Karadeniz Teknik Üniversitesi

Fen Fakültesi
İstatistik ve Bilgisayar Bilimleri Bölümü

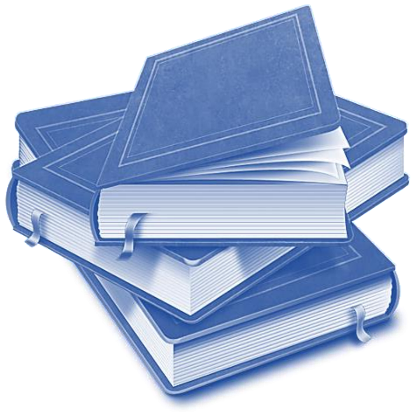
Çok Değişkenli İstatistiksel Yöntemler

GENEL BİLGİLER ve TEMEL MATRİS BİLGİSİ

Dr. Öğr. Üyesi Uğur ŞEVİK

Ders İçeriği

- Genel Bilgiler
- BÖLÜM 1 - Temel Matris Bilgili
  - Tanımlar
  - Matris Çeşitleri



Ders Hedefleri

- Çok değişkenli İstatistiksel Analiz tanımı ve amaçları nedir?
- Çok değişkenli problemlerde kullanılacak temel matris bilgileri.

- Matris Çeşitleri

a) Kare Matris :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

b) Sıfır Matrisi :

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Köşegen Matris :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

d) Birim Matris :

$$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

e) Skaler Matris :

$$5I = A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

f) Satır ve sütun Matrisi :

$$X = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

g) Devrik (transpose) Matris :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

Devrik Matrislere İlişkin Bazı Özellikler

- $I' = I$
- $(A')' = A$
- $(A+B)' = A' + B'$
- $(AB)' = B'A'$
- $(kA)' = kA'$
- $(ABC)' = C'B'A'$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

h) Simetrik Matris:

Bir A kare matrisi simetrik ise $A = A'$ dır. Çok değişkenli istatistiksel analizde karşılaşacağımız matrislerin çoğu kare matris olup bunların çoğu da simetrik matrislerdir. Örneğin; korelasyon ve kovaryans matrisleri simetrik matrislerdir.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A'$$

varyans

kovaryans

$$\begin{bmatrix} X_1X_1 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots \\ X_2X_1 & X_2X_2 & X_2X_3 & \cdots \\ X_3X_1 & & & \end{bmatrix}$$

- Matris Çeşitleri

i) Çarpık simetrik Matris :

$A = -A'$ ise çarpık simetrik matris denir.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A'=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -A'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

sağlar.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

+ Matrislerin Eşitliği +

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

Bir matrisin her bir elemanı diğer bir matrisin karşı gelen elemanına eşitse bu iki matris eşittir denir.

yani $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$ ... olması gerekir.

Bir matrisin İzi : $m \times n$ boyutlu bir A matrisinin iz'i köşegen elemanlarının toplamına eşittir.

$tr(A)$ ya da $iz(A)$

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 & -1 \\ 5 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \text{ ise}$$

$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 'dir.

$iz(A) = tr(A) = 9$ 'dur.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

Matrislerde Toplama ve çıkarma işlemleri

Matrislerde toplama ve çıkarma işlemlerinin yapılabilmesi için ilgili matrislerin aynı boyutta olması gerekir.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$A \mp B = \begin{bmatrix} a_{11} \mp b_{11} & a_{12} \mp b_{21} \\ a_{21} \mp b_{21} & a_{22} \mp b_{22} \\ a_{31} \mp b_{31} & a_{32} \mp b_{32} \end{bmatrix} \text{ dır.}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

İki Matrisin Çarpımı : İki matrisin çarpılabilmesi için soldaki matrisin sütununun sağdaki matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Çarpım sonucunda elde edilen matrisin boyutları soldaki matrisin satır sayısı ve sağdaki matrisin sütun sayısı şeklinde olur.

$$A_{23} \times B_{33} = C_{23}$$

$$A \cdot B = C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ & \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matris Çeşitleri

