Tek Örneklem Binom ve Ki-kare Testleri

Nihat Tak

2023-03-30

Binom Dağılımı

- İki sonuçlu olayların istatistiksel dağılımı Binom Dağılımı olarak adlandırılır.
- Her olay belli sayıda ortaya çıkar ve her durum sayma sayıları ile belirlenir.(Kesikli bir dağılımdır.)
- Bir olayın(ya da deneyin) sonuçlarının binom dağılması için;
  - Yalnızca iki sonuçlu ortaya çıkması gerekir.
  - Her sonucun ortaya çıkma olasılığı, her deneyde sabit kalmalıdır.
  - Her deney bir diğerinden bağımsız olarak gerçekleştirilmelidir.

Yaşamımızdaki çoğu olaylar; olumlu-olumsuz,başarılı-başarısız, hasta-sağlam v.b.şekillerde olup, Binom dağılımına uyan verilerdir.

- Binom dağılımına uyan verileri, oran biçiminde ifade etmek mümkündür.
- Belli bir olayın p oranında gözlemlendiği bir ana kütleden, n birimli bir rassal örneklem çekildiğinde, bu örneklemde de aynı olaya ait gözlenen p oranının; anakütle düzeyinde olup olmadığı Binom testi ile test edilir.

Varsayımlar

- Veriler n kez tekrarlı Bernoulli denemelerinin sonuçlarından elde edilir.
  - Her bir sonuç başarı (p) veya başarısız (q) olarak gerçeklesir.
  - Başarı olayların sayısı verilen bir karakteristiğe sahip sonuçların sayısını gösterir
- n denemeler birbirinden bağımsızdır.
- Denemeden denemeye p olasılığı sabittir.
  - Π ilgilenilen populasyona ait olasılık/frekans
  - p ilgilenilen örnekleme ait olasılık/frekans

Yöntem

- n birimli ve binom dağılımı gösteren bir örneklemde ortaya çıkabilecek başarı – başarısız nitelikli olaylardan birisi x adet gözlenmişse diğeri n-x kez gözlenmiş olur.
- Böylesi denemelerde her olayın ortaya çıkma olasılığı;

- Olayların ortaya çıkışına ilişkin olasılıkları;

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x . q^{n-x}$$

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{x!\,(n-x)!}$$

Adımları

***1. adım**: Hipotezler kurulur*

H0:Örneklem, söz konusu anakütleden çekilmiş bir rassal örneklemdir. H1:Örneklem, söz konusu anakütleden çekilmiş bir rassal örneklem değildir.

Çift yönlü testler: $H1\colon p \neq \pi$

Tek yönlü testler: $H1\colon p < \pi$ veya $H1\colon p > \pi$

***2. adım**: Test istatistiği hesaplanır.*

Belli bir değere kadar elde edilecek frekansların gözlemlenmesi olasılıkları.

$P(X \leq s) = \sum_{i=0}^{s} \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$, s: başarı olaylarının sayısı

***3. adım**: Anlam düzeyi tablo değeri olarak alınır.*

***4. adım**: Karar verilir.*

$P < \alpha$ ise $H0$ reddedilir.

$P > \alpha$ ise $H0$ 'ı reddedecek yeterli kanıtımızı yoktur.

not: Test istatistiği örneklem genişliği n<25 olduğu durumlarda binom dağılıma sahiptir. Örneklem genişliği n>25 olması durumlarında, süreklilik için düzeltme işlemleri yapılır.

Örnek 1. Annenin yaşının ileri olmasının doğacak bebeğin cinsiyetini etkilediği ve ileri yaşta anne olanların daha çok erkek çocuk sahip olduğu biçimindeki öngörüyü irdelemek üzere yapılan bir araştırmada; yaşları 35'in üstünde olan 20 anne adayı izlendi ve bunlardan doğan 20 bebeğin 7'sinin kız olduğu görüldü. Buna göre annenin yaşının çocuğun cinsiyeti üzerinde bir etkisi olup olmadığını araştırınız. (α=0,05)

Çözüm

1.adım: Hipotezler kurulur

$H0\colon p = 1/2$ (Annenin yaşının çocuğun cinsiyeti üzerinde belirleyici bir etkisi yoktur.)

