

# ZAMAN SER LER NDE AYRI TIRMA YÖNTEMLER

# A. G R

- Gözlemlerin belirli bir dönem için gün, hafta, ay, üç ay, altı ay, yıl gibi birbirini izleyen e it aralıklarla yapılması ile elde edilen seriler zaman serileri olarak adlandırılmaktadır ve incelenen zaman serisi  $z_t$  ile simgelenmektedir.

- Daha önce de belirtildi i gibi bir zaman serisi trend ( $T_t$ ), mevsimsel dalgalanma ( $M_t$ ), döngüsel hareket ( $C_t$ ) ve düzensiz rastgele hareketlere sahip bile enlerinden ( $\varepsilon_t$ ) olu maktadır. Bu bölümde, bu bile enlere sahip zaman serilerinin modellenmesi ve öngörülerin elde edilmesi üzerinde durulacaktır. Ancak döngüsel hareketler de mevsimsel dalgalanma bile eni içinde ifade edilecektir.

- Zaman serisini bileşenlerin tahmininden zaman serisinin öngörüsünü hesaplayan yöntem *ayrıştırma yöntemi* denmektedir. Matematiksel olarak;

$$z_t = f(T_t, M_t, C_t, \varepsilon_t)$$

olup bu serinin tahmini;

$$\hat{z}_t = f(\hat{T}_t, \hat{M}_t, \hat{C}_t)$$

olmaktadır.

- Zaman serilerinin seyri ve bu seriler ile yapılacak tahminler, serinin gelece e ili kin davranı biçiminin belirlenmesinde yarar sa layacaktır. Bu ba lamda özellikle ekonomi ve i dünyasındaki belirsizlikler nedeni ile serinin gelece e ili kin davranı biçimini belirlemek son derece önem kazanmı tır. Böyle bir durumda zaman serisinin özelliklerini ortaya koymak için kullanılan yöntemlerden ba lıca serinin bile enlerine *ayrı tırılma*sıdır ve *ayrı tırma* zaman serileri için en eski yöntemlerden olup 20. yy.ın ba ından itibaren çe itli alanlarda kullanılmaya ba lamı tır.

- Yöntemin ilk olarak trendden arındırma ve konjonktür hareketlerinin analizinde olmak üzere iki farklı yönde kullanıldı ı görülmektedir. 1880'li yıllarda verilerden trend etkisini arındırmak amacı ile kullanılan yöntemin asıl amacı, trend nedeni ile ortaya çıkan «sahte korelasyonu» ortadan kaldırmaktı ve seriyi trendden arındırmak amacı ile birkaç yılın ortalaması alınıyordu. Ardından seriden trend etkisini kesin olarak arındırma yöntemi geli tirilmi ve 1914'de Anderson daha üst mertebelerde polinomları da içeren trendi ortadan kaldırma yöntemini genelle tirmi tir.

- Daha sonraları iktisatçıların ya anan depresyonların etkilerini görmek ve bundan sonraki olası krizleri öngörmek istemeleri üzerine anılan yöntemin yaygınla tı ı görülmektedir. Yöntem, ekonomik faaliyetlerin etkileri ayrı tırılarak konjonktür dalgalanmalarındaki de i melerin analizine olanak sa lamı tır. 1911'de Fransa'da kurulan bir komite, 1907 ekonomik krizinin nedenleri ve sonuçları ile ilgili bir rapor hazırlamı ve bu amaçla da trend ile konjonktür etkisi arasında bir ayırım yapmaya çalı mı lardır. Yöntem daha sonraları ABD'de uygulanarak mevsimsel dalgalanmaların di er bile enlerinden ayrı tırılması üzerinde durulmu tur.

- Ayrı tırma yöntemi, kısa dönemli öngörülerde anlaşılması ve yapılması en kolay olan yöntemdir. Ayrıca bu yöntem, bir serinin mevsimselliğini ortaya çıkartabilmek ya da istenildiği takdirde bu mevsimsel hareketi seriden arındırabilmek amaçlı da kullanabilen bir yöntemdir. Bu yöntemin eleştirilen yönü teorisinin kuvvetli olmayışı ve dolayısıyla sezgilere dayanıyor olmasıdır. Ancak yöntemin bu özelliği uygulamalarda iyi sonuçların alınamayacağı anlamına gelmemektedir.



