YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

11.DERS

Eğer x_{ij} temel dışı değişken ise; x_{ij} yi içeren bir döngü çizilir.

Örneğin; birinci kaynaktan birinci hedefe taşınacak mal miktarında 1 birim artış olsun. x_{11} de değişim olacak. Optimal çözümü bulma sürecinde kullanılan döngü ile aynı özelliklere sahip bir döngü kurulur.

	1	2	3	4	a_i
A	8 * +	6 10	10 - 25	9	35
B	9 45 -	12	13 5 +	7	50
C	14	9 10	16	5 30	40
b_j	45	20	30	30	

(-) ile işaretlenmiş gözelere $\Omega = 1$ eklenir

(+) ile işaretlenmiş gözelerden $\Omega = 1$ çıkartılır.

	1	2	3	4	a_i
A	8	6 10	10 26	9	35+1=36
B	9 46	12	13 4	7	50
C	14	9 10	16	5 30	40
b_j	45+1=46	20	30	30	

$$Z = (6 * 10) + (10 * 26) + (9 * 46) + (13 * 4) + (9 * 10) + (5 * 30) = 1026$$

AKTARMALI ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Bir ulaştırma probleminde taşımaya konu olan mallar önce üretim merkezlerinden depolara, daha sonra depolardan tüketim noktalarına taşınacaksa bu tür problemlere aktarmalı ya da kademeli ulaştırma problemleri denir.

Ulaştırma Problemi		Aktarmalı Ulaştırma Problemi		
Kaynak	Hedef	Kaynak	Depo	Hedef
*	0	*	+	0
*	0	*	+	0
.				
*	0	*	+	0

$C_{ik}: i. \, kaynakta \; k. \, depoya \; bir \; birim \; malın \; ulaştırma \; gideri$

$d_{kj}: k. \, depodan \; j. \, hedefe \; bir \; birim \; malın \; ulaştırma \; gideri$

$M: çok \; büyük \; bir \; pozitif \; tamsayı$

		Depolar				Hedefler				
		D1	D2	…	Dk	H1	H2	…	Hn	a_i
Kaynak	K1	C_{11}	C_{12}	…	C_{1k}	M	M	…	M	a_1
	K2	C_{21}	C_{22}	…	C_{2k}	M	M	…	M	a_2
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	Km	C_{m1}	C_{m1}	…	C_{mk}	M	M	…	M	a_m
Depolar	D1	M	M	…	M	d_{11}	d_{12}	…	d_{1n}	d_1
	D2	M	M	…	M	d_{21}	d_{22}	…	d_{1n}	d_2
	…	…	…	…	…	…	…	…	…	
	Dk	M	M	…	M	d_{k1}	d_{k2}	…	d_{kn}	d_k
	b_j	d_1	d_2		d_k	h_1	h_2	…	h_n	

Problemin ulaştırma problemi yöntemiyle çözümlenebilmesi için toplam kapasitenin toplam talebe eşit olması gerekir. M ler bulundukları gözeye atama yapılmasını engelleyecektir. Böylece kaynaklardan direk hedeflere ve depolar arasında aktarma yapılması engellenmiş olacaktır.

ÖRNEK: Bir işletme iki merkezde ürettiği ürünleri üç bölge deposu aracılığı ile beş hedefe taşımak istemektedir. Üretim merkezlerinin kapasitesi sırasıyla, 125 ve 175 birimdir. Depoların kapasiteleri sırasıyla 100, 110 ve 90 dır. Hedeflerin talepleri ise sırasıyla; 45, 40, 85, 50 ve 80 birimdir. Üçüncü depodan dördüncü hedefe mal taşımak mümkün değildir. Kaynaklardan depolara ve depolardan hedeflere bir birim malın taşıma maliyetleri tablolarda verilmiştir.

