9. Hafta

2.5. Çok Değişkenli Regresyon Modelinde Araç Değişkenler Tahmini

Çok değişkenli regresyon modeli

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1} + u_i$$

Modelde *k* sayıda parametre, *k-1* sayıda bağımsız değişken vardır. Bağımsız değişkenlerden X_{k-1} 'in hata terimi ile korelasyonlu bir içsel değişken olduğunu biliyor veya şüpheleniyor olduğumuzu varsayalım. İlk $k-2$ değişken $(X_0 = 1, X_1, X_2, \ldots, X_{k-2})$ rassal hata terimi u ile korelasyonsuz olan dışsal değişkenlerdir. Araç değişkenler tahmini, her adımda en küçük kareler yönteminin kullanıldığı iki-aşamalı bir süreçtir.

Birinci aşamada sol tarafta içsel değişken X_{k-1} ve sağ tarafta bütün dışsal ve araç değişkenlerin yer aldığı regresyon modeli kurulur. *L* sayıda "dış" araç değişkenlere ($Z_1, Z_2, \ldots, Z_L$) sahip olduğumuz varsayımı altında, regresyon modeli aşağıdaki gibidir.

$$X_{k-1} = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \cdots + \gamma_{k-2} X_{k-2} + \theta_1 Z_1 + \theta_2 Z_2 + \cdots + \theta_L Z_L + v$$

Burada v, sağ taraftaki bütün değişkenler ile korelasyonsuz olan bir rassal hata terimidir. Birinci aşamada yukarıdaki model en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir ve X_{k-1} 'in tahmini değeri bulunur.

$$\hat{X}_{k-1} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 X_1 + \hat{\gamma}_2 X_2 + \cdots + \hat{\gamma}_{k-2} X_{k-2} + \hat{\theta}_1 Z_1 + \hat{\theta}_2 Z_2 + \cdots + \hat{\theta}_L Z_L$$

X_{k-1} 'in tahmni değeri ($\hat{X}_{k-1}$), modelde yer alan bütün dışsal değşkenlerinve ve araç değişkenlerin ağırlıklandırılmış bir ortalaması veya doğrusal bir kombinasyonudur.

İkinci aşamada regresyonda $\hat{X}_{k-1}$ ile X_{k-1} 'yı yer değiştirilir ve model yeniden yazılır.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} \hat{X}_{k-1} + u_i^*$$

burada u_i^*, rassal hata terimidir. Büyük örneklemlerde u_i^*, $\hat{X}_{k-1}$ dahil olmak üzere bağımsız değişkenler ile korelasyonsuz olduğundan dolayı, yukarıdaki model en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilebilir. Bu denklemden en küçük kareler tahmin ediciler, $\hat{b}_0, \hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_{k-1}$ **araç değişkenler (*AD*)** tahmin edicileridir ve en küçük kareler yönteminin iki aşamada uygulaması ile bulunabildiklerinden dolayı, **iki-aşamalı en küçük kareler (*2AEKK*)** tahmin edicileri olarak adlandırılır. Bu tahminciler *AD* veya *2AEKK* veya *AD/2AEKK* tahmin ediciler olarak adlandırılır. Sağ tarafta bir içsel değişkenden daha fazlası olan genel durumda da aşamalar benzerdir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} \hat{X}_{k-1} + u_i^*$$

Yukarıdaki modelin en küçük kareler tahmin edicilerinin varyans ve kovaryansları standart formülleri düzeltme ile kullanılabilir. Parametrelerin doğru tahminleri bulmak için iki aşamalı en küçük kareler tahminleri kullanılabiliyorken, bu yöntem doğru standart hataları ve dolayısıyla doğru $t -$ değerleri vermemektedir.

Hata teriminin varyansının *AD/2AEKK* tahmin edicisi

$$\hat{\sigma}_{IV}^2 = \frac{\sum (Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_1 - \hat{b}_2 X_2 \ldots - \hat{b}_{k-1} X_{k-1})^2}{n-k}$$

orijinal modelin ($Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1} + u_i$) kalıntılarına dayanmaktadır.

Not: Ekonometrik yazılım program kullanılıyorsa, iki-aşamalı en küçük kareler / araç değişkenler tahmini seçeneği seçildiği takdirde ekonometrik yazılım otomatik olarak doğru varyans tahmin ediciyi verecektir.

