2016 Wiederholungsklausur, Antworten

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018) (Technische Universität München)

Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
M. Gottschau, D. Kraft, S. Schraink, R. Stotz

Sommersemester 2016
Lösungen der Klausur
11. Oktober 2016

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Name	Vorname	Matrikelnummer	
....	....	....	
Hörsaal	**Reihe**	**Sitzplatz**	**Unterschrift**
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise zur Klausur

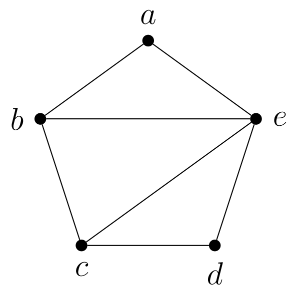
- Die Angabe der Klausur umfasst sechs Aufgaben.
- Schreiben Sie weder mit Bleistift, noch mit roter oder grüner Farbe.
- Außer Ihren Schreibutensilien und einem handgeschriebenen DIN-A4-Blatt sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind zu begründen.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Korrektor
Gesamt	8	8	5	6	6	7	40	
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Aufgabe 1 (2+2+4 Punkte)

Die Spinne Alfons wohnt in einem Netz, das aus den Knoten a, b, c, d und e besteht. Die Kanten des Netzes sind in der folgenden Skizze eingezeichnet:



Um sein Netz wohnlicher zu gestalten, beschließt Alfons jeden Konten zufällig in einer der Farben Rot, Grün oder Blau anzumalen. Hierbei sei jede mögliche Färbung der Knoten gleich wahrscheinlich.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben, unter der Bedingung, dass Alfons a rot und b blau anstreicht. Zwei Knoten gelten als benachbart, wenn sie über eine Kante verbunden sind.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es zwei benachbarte Knoten mit derselben Farbe gibt.

3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es drei paarweise benachbarte Knoten mit derselben Farbe?

Lösungsvorschlag

1. Sei Ω die Menge aller Färbungen des Graphen und E das Ereignis, dass keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Des Weiteren sei F das Ereignis, dass a rot und b blau angestrichen ist. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr[E \mid F]$. Da alle Färbungen laut Angabe gleich wahrscheinlich sind, können wir vereinfachen zu
$$\Pr[E \mid F] = \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[F]} = \frac{|E \cap F|/|\Omega|}{|F|/|\Omega|} = \frac{|E \cap F|}{|F|}.$$
Um die Anzahl der Färbungen zu bestimmen, die sowohl in E als auch in F sind, machen wir die folgende Beobachtung: Ist a rot und b blau, dann muss e in jeder Färbung die in E enthalten ist grün sein. Da b blau und e grün ist muss außerdem c rot sein. Mit demselben Argument folgt aus der Färbung von e und c, dass d blau sein muss. Somit gibt es nur eine Färbung in $E \cap F$.

   Kommen wir nun zur Kardinalität von F. Da die Farben von a und b bereits bestimmt sind, gibt es noch $3^3 = 27$ Möglichkeiten die verbleibenden 3 Knoten mit jeweils einer der 3 Farben anzustreichen. Insgesamt erhalten wir $\Pr[E \mid F] = 1/27$.

2. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[\Omega \setminus E]$. Diese Wahrscheinlichkeit lässt sich am besten über das Gegenereignisses E bestimmen. Hierfür betrachten wir zunächst die Anzahl aller möglichen Färbungen. Diese entspricht genau der Anzahl an Möglichkeiten, jedem der 5 Knoten eine der 3 Farben zuzuordnen. Es gilt also $|\Omega| = 3^5 = 243$.

