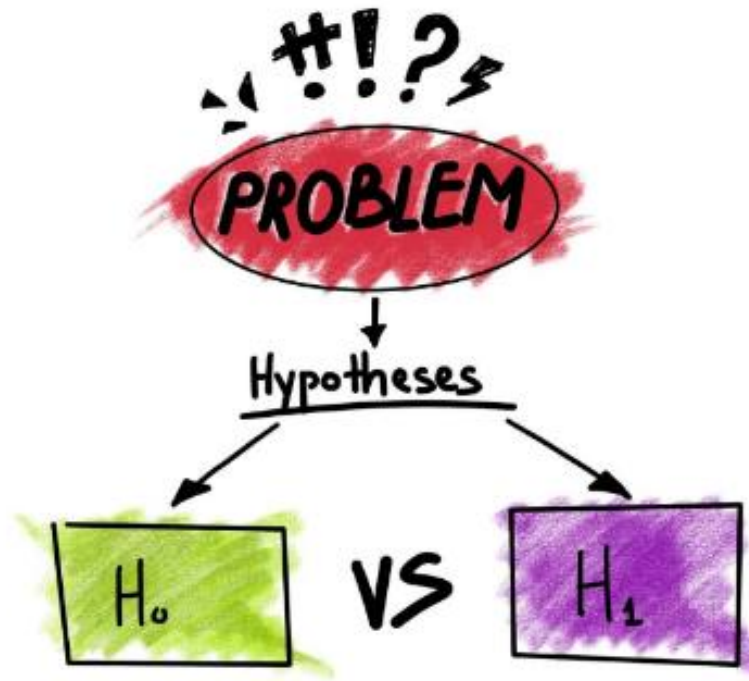


Hipotez Testleri



Hipotez Testleri 1

- 1. Hipotez Testlerinin Esasları**
- 2. Ortalama ile ilgili bir iddianın testi:
Büyük örnekler**
- 3. Ortalama ile ilgili bir iddianın testi:
Küçük örnekler**
- 4. Bir oran ile ilgili bir iddianın testi**

Tanım

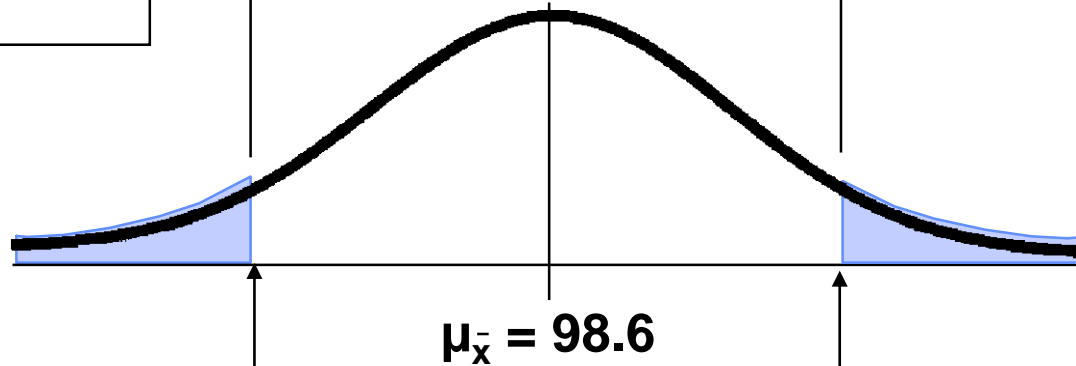
❖ Hipotez

İstatistikte hipotez, bir anakütlenin bir özelliği hakkındaki bir iddia yada bir ifadedir.

$\mu = 98.6$ olarak varsayıldığında Örnek Ortalamalarının Örnekleme Dağılışı

Örnek verisi: $z = -6.64$
veya
 $\bar{x} = 98.20$

Olası Örnek Ortalamaları



$z = -1.96$
veya
 $\bar{x} = 98.48$

$z = 1.96$
veya
 $\bar{x} = 98.72$

Bir Hipotez Testinin Bileşenleri

Sıfır Hipotezi: H_0

- ❖ Bir anakütle parametresinin değeri hakkındaki bir ifadedir. Normal durumu ifade eder.
- ❖ $=$, \geq , veya \leq ifadelerini içerir.
- ❖ Test sonucu sıfır hipotezi için kararlar:
- ❖ H_0 **ret** veya H_0 **reddedilemez** şeklindedir.

Alternatif Hipotez: H_1

- ❖ H_0 yanlış ise, doğrudur.
- ❖ $\neq, <, >$ içerir.
- ❖ Sıfır hipotezinin 'karşıtıdır'.
- ❖ Eğer bir çalışmanın sonunda fikrinizi test etmek istiyorsanız, bu iddiayı alternatif hipotez ile ifade etmelisiniz.

