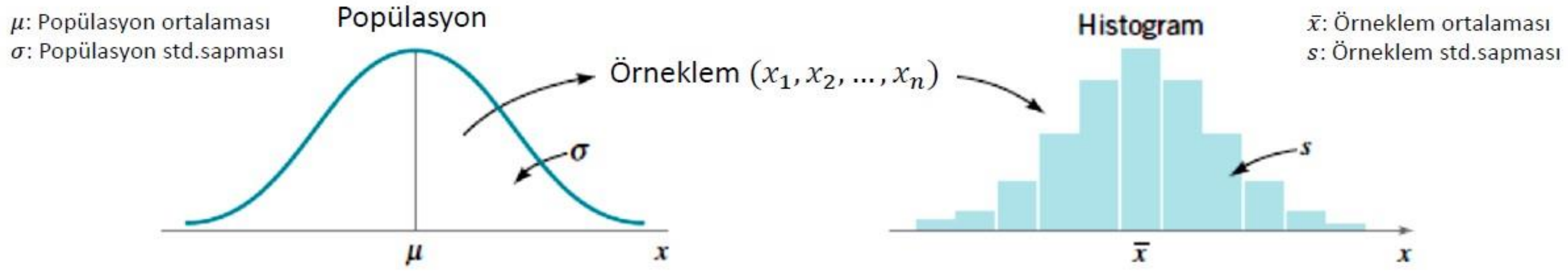
KTÜ
1955 KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ

İstatistik ve Örneklem Dağılımları

- İstatistik çıkarımların yapılmasındaki amaç alınan örneklemden faydalanılarak ana kütle hakkında bir sonuca varmak veya bir karar vermektir.
- $x1$, $x2$, … , xn ile n büyüklüğünde bir rasgele örneklem tanımlanmış olsun. Bu örneklemin rasgele olması xilerin bağımsız ve aynı dağılımdan geldiğini ima etmektedir.



İstatistik ve Örneklem Dağılımları

- İstatistiksel çıkarımlar, örneklemdeki gözlemler kullanılarak hesaplanır.

- İstatistik, örneklem verisinin herhangi bir fonksiyonu olarak tanımlanır ki bu veriler için herhangi bir bilinmeyen parametre yoktur.

- Eğer örneklemin alındığı ana kütleye (popülasyona) ilişkin olasılık dağılımı biliniyorsa, örneklem verisinden hesaplanan çeşitli istatistiklere (örneklem ortalaması ve varyansı gibi) ilişkin olasılık dağılımları hesaplanabilir ki bu istatistiklerin olasılık dağılımlarına **örneklem dağılımları** adı verilir.

- Örneğin, $x1$,$x2$,…,xnile $n$büyüklüğünde bir rasgele örneklem tanımlanmış olsun. Örneklem ortalaması, örneklem varyansı ve standart sapması aşağıdaki şekilde hesaplanır ki bunların hepsi istatistiktir:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Normal Dağılımdan Örneklem Seçimi

- x in μ ortalama ve σ^2 varyans ile bir rasgele değişken olduğunu düşünelim.
- Eğer $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ile n büyüklüğünde rasgele örneklemler gösterilirse bu durumda örneklem ortalamaları olan $\bar{X}$ 'nın dağılımı $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ olur.

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\mu + \mu + \cdots + \mu}{n} = \mu$$

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

Normal Dağılımdan Örneklem Seçimi

- Normal dağılım kullanılarak tanımlanan önemli bir dağılım da ki-kare (chi-square) $\chi 2$ dağılımıdır.
- Eğer $x1$,$x2$,...,xnstandart normal dağılıma uyuyor ise aşağıda tanımlanan y rassal değişkeni $n$serbestlik dereceli ki-kare dağılımına uyar.

$$y = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$$

Ki-kare dağılımının örneklem dağılımında kullanımına gelince, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in $N(\mu, \sigma^2)$ den alınan rasgele bir örneklem olduğunu düşünelim. Bu durumda y rasgele değişkeni;

$$y = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2}$$

$n-1$ serbestlik derecesi ile ki-kare dağılımına sahiptir.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

Daha önce de belirtildiği gibi soldaki eşitlik ile bir örneklemin varyansı gösterilirse y rasgele değişkeni sağdaki eşitlikle de gösterilebilir.

$$y = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

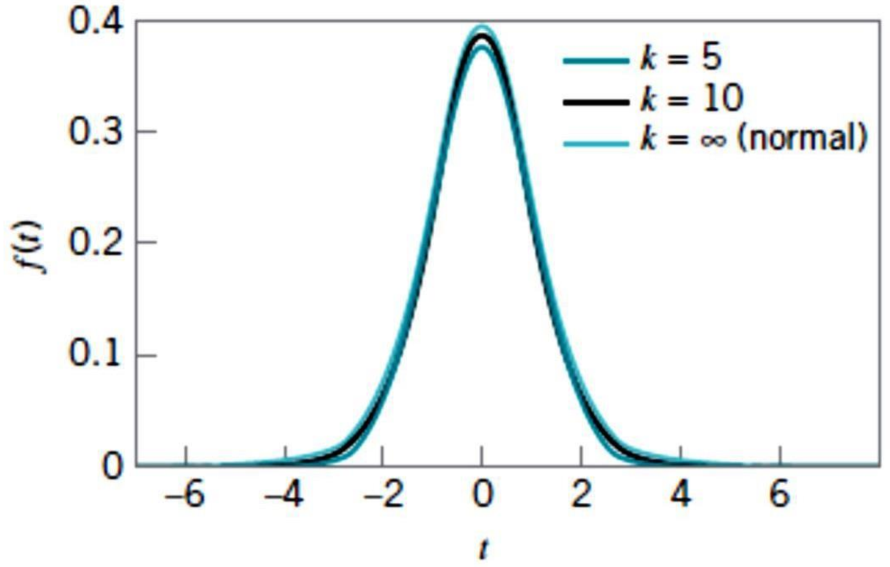
Burada y nin dağılımı normal dağılımdan örneklem alındığında χ_{n-1}^2 olur. $(n-1)$ serbestlik dereceli ki-kare dağılımı...