AD/2AEKK tahmin edilmiş $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} \hat{X}_{k-1} + u_i^*$'deki parametrelerin standart hatalar kullanılarak büyük örneklemlerde geçerli olan $t -$testleri uygulanabilir ve aralık tahminlerini oluşturulabilir. Ayrıca araç değişkenler zayıf değil ise, büyük örneklemlerde bileşik hipotez testleri geçerlidir.

2.6. Basit Regresyonda Birden Fazla Araç Değişken Kullanma

Basit regresyon modelinde birden fazla araç değişken kullanıldığında, yine iki-aşamalı en küçük kareler tahmin yöntemi kullanılır. Çok sayıda araçlar değşkenlerden sadece ihtiyacımız olan sayıyı seçebiliriz ve geri kalanını kullanmayabiliriz ancak bilgiyi atmak enformasyon kaybıdır ve genellikle istenen bir durum değildir.

Basit regresyon modeli $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X + u_i$ de , X içsel bir değişken ise ve L sayıda araç değişkene sahip olduğumuz varsayımı altında **birinci aşamada**

$$\hat{X} = \hat{\gamma}_0 + \hat{\theta}_1 Z_1 + \hat{\theta}_2 Z_2 + \cdots + \hat{\theta}_L Z_L$$

tahmin edilir. Böylece bütün araç değişkenler, bir değişken için birleştirildi. Daha sonra X için araç değişken olarak $\hat{X}$ kullanılır. Bu durum, iki örneklem moment koşuluna yol açmaktadır ve **ikinci aşamada**

$$\frac{1}{n}\sum(Y_i-\hat{b}_0-\hat{b}_1\hat{X}_i)=0$$

$$\frac{1}{n}\sum\hat{X}_i(Y_i-\hat{b}_0-\hat{b}_1\hat{X}_i)=0$$

$\bar{\hat{X}}=\bar{X}$ özelliği kullanılarak

$$\hat{b}_1=\frac{\sum(\hat{X}-\bar{\hat{X}})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(\hat{X}-\bar{\hat{X}})(X_i-\bar{X})}=\frac{\sum(\hat{X}-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum(\hat{X}-\bar{X})(X_i-\bar{X})}=\frac{\sum\hat{x}_i y_i}{\sum\hat{x}_i x_i}$$

$$\hat{b}_0=\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}$$

elde edilir. *L* sayıda mevcut araç değişkenlerden "optimum" araç oluşturuyoruz. Bu tahmin edici,

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_{k-1}\hat{X}_{k-1}+u_i^*$$

'den ortaya çıkan *AD/2AEKK* tahmin ediciye özdeştir.

2.7. Birinci Aşama Model Kullanılarak Araç Gücünü Değerlendirme

Araç değişken yönteminde seçilen araç değişkenin güçlü /zayıf olması önemlidir. Basit regresyon modelinde aracın gücünün değerlendirilmesinde, içsel değişken X ve araç değişken Z arasındaki korelasyon bir ölçüdür. Ancak çoklu değişkenli regresyon modellerinde, araç değişkenin gücünü ölçmek karmaşıktır. Çok değişkenli regresyon modelinde, bir aracın "güçlü" veya "zayıf" olduğunun değerlendirilmesinde birinci aşama regresyon önemli bir araçtır.

2.7.a.Bir Araç Değişken

$$Y_i=\beta_0+\beta_1X_1+\beta_2X_2+\cdots+\beta_{k-1}X_{k-1}+u_i$$

Çok değişkenli regresyon modelinde X_{k-1} bağımsız değişkeni içsel bir değişken ise ve bir araç değişkene Z_1 sahipsek (L=1) bu durumda birinci aşama regresyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$X_{k-1}=\gamma_0+\gamma_1X_1+\gamma_2X_2+\cdots+\gamma_{k-2}X_{k-2}+\theta_1Z_1+v$$

