LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Uzaktan Eğitim

26 - 30 Nisan 2021

Örnek

$m^*(A) = 0$ ise $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$m^*(A) = 0$ ise $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$B \subset AUB$ olduğundan dış ölçünün monotonluk özelliğinden

$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$$

yazılabilir.

Örnek

$m^*(A) = 0$ ise $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$B \subset AUB$ olduğundan dış ölçünün monotonluk özelliğinden

$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$$

yazılabilir. Dış ölçü alt toplamsal olduğundan

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$$

elde edilir.

Örnek

$m^*(A) = 0$ ise $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$B \subset AUB$ olduğundan dış ölçünün monotonluk özelliğinden

$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B)$$

yazılabilir. Dış ölçü alt toplamsal olduğundan

$$m^*(A \cup B) \leq m^*(A) + m^*(B) = m^*(B)$$

elde edilir. Böylece

$$m^*(B) \leq m^*(A \cup B) \leq m^*(B) \Rightarrow m^*(A \cup B) = m^*(B)$$

sonucu elde edilir.

Örnek

$m^*(A) = 0$ ve $B \subset A$ ise $m^*(B) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$m^*(A) = 0$ ve $B \subset A$ ise $m^*(B) = 0$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$B \subset A$ ise

$$0 \leq m^*(B) \leq m^*(A) = 0$$

olduğundan $m^*(B) = 0$ elde edilir.

Örnek

$m^*(A \triangle B) = 0$ ise $m^*(A) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$m^*(A \triangle B) = 0$ ise $m^*(A) = m^*(B)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$A \subset B \cup (A \triangle B)$ olduğundan

$$m^*(A) \leq m^*(B) + m^*(A \triangle B) = m^*(B)$$

ve $B \subset A \cup (A \triangle B)$ olduğundan

$$m^*(B) \leq m^*(A) + m^*(A \triangle B) = m^*(A)$$

yazılabilir. Buradan istenen sonuç elde edilir.

Örnek

$A \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin ölçülebilir olması için g.v.y.k. $\forall I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \cap A^c)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Örnek

$A \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin ölçülebilir olması için g.v.y.k. $\forall I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \cap A^c)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

$:\Rightarrow$ $A \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\forall T \subset \mathbb{R}$

$$m^*(T) = m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

eşitliği sağlanır. $T = I$ olarak alınırsa istenen elde edilir.

Çözüm

$\Leftarrow$: $\forall I \subset \mathbb{R}$ açık aralığı için

$$m^*(I) = m^*(I \cap A) + m^*(I \cap A^c)$$

olsun. $\forall T \subset \mathbb{R}$

$$m^*(T) = m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

olduğunu göstermeliyiz. $T = (T \cap A) \cup (T \cap A^c)$ olduğundan

$$m^*(T) \leq m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

eşitsizliği yazılabilir.

Çözüm

$m^*(T) = \infty$ iken

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

olduğundan $m^*(T) < \infty$ iken

$$m^*(T) \geq m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.
m^* Lebesgue dış ölçüsünün tanımından $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) < m^*(T) + \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $(I_n) = ((a_n, b_n)) \in \tau_T$ vardır.

Çözüm

$T \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n)$ olduğundan $T \cap A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cap A$ ve $T \cap A^c \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cap A^c$ yazılabilir. m^* Lebesgue dış ölçüsünün özelliğinden

$$\begin{aligned} m^*(T \cap A) &\leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cap A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*((a_n, b_n) \cap A) \\ m^*(T \cap A^c) &\leq m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n) \cap A^c) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*((a_n, b_n) \cap A^c) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir.

Çözüm

Buradan

$$\begin{aligned} m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*((a_n,b_n)\cap A)+\sum_{n=1}^{\infty} m^*((a_n,b_n)\cap A^c \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} m^*((a_n,b_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) < m^*(T)+\varepsilon \end{aligned}$$

yazılabilir. ε keyfi olduğundan

$$m^*(T\cap A)+m^*(T\cap A^c)\leq m^*(T)$$

elde edilir. Demek ki $A\in\mathcal{M}$ dir.