Test İstatistiği

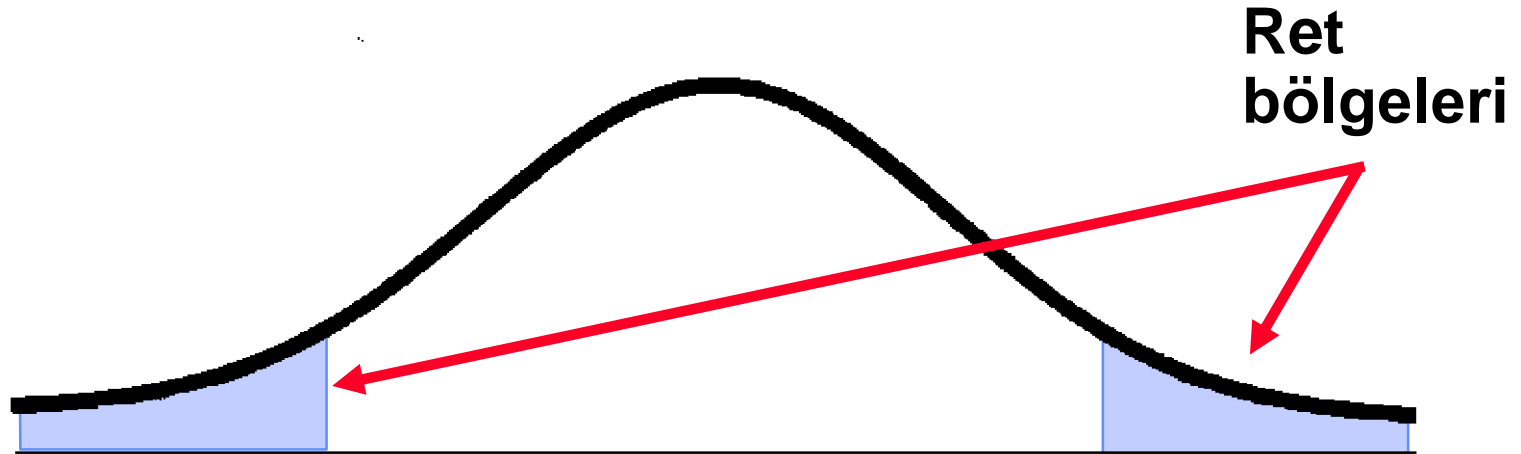
Sıfır hipotezinin reddi hakkında karar vermek için kullanılan, örnek verilerinden hesaplanan bir değerdir.

Büyük örnekler için, anakütle ortalamasının testinde kullanılan test istatistiği,

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Ret Bölgesi (Kritik Bölge)

Test istatistiğinin, sıfır hipotezinin reddine yol açacak tüm değerlerin seti.