Basit bir regresyon modelinde, araç değişenin gücüne içsel değişken ve araç değişken arasındaki korelasyon dikkate alınıyor iken, çok değişkenli regresyon modelinde, diğer dışsal değişkenler $X_1, X_2, \ldots X_{k-2}$ da göz önüne alınmalıdır. Araç değişken Z_1 'in gücünü değerlendirmek için, bütün diğer dışsal değişkenlerin etkilerini kontrol ettikten sonra X_{k-1} ile Z_1 ilişkisinin gücüdür. Yukarıdaki birinci aşama regresyon modelindeki θ_1 diğer değişkenlerin etkileri sabit iken X_{k-1} üzerinde Z_1 'in etkisini ölçmektedir. Ancak Z_1 'in X_{k-1} üzerindeki etkisi istatistiksel olarak da anlamlı bir etki olmalıdır.

$$H_0 : \theta_1 = 0$$

Araç değişken Z_1 'in zayıf olduğu temel hipotezini $H_0 : \theta_1 = 0$ red etmek için kural $F-$ test istatistiğinin 10'dan daha büyük olması gerektiğidir. Bu amaç için t ve $F-$ testi arasındaki $t^2 = F$ ilişkisi kullanılır. Araç değişkenler zayıf olduğu zaman, AD tahmin edici sonucuna dayalı tahminler (2AEKK) ve testler güvenilmezdir.

2.7.b.Bir Araç Değişkenden Daha Fazlası

X_{k-1} bağımsız değişkeninin içsel olduğunu ve L sayıda $Z_1, Z_2, \ldots, Z_L$ 'ye araç değişkenlerine sahip olduğumuzu varsayalım. Bir içsel değişken için sadece bir araç değişkene ihtiyacımız vardır ancak bazı durumlarda daha fazla araç değişken mevcuttur ve daha güçlü araçlara sahip olmak araç değişkenler tahmin edicisini iyileştirebilmektedir. Birinci aşama regresyon denklemi aşağıdaki gibidir.

$$X_{k-1} = \gamma_0 + \gamma_1 X_1 + \gamma_2 X_2 + \cdots + \gamma_{k-2} X_{k-2} + \theta_1 Z_1 + \theta_2 Z_2 + \cdots + \theta_L Z_L + v$$

Araçlardan en azından birinin güçlü olması istenen bir özelliktir. Bunun için yukarıdaki denklem için temel hipotez,

$$H_0 : \theta_1 = 0, \theta_2 = 0, \ldots, \theta_L = 0$$

için $F-$testi uygulanır. Alternatif hipotez ise, θ_i parametrelerinin en az birinin sıfırdan farklı olmasıdır. Yine F istatistiğinin büyüklüğü önemlidir ve $F > 10$ kuralı uygulanmaktadır. $F-$test istatistiği değeri yeterince büyük ise, araçların "zayıf" olduğu hipotezini red edilir ve araç değşkenler tahminine dayalı 2AEKK yöntemi kullanılır. $F-$ değeri yeter kadar büyük değilse bu surumda araç değişkenler ve iki-aşamalı en küçük kareler tahmini, en küçük karelerden yönteminden bile daha kötü sonuç verebilir.

Örnek: Ücret Modelinin Araç Değişkenler Tahmini

$$\ln(Wage) = -0,522 + 0,1075 Educ + 0,0416 Exper - 0,0008 Exper^2$$
$$(Se) \quad (0,1986)\ (0,0141) \qquad (0,0132) \qquad (0,0004)$$

Yukarıdaki modele öncelikle "bir araç" değişken, daha sonra "birden fazla araç" ekleme işlemi ile model tahmin edilecektir.

Bir araç değişken tahmini uygulamak için, ücret denkleminde bizzat olmayan ve $Educ$ ile korelasyonlu olan, ancak hata teriminde ihmal edilmiş değişkenler ile korelasyonlu olmayan bir değşken tespit edilmelidir. Bu değişken kişinin yeteneği veya zekâsı olabilir. Ancak bu gibi değişkenleri bulmak zordur.

Bu uygulmada kadının annesinin aldığı eğitim(eğitim yılı sayısı) araç değişken olarak kullanılabilir bir değişkendir. Bir annenin eğitimi ($Mothereduc$) kızının ücret denkleminde bizzat yer almaz ancak daha eğitimli annelerin daha eğitimli kızlara sahip olmasının daha olası olduğunu önermek mantıklıdır. Annenin eğitimi bir araç değişken olarak ele alınarak, araç değişken yöntemini (*AD/2AEKK*) kullanarak model yeniden tahmin edilecektir.