Normal Dağılımdan Örneklem Seçimi

- Diğer bir kullanışlı dağılım t dağılımıdır.
- Eğer x standart normal rasgele değişken ise
- Eğer y değişkeni k serbestlik derecesine sahip ki-kare rasgele değişkeni ise
- Eğer x ve y bağımsız ise t rasgele değişkeni de k serbestlik dereceli t dağılımına uyar.

$$t = \frac{x}{\sqrt{y/k}}$$

Ortalama ve varyansı ise sırasıyla;
$\mu = 0$ ve $\sigma^2 = k/(k-2) \quad k > 0$

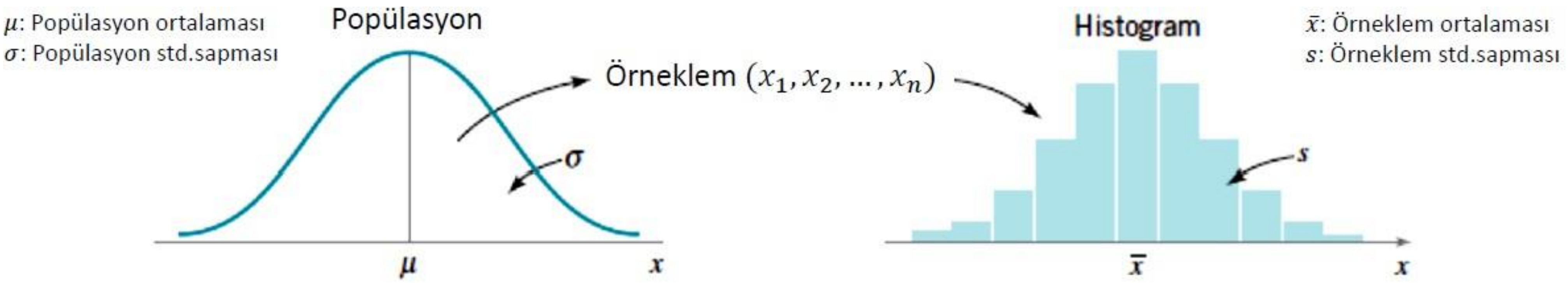


Süreç Parametrelerinin Nokta Tahmini

- Bir rasgele değişken, olasılık dağılımı ile, bir olasılık dağılımı da parametreleri ile tanımlanır.
- Örneğin normal dağılım μ ve σ parametreleri ile, poisson dağılımı da λ parametresi ile ifade edilir.
- İstatistiksel kalite kontrolünde bir parçanın kritik boyutları veya bir imalat sürecinde hatalı üretim oranının tanımlanmasında veya modellenmesinde olasılık dağılımları kullanılır.
- Bu olasılık dağılımlarının parametrelerinin genellikle bilinmiyor olmasından dolayı, söz konusu parametreler örneklemden tahmin edilmeye çalışılır.
- Bilinmeyen bir parametrenin tahmincisine istatistik adı verilir.
- Bir tahmincinin, örneklemden hesaplanan belirli bir nümerik değerine estimate(tahmin) denir.
- Bilinmeyen bir parametre için tek bir nümerik değer üreten istatistiğe ise nokta tahmincisi adı verilir.

Süreç Parametrelerinin Nokta Tahmini

04.



- Üste bir imalat sürecinden alınan iç çap ölçülerinin dağılımı verilmiştir. Popülasyonun parametreleri bilinmemektedir. Ancak alınan örneklemden $\bar{x}$ ve s^2 değerleri hesaplanabilir.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$
$$\hat{\sigma}^2 = s^2$$

"^" işareti parametrenin tahmini olduğunu göstermektedir.

Süreç Parametrelerinin Nokta Tahmini

- Bir dağılımın ortalaması ve varyansı, her zaman dağılımın parametresi olmak zorunda değildir.

- Örneğin poisson dağılımının parametresi λ dır. Burada hem ortalama hem de varyans λ parametresine eşittir.

- Yine binom dağılımında parametre n ve p dir. Ortalama $\mu = np$ ve varyans da $\sigma 2 = np(1 - p)$ dir.

- Poisson ve binom dağılımlarının parametre tahmincileri aşağıda verilmiştir.

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x} \qquad \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Hipotez Testleri

- İstatistiksel çıkarımlar temel olarak iki ana grupta incelenmektedir:

- Parametre (nokta) tahminleri
- Hipotez testleri

- Bir istatistiksel hipotez, olasılık dağılımı parametreleri ile ilgilidir. Örneğin bir silindirin iç çapı ortalamasının 1,500 inç olduğunu düşünüyoruz. Bu ifadeyi hipotez haline getirirsek;

$H_0: \quad \mu = 1.500 \longrightarrow$ Sıfır hipotezi

$H_1: \quad \mu \neq 1.500 \longrightarrow$ Alternatif hipotez, iki taraflı çünkü $\neq$

Hipotez Testleri

- Hipotez testlerinin en önemli adımı sıfır ve alternatif hipotezde belirtilen parametre değeridir.
- Hipotezi test etmek için önce ana kütleden bir örneklem seçilir. Daha sonra uygun bir test istatistiği hesaplanır ve $H0$ hipotezi reddedilir veya reddedilmez.
- Hipotez testi yapılırken iki tip hata yapma durumu ile karşı karşıya kalınır.
- Eğer $H0$ hipotezi doğru olduğu halde reddedilirse **Tip-I** hata yapılmış olur.
- Eğer $H0$ hipotezi yanlış olduğu halde reddedilmezse **Tip-II** hata yapılmış olur.

Bu iki hatayı yapma ihtimalleri aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\alpha = P\{\text{tip I hata}\} = P\{H_0 \text{ reddetme} \mid H_0 \text{doğru iken}\}$$

$$\beta = P\{\text{tip II hata}\} = P\{H_0 \text{ reddetmeme} \mid H_0 \text{ yanlış iken}\}$$

Genellikle α değerleri ile çalışılır. β değeri ise test prosedürü tasarlanırken küçük bir olasılık alacak şekilde dolaylı olarak kontrol edilebilmektedir. Genellikle tip-II hata örneklem büyüklüğünün hesaplanması için kullanılır. $(1-\beta)$ değerine de "sınama gücü" denir.