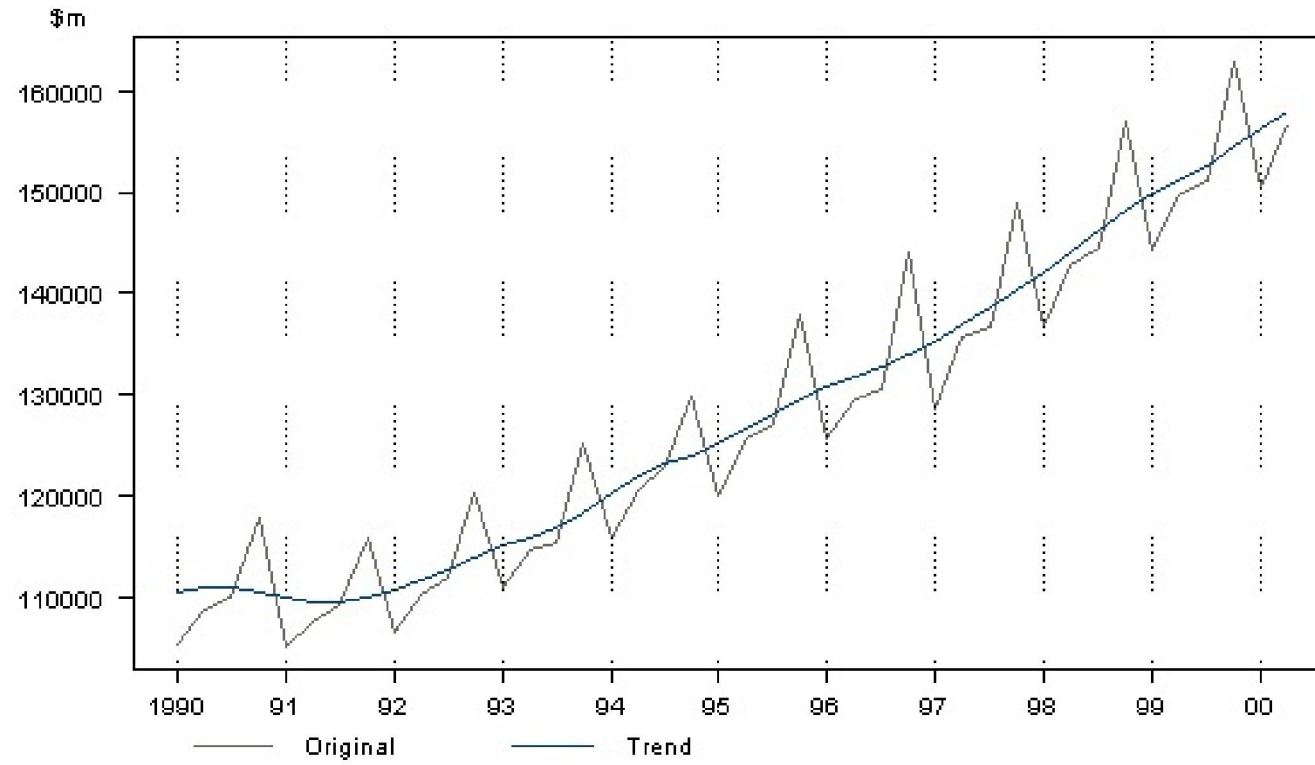
- Zaman serisi modelleri genel olarak iki sınıfa ayrılabilir: Toplamsal modeller ve çarpımsal modeller.
- Toplamsal model, zaman serisinin bile enlerin toplamından oluştuğunu kabul eder. Bu durumda;

$$Z_t = T_t + M_t + C_t + \varepsilon_t$$

olmaktadır. Burada  $T_t$  serinin trendini,  $M_t$  mevsimsel dalgalanmayı,  $C_t$  döngüsel hareketi ve  $\varepsilon_t$  hata bile enini göstermektedir.

