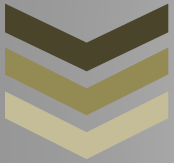


# YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI



**7.DERS**

**ÖRNEK:** Bir şirket arabalarını iki merkezden kiraya vermektedir. Arabaları kiralamak isteyen yerlerin istemleri sırasıyla 9,6,7,9 arabadır. Şirketin elinde 1. Merkez ve 2. Merkezde 14'er araba bulunmaktadır. Arabaların kiralandıkları merkezler ile kiralayan merkezler arasındaki birim taşıma maliyeti aşağıdaki gibidir.

	1	2	3	4
Merkez 1	45	17	21	30
Merkez 2	14	18	19	30

Başlangıç temel uygun çözümü verilen yöntemlerle belirleyiniz.

$\sum_{j=1}^n b_j = 31 \neq \sum_{i=1}^m a_i = 28$  olduğundan kukla değişken!

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

a. Kuzey Batı köşe yöntemi

	1	2	3	4	$a_i$
I	$\begin{array}{r} 45 \\ 9 \end{array}$	$\begin{array}{r} 17 \\ 5 \end{array}$	$\begin{array}{r} 21 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 30 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 148 \\ 0 \end{array}$
II	$\begin{array}{r} 16 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 18 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 19 \\ 7 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 1413 \end{array}$
Kutla	$\begin{array}{r} 0 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 3 \end{array}$
	$\begin{array}{r} 80 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 0 \\ 6 \end{array}$	$\begin{array}{r} 40 \\ 2 \end{array}$	$\begin{array}{r} 83 \\ 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} 31 \\ 1 \end{array}$

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

**b. minimum maliyet yöntemi**

	1	2	3	4	ar
I	45 11	17 6	21 2	30 6	14 6
II	14 9	18 11	19 5	31 11	14 8
KURU	9 11	9 11	9 4	9 3	8
bj	90	60	72	96	31

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

C. Vogel yöntemi

	1	2	3	4	5	
I	45 11	17 6	21 2	30 6	8 14	44 <sup>2</sup> 9
II	14 9	18 4	19 5	31 4	05 14	44112 <sup>2</sup>
V	0 11	0 11	0 11	0 3	20 20	0- - -
5	9 <sup>0</sup> 31 <sup>*</sup>	6 <sup>0</sup> 1	4 <sup>2</sup> 2	9 <sup>6</sup> 1	31 1	

14	17	19	30 <sup>*</sup>
31 <sup>*</sup>	1	2	1
-	1	2	1
-	-	2	1

C. Vogel

### ULAŞTIRMA PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

$$P: \text{Min } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \quad i = 1, \dots, m \quad \text{Kaynak (Sunum)}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \quad j = 1, \dots, n \quad \text{Hedef (İstem)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

Kaynaklara karşılık gelen dual değişkenler  $v_i$

Hedeflere karşılık gelen dual değişkenler  $w_j$  ile gösterilsin

$$D: \text{Max } Z = \sum_i a_i v_i + \sum_j b_j w_j$$

$$v_i + w_j \leq C_{ij} \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m$$

*$v_i, w_j$  işareti belirtilmemiş*

Temeldeki değişkenler için  $v_i + w_j = C_{ij}$

En iyilik koşulları;

Minimum problemi için;  $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$

Maximum problemi için;  $Z_{ij} - C_{ij} \geq 0$

Olması durumunda optimal çözüme ulaşılmıştır.



## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

**ÖRNEK PROBLEM:** Problemin örnek çözümü bulunmuş. Başlangıç uygun çözüm için maliyet 1990 olarak belirlenmiştir. Verilen uygun çözümün optimal olup olmadığını kontrol etmek için temel dışı değişkenler ele alınır. Atama yapılmış gözeler temel değişkenler, boş gözeler temel dışı değişkenlerdir.

