LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Dicle Üniversitesi - Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

Uzaktan Eğitim

26 - 30 Nisan 2021

Sınırlı Fonksiyonlar için Lebesgue İntegrali (Hatırlatma)

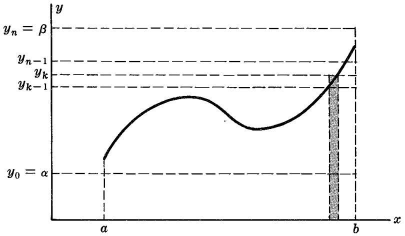
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir olsun. f fonksiyonu sınırlı fonksiyon olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için

$$\alpha < f(x) < \beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları vardır.

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ değerlerini seçerek $[\alpha, \beta]$ görüntü aralığını n tane alt aralığa bölelim.



$P = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ kümesine $[\alpha, \beta]$ aralığının bir parçalanması veya bir bölüntüsü adı verilir. $[\alpha, \beta]$ aralığının tüm bölüntülerinin ailesini $\mathcal{P}[\alpha, \beta]$ ile ve eğer başka bir aralık söz konusu değil ise sadece $\mathcal{P}$ ile gösterelim.

$$E_k = \{x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

olsun. f fonksiyonu ölçülebilir olduğundan her bir E_k kümesi ölçülebilirdir ve ayrıktır.

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \qquad \text{üst toplam}$$

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \qquad \text{alt toplam}$$

$k = 1, 2, ..., n$ için $y_{k-1} < y_k$ ve $m(E_k) \geq 0$ olduğundan $k = 1, 2, ..., n$ için

$$y_{k-1} m(E_k) \leq y_k m(E_k)$$

yazılabilir. Bu yüzden

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leq S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k)$$

elde edilir.

$k = 1, 2, ..., n$ için $y_k \geq \alpha$ olduğundan $k = 1, 2, ..., n$ için

$$y_k m(E_k) \geq \alpha m(E_k)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikten $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ olmak üzere

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \geq \alpha \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \alpha m(E)$$

yazılabilir. Üst toplamlar alttan $\alpha m(E)$ ile sınırlıdır.

$k = 1, 2, ..., n$ için $y_{k-1} \leq \beta$ olduğundan $k = 1, 2, ..., n$ için

$$y_{k-1} m(E_k) \leq \beta m(E_k)$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikten $E = \bigcup_{k=1}^{n} E_k$ olmak üzere

$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \leq \beta \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \beta m(E)$$

yazılabilir. Alt toplamlar üstten $\beta m(E)$ ile sınırlıdır.

$$I = \inf_{P\in\mathcal{P}} S = \overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \text{üst Lebesgue integrali}$$

$$J = \sup_{P\in\mathcal{P}} s = \underline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \text{alt Lebesgue integrali}$$

Her P bölüntüsü için S alttan sınırlı olduğundan I daima vardır. Benzer şekilde her P bölüntüsü için s toplamı üstten sınırlı olduğu için J daima vardır.

$$S \geq I \geq J \geq s$$

olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem

f fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olması için g.v.y.k. verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $S - s < \varepsilon$ olacak şekilde bir P bölüntüsünün var olmasıdır.

Teorem

f fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olması için g.v.y.k. verilen her $\varepsilon > 0$ sayısı için $S - s < \varepsilon$ olacak şekilde bir P bölüntüsünün var olmasıdır.

İspat:

$\Leftarrow$: Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $S - s < \varepsilon$ olacak şekilde bir P bölüntüsü var olsun. Bu durumda

$$0 \leq I - J \leq S - s < \varepsilon$$

olduğundan $I = J$ elde edilir, yani f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilirdir.

:$\Rightarrow$ $I = J$ olsun. $\varepsilon > 0$ sayısı için $S < I + \frac{\varepsilon}{2}$ ve $s > J - \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde bir P bölüntüsü vardır. Bu durumda

$$S - s < \left(I + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(J - \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

elde edilir.

Teorem

$f \in B[a, b]$ olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem

$f \in B[a,b]$ olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

İspat:

f fonksiyonu sınırlı olduğundan, $y_k - y_{k-1} < \frac{\varepsilon}{b-a}$ olacak şekilde bir P bölüntüsü seçilebilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1})\, m(E_k) \\ &< \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} m(E_k) \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} m(E_k) = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki bu f fonksiyonun Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösterir.

Teorem

f fonksiyonu ölçülebilir bir E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) \geq 0$ ve $\int\limits_E f(x)dx = 0$ ise bu durumda E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) = 0$ dır.

