LEBESGUE OLCUMU
VE
INTEGRAL KURAMI

Uzaktan Eğitim

1.Hafta- Şubat 2021

$[a, b]$ aralığını

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

özelliğini sağlayan $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ noktaları yardımıyla n tane alt aralığa bölelim.

$$P = \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$$

sonlu kümesine veya $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ olmak üzere

$$P = \{I_1, I_2, ..., I_n\}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının bir parçalanması veya bölüntüsü denir.

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$ $[x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıklar adı verilir. $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ sayısına aralığın boyu (veya ölçüsü) denir.

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots [x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıklar adı verilir. $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ sayısına aralığın boyu (veya ölçüsü) denir.

$\triangle x_1$, $\triangle x_2, \ldots, \triangle x_n$ sayılarının en büyüğüne P parçalanmasının normu (veya maksimal çapı) denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde

$$\|P\| = \max\{\triangle x_k : k = 1, 2, \ldots, n\}$$

dir.

$[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots [x_{n-1}, x_n]$ aralıklarına P parçalanmasına karşılık gelen kapalı alt aralıklar adı verilir. $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ sayısına aralığın boyu (veya ölçüsü) denir.

$\triangle x_1, \triangle x_2, \ldots, \triangle x_n$ sayılarının en büyüğüne P parçalanmasının normu (veya maksimal çapı) denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde

$$\|P\| = \max\left\{\triangle x_k : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$$

dir.

Eğer tüm alt aralıkların boyları birbirine eşit, yani $\triangle x_k = \frac{b-a}{n}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ ise bu parçalanmaya standart veya düzgün parçalanma adı verilir.($P = \left\{x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 1, 2, \ldots, n\right\}$ ise P parçalanması $[a, b]$ aralığının düzgün parçalanmasıdır.)

$[a, b]$ aralığının tüm parçalanmalarının (bölüntülerinin) kümesi $\mathcal{P}[a, b]$ ile gösterilir.

$[a, b]$ aralığının tüm parçalanmalarının (bölüntülerinin) kümesi $\mathcal{P}[a, b]$ ile gösterilir.
$[a, b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha incedir denir.

$[a, b]$ aralığının tüm parçalanmalarının (bölüntülerinin) kümesi $\mathcal{P}[a, b]$ ile gösterilir.
$[a, b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha incedir denir.

Bir $[a, b]$ aralığının $P_1, P_2, ..., P_r$ parçalanmaları için

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_r$$

ise

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \cdots \geq \|P_r\|$$

olduğu açıktır.

$[a, b]$ aralığının tüm parçalanmalarının (bölüntülerinin) kümesi $\mathcal{P}[a, b]$ ile gösterilir.
$[a, b]$ aralığının iki parçalanması P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 parçalanması P_1 den daha incedir denir.

Bir $[a, b]$ aralığının $P_1, P_2, ..., P_r$ parçalanmaları için

$$P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P_r$$

ise

$$\|P_1\| \geq \|P_2\| \geq \cdots \geq \|P_r\|$$

olduğu açıktır.

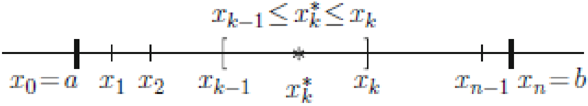
$$\|P\| \longrightarrow 0 \Rightarrow n \longrightarrow \infty$$

P bir düzgün bölüntü ise $\|P\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow n \longrightarrow \infty$.

$[a, b]$ aralığının bir $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ parçalanması için her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında herhangi bir x_k^* noktası seçilmiş ise

$$\dot{P} := \{([x_{k-1}, x_k], x_k^*)\}_{k=1}^{n}$$

kümesine $[a, b]$ aralığının bir işaretlenmiş parçalanması adı verilir. $\dot{P}$ yerine bazen (P, x^*) kullanacağız.



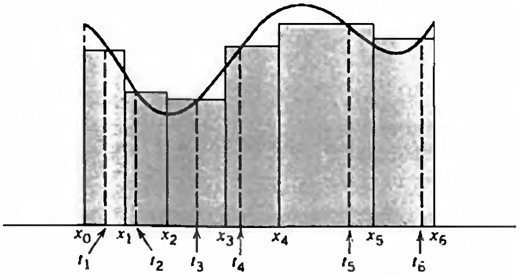
Riemann İntegrali

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığının herhangi bir P parçalanması verilsin.

$$S_n = R(f, P, x^*) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k$$

toplamına f fonksiyonunun $[a, b]$ nin P parçalanmasına göre Riemann toplamı denir. Riemann toplamı P bölüntüsüne ve x_k^* noktalarının seçimine bağlıdır.

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında pozitif ise yukarıda verilen Riemann toplamı, tabanı $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı ve yüksekliği $f(t_k)$ olan dikdörtgenlerin alanları toplamıdır. (x_k^* noktaları t_k olarak gösterilmiştir.)



$[a, b]$ nin P parçalanmasına ve x_k^* noktalarının seçimine bağlı olmadan

$$\lim_{\|P\|\to 0} R\left(f, P, x^*\right) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right) \triangle x_k = I \in \mathbb{R}$$

sonlu limiti varsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilen fonksiyon, bu limite f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığındaki Riemann integrali denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir. a ve b sayılarına sırasıyla integralin alt ve üst sınırları adı verilir.

