LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Uzaktan Eğitim

19 - 23 Nisan 2021

Sınırlı Fonksiyonlar için Lebesgue İntegrali

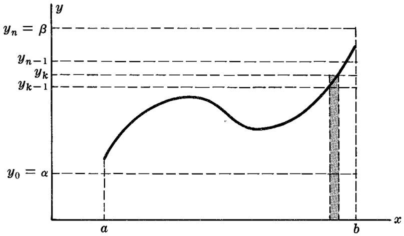
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir olsun. f fonksiyonu sınırlı fonksiyon olduğundan $\forall x \in [a, b]$ için

$$\alpha < f(x) < \beta$$

olacak şekilde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sayıları vardır.

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

olacak şekilde $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ değerlerini seçerek $[\alpha, \beta]$ görüntü aralığını n tane alt aralığa bölelim.



$P = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n\}$ kümesine $[\alpha, \beta]$ aralığının bir parçalanması veya bir bölüntüsü adı verilir. $[\alpha, \beta]$ aralığının tüm bölüntülerinin ailesini $\mathcal{P}[\alpha, \beta]$ ile ve eğer başka bir aralık söz konusu değil ise sadece $\mathcal{P}$ ile gösterelim.

$$E_k = \{x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

olsun. f fonksiyonu ölçülebilir olduğundan her bir E_k kümesi ölçülebilirdir ve ayrıktır.

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) \qquad \text{üst toplam}$$
$$s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) \qquad \text{alt toplam}$$

$$I = \inf_{P \in \mathcal{P}} S = \overline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \text{üst Lebesgue integrali}$$

$$J = \sup_{P \in \mathcal{P}} s = \underline{\int_a^b} f(x)dx \qquad \text{alt Lebesgue integrali}$$

Her P bölüntüsü için S alttan sınırlı olduğundan I daima vardır. Benzer şekilde her P bölüntüsü için s toplamı üstten sınırlı olduğu için J daima vardır.

Eğer $I = J$ ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir. Bu ortak değere f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Lebesgue belirli integrali denir ve

$$\int_a^b f(x)dx$$

ile gösterilir. (Riemann integrali söz konusu olduğunda $(\Re)\int_a^b f(x)dx$ gösterimi kullanılacaktır)

Örnek

$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 1 & ; \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralin değerini bulunuz.

Örnek

$f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$ şeklinde tanımlı fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz ve integralin değerini bulunuz.

Çözüm

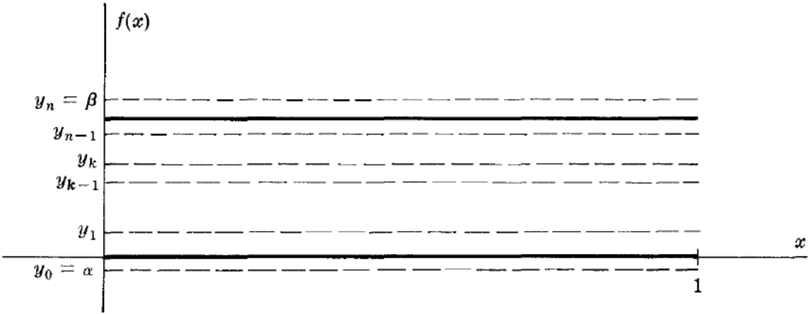
$\alpha \leq 0$ ve $\beta > 1$ olmak üzere

$$\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$$

bölüntü noktalarını ve

$$E_k = \{x : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}, \qquad k = 1, 2, ..., n$$

kümelerini göz önüne alalım. $k = 1, 2, ..., n-1$ için $0 < y_k < 1$ olduğunu kabul edelim.



$$
\begin{aligned}
E_1 &= \{x \in [0,1] : y_0 \leq f(x) < y_1\} = [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \\
E_k &= \{x \in [0,1] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\} = \emptyset; \qquad k = 2, ..., n-1 \\
E_n &= \{x \in [0,1] : y_{n-1} \leq f(x) < y_n\} = [0,1] \cap \mathbb{Q}
\end{aligned}
$$

$m(E_1) = 1$ ve $k = 2, ..., n$ için $m(E_k) = 0$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n} y_k m(E_k) = y_1 \\
s &= \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} m(E_k) = \alpha
\end{aligned}
$$

elde edilir.Böylece

$$
I = \inf_{P\in\mathcal{P}} S = \inf_{y_1>0} y_1 = 0
$$
$$
J = \sup_{P\in\mathcal{P}} s = \sup_{\alpha\leq 0} \alpha = 0
$$

elde edilir. $I = J$ olduğundan f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir ve $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ dır. $f \notin \Re[0,1]$ olduğunu hatırlayınız.