   Kommen wir nun zur Anzahl an Färbungen, für die keine zwei benachbarten Knoten dieselbe Farbe haben. Bei jeder solchen Färbung müssen a und b unterschiedlich gefärbt sein. Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir außerdem, dass jede solche Färbung von a und b die Farben der restlichen Knoten eindeutig festlegt. Da es $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten gibt a und b mit unterschiedlichen Farben einzufärben, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[\Omega \setminus E] = 1 - \Pr[E] = 1 - \frac{|E|}{|\Omega|} = 1 - \frac{6}{243} = 1 - \frac{2}{81} = \frac{79}{81}.$$

3. Sei $G_{x,y,z}$ das Ereignis, dass die paarweise verschiedenen Knoten x, y und z dieselbe Farbe haben. In diesem Fall gibt es 3 mögliche Färbungen für x, y und z. Außerdem gibt es 3^2 Möglichkeiten, die verbleibenden 2 Knoten des Graphen einzufärben. Wir schließen, dass

$$\Pr[G_{x,y,z}] = \frac{|G_{x,y,z}|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 3^2}{243} = \frac{1}{9}.$$

   Seien außerdem $G_{w,x,y,z}$ und $G_{v,w,x,y,z}$ die Ereignisse, dass die paarweise verschiedenen Knoten w, x, y und z bzw. v, w, x, y und z dieselbe Farbe haben. Mit einem ähnlichen Argument wie oben erhalten wir

$$\Pr[G_{w,x,y,z}] = \frac{|G_{w,x,y,z}|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 3^1}{243} = \frac{1}{27}$$

   und

$$\Pr[G_{v,w,x,y,z}] = \frac{|G_{v,w,x,y,z}|}{|\Omega|} = \frac{3 \cdot 3^0}{243} = \frac{1}{81}.$$

   Insgesamt gibt es genau 3 Teilmengen von jeweils 3 Knoten, die paarweise benachbart sind, nämlich $\{a, b, e\}$,$\{b, c, e\}$ und $\{c, d, e\}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit lautet daher $\Pr[G_{a,b,e} \cup G_{b,c,e} \cup G_{c,d,e}]$. Mit Hilfe der Siebformel lässt sich dieser Ausdruck auflösen zu

$$\begin{aligned}
\Pr[G_{a,b,e} \cup G_{b,c,e} \cup G_{c,d,e}] &= \Pr[G_{a,b,e}] + \Pr[G_{b,c,e}] + \Pr[G_{c,d,e}] \\
&\quad - \Pr[G_{a,b,e} \cap G_{b,c,e}] - \Pr[G_{a,b,e} \cap G_{c,d,e}] - \Pr[G_{b,c,e} \cap G_{c,d,e}] \\
&\quad + \Pr[G_{a,b,e} \cap G_{b,c,e} \cap G_{c,d,e}] \\
&= \Pr[G_{a,b,e}] + \Pr[G_{b,c,e}] + \Pr[G_{c,d,e}] \\
&\quad - \Pr[G_{a,b,c,e}] - \Pr[G_{a,b,c,d,e}] - \Pr[G_{b,c,d,e}] + \Pr[G_{a,b,c,d,e}].
\end{aligned}$$

   Durch Ausrechnen folgt

$$\Pr[G_{a,b,e} \cup G_{b,c,e} \cup G_{c,d,e}] = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \frac{1}{81} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = \frac{7}{27}.$$

Aufgabe 2 (2+4+2 Punkte)

Bei einer Hundeschau vergeben die Juroren Andrea, Benedikt und Clara zufällige Noten X_A, X_B und X_C. Die Noten sind unabhängig und nehmen jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit einen Wert aus $[n]$ an. Sei $X = X_A + X_B + X_C$, $Y = \min\{X_A, X_B, X_C\}$ und $Z = \max\{X_A, X_B, X_C\}$.

1. Zeigen Sie mit Hilfe der Markov-Ungleichung, dass $\Pr[X \geq 2 \cdot (n+1)] \leq 3/4$.
2. Argumentieren Sie, dass die gemeinsame Dichtefunktion $f_{Y,Z}$ gegeben ist durch:
$$f_{Y,Z}(y,z) = \begin{cases} 1/n^3 & \text{falls } y,z \in [n] \text{ und } y = z \\ 6 \cdot (z-y)/n^3 & \text{falls } y,z \in [n] \text{ und } y < z \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$
3. Sei $n = 3$. Bestimmen Sie die Randdichte f_Y sowie die Verteilung F_Y.