– Matrislerin Toplamı ve Çarpımına İlişkin Bazı Özellikler –

- $A+B=B+A$
- $A.B \neq B.A$ (Genellikle)
- $A(B+C)=AB+AC$
- $0.A=0$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- $(B+C)A=BA+CA$
- $(k_1k_2)A=k_1(k_2(A))$
- $(AB)C=A(BC)$
- $k(A+B)=kA+kB$
- $(k_1+k_2)A=k_1A+k_2A$
- $A+0=A$
- $A+(-A)=0$
- $I.A=A$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

– Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar –

Açıklama 1: A ve B kare matrisler ise AB ve BA şeklinde çarpımları yapılabilir. AB ve BA çarpımları genellikle eşit değildir.

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Açıklama 2: Çok değişkenli analizde üçlü çarpımlarla sık sık karşılaşılır. u vektörü n boyutlu sütun vektörü ve A matrisi $n\times n$ boyutlu bir kare matris ise $[w = u'.A.u]_{1\times 1}$ olur.

Burada w'ya kuadratik form denir.

Örnek:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$w = u'.A.u = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$w = 56$ //

$$* \; u'.A.u = a_{11}u_1^2 + a_{22}u_2^2 + a_{33}u_3^2 +$$

$$(a_{12}+a_{21})u_1u_2 + (a_{13}+a_{31})u_1u_3 + (a_{23}+a_{32})u_2u_3$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Açıklama 3 : Bir matrisin devriği ile çarpımı simetriktir.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ ise } \quad A'A=\begin{bmatrix} 28 & 41 \\ 41 & 58 \end{bmatrix}, \quad AA'=\begin{bmatrix} 13 & 31 \\ 31 & 74 \end{bmatrix}$$

Açıklama 4 : Esas köşegenin altında kalan tüm elemanlar sıfır olan kare matris üst üçgensel matris, üstünde kalan tüm elemanları sıfır olan matrise alt üçgensel matris denir.

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0{,}60 & 1 & 0 \\ 0{,}72 & -0{,}12 & 1 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Alt üçgensel   Üst üçgensel

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Açıklama 5 : Eğer A bir kare matris ise A'nın kuvvetleri elde edilebilir.

$\Rightarrow A^2 = A.A \quad , \quad A^3 = A^2.A \quad , \quad A^0 = I$

A'nın n boyutlu birim matris ile sağdan - soldan çarpımı A'ya eşittir.

$\Rightarrow I_n A = A I_n = A$

Eğer A kare matris değilde $n \times p$ boyutlu bir matris ise,

$\Rightarrow I_n A = A$ ve $A I_p = A$ dır.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

+ Bir Matrisin Tersi (İnversi) +

Bir A kare matrisinde, $AA^{-1} = A^{-1}.A = I$ koşulunu sağlayan A^{-1} matrisine A'nın tersi denir. Bir matrisin tersinin alınabilmesi için matrisin kare matris olması gerekir olmakla birlikte her kare matrisinde tersi yoktur.

m bilinmeyenli n doğrusal denklem sistemi $AX = B$ şeklinde gösterilirse x vektöründeki değerlerin bulunması için B vektörünün A matrisine bölünmesi gerekir. Ancak matris cebirinde bölme $x = \frac{B}{A}$ şeklinde değil $x = \frac{1}{A}.B = A^{-1}.B$ şeklinde olur.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Çeşitli Uygulamalar ve Açıklamalar

Eğer 2x2 boyutlu bir matrisin tersi varsa;

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Burada $\Delta = a_{11} . a_{22} - a_{12} . a_{21}$ olup bu sabit büyüklüğe matrisin determinantı denir. Bir matrisin determinantı 0'a eşitse bu matrisin tersi yoktur. Determinantı sıfır (0) olan matrise tekil (singular) matris denir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Determinatlar

- DETERMINANTLAR -
(Belirtenler)