AD/2AEKK tahmini uygulamadan önce, birinci aşamada $Educ$ denklemi en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir. Birinci aşama denklem, orijinal denklemde açıklayıcı değişkenler olarak bütün dışsal değişkenlere ve bir tane araç değişken ile yeniden kurulur ve tahmin edilir. En küçük kareler tahminleri

$$Educ = 9,7751 + 0,0489 Exper - 0,0013 Exper^2 + 0,2677 Mothereduc$$
$$(Se) \quad (0,4249)\ (0,0417) \qquad (0,0012) \qquad (0,0311)$$

dir. 73.95'lik bir $F-$test değerine karşılık gelen (0,2677/0.0311) 8.6'lık bit $t-$değeri ile $Mothereduc$ katsayısının istatistiksel açıdan anlamlıdır. Modelde, araç değişkenin içsel olduğundan şüphenilen değişken ile korelasyonlu olduğu gösterdiği için önemlidir.

İki-aşamalı en küçük kareler yaklaşımını kullanarak araç değişkenler tahminini uygulamak için birinci aşama denklemden eğitimin tahmini değerleri $Educ$ leri hesaplanır ve bu tahminler log-doğrusal ücret denklemi içinde $Educ$ yerine gelir. Daha sonra en küçük kareler ile denklem yeniden tahmin edilir. Bu iki aşamalı süreç uygun *AD/2AEKK* tahminleri verirken, standart hatalar ve $t-$ değerleri doğru değildir. Araç değişkenler veya iki-aşamalı en küçük kareler tahmini için tasarlanmış yazılım komutları kullanmak her zaman en iyi sonuç verecektir. Log-doğrusal ücret denkleminin araç değişkenler tahminleri aşağıdaki gibidir.

$$\ln(Wage) = 0,1982 + 0,0493 Educ + 0,0449 Exper - 0,0009 Exper^2$$
$$(Se) \quad (0,4729)\ (0,0374) \quad (0,0136) \quad (0,0004)$$

Annenin eğitim yılının bir araç değişken olarak kullanıldığıbu modelde eğitimin ücretler üzerindeki etkisi istatistiksel açıdan anlamlı değildir. Araç değişkenler veya iki-aşamalı en küçük kareler tahmini ile En küçük kareler tahminleri ile karşılaştırıldığında iki değişiklik dikkat çekicidir.

1. Birincisi, tahmin edilmiş eğitim getirisi %4.93'tür, bu en küçük kareler tahmini %10.75'ten daha düşüktür. Bu sonuç. $Educ$ hata terimindeki ihmal edilen faktörler ile pozitif olarak korelasyonlu ise en küçük kareler tahmin edicinin eğitim etkisini olduğundan fazla tahmin etme eğiliminde olması gerçeği ile tutarlıdır.
2. Eğitim katsayısının standart hatasının (0.0374), en küçük kareler tahminleri ile rapor edilen standart hata (0.0141)'den 2.5 kat daha büyüktür. Bu, iyi bir araç değişken ile bile *AD/2AEKK* tahmin edicinin etkin olmadığı gerçeği ile örtüşmektedir. Araç değişkenler tahmin edicinin etkinliğini, eğer mümkünse daha büyük bir örneklem veya daha fazla ve daha güçlü araç değişkenler kullanarak arttırmak mümkündür.

Modele ikinci bir araç değişken olarak "baba'nın eğitimi"eklenerek araç değişken sayısı 2'ye çıkarabiliriz. Araç değişkenlerin zayıf araç değişkenler olup olmadığını test etmek için, birinci aşama regresyonda standart bir $F-$ testini kullanarak önerilen iki araç değişken $Mothereduc$ ve $Fathereduc$'un birlikte anlamlılığı test edilir. Ücret denkleminde sadece bir potansiyel olarak içsel değişken $Educ$ var olduğu için, araç değişken sayısı en az sayısı birdir. Verilen iki araçdan en az bir tanesinin birinci aşama denklemde anlamlı olması istenir. Birinci aşama denklem aşağıdaki gibi yazılır.

$$Educ = \gamma_0 + \gamma_1 Exper + \gamma_2 Exper^2 + \theta_1 Mothereduc + \theta_2 Fathereduc + v$$

Bileşik hipotez testi –*F* testi için temel ve alternatif hipotezler aşağıdaki gibidir.

