İlişkisiz iki Örneklem İçin Parametrik Olmayan Testler

Nihat Tak

2023-04-14

Kolmogorov-Smirnov Testi

- Bağlantısız iki örneklemin aynı evrenden gelip gelmediğini inceleyen bir testtir.

- Birikimli iki dağılım arasındaki uyum iyiliğini inceler (goodness of fit). Eğer iki örneklem aynı evrenden alınmışsa birikimli dağılımlarının birbirlerine benzemesi beklenir.

- Dağılımlarının aynı olduğu varsayılan $F_1(x)$ ve $F_2(x)$ birikimli olasılık dağılımlarına sahip iki ana kitleden alınan n_1 ve n_2 büyüklüğündeki iki örneğin birikimli olasılık dağılımları $Sn_1(x)$ ve $Sn_2(x)$ in benzerliğini test eder.

Testin İlkeleri

- Ölçmenin en az sıralı ölçekte olması
- İki örnekleminde bağımsız olması
- İki örnekleminde rasgele olması
- Küçük örneklemler için (n_1 ve $n_2 \leq 40$) $n_1 = n_2$ olması (Küçük örneklemler K-S tablosu $n \leq 40$’a kadar düzenlenmiştir.)

Test Yöntemi

- Her iki örneklem dağılımında aynı aralıkları kullanmak suretiyle örneklemlerdeki gözlemlerin birikimli frekans dağılımı oluşturulur.
- Her bir aralık için birikimli frekans değerlerinin farkı alınır.
- Bu farkların en büyüğü ile test istatistiği hesaplanır.
- Örneklemlerin büyüklükleri ve birbirlerine eşit olup olmamalarına ayrıca H_1 in yapısına göre test istatistiği ve kullanılan tablolar değişir.

Hipotez testi adımları

1.Adım Hipotezler kurulur.

Çift taraflı hipotezler

$H_0:F_1(x) = F_2(x)$

$H_1:F_1(x) \neq F_2(x)$

Tek taraflı hipotezler

H_0 : $F_1(x) \leq F_2(x)$ veya H_0 : $F_1(x) \geq F_2(x)$

$H_1 : F_1(x) > F_2(x)$ veya H_1 : $F_1(x) < F_2(x)$

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

$Sn_1(x)$: Örneklemlerden birincisinin gözlenen birikimli olasılık dağılımı

$Sn_1(x) = K/n_1, K = x$'e eşit ve daha küçük değerlerin sayısı

$Sn_2(x)$: Diğer örneklemin gözlenen birikimli olasılık dağılımı

$Sn_2(x) = K/n_2, K = x$'e eşit ve daha küçük değerlerin sayısı

K-S çift örneklem testi birikimli olasılık değerleri arasındaki farkın en büyük olanı üzerinde durur.

Çift taraflı test için: $D = max|Sn_1(x) – Sn_2(x)|$

Tek taraflı test için: $D = max[Sn_1(x) – Sn_2(x)]$

$D = \frac{K_D}{n}\ (n_1 = n_2 = n \leq 40)$ ise

D değerlerinin sıfır hipotezi şartı altında (her iki örneklemin aynı dağılımdan geldiği) ortaya çıkış olasılıkları tablo olarak hazırlanmıştır.

3. Adım ve 4.Adım Kritik tablo değeri bulunur ve karar verilir.

- Hesaplanan D değerinin test edilmesi örneklem büyüklüklerine ve H_1 in yapısına bağlıdır. Üç farklı durum söz konusudur.

1. Küçük Örneklemler için; $n_1 = n_2 = n \leq 40$ KS tabosu kullanılır
2. Büyük Örneklemler Çift taraflı test için; $n \geq 40$, $n_1 = n_2$ gerekli değildir. Yine K.S tablosu kullanılır.
3. Büyük Örneklemler Tek taraflı test için; $n \geq 40$, $n_1 = n_2$ gerekli değildir. Fakat tek taraflı olduğundan K.S tablosu kullanamayız.

Karar Kuralı - Küçük Örneklemler

- Küçük ($n \leq 40$) ve eşit sayıda örneklemler için ($n_1 = n_2 = n \leq 40$ ise) Küçük örneklemler K-S tablosundan istenilen anlamlılık düzeyindeki KD değeri hesaplanan KD (D değerinin pay değeri) değeri ile karşılaştırılır.
- Hesaplanan $K_D \geq TabloK_D$ ise H_0 Reddedilir.