Örnek

$A \in \mathcal{M}$ ve $m(A) < \infty$ ise herhangi bir $A \subset B \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(B - A) = m^*(B) - m^*(A) = m^*(B) - m(A)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

$A \in \mathcal{M}$ ve $m(A) < \infty$ ise herhangi bir $A \subset B \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(B - A) = m^*(B) - m^*(A) = m^*(B) - m(A)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$B = (B - A) \cup A$ ve $(B - A) \cap A = \emptyset$ dir. $A \in \mathcal{M}$ olduğundan $\forall T \subset \mathbb{R}$

$$m^*(T) = m^*(T \cap A) + m^*(T \cap A^c)$$

eşitliği sağlanır. $T = B$ alınırsa

$$\begin{aligned} m^*(B) &= m^*(B \cap A) + m^*(B \cap A^c) \\ &= m^*(A) + m^*(B - A) \end{aligned}$$

elde edilir. $m^*(A) = m(A) < \infty$ olduğundan istenen sonuç elde edilir.

Örnek

E, $m^*(E) < \infty$ olacak şekilde herhangi bir küme olsun. Bu durumda, $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k.

$$m(B) = m^*(E)$$

eşitliğini sağlayan bir $B \subset E$ ölçülebilir kümesinin var olmasıdır. Gösteriniz.

Örnek

E, $m^*(E) < \infty$ olacak şekilde herhangi bir küme olsun. Bu durumda, $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k.

$$m(B) = m^*(E)$$

eşitliğini sağlayan bir $B \subset E$ ölçülebilir kümesinin var olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

$:\Rightarrow$ $E \in \mathcal{M}$ ise $B = E$ olarak alınır.

Örnek

E, $m^*(E) < \infty$ olacak şekilde herhangi bir küme olsun. Bu durumda, $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k.

$$m(B) = m^*(E)$$

eşitliğini sağlayan bir $B \subset E$ ölçülebilir kümesinin var olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

$:\Rightarrow$ $E \in \mathcal{M}$ ise $B = E$ olarak alınır.
$\Leftarrow:$ $m(B) = m^*(E)$ olacak şekilde ölçülebilir bir $B \subset E$ kümesi var olsun. Bu durumda

$$m^*(E - B) = m^*(E) - m^*(B) = 0$$

olduğundan $E - B \in \mathcal{M}$ dir. $E = (E - B) \cup B$ olduğundan $E \in \mathcal{M}$ sonucu elde edilir.

Örnek

A, sonlu ölçülü bir küme olsun. Bu durumda bir $E \subset A$ kümesinin ölçülebilir olması için g.v.y.k.

$$m^*(A) = m^*(E) + m^*(A - E)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Örnek

A, sonlu ölçülü bir küme olsun. Bu durumda bir $E \subset A$ kümesinin ölçülebilir olması için g.v.y.k.

$$m^*(A) = m^*(E) + m^*(A - E)$$

olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

$:\Rightarrow$ $E \in \mathcal{M}$ olsun. Bu durumda $\forall T \subset \mathbb{R}$

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c)$$

eşitliği sağlanır. $T = A$ olarak alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Çözüm

$E \subset A$ ve $m^*(A) = m^*(E) + m^*(A - E)$ olsun. $A - E \subset G$ ve $m^*(A - E) = m(G)$ olacak şekilde bir $G \in \mathcal{M}$ vardır.
$A - E \subset A \cap G \subset G$ olduğundan

$$m^*(A - E) \leq m(A \cap G) \leq m(G) = m^*(A - E)$$

yazılabilir. Buradan

$$m^*(A - E) = m(A \cap G)$$

elde edilir. $G \in \mathcal{M}$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(A) &= m(A \cap G) + m(A \cap G^c) \\ &= m^*(A - E) + m(A \cap G^c) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlik ve hipotezden

$$m^*(E) = m(A \cap G)$$

eşitliği elde edilir. Bir önceki örnekten $E \in \mathcal{M}$ olduğu elde edilir.

Örnek

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset I$ olsun. $B \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k. $L(I) = m^*(B) + m^*(I - B)$ eşitliğinin doğru olmasıdır. Gösteriniz.