- Bu bileenlerden hangisi seride yok ise bu bileenin etkisi 0 olarak kabul edilir. Toplamsal modellerde mevsimsel dalgalanmalar trendden bağımsız oldu undan dalgalanma büyüklüğü zaman içinde değişmemekte, yani sabit kalmaktadır. Toplamsal modele uygun serinin grafiği ekil 2.1’de verilmiştir.

ekil 2.1. Toplamsal Modele Uygun Serinin Grafi i

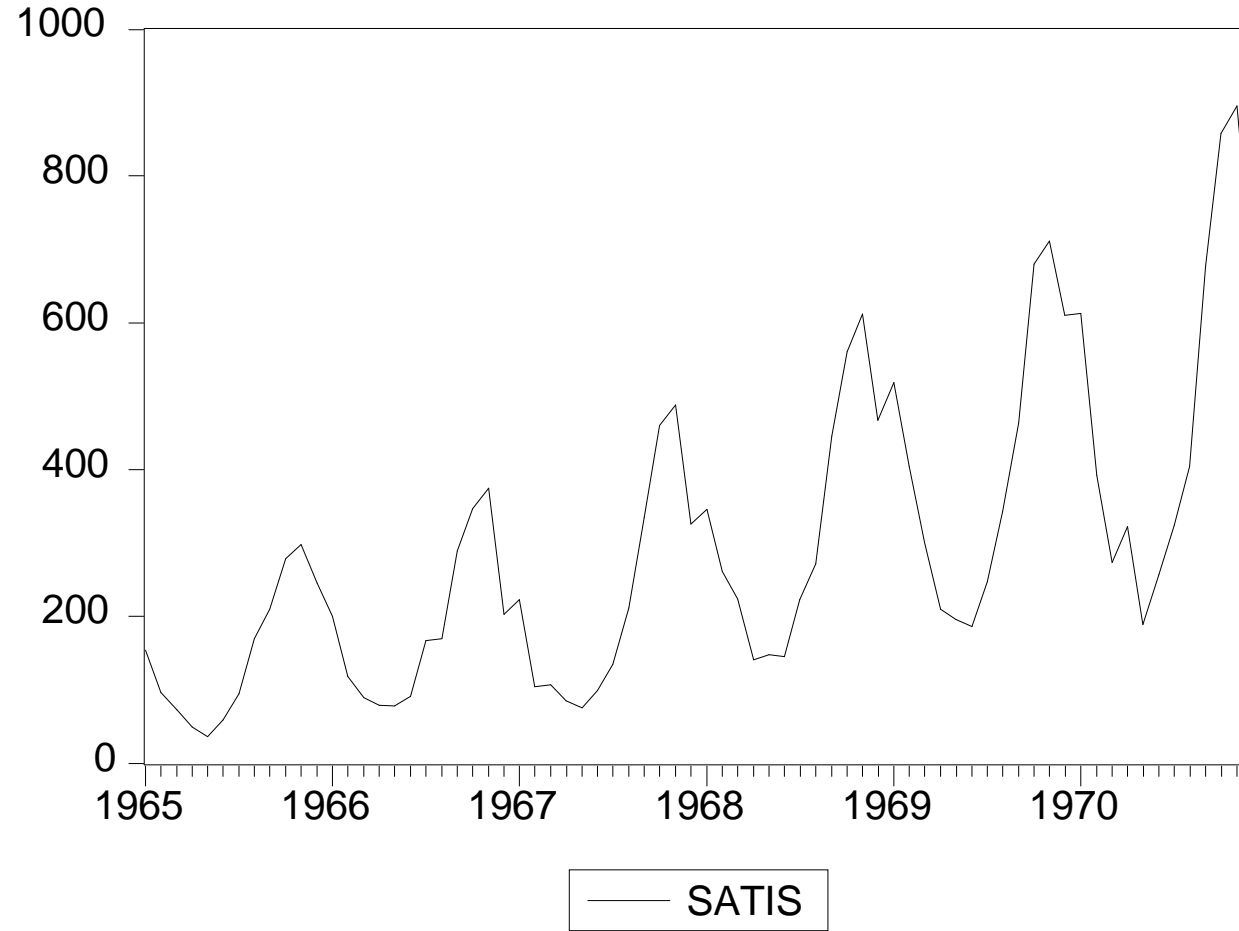


- Çarpımsal modeller zaman serisinin, bile enlerinin çarpılmasından oluştuğunu kabul eder. Bu durumda;

$$z_t = T_t \times M_t \times C_t \times \varepsilon_t$$

olmaktadır. Bu bile enlerden hangisi seride yok ise bu bile enin etkisi 1 olarak kabul edilir. Eklil 2.2.'de görüldüğü gibi çarpımsal modele en uygun bir serinin dalgalanmasının büyüklüğü zaman içinde artar ya da azalır. Çarpımsal modele uygun bir serinin logaritması alındığında toplamsal modele uygun bir serinin grafiği elde edilebilir.

ekil 2.2. arpımsal Modele Uygun Serinin Grafi i



- Ancak serinin hareketine bakarak seriye toplamsal ya da çarpımsal modelin daha iyi uyum sağlayacağını söylemek yanlışdır. Eğer iki modelde istatistiksel varsayımları sağlıyorsa, bu modellerden seriye uyumu daha iyi olanı bulabilmek için HKO değerlerini hesaplamak gerekmektedir. Bunun sonucunda küçük HKO değerine sahip modelin seriye daha iyi uyum sağladığı söylenmelidir.

