Nilüfer Dastan 2016475027
Ekonometri i.ö

BIRINCI MERTEBEDEN LINEER DIFERANSIYEL DENKLEMLER

Birinci mertebeden doğrusal bir diferansiyel denklem,

$y' + f(x)y = g(x)$ formunda verilir.

Hatırlatacak olursak $x' + f(y)x = g(y)$ denklemi de x'e göre lineerdir ve burada yapılacak yöntemle çözülebilir. Verilen f ve g fonksiyonları öngörülen çözüm aralığında x'e bağlı sürekli fonksiyonlardır. Bu türden bir denklemin çözümü, eğer denklemin sol yanı tek bir terimin türevi şeklinde ifade edilebiliyorsa, sıradan bir işleme dönüşür. Bunun için denklemin sol tarafını bir terimin türevi haline getirebilecek bir çarpanın aranması gerekir. Denklemin her iki yanını $T(x)$ fonksiyonu ile çarpalım

$$T(x)y' + T(x)f(x)y = T(x)g(x)$$

$[T(x)y]' = (x)y' + T'(x)y$ olduğundan,

Eşitliğin sol tarafının $[T(x)y]'$nin açılımı olabilmesi için $\mu'(x) = \mu(x)f(x)$ şartı sağlanmalıdır. Bulmaya çalıştığımız çarpanın sıfırdan farklı olduğu durumda bu denklemi integre edersek;

$\frac{T'(x)}{T(x)} = f(x)$ veya $\frac{d}{dx}[\ln|T(x)|] = f(x)$ yazılarak

$\Rightarrow \ln|T(x)| = \int f(x)dx + c$ elde ederiz

$T(x)$ çarpanı yalnız bırakılıp, c sabiti dikkate alınmayarak

$\Rightarrow |T(x)| = e^{\int f(x)dx}$ elde edilir.

Integral sabitinin bu aşamada dahil edilmesi genel çözüm üzerinde bir değişikliğe yol açmayacaktır. Ayrıca denklemin sağ tarafı her koşulda pozitif olacağından denklem

$\Rightarrow T(x) = e^{\int f(x)dx}$ olarakta ifade edilebilir.

Bu denklemle tanımlanan fonksiyona integral çarpanı diyeceğiz.
Denklemin sol tarafı artık tek bir terimin türevi şeklinde ifade edildiğinden

$[T(x)y]' = T(x)g(x)$ yazılarak

$T(x)y = \int T(x)g(x)dx + C$ veya bağımlı değişkeni yalnız bırakarak diferansiyel denklemin genel çözümü;

$y = \frac{1}{T(x)}\left[\int T(x)g(x)dx + C\right]$ olarak elde edilmiş olur

Birinci mertebeden lineer diferansiyel bir denklemin

$y = e^{-\int f(x)dx}\left(e^{\int f(x)dx} g(x)dx + c\right)$; $T(x) = e^{\int f(x)dx}$

veya kısaca

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ denklemine göre genel çözümünün bulunabilmesi için, verilen diferansiyel denklemin kesinlikle

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)$ haline getirilmesi gerekir.

integral Çarpanı

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ → Diferansiyel denklemin tam olmadığını kabul edelim.

Bu denklem ile çarpıldığında, denklemi tam diferansiyel yapan $\lambda = \lambda(x,y)$ çarpanına "integral çarpanı" adı verilir. integral çarpanı için ele alınacak bazı özel durumlar aşağıdaki gibidir;

I. Durum Sadece x değişkenine bağlı integral çarpanının bulunması:

Eğer $\dfrac{P_y - Q_x}{Q} = f(x)$ şeklinde ise bu durumda verilen diferansiyel denklem sadece x değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan $\dfrac{P_y - Q_x}{Q}dx = \dfrac{d\lambda}{\lambda}$ denk. çözümünden elde edilir.

II. Durum Sadece y değişkenine bağlı integral çarpanının bulunması:

Eğer $\dfrac{P_y - Q_x}{-P} = f(y)$ şeklinde ise bu durumda verilen diferansiyel denklem sadece y değişkenine bağlı bir integral çarpanını kabul eder ve bu çarpan $\dfrac{P_y - Q_x}{-P}dy = \dfrac{d\lambda}{\lambda}$ denk. çözümünden elde edilir.

III. Durum Sezgisel yolla integral çarpanının bulunması

Bazı özel durumlarda eğer aşağıdaki tam diferansiyel özdeşlikler verilen denklemde varsa (ya da elde edilebiliyorsa) diferansiyel denklem doğrudan tam diferansiyel hale getirilebilir ve bu haliyle integrali alınarak çözülebilir.

1) $xdx + ydy = \frac{1}{2}d(x^2+y^2)$

2) $xdy + ydx = d(xy)$

3) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d(y/x)$

4) $\dfrac{ydx - xdy}{y^2} = d(x/y)$

5) $\dfrac{xdy - ydx}{x^2+y^2} = d(\arctan y/x)$

IV. Durum $\lambda = \lambda(u(x,y))$ olmak üzere, u'nun bir fonksiyonu cinsinden integral çarpanının bulunması

Eğer, $\dfrac{P_y - Q_x}{Q u_x - P u_y} = f(u)$ şeklinde ise verilen denklem $\lambda = \lambda(u)$ şeklinde yani u'nun bir fonksiyonu cinsinden bir integral çarpanı kabul eder

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{P_y - Q_x}{Q u_x - P u_y}\, du$$

ÖRNEK SORU $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 3xy = 6x$ diferansiyel denk. genel çözümü