Hipotez Testleri

Bir Ana kütlenin Ortalamasına İlişkin Çıkarım, (Varyans Biliniyor)

- **Hipotez Testi:** x, μ ortalama değeri bilinmeyen ancak σ^2 varyansı bilinen rasgele bir değişken olsun.
- Ortalamanın μ_0 gibi bir standart değere eşit olup olmadığı test edilmek isteniyor olsun. Hipotez testi:

$$H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0: \mu = \mu_0 \qquad H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0 \qquad H_1: \mu > \mu_0 \qquad H_1: \mu < \mu_0$$

- Bu hipotezin testi için n boyutlu bir rassal örneklem alınması ve aşağıdaki test istatistiğinin hesaplanması gerekir:

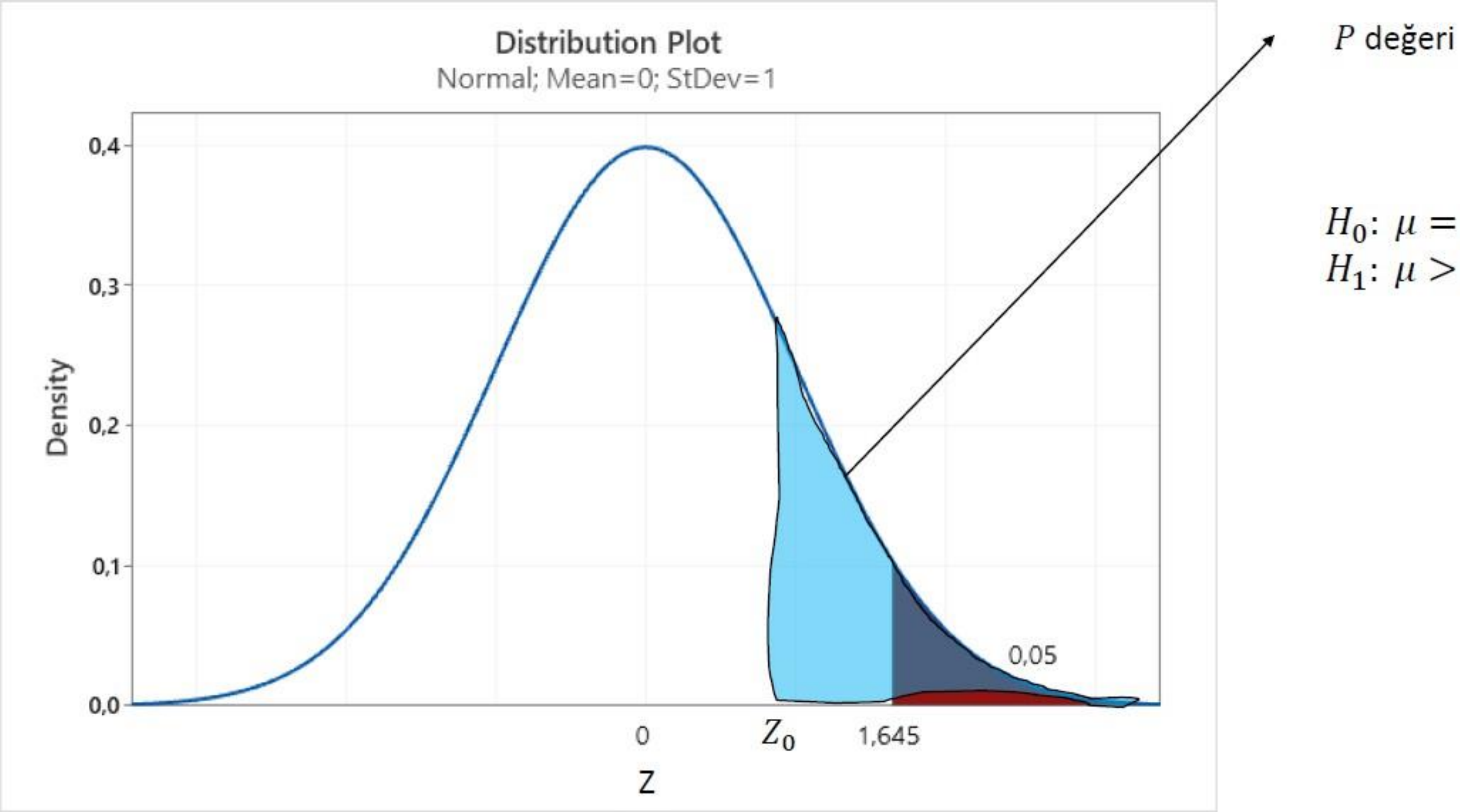
$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

- Eğer $|Z_0| > Z_{\alpha/2}$ ise H_0 reddedilir. $Z_{\alpha/2}$, standart normal dağılımın üst $\alpha/2$ noktasıdır.
- Bu sürece tek-örneklem Z-testi de denir.

Hipotez Testleri

Bir Ana kütlenin Ortalamasına İlişkin Çıkarım, (Varyans Biliniyor)

04.



H_0: $\mu = \mu_0$
H_1: $\mu > \mu_0$

Hipotez Testleri

Bir Ana kütlenin Ortalamasına İlişkin Çıkarım, (Varyans Biliniyor)

04.

Dağıtık bir bilgisayar sisteminin cevaplama süresi önemli bir kalite karakteristiğidir. Sistem yöneticisi, belirli bir komut için sistemin cevaplama süresinin 75 milisaniyeyi geçip geçmediğini sorgulamak istediğini düşünelim.

Önceki deneyimlerden cevaplama süresinin standart sapmasının 8 milisaniye olduğu bilinmektedir. Tip-I hata $\alpha = 0,05$ olarak seçilmiştir.

Hipotez;

$$H_0: \mu = 75$$
$$H_1: \mu > 75$$

Komut 25 kez uygulanmış ve cevap süresi her bir deneme için ölçülmüştür. Alınan örneklemin rasgele bir örneklem olduğu kabul edilmiş ve örneklemin ortalaması $\bar{x} = 79,25$ milisaniye olarak bulunmuştur.

Hipotez Testleri

Bir Ana kütlenin Ortalamasına İlişkin Çıkarım, (Varyans Biliniyor)

Bu durumda $Z_0 = \frac{79,25-75}{8/\sqrt{25}} = 2,66$ olmaktadır.

H_1 alternatif hipotezi $\neq$ değil de $>$ olarak seçildiğinden çift taraflı bir test değil tek taraflı bir test yapmamız gerekmektedir. Bu sebeple Z_0 ın $Z_{\alpha/2}$ değil de Z_α değeri ile karşılaştırılması gerekir. Bu durumda $Z_0 > Z_\alpha$ olursa H_0 hipotezi reddedilecektir.

$Z_\alpha = Z_{0,05} = 1,645$ olduğundan ve $Z_0 = 2,66$ olduğundan $Z_0 > Z_\alpha$ olur ve bu sebeple H_0 hipotezi reddedilir. Yani cevaplama süresi 75 milisaniyeyi aşmaktadır.

Hipotez Testleri

04.

Bir Normal Dağılımın Ortalamasına İlişkin Çıkarım, (Varyans Biliniyor)

- Aynı şekilde;
  - $H_1: \mu > \mu_0$ olarak kuruldu ise bu durumda $z_0 > z_\alpha$ olduğunda H_0 reddedilir.
  - $H_1: \mu < \mu_0$ olarak kuruldu ise bu durumda $z_0 < -z_\alpha$ olduğunda H_0 reddedilir.