Örnek

$I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $B \subset I$ olsun. $B \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k.
$L(I) = m^*(B) + m^*(I - B)$ eşitliğinin doğru olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

Bir önceki örnekte $A = I$ ve $E = B$ olarak alınırsa istenen sonuç elde edilir.

Örnek

$E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(E \cup T) + m^*(E \cap T) = m(E) + m^*(T)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

$E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(E \cup T) + m^*(E \cap T) = m(E) + m^*(T)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$m^*(T) = \infty$ ise eşitlik sağlanır. $m^*(T) < \infty$ olsun. $E \in \mathcal{M}$ olduğundan Caratheodory koşulunda T yerine $E \cup T$ alınırsa

$$\begin{aligned} m^*(E \cup T) &= m^*((E \cup T) \cap E) + m^*((E \cup T) \cap E^c) \\ &= m^*(E) + m^*(T - E) \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm

$\forall T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T - E)$$

olduğundan

$$m^*(E \cup T) + m^*(E \cap T) = m(E) + m^*(T)$$

sonucu bulunur.

Örnek

$E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T - (T \cap E))$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

$E \in \mathcal{M}$ olsun. $T \subset \mathbb{R}$ olmak üzere

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T - (T \cap E))$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$E \in \mathcal{M}$ ise $\forall T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(T) = m^*(T \cap E) + m^*(T - E)$$

eşitliği sağlanır. $T - E = T - (T \cap E)$ olduğundan istenen sonuç elde edilir.

Örnek

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ve $T \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$m^*(T) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2) + m^*(T - (E_1 \cup E_2))$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

$E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ ve $T \subset \mathbb{R}$ olsun.

$$m^*(T) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2) + m^*(T - (E_1 \cup E_2))$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$E_1 \in \mathcal{M}$ olduğundan $\forall T \subset \mathbb{R}$ için

$$m^*(T) = m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c)$$

eşitliği sağlanır. $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğundan test kümesi $T \cap E_1^c$ alınırsa

$$\begin{aligned} m^*(T) &= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(T \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &= m^*(T \cap E_1) + m^*(T \cap E_2) + m^*(T - (E_1 \cup E_2)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{k+1} \leq x < \frac{1}{k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right)$ olsun. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \emptyset$ olduğundan (I_k) dizisi ayrıktır.

$$\begin{aligned} m(A) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^k} \leq x < \frac{1}{2^{k-1}} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$B = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^k} \leq x < \frac{1}{2^{k-1}}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left[\frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$ olsun. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \emptyset$ olduğundan (I_k) dizisi ayrıktır.

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$C = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{5^k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{5^k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left(0, \frac{1}{5^k}\right)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_{n+1} \subset I_n$ olduğundan (I_n) dizisi azalandır. $m(I_1) = \frac{1}{5} < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(C) &= m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} m(I_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} L(I_k) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{5^k} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$D = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{5^k} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$D = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{5^k}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left(0, \frac{1}{5^k}\right)$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_{n+1} \subset I_n$ olduğundan (I_n) dizisi azalandır.

$$m(D) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = m\left(I_1\right) = \frac{1}{5}$$

elde edilir.

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{2k-1} \right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{2k-1}\right\}$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_k = \left[\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k-1}\right)$ olsun. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \emptyset$ olduğundan (I_k) dizisi ayrıktır.

$$\begin{aligned} m(A) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} L(I_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \ln 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \int\limits_1^{k+1} \frac{dx}{x}$ ve $I_k = (a_k, a_{k+1})$ olmak üzere $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$a_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \int\limits_1^{k+1} \frac{dx}{x}$ ve $I_k = (a_k, a_{k+1})$ olmak üzere $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} I_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} a_k &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln(k+1) \\ a_{k+1} &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \ln(k+2) \end{aligned}$$

$$a_{k+1} - a_k = \frac{1}{k+1} - \ln\left(\frac{k+2}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{k+1}\right) > 0$$

olduğundan (a_k) dizisi artandır. $i \neq j$ için $I_i \cap I_j = \emptyset$ olduğundan (I_k) dizisi ayrıktır.