Limitin tanımından yararlanarak yukarıdaki tanımı şu şekilde ifade edebiliriz.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists I \in \mathbb{R}$ için $\exists \delta_\varepsilon > 0$ öyleki $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herbir P parçalanması için $|R(f, P, x^*) - I| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Riemann integrallenebilir denir.

Limitin tanımından yararlanarak yukarıdaki tanımı şu şekilde ifade edebiliriz.

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ ve $\exists I \in \mathbb{R}$ için $\exists \delta_\varepsilon > 0$ öyleki $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herbir P parçalanması için $|R(f, P, x^*) - I| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_\varepsilon > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna Riemann integrallenebilir denir.

$[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir fonksiyonların kümesi $\mathcal{R}[a, b]$ ile gösterilir.

Teorem

Eğer $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *ise bu durumda* f *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığında sınırlıdır, yani*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b].$$

Teorem

Eğer $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise bu durumda f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sınırlıdır, yani

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow f \in B[a,b].$$

İspat:

$\int_a^b f(x)dx = L \in \mathbb{R}$ ve $f \notin B[a,b]$ olsun. $\varepsilon = 1$ olarak alalım. Bu durumda $\exists \delta > 0$ için $[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde herbir P parçalanması için $|R(f,P,x^*) - L| < 1$ yani $|R(f,P,x^*)| < 1 + |L|$ iken $[x_{i-1}, x_i]$ alt aralığında fonksiyon sınırlı değildir.

$$|f(x_i^*)\triangle x_i| > 1 + |L| + \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k \right|$$

olarak seçelim.

$$R\left(f,P,x^*\right)=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\triangle x_k=f\left(x_i^*\right)\triangle x_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}f(x_k^*)\triangle x_k$$

olduğundan, $|A+B|\geq|A|-|B|$ eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left|R\left(f,P,x^*\right)\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}f(x_k^*)\triangle x_k\right|=\left|f\left(x_i^*\right)\triangle x_i+\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}f(x_k^*)\triangle x_k\right| \\ &\geq \left|f\left(x_i^*\right)\triangle x_i\right|-\left|\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}f(x_k^*)\triangle x_k\right|>1+|L|\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Demek ki $f\in B[a,b]$ dir.

Örnek

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $[a, b]$ aralığında Riemann integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P \in \mathcal{P}[a, b]$ olsun.

$$\begin{aligned} R(f, P, x^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} c \triangle x_k = c(b-a) \end{aligned}$$

olduğundan $|R(f, P, x^*) - c(b-a)| = 0$ elde edilir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\delta_\varepsilon = 1$ olarak alınırsa $\|P\| < 1$ iken

$$|R(f, P, x^*) - c(b-a)| = 0 < \varepsilon$$

elde edilir. Bu yüzden $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$ dir.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P \in \mathcal{P}\,[a, b]$ olsun. $k = 1, 2, ..., n$ için

$$|\delta_k| \leq \frac{\triangle x_k}{2} \leq \frac{\|P\|}{2}$$

olmak üzere

$$x_k^* = \frac{x_{k-1} + x_k}{2} + \delta_k$$

şeklinde seçelim.

$E_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_k (x_k - x_{k-1})$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
R(f, P, x^*) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{x_{k-1} + x_k}{2} (x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} \delta_k (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{k-1}^2 + E_n \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2} + E_n
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$$
\begin{aligned}
|E_n| &\leq \sum_{k=1}^{n} |\delta_k| \left(x_k - x_{k-1}\right) \\
&\leq \frac{\|P\|}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(x_k - x_{k-1}\right) \\
&= \frac{\|P\|}{2} \left(b - a\right)
\end{aligned}
$$

olduğuundan $\|P\| \to 0$ iken $E_n \to 0$ elde edilir. Böylece

$$
\lim_{\|P\| \to 0} R\left(f, P, x^*\right) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \int_a^b x dx
$$

sonucu elde edilir.

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & ; \quad x \in I \cap [0,1] \end{cases}$ olmak üzere $f \notin \mathcal{R}[0,1]$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & ; \quad x \in I \cap [0,1] \end{cases}$ olmak üzere $f \notin \mathcal{R}[0,1]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P \in \mathcal{P}[0,1]$ olsun. $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$ olarak seçilirse

$$R(f, P, x^*) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k = 0,$$

$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k] \cap I$ olarak seçilirse

$$R(f, P, x^*) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k = 1$$

elde edilir. $\|P\| \to 0$ iken $R(f, P, x^*) \to 0$ ve $R(f, P, x^*) \to 1$ şeklinde iki farklı limit elde edildiğinden limit yoktur, yani $f \notin \mathcal{R}[0,1]$ dir.

Not : $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olması için f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında sınırlı olması koşulu gereklidir, fakat yeterli değildir. Yukarıdaki örnekte, $f \in B[0, 1]$ dir fakat $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$ dir.