		Depolar			
		D1	D2	D3	Kapasite
Üretim Merkezi	M1	70	80	65	125
	M2	72	78	73	175

		Hedefler					
		H1	H2	H3	H4	H5	Kapasite
Depolar	D1	12	5	7	10	9	100
	D2	10	6	5	9	7	110
	D3	8	7	4	-	9	90

Hangi üretim merkezinden hangi depoya ve hangi depodan hangi hedefe ne kadar mal taşınacağı belirlenmek istenmektedir. Bu amaçla çözümlenecek modele esas ulaştırma tablosunu düzenleyiniz.

	D1	D2	D3	H1	H2	H3	H4	H5	
M1	70	80	65	M	M	M	M	M	125
M2	72	78	73	M	M	M	M	M	175
D1	M	M	M	12	5	7	10	9	100
D2	M	M	M	10	6	5	9	7	110
D3	M	M	M	8	7	4	M	9	90
	100	110	90	45	40	85	50	80	

Tablo oluşturulduktan sonra, klasik ulaştırma problemi çözüm süreci kullanılarak probleme çözüm getirilir.

ATAMA MODELİ

Atama modeli veya problemleri genel doğrusal programlama problemlerinin özel bir durumudur. Atama problemi türlü kaynakların değişik görevlere en uygun biçimde dağıtımını sağlamayı amaçlar. Bu modele daha çok, işçilerin işlere ve işlerin makinalara atanmasında baş vurulur. Programlama, bir işe veya makinaya bir işçi atanması biçiminde yapılır. Atama modelinde amaç, etkinliği maksimum kılmak için kaynak kullanımının bire bir dağılımını sağlamaktır. Modelde iş veya işçi sayısının makine sayısına eşit olduğu kabul edilir. m işçi sayısını n makine sayısını gösterdiğinde $m>n$ ise $m-n$ miktarda kukla makine, $n>m$ ise $n-m$ miktarda kukla işçi modele katılarak eşitlik sağlanır. Kukla işçi veya makinanın maliyeti sıfırdır. İşlerin en kısa zamanda veya en düşük toplam maliyetle gerçekleşmesi istenir. Problemin doğrusal programlama olarak matematiksel modeli;

Amaç: $Min\ Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \quad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} = 0 \ veya \ 1$$

x_{ij} karar değişkeni olup,

$x_{ij} = 0$ ise i işçisi j işine atanmaz, $x_{ij} = 1$ ise i işçisi j işine atanır.

Modelin kısıtları gereği en iyi çözümde n tane karar değişkeni 1 değerini, diğerleri 0 değerini alacaktır. Atama problemlerinin çözümü için geliştirilen algoritmalardan en yaygın kullanılanı Macar Algoritmasıdır.

Macar Algoritması:

Öncelikle amaç fonksiyonunun minimum değerini araştıran atama modelleri için aşağıdaki özellikler verilebilir.

1. Her işlem noktasına bir iş verileceğinden yapılan bir atama sonrasında modelin bazı satır ve sütunu işlem dışı kalacaktır. Toplam maliyet ayrı ayrı maliyetlerin toplamına eşit olacağından, bir hücreye atama yapıldıktan sonra dağıtım tablosunun tüm maliyetler toplamı ilgili satır ve sütun maliyetlerinden atama yapılan hücre maliyetinin farkları kadar azalır.
2. Atama modelinde amaç fonksiyonuna en iyi değeri veren birden çok en iyi çözüm olabilir.

Adım 1: Her satırdaki en küçük atama gideri C_{ij} seçilip satırdaki diğer atama giderlerinden çıkartılarak satıra göre indirgenmiş tablo elde edilir.

$$\begin{array}{c c} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 7 \\ 9 & 5 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 8 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Adım 2: Adım birin sonunda elde edilmiş indirgenmiş matrisin her sütununun en küçük öğesi seçilir ve diğer öğelerden çıkarılır. Tablo bir kez daha indirgenmiş olur. (Sütun indirgemesi)

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 5 \\ 8 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Adım 3: Adım iki sonunda elde edilmiş tabloda sıfır değerini alan tüm ögelerden geçen en az sayıda yatay ya da dikey doğrular çizilir.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Eğer kullanılan çizgi sayısı işlem sayısına eşitse en iyi çözüme ulaşılmış olup Adım 5'e aksi halde Adım 4'e gidilir.