Determinantlar $|A|$ biçiminde gösterilir. Eğer A bir varyans-kovaryans matrisi ise p değişken sayısı olmak üzere bu matris p tane varyans ve $p(p-1)/2$ tane kovaryanstan oluşur. $p=2$ için Δ 'varyans çarpımları - kovaryans çarpımları'nı verir. Diğer bir deyişle varyans-kovaryans matrisi (S) ile tanımlanan değişim tek bir sayısal değerle tanımlanmak istenebilir. S'nin determinantı bu sayısal değere ulaşmasını sağlar ve 'genelleştirilmiş varyans' olarak

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Determinatlar

adlandırılır. Bu nedenle determinantlar çok değişkenli hipotez testlerindeki (MANOVA) istatistiklerde sıkça kullanılır. A matrisi varyans-kovaryans matrisi değilse A'sı negatif çıkabilir. Çok değişkenli yöntemlerin başlarında (faktör analizi) korelasyon matrisinin (R) determinantına gereksinim duyulur. R'nin determinantı sıfıra yaklaştıkça verinin faktörleşmeye o kadar uygun olduğu söylenir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matrisi

→ Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matrisi ←

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ matrisinin i. satır ve j. sütunu çıkartılırsa geriye kalan matrisin determinantına a_{ij}'nin minörü adı verilir. $|M_{ij}|$ ile gösterilir. Tanım gereği bu matrisin boyutları $(n-1)\times(n-1)$'dir.

$\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$ biçimindeki işaretli minörüne a_{ij}'nin kofaktörü denir.

$(-1)^{i+j}$ işaretleri

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ & & \cdots & & \end{bmatrix}$$

şeklinde olur.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matrisi

Örnek! $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ matrisi için

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$ olmak üzere

1. satır minörleri :

$$|M_{11}| = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$|M_{12}| = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Kofaktörleri :

$$\alpha_{11} = (-1)^{1+1} \, |M_{11}| = |M_{11}|$$

$$\alpha_{12} = (-1)^{1+2} \, |M_{12}| = -|M_{12}|$$

şeklinde olur.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matrisi

Bir matrisin determinant değeri A'nın herhangi bir satır yada sütunundaki her elemanın kendi kofaktörü ile çarpımlarının toplamına eşittir.

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

A matrisinin elemanlarını kofaktör olarak yazarsak

$$A_k = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. A_k matrisinin transpozu alındığında elde edilecek matrise A'nın 'Adjoint matrisi' adı verilir.

$$A_k' = Adj(A) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Minörler, Kofaktörler, Adjoint Matrisi

Örnek! $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrisinin determinantını, tersini ve adjoint matrisini bulunuz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \alpha_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 14$$

$\alpha_{12} = -5$, $\alpha_{13} = 11$, $\alpha_{21} = 5$, $\alpha_{22} = 7$

$\alpha_{23} = 1$, $\alpha_{31} = -6$, $\alpha_{32} = 8$, $\alpha_{33} = 7$

$$|A| = a_{11}\alpha_{11} + a_{12}\alpha_{12} + a_{13}\alpha_{13}$$

$$|A| = 1.14 + (-1).(-5) + 2.11 = 41$$

$$A_K = \begin{bmatrix} 14 & -5 & 11 \\ 5 & 7 & 1 \\ -6 & 8 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow A_K' = Adj(A) = \begin{bmatrix} 14 & 5 & -6 \\ -5 & 7 & 8 \\ 11 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \left[Adj(A) \right] = \begin{bmatrix} 14/41 & 5/41 & -6/41 \\ -5/41 & 7/41 & 8/41 \\ 11/41 & 1/41 & 7/41 \end{bmatrix}$$

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

- Ters Matris ve Determinantlara İlişkin Bazı özellikler.