Örnek: Bir makinenin ürettiği A mallarının ağırlıklarının dağılımlarının ortalaması 5 kg. ve standart sapması 1,8 kg.'dır. Makine ayarını kontrol etmek amacı ile 81 birimlik bir örnek alınmış ve örnek ortalaması 5,4 kg. bulunmuştur. Üretilen mamüllerin ortalamasının 5 kg.'dan fazla olduğu söylenebilir mi, 0,05 anlam seviyesi ile inceleyiniz.

$\mu = 5$

$\sigma = 1,8$

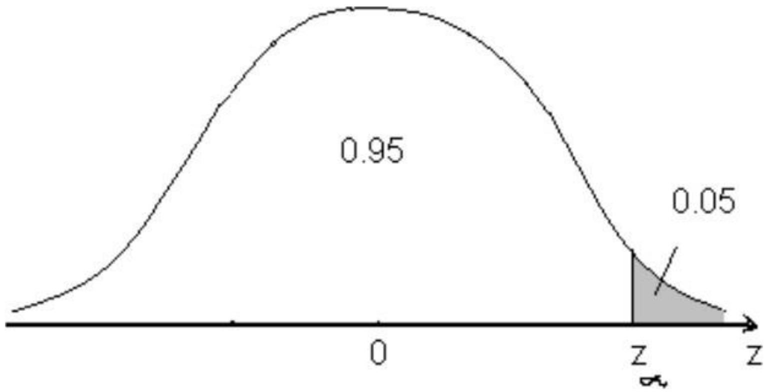
$n = 81$

$\bar{X} = 5,4$

$\alpha = 0,05$

$H_0 : \mu = 5$

$H_1 : \mu > 5$



$$Z = \left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma_{\bar{X}}}\right| = \left|\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right| = \left|\frac{5,4-5}{\frac{1,8}{\sqrt{81}}}\right| = \left|\frac{0,4}{0,2}\right| = 2$$

1-0,05 =0,95

0,95 – 0,5 = 0,4500 → Tablodan $Z_\alpha = 1,64$

$|Z| > |Z_\alpha|$; $2 > 1,64$

Güven Aralığı

Belirli bir olasılık ile parametrenin içine düştüğü alt ve üst sınır değerleri **güven aralığı** olarak isimlendirilir.

Örneğin ortalama μdeğerinin aralık tahmincilerini (alt ve üst sınırlar) bulmak için L(alt) ve U(üst) olmak üzere iki istatistik (güven sınırları), aşağıdaki şekilde hesaplanabilir:

$$P\{L \leq \mu \leq U\} = 1 - \alpha$$

$(1-\alpha)$güven katsayısı olarak isimlendirilir.

Hem alt hem de üst sınır belirlendiğinde iki taraflı güven aralığı…

Alt ve üst limitlerden sadece biri olduğunda ise tek taraflı güven değeri…

$$P\{L \leq \mu\} = 1 - \alpha \quad \text{veya} \quad P\{\mu \leq U\} = 1 - \alpha$$

Güven Aralığı

Bilinmeyen bir ortalama μ ve bilinen bir varyans σ^2 ile x rasgele değişkenini göz önüne alalım.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ rasgele seçilen n gözlem olsun. Buradan $\bar{x}$ hesaplanır. $100.(1-\alpha)\%$ iki taraflı güven aralığı;

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - Z_{\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \\ \bar{x} + Z_{\alpha}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \geq \mu \end{array}\right\} \text{Tek taraflı güven aralıkları}$$

Burada $Z_{\alpha/2}$, $\alpha/2$ olasılık değerini veren Z değeridir.

Burada x in nasıl dağıldığı önemli olmayıp merkezi limit teoremine göre yaklaşık olarak $N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ olur. Zaten yukarıdaki güven aralığı da buna göre belirlenmiştir.

Güven Aralığı

04.

Örnek-1'de ($n=25, \sigma=8$ verilmişti.) verilen durumda $\bar{x}=79,25$ bulunmuş ve nokta tahmini de $\bar{x}=\hat{\mu}=79.25$ olarak hesaplanmıştı. %95 iki taraflı güven aralığını hesaplayınız şeklinde bir soruyu aşağıdaki şekilde cevaplamak mümkündür:

Alternatif hipotezin ≠ olarak kurulması durumda

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$79.25 - 1.96\frac{8}{\sqrt{25}} \leq \mu \leq 79.25 + 1.96\frac{8}{\sqrt{25}}$$

$$76.114 \leq \mu \leq 82.386$$

P değeri Kullanımı

Klasik bir bakış açısıyla yaklaşıldığında H_0 hipotezinin reddedilip reddedilmemesine, seçilen α değeri veya anlamlılık seviyesine göre karar verilmektedir.

Bu yaklaşımda hesaplanan test istatistiğinin kritik değere ne kadar mesafede olduğu konusunda yeterli bir bilgi sunulmaz.

Bu sebeple $\boldsymbol{P}$-değeri yaklaşımı kullanılır. Bu yaklaşımda H_0 hipotezi doğru olduğunda, test istatistiğinin aldığı en uç değere karşılık gelen olasılık olarak tanımlanabilir.

Normal dağılım testlerinde $\boldsymbol{P}$-değeri hesaplaması kolaydır:

$$P\{x \leq a\} = P\left\{z \leq \frac{a-\mu}{\sigma}\right\} \equiv \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P = \begin{cases} 2\left[1-\Phi(|Z_0|)\right] & \text{iki taraflı test için} \quad H_0:\ \mu=\mu_0 \quad H_1:\ \mu \neq \mu_0 \\ 1-\Phi(Z_0) & \text{tek (üst taraflı) test için} \quad H_0:\ \mu=\mu_0 \quad H_1:\ \mu > \mu_0 \\ \Phi(Z_0) & \text{tek (alt taraflı) test için} \quad H_0:\ \mu=\mu_0 \quad H_1:\ \mu < \mu_0 \end{cases}$$

Örnek-1'deki durumu tekrar incelersek, hatırlanacağı gibi $Z0 = 2{,}66$ olarak hesaplanmıştı. Alternatif hipotez $H1$: $\mu > \mu0$ olduğundan $\boldsymbol{P}$-değeri : $P = 1-\Phi(2.66) = 0.0039$

Seçilen α değeri bu değerden büyük ise H_0 reddedilir.
Ya da bu değer seçilen α değerinden küçükse H_0 reddedilir.