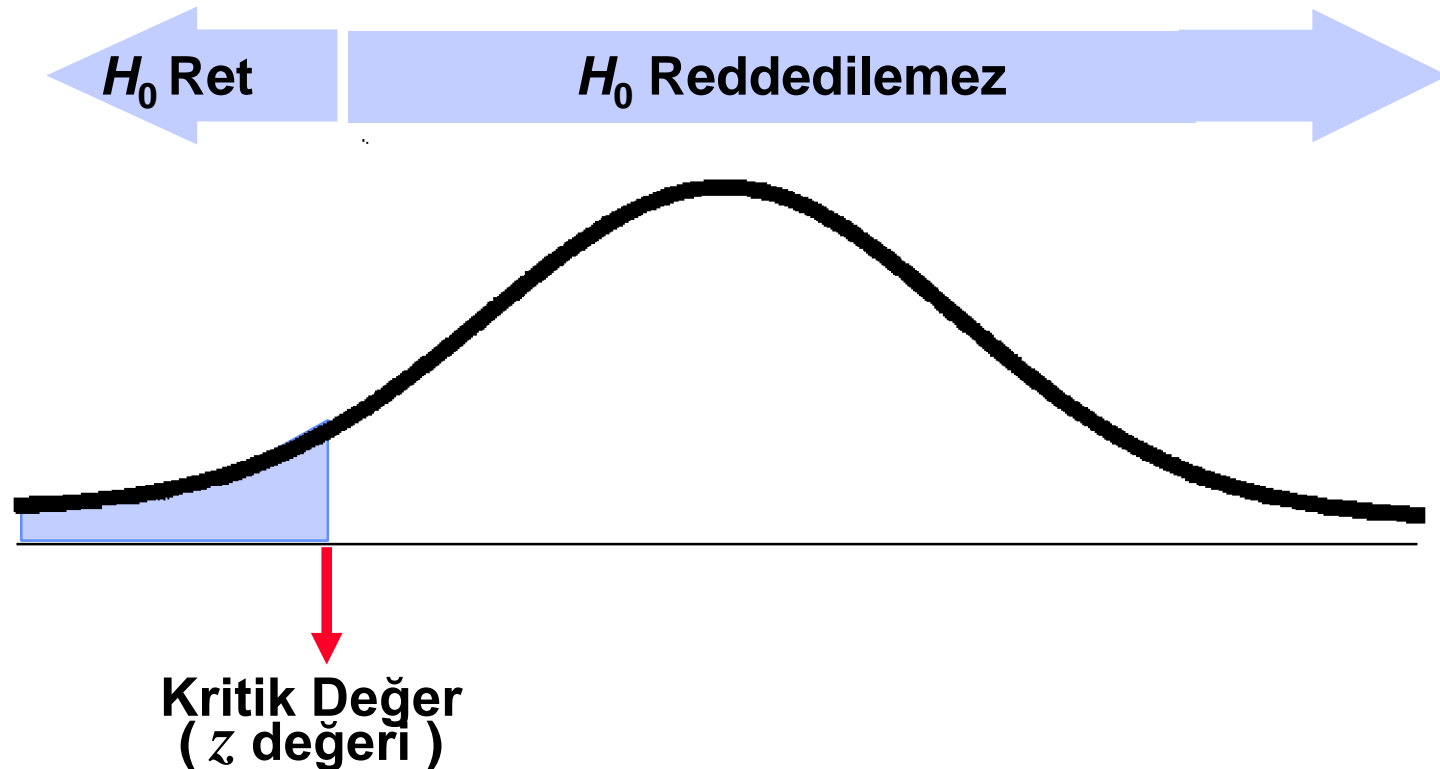


Önem Seviyesi

- ❖ α ile gösterilir.
- ❖ Sıfır hipotezi gerçekte doğru iken, test istatistiğinin ret bölgesine düşmesi olasılığıdır.
- ❖ Genellikle 0.05, 0.01, veya 0.10 seçilir.

Kritik Değer

Ret bölgesi ile kabul bölgesini ayıran değer veya değerler.

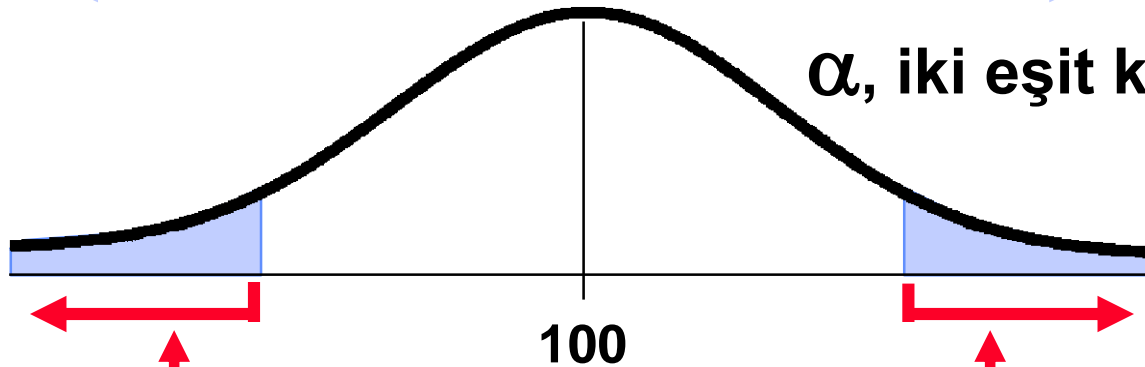


Çift Taraflı Test

$$H_0: \mu = 100$$

(ADÜ PDR öğrencilerin IQ düzeyi ile Türkiye ortalaması arasında fark yoktur.)

$$H_1: \mu \neq 100$$



100'den anlamlı derecede farklı olan değerler

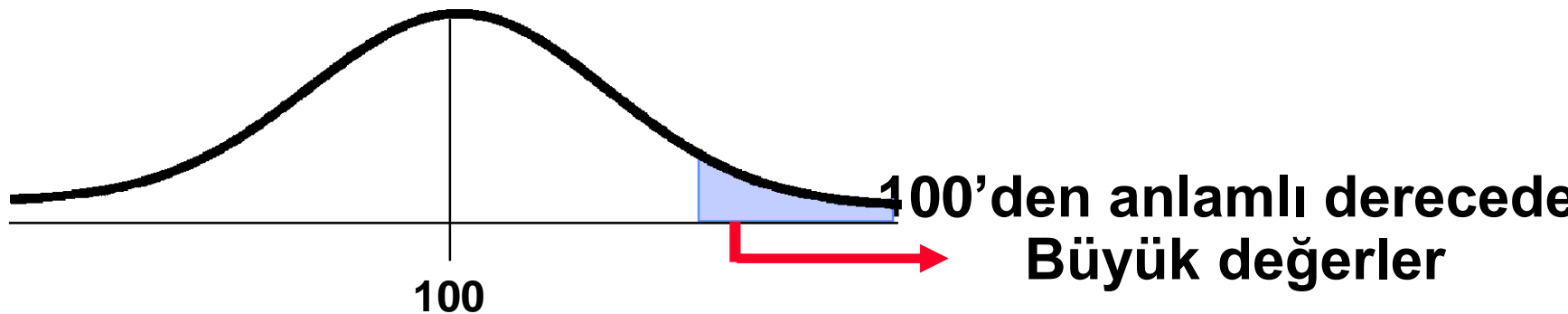
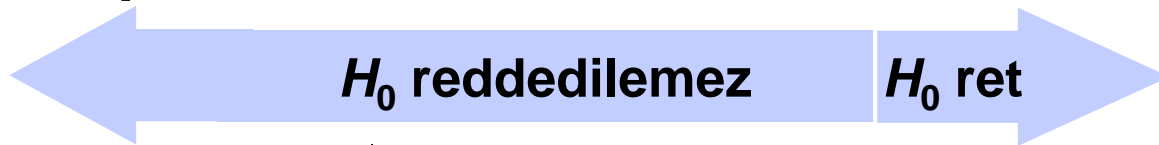
Tek Taraflı Test

$$H_0: \mu = 100$$

(ADÜ PDR öğrencilerin IQ düzeyi Türkiye ortalamasının üzerinde değildir.)