$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A$

$\Rightarrow (A^{-1})' = (A')^{-1}$

$\Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$\Rightarrow I^{-1} = I$

$\Rightarrow (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$

$\Rightarrow AB(B^{-1}A^{-1}) = I$

$\Rightarrow (A^{-1})(A^{-1})^{-1} = I$

$\Rightarrow (cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ (c sıfırdan farklı) $c \neq 0$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

→ Diğer özellikler

⇒ $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$

⇒ $|A| = a_{11}$ 1x1'lik matris için

⇒ Bir satırdaki ya da sütundaki elemanlar sıfır ise determinant sıfır olur.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

⇒ İki satır ya da sütun birbirine eşit ise matrisin determinantı sıfır olur.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

⇒ Bir satır ya da sütunun elemanları diğer satır ya da sütunun elemanları ile orantılı ise determinantı sıfırdır.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

⇒ Bir matrisin herhangi bir satırı yer değiştirirse determinant değeri değişmez. Sadece işareti değişir.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 18 \qquad |B| = -18$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

⇒ Bir matrisin herhangi bir satırı ya da sütunu k bir sabit ile çarpılırsa determinantı da k ile çarpılmış olur.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad |A| = 18 \cdot 2 = 36$$

2. sütun 2 ile çarpıldı

⇒ köşegen matrisin determinantı köşegen öğelerinin çarpımına eşittir.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 0.0 = 6$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

⇒ Üst ya da alt üçgen matrisin determinantı esas köşegen elemanlarının çarpımına eşittir.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1.2.5 = 10$$

⇒ 3. mertebeden matrislerin determinantını bulmak için Sarrus kuralı uygulanabilir. Bu amaçla determinantı alınacak matrisin ilk iki sütunu matrisin sağ tarafına yazılır.

$$\left[\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \begin{array}{c} - \\ \\ + \end{array}$$

$$|A| = (a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}) - (a_{31}.a_{22}.a_{13} + a_{32}.a_{23}.a_{11} + a_{33}.a_{21}.a_{12})$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

Örnek! 4x4 boyutundaki matrisin determinant değerini 1. satıra göre bulunuz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$0 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

$$3\left\{4\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\right\} - 0 + 0 - 1$$

$$\left\{0\begin{vmatrix}3 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix}4 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}4 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right\}$$

$$= 3\left\{4(6-2) - (9-4) + 0\right\} - 0 + 0 - \left\{0 - 4(4-6) + (8-9)\right\}$$

$$= 26$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

Örnek: $4x_1 - 2x_2 = 2$ denklem sistemini matrisle gösteriniz.
$4x_1 + 3x_2 = 5$

$Ax = B$ şeklinde;

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$Ax = B$'nin her iki tarafını A^{-1} ile çarparsak

$A^{-1} \cdot Ax = A^{-1} \cdot B$ olur.

$A^{-1} \cdot A = I$'dır ve $Ix = x$ olduğu için $x = A^{-1} \cdot B$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Ters Matris ve Determinantlara ilişkin bazı özellikler

$$A^{-1} = \det A = 12 + 8 = 20 \qquad A^{-1} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/20 & 2/20 \\ -4/20 & 4/20 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 3/20 & 2/20 \\ -4/20 & 4/20 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16/20 \\ 12/20 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \frac{16}{20}, \quad X_2 = \frac{12}{20}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Tersi için Bazı Özellikler

Matrislerin Tersi için Bazı Özellikler

1. 2x2 boyutlu matrislerin tersi,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. 3x3 boyutlu matrislerin tersi,

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$

$$\Delta = a(ei-fh) + b(fg-di) + c(dh-eg)$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Tersi için Bazı Özellikler

3. köşegen matris için tersi,

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & z \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1/c & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1/z \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

- MATRISLERIN PARÇALARA AYRILMASI -

Parçalara ayrılmış matrislerde toplama ve çıkarma işlemlerini yapabilmek için parçalara ayrılmış matris boyutlarının aynı olması yanında alt matrislerin boyutlarının'da aynı olması gerekir. Aşağıdaki A ve B matrisleri aynı boyutta oldukları ve aynı şekilde parçalandıkları için toplanabilir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ \hline a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{c|ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ \hline b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