- Mevsimsel, aylık, günlük gibi verilere sahip seriler genellikle mevsimsel dalgalanmalara sahip olurlar. Bu serinin bazıları trende sahip iken bazılarında trend bulunmayabilir. Aynı mantık döngüsel hareket için de geçerlidir. Eğer bir seri trende sahip ise bu trendin doğrusal ya da eğrisel olup olmadığını incelenmelidir. Bu inceleme yapıldıktan sonra serinin trend bileşeninin modeli kurulmalıdır. Ayrıca tırma yöntemini incelerken serinin doğrusal trende sahip olduğunu varsayılacaktır.

- Seri mevsimsel dalgalanmaya ya da döngüsel harekete sahip ise, mutlaka serinin periyodu do ru bir ekilde bulunmalıdır. Genellikle serilerde ya mevsimsel dalgalanma ya da döngüsel hareket olabilece inden, yani her ikisinin birden olamayaca ı dü ünüldü ünden modellerde döngüsel hareket,  $C_t$  genellikle yazılmaz. Bir ba ka deyi le, modeldeki  $M_t$  bile eni ile hem mevsimsel dalgalanma hem de döngüsel hareket ifade edilir.



- Döngüsel hareketlerin belirlenebilmesi için serideki gözlem sayısının çok fazla olması gerekir. Çünkü periyodun sağlıklı tespit edilebilmesi için periyodun en az dört katı kadar gözlem sayısına ihtiyaç vardır.

## B.TOPLAMSAL AYRI TIRMA YÖNTEM

- Toplamsal ayrı tırma yöntemi trende, mevsimselliğe ve hata bileşenine sahip serilerin modellenmesi için uygun bir yöntemdir. Dolayısıyla, bu yöntemdeki model;

$$Z_t = T_t + M_t + \varepsilon_t$$

biçiminde yazılabilmektedir. Burada hata teriminin rasgele bir harekete sahip olması gerektiğine dikkat edilmelidir.

# 1. Toplamsal Ayırma Yönteminin Adımları

- Toplamsal ayırma yöntemini uygulanabilmesi için sırasıyla u adımlar takip edilmelidir:
  1. Serinin merkezsel hareketli ortalama serisi bulunur. Burada germe sayısı için periyot tercih edilir.
  2. Orijinal seriden merkezsel hareketli ortalama serisi çıkartılarak serinin mevsimsel bileşeni bulunur. Buradaki mevsimsel bileşen içinde hata teriminin olduğu da unutulmamalıdır.

3. Mevsimsel bile endeki hata teriminin yok edilebilmesi için herbir periyottaki dönemlerin ortalama değerleri hesaplanır. Örneğin aylık bir seride tüm ayların ortalamaları, yani tüm yıllardaki «ocak», «ubat», «...» aylarına ait verilerin ortalaması alınır. Bu o ayın ortalaması olur. Böylece hesaplanan tam 12 tane ortalama değeri olur

4. Elde edilen periyottaki dönemlerin ortalama değerlerinin toplamı 0 olmalıdır. Eğer bu toplam 0 değilse, bu durumda ortalama değeri ortalaması alınır ve bu ortalama değeri diğer tüm ortalama değerlerinden çıkartılır. Böylece periyottaki dönemlerin son elde edilen ortalama değerleri dönemlere dikkat edilerek eksik veri kalmayacak şekilde yazılarak mevsimsel endeks serisi bulunur. Bu seri orijinal serinin saf mevsimsel bileşenidir. Mevsimsel endeks değerleri toplamı 0'dır.

5. Orijinal seriden mevsimsel endeks serisi çıkartılarak serinin trend bile eni bulunur. Ancak buradaki trend bile eninde hata terimi de mevcuttur.

