k- bağımsız örneklem testleri- Medyan ve Ki-kare testleri

Nihat Tak

2023-05-18

Bağımsız k Örneklem Medyan Testi

Medyan testi, ele alınan iki veya daha fazla örneklemin ana kütlesinin bulunduğu parametreleri incelemek amacıyla kullanılmaktadır. Bu testin varsayımları aşağıdaki gibidir; Birbirinden bağımsız k örneklemin medyanları birbirinin aynı olan k ana kitleden veya aynı ana kitleden çekilmiş olup olmadığını araştırır.

- Karşılaştırılacak k örneklemin büyüklüğü yeteri kadar büyük ise χ^2 testi veya binom testi de kullanılabilir.
- Ele alınan veriler k sayıda ana kütlenin her birinden tesadüfi olarak seçilerek nj hacimli örneklerden meydana gelmektedir.

Varsayımları:

- Örneklemlerin çekildiği kitleler aynı medyan değerine sahip olmalıdır.
- Her örneklem rassaldır.
- Örneklemlerden birbirinden bağımsızdır.
- Gözlemler en az ordinal ölçekte ölçülmüştür.

Adımları:

Adım 1 Hipotezler kurulur.

H_0: Örneklemlerin çekildiği ana kitlelerin medyan değeri eşittir

H_1: En az iki ana kitlenin medyan değeri birbirinden farklıdır.

$$H_0: MD_1 = MD_2 = \cdots = MD_c$$

H_1: En az biri farklı

Adım 2 Test istatistiği hesaplanır.

- Test istatistiği şu sırayla elde edilir:
- Gözlem değerlerinin medyan değeri bulunur.
- Gözlem değerleri medyan değerinden büyük değerler veya küçük eşit değerler olacak şekilde iki gruba ayrılır.

$$\chi^2_{hes} = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{2}\frac{(G_{ij}-B_{ij})^2}{B_{ij}}$$

Adım 3 Kritik tablo değeri bulunur.

$\chi^2_{(c-1),\alpha}$ değeri bulunur.

Adım 4 Karar verilir.

Eğer $\chi^2_{hes} > \chi^2_{(c-1),\alpha}$ ise H_0 reddedilir.

Yani, "örneklemlerin çekildiği ana kitlelerin medyan değerleri birbirinden farklıdır" denir.

Örnek Bir tarlanın rasgele seçilen dört farklı parseli çok sayıda alanlara bölünmüş ve bu alanlara, her parsele farklı metod uygulanarak mısır ekilmiştir.Daha sonra bu alanlardan elde edilen ürün miktarı hesaplanmıştır. Kullanılan metodların ürün miktarını etkileyip etkilemediğini araştırınız. ($\alpha = 0{,}001$)

Method1	Method2	Method3	Method4
83	91	101	78
91	90	100	82
94	81	91	81
89	83	93	77
89	84	96	79
96	83	95	81
91	88	94	80
92	91		81
90	89		
	84		

1. Adım Hipotezler kurulur.

- H_0: 4 farklı parsele uygulanan metodlar sonucu elde edilen ürün miktarlarının medyanı eşittir.
- H_1: 4 farklı parsele uygulanan metodlar sonucu elde edilen ürün miktarlarının medyanı eşit değildir.

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

Medyan değeri 17. ve 18. gözlem değerlerinin aritmetik ortalaması medyan değeri olarak belirlenir, yani;

$$medyan = \frac{91+89}{2} = 90$$

Gözlenen değerler yardımıyla beklenen değerler bulunur.