Parçalara ayrılmış iki matrisin çarpımı için ilk matrisin sütun sayısının ikinci matrisin satır sayısına eşit olması gerekir. Ayrıca 1. sütunlarıyla 2. satırları aynı şekilde ayrılmış olmalıdır.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

$$C=\left[\begin{array}{cc|c|cc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ \hline c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \end{bmatrix}$$

$$D=\left[\begin{array}{c|cc} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ \hline d_{31} & d_{32} & d_{33} \\ \hline d_{41} & d_{42} & d_{43} \\ d_{51} & d_{52} & d_{53} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \\ D_{31} & D_{32} \end{bmatrix}$$

$$CD=\begin{bmatrix} C_{11}D_{11}+C_{12}D_{21}+C_{13}D_{32} & C_{11}D_{12}+C_{12}D_{22}+C_{13}D_{32} \\ C_{21}D_{11}+C_{22}D_{21}+C_{23}D_{31} & C_{21}D_{12}+C_{22}D_{22}+C_{23}D_{32} \end{bmatrix}$$

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

Örnek: Aşağıda verilen E ve F parçalı matrislerin çarpımlarını hesaplayınız.

$$E=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$$

$$F=\left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right]=\begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \cdot \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} E_{11}F_{11} + E_{12}F_{21} \\ E_{21}F_{11} + E_{22}F_{21} \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

$$E_{11}F_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E_{11}F_{11} + E_{12}F_{21} = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E_{12}F_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}F_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_{21}F_{11} + E_{22}F_{22} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_{22}F_{22} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E.F = \begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 7 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} //$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

Açıklama : Parçalanmış tekil olmayan bir matrisin (determinantı sıfır olmayan) tersini alt matrislerde de ifade etmek mümkündür. Eğer $n \times p$ boyutlu A matrisinin 4 alt matrise parçalanırsa;

$$\begin{bmatrix} [A_{11}]_{n_1 \times p_1} & [A_{12}]_{n(p-p_1)} \\ [A_{21}]_{(n-n_1)p_1} & [A_{22}]_{(n-n_1)(p-p_1)} \end{bmatrix}_{n \times p} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

A_{11} ve A_{22} 'nin her ikisi de kare matrisler ise A matrisinin tersinin olması durumunda bu matris B matrisi olarak tanımlanıp aşağıdaki gibi gösterilirse;

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

B_{ij}'ler A ve B ile ilişkili olarak aşağıdaki eşitlikleri sağlar.

1) $B_{11} = \left[A_{11} - (A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}) \right]^{-1}$

2) $B_{12} = -A_{11}^{-1} A_{12} \left[A_{22} - (A_{21} \cdot A_{11}^{-1} . A_{12}) \right]^{-1}$

3) $B_{21} = -A_{22}^{-1} A_{12} \left[A_{22} - (A_{22} A_{11}^{-1} A_{12}) \right]^{-1}$

4) $B_{22} = \left[A_{22} - (A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \right]^{-1}$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

Örnek!

$$A = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 1 \\ \hline 3 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 5 \end{array}\right]$$

A matrisinin tersini parçalanmış matris yöntemiyle bulunuz.

$A_{11} = 1$

$A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A_{21} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

$A_{22} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

$$B = A^{-1} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow B_{11} = \left[1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \right]^{-1} = \frac{1}{13}$$

$$\rightarrow B_{12} = \left[-1 \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} . 1 . \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \right) \right]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Matrislerin Parçalara Ayrılması

$$B_{21} = \begin{bmatrix} 33/13 \\ -8/26 \end{bmatrix} \qquad B_{22} = \begin{bmatrix} -1/52 & -5/52 \\ 5/26 & -1/26 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = B = \begin{bmatrix} 1/13 & -2/13 & 3/13 \\ 33/13 & -1/52 & -5/52 \\ -8/26 & 5/26 & -1/26 \end{bmatrix}$$

- Rank Kavramı

- Rank kavramı : Bir matrisin rankı matrisin tekil olmayan en büyük alt matrisinin mertebesidir. rank(A) veya r(A) ile gösterilir.

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

3x2 boyutundaki matrisin olası tüm alt kare matrislerin boyutu 2'yi geçemediği için;

$r(A)=2$ dır.

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- İdempotent Matrisler

. İdempotent Matrisler : A, $n \times n$ boyutlu bir matrisken $A = A^2$ koşulunu sağlıyorsa bu matrise idempotent matris denir ve bu matrisler simetriktir.