Ret bölgesi sağda

$$H_1: \mu > 100$$

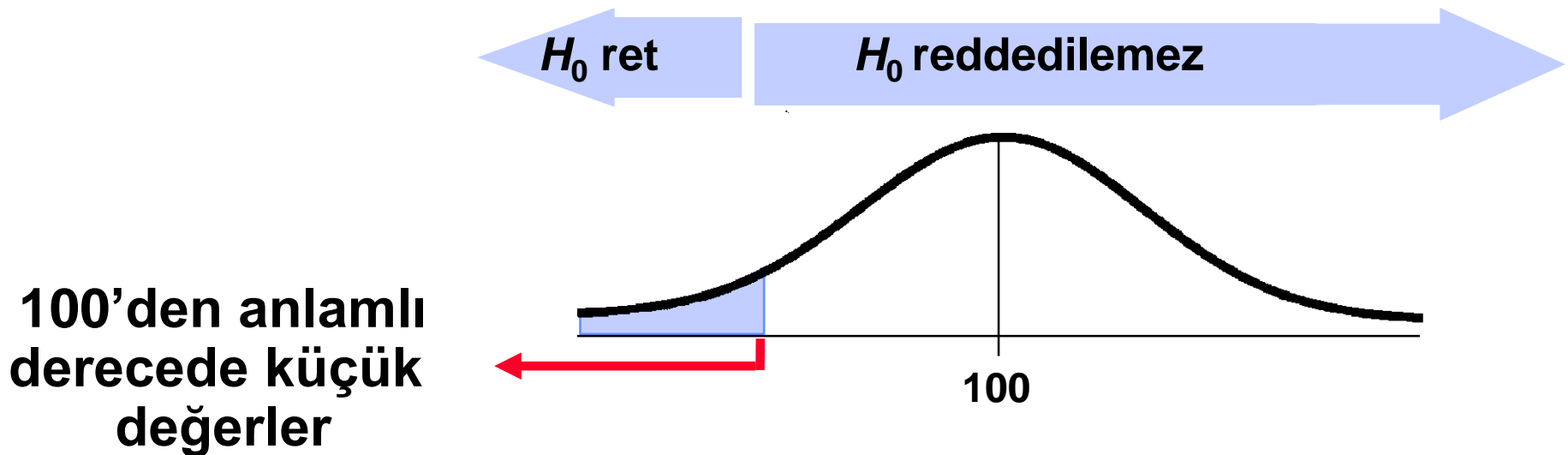


Tek Taraflı Test

$$H_0: \mu = 100$$

$$H_1: \mu < 100$$

Ret bölgesi
solda

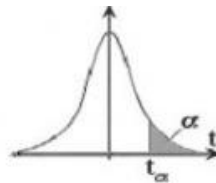


Hipotez Testlerinde Hatalar

Tip I ve Tip II Hatalar

		Sıfır hipotezi DOĞRU	Sıfır hipotezi YANLIŞ
KARAR	Sıfır hipotezi RET	Tip I hata α	Doğru karar (Testin gücü) $1 - \beta$
	Sıfır hipotezi REDDEDİLEMEZ	Doğru karar $1 - \alpha$	Tip II hata β

$\alpha=0,05$ ise yanılma/hata payı %5 olacaktır. Buna göre aldığı kararın doğru olma olasılığı %95 olur.



TEK YÖNLÜ (BİR YANLI) TEST İÇİN α												
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
İKİ YÖNLÜ (İKİ YANLI) TEST İÇİN α												
	0.50	0.40	0.30	0.20	0.10	0.05	0.04	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
sd												
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.710	15.890	31.820	63.660	127.300	318.300	636.600
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	4.849	6.965	9.925	14.090	22.330	31.600
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	3.482	4.541	5.841	7.453	10.210	12.920
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	2.999	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	2.757	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	2.612	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.517	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.449	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.398	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.359	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.328	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.303	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.282	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.264	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.249	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.235	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.224	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.214	2.552	2.878	3.197	3.611	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.205	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.197	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.189	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.183	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.177	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.172	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.167	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.162	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.150	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.154	2.467	2.763	3.047	3.408	3.614
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.150	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.147	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.631	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.123	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.295	1.676	2.009	2.109	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.099	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.088	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.081	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
1000	0.675	0.842	1.037	1.282	1.646	1.962	2.056	2.330	2.581	2.813	3.098	3.300
∞	0.674	0.841	1.036	1.282	1.640	1.960	2.054	2.326	2.576	2.807	3.091	3.291

Ortalama ile ilgili bir iddianın testi: Büyük örnekler

Varsayımlar

- 1) Örnek, basit şans örneğidir.
- 2) a) Örnek büyüktür ($n \geq 30$) veya,
b) Anakütlenin dağılışı normaldir ve σ bilinmektedir.
- 3) $n \geq 30$ iken, σ bilinmiyorsa, örnek standart sapması s , anakütle standart sapması σ yerine kullanılabilir..

Test İstatistiği

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Karar Kriteri

Test istatistiği ret bölgesine düşüyorsa, **sıfır hipotezi reddedilir.**

Test istatistiği ret bölgesine düşmüyorsa, **sıfır hipotezi reddedilemez.**

Çift Taraflı Z Testine Örnek:

Bir fabrikada üretilmekte olan vidaların boylarının ortalaması 100 mm, ve standart sapması 2 mm olan normal dağılım gösterdikleri bilinmektedir. Makinalarda olan bir arıza giderildikten sonra üretilen vidalardan alınan 9 vidalık bir örneğin boy ortalaması 102 mm olarak bulunmuştur. **Makinalardaki arıza giderilirken vidaların boyunun ayarı bozulmuş mudur?** $\alpha=0.05$ için test ediniz ve yorumlayınız.