P değeri Kullanımı

x in normal rasgele bir değişken olduğunu düşünelim. Bu rasgele değişkenin μ ve σ^2 si bilinmiyor olsun. Ortalamanın standart μ_0 değerine eşit olup olmadığı hipotezini test etmek isteyelim.

$$H_0\colon \mu = \mu_0$$
$$H_1\colon \mu \neq \mu_0$$

Daha önceki durumdan farklı olarak varyans bilinmediğinden, ilave bir kabul yaparak x in normal dağıldığını kabul etmemiz gerekir.

P değeri Kullanımı

σ^2 bilinmediğinden bu değeri s^2 ile tahmin etmemiz gerekecektir.

04.

05.

$$Z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$ ifadesinde σ yerine s yazdığımızda $$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$ olur.

Bu ifade referans dağılımın $(n-1)$ serbestlik dereceli t dağılımı olduğunu göstermektedir.

Belirli bir anlamlılık düzeyi (α) için eğer $|t_0| > t_{\alpha/2,(n-1)}$ olursa $(H_1: \mu \neq \mu_0$ olursa) $H_0: \mu = \mu_0$ hipotezi reddedilir. $t_{\alpha/2,(n-1)}$, $(n-1)$ serbestlik dereceli t dağılımının üst $\alpha/2$ yüzdelik noktasını göstermektedir. Yani dağılımın sağ tarafına göre olasılık değeridir.

Aynı şekilde;

- $H_1: \mu > \mu_0$ olarak kuruldu ise bu durumda $t_0 > t_{\alpha,(n-1)}$ olduğunda H_0 reddedilir.
- $H_1: \mu < \mu_0$ olarak kuruldu ise bu durumda $t_0 < -t_{\alpha,(n-1)}$ olduğunda H_0 reddedilir.

P değeri Kullanımı

Bob, belirli bir bitki türünün ortalama yüksekliğinin 15 inç'e eşit olup olmadığını bilmek istiyor. Bunu test etmek için 20 bitkiden rastgele bir örnek toplar ve örnek ortalamasının 14 inç ve örnek standart sapmasının 3 inç olduğunu bulur. Popülasyon için gerçek ortalama yüksekliğin gerçekten 15 inç olup olmadığını belirlemek için .05 alfa seviyesi kullanarak bir t testi yapın.

Adım 1: Hipotezleri belirleyin. $\mathbf{H_0}$: $\mu = 15$

$\mathbf{H_a}$: $\mu \neq 15$ *Adım 2: Test istatistiğini bulun.* $t = (\bar{x}-\mu) / (s/\sqrt{n}) = (14-15) / (3/\sqrt{20}) = \mathbf{-1.49}$

Adım 3: Test istatistiği için p değerini bulun.

p-değerini elle bulmak için, n-1 serbestlik dereceli t-Dağılımı tablosunu kullanmamız gerekir. Örneğimizde örneklem büyüklüğümüz n = 20, yani n-1 = 19'dur.Aşağıdaki t-Dağılımı tablosunda sol taraftaki “19”a denk gelen satıra bakmamız ve test istatistiğimiz 1.49'un mutlak değerini aramaya çalışmamız gerekiyor.

04.

P değeri Kullanımı

ν \ α	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001	0.0005
1	3.078	6.314	12.076	31.821	63.657	318.310	636.620
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.326	31.598
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.213	12.924
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.610
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297	4.781
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930	4.318
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852	4.221
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.140
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686	4.015
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646	3.965
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610	3.922
19	$\boxed{1.328}$	$\boxed{1.729}$	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.850

1,49'un tabloda görünmediğine dikkat edin, ancak 1.328 ve 1.729 arasındaki iki değer arasında yer alıyor.

Ardından, bu iki sayıya karşılık gelen tablonun üst kısmındaki iki alfa düzeyine bakabiliriz. 0.1 ve 0.5 olduklarını görüyoruz.

Bu, tek taraflı bir test için p değerinin 0,1 ile 0,05 arasında olduğu anlamına gelir. .075 diyelim. t-testimiz iki taraflı olduğu için bu değeri 2 ile çarpmamız gerekiyor. Yani tahmini p-değerimiz .075 * 2 = 0.15.

Adım 4: Sonuçları kıyaslayın

Bu p değeri, seçtiğimiz .05 alfa seviyesinden daha az olmadığı için, sıfır hipotezini reddedemeyiz. Bu nedenle, bu bitki türünün gerçek ortalama yüksekliğinin 15 inçten farklı olduğunu söylemek için yeterli kanıtımız yok.

Tip-I ve Tip-II Hatalar

04.

Anakütleden çekilen bir örneklem var ve bu örneklem ile anakütleye ait θ katsayısı hassas olarak bilinemez! (ortalama, varyans vb istatistik)

Dolayısıyla sıfır hipotezinin doğru veya yanlış olduğunu da kesin olarak bilemeyiz.

Karar kuralının ne olduğundan bağımsız olarak ana kütle katsayısına ilişkin sıfır hipotezi ile ilgili kararda her zaman bir hata yapma riski vardır.

Güven Düzeyi

Sıfır Hipotezine İlişkin Karar	**Gerçek Durum**	
	H_0 DOĞRU	**H_0 YANLIŞ**
REDDEDİLMEZ	Doğru Karar Olasılık: $1-\alpha$	Tip-II Hata Olasılık: β
REDDEDİLİR	Tip-I Hata olasılığı Olasılık: α	Doğru Karar Olasılık: $1-\beta$

Sınama Gücü

Anlamlılık Düzeyi

Tip-I ve Tip-II Hatalar

Hipotez testlerinde analizci direkt olarak tip-I hata olasılığını yani α değerini belirlemektedir. Buna rağmen tip-II hatayı gösteren β değeri, örneklem büyüklüğü, tip-1 hata ve hipoteze konu parametre ile gerçek parametre (ortalama vb.) değeri arasındaki farka bağlıdır ($\mu_1 - \mu_0 = \delta$)

Tip-II hata oranının bulunmasında aşağıdaki iki taraflı hipotezi göz önüne alalım:

$$H_0 : \mu_X = \mu_0$$
$$H_1 : \mu_X \neq \mu_0$$

Farz edelim ki sıfır hipotezi hatalı ve anakütle ortalamasının doğru değeri $\mu_1 = \mu_0 + \delta$ $(\delta > 0)$ olsun.