Darboux İntegrali

$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu bir sınırlı fonksiyon olsun. f fonksiyonu sınırlı ise

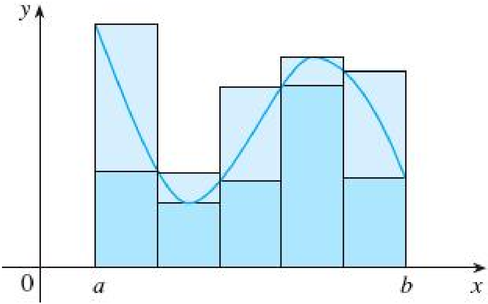
$$m_k = \inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x) \quad \text{ve} \quad M_k = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$$

sayıları sonludur.

$$\overline{S_n} = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k \;\; \text{ve} \;\; \underline{s_n} = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k$$

toplamlarına sırasıyla üst Darboux toplamı ve alt Darboux toplamı adı verilir.

f fonksiyonu pozitif ise alt toplam, tabanı $[x_{k-1}, x_k]$ ve yüksekliği m_k olan dikdörtgenlerin alanları toplamını, üst toplam, ise tabanı $[x_{k-1}, x_k]$ ve yüksekliği M_k olan dikdörtgenlerin alanları toplamını ifade eder.



Genellikle, üst toplam için $\overline{S_n} = U(f, P)$ ve alt tolam $\underline{s_n} = L(f, P)$ ile gösterilir.
$[a, b]$ aralığında sınırlı f fonksiyonu için

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{ve} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda

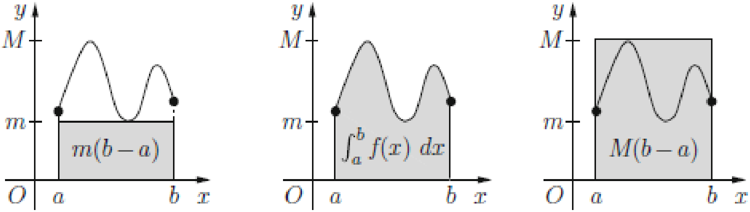
$$m \leq m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k \leq M$$

olduğu açıktır.

Bu eşitsizlikten $[a, b]$ aralığının her P bölüntüsü için

$$m(b-a) \leq L(f, P) \leq R(f, P, x^*) \leq U(f, P) \leq M(b-a)$$

yazılabilir. $[a, b]$ aralığının her P bölüntüsü için $L(f, P)$ üstten sınırlı olduğu için alt toplamlar bir supremuma ve $U(f, P)$ alttan sınırlı olduğu için üst toplamlar bir infimuma sahiptir.



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf \{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

ve

$$L(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup \{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$$

sayılarına f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki sırasıyla alt (Darboux) integrali ve üst (Darboux) integrali denir.

Eğer $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir f fonksiyonu için $U(f) = L(f)$ ise $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir denir.

Eğer $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir f fonksiyonu için $U(f) = L(f)$ ise $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir denir.

Bu ortak değere f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde (Darboux) integrali denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Eğer $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir f fonksiyonu için $U(f) = L(f)$ ise $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir denir.

Bu ortak değere f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde (Darboux) integrali denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Eğer $U(f) > L(f)$ ise bu durumda f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir değildir.

Eğer $[a, b]$ aralığında tanımlı sınırlı bir f fonksiyonu için $U(f) = L(f)$ ise $[a, b]$ üzerinde f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir denir.

Bu ortak değere f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde (Darboux) integrali denir ve $\int_a^b f(x)dx$ ile gösterilir.

Eğer $U(f) > L(f)$ ise bu durumda f fonksiyonu (Darboux) integrallenebilir değildir.

Riemann ve Darboux integral tanımlarının eşdeğer oldukları ileride gösterilecektir.

Örnek

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $[a, b]$ aralığında Darboux integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

$\forall c \in \mathbb{R}$ için $f(x) = c$ şeklinde tanımlanan fonksiyonun $[a, b]$ aralığında Darboux integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P \in \mathcal{P}[a, b]$ olsun. $m_k = \inf\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = c$ ve $M_k = \sup\limits_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = c$ olduğundan

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = c(b-a)$$

ve

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = c(b-a)$$

elde edilir. $c(b-a) = L(f, P) \leq L(f) \leq U(f) \leq U(f, P) = c(b-a)$ olduğundan $L(f) = U(f)$ dir, yani f fonksiyonu integrallenebilirdir.

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & ; \quad x \in I \cap [0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlı Dirichlet fonksiyonunun (Darboux) integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

Örnek

$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & ; \quad x \in I \cap [0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlı Dirichlet fonksiyonunun (Darboux) integrallenebilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm

$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[0,1]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü olsun. Herbir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı hem rasyonel hem de irrasyonel nokta içerdiğinden

$$m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 0 \text{ ve } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = 1$$

dir. Alt ve üst toplamlar hesaplanırsa

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = 1 \text{ ve } L(f, P) = 0$$

elde edilir.

Herhangi $P \in \mathcal{P}[0,1]$ için yukarıdaki hesaplamalar geçerli olduğundan

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1 \text{ ve } \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0$$

elde edilir ki bu nedenle Dirichlet fonksiyonu $[0,1]$ üzerinde (Darboux) integrallenebilir değildir.