1. Adım: Hipotezlerin belirlenmesi

$$H_0 : \mu = 100mm$$

$$H_1 : \mu \neq 100mm$$

2. Adım: Test istatistiğinin hesaplanması

$$Z_{hesap} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{102 - 100}{2 / \sqrt{9}} = 3$$

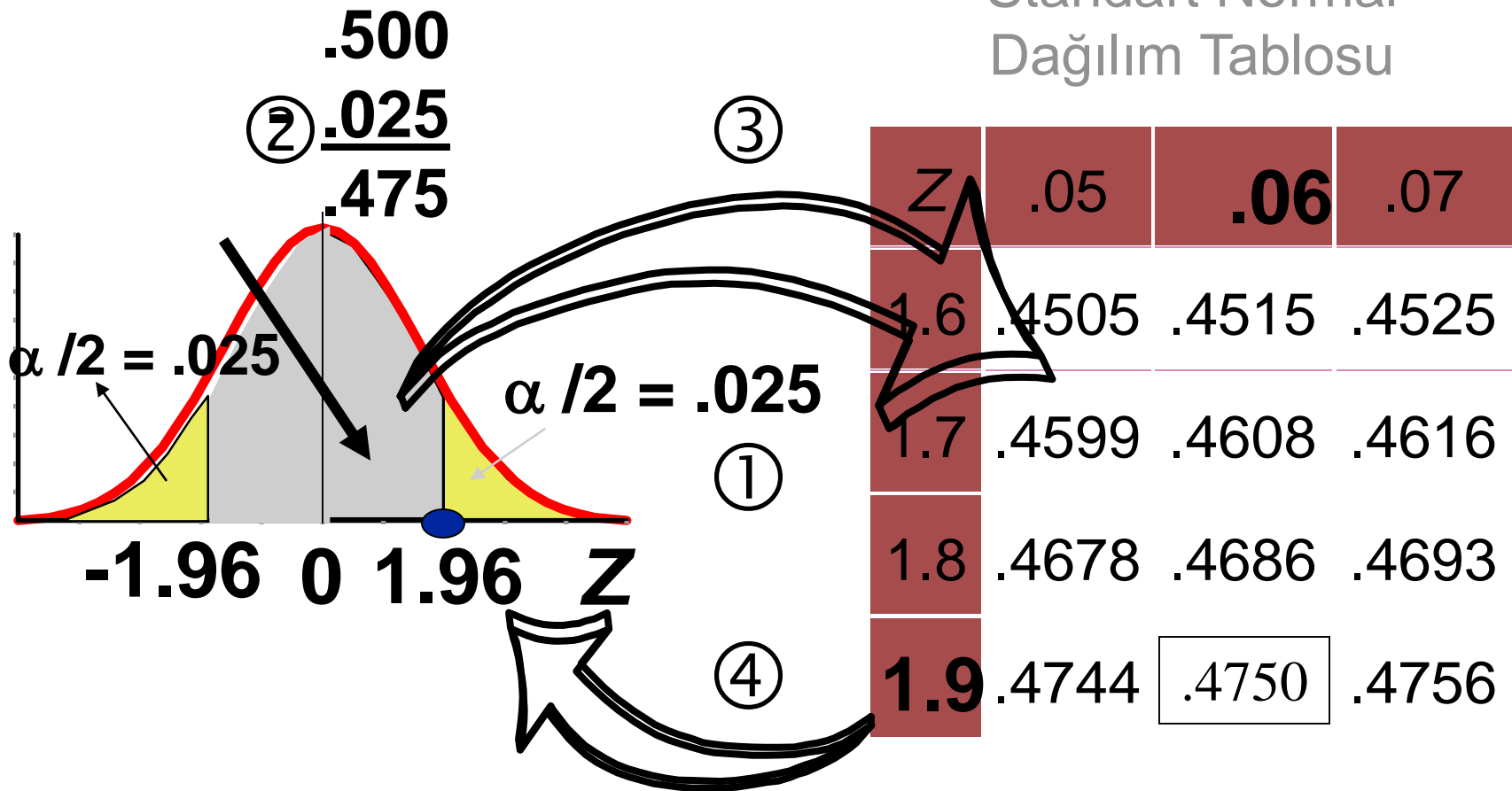
$$\mu = 100mm$$

$$\sigma = 2mm$$

$$n = 9$$

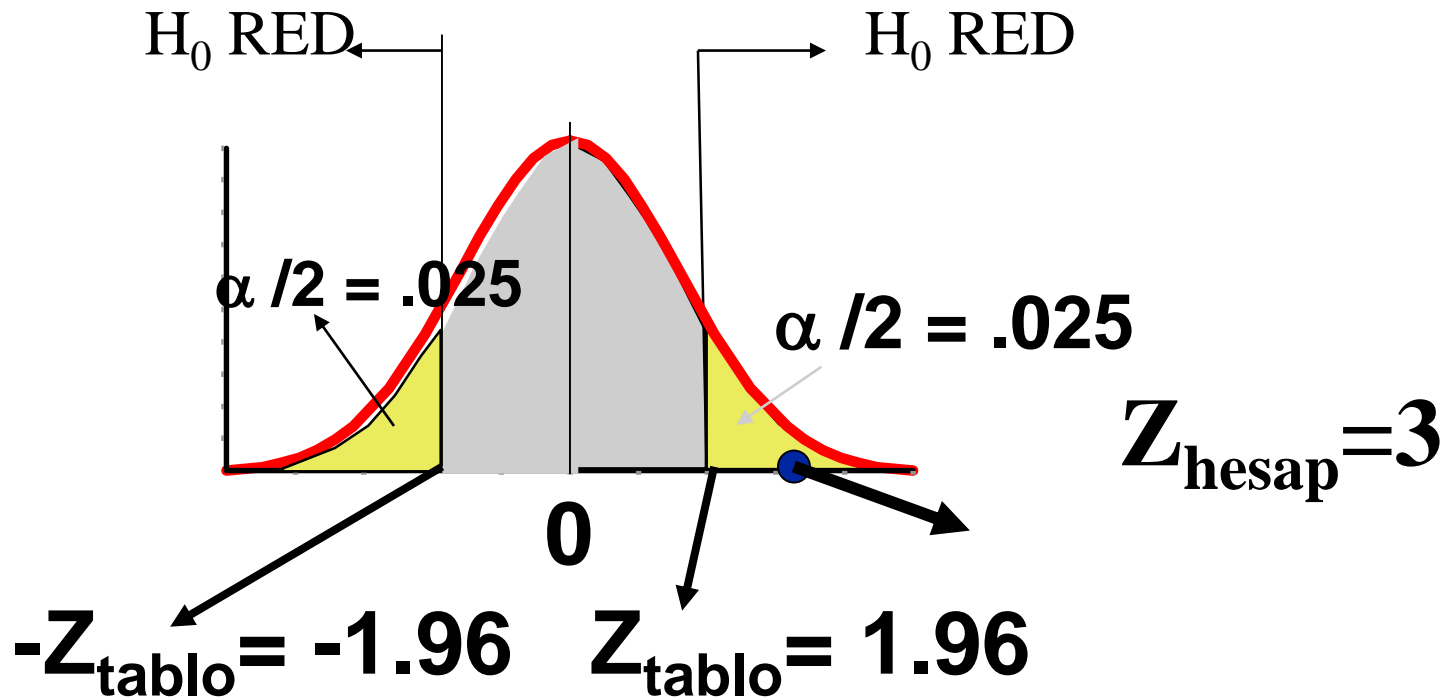
$$\bar{X} = 102mm$$

3. Adım: Kritik değerlerin belirlenmesi:



4. Adım: İstatistiksel karşılaştırmanın yapılması:

$$Z_{hesap} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{102 - 100}{2 / \sqrt{9}} = 3 \quad \text{idi}$$



5. Adım: Karar verme ve yorumlama:

Z_{hesap} değeri H_0 red bölgesine düştüğü için H_0 hipotezi reddedilir, yani vidaları boy ortalaması 100 mm'den farklıdır, makinanın ayarı bozulmuştur.