6. Doğrusal trende sahip serilerde trend bile eninin içindeki hata teriminin yok edilebilmesi için trend bile eni serisi  $b_0 + b_1 t$  şeklinde  $t = 1, 2, \dots, T$  olmak üzere  $t$  bağımsız değişken olan regresyon uygulanır. Bu regresyon modelinden elde edilen tahmin serisi orijinal serinin saf trend bile eni olmaktadır.

7. Mevsimsel endeks serisi ile saf trend bile eni serisi olan regresyon modelinin tahmin serisi toplanarak orijinal serinin tahminleri elde edilir. E er mevsimsel endeks serisi ve saf trend bile eni serisi gelecek dönemlere kadar uzatılırsa bu serilerin gelecek dönemlerdeki verilerinin toplamı orijinal serinin öngörü de erlerini olu turacaktır.

## 2. Yöntemin Geçerliliği

- Model kurulduktan sonra modelin doğruluğunun incelenmesi amacıyla birkaç önemli nokta kontrol edilmelidir:
  1. Trend bile eni elde edilebilmesi için kurulan regresyon modelindeki katsayılar istatistiksel bakımdan önemli olmalıdır.
  2. Ayır tırma yönteminin hataları mutlaka beyaz gürültülü olmalıdır. Eğer bu seri beyaz gürültülü serisi de ilse hataların orijinal seri ile ilgili belli bir bilgi taşıdığı anlamına gelir. Bu da tahmin serisinin orijinal seriyi yeterince açıklayamadığı, önemli bir bilginin dışarıda kalmış olduğunu sonucunu doğurur.



3. Tahmin serisi ile orijinal serinin birlikte çizilen grafi i tam bir uyum içinde olmalıdır.
4. Theil'in U istatisti nin 0'a yakın bir de er, yani en fazla 0,55 de erini alması beklenir.
5. Orijinal serinin, tahmin serisinin alt ve üst sınırları içinde yer alması modele güveni artırır.

Not: Theil'in U istatistiği:  $\frac{\text{Kurulan modelin HKO karekökü}}{\text{Rastgele yürüyüş modelinin HKO karekökü}}$

$$\text{Theil'in U istatistiği: } \frac{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T e_t^2}}{\sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T Z_t^2 + \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \hat{Z}_t^2}}$$

Bu istatistik değeri eğer 0,55 değerinden daha küçük bir değer alırsa oluşturulan modelin seriye çok iyi uyum sağladığı söylenir.

### 3. Güven Aralıkları

- Ayrı tırma yönteminde tahmin serisi, serinin bile enlerinin toplanmasıyla ya da çarpılmasıyla elde edildi inden bu yöntemin temelinde bir istatistik teorisi yer almamaktadır. Bu nedenle güven aralıklarının hesabında temel istatistiksel bilgilerden çok mantıksal bir yöntem izlenmektedir. Bu yöntemle göre tahmin serisinin güven aralığının belirlenmesinde serinin trend bile eninin elde edilebilmesi için oluşturulan regresyon modelinin güven aralığı kullanılmaktadır.

- Serinin sadece trend bileşeninin tahmininin güven aralığı elde edildiğinden serinin tahmininin güven aralığının hesabında düzeltme terimine yer verilmelidir. Dolayısıyla serinin tahmininin güven aralığı;

$$\hat{z}_t \pm t_{\alpha/2} S_e \text{ düzeltme terimi}$$

biçiminde hesaplanmaktadır. Burada  $t_{\alpha/2}$  , t tablo değerini,  $S_e$  regresyon denkleminin HKO değerinin karekökü ve düzeltme terimi ise;

$$\text{düzeltme terimi} = \sqrt{1 + \frac{1}{T} + \frac{(t - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^T t^2 - \frac{(\sum_{t=1}^T t)^2}{T}}}$$

olmaktadır.

## C. ÇARPIMSAL AYRI TIRMA YÖNTEM

- Çarpımsal ayrı tırma yönteminin uygulandığı bazı noktalarda toplamsal ayrı tırma yönteminden farklılık gösterir. Bu farklılığın nedeni iki yöntemin modellerinin farklı olmasından kaynaklanmaktadır. Ancak temel mantığı bakımından bu iki yöntem arasında bir farklılık yoktur.

# 1. Çarpımsal Ayırma Yönteminin Adımları

Çarpımsal ayırma yöntemi aşağıdaki adımlar takip edilerek yapılmaktadır:

1. Serinin periyodu bulunarak germe sayısı  $s$  olan merkezsiz hareketli ortalama ile seriyeye uygulanır.

2. Orijinal seri merkezsiz hareketli ortalama serisine bölünür ve serinin mevsimsel bileşeni bulunmaya çalışılır. Ancak elde edilen  $u$  mevsimsel bileşen serisi hata terimini de içermektedir.