Alt ve Üst Toplamın Temel Özellikleri

Teorem

$P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ ve $f \in B[a, b]$ olsun.

a) *Eğer $P \subseteq Q$ ise $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$*
b) *P ve Q herhangi iki bölüntü ise $L(f, P) \leq U(f, Q)$*
c) *$L(f) \leq U(f)$*

Alt ve Üst Toplamın Temel Özellikleri

Teorem

$P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ ve $f \in B[a, b]$ olsun.

a) *Eğer $P \subseteq Q$ ise $L(f, P) \leq L(f, Q) \leq U(f, Q) \leq U(f, P)$*
b) *P ve Q herhangi iki bölüntü ise $L(f, P) \leq U(f, Q)$*
c) *$L(f) \leq U(f)$*

Sonuç

$f \in B[a, b]$ ve (P_n) de $[a, b]$ aralığının parçalanmalarının artan bir dizisi (yani, $n < m$ için $P_n \subset P_m$) olsun. $(L(f, P_n))$ alt toplamlar dizisi artan, $(U(f, P_n))$ üst toplamlar dizisi azalandır.

Yukarıdaki sonuç yardımıyla, $[a, b]$ üzerinde tanımlı sınırlı bir f fonksiyonu için

$$U(f) = \overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} U(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} U(f, P)$$

ve

$$L(f) = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} L(f, P) = \lim_{\|P\| \to 0} L(f, P)$$

yazılabilir.

Riemann ve Darboux Tanımlarının Eşdeğerliliği

Teorem

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon ise f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul Darboux integrallenebilir olmasıdır.

Riemann ve Darboux Tanımlarının Eşdeğerliliği

Teorem

f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sınırlı bir fonksiyon ise f fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul Darboux integrallenebilir olmasıdır.

İspat:

$\Leftarrow$: $f \in B[a, b]$ fonksiyonu Darboux integrallenebilir olsun. $[a, b]$ aralığının her P bölüntüsü için

$$L(f, P) \leq R(f, P, x^*) \leq U(f, P)$$

olduğundan eşitsizliğin her üç tarafının $\|P\| \to 0$ iken limiti alınırsa

$$L(f) = \lim_{\|P\| \to 0} L(f, P) \leq \lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, x^*) \leq \lim_{\|P\| \to 0} U(f, P) = U(f)$$

elde edilir.

İspatın Devamı:

Bu yüzden f fonksiyonu Darboux integrallenebilir ise f fonksiyonu Riemann integrallenebilirdir.

İspatın Devamı:

Bu yüzden f fonksiyonu Darboux integrallenebilir ise f fonksiyonu Riemann integrallenebilirdir.

$:\Rightarrow$ f fonksiyonu Riemann integrallenebilir olsun. Bu durumda $P \in \mathcal{P}[a,b]$ seçiminden ve x^* noktalarının seçiminden bağımsız olarak

$$\lim_{\|P\| \to 0} R(f, P, x^*) = L$$

olacak şekilde $L \in \mathbb{R}$ sayısı vardır. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \|P\| < \delta$ iken

$$L - \varepsilon < R(f, P, x^*) < L + \varepsilon.$$

$f(x_k^*) < m_k + \varepsilon$ olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \triangle x_k < \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k + \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \triangle x_k = L(f, P) + \varepsilon (b - a)$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

Yani, $R(f, P, x^*) < L(f, P) + \varepsilon(b-a)$ yazılabilir. Buradan

$$L(f) \geq L(f, P) > R(f, P, x^*) - \varepsilon(b-a) > L - \varepsilon - \varepsilon(b-a)$$

eşitsizliği elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan $L(f) \geq L$ sonucu elde edilir. Benzer olarak $U(f) \leq L$ olduğu gösterilebilir. $U(f) \geq L(f)$ olduğundan

$$L \geq U(f) \geq L(f) \geq L$$

yani $U(f) = L(f) = L$ elde edilir ki, bu f fonksiyonunun $[a, b]$ aralığında Darboux integrallenebilir olduğunu gösterir.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

Riemann integralinin tanımından yararlanarak daha önce $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu göstermiştik. Şimdi Darboux integralinin tanımından yararlanarak aynı sonucu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
U(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(x_k - x_{k-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{(x_k + x_{k-1})}{2} + \frac{(x_k - x_{k-1})}{2}\right] (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{k-1}^2 + E_n^{(1)} \\
&= \frac{b^2 - a^2}{2} + E_n^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}\left(x_k - x_{k-1}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\left(x_k + x_{k-1}\right)}{2} - \frac{\left(x_k - x_{k-1}\right)}{2}\right]\left(x_k - x_{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - x_{k-1}^2 + E_n^{(2)} \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2} + E_n^{(2)} \end{aligned}$$

yazılabilir.

$j = 1, 2$ için

$$\begin{aligned}
\left|E_n^{(j)}\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{(x_k - x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}) \\
&\leq \frac{\|P\|}{2} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\|P\|}{2}(b - a)
\end{aligned}$$

olduğundan $\|P\| \to 0$ iken $E_n^{(1)} \to 0$ ve $E_n^{(2)} \to 0$ elde edilir. Bu yüzden

$$\lim_{\|P\| \to 0} U(f, P) = \frac{b^2 - a^2}{2} = \lim_{\|P\| \to 0} L(f, P)$$

elde edilir. f fonksiyonu $[0, 1]$ aralığında Darboux integrallenebilirdir ve bu nedenle $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dir.

Riemann İntegrallenebilirlik Koşulu

$$L(f) = \lim_{\|P\|\to 0} L(f,P) \leq \lim_{\|P\|\to 0} R(f,P,x^*) \leq \lim_{\|P\|\to 0} U(f,P) = U(f)$$

eşitsizliği ve Darboux integrallenebilirlik koşulu ($U(f) = L(f)$) göz önüne alınarak aşağıdaki teoremler kolayca ispatlanabilir.