Tek Taraflı Z Testi Örneği

- Bir kutu mısır gevreğinin ağırlığının üzerinde yazan **368 gr'dan fazla olduğu iddia edilmektedir**. Ayrıca normal dağılım varsayımı altında $\sigma = 15$ gram olduğunu belirtmiştir. $n = 25$ kutuluk bir örnek alınmış ve $\bar{X} = 372.5$ gr. olarak bulunmuştur. 0.05 seviyesinde test ediniz.

$$H_0: \mu = 368$$

$$H_1: \mu > 368$$

$$\alpha = 0.05$$

$$n = 25$$

Kritik değer:

Çözüm

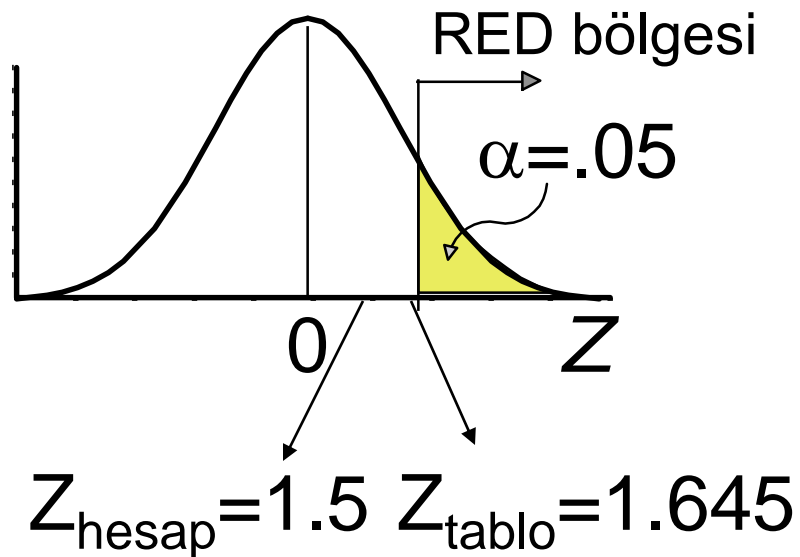
$$H_0: \mu = 368$$

$$H_1: \mu > 368$$

$$\alpha = 0.05$$

$$n = 25$$

- Kritik değer:



Test İstatistiği:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{372.5 - 368}{\frac{15}{\sqrt{25}}} = +1.50$$

Karar:

$\alpha = .05$ için H_0 hipotezi reddedilemez.