Teorem

$f \in B[a,b]$ olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem

$f \in B[a, b]$ olsun. f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

Eğer f fonksiyonunun Lebesgue integrali varsa bazen

$$\int_a^b f(x)dx < \infty$$

şeklinde yazarız.

$E \subset [a, b]$ kümesi ölçülebilir ve f fonksiyonu E kümesi üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun E kümesi üzerinde Lebesgue integrali

$$\int_E f(x)dx = \int_a^b f(x)\chi_E(x)dx$$

veya

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & ; \quad x \in E \\ 0 & ; \quad x \notin E \end{cases}$$

olmak üzere

$$\int_E f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

şeklinde tanımlanır.

Lebesgue integralini içeren Teoremler

Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ve kullanılan tüm kümelerin ölçülebilir ve sonlu ölçülü olduğu kabul edilecektir.

Lebesgue integralini içeren Teoremler

Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ve kullanılan tüm kümelerin ölçülebilir ve sonlu ölçülü olduğu kabul edilecektir.

Teorem

c bir sabit olmak üzere $\int\limits_E cf(x)dx = c\int\limits_E f(x)dx$.

Lebesgue integralini içeren Teoremler

Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ve kullanılan tüm kümelerin ölçülebilir ve sonlu ölçülü olduğu kabul edilecektir.

Teorem

c bir sabit olmak üzere $\int\limits_E cf(x)dx = c\int\limits_E f(x)dx$.

Teorem

c bir sabit olmak üzere $\int\limits_E cdx = cm(E)$.

Lebesgue integralini içeren Teoremler

Aşağıdaki teoeremlerin hepsinde aksi iddaa edilmedikçe f fonksiyonu sınırlı ve ölçülebilir fonksiyon ve kullanılan tüm kümelerin ölçülebilir ve sonlu ölçülü olduğu kabul edilecektir.

Teorem

c bir sabit olmak üzere $\int_E cf(x)dx = c\int_E f(x)dx$.

Teorem

c bir sabit olmak üzere $\int_E cdx = cm(E)$.

Teorem

$m(E) = 0$ *ise* $\int_E f(x)dx = 0$.

Teorem

$A \leq f(x) \leq B$ *ise bu durumda* $Am(E) \leq \int\limits_E f(x)dx \leq Bm(E)$.

Teorem

$A \leq f(x) \leq B$ *ise bu durumda* $Am(E) \leq \int_E f(x)dx \leq Bm(E).$

Teorem

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ *olmak üzere* $E = E_1 \cup E_2$ *ise*

$$\int_E f(x)dx = \int_{E_1} f(x)dx + \int_{E_2} f(x)dx.$$

Teorem

$A \leq f(x) \leq B$ ise bu durumda $Am(E) \leq \int\limits_E f(x)dx \leq Bm(E)$.

Teorem

$E_1 \cap E_2 = \emptyset$ olmak üzere $E = E_1 \cup E_2$ ise

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

Teorem

$i \neq j$ için $E_i \cap E_j = \emptyset$ olmak üzere $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ ise bu durumda

$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx.$$

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

$$\int_E [f(x) + g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

f ve g fonksiyonları E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir ise bu durumda fg fonksiyonu E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir yani

$$\int_E f(x)g(x)dx < \infty.$$

Teorem

$$\int_E [f(x)+g(x)]dx = \int_E f(x)dx + \int_E g(x)dx$$

Bu teorem herhangi sonlu sayıdaki fonksiyonlara kolayca genişletilebilir.

Teorem

f ve g fonksiyonları E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir ise bu durumda fg fonksiyonu E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir yani

$$\int_E f(x)g(x)dx < \infty.$$

Teorem

$\forall x \in E$ için $f(x) \leq g(x)$ ise bu durumda $\int_E f(x)dx \leq \int_E g(x)dx$ eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

Eğer f fonksiyonu E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir ise bu durumda $|f|$ fonksiyonu E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir. Karşıt olarak eğer $|f|$ fonksiyonu E üzerinde sınırlı ve f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem

Eğer f fonksiyonu E kümesi üzerinde sınırlı ve ölçülebilir ise bu durumda $|f|$ fonksiyonu E üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir. Karşıt olarak eğer $|f|$ fonksiyonu E üzerinde sınırlı ve f fonksiyonu ölçülebilir ise bu durumda f fonksiyonu E kümesinde Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem

Yukarıdaki teoremin koşulları altında

$$\left|\int_E f(x)dx\right| \leq \int_E |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

Teorem

E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) = g(x)$ *ise bu durumda*

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Teorem

E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) = g(x)$ *ise bu durumda*

$$\int_E f(x)dx = \int_E g(x)dx.$$

Teorem

Eğer E kümesi üzerinde h.h.h.y. $f(x) \geq 0$ *ve* $\int_E f(x)dx = 0$ *ise bu durumda E kümesi üzerinde h.h.h.y.* $f(x) = 0$ *dır.*