Lösungsvorschlag

1. Die Erwartungswerte der Zufallsvariablen X_A, X_B und X_C sind gegeben durch
$$\mathbb{E}[X_A] = \mathbb{E}[X_B] = \mathbb{E}[X_C] = \sum_{i=1}^{n} i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}.$$
Aus der Linearität des Erwartungswerts schließen wir, dass
$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_A + X_B + X_C] = \mathbb{E}[X_A] + \mathbb{E}[X_B] + \mathbb{E}[X_C] = 3 \cdot \frac{n+1}{2}.$$
Mit der Markov-Ungleichung erhalten wir nunmehr das gesuchte Ergebnis
$$\Pr[X \geq 2 \cdot (n+1)] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{2 \cdot (n+1)} = 3 \cdot \frac{n+1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot (n+1)} = \frac{3}{4}.$$

2. Laut Angabe sind X_A, X_B und X_C ganze Zahlen zwischen 1 und n. Folglich sind auch $Y = \min\{X_A, X_B, X_C\}$ bzw. $Z = \max\{X_A, X_B, X_C\}$ ganze Zahlen zwischen 1 und n. Außerdem muss $Y \leq Z$ gelten.

   Im Folgenden unterscheiden wir daher zwei Fälle. Entweder gilt $y = Y = Z = z$. In diesem Fall haben alle Noten denselben Wert, nämlich y. Pro Note ist die Wahrscheinlichkeit hierfür $1/n$ und aus der Unabhängigkeit folgt $f_{Y,Z}(y,z) = 1/n^3$.

   Ansonsten gilt $y = Y < Z = z$. Wir unterscheiden nunmehr weitere drei Fälle. Im ersten Fall vergeben zwei Juroren die Note y und einer die Note z. Hierfür gibt es $\binom{3}{2} = 3$ Zuordnungen von Juroren zu Noten, jede mit Wahrscheinlichkeit $1/n^3$. Im zweiten Fall vergibt ein Juror die Note y und die anderen beiden die Note z. Auch hierfür gibt es $\binom{3}{2} = 3$ Zuordnungen. Im dritten Fall vergibt ein Juror die Note y, einer die Note z und der verbleibende die Note w mit $y < w < z$. Für die Wahl von w gibt es $(z - y - 1)$ Möglichkeiten. Außerdem gibt es $3! = 6$ Zuordnungen von Juroren zu Noten. Da die drei Fälle disjunkt sind und alle Möglichkeiten abdecken können wir aufaddieren zu
$$f_{Y,Z}(y,z) = \frac{3}{n^3} + \frac{3}{n^3} + \frac{6 \cdot (z-y-1)}{n^3} = \frac{6 \cdot (z-y)}{n^3}.$$

3. Aus der gemeinsamen Dichte $f_{Y,Z}$ lässt sich die Randdichte f_Y gemäß der Vorlesung wie folgt berechnen
$$f_Y(y) = \sum_{z \in W_Z} f_{Y,Z}(y, z).$$

Für $n = 3$ und $y = 1$ erhalten wir demnach

$$f_Y(1) = \sum_{z=1}^{3} f_{Y,Z}(1, z) = \frac{1}{27} + \frac{6 \cdot (2-1)}{27} + \frac{6 \cdot (3-1)}{27} = \frac{19}{27}.$$

Ähnlich gilt für $y = 2$

$$f_Y(2) = \sum_{z=1}^{3} f_{Y,Z}(2, z) = 0 + \frac{1}{27} + \frac{6 \cdot (3-2)}{27} = \frac{7}{27}$$

und für $y = 3$
$$f_Y(3) = \sum_{z=1}^{3} f_{Y,Z}(3, z) = 0 + 0 + \frac{1}{27} = \frac{1}{27}.$$

Falls $y \notin [3]$, so ist die Randdichte offensichtlich 0. Insgesamt folgt hieraus

$$f_Y(y) = \begin{cases} 19/27 & \text{falls } y = 1 \\ 7/27 & \text{falls } y = 2 \\ 1/27 & \text{falls } y = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Verteilungsfunktion F_Y ist somit