Riemann İntegrallenebilirlik Koşulu

$$L(f) = \lim_{\|P\| \to 0} L(f,P) \leq \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P,x^*) \leq \lim_{\|P\| \to 0} U(f,P) = U(f)$$

eşitsizliği ve Darboux integrallenebilirlik koşulu ($U(f) = L(f)$) göz önüne alınarak aşağıdaki teoremler kolayca ispatlanabilir.

Teorem

$f \in B[a,b]$ olsun. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olması için g.v.y.k. $\forall \varepsilon > 0$ için

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

olacak şekilde $[a,b]$ aralığının bir P parçalanmasının var olmasıdır.

İntegrallenebilirlik koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

İntegrallenebilirlik koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

Teorem

$f \in B[a,b]$ olsun. $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olması için g.v.y.k. $\forall \varepsilon > 0$ için $P \in \mathcal{P}[a,b]$ ve $\|P\| < \delta$ iken

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının var olmasıdır.

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 0 & ; \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \in [0,1] - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ 0 & ; \quad x = \frac{1}{2} \end{cases}$$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, $[0,1]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. $\frac{1}{2} \notin P$ olsun. Bu durumda $\frac{1}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$ olacak şekilde bir alt aralık vardır ve bu yüzden

$$\begin{aligned} j &\neq k \text{ için } m_j = M_j = 1 \\ j &= k \text{ için } m_j = 0, \ M_j = 1 \end{aligned}$$

dir.

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\triangle x_j = \triangle x_k$$

olduğundan f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında yukarıdaki teorem gereği integrallenebilirdir. $\int_0^1 f(x)dx$ integralini belirlemek için

$$U(f,P) = \sum_{j=1}^{n} M_j \triangle x_j = 1$$

ya da

$$L(f,P) = \sum_{j=1}^{n} m_j \triangle x_j = 1 - \triangle x_k$$

olduğunu göz önüne almak yeterlidir. Yukarıdaki eşitliklerden $\int_0^1 f(x)dx = 1$ sonucu elde edilir. f fonksiyonunun $x_0 = \frac{1}{2}$ noktasında süreksiz olduğuna dikkat ediniz.

Teorem

$f \in B[a,b]$ olsun.

(i) *f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilir ise*

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \alpha = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n), \quad \int_a^b f(x)dx = \alpha$$

olacak şekilde $\mathcal{P}[a,b]$ içinde bir (P_n) dizisi vardır.

(ii) *Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \alpha = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n)$$

olacak şekilde $\mathcal{P}[a,b]$ içinde bir (P_n) dizisi varsa $f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $\int_a^b f(x)dx = \alpha$ dır.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$f(x) = x$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P_n = \left\{x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 0, 1, ..., n\right\}$ olsun. Bu durumda tüm alt aralıkların boyları birbirine eşittir ve

$$\begin{aligned} U(f, P_n) &= \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} M_k \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[a + \frac{k}{n}(b-a)\right] \\ &= \frac{b^2-a^2}{2} + \frac{(b-a)^2}{2n} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L(f, P_n) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} m_k \\
&= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[a + \frac{k-1}{n}(b-a) \right] \\
&= \frac{b^2-a^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{2n}
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$
\lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \frac{b^2-a^2}{2} = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n)
$$

elde edilir. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\int_a^b f(x)dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ dir.

Örnek

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} 0 & ; \quad x\in[0,1]-\mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & ; \quad x=\frac{p}{q}\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \text{ ve } (p,q)=1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı Thomae fonksiyonu verilsin. $f\in\mathcal{R}[0,1]$ olduğunu gösteriniz.

Örnek

$$f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x\in[0,1]-\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & ; \quad x=\frac{p}{q}\in[0,1]\cap\mathbb{Q} \text{ ve } (p,q)=1\end{cases}$$

şeklinde tanımlı Thomae fonksiyonu verilsin. $f\in\mathcal{R}[0,1]$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$Q\in\mathcal{P}[0,1]$ olsun. $L(f,Q)=0$ olduğu açıktır.
$n\geq 2$ için $P_n=\left\{\frac{p}{q}\in[0,1]:p\leq q\leq n\right\}$ bölüntüsünü göz önüne alalım.
Örneğin $n=4$ için $P_4=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\right\}$ şeklindedir. $n\geq 2$ için $M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\leq x\leq x_k} f(x)<\frac{1}{n}$ dir ve $n\to\infty$ iken $\|P\|\to 0$ dır.

$U(f,P)-L(f,P)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\triangle x_k=\frac{1}{n}$ olduğundan $f\in\mathcal{R}[0,1]$ dir ve

$\int_0^1 f(x)dx=0$ dır.

Uygulamalarda aşağıdaki teorem oldukça kullanışlıdır.

Teorem

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $n \to \infty$ iken $\|P_n\| \to 0$ olacak şekilde (P_n) dizisi $[a,b]$ aralığının bölüntülerinin bir dizisi olsun. Bu durumda

$$\lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = \alpha = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \int_a^b f(x)dx$$

dir.