Çözüm

Bu yüzden

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \gamma - 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm

Bu yüzden

$$\begin{aligned} m(B) &= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(I_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} - \ln\left(1+\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \gamma - 1 + \ln 2 \end{aligned}$$

elde edilir. NOT: $x_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k \to \gamma$ Euler–Mascheroni sabiti, $\gamma \simeq 0.57721$

Örnek

$E_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right)$ olmak üzere $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$E_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k\right)$ olmak üzere $E = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$x_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k} - \ln k \longrightarrow \gamma$, (x_k) dizisi azalan ve alttan sınırlıdır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_{n+1} \subset E_n$ olduğundan (E_n) azalandır. $m(E_1) = 1 < \infty$ olduğundan

$$m(E) = m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{k\to\infty} m(E_k) = \gamma$$

elde edilir.

Örnek

$F_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \ln k\right)$ olmak üzere $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$F_k = \left(0, 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \ln k\right)$ olmak üzere $F = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k+1} - \ln k$ olsun.

$$\frac{1}{k+1} < \ln(1 + \frac{1}{k}) \leq \frac{1}{k}$$

olduğundan

$$x_{k+1} - x_k = \frac{1}{k+2} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < 0$$

dır. (x_k) dizisi azalandır.

$$m(F) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} F_k\right) = m(F_1) = \frac{3}{2}$$

Örnek

$G_k = \left\{x \in [0, 2\pi] : \sin x < \frac{1}{k}\right\}$ olmak üzere $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$G_k = \left\{x \in [0, 2\pi] : \sin x < \frac{1}{k}\right\}$ olmak üzere $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$$G_1 = \{x \in [0, 2\pi] : \sin x < 1\} = [0, \tfrac{\pi}{2}) \cup (\tfrac{\pi}{2}, 2\pi]$$
$$G_2 = \left\{x \in [0, 2\pi] : \sin x < \tfrac{1}{2}\right\} = [0, \tfrac{\pi}{3}) \cup (\tfrac{2\pi}{3}, 2\pi]$$
$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k = \{0\} \cup [\pi, 2\pi] \Rightarrow m(G) = \pi$$

Örnek

$E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^* \left(E_1 \triangle E_2 \right) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^*(E_1 \triangle E_2) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned} m^*(E_1 \triangle E_2) &= 0 \Rightarrow E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \\ E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Örnek

$E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^*(E_1 \triangle E_2) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$\begin{aligned}
m^*(E_1 \triangle E_2) &= 0 \Rightarrow E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 - (E_1 - E_2) = E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Örnek

$E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^*(E_1 \triangle E_2) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
m^*(E_1 \triangle E_2) &= 0 \Rightarrow E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 - (E_1 - E_2) = E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 - (E_1 \triangle E_2) = E_2 - E_1 \in \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

Örnek

$E_1 \in \mathcal{M}$ ve $m^*(E_1 \triangle E_2) = 0$ ise $E_2 \in \mathcal{M}$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
m^*(E_1 \triangle E_2) &= 0 \Rightarrow E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 - (E_1 - E_2) = E_1 \cap E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 - (E_1 \triangle E_2) = E_2 - E_1 \in \mathcal{M} \\
E_1 \cap E_2 &\in \mathcal{M},\ E_2 - E_1 \in \mathcal{M} \Rightarrow (E_1 \cap E_2) \cup (E_2 - E_1) = E_2 \in \mathcal{M}
\end{aligned}
$$

Çözüm

II. YOL:

$$E_1 \in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cup (E_1 \triangle E_2) = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M}$$

Çözüm

II. YOL:

$$\begin{aligned} E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cup (E_1 \triangle E_2) = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M} \\ E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Çözüm

II. YOL:

$$\begin{aligned}
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cup (E_1 \triangle E_2) = E_1 \cup E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 &\in \mathcal{M},\ E_1 \triangle E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow E_1 \cap (E_1 \triangle E_2) = E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \\
E_1 \cup E_2 &\in \mathcal{M},\ \ E_1 - E_2 \in \mathcal{M} \Rightarrow (E_1 \cup E_2) - (E_1 - E_2) = E_2 \in \mathcal{M}
\end{aligned}$$

Örnek

A ve B sonlu dış ölçüye sahip iki küme ise

$$\left| m^{*}(A) - m^{*}(B) \right| \leq m^{*}(A \triangle B)$$

olduğunu gösteriniz.