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } y < 1 \\ 19/27 & \text{falls } 1 \leq y < 2 \\ 26/27 & \text{falls } 2 \leq y < 3 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Aufgabe 3 (2+2+1 Punkte)

Die Postbotin Anne soll ein Päckchen möglichst pünktlich ausliefern. Hierbei gibt die Zufallsvariable X die zeitliche Abweichung vom Liefertermin an. Die Verteilungsfunktion von X lautet $F_X(x) = 1/(1+e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

1. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X und zeigen Sie, dass f_X achsensymmetrisch zum Ursprung ist, das heißt $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Zeigen Sie außerdem, dass die Dichtefunktion der Zufallsvariablen $-X$ identisch zur Dichtefunktion von X ist.

3. Berechnen Sie mit dem Ergebnis der vorherigen Teilaufgabe Annes erwartete Abweichung vom Liefertermin. Sie dürfen von der Existenz des gesuchten Erwartungswerts ausgehen.

Lösungsvorschlag

1. Die Dichtefunktion f_X ergibt sich aus der Ableitung der Verteilungsfunktion F_X. Unter Verwendung der Kettenregel gilt daher

$$f_X(x) = F'_X(x) = \frac{-1}{(1+e^{-x})^2} \cdot (-e^{-x}) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Die Funktion f_X ist achsensymmetrisch zum Ursprung, wenn $f_X(x) = f_X(-x)$ gilt. Zunächst stellen wir fest, dass

$$f_X(-x) = \frac{e^{-(-x)}}{(1+e^{-(-x)})^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}} = \frac{1}{e^{-x}+2+e^x}.$$

Außerdem gilt

$$f_X(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x}}{1+2e^{-x}+e^{-2x}} = \frac{1}{e^x+2+e^{-x}} = f_X(-x).$$

Damit ist die Achsensymmetrie zum Ursprung gezeigt.

2. Für die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $-X$ gilt

$$F_{-X}(x) = \Pr[-X \leq x] = \Pr[X \geq -x] = 1 - \Pr[X < -x] = 1 - F_X(-x).$$

Mit der Kettenregel folgt

$$f_{-X}(x) = F'_{-X}(x) = -F'_X(-x) \cdot (-1) = F'_X(-x) = f_X(-x).$$

Aus der Achsensymmetrie von f_X schließen wir nunmehr, dass $f_{-X}(x) = f_X(x)$. Die Zufallsvariablen X und $-X$ besitzen folglich eine identische Dichte.

3. Gesucht ist $\mathbb{E}[X]$. Da die beiden Zufallsvariablen X und $-X$ dieselbe Dichtefunktion besitzen, muss auch ihr Erwartungswert identisch sein, sofern er existiert. Gemäß der Angabe dürfen wir von Letzterem ausgehen. Zusammen mit der Linearität des Erwartungswerts folgt, dass $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[-X] = -\mathbb{E}[X]$. Diese Gleichung kann nur für $\mathbb{E}[X] = 0$ erfüllt sein. Folglich ist Annes erwartete Abweichung 0.

Aufgabe 4 (1+4+1 Punkte)

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beginnt die Astronomin Azra Sternschnuppen zu zählen. Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige und mit Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Hierbei entspricht X_1 der Zeit bis zur ersten Sternschnuppe und X_i für $i > 1$ der Zeitspanne zwischen der $(i-1)$-ten und i-ten Sternschnuppe.

1. Berechnen Sie die erwartete Anzahl an Sternschnuppen, die Azra bis zum Zeitpunkt $t > 0$ zählt.

2. Sei $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ Azras Wartezeit bis zur n-ten Sternschnuppe. Beweisen Sie durch Induktion über n, dass

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} y^{n-1}/((n-1)! \cdot e^y) & \text{falls } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

   Sie dürfen davon ausgehen, dass Y_n und X_{n+1} unabhängig sind.