– Bazı özellikleri –

- Tüm öz vektörleri 0 ya da 1'dir.
- $A \geq 0$ ise $rank(A) = iz(A)$
- $(I - A)$ idempotent matris dir.
- $A = A^{-1}$ ise $A \geq 0$'dır

Örnek:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A^2$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} = B^2$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler

Öz Değer ve Öz vektörler

Öz Değer Bulma:

Verilen n mertebeli bir A matrisi için λ gibi bir skala ve X gibi sıfır olmayan bir vektör $AX = \lambda X$ denklem sistemini sağlarsa bu işleme öz değer (eigen value) problemi denir. $Ax = \lambda x$ sisteminde A n. dereceden bir kare matristir.

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Buradan,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \lambda x_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = \lambda x_2 \quad \text{olur.}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - \lambda x_1 = 0$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - \lambda x_2 = 0$$

$$\left.\begin{aligned} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 &= 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 &= 0 \end{aligned}\right\} \text{Matris şeklinde yazarsak,}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ olur.}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler

$(A-\lambda I)x=0$ bir homojen denklem sistemidir. x'in sıfırdan farklı çözümleri olabilmesi için $A-\lambda I$ matrisinin determinantının sıfır olması gerekir. Yani

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$

olur.

* Bu denkleme karakteristik denklem denir. Bu örnek için λ_1 ve λ_2 olmak üzere iki kökü vardır.

- Özdeğer ve Özvektörler

Örnek: $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin öz değerlerini bulun.

$|A - \lambda I| = 0$ 'dan $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{bmatrix} = 0$

$(5-\lambda)(2-\lambda) - 9 = 0$

$\lambda^2 - 7\lambda + 1 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$= \frac{7 \mp \sqrt{48-4}}{2} = \frac{7 \mp \sqrt{45}}{2}$$

$\lambda_1 = 0{,}146$, $\lambda_2 = 6{,}854$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler

Örnek:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 7-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(7-\lambda)\begin{vmatrix} 7-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 7-\lambda \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (7-\lambda)(\lambda^2-10\lambda+21-4) - 0 + (0-(7-\lambda)) = 0$$

$$= (7-\lambda)\left[(\lambda^2-10\lambda+17)-1\right] = 0$$

$$\lambda_1 = 7, \quad \lambda_2 = 8, \quad \lambda_3 = 2$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özvektörler Bulma

Öz vektör Bulma:

$(A-\lambda I)=0$ ya da $(A-\lambda I)v=0$ denklemlerinin herbir öz değer (λi) için bir tane öz vektör (vi) olacaktır. vi'leri bulmak için aşağıdaki adımlar izlenir.

- Her bir λi için $(A-\lambda iI)$ matrisi bulunur.
- $A-\lambda iI$ matrisinin adjoint'i bulunur. $(Adj(A-\lambda iI))$ Bu matrisin sütunlarının tümünün birbiriyle orantılı olması gerekir.
- Her sütunun elemanları ilgili sütundaki elemanın kareleri toplamının kareköküne bölünür. Sonucta alınan değerler vi'nin elemanları olup $vi'v=1$ 'dir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özvektörler Bulma

A) Bir önceki örnekte bulunan $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 8$ ve $\lambda_3 = 2$ öz değerlere karşılık öz vektörleri bulunuz.

$\Rightarrow \lambda_2 = 8$ için öz vektör;

Adım 1: $(A - \lambda I) = (A - 8I)$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Adım 2: $\alpha_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 1$; $\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 2$; ...

$$\text{Adj}(A - 8I) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ dur.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

Adım 3 : 1. sütun için;

$$\left.\begin{array}{l} 1/\sqrt{1^2+2^2+1^2} = 0{,}4082 \\ 2/\sqrt{1^2+2^2+1^2} = 0{,}8165 \\ 1/\sqrt{1^2+2^2+1^2} = 0{,}4082 \end{array}\right\} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4082 \\ 0{,}8165 \\ 0{,}4082 \end{bmatrix}$$

2. sütun için;

$$\left.\begin{array}{l} 2/\sqrt{2^2+4^2+2^2} = 0{,}4082 \\ 4/\sqrt{2^2+4^2+2^2} = 0{,}8165 \\ 2/\sqrt{2^2+4^2+2^2} = 0{,}4082 \end{array}\right\} \quad v_1 = \begin{bmatrix} 0{,}4082 \\ 0{,}8165 \\ 0{,}4082 \end{bmatrix}$$

3. sütun için aynı sonuç alınır. Bu işlemden sadece bir tanesini yapmak yeterlidir.