Adım 4: Üzerinden çizgi geçmeyen ögelerden en küçüğü seçilerek (kullandığımız örnek için bu değer 1 dir.) çizgilerin dışında kalan diğer öğelerden bu değer çıkartılır. Çizgilerin kesişim noktalarındaki öğelere eklenir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Adım 5: Sıfır değerli gözeler dikkate alınarak her işe bir işçi karşılık gelecek biçimde atama işlemi gerçekleştirilir.

ÖRNEK: Toplam giderlerin en küçüklenmesi istenen bir atama probleminde işlerin yapılacağı işlem noktalarına ilişkin maliyetler aşağıda verilmiştir. Maliyeti minimum yapacak atama biçimini belirleyiniz.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	5	6	3	2*
2	4	3	2*	4
3	5	4	3	2*
4	6	5	4	3*

Önce satırların minimum değerleri belirlenir ve satır indirgemesi yapılır.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	3	4	1	0*
2	2*	1*	0*	2
3	3	2	1	0
4	3	2	1	0

Sonra sütunların minimum değerleri belirlenir ve sütun indirgemesi yapılır.

Sıfırlar kapanacak biçimde satır ve sütunlar kapatılır.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	3	1	0
2	0	0	0	2
3	1	1	1	0
4	1	1	1	0

Kapatan çizgi sayısı işlem sayısından az olduğu için: Üzerinden çizgi geçmeyen ögelerden en küçüğü seçilerek (örnek için bu değer 2 dir.) çizgilerin dışında kalan diğer öğelerden bu değer çıkartılır. Çizgilerin kesişim noktalarındaki öğelere eklenir.

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	2	0	0
2	0	0	0	**3**
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

Oluşan yeni tabloda sıfırları örtmek için kullanılan çizgi sayısı dörtten az olamayacağından işlem durdurulur ve sıfır olan gözeler kullanılarak atama yapılır. Bu örnek için alternatif çözümler mevcuttur.

Bunlardan biri:

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	2	0	0
2	0	0	0	**3**
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{22} \\ x_{33} \\ x_{44} \end{bmatrix}$ Min Z=5+3+3+3=14 biçimindedir.

Bir başka çözüm;

	İşlem Noktaları			
İşlemler	**1**	**2**	**3**	**4**
1	0	2	0	0
2	0	0	0	**3**
3	0	0	0	0
4	0	0	0	0

$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{23} \\ x_{32} \\ x_{44} \end{bmatrix}$ Min Z=5+2+4+3=14 biçimindedir.

Her iki çözümde de minimum maliyet 14 olarak elde edilmiştir.

Alternatif çözümlerde farklı işlemler farklı iş noktalarına atansa da maliyetleri eşit olmak durumundadır.

ATAMA PROBLEMİ KAR YAPILI OLDUĞUNDA

Atama probleminin kar yapılı olması, yapılacak olan atamadan en büyük kazancı sağlamak üzere problemin modellenmesi anlamına gelir. Matrisin öğeleri atamalar sonucunda elde edilecek geliri göstermektedir. Bu durumda macar algoritmasının uygulanması aşağıdaki gibi gerçekleştirilir.

Verilen dağıtım tablosunun (fiyat matrisinin) her satırımda en büyük değer belirlenerek satırın tüm elemanları bu değerden çıkartılır. Bulunan tablo üzerinden macar algoritması uygulanır.

İşlem noktası sayısı iş sayısına eşit değilse yapay satır ya da sütun eklenerek fiyatları sıfır olarak belirlenir.

Problemin yapısı gereği tabloda negatif işaretli değerler varsa algoritmanın uygulanabilmesi için ilgili satır veya sütunun ögelerine negatif işaretli elemanı sıfır yapacak büyüklükte değer eklenir.