Örnek

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + \frac{k}{n}(b-a))$$

olmak üzere $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$ olduğunu gösteriniz. Özel olarak $f \in \mathcal{R}[0,1]$ ise

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ya da daha genel olarak $x_k^* \in \left[\frac{(k-1)}{n}, \frac{k}{n}\right]$ olmak üzere

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k^*\right)$$

dir.

Çözüm

$P_n = \left\{x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 0, 1, ..., n\right\}$ olarak alınırsa istenen hemen elde edilir.

Çözüm

$P_n = \left\{ x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 0, 1, ..., n \right\}$ olarak alınırsa istenen hemen elde edilir.

Örnek

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = ?$

Çözüm

$P_n = \left\{ x_k = a + \frac{k}{n}(b-a) : k = 0, 1, ..., n \right\}$ olarak alınırsa istenen hemen elde edilir.

Örnek

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = ?$$

Çözüm

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \to S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

İntegrallenebilir Fonksiyon Sınıfları

Teorem

$f \in C[a,b]$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir. Tersi doğru değildir.

Teorem

$f \in C[a,b]$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir. Tersi doğru değildir.

$$C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b] \subset B[a,b]$$

İntegrallenebilir Fonksiyon Sınıfları

Teorem

$f \in C[a,b]$ ise $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir. Tersi doğru değildir.

$$C[a,b] \subset \mathcal{R}[a,b] \subset B[a,b]$$

İspat:

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olduğundan $[a,b]$ aralığında düzgün süreklidir. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni x_1, x_2 \in [0,1]$ ve $|x_1 - x_2| < \delta$ iken $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$.
$[a,b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ şartını sağlayan bir P bölüntüsünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$0 \leq M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

yazılabilir.

İspatın Devamı:

O halde

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\triangle x_k \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Riemann integrallenebilirlik şartı sağlandığından f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir.

Teorem

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton ise f fonksiyonu $[a, b]$ aralığında integrallenebilirdir. Tersi doğru değildir.

Teorem

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu monoton ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında integrallenebilirdir. Tersi doğru değildir.

İspat:

$[a,b]$ aralığında artan fonksiyonlar için ispatı yapmak yeterlidir. f azalan ise benzer şekilde ispatlanabilir.
Her $x\in[a,b]$ için $f(a)\le f(x)\le f(b)$ olduğundan f fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sınırlıdır. $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

$$\|P\|<\delta=\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$$

özelliğine sahip $[a,b]$ aralığının keyfi $P=\{x_0,x_1,...,x_n\}$ bölüntüsünü göz önüne alalım. f artan olduğundan

$$M_k=\sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)=f(x_k) \quad \text{ve} \quad m_k=\inf_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)=f(x_{k-1}).$$

$$
\begin{aligned}
U(f,P)-L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\triangle x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(f(x_k)-f(x_{k-1})\right)(x_k-x_{k-1}) \\
&< \delta\sum_{k=1}^{n} f(x_k)-f(x_{k-1}) \\
&= \delta\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon
\end{aligned}
$$

olduğundan f fonksiyonu integrallenebilirdir.

Teorem

$f, g \in B[a, b]$ ve $[a, b]$ aralığında sonlu nokta hariç $f(x) = g(x)$ olsun. Bu durumda

$$L(f) = L(g) \text{ ve } U(f) = U(g)$$

dir. Özel olarak, f fonksiyonunun integrallenebilir olması için g.v.y.k. g fonksiyonunun integrallenebilir olmasıdır.

Teorem

$f, g \in B[a,b]$ ve $[a,b]$ aralığında sonlu nokta hariç $f(x) = g(x)$ olsun. Bu durumda

$$L(f) = L(g) \text{ ve } U(f) = U(g)$$

dir. Özel olarak, f fonksiyonunun integrallenebilir olması için g.v.y.k. g fonksiyonunun integrallenebilir olmasıdır.

İspat:

İspatı sadece $L(f) = L(g)$ için yapacağız. Üst integrallerin eşitliği benzer şekilde gösterilebilir. Hipotez gereği $[a,b]$ aralığında $|f(x)| \leq K$ ve $|g(x)| \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $[a,b]$ aralığında r sayıdaki noktada f ve g fonksiyonları farklı olsun. $n \to \infty$ iken $\|P_n\| \to 0$ olacak şekilde P_n bölüntülerinin dizisini göz önüne alalım. Bu durumda

$$M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \neq M'_k \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} g(x)$$

olacak şekilde en fazla $2r$ alt aralık vardır.

$[x_{k-1}, x_k]$ aralığında $|M_k - M'_k| \leq |M_k| + |M'_k| \leq 2K$ olduğundan

$$|L(f, P_n) - L(g, P_n)| \leq 2rK \|P_n\|$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} |L(f) - L(g)| &\leq |L(f) - L(f, P_n)| + |L(f, P_n) - L(g, P_n)| \\ &\quad + |L(g) - L(g, P_n)| \\ &\leq |L(f) - L(f, P_n)| + 2rK \|P_n\| + |L(g) - L(g, P_n)| \end{aligned}$$

olduğundan $n \to \infty$ iken $L(f) = L(g)$ elde edilir. Bu ispatı tamamlar.

Sonuç

Eğer $f \in B[a,b]$ *fonksiyonu* $[a,b]$ *aralığındaki sonlu sayıda nokta hariç sürekli ise bu durumda* f *fonksiyonu* $[a,b]$ *üzerinde integrallenebilirdir. Özel olarak,* $[a,b]$ *aralığı üzerinde parçalı sürekli ve sınırlı her fonksiyon* $[a,b]$ *üzerinde integrallenebilirdir.*

Belirli İntegralin Temel Özellikleri

Teorem

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun.

