6
TABAKALI ŞANS ÖRNEKLEME

L=2tabakadan oluşan bir populasyon olduğunu varsayalım. N=6 hacimlik bir populasyon birinci ve ikinci sınıf olmak üzere iki tabakaya ayrılmış ve birinci sınıf öğrencilerinin sayısının $N_1=3$ ve ikinci sınıf öğrencilerinin sayısının $N_2=3$ olduğunu kabul edelim. Bu öğrencilerin sahip oldukları ortalama kitap sayısı ile ilgilenilsin. Veriler tablo 6.1 de gösterildiği gibidir:

Tablo 6.1

	1.sınıf		2.sınıf	
	N_1		N_2	
	X_{1i}		X_{i2}	
	X_{11}	2 kitap	X_{21}	8 kitap
	X_{12}	4 kitap	X_{22}	12 kitap
	X_{13}	6 kitap	X_{23}	16 kitap
Toplam X_1	12 kitap	X_2	36 kitap	
	$\overline{X}_1$	4 kitap	$\overline{X}_2$	12 kitap

tabaka sayısı L=2 ile gösterilince N= $\sum_{h}^{L} N_h = N_1 + N_2$ =3+3=6 olur ve çerçevedeki örnek birimlerinin toplam sayısını göserir.

X_{hi}= h'inci tabakadaki i'inci öğrencinin sahip olduğu kitap sayısını gösterir. X_h, h'inci tabakadaki toplam kitap sayısıdır. Böylece uygulamamızda

$X_1=X_{11}+X_{12}+X_{13}=12$ 1'inci tabakadaki kitapların sayısıdır. Genel olarak tabaka toplamı

$$X_h=\sum_{i=1}^{N_h} X_{hi}$$ olur.

Populasyon toplamı, tabaka toplamlarının toplamlarıdır ve

$X=X_1+X_2=12+36=48$ olarak hesaplanır. Bu toplam, populasyondaki kitap sayısını gösterir. Genel olarak, populasyon toplamı

$$X=\sum_{h}^{L} X_h=\sum_{h}^{L}\sum_{i}^{N_h} X_{hi}$$ şeklinde verilir.

Tabaka ortalaması,

$$\overline{X}_h = \frac{X_h}{N_h}$$ şeklinde tanımlanır.

Yukarıdaki uygulamada, birinci ve ikinci tabaka için,

$\overline{X}_1 = X_1 / N_1 = 12/3 = 4$ öğrenci başına kitap sayısı (birinci sınıf)

$\overline{X}_2 = X_2 / N_2 = 36/3 = 12$ öğrenci başına kitap sayısı (ikinci sınıf)

elde ederiz.

Populasyon ortalaması,

$$\overline{X} = \frac{X}{N} = \frac{X_1 + X_2}{N_1 + N_2} = \frac{12+36}{3+3} = 48/6 = 8$$

olarak tanımlanır ve bu öğrenci başına ortalama kitap sayısının 8 kitap olduğunu gösterir. $X_1 = N_1\overline{X}_1$ ve $X_2 = N_2\overline{X}_2$ olduğundan populasyon ortalaması aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$\overline{X} = \frac{X}{N} = \frac{N_1\overline{X}_1 + N_2\overline{X}_2}{N_1 + N_2} = \frac{\sum^{L} N_h\overline{X}_h}{N} = \frac{(3*4)+(3*12)}{6} = \frac{12+36}{6} = 48/6 = 8$$

6.1. Populasyon ortalaması ($\overline{X}$) ve populasyon toplamının (X) tahmini

ilk olarak populasyon toplamı X tahmin edilecek ve bu N'e bölünerek $\overline{X}$ tahmin edilecektir.
Populasyon toplamı, tabaka toplamlarının toplamıdır. Buradan hareketle populasyon toplamının tahmini, tabaka toplamlarının tahminlerinin toplanmasıyla bulunur.
Tabaka toplamlarının tahmini,

$\hat{X}_h = N_h \bar{x}_h$ şeklinde bulunur. Burada $\bar{x}_h$, h'inci tabakadaki n_h hacimli tesadüfi alt örnek ortalamasıdır.

Örneğin, kitap örneğinde populasyonun 1'inci ve 2'inci tabakalarından $n_1=2$ ve $n_2=2$ hacimli tesadüfi alt örnekler seçtiğimizi varsayalım, bu alt örneklerin örnek ortalamalarına sırasıyla $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ diyelim. Basit şans örneklemesini incelerken görülmüş olduğu gibi, $N_1\bar{x}_1$ ve $N_2\bar{x}_2$, birinci ve ikinci tabaka toplamlarının sapmasız tahmin edicileridir.