Karar Kuralı – Büyük Örneklemler(Çift taraflı test)

- Büyük (n≥ 40) örneklemler için n1=n2 olması gerekli değildir. Çift taraflı test için büyük örneklemler K-S tablosundan istenilen anlamlılık düzeyindeki D değeri tablodaki formülden hesaplanır ve test istatistiğinden hesaplanan D değeri ile karşılaştırılır.
- Hesaplanan $D \geq D_{Tablo}$ ise H_0 Reddedilir.

Karar Kuralı – Büyük ÖrneklemlerTek taraflı test

Büyük $(n \geq 40)$ örneklemler için $n_1 = n_2$ olması gerekli değildir. Büyük örneklem tek taraflı test için K-S tablosu kullanılmaz. Tek taraflı test için bulunan maxD değeri kullanılarak aşağıdaki ifade hesaplanır:

$$\chi^2_{hesap} = 4D^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}$$

Hesaplanan χ^2 değeri verilen anlamlılık seviyesi ve 2 serbestlik derecesi ile bakılan χ^2 tablo değeri ile karşılaştırılır.

Eğer $\chi^2_{hes} \geq \chi^2_{tablo}$ ise H_0 reddedilir.

Örnek 1. Bir sınıftan rasgele 10 kız ve 10 erkek öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilere istatistik testi uygulanmıştır. Test sonunda sorularda yapılan hatalar belirlenerek hata puanları dağılımı oluşturulmuştur. Aşağıda verilen hata puanı ve frekans değerleri tablosuna göre kız ve erkek öğrencilerin hata puanları dağılımlarında fark olup olmadığını test ediniz. (α=0,05)

Hata Puanı	21-24	25-28	29-32	33-36	37-40	41-44	45-48	49-52
f_k	0	0	0	0	3	2	3	2
f_e	1	1	3	2	3	0	0	0

1. Adım Hipotezler kurulur.

$H_0: F_k(X) = F_e(X)$ Kız ve erkek öğrencilerin hata puanları dağılımında fark yoktur.

$H_1: F_k(X) \neq F_e(X)$ Kız ve erkek öğrencilerin hata puanları dağılımı farklıdır.

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

Hata Puanı	f_k	f_e	$Sn_k(x)$	$Sn_e(x)$	D=| $Sn_k(x)$- $Sn_e(x)$|
21-24	0	1	0	1/10	1/10
25-28	0	1	0	2/10	2/10
29-32	0	3	0	5/10	5/10
33-36	0	2	0/10	7/10	**7/10**
37-40	3	3	3/10	10/10	7/10
41-44	2	0	5/10	10/10	5/10
45-48	3	0	8/10	10/10	2/10
49-52	2	0	10/10	10/10	0

n1=n2=10≤40 küçük örneklem

Test istatistiği: $Max_D = 7/10$ $K_{Dtest} = 7$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$n_1 = n_2 = 10 \leq 40$ küçük örneklemler K-S tablosunda α=0,05 ve çift taraflı test için tablo değeri $K_{Dtablo} = 7$

4. Adım Karar verilir.

$K_{Dtest} = 7 \geq K_{Dtablo} = 7$ olduğundan H_0 reddedilir.

Kız ve erkek öğrencilerin hata puan dağılımları arasında fark olduğu söylenebilir.

```
ksTest<-function(x,y)
{cumx<-cumsum(x)/sum(x)
cumy<-cumsum(y)/sum(y)
D<-abs(cumx-cumy)
Dhes<-max(D)
return(Dhes)
}
x<-c(0,0,0,0,3,2,3,2)
y<-c(1,1,3,2,3,0,0,0)
ksTest(x,y)

## [1] 0.7

ks.test(x,y,alternative = "two.sided")

##
##  Exact two-sample Kolmogorov-Smirnov test
##
## data:  x and y
## D = 0.125, p-value = 1
## alternative hypothesis: two-sided
```

Örnek: Yeni bir antidepresan ilacı test etmek amacıyla 100 depresyon hastası rasgele iki gruba ayrılmıştır. Altı ay süresince ilk gruba yeni ilaç ikinci gruba placebo* verilmiş ve süre sonunda hastalar depresyon derecelerine göre bir psikiyatrist tarafından puanlanmışlardır (yüksek puan daha depresif). Bu verilere göre antidepresan ilaç etkili midir? ($\alpha = 0.01$)

Depresyon Puanı	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Toplam
I.Grup	8	8	7	6	1	5	4	1	2	3	5	50
II.Grup	1	2	1	3	5	7	6	6	4	6	9	50