Teorem (Sınırlı Yakınsama Teoremi)

E kümesi ölçülebilir olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x); \qquad x \in E$

(b) (f_n) *fonksiyon dizisi düzgün sınırlı yani* $\forall n \in \mathbb{N}$ *ve* $\forall x \in E$ *için* $|f_n(x)| \leq M$ *o.ş. bir* $M > 0$ *sayısı varsa,bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem (Sınırlı Yakınsama Teoremi)

E kümesi ölçülebilir olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi E üzerinde ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

(*a*) $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x); \qquad x \in E$

(*b*) (f_n) *fonksiyon dizisi düzgün sınırlı yani* $\forall n \in \mathbb{N}$ *ve* $\forall x \in E$ *için* $|f_n(x)| \leq M$ *o.ş. bir* $M > 0$ *sayısı varsa,bu durumda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)dx = \int_E \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int_E f(x)dx$$

eşitliği geçerlidir.

(a) ve (b) de verilen koşullar E kümesi üzerinde h.h.h.y. geçerli olması durumunda da Teorem geçerlidir.

Riemann integralleri için geçerli olmayan bu önemli Teorem, Lebesgue integralinin üstünlüğünü belirtir.

Örnek

(r_k) , $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıları temsil eden bir dizi olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = r_1, r_2, ..., r_n \\ 0 & ; \quad x \neq r_1, r_2, ..., r_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$ olduğuna göre

Örnek

(r_k) , $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıları temsil eden bir dizi olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = r_1, r_2, ..., r_n \\ 0 & ; \quad x \neq r_1, r_2, ..., r_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$ olduğuna göre

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

(r_k) , $[0,1]$ aralığındaki tüm rasyonel sayıları temsil eden bir dizi olmak üzere (f_n) fonksiyon dizisi

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = r_1, r_2, ..., r_n \\ 0 & ; \quad x \neq r_1, r_2, ..., r_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & ; \quad x \in [0,1] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$ olduğuna göre

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ olduğunu gösteriniz.

(b) $(\Re) \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 0$ fakat $(\Re) \int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx = (\Re) \int\limits_0^1 f(x)dx$ integralinin var olmadığını gösteriniz.

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 e^{-nx^2}dx$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 e^{-nx^2} dx$ ifadesinin değerini hesaplayınız.

Çözüm

$E = [0,1]$ ve $f_n(x) = e^{-nx^2}$ olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için (f_n) fonksiyon dizisinin her bir terimi E üzerinde süreklidir. Bu yüzden $\forall n \in \mathbb{N}$ için (f_n), E üzerinde ölçülebilirdir. $\forall x \in E$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall x \in E$ için

$$|f_n(x)| = \left| \frac{1}{e^{nx^2}} \right| \leq 1$$

olduğundan Lebesgue sınırlı yakınsama teoremi gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx = 0$$

elde edilir.

Teorem (Seriler için Sınırlı Yakınsama Teoremi)

E ölçülebilir bir küme olmak üzere $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ serisi E üzerinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. $s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ olmak üzere

(a) (s_n) dizisi E kümesi üzerinde düzgün sınırlı

(b) $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x); \qquad x \in E$

ise bu durumda

$$\int_E \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_E f_k(x) dx$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem

Eğer $f \in \Re[a, b]$ ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir ve iki integral birbirine eşittir, yani

$$\int_a^b f(x)dx = (\Re) \int_a^b f(x)dx.$$

Teorem

Eğer $f \in \Re[a,b]$ ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir ve iki integral birbirine eşittir, yani

$$\int_a^b f(x)dx = (\Re)\int_a^b f(x)dx.$$

Not: Yukarıdaki Teoremin tersi doğru değildir.

Riemann ve Lebesgue İntegralleri Arasındaki İlişkiler

Teorem

Eğer $f \in \Re[a,b]$ ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir ve iki integral birbirine eşittir, yani

$$\int_a^b f(x)dx = (\Re)\int_a^b f(x)dx.$$

Not: Yukarıdaki Teoremin tersi doğru değildir.

Teorem

$f \in \Re[a,b]$ olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığındaki süreksizlik noktalarının kümesinin sıfır ölçümlü olmasıdır, yani f fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında h.h.h.y. de sürekli olmasıdır.

Teorem

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında h.h.h.y. de sürekli ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

Teorem

Eğer f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında h.h.h.y. de sürekli ise bu durumda f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue integrallenebilirdir.

$m(E) < \infty$ olsun. $\Re(E) \subset \mathcal{L}(E)$ dir. $f \in B(E)$ olsun. $f \in \mathcal{L}(E)$ olması için g.v.y.k. f fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.