DWT Probeklausur 2021 Loesung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (IN0018) (Technische Universität München)

Lehrstuhl für Algorithmen und Komplexität
Fakultät für Informatik
Technische Universität München

Esolution
Sticker mit SRID hier einkleben

Hinweise zur Personalisierung:

- Ihre Prüfung wird bei der Anwesenheitskontrolle durch Aufkleben eines Codes personalisiert.
- Dieser enthält lediglich eine fortlaufende Nummer, welche auch auf der Anwesenheitsliste neben dem Unterschriftenfeld vermerkt ist.
- Diese wird als Pseudonym verwendet, um eine eindeutige Zuordnung Ihrer Prüfung zu ermöglichen.

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Klausur:	IN0018 / Probeklausur	**Datum:**	Freitag, 23. Juli 2021
Prüfer:	Prof. Dr. Susanne Albers	**Uhrzeit:**	16:30 – 17:20

Bearbeitungshinweise

- Diese Klausur umfasst **4 Seiten** mit insgesamt **1 Aufgaben**.
  Bitte kontrollieren Sie jetzt, dass Sie eine vollständige Angabe erhalten haben.
- Die Gesamtpunktzahl in dieser Prüfung beträgt 7 Punkte.
- Das Heraustrennen von Seiten aus der Prüfung ist untersagt.
- Als Hilfsmittel sind zugelassen:
  - ein **handgeschriebener Spickzettel (DIN A4, beide Seiten)**
  - ein **analoges Wörterbuch** Deutsch ↔ Muttersprache **ohne Anmerkungen**
- Unterschreiben Sie in dem obigen Unterschriftenfeld. Damit versichern Sie, dass Sie
  - alle Antworten selbstständig und ohne Austausch mit Dritten angefertigt haben,
  - keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutzt haben und
  - unter Ihrem eigenen Namen abgeben.
- Es werden nur solche Ergebnisse gewertet, bei denen der **Lösungsweg erkennbar ist.** Begründen Sie alle Antworten, solange es in der jeweiligen Teilaufgabe nicht ausdrücklich anders vermerkt ist.
- Schreiben Sie weder mit roter / grüner Farbe noch mit Bleistift.

Aufgabe 1 **Kombinatorik (7 Punkte)**

Die Wahrsagerin Amanda soll entscheiden, ob eine zufällige Zahl k, die jeden Wert der Menge $\{1, \ldots, 100\}$ gleich wahrscheinlich annimmt, eine Primzahl ist. Da sich Amanda nicht mit Primzahlen auskennt, testet sie allerdings lediglich, ob k ohne Rest durch 2 oder 3 teilbar ist. Falls k diese Eigenschaft erfüllt, behauptet sie, k sei nicht prim. Ansonsten behauptet sie, k sei prim.

a) Zeigen Sie, dass Amanda mit Wahrscheinlichkeit 67/100 behauptet, k sei nicht prim.

Sei $\overline{E}$ das Ereignis, dass Amanda behauptet k sei nicht prim, d.h. k ist durch zwei oder durch 3 ohne Rest teilbar. Das Ereignis $\overline{E}$ lässt sich demnach auch auffassen als $\overline{E} = T_2 \cup T_3$, wobei es sich bei T_j um die Ereignisse handelt, dass k ohne Rest durch j teilbar ist. Mit der Siebformel können wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\Pr[\overline{E}]$ umformen zu

$$\Pr[\overline{E}] = \Pr[T_2 \cup T_3] = \Pr[T_2] + \Pr[T_3] - \Pr[T_2 \cap T_3].$$

Man beachte, dass das Ereignis $T_2 \cap T_3$ genau dann eintritt, falls k sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist. Da es sich bei 2 und 3 um Primzahlen handelt, tritt dies genau dann ein, falls k durch $2 \cdot 3 = 6$ teilbar ist. Hieraus folgt

$$\Pr[\overline{E}] = \Pr[T_2] + \Pr[T_3] - \Pr[T_6].$$

Um die Wahrscheinlichkeit $\Pr[T_j]$ zu bestimmen, ist es aufgrund der Laplace-Eigenschaft unseres Wahrscheinlichkeitsraums ausreichend, die relative Häufigkeit von T_j bezüglich $\Omega = \{1, \ldots, 100\}$ zu ermitteln. Nachdem es genau $\lfloor 100/j \rfloor$ Zahlen zwischen 1 und 100 gibt, die durch j teilbar sind, erhalten wir letztendlich

$$Pr[\overline{E}] = \frac{|T_2|}{|\Omega|} + \frac{|T_3|}{|\Omega|} - \frac{|T_6|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} + \frac{33}{100} - \frac{16}{100} = \frac{67}{100} = 0{,}67.$$

b) Insgesamt gibt es 25 Primzahlen zwischen 1 und 100. Bestimmen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit k prim ist, falls Amanda dies behauptet.

0 1 2

Sei F das Ereignis, dass k tatsächlich eine Primzahl ist. Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[F \mid E] = \frac{\Pr[E \cap F]}{\Pr[E]} = \frac{|E \cap F|/|\Omega|}{|E|/|\Omega|} = \frac{|E \cap F|}{|E|}.$$

Aus der vorherigen Teilaufgabe und der Angabe dieser Teilaufgabe wissen wir bereits, dass $|E| = |\Omega| - |\overline{E}| = 33$ und $|F| = 25$. Ferner ist keine Primzahl bis auf 2 und 3 ohne Rest durch 2 und 3 teilbar, woraus wir schließen, dass

$$\Pr[F \mid E] = \frac{|F \setminus \{2,3\}|}{|E|} = \frac{25-2}{33} = \frac{23}{33} \approx 0{,}69697.$$

c) Angenommen, k nimmt nunmehr jeden Wert der Menge $\{1, \ldots, 6\}$ mit der gleichen Wahrscheinlichkeit an. Zeigen Sie, dass die Ereignisse „k ist prim“ und „Amanda behauptet k ist prim“ unabhängig sind.

0 1 2

Die Ereignisse E und F sind unabhängig, da einerseits

$$\Pr[E \cap F] = \frac{|E \cap F|}{|\Omega|} = \frac{|\{1,5\} \cap \{2,3,5\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$

und andererseits

$$\Pr[E] \cdot \Pr[F] = \frac{|E|}{|\Omega|} \cdot \frac{|F|}{|\Omega|} = \frac{|\{1,5\}|}{|\Omega|} \cdot \frac{|\{2,3,5\}|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{6}.$$

Zusätzlicher Platz für Lösungen. Markieren Sie deutlich die Zuordnung zur jeweiligen Teilaufgabe. Vergessen Sie nicht, ungültige Lösungen zu streichen.