3. Bu mevsimsel bile enden hata terimini yok edebilmek amacıyla toplamsal ayrı tırma yönteminde oldu u gibi herbir periyottaki dönemlerin ortalama de erleri hesaplanır.

4. Hesaplanan dönem ortalamalarının ortalaması alınır ve herbir dönem ortalaması en son elde edilen genel ortalama de erine bölünür. Böylece dönem ortalamalarının ortalaması 1'e e it olur. Ortalamaları 1 de erine e it olan bu ortalama de erleri mevsimsel endeks serisinin olu turmakta ve bu seri orijinal serinin mevsimsel bile eni olmaktadır.



5. Orijinal seri mevsimsel endeks serisine bölünerek trend serisi elde edilir. Ancak bu trend serisi içinde hata terimi de mevcuttur.
6. Trend serisinden hata terimini yok edebilmek amacıyla do rusal trende sahip serilerde toplamsal ayrı tırma yönteminde oldu u gibi trend serisi ba ımlı, t ba ımsız de i ken olmak üzere regresyon yapılır. Bu regresyondan elde edilen tahmin serisi orijinal serinin trend bile enini olu turur.
7. Mevsimsel endeks serisi ile trend bile eni serisi birbirleriyle çarpılarak orijinal serinin tahmin serisi elde edilir.

## 2. Hata Teriminin Analizi

- Orijinal seri ile tahmin serisi arasındaki farktan oluşmuş hata serisinin incelenmesi ayrı tırma yönteminin seriye uygun olup olmadığını ortaya çıkarmaktadır. Toplamsal ayrı tırma yönteminde yöntemin geçerliliği anlatıldı. 1 gibi hata serisi mutlaka beyaz gürültülü olmalıdır ve diğer söz edilen özellikler de sağlanmalıdır. Ayrıca tahmin serisinin güven aralığı da toplamsal ayrı tırma yönteminde anlatıldı. 1 gibi bulunmalıdır.

## D. MEVS MSELL K TEST

- ACF grafi inde mevsimselli i tam olarak tespit edilemiyor ya da seride gerçekten mevsimsellik olup olmadı ı tam olarak belirlenmek isteniyorsa serinin mevsimsellik testi Kruskal-Wallis Testi ile yapılabilmektedir. E er seride mevsimsellik yok ise Kruskal-Wallis Testi sonucunda periyotlar arasında fark bulunmayacaktır. E er bu testten periyotlar arasında fark vardır sonucu elde edilirse, bu sonuç serinin mevsimsel dalgalanmaya sahip oldu u anlamına gelmektedir.

- Bu test için öncelikle verilere küçükten büyüğe doğru sıra sayıları verilmeli ve bu sıra sayıları karşılık gelen periyotlarda yerine yazılmalıdır. Sonra Kruskal-Wallis Testi değeri;

$$KW = \frac{12}{T(T+1)} \sum_{i=1}^s \frac{R_i^2}{t_i} - 3(T+1)$$

formülüyle hesaplanır. Burada;

T: Örneklem büyüklüğü

$R_i$ : i'inci periyottaki sıra sayılarının toplamı

$t_i$ : i'inci periyottaki dönem sayısı

s: periyot sayısı

olmaktadır.

- Bu testte yokluk ve alternatif hipotezi toplamsal ayrıştırma modelinde;
- $H_0 : \overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \dots = \overline{M}_s = 0$  (Mevsimsellik yoktur)
- $H_s : \overline{M}_i \neq 0 \quad ; i= 1, 2, \dots, s$  (Mevsimsellik vardır)

Çarpımsal ayrıştırma modelinde;

- $H_0 : \overline{M}_1 = \overline{M}_2 = \dots = \overline{M}_s = 1$  (Mevsimsellik yoktur)
- $H_s : \overline{M}_i \neq 1 \quad ; i= 1, 2, \dots, s$  (Mevsimsellik vardır)

biçimindedir. KW istatistik değeri *ki kare* tablo değerinden büyükse yokluk hipotezi reddedilir ve seride mevsimsel dalgalanma vardır denilir. Aksi takdirde, seride bir mevsimsel dalgalanmanın olmadığı sonucuna varılır.