Gözlenen	1	2	3	4	Toplam
>90	5	2	7	0	14
≤90	4	8	0	8	20
Toplam	9	10	17	8	34

Beklenen	1	2	3	4	Toplam
>90	3.705882	4.117647	7	3.294118	14
≤90	5.294118	5.882353	10	4.705882	20
Toplam	9	10	17	8	34

Test istatistiği hesaplanır.

$$\chi^2_{hes} = \sum_{j=1}^{c}\sum_{i=1}^{2}\frac{\left(G_{ij}-B_{ij}\right)^2}{B_{ij}} = 0.451914099 + 1.08907563 + \ldots + 2.305882353$$

$$= 18.21968254$$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$$\chi^2_{(c-1),\alpha} = \chi^2_{3,0.001} = 7.815$$

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hes} = 18.21968254 > 7.815 = \chi^2_{tablo}$ olduğundan H_0 reddedilir. Yani, en az bir ürün miktarının medyan değerinin diğerlerinden farklı olduğu söylenir.

```
x<-matrix(c(5,2,7,0,4,8,0,8),nrow=2,byrow =T)
fisher.test(x)

##
##  Fisher's Exact Test for Count Data
##
## data:  x
## p-value = 0.0001008
## alternative hypothesis: two.sided
```

Örnek 2 X, Y ve Z ilaçları ile tedavi edilen hastalar arasından tesadüfi olarak seçilen 11'er hastanın iyileşme süreleri aşağıdaki gibidir;

Tedavi Türü		
X	**Y**	**Z**
10, 12, 18, 17, 16, 20, 22, 21, 28, 30, 29	26, 11, 9, 7, 13, 14, 15, 8, 6, 19, 25	32, 26, 23, 34, 40, 42, 10, 12, 25,27, 30

α=0.05 olduğu durumda bu örneklerin aynı ana kütleden geldikleri söylenebilir mi?

1. Adım Hipotezler kurulur.

H_0: Örnekler aynı yığından gelmiştir.

H_1: Örnekler aynı yığından gelmemiştir.

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

n_1=11, $n_2 = 11$ ve $n_3 = 11$ olduğundan $n = n_1 + n_2 + n_2 = 33$

$(n+1)/2 = 34/2 = 17$. değer = 20 olarak belirlenir.

	Tedavi Türü			
	X	**Y**	**Z**	**Toplam**
20' den büyük	5 (5.33)	2 (5.33)	9 (5.33)	16
20' den küçük veya eşit	6 (5.67)	9 (5.67)	2 (5.67)	17
Toplam	11	11	11	33

$$\chi_h^2 = \frac{(5-5.33)^2}{5.33} + \frac{(6-5.67)^2}{5.67} + \frac{(2-5.33)^2}{5.33} + \frac{(9-5.67)^2}{5.67} + \frac{(9-5.33)^2}{5.33} + \frac{(2-5.67)^2}{5.67}$$

$$\chi_{hes}^2 = 8.978$$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$$\chi_{2,0.05}^2 = 5.991$$

4. Adım Karar verilir.

$\chi_{hes}^2 = 8.978 > 5.991 = \chi_{tablo}^2$ olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Buna göre ele alınan bu örneklerin aynı anakütleden gelmedikleri görülmektedir.

```
x<-matrix(c(5,2,9,6,9,2),nrow=2,byrow =T)
chisq.test(x)

##
##  Pearson's Chi-squared test
##
## data:  x
## X-squared = 8.9779, df = 2, p-value = 0.01123

fisher.test(x)

##
##  Fisher's Exact Test for Count Data
##
## data:  x
## p-value = 0.01405
## alternative hypothesis: two.sided
```

Ki-kare Testi

- Veri, çeşitli kategoriler için frekanslardan oluşuyorsa, bağımsız grupların farkının anlamlılığı için ki-kare testi kullanılabilir.
- Kategoriler, tüm ölçekteki verilerden olabilir.
- Test edilecek hipotez genelde, bazı özelliklere göre çeşitli kategoriler için k bağımsız grubun birbirinden farklı olup olmadığıdır.

Yöntem

- Öncelikle, r x k tablosu hazırlanır. Her kolondaki veri; r, kategorik yanıt değişkeni ve k, farklı örneklem veya grup frekanslarıdır.
- Eğer oranlar aynı ise, gruplar arasında bir etkileşim yoktur; eğer oranlar farklı ise gruplar arasında etkileşim vardır denir.
- Eğer fark varsa bu farkın tesadüfi olup olmadığı test edilir.
- H_0 hipotezi k örneklemin frekanslarının aynı kitleden gelmesi yani eş olmasıdır.
- Yani k kitlenin birbirinden farklı olmadığıdır.