$H_0 : \theta_1 = \theta_2 = 0$

$H_1 :$ En az biri sıfırdan farklıdır.

Temel hipotezi reddedilirse θ_1 ve θ_2 ' dan en az bir tanesinin sıfır olmadığı sonucuna varılır. Birinci aşama tahminler aşağıdaki tabloda yer almaktadır.

Birinci-Aşama Denklem denklem tahmini
Bağımlı değişken: *Educ*

Değişken	Parametre	Standart Hata	t −istatistiği	Olasılık
C	9.1026	0.4266	21.3396	0.0000
EXPER	0.0452	0.0403	1.1236	0.2618
EXPER^2	−0.0010	0.0012	−0.8386	0.4022
MOTHEREDUC	0.1576	0.0359	4.3906	0.0000
FATHEREDUC	0.1895	0.0338	5.6152	0.0000

Birinci aşama regresyonda *Mothereduc* değişkenine ait parametrenin tahmin edilmiş değeri 0.1576, t istatistiğinn değeri 4,3906 ve *Fathereduc* değişkenine ait parametrenin tahmin edilmiş değeri 0,1895, t istatistiğinn değeri ise 5.62'e eşittir. Bu parametrelerinin her ikisinin sıfır olduğu sıfır hipotezi için $F-$ istatistiği değeri 55.40'tır. Bu değer istatistiksel açıdan anlamlıdır (temel hipotez reddedilir, alternative hipotez kabul edilir). Böylece araç değişkenlerden en az bir tanesinin zayıf olmadığı sonucuna ulaşılır ve *AD/2AEKK* tahminleri

$$\ln(Wage) = 0,0481 + 0,0614Educ + 0,0442Exper - 0,0009Exper^2$$
$$(Se) \qquad (0,4003)\ (0,0314) \qquad (0,0134) \qquad (0,0004)$$

Araç değişken olarak sadece *Mothereduc* kullanıldığı önceki modelin sonuca kıyasla eğitimin ücretler üzerindeki etkisi % 6.14'e yükselmiş ve standart hatada küçükte olsa azalma olmuştur. Sadece annenin eğitim yılının bir araç değişken olarak kullanıldığı modelde eğitimin ücretler üzerindeki etkisi istatistiksel açıdan anlamlı değil iken, iki araç değişkenin kullanıldığı bu modelde eğitimin ücretler üzerindeki etkisi istatistiksel açıdan anlamlıdır.

1.4. Genel Modelde Araç Değikenler Tahmini

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_{k-1} X_{k-1} + u_i$$

Çok değişkenli regresyon modelinde, bildiğimiz veya şüphelendiğimiz bağımsız değişkenlerden bazıları hata terimi u ile korelasyonlu olabilir.

İlk olarak hata terimi u ile korelasyonsuz olan G sayıda dışsal değişkenler ile içsel değişkenler iki gruba ayrılır. İkinci grubta yer alan $B=(K-1)-G$ sayıda bağımsız değişkenler regresyon hatası ile korelasyonludur ve kısaca içseldir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \cdots + \beta_G X_G + \beta_{G+1} X_{G+1} + \cdots \beta_{K-1} X_{K-1} + u_i$$

AD tahminini uygulayabilmek için, en az içsel değişken sayısı kadar araç değişkene ihtiyaç vardır. Model dışından L sayıda araç değişken ($Z_1, Z_2, \dots Z_L$) varsa:

AD tahmini için, $L \geq B$ olması gerekli bir koşuldur. $L = B$ ise, *AD* tahminini uygulamak için sadece yeterli araç değişkenler vardır. Model parametreleri bu durumda tam veya kesin belirlenmiştir (tanımlanmış). "Belirlenmiş" terimi model parametrelerinin tutarlı olarak tahmin edilebilir olduğunu göstermek için kullanılmaktadır. $L > B$ ise, *AD* tahmini için gerekli olandan daha fazla araca sahip olmaktayız ve model aşırı belirlenmişdir.