Tip-I ve Tip-II Hatalar

- Test istatistiği;

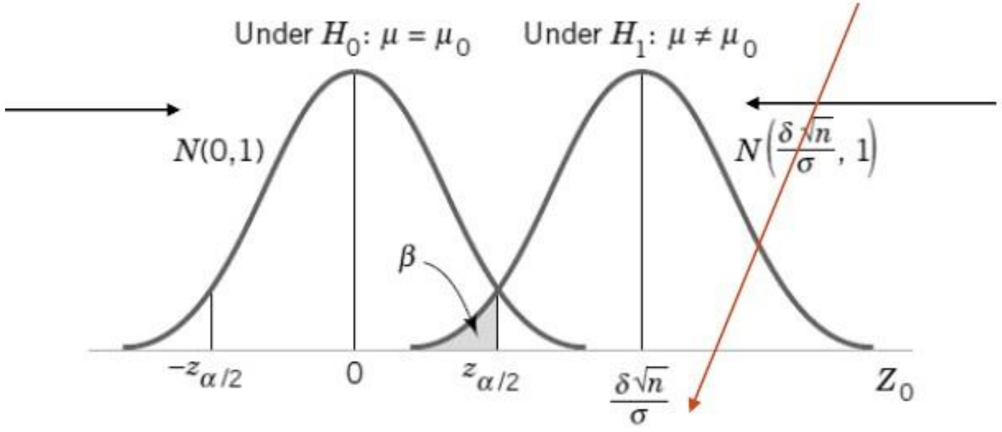
$$\mu_1 = \mu_0 + \delta$$

$$H_0: \mu_X = \mu_0$$
$$H_1: \mu_X \neq \mu_0$$

$$Z_0 = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - (\mu_0 + \delta)}{\sigma/\sqrt{n}} + \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Kayma miktarı

Bu sebeple H_1 doğru olduğunda Z_0 rassal değişkeninin dağılımı $Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$ olur.



Yandaki şekilde gri bölge bize β hatasını vermektedir. Bu bölge H_1 doğru iken $Z_0 \sim N\left(\frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}, 1\right)$ olduğunda Z_0 ın $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$ aralığında kalma olasılığıdır. Yani;

$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Yeni Z_0 ın standart formu

Normal dağılımın simetri özelliğinden dolayı benzer eşitlik $\delta < 0$ için de geçerli olur.

Tip-I ve Tip-II Hatalar

Bir mini kahve paketinin içerdiği kahvenin ortalama ağırlığının 16gr olması gerekmektedir. Geçmiş deneyimlerden standart sapmanın 0,1 gr. olduğu bilinmektedir. Hipotezler aşağıdaki gibi kurulmuştur. 9 adet rasgele örneklem alınmış ve $\alpha = 0,05$ olarak belirlenmiştir. Eğer gerçek ortalama $\mu_1 = 16,1$gr ise, tip-II hatayı belirleyiniz. Testin gücünü hesaplayınız.

$$H_0\colon \mu = 16$$
$$H_1\colon \mu \neq 16$$

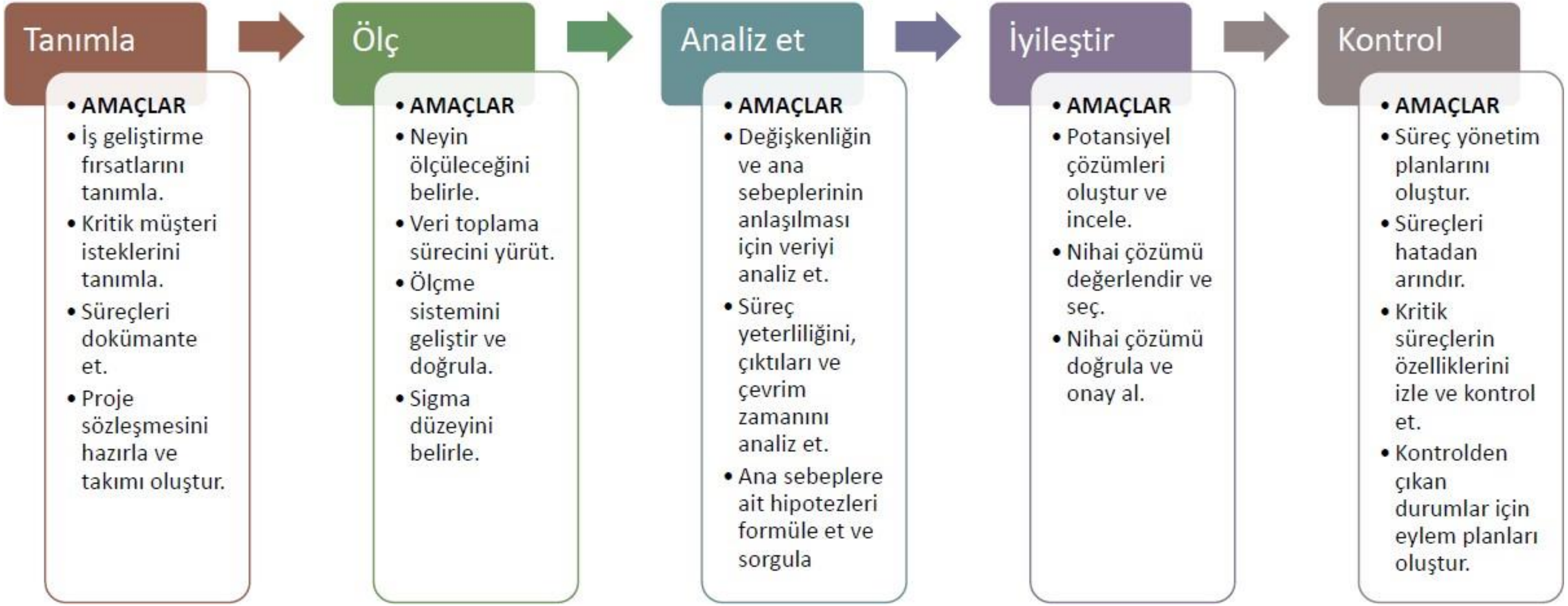
$$\beta = \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}\right)$$

Testin gücü= $1 - \beta$ olarak hesaplanır.

DMAIC (TÖAİK) Süreci

04.