Varsayımları

- Gözlemlerin gruplar için sınıflandırılabilir olması gerekmektedir ve her gözlem kritere göre yalnızca bir hücreye ait olabilmelidir.

- Değişkenler en az nominal olabilir ve karşılıklı ayrık kategorilere göre sınıflandırılabilir olmalıdır.

Adımları

1.Adım Hipotezler kurulur. H_0 : k örneklem aynı kitleden gelmektedir.

H_1 : k örneklem aynı kitleden gelmemektedir. (En az bir örneklem farklı kitleden gelmektedir.)

2.Adım Test istatistiği hesaplanır.

İlk olarak veri; kolonlar grupları, satırlar da kategorileri gösterecek şekilde frekanslarına göre tablolaştırılır; kontenjans tablosu oluşturulur.

	Grup				
Değişken	1	2	….	k	Toplam
1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1k}	R_1
2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2k}	R_2
r	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rk}	R_3
Toplam	C_1	C_2	…	C_k	N

-
  j. grup için i. değerin gözlenen frekansı veya kategorisi $n_{ij} = G_{i,j}$ şeklinde gösterilmektedir.
- Bağımsızlık varsayımı altında, her hücredeki beklenen frekans satır ve sütun toplamlarının dağılımına orantılı olarak bulunur.
- Satır ve sütun toplamları

$$R_i = \sum_{j=1}^{k} n_{ij}$$

$$C_j = \sum_{i=1}^{r} n_{ij}$$ şeklinde elde edilir.

- Her hücredeki beklenen frekansı bulabilmek için iki marjinal toplamı toplam frekansa bölünür:

$$E_{i,j} = \frac{R_i C_j}{N}$$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

$n_{ij} = G_{i,j}$=j.kolonun i. Satırının kategorileştirilen gözlenen frekansı

$E_{ij} = H_0$ doğru olduğunda j.kolonun i.satırının beklenen frekansı

3.Adım Kritik tablo değeri bulunur.

Test istatistiği χ^2 dağılmaktadır ve serbestlik derecesi $(r-1)(k-1)$, r:satır sayısını(kategori sayısını), k: sütun sayısını(bağımsız grup sayısını) göstermek üzere;

$\chi^2_{(r-1)(k-1),\alpha}$ tablo değeri bulunur.

4. Adım Karar verilir.

Eğer $\chi^2_{hesap} > \chi^2_{tablo}$ ise H_0 reddedilir. En az bir örneklem farklı kitleden gelir yorumu yapılır.

```
x<-matrix(c(13,8,10,3,20,23,27,18,11,12,12,21),nrow=3,byrow =T)
chisq.test(x)

##
##  Pearson's Chi-squared test
##
## data:  x
## X-squared = 12.778, df = 6, p-value = 0.0467
```

Örnek Klinik depresyonun 4 farklı terapi yönteminin hastalar üzerindeki etkisi araştırılmak istenmektedir. Bu çalışmada 178 tane depresif hastaya 10 hafta boyunca 4 farklı terapi uygulanır: psikoterapi, davranışsal terapi, ilaç terapisi ve rahatlama terapisi. Bu kriterler psikometrik testlerden geçirilmişlerdir ve skorlanmışlardır. ($\alpha = 0.05$)

	Grup				
Değişken	Psikoterapi	Rahatlama Terapisi	İlaç Terapisi	Davranışsal Terapi	Toplam
Ciddi derecede (skor >23)	13 (8.40)	8 (8.21)	10 (9.36)	3 (8.02)	34
Hafif Seviyede (7 < skor < 23)	20 (21.75)	23 (21.26)	27 (24.22)	18 (20.76)	88
Normal (skor < 7)	11 (13.84)	12 (13.53)	12 (15.42)	21 (13.21)	56
Toplam	44	43	49	42	178

1.Adım Hipotezler kurulur.