Populasyon toplamı X'in tahmini, tabaka toplamlarının tahminlerinin toplamlarıdır. Araştırmamızda iki tabaka olduğundan

$$\hat{X}_{tb} = N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 = \sum^{L} N_h\bar{x}_h$$

olacaktır.

Buradan **populasyon ortalamasının tahmini**

$$\bar{x}_{tb} = \frac{\hat{X}_{tb}}{N} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

haline gelir. Genel olarak,

$$\bar{x}_{tb} = \frac{\sum^{L} N_h\bar{x}_h}{N}$$ yazılır ve bu populasyon ortalamasının tahmin edicisidir.

Tabakalara ilişkin örnek ortalamaları $\bar{x}_h$'ler basit şans örneklemesi ile elde edildiğinden bunlar tabaka ortalaması $\bar{X}_h$'lerin sapmasız tahmin edicileridir. Kısaca,

E($\bar{x}_h$)= $\bar{X}_h$ biçimindedir. Böylece $\bar{x}_{tb}$'nın beklenen değeri,

$$E(\bar{x}_{tb}) = \frac{E(N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2)}{N}$$

$$= \frac{N_1E(\bar{x}_1) + N_2E(\bar{x}_2)}{N}$$

$$= \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2}{N} = \frac{X_1 + X_2}{N} = \bar{X}$$

olur ve $\bar{x}_{tb}$ $\bar{X}$'nın sapmasız bir tahmin edicisidir.

$\bar{x}_{tb}$ tahmin edicisi için N_1 ve N_2 ile ilgili bilgilerin ne kadar gerekli olduğuna karar verelim. Bunun yanısıra

$$E(x_{tb})=X/N$$

Olduğundan,

$$E(N\,\bar{x}_{tb})=X$$

Elde edilir. Fakat $\bar{x}_{tb} = \dfrac{\sum^{L} N_h \bar{x}_h}{N}$ eşitliğinden

$N\,\bar{x}_{tb} = \sum^{L} N_h \bar{x}_h = \hat{X}_{tb}$ olur. Yani $\hat{X}_{tb}$ aynı zamanda X'in sapmasız bir tahmin edicisidir. $E(\hat{X}_{tb})=X$ olur.

Alıştırma: Kitap populasyonunu kullanarak yukarıdaki sonuçlar bir örnekle açıklanacaktır. Her bir tabakadan yerine koymaksızın $\binom{3}{2}$=3 tane mümkün örnek seçilebilir. Böylece, hacmi

$n=n_1+n_2=2+2=4$ olan mümkün örneklerin tamamı

$\binom{3}{2}\binom{3}{2}$=9 tanedir. Bu 9 mümkün örnek Tablo 6.2 de liste halinde gösterilmiştir.

Tablo 6.2

Tabakalar

I	II						
x_1	x_2	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\hat{X}_1 = N_1 \overline{x}_1$	$\hat{X}_{21} = N_2 \overline{x}_2$	$\hat{X}_{tb}$	$\overline{x}_{tb} = \dfrac{\hat{X}_{tb}}{N}$
2,4	8,12	3	10	3*3= 9	3*10= 30	39	39/6
	8,16		12	3*3= 9	3*12= 36	45	45/6
	12,16		14	3*3= 9	3.14= 42	51	51/6
2,6	8,12	4	10	3*4=12	3*10= 30	42	42/6
	8,16		12	3*4=12	3*12= 36	48	48/6
	12,16		14	3*4=12	3*14= 40	54	54/6
4,6	8,12	5	10	3*5=15	3*10= 30	45	45/6
	8,16		12	3*5=15	3*12= 36	51	51/6
	12,16		14	3*5=15	3*14= 42	57	57/6
						432	$E(\overline{x}_{tb}) = 8$

(2,4) birinci tabakadan, (8,12) ikinci tabakadan olmak üzere, birinci örnek (2,4,8,12) birimlerinden oluşmaktadır.