(a) *c_1 ve c_2 sabitleri için $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}[a,b]$ ve*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

eşitliği geçerlidir. Bu özelliğe integralin lineerlik özelliği adı verilir.

Teorem

$f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ olsun.

(a) c_1 *ve* c_2 *sabitleri için* $c_1 f + c_2 g \in \mathcal{R}[a, b]$ *ve*

$$\int_a^b [c_1 f(x) + c_2 g(x)]\, dx = c_1 \int_a^b f(x) dx + c_2 \int_a^b g(x) dx$$

eşitliği geçerlidir. Bu özelliğe integralin lineerlik özelliği adı verilir.

(b) $[a, b]$ *üzerinde* $f(x) \leq g(x)$ *ise bu durumda*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

(c) $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ve h fonksiyonu $[m, M]$ üzerinde sürekli ise $[a, b]$ üzerinde tanımlı $\phi(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x))$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Özel olarak

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(c) $x \in [a, b]$ için $m \leq f(x) \leq M$ ve h fonksiyonu $[m, M]$ üzerinde sürekli ise $[a, b]$ üzerinde tanımlı $\phi(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x))$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir. Özel olarak

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

(d) Her $x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ dır.

(c) seçeneğinin bir sonucu olarak aşağıdaki önerme yazılabilir.

Sonuç

$f \in \mathcal{R}\left[a, b\right]$ *ise* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+}$ *için* $\left|f\right|^{\alpha} \in \mathcal{R}\left[a, b\right]$ *dir.*

(c) seçeneğinin bir sonucu olarak aşağıdaki önerme yazılabilir.

Sonuç

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ *ise* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ *için* $|f|^\alpha \in \mathcal{R}[a,b]$ *dir.*

İspat:

$\forall \alpha > 0$ için $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $h(t) = |t|^\alpha$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde sürekli olduğundan bu fonksiyon her $[m, M]$ üzerinde süreklidir. Bu yüzden (c) seçeneği gereği $\phi(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = |f(x)|^\alpha$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem (integraller için alt aralık özelliği)

$f \in B[a,b]$ ve $c \in (a,b)$ olsun.

(a) *$f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise bu durumda $f \in \mathcal{R}[a,c]$ ve $f \in \mathcal{R}[c,b]$ dir. Üstelik*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

eşitliği geçerlidir.

(b) *Eğer $f \in \mathcal{R}[a,c]$ ve $f \in \mathcal{R}[c,b]$ ise bu durumda $f \in \mathcal{R}[a,b]$ dir ve yukarıdaki eşitlik sağlanır.*

Teorem

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Üstelik,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde $|f(x)| \leq K$ ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a)$$

yazılabilir.

Teorem

$f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ olsun. Bu durumda $fg \in \mathcal{R}[a,b]$ ve $|f| \in \mathcal{R}[a,b]$. Üstelik,

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $[a,b]$ aralığı üzerinde $|f(x)| \leq K$ ise

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq K(b-a)$$

yazılabilir.

Sonuç

$f \in \mathcal{R}[a,b]$ ise $f^2 \in \mathcal{R}[a,b]$ dir.

Örnek

$[a, b]$ aralığının aritmetik ve geometrik dizi olacak şekilde birer P bölüntüsü oluşturunuz.

Örnek

$[a, b]$ aralığının aritmetik ve geometrik dizi olacak şekilde birer P bölüntüsü oluşturunuz.

Çözüm

$[a, b]$ aralığının standart parçalanması bir aritmetik dizi oluşturur. $P = \left\{x_k = a + (b-a)\frac{k}{n} : k = 0, 1, ..., n\right\}$ olarak alınırsa $\triangle x = h = \frac{b-a}{n}$, $x_k = a + hk$ genel terimine sahip dizi bir aritmetik dizidir.
Şimdi geometrik dizi olacak şekilde bir P bölüntüsü oluşturalım. $x_0 = a$ ve $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$ olmak üzere $k = 1, 2, ..., n$ için $x_k = ar^k$ genel terimine sahip dizi bir geometrik dizidir. $P = \left\{x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} : k = 0, 1, ..., n\right\}$ bölüntüsü $[a, b]$ aralığının geometrik dizi teşkil edecek şekilde bir bölüntüsüdür. Bu durumda $\triangle x_k = x_k - x_{k-1} = ar^k - ar^{k-1} = ar^{k-1}(r-1)$ dir ve her iki durumda da $n \to \infty$ iken $\|P\| \to 0$ dır.

Örnek

$[a, b]$ aralığının geometrik dizi teşkil eden $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ parçalanmasından yararlanarak $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

$[a, b]$ aralığının geometrik dizi teşkil eden $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ parçalanmasından yararlanarak $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun Riemann integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P = \left\{ x_k = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{k}{n}} : k = 0, 1, ..., n \right\}$ bölüntüsü $[a, b]$ aralığının geometrik dizi teşkil edecek şekilde bir bölüntüsüdür. $r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $x_0 = a$ ve $k = 1, 2, ..., n$ için $x_k = ar^k$ dır. $\triangle x_k = ar^{k-1}(r-1)$ şeklindedir. $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında azalan olduğundan

$$\begin{aligned} m_k &= \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{1}{x_k} = \frac{1}{ar^k} \\ M_k &= \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) = \frac{1}{x_{k-1}} = \frac{1}{ar^{k-1}} \end{aligned}$$

olur.

