Peter Philip,
Paula Reichert, Lukas Emmert

Sommersemester 2024

Analysis 2 (Statistik)
Hausaufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben seien der $\mathbb{R}$-Vektorraum $C([0,1]) := \{f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f \text{ ist stetig}\}$ und die Funktion

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : C([0,1]) \times C([0,1]),\ \langle f,g\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

Zeigen Sie, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $C([0,1])$ ist.

Hinweis: Sie können die folgende Aussage ohne Beweis verwenden (Sie können auch gerne versuchen, die Aussage zu beweisen).

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}_0^+$ eine nichtnegative Funktion. Falls f auf I stetig ist, dann gilt:

$$\int_I f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0 \quad \text{auf} \quad I.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum und $||\cdot||$ die vom Skalarprodukt induzierte Norm. Beweisen Sie, dass dann die sogenannte Parallelogrammidentität gilt, nämlich

$$2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x+y||^2 + ||x-y||^2 \quad \forall x,y \in X.$$

Finden Sie außerdem ein Beispiel, das zeigt, dass die Parallelogrammidentität für die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$ nicht gilt.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, dass

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n)^2 \le (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)$$

für alle $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$.

Abgabe bis Montag, 27.05.24, 12 Uhr auf Moodle als ein pdf-Dokument.