	1	2	3	4	5	QT	
A	9) $\begin{matrix} -5 \\ 0+4-9 \end{matrix}$	2) $\begin{matrix} - \\ 60 \end{matrix}$	6) $\begin{matrix} 0-6 \\ -7 \end{matrix}$	7) $\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}$	3) $\begin{matrix} + \\ 40 \end{matrix}$	100	$v_1 = 0 \rightarrow$ keyfi verilir.
B	7) $\begin{matrix} 7 \\ 0 \end{matrix}$	5) $\begin{matrix} 5 \\ +1^* \end{matrix}$	2) $\begin{matrix} 2 \\ 80 \end{matrix}$	12) $\begin{matrix} 12 \\ 50 \end{matrix}$	6) $\begin{matrix} 6 \\ 30 \end{matrix}$	160	$v_2 = 3$
C	5) $\begin{matrix} 5 \\ 90 \end{matrix}$	4) $\begin{matrix} 4 \\ 0 \end{matrix}$	9) $\begin{matrix} 9 \\ -9 \end{matrix}$	8) $\begin{matrix} 8 \\ 50 \end{matrix}$	10) $\begin{matrix} 10 \\ -6 \end{matrix}$	140	$v_3 = +1$
bj	90	60	80	100	70	400	

$w_1 = 4 \quad v_2 = 3 \quad w_3 = -1 \quad w_4 = 7 \quad w_5 = 3$

Temel dışı değişkenler için

$v_2 + w_5 = c_{12}$  den.

dolu gözeler için

$x_{12}$  için  $c_{12} = 3$

$v_1 + w_2 = c_{12}$

$0 + w_2 = 3$

$w_2 = 3$



## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

---

$$Z_{ij} - C_{ij} = v_i + w_j - C_{ij}$$

Temel dışı değişkenler;

$$x_{11} \rightarrow Z_{11} - C_{11} = v_1 + w_1 - C_{11} = 0 + 4 - 9 = -5$$

$$x_{13} \rightarrow Z_{13} - C_{13} = v_1 + w_3 - C_{13} = 0 + (-1) - 6 = -7$$

$$x_{14} \rightarrow Z_{14} - C_{14} = v_1 + w_4 - C_{14} = 0 + 7 - 7 = 0$$

$$x_{21} \rightarrow Z_{21} - C_{21} = v_2 + w_2 - C_{21} = 3 + 4 - 7 = 0$$

$$x_{22} \rightarrow Z_{22} - C_{22} = v_2 + w_2 - C_{22} = 3 + 3 - 5 = \mathbf{1}$$

$$x_{32} \rightarrow Z_{32} - C_{32} = v_3 + w_2 - C_{32} = 1 + 3 - 4 = 0$$

$$x_{33} \rightarrow Z_{33} - C_{33} = v_3 + w_3 - C_{33} = 1 + (-1) - 9 = -9$$

$$x_{35} \rightarrow Z_{35} - C_{35} = v_3 + w_5 - C_{35} = 1 + 3 - 10 = -6$$

Pozitiflerin en büyüğü temele alınır. Bu problem için en büyük pozitif değer  $x_{22}$  **temele alınır**.

Temelden ayrılacak olan değişkeni belirlemek için ulaştırma tablosundaki temel değişkenlere bir döngü oluşturulur.

### Oluşturulacak Döngü İçin Kurallar:

- Döngü aynı temel olmayan değişkenle başlar ve biter.
- Döngüde temel değişkenler bir yatay bir dikey dal ile birleştirilir.
- Döngüde ard arda üç göze aynı satır ya da sütunda bulunamaz.
- Döngünün her köşe gözesi bir temel değişkene karşılık gelir.

### Temel dışı kalacak değişkenin belirlenmesi:

$\Delta = \text{Min} \{ \text{Temel olmayan gözenin temel gözelerle oluşturduğu döngü boyunca çift sayılı (-) pozisyonda bulunan temel değişken değerleri} \}$

$$\Delta = \text{Min} \{60, 30\} = 30 \rightarrow x_{25} \text{ Temelden ayrılır}$$

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

$x_{22}$  temele alındı,  $x_{25}$  temelden ayrıldı. Bu durumda yeni tablo;

	1	2	3	4	5	RT	
A	3) -4	3) (30)	6) -6	2) (7) <sup>*</sup>	3) (70)	100	$v_1=0$
B	7) 0	5) (30)	2) (80)	10) (50)	4) -1	160	$v_2=2$
C	5) (90)	4) -1	9) -9	8) (50)	10) -7	140	$v_3=0$
bj	90	60	80	100	70		
	$w_1=5$	$w_2=3$	$w_3=0$	$w_4=8$	$w_5=3$		

$x_{25} \rightarrow 30$  olduğundan  
 diğerleri + 100 30  
 ekle - 100 den 30  
 çıkar.

$$Z_{ij} - C_{ij} = v_i + w_j - C_{ij}$$

$$x_{14} \rightarrow Z_{14} - C_{14} = v_1 + w_4 - C_{14} = 0 + 8 - 7 = 1$$

Diğerleri hesaplandığında tümünün (-) olduğu görülür.

## YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

Böylece  $x_{14}$  temele alınır. Temelden Ayrılanı belirlemek için;

$\Delta = \text{Min} \{50, 30\} = 30 \rightarrow x_{12}$  Temelden ayrılır. Bu durumda yeni tablo;

	1	2	3	4	5	AT	
A	9) -5	3) -1	6) -7	7) <u>30</u>	3) <u>10</u>	100	$u_1 = 0$
B	7) 0	5) <u>60</u>	2) <u>80</u>	10) <u>20</u>	6) 0	160	$u_2 = 3$
C	5) <u>90</u>	4) -1	9) -9	8) <u>50</u>	10) -6	140	$u_3 = +1$
b <sub>j</sub>	90	60	80	100	70		
	$w_1 = 4$	$w_2 = 2$	$w_3 = -1$	$w_4 = 7$	$w_5 = 3$		

Tüm  $Z_{ij} - C_{ij} \leq 0$  olduğundan optimallik sağlandı.

$$x^* = \begin{bmatrix} x_{14} \\ x_{15} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \\ x_{31} \\ x_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 70 \\ 60 \\ 80 \\ 20 \\ 90 \\ 50 \end{bmatrix} \quad Z^* = 1930$$

### ULAŞTIRMA PROBLEMLERİNDE DUYARLILIK ÇÖZÜMLEMESİ

Ulaştırma problemlerin üç tür değişim ve bu değişimlere karşılık duyarlılık çözümlemesinden söz edilebilir.

1. Temel dışı değişkenlere ilişkin amaç fonksiyonu katsayılarının değişimi.
2. Temeldeki değişkenlerin fiyatlarındaki değişim.
3. İstem ve sunumdaki değişim.



### Değişim 1: Temel dışı değişkenlere ilişkin fiyatlardaki ( $C_{ij}$ ) değişim

Aşağıda, amaç fonksiyonu en küçükleme biçiminde olan bir ulaştırma probleminin en iyi çözümüne ilişkin ulaştırma tablosu yer almaktadır.

	1	2	3	4	$a_i$	$v_i$
A	8	6 10	10 25	9	35	0
B	9 45	12	13 5	7	50	3
C	1	9 10	1	5 30	40	3
$b_j$	45	20	30	30		
$w_j$	6	6	10	2		

Temeldeki  $C_{ij}$  ler değişmediği için  $v_i$  ve  $w_j$  ler de değişiklik meydana gelmez. Çünkü bu değerler temeldeki değişkenlerin  $C_{ij}$  leri kullanılarak hesaplanmaktadır.

Temel uygun çözüm bozulmadan birinci kaynaktan birinci hedefe gönderilen bir birim malın ulaştırma giderindeki değişim ne kadar olabilir?

Birinci kaynaktan birinci hedefe 1 birim malın gönderilme maliyeti  $C_{11}$  deki değişim;

$\hat{C}_{11} = 8 + \Omega$  biçimindedir. Optimalliğin bozulmaması için;

$Z_{11} - \hat{C}_{11} \leq 0$  olmalıdır. Buradan,

$$v_1 + w_1 - \hat{C}_{11} \leq 0$$

$$0 + 6 - (8 + \Omega) \leq 0$$

$\Omega \geq -2$  olmalı buna bağlı olarak da  $\hat{C}_{11} \geq 6$  olmalıdır.

Değişim -2 den büyük olduğu sürece optimallik bozulmaz.

Bir başka örnek;

$C_{14}$  deki değişim ne kadar olmalı ki optimallik bozulmasın?

$\hat{C}_{14} = 9 + \Omega$  biçimindedir. Optimalliğin bozulmaması için;

$Z_{14} - \hat{C}_{14} \leq 0$  olmalıdır. Buradan,

$$v_1 + w_4 - \hat{C}_{14} \leq 0$$

$$0 + 2 - (9 + \Omega) \leq 0$$

$\Omega \geq -7$  olmalı buna bağlı olarak da  $\hat{C}_{14} \geq 2$  olmalıdır.