Yorum:

Ortalamanın 368 gr.dan fazla olduğuna dair yeterli kanıt yoktur.

Çift Taraflı Z testi örneği:

Bu sene DEÜ.İİBF İktisat bölümünden mezun olacak öğrencilerin mezuniyet not ortalamalarının 70 olduğu belirtilmekte ancak öğrenciler 70'den farklı olduğunu iddia etmektedirler. Bu amaçla mezuniyet sonrası 36 öğrencilik bir örnek alınmış ve mezuniyet ortalamalarının 66, standart sapmasının 12 olduğu bulunmuştur. Bu veriler ışığında iddiayı $\alpha=0.01$ için test ediniz.

$$H_0 : \mu=70$$

$$H_1 : \mu \neq 70$$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_{\bar{X}}}{s_{\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{66 - 70}{12 / 6} = \frac{-4}{2} = -2$$

III. $\alpha = 0.01$ için z tablo değeri 2.58

IV. $|z_{hes}| < |z_{tab}|$ H_0 red edilemez.

Ortalama ile ilgili bir iddianın testi: Küçük örnekler

Varsayımlar

- 1) Örnek, bir basit şans örneğidir.
- 2) Örnek, bir **küçük** örnektir ($n < 30$).
- 3) Anakütle standart sapması σ bilinmemektedir.
- 4) Anakütlenin dağılışı normaldir.

Test İstatistiği

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_{\bar{x}}}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Kritik Değerler

- ❖ t tablosundan bulunur.
- ❖ Serbestlik Derecesi (df) = $n - 1$

ÖRNEK

Bir konserve fabrikasının imal ettiği konservelerin üzerinde ortalama ağırlık 455 gr yazmaktadır. Bu konservelerin ortalama ağırlıkları ile ilgili bir karar vermek üzere rastgele seçilen 17 kutunun ortalama ağırlığı 450 gr ve standart sapması 13 gr bulunmuştur. Ağırlıkların normal dağılım gösterdiği varsayımı altında ortalama ağırlığın 455 gr olup olmadığını 0.05 önem seviyesinde test ediniz.

$$n = 17$$

$$v = n - 1 = 16$$

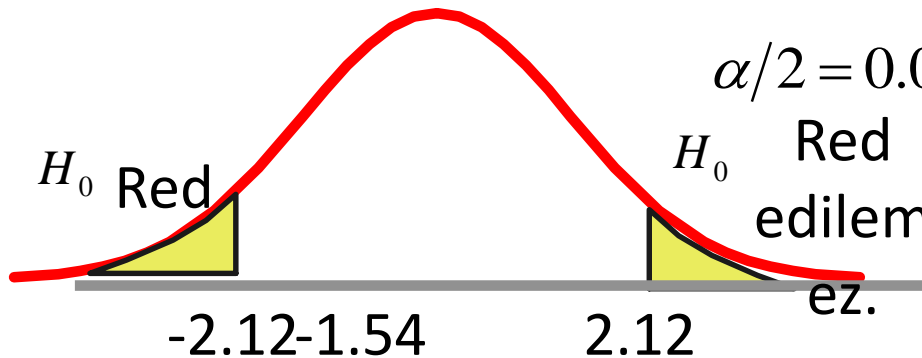
$$H_0 : \mu = 455$$

$$\bar{X} = 450 \text{ gr.}$$

$$H_1 : \mu \neq 455$$

$$s = 13 \text{ gr.}$$

$$t_{tab} = \pm 2.12$$



$$t_h = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{450 - 455}{\frac{13}{\sqrt{16}}} \cong -1.54$$

ÖRNEK: Bir otomobil firması yeni geliştirdiği teknoloji ile ürettiği akülerin ortalama dayanma süresi olan 42 ayın değiştiği ve artık akülerinin ortalama dayanma süresinin 42 ayın üzerinde olduğunu iddia etmektedirler. Akülerin dayanma sürelerinin normal dağılım gösterdiği varsayımı altında bu iddiayı araştırmak üzerine 10 adet akü örnek olarak seçilmiş ve dayanma süreleri ay olarak aşağıdaki biçimde bulunmuştur:

42, 36, 40, 39, 35, 43, 45, 43, 41, 46 $\alpha=0.05$ önem seviyesi için üreticinin iddiasını test ediniz.

$$H_0 : \mu = 42$$

$$H_1 : \mu > 42$$

$$\alpha = 0,05$$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{S_x^-} = \frac{\bar{x} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad t_{0,05,9} = 1,833 > |t_h = -0,88|$$

