzeptiert
    - Ansatz $\pi = P \cdot \pi$ gibt hier 0P, spätere Punkte möglich
  - 0.5: Extragleichung (Summe $= 1$) muss immer (irgendwie) dastehen
  - 1.0: Lösen des Gleichungssystems: -0.5P pro Rechenfehler
    - Summe fehlt explizit, wurde aber verwendet und Ergebnis ist eine Verteilung: nur oben Abzug
    - Ergebnis fehlt oder Ergebnis ist keine Verteilung: -0.5P
    - „Symmetrie" von 2 Zuständen ausnutzen: -0.5P
    - Lösung direkt „raten" gibt 0P
- Alternative Ansätze
  - Fundamentalsatz $\lim_{n\to\infty} q_0 \cdot P^n = \pi$
    - Nur $\lim_{n\to\infty} q_0 \cdot P^n = \pi$ oder Ähnliches gibt 0.5P
    - „Fundamentalsatz", „ergodisch" oder Ähnliches gibt 0.5P zusätzlich
    - Korrekte Begründung, dass die Markovkette aperiodisch ist gibt noch einmal 0.5P zusätzlich
    - Weiter wurde nie gerechnet, gibt aber in der Theorie den letzten Punkt
  - Satz 136 $\pi = (1/h_1, 1/h_2, 1/h_3, 1/h_4)$
    - Gibt alleine 1P, falls „irreduzibel" genannt wurde
    - Falls ein h_j richtig berechnet wurde, gibt es zusätzlich $0.5P$
    - In der Theorie gibt es für alle 4 korrekten h_j die volle Punktzahl
- Falls Zeichnung in a) einen absorbierenden Zustand enthält
  - Unformale Begründung, warum die stationäre Verteilung zu diesem Zustand konvergiert: 1P
  - Formale Begründung, warum die stationäre Verteilung zu diesem Zustand konvergiert: 1.5-2.0P
  - „Absorbierend" alleine reicht nur für 0.5P

(d) 1 Punkt:

- Ansatz über Satz 136
  - 0.5: Anwendung von Satz 136 („irreduzibel" muss erwähnt werden)
    - „ergodisch" wurde auch akzeptiert (ohne Beweis von Aperiodizität)
  - 0.5: Ergebnis
- Explizites Ausrechnen
  - Falls mindestens ein h_j richtig ist: 0.5P
  - Falls alle vier h_j richtig sind: 1P
  - Insbesondere: Bei Markovketten mit absorbierendem Zustand j gibt $h_j = 1$ bereits 0.5P