AD/2AEKK uygulamak için, içsel olan her bir bağımsız değişken için birinci-aşama denklemleri tahmin edilir. Birinci-aşama denklemlerinin sol tarafında bir içsel değişken, sağ tarafında ise dışsal olan G sayıda bağımsız değişken ve ayrıca dışsal olması gereken L sayıda araç değişkenler yer alır.

$$X_{G+j} = \gamma_{0j} + \gamma_{1j} X_1 + \cdots + \gamma_{Gj} X_G + \theta_{1j} Z_1 + \cdots + \theta_{Lj} Z_L + v \qquad j = 1, \dots, B$$

dir. Birinci-aşama parametreler (γ'ler ve θ'lar) her bir denklemde farklı değerler almaktadır. Denklemler, sağ tarafındaki değişkenlerin hepsi dışsal olduğu için en küçük kareler ile tahmin edilir. Sonrasında içsel değişkenlerin tahmini değerleri elde edilir.

$$\hat{X}_{G+j} = \hat{\gamma}_{0j} + \hat{\gamma}_{1j} X_1 + \cdots + \hat{\gamma}_{Gj} X_G + \hat{\theta}_{1j} Z_1 + \cdots + \hat{\theta}_{Lj} Z_L \qquad j = 1, \dots, B$$

Bu, iki-aşamalı en küçük kareler tahmininin birinci aşamasını oluşturmaktadır.

Tahminin ikinci aşamasında içsel değişkenler tahmini değerleri ile değiştirilerek model

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_G X_G + \beta_{G+1} \hat{X}_{G+1} + \beta_{G+2} \hat{X}_{G+2} + \cdots + \beta_{K-1} \hat{X}_{K-1} + u^*$$

Model en küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir.

Genel Bir Modelde Araç Gücünü Değerlendirme

Zayıf araç değişkenler için $F-$testi, denklemin sağ tarafında ki bir içsel değişkenden daha fazlasına sahip olan modeller için geçerli değildir. $B = 2$' ye model aşağıdaki gibidir.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_G X_G + \beta_{G+1} X_{G+1} + \beta_{G+2} X_{G+2} + u$$

Burada X_{G+1} ve X_{G+2} içselken, $X_1, X_2, \ldots, X_G$ dışsaldır ve hata terimi u ile korelasyonsuzdur. Hem X_{G+1} hem de X_{G+2} için güçlü bir araç değişken olan Z_1 olmak üzere, iki araç değişken Z_1 ve Z_2 'ye sahip olduğumuzu varsayalım. Z_2 ilgisiz bir araç olsa bile diğer bir ifade ile X_{G+1} veya X_{G+2} ile hiç ilişkili olmasa bile, zayıf araç için $F-$testi her iki birinci-aşama denklemde de anlamlı olabilir. Böyle bir durumda sadece birine sahip olduğumuzda iki geçerli araca sahibiz sonucunu çıkarabiliriz.

Bu durumda birinci-aşama denklemler

$$X_{G+1} = \gamma_{01} + \gamma_{11}X_1 + \cdots + \gamma_{G1}X_G + \theta_{11}Z_1 + \theta_{21}Z_2 + v_1$$

$$X_{G+2} = \gamma_{02} + \gamma_{12}X_1 + \cdots + \gamma_{G2}X_G + \theta_{12}Z_1 + \theta_{22}Z_2 + v_2$$

dir. Birinci denklemdeki zayıf araç için $F-$testi, bu parametrelerden en az bir tanesinin sıfır olmadığı alternatif hipotezine karşın, $H_0: \theta_{11} = 0, \theta_{21} = 0$ olan θ_{11} ve θ_{21} 'nin birleşik anlamlılık içindir.

$H_0: \theta_{11} = 0, \theta_{21} = 0$

$H_1: \theta_{11} \neq 0$ ve/veya $\theta_{21} \neq 0$

θ_{11} istatistiksel olarak anlamlı ise, o zaman bileşik sıfır hipotezi eğer $\theta_{21} = 0$ olsa bile red edilebilir. Benzer şekilde, ikinci denklemde Z_1 ve Z_2 istatistiksel olarak anlamlı olduğu sürece X_{G+2} için bir araç olarak ilgisiz olsa bile anlamlı bir $F-$test sonucu bulabiliriz. Bu durumda aslında sadece bir geçerli araç Z_1'in var olmasına ragmen iki bireysel olarak anlamlı $F-$testine sahibiz ve böylece

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \cdots + \beta_G X_G + \beta_{G+1}X_{G+1} + \beta_{G+2}X_{G+2} + u$$

modeli belirlenmemiştir.