Buna göre

$$
\begin{aligned}
L(f,P) &= \sum_{k=1}^{n} m_k \triangle x_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{ar^{k-1}(r-1)}{ar^k} \\
&= \frac{r-1}{r} n
\end{aligned}
$$

ve

$$
U(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \triangle x_k = (r-1)\, n
$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} L(f,P) &= \lim_{n\to\infty} \frac{r-1}{r} n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} n \\
&= \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U(f,P) &= \lim_{n\to\infty} (r-1)\, n \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right) n \\
&= \ln \frac{b}{a}
\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{n\to\infty} L(f,P) = \ln \frac{b}{a} = \lim_{n\to\infty} U(f,P)$ olduğundan f Riemann integrallenebilirdir.

Örnek

$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

$g(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & ; \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Çözüm

$P \in \mathcal{P}[0,1]$ olsun. $\inf\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 0$ ve $\sup\limits_{x\in[0,1]} f(x) = 1$ olduğundan $0 \leq L(P,f) \leq U(f,P) \leq 1$ eşitsizliği geçerlidir. Bu nedenle $0 < \varepsilon \leq 1$ için $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $P \in \mathcal{P}[0,1]$ bölüntüsünün varlığını göstermek yeterlidir. $P = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{4}, 1\right\}$ olarak seçilirse

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=1}^{3} (M_k - m_k) \triangle x_k = \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

elde edilir. Riemann koşulu gereği f fonksiyonu integrallenebilirdir. Darboux koşulundan yararlanarak, f fonksiyonunun integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

Örnek

Belirli integral yardımıyla aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

Örnek

Belirli integral yardımıyla aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

Örnek

Belirli integral yardımıyla aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(c) $p \geq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

Örnek

Belirli integral yardımıyla aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

(c) $p\geq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)\cdots 2n}$

Çözüm

(a)

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+n} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}
\end{aligned}
$$

$f(x) = \frac{1}{1+x}$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sürekli olduğundan $f \in \mathcal{R}[0,1]$ dir ve bu nedenle

$$
S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2
$$

elde edilir.

Çözüm

(c)

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} \\ &= \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p \end{aligned}$$

$f(x) = x^p$ fonksiyonu $p \geq 0$ için $[0, 1]$ üzerinde Riemann integrallenebilir olduğundan

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \to S = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{1+p}$$

elde edilir.

Çözüm

$S_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+p)\cdots 2n}$ denilirse

$$\begin{aligned}\ln S_n &= \frac{1}{n}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{p}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]\\ &= \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)\end{aligned}$$

olur. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(1+x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan $f\in\mathcal{R}[0,1]$ dir ve bu nedenle

$$\begin{aligned}\ln S_n &= \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)\to S=\int_0^1 \ln(1+x)dx = 2\ln 2-1\\ \lim_{n\to\infty}\ln S_n &= 2\ln 2-1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = e^{2\ln 2-1}=\frac{4}{e}\end{aligned}$$

elde edilir.

Alıştırma

1. Belirli integral yardımıyla aşağıdaki dizilerin limitlerini hesaplayınız.

   (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}$

Alıştırma

1. Belirli integral yardımıyla aşağıdaki dizilerin limitlerini hesaplayınız.

   (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}$

   (b) $a_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

Alıştırma

1. Belirli integral yardımıyla aşağıdaki dizilerin limitlerini hesaplayınız.

   (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}$

   (b) $a_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

   (c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$

Alıştırma

1. Belirli integral yardımıyla aşağıdaki dizilerin limitlerini hesaplayınız.

   (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}$

   (b) $a_n = \left[\prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$

   (c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$

   (d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$

Alıştırma

1. Belirli integral yardımıyla aşağıdaki dizilerin limitlerini hesaplayınız.
   (a) $a_n = \frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \cdots + \frac{1}{8n}$
   (b) $a_n = \left[\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$
   (c) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3+k^3}$
   (d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$
   (e) $a_n = \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Alıştırma

2. $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \neq 0 \text{ ve } \frac{1}{x} \in \mathbb{Z} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?

Alıştırma

2. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\neq 0 \text{ ve } \frac{1}{x}\in\mathbb{Z} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
3. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ x^2 & ; \quad x\in\mathbb{Q}^c\cap[0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?

Alıştırma

2. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\neq 0 \text{ ve } \frac{1}{x}\in\mathbb{Z} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
3. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ x^2 & ; \quad x\in\mathbb{Q}^c\cap[0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
4. $f:[0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?

Alıştırma

2. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\neq 0 \text{ ve } \frac{1}{x}\in\mathbb{Z} \\ 0 & ; \quad \text{diğer yerlerde} \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
3. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ x^2 & ; \quad x\in\mathbb{Q}^c\cap[0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
4. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; \quad 0<x\leq 1 \\ 0 & ; \quad x=0 \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?
5. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & ; \quad x\in\mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & ; \quad x\in\mathbb{Q}^c\cap[0,1] \end{cases}$ şeklinde tanımlanan fonksiyon $[0,1]$ üzerinde integrallenebilir midir?