3. Obwohl Azra den Sternenhimmel fest im Blick hat, ist bis zum Zeitpunkt $t = \log(3)$ noch keine Sternschnuppe aufgetaucht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Azra bis zum Zeitpunkt $t' = \log(9)$ mindestens eine Sternschnuppe sichtet.

Lösungsvorschlag

1. Sei $X(t) = \max\{n \mid \sum_{i=1}^{n} X_i \leq t\}$ die Anzahl der Sternschnuppen bis zum Zeitpunkt $t > 0$. Da es sich bei $X_1, X_2, X_3, \ldots$ um unabhängige und identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen handelt, ist $X(t)$ laut Vorlesung mit Parameter $t \cdot \lambda = t$ Poisson-verteilt. Die erwartete Anzahl an Sternschnuppen ist folglich $\mathbb{E}[X(t)] = t$.

2. Für die Induktionsbasis sei $n = 1$. In diesem Fall gilt $Y_1 = X_1$ und wir erhalten

$$f_{Y_1}(y) = f_{X_1}(y) = e^{-y} = \frac{y^{1-1}}{(1-1)! \cdot e^y}$$

   für $y \geq 0$, sowie $f_{Y_1}(y) = f_{X_1}(y) = 0$ für $y < 0$. Das bestätigt die Induktionsbasis.

   Für den Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass

$$f_{Y_n}(y) = \begin{cases} y^{n-1}/((n-1)! \cdot e^y) & \text{falls } y \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   gilt und versuchen zu zeigen, dass dies auch für $n+1$ erfüllt ist. Nach Definition von Y_{n+1} gilt $Y_{n+1} = Y_n + X_{n+1}$. Aus der Angabe entnehmen wir außerdem, dass Y_n und X_{n+1} unabhängig sind. Gemäß der Faltungsformel gilt

$$f_{Y_{n+1}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{Y_n}(s) \cdot f_{X_{n+1}}(y-s)\, ds.$$

   Im Fall $y < 0$ gilt nach Induktionshypothese

$$f_{Y_{n+1}}(y) = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot f_{X_{n+1}}(y-s)\, ds + \int_{0}^{\infty} f_{Y_n}(s) \cdot 0\, ds = 0.$$

Sei daher $y \geq 0$. Mit der Induktionshypothese folgt

$$f_{Y_{n+1}}(y) = \int_0^y \frac{s^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^s} \cdot e^{-(y-s)}\, ds = \frac{1}{(n-1)! \cdot e^y} \cdot \int_0^y s^{n-1}\, ds.$$

Lösen wir dieses Integral auf, so erhalten wir $\int_0^y s^{n-1}\, ds = [s^n/n]_0^y = y^n/n$. Insgesamt ergibt sich hieraus

$$f_{Y_{n+1}}(y) = \frac{1}{(n-1)! \cdot e^y} \cdot \frac{y^n}{n} = \frac{y^n}{n! \cdot e^y} = \frac{y^{(n+1)-1}}{((n+1)-1)! \cdot e^y},$$

womit wir den Induktionsschritt abgeschlossen haben.

3. Aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung folgt für ein beliebiges $t > 0$, dass

$$\begin{aligned}\Pr[X_1 < \log(9) \mid X_1 > \log(3)] &= 1 - \Pr[X_1 > \log(9) \mid X_1 > \log(3)] \\ &= 1 - \Pr[X_1 > \log(3) + \log(3) \mid X_1 > \log(3)] \\ &= 1 - \Pr[X_1 > \log(3)].\end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\Pr[X_1 < \log(9) \mid X_1 > \log(3)] = 1 - F_{X_1}\big(\log(3)\big) = 1 - e^{-\log(3)} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 5 (3+1+2 Punkte)

Auf seinem nächtlichen Streifzug beißt der Vampir Aaron n Studenten. Seien X_i unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, die Aarons erbeutetes Blutvolumen vom i-ten Studenten angeben. Die Dichte von X_i lautet

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 2x/c & \text{falls } \ 0 < x \le c \\ (2-2x)/(1-c) & \text{falls } \ c < x \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $0 < c < 1$. Des Weiteren sei $Y_n = (3 \cdot \sum_{i=1}^n X_i/n) - 1$.