Araç Değişkenler Tahminleri ile Hipotez Testi

İki-aşamalı en küçük kareler/araç değişkenler tahminlerine dayanan regresyon modelinde yer alan parametreler için hipotezi testinin uygulaması:

$H_0: \beta_i = c$ temel hipotezinin testi için test istatistiği aşağıdaki gibidir

$$t = \frac{\hat{\beta}_i - c}{Se(\hat{\beta}_i)}$$

ve bu test istatistiğinin kullanımı büyük örneklemler için de geçerlidir. $n \to \infty$ iken $t_{(n-k)}$ dağılımı standart normal dağılım $N(0,1)$'e yaklaşmaktadır. Serbestlik derecesi $n-k$ büyük ise, t ve normal dağılımın kritik değerleri çok yakın olacaktır. Uygulamada kesinlikle daha uygun $N(0,1)$ dağılımından ziyade $t_{(n-k)}$ dağılımına dayanan kritik değerler ve p −değerlerini kullanmak yaygındır Nedeni, t −dağılımına dayanan testlerin büyük olmayan verinin örneklemlerinde daha iyi çalışma eğilimli olmasıdır.

$H_0 : \beta_1 = c_1, \beta_2 = c_2$ bileşik hipotezi test etmek için paket programlar test edilen hipotezin sayısına eşit serbeslik derecesi sayısı (J) ile ki-kare dağılımına dayandırılmakta olup, Wald testi veya Olabilirlik Oranı testi/Lagrange çarpanı (LM) testi kullanılmaktadır. Bu test prosedürlerinin tümü asimptotik olarak eşdeğerdir. Bununla birlikte, test istatistiği payda J ve paydada $n-k$ serbestlik derecesi ile F −istatistiğidir. F − değeri , Wald istatistiği gibi ki-kare test istatistiklerinden birine J ile bölünerek hesaplanmaktadır. Küçük örneklemlerde F −testi kullanmak daha iyi sonuç vermektedir. Asimptotik olarak, testlerin hepsi aynı sonucu verecektir.

1.6.**Araç Değişkenler Tahminleri ile Uyum İyiliği**

Bir regresyon modelinin sağ tarafında içsel değişken(ler)in varlığı durumunda Y 'deki değişimin X değişkenleri tarafından ne kadar iyi açıklandığını ölçen belirginlik katsayısı (R^2), başarısız olmaktadır, çünkü bu modeller geri bildirim sergilemektedir. Modelimiz $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ ise, AD kalıntıları $\hat{u}_i = Y_i - \hat{b}_0 - \hat{b}_1 X_i$ dir. $R^2 = 1 - \sum \hat{u}_i^2 \big/ \sum y_i^2$ eştliğinden hesaplanan uyum iyiliği ölçümü belirginlik katsayısı AD tahminlerine dayandığı zaman negatif çıkabilmektedir.

Belirlenme Testleri

Bağımsız değişken rassal hata terimi ile korelasyonlu ise, en küçük kareler tahmin edicisi başarısız olacaktır. Güçlü bir araç değişken mevcut ise, *AD* tahmin edicisi tutarlıdır ve büyük örneklemlerde yaklaşık olarak normal olarak dağılmaktadır. Ancak zayıf bir araç değişken veya regresyon hatası ile korelasyonlu bir araç kullanılırsa, *AD* tahmini en küçük kareler tahmin ediciyi kullanmak kadar kötü hatta daha kötü sonuç verebilir. Bu durumda:

1. X 'in hata terimi ile korelasyonlu olup olmadığını test edebilir miyiz? En küçük kareler veya *AD* tahmin edicilerinin kullanılması gerektiği konusunda yol göstericidir.
2. Gerektiğinde araç değişkenin geçerli olup olmadığı ve regresyon hatası ile korelasyonsuz olup olmadığı test edilebilinir mi?