H_0:Her grup için değişkenlerin her bir skor kategorilerinin oranları aynıdır.

H_1:Her grup için değişkenlerin her bir skor kategorilerinin oranları deneme gruplarına göre farklılaşır.

2.Adım Test istatistiği hesaplanır.

- Çalışmadaki gruplar bağımsız olduğundan ve sayıları ikiyi aştığından k-bağımsız grup uygundur.
- Veri kesikli kategorilerde olduğundan ki-kare testi uygun olur.
- İlk olarak beklenen frekanslar bulunmalıdır:

$E_{i,j} = \frac{R_i C_j}{N}$ yardımıyla beklenen frekanslar kolayca bulunur.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{n_{ij}^2}{E_{ij}} - N = \frac{13^2}{8.40} + \frac{8^2}{8.21} + \ldots + \frac{21^2}{13.21} - 178$$

$$= 20.12 + 7.80 + 10.68 + 1.12 + 18.39 + 24.88$$

$$+ 30.10 + 15.61 + 8.74 + 10.64 + 9.34 - 178$$

$$= 12.80$$

3.Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$\chi^2_{(3-1)(4-1),0.05} = \chi^2_{6,0.05} = 12.59$ olarak bulunur.

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hes} = 12.80 > 12.59 = \chi^2_{tablo}$ olduğundan H_0 reddedilir. Yani "en az bir terapi %5 önem seviyesinde diğerlerinden farklı sonuç vermektedir" diyebilecek yeter kanıtımız vardır.

Örnek Bir araştırma için 782 yöneticiye "Firmanızda kaç kişi sizin yaptığınız işi yapmaya yetkindir?" sorusu soruluyor. Bu araştırma için 282 tane bölgenin en büyük firması, 300 tane orta seviyede firma 200 tane de küçük firması alınıyor. Firmanın büyüklüğüne göre yöneticilik işini yapabilecek olan insanların sayıları değişmektemidir? ($\alpha = 0.05$)

Firmanın Büyüklüğü					Toplam
		Büyük	Orta	Küçük	
İşi yapabilen kişi sayısı	Bir	17 (32.816)	30 (34.91)	44 (23.274)	91
	İki	39 (64.91)	81 (69.054)	60 (46.036)	180
	Üç	68 (35.632)	78 (69.821)	36 (46.547)	182
	4 veya 5	85 (59.141)	63 (62.916)	16 (41.944)	164
	6 veya daha çok	62 (37.143)	33 (39.514)	8 (26.343)	103
	Bilmiyoru m	11 (22.358)	15 (23.7859	36 (15.857)	62
Toplam		282	300	200	782

1.Adım Hipotezler kurulur.

H_0: Firma büyüklüklerine göre oluşturulan gruplarda yöneticilik yapabilecek insanların sayıları değişmemektedir.

H_1: En az bir grup diğerlerinden farklıdır.

2.Adım Test istatistiği hesaplanır.

- Beklenen değerler hesaplandıktan sonra

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{k} \frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} = \frac{(17 - 32.816)^2}{32.816} + \frac{(30 - 34.910)^2}{34.910} + \ldots + \frac{(36 - 15.857)^2}{15.857}$$

=139.29

3.Adım Kritik tablo değeri bulunur.

$$\chi^2_{(6-1)(3-1),0.05} = \chi^2_{10,0.05} = 18.3070$$

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hes} = 139.29 > 18.3070 = \chi^2_{tablo}$ olduğundan H_0 reddedilir.Yani, %5 önem düzeyinde "Firmanın büyüklüğüne göre yöneticilik işini yapabilecek olan insanların sayıları değişmektedir" diyebilecek yeterli kanıt vardır.

```
x<-
matrix(c(17,30,44,39,81,60,68,78,36,85,63,16,62,33,8,11,15,36),nrow=6,byrow
=T)
chisq.test(x)

##
##  Pearson's Chi-squared test
##
## data:  x
## X-squared = 139.29, df = 10, p-value < 2.2e-16
```