1. Adım Hipotezler kurulur.

$$H_0: F_1(X) \leq F_2(X)$$

$$H_1: F_1(X) > F_2(X)$$

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

Depresyon Puanı	I.Grup	$Sn_I(x)$	II.Grup	$Sn_{II}(x)$	$D=Sn_I(x)- Sn_{II}(x)$
0	8	0,16	1	0,02	0,14
1	8	0,32	2	0,06	0,26
2	7	0,46	1	0,08	0,38
3	6	0,58	3	0,14	**0,44**
4	1	0,6	5	0,24	0,36
5	5	0,7	7	0,38	0,32
6	4	0,78	6	0,5	0,28
1	1	0,8	6	0,62	0,18
8	2	0,84	4	0,7	0,14
9	3	0,9	6	0,82	0,08
10	5	1	9	1	0

$n_1 = n_2 = 50 > 40$ büyük örneklem ve tek taraflı test için D'nin sd=2'lik χ^2 değeri hesaplanmalıdır.

$$\chi^2 = 4D^2 \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2} = 4(0{,}44)^2 \frac{50.50}{50+50} = 19{,}36$$

$$\chi^2_{hes} = 19.36$$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$\alpha = 0.01$ ve $sd = 2$ için $\chi^2_{tablo} = 9.21$

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hes} = 19.36 > 9.21 = \chi^2_{tablo}$ olduğundan H_0 reddedilir. Yeni ilacın depresyona karşı etkili olduğu söylenebilir.

```
ksTest<-function(x,y,alpha)
{
  cumx<-cumsum(x)/sum(x)
  cumy<-cumsum(y)/sum(y)
  D<-abs(cumx-cumy)
  D<-max(D)
  kikarehes<- (4*D^2*sum(x)*sum(y)) /(sum(x)+sum(y))
  kitablo<-qchisq(1-alpha,2)
return(list=c(kikarehes,kitablo))
}
x<-c(8,8,7,6,1,5,4,1,2,3,5)
y<-c(1,2,1,3,5,7,6,6,4,6,9)


ksTest(x,y,0.01)

## [1] 19.36000  9.21034
```

Ödev Bir araştırmacı, Sayısal ve Sözel puan türü ile bir fakülteye yerleşen öğrencilerin problem çözme becerilerinin farklı olup olmadığını test etmek istiyor. Bu amaçla her gruptan 10 ar öğrenciyi bilimsel yöntemlerle seçerek her gruba problem çözme beceri testi uyguluyor ve aşağıdaki verileri elde ediyor.

Öğrenciler	Sayısal puanları	Sözel puanları
1	35	65
2	36	76
3	38	78
4	45	80
5	29	72
6	33	60
7	26	83
8	40	88
9	45	90
10	32	78

Bu verilere göre iki farklı puan türünden yerleşen öğrencilerin puanlarının dağılımlarının birbirinden farklı olup olmadığını istatiksel olarak 0.05 anlamlılık düzeyinde test ediniz.

N	Tek taraflı		Çift taraflı	
	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$	$\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,01$
3	3	-	-	-
4	4	-	4	-
5	4	5	5	5
6	5	6	5	6
7	5	6	6	6
8	5	6	6	7
9	6	7	6	7
10	6	7	7	8
11	6	8	7	8
12	6	8	7	8
13	7	8	7	9
14	7	8	8	9
15	7	9	8	9
16	7	9	8	10
17	8	9	8	10
18	8	10	9	10
19	8	10	9	10
20	8	10	9	11
21	8	10	9	11
22	9	11	9	11
23	9	11	10	11
24	9	11	10	12
25	9	11	10	12
26	9	11	10	12
27	9	12	10	12
28	10	12	11	13
29	10	12	11	13
30	10	12	11	13
35	11	13	12	-
40	11	14	13	-

Anlamlılık Seviyesi	D = max $\lvert Sn_1-Sn_2 \rvert$ olduğunda, belirtilen anlamlılık seviyesinde H_0'ın reddine yol açacak büyüklükteki D değeri
0,1	$1,22\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
0,05	$1,36\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
0,025	$1,48\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
0,01	$1,63\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
0,005	$1,73\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$
0,001	$1,95\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}}$

TABLE A4 Chi-Square Cumulative Probabilities*

	Cumulative Probability													
ν	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1					0.02	0.10	0.45	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.83
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60	13.82
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.21	2.37	4.11	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84	16.27
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.67	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75	20.52
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.45	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96	26.12
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.32
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22	112.32
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32	124.84
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.56	113.14	118.14	124.12	128.30	137.21
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.14	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17	149.45
Upper Tail	0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.750	0.500	0.250	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.001

Source: *Biometrika Table for Statisticians* (1966). Edited by E. S. Pearson and H. O. Hartley, Volume I.

*The entries in this table are values of a chi-square variate with ν degrees of freedom corresponding to the designated cumulative probability.