I'inci tabakadaki (2,4) birimlerinden oluşan alt örneğin toplamı şöyledir:

$$x_1 = 2+4=6$$

I'inci tabakadaki (2,4)birimlerinden oluşan alt örneğin ortalaması

$$\bar{x}_1 = x_1 / n_1 = 6/2=3$$

olur. Böylece (2,4) birimlerinden oluşan alt örneğe bağlı olarak I'inci tabakadaki toplam kitap sayısının tahmini

$$N_1 \bar{x}_1 = (3)(3)=9 \text{ olur.}$$

II'inci tabakadaki (8,12) birimlerinden oluşan alt örnekten x_2, $\bar{x}_2$ ve $N_2 \bar{x}_2$ değerleri benzer şekilde hesaplanır. Buradan hareketle birinci örneğe (2,4,8,12) bağlı olarak populasyondaki toplam kitap sayısının tahmini $\hat{X}_{tb} = N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2 = \sum^{L} N_h\bar{x}_h$ =9+30=39 ve populasyon ortalamasının tahmini

$$\bar{x}_{tb} = \frac{\hat{X}_{tb}}{N} = \frac{39}{6} = 6.5 \text{ kitap olarak bulunur.}$$

Şimdi $E\left(\bar{x}_{tb}\right) = \bar{X}$ olduğu gösterilecektir. Tablo 6.2 ‘den de görüleceği gibi

$E\left(\bar{x}_{tb}\right) = \frac{1}{9}\left(\frac{39}{6} + \frac{45}{6} + ... + \frac{57}{6}\right) = 8$ olur. Daha önce $\bar{X}$ =8 bulunduğundan, $E\left(\bar{x}_{tb}\right) = \bar{X}$ =8

olur ve dolayısıyla $\bar{x}_{tb}$, $\bar{X}$ ’nın sapmasız bir tahmin edicisidir.

Ayrıca,

$E\left(\hat{X}_{tb}\right) = \frac{39 + 45 + ... + 57}{9} = 48 = X$ dir $\hat{X}_{tb}$ X’in sapmasız bir tahmin edicisidir.

Örnek hacimleri kullanılarak yapılan tahminler

Populasyon ortalamasının tahmininin bulunmasının diğer bir yolu $n=n_1+n_2$ hacimli birleştirilmiş örneğin örnek ortalamasının bulunmasıdır. Bunun için,

$x = x_1 + x_2 = n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2$ denilirse, eşitlikteki x_1 ve x_2 n_1 ve n_2 hacimli alt örneklerin örnek toplamlarıdır ve böylece x örnek toplamı olur. $\bar{x}_1$ ve $\bar{x}_2$ de örnek ortalamaları olduğundan, birleştirilmiş örneğin ortalaması

$$\bar{x} = \frac{x}{n} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n}$$

$$= \frac{\sum^{L} n_h\bar{x}_h}{n} \text{ olur.}$$

Örnek ortalaması için N_1 ve N_2'nin bilinmesi gerekmektedir. Örnek ortalaması genellikle $\overline{X}$ 'nın sapmasız bir tahmin edicisi değildir. Her bir tabakadan tesadüfi alt örneklerin aynı yüzde ile seçildiği durumda

$\bar{x} = \frac{x}{n} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n}$ eşitliği $\bar{x}_{tb} = \frac{\hat{X}_{tb}}{N} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$ eşitliğine eşit olacak ve bu örnek ortalaması $\overline{X}$ 'nın sapmasız bir tahmin edicisi olacaktır. Bunu göstermek için

$\frac{n_1}{N_1} = \frac{n_2}{N_2} = \frac{n_1 + n_2}{N_1 + N_2} = \frac{n}{N} = f$ olsun. f örnekleme kesri diye adlandırılır. Buna göre $n_1 = N_1 f$,

$n_2 = N_2 f$ ve $n = Nf$ 'dir .Bunları $\bar{x} = \frac{x}{n} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n}$ eşitliğinde yerine koyarak

$$\bar{x} = \frac{N_1 f\bar{x}_1 + N_2 f\bar{x}_2}{Nf} = \frac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N} = \bar{x}_{tb}$$ i elde ederiz.

Her bir tabakadan, tabaka hacimleri ile orantılı alt örnekler seçilmesi metodu orantılı örnekleme olarak adlandırılır. Bu örnekleme yönteminin karakteristiği populasyondaki herbir birimin eşit seçilme şansına sahip olmasıdır. Bu ise, belirli bir birimin I'inci tabakadan alınan alt örnekte bulunma olasılığının n_1 / N_1 olduğu hatırlanarak görülebilir. Benzer şekilde II'inci tabaka için bu n_2 / N_2 'dir. Bu durumda $n_1 / N_1 = n_2 / N_2 =$ n / N'dir. Bunun bir sonucu olarak, populasyondaki her bir birimin örnekte yer alma olasılığı n / N'dir. Her bir birim eşit seçilme olasılığına sahip iken seçilen bir örnek, kendi kendine ağırlıklandırılan örnek diye adlandırılır.