Tanımla, Ölç, Analiz et, İyileştir ve Kontrol et



DMAIC (TÖAİK) Süreci

Tanımla, Ölç, Analiz et, İyileştir ve Kontrol et

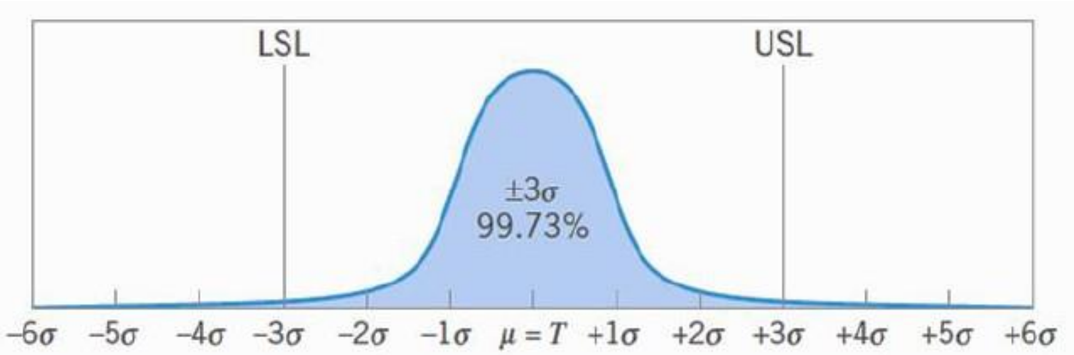
TÖAİK kalite ve süreç iyileştirilmesinde yaygın olarak kullanılan yapılandırılmış problem-çözme prosedürüdür.

Genellikle six-sigma ile ilişkilendirilmiş olup six-sigmanın her aşamasında kullanılmaktadır. Buna rağmen six-sigma kullanmayan bir organizasyonda da rahatlıkla uygulanabilir.

Sağdaki grafikten 3 sigma performansı bir milyon parça için $(1-0{,}9973)*10^6=2700$ hatalı üründür. Bu sonuç tek bir parçadan oluşan bir ürün içindir. Ancak 100 parçadan oluşan bir ürün için;

$0{,}9973*0{,}9973*\cdots*0{,}9973=(0{,}9973)^{100}=0{,}7631$ olur.

Bir milyon parçada $(1-0{,}7631)*10^6=236900$ parça olur ki, bu kabul edilemez. Bu sebeple six sigma limitleri düşünülmüştür.

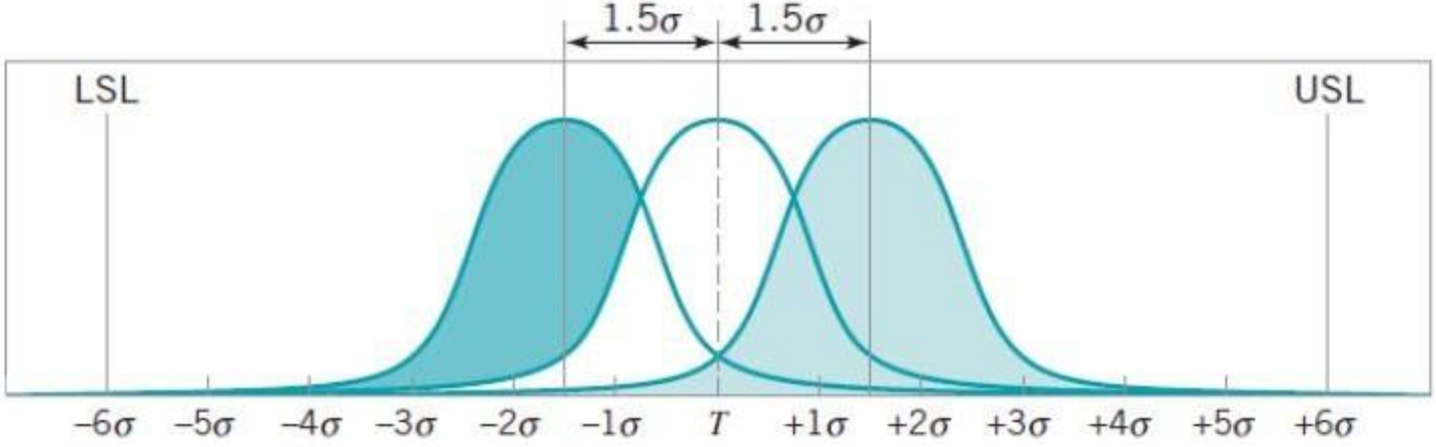


Spec. Limit	Percentage Inside Specs	ppm Defective
±1 Sigma	68.27	317300
±2 Sigma	95.45	45500
±3 Sigma	99.73	2700
±4 Sigma	99.9937	63
±5 Sigma	99.999943	0.57
±6 Sigma	99.9999998	0.002

ppm: parts per million

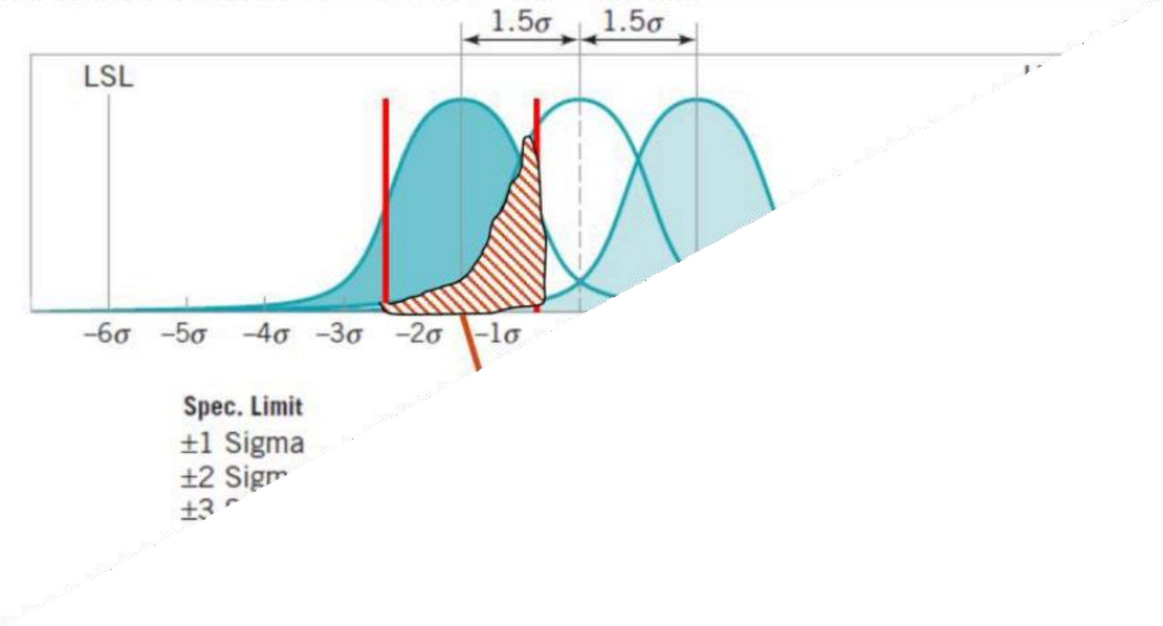
DMAIC (TÖAİK) Süreci

- 6σ kavramının ilk dönemlerinde bu düzeye erişmiş bir proses ortalamasında zamanla $\pm 1.5\sigma$ lık bir kayma öngörülmüştür.
- Bu durum aşağıdaki grafikte gösterilmektedir.