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[X_1] = (1+c)/3$.
2. Beweisen Sie, dass Y_n für $n > 0$ den Parameter c erwartungstreu schätzt.
3. Ist der Schätzer Y_n konsistent im quadratischen Mittel bezüglich c? Sie dürfen verwenden, dass die Varianz von X_1 existiert.

Lösungsvorschlag

1. Gemäß Definition berechnet sich der Erwartungswert von X_1 zu

$$\mathbb{E}[X_1] = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f_{X_1}(t)\,dt = \int_0^c t \cdot \frac{2t}{c}\,dt + \int_c^1 t \cdot \frac{2-2t}{1-c}\,dt.$$

Lösen wir nun die Integrale auf, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_1] &= \left[\frac{2t^3/3}{c}\right]_0^c + \left[\frac{t^2 - 2t^3/3}{1-c}\right]_c^1 \\ &= \frac{2c^2/3}{1} + \frac{1}{3-3c} - \frac{c^2 - 2c^3/3}{1-c} \\ &= \frac{2c^2 - 2c^3}{3-3c} + \frac{1}{3-3c} - \frac{3c^2 - 2c^3}{3-3c} \\ &= \frac{1-c^2}{3-3c}.\end{aligned}$$

Aus der Identität $1 - c^2 = (1-c)\cdot(1+c)$ schließen wir letztendlich, dass

$$\mathbb{E}[X_1] = \frac{(1-c)\cdot(1+c)}{3\cdot(1-c)} = \frac{1+c}{3}.$$

2. Der Schätzer Y_n ist erwartungstreu für c, falls $\mathbb{E}[Y_n] = c$. Aus der Linearität des Erwartungswerts folgt

$$\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}\left[\left(3 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}\right) - 1\right] = \frac{3}{n} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]\right) - 1.$$

Da alle X_i identisch verteilt sind, schließen wir aus dem Ergebnis der ersten Teilaufgabe, dass

$$\mathbb{E}[Y_n] = \frac{3}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[X_1] - 1 = 3 \cdot \frac{1+c}{3} - 1 = c.$$

Folglich ist Y_n ein erwartungstreuer Schätzer für c.

3. Da der Schätzer erwartungstreu ist, handelt es sich bei dessen MSE um die Varianz des Schätzers. Gemäß den Rechenregeln für die Varianz gilt

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \mathrm{Var}\left[\left(3 \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}\right) - 1\right] = \frac{9}{n^2} \cdot \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right].$$

Aus der Unabhängigkeit der X_i schließen wir ferner, dass

$$\mathrm{Var}[Y_n] = \frac{9}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] = \frac{9}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[X_1] = \frac{9}{n} \cdot \mathrm{Var}[X_1].$$

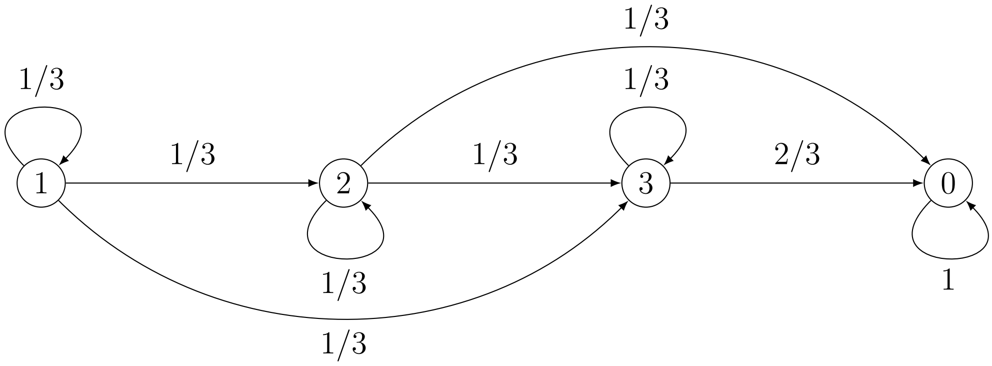
Da die Varianz von X_1 laut Angabe existiert, können wir davon ausgehen, dass es sich um einen endlichen Wert handelt. Insbesondere ist dieser Wert unabhängig von n. Es folgt, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}[Y_n] = \lim_{n\to\infty} \frac{9}{n} \cdot \mathrm{Var}[X_1] = 0.$$