Örnek

A ve B sonlu dış ölçüye sahip iki küme ise

$$|m^*(A) - m^*(B)| \leq m^*(A \triangle B)$$

olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$A \subset (A \triangle B) \cup B$ olduğundan dış ölçünün monotonluk ve alt toplamsallık özelliklerinden

$$\begin{aligned} m^*(A) &\leq m^*((A \triangle B) \cup B) \\ &\leq m^*(A \triangle B) + m^*(B) \end{aligned}$$

yazılabilir. Benzer şekilde, $B \subset (A \triangle B) \cup A$ olduğundan

$$m^*(B) \leq m^*(A \triangle B) + m^*(A)$$

yazılabilir. Bu iki eşitsizlikten istenen sonuç elde edilir.

Örnek

E_1 ve E_2 sonlu ölçüye sahip ölçülebilir kümeler olsun. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz.

1. $m\left(E_1 \triangle E_2\right) = 0$

Örnek

E_1 ve E_2 sonlu ölçüye sahip ölçülebilir kümeler olsun. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz.

1. $m\left(E_1 \triangle E_2\right) = 0$
2. $m\left(E_1 - E_2\right) = 0 = m\left(E_2 - E_1\right)$

Örnek

E_1 ve E_2 sonlu ölçüye sahip ölçülebilir kümeler olsun. Aşağıdakilerin denk olduğunu gösteriniz.

1. $m\left(E_1 \triangle E_2\right) = 0$
2. $m\left(E_1 - E_2\right) = 0 = m\left(E_2 - E_1\right)$
3. $m\left(E_1\right) = m\left(E_1 \cap E_2\right) = m\left(E_2\right)$

Çözüm

$1 \Rightarrow 2$

$m(E_1 \triangle E_2) = 0$ olsun. $E_1 - E_2 \subset E_1 \triangle E_2$ olduğundan

$$0 \leq m(E_1 - E_2) \leq m(E_1 \triangle E_2) = 0$$

eşitsizliğinden $m(E_1 - E_2) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde $m(E_2 - E_1) = 0$ olduğu gösterilebilir.

Çözüm

$2 \Rightarrow 3$

$m(E_1 - E_2) = 0 = m(E_2 - E_1)$ olsun. $E_1 = (E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2)$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m((E_1 - E_2) \cup (E_1 \cap E_2)) \\ &= m(E_1 - E_2) + m(E_1 \cap E_2) \\ &= m(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde $m(E_2) = m(E_1 \cap E_2)$ olduğu gösterilebilir.

Çözüm

$3 \Rightarrow 1$

$m(E_1) = m(E_1 \cap E_2) = m(E_2)$ olsun.

$E_1 \triangle E_2 = (E_1 - (E_1 \cap E_2)) \cup (E_2 - (E_1 \cap E_2))$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(E_1 \triangle E_2) &= m((E_1 - (E_1 \cap E_2)) \cup (E_2 - (E_1 \cap E_2))) \\ &= m(E_1 - (E_1 \cap E_2)) + m(E_2 - (E_1 \cap E_2)) \\ &= m(E_1) - m(E_1 \cap E_2) + m(E_2) - m(E_1 \cap E_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Örnek

$C(\alpha)$ genelleştirilmiş Cantor kümesi olmak üzere $m^*(C(\alpha)) = 1 - \alpha$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$C(\alpha)$ genelleştirilmiş Cantor kümesi olmak üzere $m^*(C(\alpha)) = 1 - \alpha$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$V(\alpha) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} m^*(C(\alpha)) &= 1 - m(V(\alpha)) \\ &= 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(\alpha)\right) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n(\alpha)) \\ &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Örnek

Her bir Cantor $n-$li kümesinin ölçüsünün sıfır olduğunu gösteriniz.