Spec. Limit	Percent inside specs	ppm Defective
±1 Sigma	30.23	697700
±2 Sigma	69.13	608700
±3 Sigma	93.32	66810
±4 Sigma	99.3790	6210
±5 Sigma	99.97670	233
±6 Sigma	99.999660	3.4

DMAIC (TÖAİK) Süreci



Bir firmanın 4σ düzeyinde çalıştığını kabul edelim (1,5σ sapma durumunda 6210 ppmhatalı parça.) Hedef 6σ düzeyini yakalamaksa (3,4 ppmhatalı parça) ve firma her yıl defoyu %25 azaltmayı planlarsa acaba kaç yıl sonra hedefe ulaşır?

$$3{,}4 = 6210(1 - 0.25)^{x}$$

$x = 26$ yıl olur. Hiç bir şirket amacına ulaşmak için 26 yıl beklemez. Her ne kadar kalite iyileştirme sürekli bir faaliyet olsa da, böyle bir plana yönetsel destek beklemek hayalcilik olur.
Yılda %50 iyileştirme planıyla, hedefe ulaşmak 11 yıl alacaktır. Eğer 5 yıl içinde hedefe ulaşmak isteniyorsa, defo oranı her yıl %77,8 azaltılmalıdır.

DMAIC (TÖAİK) Süreci

TÖAİK'inönemli bir bileşeni PROJELER dir.

- Önemli fırsatlar
- Mali sistemle entegrasyon
- Projenin sağlayacağı fayda net biçimde ortaya konmalı
- Proje seçimi
- Proje yönetimi

Proje yapısı TÖAİK' in vazgeçilmez parçasıdır.

- Başarılı seçilmiş projenin özellikleri;
- Amacı, kapsamı iyi tanımlanmış olmalı,
- Kuruluşun stratejik ve yıllık faaliyet planları ile bağlantısı (kuruluşun iş öncelikleri ile ilişkisi) kurulmuş olmalı,
- Kuruluşun hedeflerine önemli iyileştirme sağlamalı (Örneğin süreç performansında %50'den fazla iyileştirme),
- Proje tamamladığında, kuruluşa parasal kazanç sağlamalı
- Proje sonuçları ölçülebilir olmalıdır.

"Tanımla" Aşaması

Tanımlama Aşamasında kullanılan Örnek Proje Sözleşmesi (Project charter)

Proje Gerekçesi: Bu proje, müşteri şikayetlerinin ele alınma süresinin %x azalmasını ve müşteri memnuniyetinin %y artmasını sağlayarak kurumsal kalite hedeflerini destekler	**Fırsat İfadesi:** Ürün iade sürecinin çevrim zamanının azaltılarak, müşteri beklentisi ile mevcut performansımız arasındaki farkın kapatılması.
Hedef İfadesi: Bir yıl içinde ürün iade çevrim zamanını %x azaltmak	**Proje Kapsamı:** Çevrim zamanı, müşteriden ürünün geri gelişi ile başlar ve müşteriye yeni ürün ulaştığında ya da parası geri ödendiğinde sona erer.
Proje Planı: • **Aktivite** **Bşl.** **Bit.** Tanımla 6/04 6/30 Ölç 6/18 7/30 Analiz et 7/15 8/30 İyileştir 8/15 9/30 Kontrol et 9/15 10/30 • Kazanımların takibi 11/01	**Takım:** –Takım sponsoru –Takım lideri –Takım üyeleri

DMAIC (TÖAİK) Süreci

03.

"Tanımla" Aşaması SIPOC Diyagramı

Tedarikçiler	Girdiler	Süreç	Çıktılar	Müşteriler
Starbucks	Kahve	Malzemeleri topla	Sıcak	Müşteri
Arıtıcı	Su	Kahveyi demle	Lezzetli	
Elektrik şirketi	Filtre	Bardağı doldur	Doğru sertlikte	
	Elektrik		Doğru miktarda kahve	

SIPOC: Suppliers, Input, Process, Output, Customers kelimelerinin baş harfleri

Tedarikçiler, Girdi, Süreç, Çıktı, Müşteriler

DMAIC (TÖAİK) Süreci

04.

"Ölçme" Aşaması

- Amacı, sürecin mevcut düzeyinin ölçülmesi ve değerlendirilmesidir.
- Sürecin kritik girdi değişkenleri ve kritik çıktı değişkenleri belirlenir.
- Veriler, tarihsel kayıtlardan, numune alarak, gözlem yaparak elde edilebilir.
- Histogram, kutu grafiği, Pareto, ~~serpilme grafiği, dal-yaprak gösterimi kullanılabilir.~~
- Bazı süreçler için ölçme sistemi tasarlanması gerekebilir.
- Ölçme sisteminin yeterliği önemlidir. Zira süreç yeterliliği ölçülmeden önce bu yeterliliği ölçecek sistemin de yeterli olması gerekir.

"Analiz Et" Aşaması

- Sebep-sonuç ilişkilerini belirle
- Bu aşamada temel hedef değişkenlik kaynaklarının belirlenmesi – genel sebepler ve özel sebeplerin birbirinden ayrıştırılmasıdır.
- Kullanılacak araçlar: kontrol şemaları, hipotez testi, güven aralığı, regresyon modelleri, hata analizleri

DMAIC (TÖAİK) Süreci

"İyileştirme" Aşaması

04.

Kritik girdi-çıktı değişkenlerinin tanımlanması, verilerin nasıl toplanacağı, analizi, sunumu ve yorumlanması, değişkenliğin potansiyel nedenlerinin belirlenmesi	Ölçme ve analiz aşamaları

- Yaratıcı düşünme süreci:
- "Acaba süreç performansında istenen hedefe ulaşmak için, süreçte ve diğer faktörlerde ne tür değişiklikler yapmalıyız?"
- Darboğazların azaltılması için sürecin yeniden tasarımı
- Hatadan arındırma
- İstatistiksel araçlar – özellikle deney tasarımı
- Deneyler gerçek sistem üzerinde yapılamıyorsa benzetim yoluyla yapılabilir.
- Önerilen çözümün işe yaradığını test etmek için pilot uygulama.

04.

"Kontrol" Aşaması

- Kalan işleri tamamla,
- Sürecin kontrol planını oluşturarak süreç sahibine teslim et,
- Projeden elde edilen kazanımların kalıcı olacağından emin ol,
- Gerekliyse eğitim dokümanları sağla,
- Denetleme için metot ve ölçütleri belirt.