Somit geht der MSE gegen 0, was wiederum bedeutet, dass Y_n konsistent im quadratischen Mittel bezüglich c ist.

Aufgabe 6 (1+2+4 Punkte)

Alina und Babette nehmen an einer Spielshow teil. Beide Kandidatinnen starten mit einem Punktestand von 1. Nach jeder Runde k können sich Alina und Babette unabhängig voneinander zwischen der Auszahlung des momentanen Punktestands X_k oder dem Weiterspielen entscheiden. Die Markov-Kette $\{X_k\}_{k\geq 0}$ ist durch das folgende Übergangsdiagramm gegeben:



1. Geben Sie die Übergangsmatrix P an.
2. Alina lässt sich nach genau 2 Runden auszahlen. Berechnen Sie die erwartete Höhe der Auszahlung.
3. Babette spielt bis der Punktestand entweder 3 oder 0 ist. Berechnen Sie die erwartete Höhe der Auszahlung.

Lösungsvorschlag

1. Die Übergangsmatrix ist gegeben durch
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

2. Alinas Punktestand nach zwei Runden ist gegeben durch X_2. Die dazugehörige Verteilung berechnet sich durch $q_2 = q_0 \cdot P^2$. Da Alinas Punktestand vor der ersten Runde bereits 1 ist, gilt $q_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Wir erhalten somit
$$\begin{aligned} q_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/3 & 1/9 & 2/9 & 1/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Alinas erwarteter Gewinn ist somit

$$\mathbb{E}[X_2] = \begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} \cdot q_2^T = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{9}.$$

3. Sei Y Babettes Gewinn. Im Fall $Y = 3$ nimmt die Makrov-Kette den Zustand 3 vor dem Zustand 0 an. Bei 0 handelt es sich um einen absorbierenden Zustand. Deshalb kann es nicht sein, dass der Zustand 3 nach dem Zustand 0 eingenommen wird. Zugmanne mit der Tatsache, dass Babette mit einem Punkt beginnt, entspricht die Wahrscheinlichkeit von $Y = 3$ der Übergangswahrscheinlichkeit $f_{1,3}$.

   Laut Vorlesung berechnet sich $f_{1,3}$ zu

$$f_{1,3} = p_{1,3} + \sum_{i \in S \setminus \{3\}} p_{1,i} \cdot f_{i,3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot f_{1,3} + \frac{1}{3} \cdot f_{2,3}.$$

   Durch Umstellen der Gleichung erhalten wir

$$f_{1,3} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot f_{2,3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot f_{2,3}.$$

   Ähnlich berechnet sich die Übergangswahrscheinlichkeit $f_{2,3}$ zu

$$f_{2,3} = p_{2,3} + \sum_{i \in S \setminus \{3\}} p_{2,i} \cdot f_{i,3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot f_{2,3}.$$

   Abermaliges Umstellen ergibt $f_{2,3} = 3/2 \cdot 1/3 = 1/2$. Insgesamt folgt hieraus

$$f_{1,3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

   Im Fall $Y = 0$ wird der Zustand 0 vor der 3 erreicht. Da 0 der einzige absorbierende Zustand ist handelt es sich bei $Y = 0$ um das komplementäre Ereignis von $Y = 3$. Die Wahrscheinlichkeit von $Y = 0$ beträgt daher $1 - 3/4 = 1/4$. Insgesamt folgt

$$\mathbb{E}[Y] = 0 \cdot 1/4 + 3 \cdot 3/4 = 9/4.$$