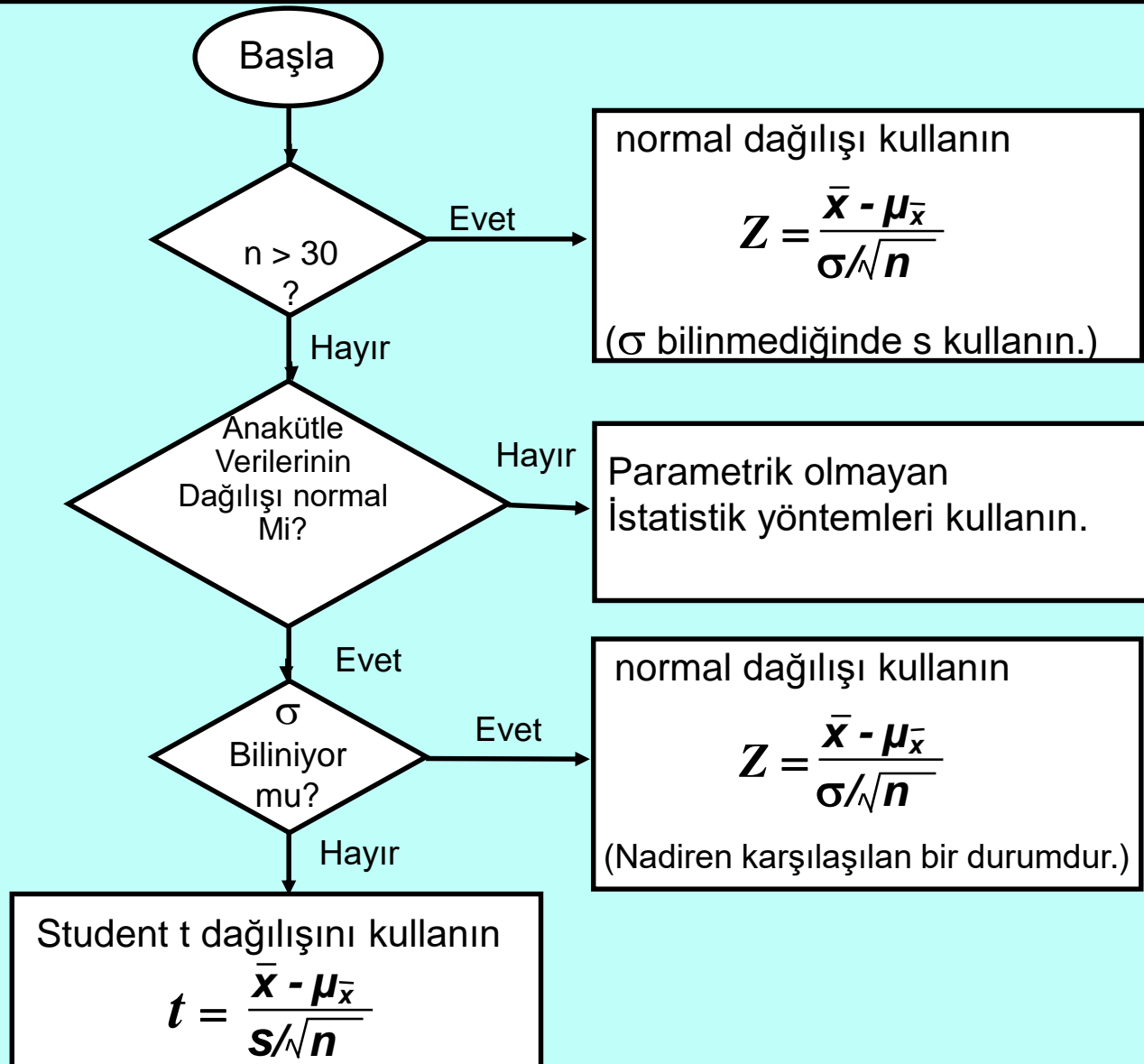
$$t_h = \frac{41 - 42}{3,59 / \sqrt{10}} = -0,88$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{410}{10} = 41$$

H_0 Red edilemez

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 - n\bar{x}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16926 - 10(41)^2}{9}} = 3,59$$

Anakütle Ortalaması μ İçin Hipotez Testleri



Bir oran ile ilgili bir iddianın testi

Varsayımlar

- 1) Örnek, bir basit şans örneğidir.
- 2) Binom denemeleri için gerekli koşullar sağlanmıştır.
- 3) $np \geq 5$ ve $nq \geq 5$ sağlanmıştır. Böylece, başarı sayısının dağılışı, normal dağılışa yaklaşır.

$$\mu = n\pi \text{ ve } \sigma = \sqrt{n\pi(1-\pi)}$$

Notasyon

n = deneme sayısı

$p=x/n$ (örnek başarı oranı)

**$\pi=$ *anakütle* başarı oranı (sıfır
hipotezinde kullanılır)**

$q = 1 - \pi$

Test İstatistiği

$$Z = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}}$$

ÖRNEK

Bir süpermarketler zinciri sahibi müşterilerinin %95'inin süpermarketlerdeki fiyatlardan memnun olduğunu söylemektedir. Tesadüfi olarak seçilen 200 müşteriden 184'ü fiyatlardan memnun olduğunu bildirmektedir.%1 önem düzeyinde, süpermarketteki fiyatlardan memnun olanların oranının %95'e eşit olmadığını söyleyebilir miyiz?

$$H_0 : \pi = 0,95 \quad \alpha = 0.01 \quad p = 184/200 = 0.92$$

$$H_1 : \pi \neq 0,95 \quad Z_{tab} = \pm 2.58$$

$$Z = \frac{p - \pi}{\sigma_p} = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi(1 - \pi)}{n}}} = \frac{0.92 - 0.95}{\sqrt{\frac{0.95(1 - 0.95)}{200}}} = -1.95$$

H_0 **reddedilemez**