Örnek

Her bir Cantor $n-$li kümesinin ölçüsünün sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$I = [0,1]$ aralığını n parçaya bölüp (k+1). açık aralığı silelim. Silinen açık aralıkların kümesini V_i ile gösterelim. $V_1 = \left(\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ olduğundan $m(V_1) = \frac{1}{n}$ elde edilir. $\frac{1}{n}$ uzunluğuna sahip her bir kapalı aralığı tekrar n parçaya bölüp $(k+1)$. açık aralığı silelim ve bu şekilde devam edelim.

$$\begin{aligned} V_2 &= \left(\frac{k}{n^2}, \frac{k+1}{n^2}\right) \cup \left(\frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}, \frac{1}{n} + \frac{k+1}{n^2}\right) \cup \\ &\cdots \cup \left(\frac{n-1}{n} + \frac{k}{n^2}, \frac{n-1}{n} + \frac{k+1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

olduğundan $m(V_2) = (n-1)\frac{1}{n^2}$ elde edilir.

Çözüm

Genel olarak i. adımda

$$m\left(V_i\right) = (n-1)^{i-1}\frac{1}{n^i}$$

elde edilir. Cantor $n-$li kümeyi $C\left(n\right)$ ile gösterelim.

$$\begin{aligned} m\left(C\left(n\right)\right) &= 1 - m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} m\left(V_i\right) \\ &= 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(n-1)^{i-1}}{n^i} = 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Örnek

$[0,1]$ aralığını 5 eşit parçaya bölüp, 2. ve 4. açık aralıklar silindikten sonra geriye kalan kümeyi Γ_1 ile gösterelim:

$$\Gamma_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right].$$

Geriye kalan her bir kapalı aralığa aynı işlemi uygulamaya devam edelim. n. adımda kalan kapalı aralıkların kümesi Γ_n olmak üzere $C_{\frac{1}{5}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ kümesinin Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğunu gösteriniz.

Örnek

$[0,1]$ aralığını 5 eşit parçaya bölüp, 2. ve 4. açık aralıklar silindikten sonra geriye kalan kümeyi Γ_1 ile gösterelim:

$$\Gamma_1 = \left[0, \frac{1}{5}\right] \cup \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right] \cup \left[\frac{4}{5}, 1\right].$$

Geriye kalan her bir kapalı aralığa aynı işlemi uygulamaya devam edelim. n. adımda kalan kapalı aralıkların kümesi Γ_n olmak üzere $C_{\frac{1}{5}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Gamma_n$ kümesinin Lebesgue ölçüsünün sıfır olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Sorunun çözümü size bırakıldı.

Örnek

$E \subset (0,1)$ kümesi, ondalıklı açılımında 5 rakamı bulunmayan tüm sayıların kümesi olsun. E kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Örnek

$E \subset (0,1)$ kümesi, ondalıklı açılımında 5 rakamı bulunmayan tüm sayıların kümesi olsun. E kümesinin Lebesgue ölçüsünü bulunuz.

Çözüm

$a_k \in \{0, 1, \dots, 4, 6, \dots, 9\}$ olmak üzere

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

biçiminde açılıma sahip x noktalarından oluşan Cantor 10-lu küme E kümesi olarak verilmiş.

$n \in \mathbb{N}$ ve $a_{1,} a_2, ..., a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ için

$$I\left(a_{1,} a_2, ..., a_n\right) = \left[0.a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n, 0.a_1 a_2 ... a_{n-1}(a_n + 1)\right)$$

yarı açık aralığını oluşturalım. Bu aralıktaki sayıların ondalıklı kısmı $a_1 a_2 ... a_n$ ile başlar.