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özvektörler Bulma

⇒ $\lambda_2 = 7$ için özvektör;

Adım 1: $(A-\lambda I) = (A-7I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

Adım 2: $Adj(A-7I) = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Adım 3: 1. sütun için;

$$\left.\begin{aligned} -4/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} &= -0{,}8944 \\ 2/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} &= 0{,}4472 \\ 0/\sqrt{-4^2+2^2+0^2} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad v_2 = \begin{bmatrix} -0{,}8944 \\ 0{,}4472 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özvektörler Bulma

⇒ $\lambda_3 = 2$ için özvektör:

Adım 1 : $(A-2I) = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Adım 2 : $\text{Adj}(A-2I) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & 4 & -10 \\ -5 & -10 & 25 \end{bmatrix}$

Adım 3 : 1. sütun için;

$$\left.\begin{aligned} 1 / \sqrt{1^2+2^2+-5^2} &= 0{,}1825 \\ 2 / \sqrt{1^2+2^2+-5^2} &= 0{,}3651 \\ -5 / \sqrt{1^2+2^2+-5^2} &= -0{,}9128 \end{aligned}\right\} \quad V_3 = \begin{bmatrix} 0{,}1825 \\ 0{,}3651 \\ -0{,}9128 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özvektörler Bulma

Sonuç olarak :

$$V = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0,4082 & -0,8944 & 0,1825 \\ 0,8165 & 0,4472 & 0,3651 \\ 0,4082 & 0,0000 & -0,8128 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \quad v_1 \quad & \quad\quad v_2 \quad\quad & \quad v_3 \quad \end{array} \end{array}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler Bulma

Örnek: x_1 ve x_2 değişkenlerine ilişkin 11 gözlem aşağıdaki gibi verilmiş olsun. Verilere ilişkin korelasyon matrisi olan R'ye ilişkin özdeğerleri ve özvektörlerini bulunuz.

x_1	x_2
50	61
55	61
60	58
65	71
70	80
75	76
80	80
85	106
80	88
85	100
100	114

$$R = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0,8561 \\ 0,8561 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$|R - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0,8561 \\ 0,8561 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(1-\lambda) - (0,8561)(0,8561)$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 0,0858$$

$$\lambda_1 = 1,8561 \;;\; \lambda_2 = 0,0439$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler Bulma

+ λ_1 için özvectör:

$$(R-\lambda_1 I) = \begin{bmatrix} -0,8561 & 0,8561 \\ 0,8561 & -0,8561 \end{bmatrix}$$

$$Adj\,(R-\lambda I) = \begin{bmatrix} -0,8561 & -0,8561 \\ -0,8561 & -0,8561 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} -0,8561 \,/\, \sqrt{(-0,8561)^2+(-0,8561)^2} \\ '' \quad '' \quad '' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,7071 \\ -0,7071 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Özdeğer ve Özvektörler Bulma

4 λ_2 için özvektör;

$$(R-\lambda_2 I) = \begin{bmatrix} 0,8561 & 0,8561 \\ 0,8561 & 0,8561 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0,8561 / \sqrt{(0,8561)^2+(-0,8561)^2} \\ -0,8561 / \sqrt{\quad ''} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7071 \\ -0,7071 \end{bmatrix}$$

sonuçta:

$$V = \begin{bmatrix} -0,7071 & 0,7071 \\ -0,7071 & -0,7071 \end{bmatrix}$$

ÇOK DEĞİŞKENLİ İSTATİSTİKSEL ANALİZ

- Sunum hazırlanırken aşağıdaki kaynaktan yararlanılmıştır.