Teorem

f fonksiyonu ölçülebilir bir E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) \geq 0$ ve $\int_E f(x)dx = 0$ ise bu durumda E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) = 0$ dır.

İspat:

f sınırlı fonksiyon olduğundan $\forall x \in E$ için $0 \leq f(x) \leq M$ olcak şekilde bir $M \in \mathbb{R}$ sabiti vardır.

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in E : f(x) = 0\} \\ E_k &= \left\{x \in E : \frac{M}{k} < f(x) \leq \frac{M}{k-1}\right\} \qquad k = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

kümelerini göz önüne alalım. f fonksiyonu E kümesi üzerinde ölçülebilir olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{M}$ dir.

İspatın Devamı:

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olduğundan $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ olmak üzere sayılabilir toplamsallık özelliğinden $m(E) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(E_k)$ yazılabilir. $k = 2, 3, ..m$ için

$$\frac{M}{k} m(E_k) \leq \int_{E_k} f(x)dx \leq \frac{M}{k-1} m(E_k)$$

olduğundan

$$m(E_k) \leq \frac{k}{M} \int_{E_k} f(x)dx \leq \frac{k}{M} \int_{E} f(x)dx = 0$$

elde edilir. $m\left(E - E_1\right) = 0$ olduğundan yani f fonksiyonunun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesi sıfır ölçümlü olduğundan E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f\left(x\right) = 0$ dır.

Teorem (Sınırlı Yakınsama Teoremi)

E kümesi ölçülebilir olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

(a) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x); \qquad x \in E$

(b) (f_n) fonksiyon dizisi düzgün sınırlı yani $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x)| \leq M$ o.ş. bir $M > 0$ sayısı varsa, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem (Sınırlı Yakınsama Teoremi)

E kümesi ölçülebilir olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x); \qquad x \in E$

(b) (f_n) fonksiyon dizisi düzgün sınırlı yani $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x)| \leq M$ o.ş. bir $M > 0$ sayısı varsa, bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliği geçerlidir.

İspat:

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E$ için $|f_n(x)| \leq M$ ve $\forall x \in E$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ olduğundan $|f(x)| \leq M$ dir. f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir olduğundan integrallenebilirdir.

İspatın Devamı:

$$\lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliğini ispatlamak için

$$\lim_{n\to\infty}\int_E [f(x) - f_n(x)]\, dx = 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left|\int_E [f(x) - f_n(x)]\, dx\right| \leq \int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0$$

olduğunu gösterilirse istenen sonuç elde edilir.

İspatın Devamı:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in E : |f(x) - f_1(x)| < \varepsilon, |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon, ...\} \\
E_2 &= \{x \in E : |f(x) - f_1(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_2(x)| < \varepsilon, ...\} \\
E_3 &= \{x \in E : |f(x) - f_2(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_3(x)| < \varepsilon, ...\} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
E_n &= \{x \in E : |f(x) - f_{n-1}(x)| \geq \varepsilon, |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon, ...\} \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ yazılabilir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{M}$ ve $i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ dir. $S_n = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$ ve $R_n = \bigcup\limits_{k=n+1}^{\infty} E_k$ olmak üzere

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx = \int_{S_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx + \int_{R_n} |f(x) - f_n(x)|\, dx$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

S_n üzerinde $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ dur. $|f_n(x)| \leq M$ ve $|f(x)| \leq M$ olduğundan R_n üzerinde

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x)| + |f_n(x)| \leq 2M$$

yazılabilir. Böylece

$$\int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \varepsilon m(S_n) + 2Mm(R_n)$$

eşitsizliği elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} m(S_n) = m(E)$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} m(R_n) = 0$ olduğundan

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx \leq \varepsilon m(E)$$

bulunur. $\varepsilon \to 0$ iken $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int_E |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0$ elde edilir ki bu ispatı tamamlar.

Örnek

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$(a)\ \int_0^{\pi} \sin x dx$

Örnek

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

$(a)\ \int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx$

$(b)\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

Örnek

Aşağıdaki integralleri hesaplayınız.

(a) $\int\limits_0^\pi \sin x dx$

(b) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{1+x^2}$

Çözüm

(a) $f(x) = \sin x$ fonksiyonu $E = [0, \pi]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralıkta Riemann integrallenebilirdir. Bu yüzden

$$\int\limits_0^\pi \sin x dx = (\Re) \int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = 2$$

Örnek

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ ise $\int\limits_{\mathbb{Q}} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ ise $\int\limits_{\mathbb{Q}} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$m(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{Q}} f(x)dx = 2m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Örnek

$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2$ ise $\int\limits_{\mathbb{Q}} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$m(\mathbb{Q}) = 0$ olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{Q}} f(x)dx = 2m(\mathbb{Q}) = 0.$$

Örnek

C, Cantor kümesi olmak üzere C üzerinde $f(x) = 3$ ise $\int\limits_{C} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integralin değerini bulunuz.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integralin değerini bulunuz.