Çözüm

$I(a_{1,}a_2,...,a_n) \in \mathcal{M}$ dir ve

$$m(I(a_{1,}a_2,...,a_n)) = \frac{1}{10^n}.$$

$E_n = \bigcup_{a_1,a_{2,...,}a_n \neq 5} I(a_{1,}a_2,...,a_n)$ olmak üzere E_n ölçülebilir kümelerin sonlu birleşimidir ve bu yüzden ölçülebilirdir. $a_{1,}a_2,...,a_n$ için 9^n seçim vardır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} m(E_n) &= m\left(\bigcup_{a_1,a_{2,...,}a_n \neq 5} I(a_{1,}a_2,...,a_n)\right) \\ &= \sum_{a_1,a_{2,...,}a_n \neq 5} m(I(a_{1,}a_2,...,a_n)) \\ &= \frac{9^n}{10^n} \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm

$E_1 \supset E_2 \supset \cdots$ olduğundan (E_n) bir azalan dizidir. $m(E_1) = \frac{9}{10} < \infty$ olduğundan

$$\begin{aligned} m(E) &= m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} m(E_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{9^n}{10^n} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm

II.YOL

$(0,1)$ aralığını 10 parçaya bölüp $V_1 = [0.5, 0, 6)$ yarı açık aralığını silelim. Geriye kalan her bir parçayı tekrar 10 parçaya bölüp

$$V_2 = [0.05, 0.06) \cup [0.15, 0.16) \cup \cdots \cup [0.95, 0.96)$$

yarı açık aralıkların birleşiminden elde edilen kümeyi silelim ve bu şekilde devam edelim. n. adımda silinen kümeyi V_n ile gösterelim.

$$\begin{aligned} m(V_1) &= \frac{1}{10} \\ m(V_2) &= 9\frac{1}{10^2} \end{aligned}$$

ve

$$m(V_n) = 9^{n-1}\frac{1}{10^n}$$

dir.

Çözüm

$$
\begin{aligned}
m(E) &= 1 - m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n\right) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} m(V_n) \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-1}}{10^n} = 0
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

Örnek

E, $\mathbb{R}$ de herhangi bir küme ve $k > 0$ için $kE := \left\{x : k^{-1}x \in E\right\}$ olsun.

1. $m^*(kE) = km^*(E)$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

E, $\mathbb{R}$ de herhangi bir küme ve $k > 0$ için $kE := \left\{x : k^{-1}x \in E\right\}$ olsun.

1. $m^*(kE) = km^*(E)$ olduğunu gösteriniz.
2. $E \in \mathcal{M}$ olması için g.v.y.k. $kE \in \mathcal{M}$ olmasıdır. Gösteriniz.

Çözüm

1. $(I_n) = \left(\frac{1}{k} J_n\right)$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
m^*(kE) &= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} L(J_n) : kE \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n, \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} L(J_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k} J_n \right\} \\
&= \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} L(kI_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \\
&= k \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} = km^*(E)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Çözüm

2. :$\Rightarrow$ $E \in \mathcal{M}$ olsun. $\forall T \subset \mathbb{R}$ için $m^*(T) = m^*(T \cap kE) + m^*\left(T \cap (kE)^c\right)$ olduğunu göstermeliyiz. $T \cap kE = k\left(\frac{T}{k} \cap E\right)$ ve $T \cap (kE)^c = k\left(\frac{T}{k} \cap E^c\right)$ olduğundan 1 seçeneğinden

$$\begin{aligned} m^*(T \cap kE) &= m^*\left(k\left(\frac{T}{k} \cap E\right)\right) = km^*\left(\frac{T}{k} \cap E\right) \\ m^*\left(T \cap (kE)^c\right) &= m^*\left(k\left(\frac{T}{k} \cap E^c\right)\right) = km^*\left(\frac{T}{k} \cap E^c\right) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan $E \in \mathcal{M}$ ve 1 seçeneğinden

$$\begin{aligned} m^*(T \cap kE) + m^*\left(T \cap (kE)^c\right) &= k\left[m^*\left(\frac{T}{k} \cap E\right) + m^*\left(\frac{T}{k} \cap E^c\right)\right] \\ &= km^*\left(\frac{T}{k}\right) = m^*(T) \end{aligned}$$

elde edilir.

Çözüm

$\Leftarrow$: $kE \in \mathcal{M}$ olsun. $E \in \mathcal{M}$ olduğunu siz gösteriniz.