→ integral çarpanını hesaplarız

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3x}{x^2+1} dx}$$

$$\mu(x) = e^{\frac{3}{2}\ln(x^2+1)} = (x^2+1)e^{3/2}$$

→ Denklemin her iki yanını $\mu(x)$ ile çarpalım

$$(x^2+1)^{3/2}\frac{dy}{dx} + (x^2+1)^{1/2}\, 3xy = (x^2+1)^{3/2}\frac{6x}{(x^2+1)}$$

$$\frac{d}{dx}\left[(x^2+1)^{3/2} y(x)\right] = 6x(x^2+1)^{1/2}$$

→ integral alınır.

$$(x^2+1)^{3/2} y(x) = \int 6x(x^2+1)^{1/2} dx + c$$

$$(x^2+1)^{3/2} y(x) = 2(x^2+1)^{3/2} + c$$

$$y(x) = 2 + c(x^2+1)^{-3/2}$$

TAM DİFERANSİYEL OLMAYAN DENKLEMLERİ TAM HALE GETİRME (İNTEGRASYON ÇARPANI)

Tam olmayan diferansiyel denklemler, görünüş olarak tam diferansiyel denklemlere benzerler. Yani diye $Mdx + Ndy = 0$ formatındadırlar. Ancak kontrol ettiğimizde tam diferansiyel denklem olmadıkları görürüz. Biz bu diferansiyel denklemleri tam hale getirebiliriz.

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

! Yani M fonksiyonun türevi, N fonksiyonunun x'e göre türevine eşit değilse tam diferansiyel değildir.

Eğer eşitlerse Tam diferansiyel denklemdir.

Tam olmamasına karşın, integral çarpanı yöntemiyle çözmemiz mümkündür.

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad N_x = \frac{\partial N}{\partial x} \Big\} \qquad \frac{M_y - N_x}{N} \qquad \frac{N_x - M_y}{M}$$

eşitlikleri geçerli olmak üzere — $\frac{M_y - N_x}{N}$: sadece x'e bağlıysa; $\frac{N_x - M_y}{M}$: sadece y'ye bağlıysa

! Bu şartlardan sadece birinin sağlanması bize bu tam olmayan diferansiyel denklemin integral çarpanı yöntemiyle çözüleceğini gösterir.

⇒ En az bir şart sağlanıyorsa

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N}} \rightarrow \text{Eğer x'e bağlıysa}$$

$$\mu = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M}} \rightarrow \text{Eğer y'ye bağlıysa}$$

—ÇÖZÜM YÖNTEMİ—

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x) \Rightarrow T(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} = g(y) \Rightarrow T(x) = e^{-\int g(y)\,dy}$$

ÖRNEK: $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 0$ → Eşitlik sağlanmadığı için integral çarpanını devreye sokarız

1.Adım $\frac{M_y - N_x}{N} = 1$ Şartlardan biri sağlandı → x'e bağlı

2.Adım $e^{\int 1dx} = e^x$ → integral çarpanı

3.Adım integral çarpanını denklemin her iki tarafıyla çarparız

$$(y^2e^x - xe^x)dx + e^x 2ydy = 0e^x$$

4.Adım $\int M dx = \int N dy$ Yani M'in x'e göre integrali N'nin y'ye göre integraline eşit olacak

$$(y^2e^x - xe^x)dx + e^x 2ydy = 0e^x$$

$\int M dx = y^2e^2 - \int xe^x$ → x'e göre integral alınırken y^2e^2 aynen kalır çünkü e^x'in integrali e^x'tir

$u - x \quad dv = e^x dx \quad \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$

$\Rightarrow uv - \int v du$

$\Rightarrow xe^x - e^x$

$\int M dx = y^2e^2 - xe^x + e^x + C(y)$

5.Adım Şimdi de N fonksiyonunun y'ye göre integralini alalım

$\int N dy = \frac{y^2}{2}e^x + C(x) \qquad C(y) = 0$

$C(x) = -xe^x + e^x$ → Bu sonucu herhangi bir denklemde yerine koyarsak genel çözümü bulmuş oluruz.

ÖRN

$\overset{M}{y}\,dx - (\overset{N}{x+\ln y})\,dy = 0$ dif. denk. genel çözümünü bul.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{} = \frac{1+1}{y} = \frac{2}{y} = g(y)$$

→ Sadece y'ye bağlı M

M veya N

ya x'e ya y'ye

$$T = e^{-\int g(y)dy}$$

$$T = e^{-\int \frac{2}{y}dy}$$

$$T = e^{-2\ln y} = e^{\ln y^{-2}} = y^{-2} = 1/y^2$$

$$\frac{1}{y^2} \,/\, y\,dx - (x+\ln y)\,dy = 0 \,/\, \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{1}{y}dx - \frac{(x+\ln y)}{y^2}dy = 0$$ → Tam hale indirgendi!

$$\left[\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \checkmark = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{y^2} \checkmark\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} \Rightarrow \int \partial u = \int \frac{1}{y}\,\partial x$$ → kaybolabilir

$$u = \frac{x}{y} + g(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \cancel{-\frac{x}{y^2}} + g'(y) = u = \cancel{-\frac{x}{y^2}} - \frac{\ln y}{y^2}$$

$$\int g'(y) = \int -\frac{\ln y}{y^2}$$

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

LAPTÜ

$$g(y) = \int \frac{-\ln y}{y^2}dy$$

$$\ln y = u, \quad \int -\frac{1}{y^2}dy = \int dv$$

$$\frac{1}{y}dy = du, \quad \frac{1}{y} = v$$

$$g(y) \Rightarrow \frac{\ln y}{y} - \int \frac{1}{y}\frac{1}{y}dy \Rightarrow$$

$$\frac{\ln y}{y} + \frac{1}{y} + c$$