Çözüm (1)

$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = 0$ olmak üzere $E = [0,1]$ üzerinde h.h.h.y. $f = g$ dir. Bu yüzden

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx = 0$$

elde edilir.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integralin değerini bulunuz.

Çözüm (1)

$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(x) = 0$ olmak üzere $E = [0,1]$ üzerinde h.h.h.y. $f = g$ dir. Bu yüzden

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx = 0$$

elde edilir.

Çözüm (2)

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} 1dx + \int_{\mathbb{I}\cap[0,1]} 0dx = 0$$

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ x^3-2 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ olmak üzere

$\int\limits_{[0,1]} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ x^3-2 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ olmak üzere $\int\limits_{[0,1]} f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

$g:[0,1]\to\mathbb{R},\ g(x)=x^3-2$ olmak üzere $E=[0,1]$ üzerinde h.h.h.y. $f=g$ dir. Bu yüzden

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,1]} f(x)dx &= \int\limits_{[0,1]} g(x)dx \\ &= (\Re)\int_0^1 \left(x^3-2\right)dx \\ &= \frac{-7}{4}\end{aligned}$$

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ olsun.Riemann integrallenebilirlik için Lebesgue koşulundan yararlanarak $f\notin\Re[0,1]$ olduğunu ifade ediniz.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ olsun.Riemann integrallenebilirlik için Lebesgue koşulundan yararlanarak $f\notin\Re[0,1]$ olduğunu ifade ediniz.

Çözüm

f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E=[0,1]$ dir.
$m(E)=1\neq 0$ olduğundan $f\notin\Re[0,1]$ dir.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x\in\mathbb{Q}\\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ olsun.Riemann integrallenebilirlik için Lebesgue koşulundan yararlanarak $f\notin\Re[0,1]$ olduğunu ifade ediniz.

Çözüm

f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E=[0,1]$ dir. $m(E)=1\neq 0$ olduğundan $f\notin\Re[0,1]$ dir.

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad x=0\\ \frac{1}{q} & ; \quad x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}-\{0\} \text{ ve } (p,q)=1\\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases}$ olsun. Riemann integrallenebilirlik için Lebesgue koşulundan yararlanarak $f\in\Re[0,1]$ olduğunu ifade ediniz. $(\Re)\int\limits_0^1 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm

f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ kümesidir. $m(E) = 0$ olduğundan $f \in \Re[0,1]$ dir. $g(x) = 0$ olmak üzere $[0,1]$ üzerinde h.h.h.y. $f = g$ dir.

$$(\Re) \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 0$$

Çözüm

f fonksiyonunun süreksiz olduğu noktalar kümesi $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ kümesidir. $m(E) = 0$ olduğundan $f \in \Re[0,1]$ dir. $g(x) = 0$ olmak üzere $[0,1]$ üzerinde h.h.h.y. $f = g$ dir.

$$(\Re) \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 0$$

Örnek

C, Cantor kümesi olmak üzere $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in C \\ 0 & ; \quad x \notin C \end{cases}$ olsun. f fonksiyonu Riemann integrallenebilir midir? $(\Re) \int_0^1 f(x)dx$ integralini hesaplayınız.

Örnek

Sınırlı yakınsama teoremini kullanarak

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Çözüm

$\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için f_n fonksiyonları sürekli olduğundan f_n fonksiyonları ölçülebilirdir.

(a) $\forall x \in [0,1]$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} = e^{-x}$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in [0,1]$ için

$$|f_n(x)| = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} \leq 1$$

olduğundan (f_n) fonksiyon dizisi düzgün sınırlıdır. Sınırlı yakınsama teoremi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^{-n} dx = \int_0^1 e^{-x} dx = 1 - e^{-1}$$

Örnek

Sınırlı yakınsama teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^n}$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek

Sınırlı yakınsama teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek

Sınırlı yakınsama teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n+1}{x^n+2}dx$$

ifadesini hesaplayınız.

Örnek

Sınırlı yakınsama teoremi yardımıyla

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^2 \frac{x^n}{x^n+1} dx = 1$$

olduğunu gösteriniz.