Bazı işlem noktalarına bazı işlerin atanması mümkün değilse, ilgili hücreye kar yapılı problemler için yeterince küçük, maliyet yapılı problemler için yeterince büyük fiyat değerleri verilerek bu gözelere atama yapılması engellenir.

ÖRNEK: Bir firma yöneticisi 4 satış elemanını 5 pazarda görevlendirmek istemektedir. Her satış elemanın daha önceki yıllarda şirket pazarlarında yapmış oldukları aylık satış miktarları aşağıdaki tabloda verilmiştir. Firmanın hangi satış elemanını hangi pazara göndermesi gerektiğini ve gerçekleştireceği aylık satış miktarını belirleyiniz.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	100	500	300	300	300
2	800	600	500	600	400
3	800	600	400	100	500
4	500	100	400	200	400

Pazar sayısı Satış elemanı sayısından fazla olduğu için problemi çözebilmek üzere bir adet kukla satış elemanı probleme eklenmelidir ve her satırın en büyük değeri belirlenir.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	100	500*	300	300	300
2	800*	600	500	600	400
3	800*	600	400	100	500
4	500*	100	400	200	400
KUKLA	0	0	0	0	0

Belirlenen bu değerden satırın tüm elemanları çıkarılarak matris aşağıdaki gibi düzenlenir.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	400	0	200	200	200
2	0	200	300	200	400
3	0	200	400	700	300
4	0	400	100	300	100
KUKLA	0	0	0	0	0

Satır indirgemesi yapılmış olan matriste sütun indirgemesi yapılmalıdır. Bu soruda kukla satış elemanı kullanıldığından her sütunun minimumu sıfırdır ve sütun indirgemesine gerek kalmamıştır.

Son matriste sıfır değerli gözeleri örten çizgiler çekildiğinde matris;

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	400	0	200	200	200
2	0	200	300	200	400
3	0	200	400	700	300
4	0	400	100	300	**100**
KUKLA	0	0	0	0	0

Örten çizgi sayısı (3) işlem sayısından (5) az olduğundan, çizgi dışında kalan ögelerden en küçük olanı belirlenir. Çizgi dışında kalan ögelerden bu değer çıkartılır çizgilerin kesicim noktasına eklenir ve matris;

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	500	0	200	200	200
2	0	**100**	200	100	300
3	0	100	300	600	200
4	0	300	0	200	0
KUKLA	100	0	0	0	0

Örten çizgi (4) sayısı işlem sayısından (5) az olduğundan, çizgi dışında kalan ögelerden en küçük olanı belirlenir. Çizgi dışında kalan ögelerden bu değer çıkartılır çizgilerin kesicim noktasına eklenir ve matris;

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	600	0	200	200	200
2	0	0	100	0	200
3	0	0	200	500	100
4	100	300	0	200	0
KUKLA	200	0	0	0	0

Örten çizgi sayısı (5) = İşlem sayısı (5) olduğundan durulur ve sıfır olan gözeler dikkate alınarak en iyi atama gerçekleştirilir.

	Pazarlar				
Satış Elemanları	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	600	0	200	200	200
2	0	0	100	0	200
3	0	0	200	500	100
4	100	300	0	200	0
KUKLA	200	0	0	0	0

Birinci satış elemanın ikinci pazara gitmenin dışında bir alternatifi yok, bu sebeple birinci satış elemanı ikinci pazara gönderilir.

İkinci pazara satış elemanı gönderildiğinden üçüncü satış elemanı birinci pazara gönderilmek durumunda.

Birinci ve ikinci pazarlara eleman atandığı için ikinci satış elmanı dördüncü pazara atanmak durumunda.

Dördüncü satış elemanı üçüncü veya beşinci pazara atanabilir. Her iki durumda da kazanç aynı olacaktır. Yani alternatif çözümler;

$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{43} \end{bmatrix}$ Max Z=500+600+800+400=2300 biçimindedir.

$X_B^* = \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{45} \end{bmatrix}$ Max Z=500+600+800+400=2300 biçimindedir.