1. İçsellik İçin Hausman Test

Bağımsız bir değişken ile hata terimi arasında korelasyonlu ise, en küçük kareler tahmin edicisi başarısız olacaktır. En küçük kareler tahmin edicinin başarısız olduğu durumda araç değişkenler tahmin edicisi kullanılabilecektir. Bu durumda bir açıklayıcı değişken ve hata terimi arasındaki bir korelasyonun varlığının nasıl test edildiği önem kazanmaktadır. Uygun tahmin prosedürü aşağıdaki gibidir.

$H_1 : Cov(X,u) \neq 0$ alternatif hipotezine karşı temel hipotez $H_0 : Cov(X,u) = 0$ 'dir.

$$H_0 : Cov(X,u) = 0$$

$$H_1 : Cov(X,u) \neq 0$$

Testin amacı en küçük kareler tahmin edicinin performansı ile araç değişkenler tahmin edicisinin performansını karşılaştırmaktır. Temel ve alternatif hipotezler altında aşağıdakini bilmekteyiz:

- Temel hipotezi doğru ise, hem en küçük kareler tahmin edicisi $\hat{\beta}$ hemde araç değişkenler tahmin edici $\hat{b}$ tutarlıdır. Böylece, büyük örneklemlerde iki tahminci arasındaki fark sıfıra yaklaşmaktadır, $q = \hat{\beta} - \hat{b} \rightarrow 0$. Doğal olarak, temel hipotez doğru ise, daha etkin olan en küçük kareler tahmin edicisi kullanılır.
- Temel hipotezi reddedilir ise , en küçük kareler tahmin edici tutarlı değildir ve araç değişkenler tahmin edici tutarlıdır. Sonuç olarak, onlar arasındaki fark büyük örneklemlerde bile sıfıra yaklaşmamaktadır, $q = \hat{\beta} - \hat{b} \rightarrow c \neq 0$. Temel hipotezi doğru değil ise, tutarlı bir tahminci olan araç değişkenler tahmin edicisi kullanılır.

Bu temel ve alternatif hipotezler için bu problem üzerine, ekonometrisyen Jerry Hausman'nın öncü çalışmasının tanınmasında genellikle Hausman testi olarak bilinen testin çeşitli uygulamaları vardır. Testin bir uygulaması direk olarak en küçük kareler ve araç değişkenler tahminleri arasındaki farklılıkları incelemektedir.

Not: Bu test, bazı bilgisayar yazılım programlarında yapılmaktadır.

Testin alternatif bir şeklini uygulamak çok kolaydır. Amacımız regresyon modeli $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ 'de X 'in u ile korelasyonlu olup olmadığını tespit etmektir. X için araç değişkenler Z_1 ve Z_2 olsun. Hata terimi ile korelasyonlu olabilen her bir değişken için en az bir araç değişken gereklidir. Sonraki aşamalar aşağıdaki gibidir.

1. Sağ tarafta bütün araç değişkenlerin ve içsel olmayan bütün dışsal değişkenlerin yer aldığı birinci-aşama model en küçük kareler ile tahmin edilir.

$$X = \gamma_0 + \theta_1 Z_1 + \theta_2 Z_2 + v$$

ve kalıntılar hesaplanır.

$$\hat{v} = \hat{X} - \hat{\gamma}_0 - \hat{\theta}_1 Z_1 - \hat{\theta}_2 Z_2$$

Bir açıklayıcı değişkenden daha fazlası için içsellik için test ediliyorsa, her biri için bu tahmin tekrarlanır.

2. Hesaplanan bu kalıntılar ($\hat{v}$) orijinal regresyon modeline bağımsız bie değişken olarak ilave edilir.

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \delta \hat{v} + u_i$$

"Yapay regresyonu" olarak adlandırılan yukarıdaki regresyon En küçük kareler yöntemi ile tahmin edilir ve anlamlılık sınaması için olağan $t -$ testi kullanılır.:

$H_0 : \delta = 0$ (X ile u arasında korelasyon yoktur)

$H_1 : \delta \neq 0$ (X ile u arasında korelasyon vardır)

3. Bir değişkenden daha fazlası içsellik için test ediliyorsa, test dahil edilen kalıntılar üzerine katsayıların ortak anlamlılığının bir $F -$ testi olacaktır.