$H1\colon p \neq 1/2$ (Doğan çocuklardan kızların oranı erkeklerin oranından farklıdır.)

2.adım: Test istatistiği hesaplanır

$$P(X<7)=\sum_{i=0}^{7}\binom{20}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{20-i}=0.13158$$

$$P(x=0)=0{,}0000009536$$

$$P(x=1)=0.00002$$

….

$$P(x=7)=0.07392883$$

veya n=20 ve x=7 değerlerinin Binom Test Tablosundan kesişim yerinde okunan olasılık değeri : p=0,132 olarak bulunur.

3.adım: Kritik değer soruda belirlenen α değeridir.

4.adım: Karar verilir.

$n=20$ ve $x=7$ değerlerinin Binom Test Tablosundan kesişim yerinde okunan olasılık değeri : $p=0{,}132$

$p=0{,}132>\alpha=0.05$ H0'ı red edemiyoruz..Annenin yaşının doğacak bebeğin cinsiyetini etkileyen bir etken olduğu hususunda istatistiksel bir dayanak bulamadığımızı söyleyebiliriz.

```
binom.test(7,20,p=0.05,alternative="less")

##
##  Exact binomial test
##
## data:  7 and 20
## number of successes = 7, number of trials = 20, p-value = 1
## alternative hypothesis: true probability of success is less than 0.05
## 95 percent confidence interval:
##  0.0000000 0.5580345
## sample estimates:
## probability of success
##                   0.35
```

$n>25$ *Olan Örneklemler için*

- n değeri büyüdükçe n >30 ve p=q ya da ½ yakın değerler olması halinde, Binom dağılımı normal dağılıma yaklaşır.
- Binom dağılımı kesikli bir dağılım,
- Normal dağılım ise sürekli bir dağılım olduğundan,

Binom dağılımından Normal dağılıma geçiş için x değerlerinin sürekli forma dönüştürülmesi, işlemi daha sağlıklı kılar. Binom dağılımından Normal dağılıma geçiş içinx değerlerinin sürekli forma dönüştürülmesi x değerlerine 0,5 sayısı eklenip çıkartılarak, her x değerinin –0,5 ve +0,5 gibi birer aralık içine almak yeterli olur.

$x < \mu_x = np$ ise $x + 0.5$

$x > \mu_x = np$ ise $x - 0.5$

Böylece hesaplanacak z değeri için

$$Z = \frac{(x +/{-0.5}) - np}{\sqrt{npq}}$$

Z tablosundan elde edilecek p değeri ile testin anlam düzeyi α karşılaştırılır. p< α ise H0 red edilir.

Örnek 3. 1969-1970 yılları arasında Georgia eyaletinde göz altına alınan suçluların %56'sı 25 yaşından daha gençtir. Yapılan bir araştırmada 50 suçludan 23 tanesi, 25 yaşından daha genç olduğu saptanmıştır. Bu verilerle kitlede göz altına alınan suçlularda 25 yaşın altında olanların oranının %56 'dan daha küçük olduğu söylenebilir mi? ($\alpha = 0.05$)

1. Adım Hipotezler kurulur.

$H0: p \geq$ 0,56 (25 yaşından genç olan suçluların oranı 0,56 dan büyüktür.)

$H1: p <$ 0,56 (25 yaşından genç olan suçluların oranı 0,56 dan küçüktür.)

2. Adım Test istatiği hesaplanır.

$$n.p = 50 * 0{,}56 = 28$$

$X = 23 < 28$ olduğundan 0,5 eklenir.

$$P(x \leq 23) = P\left(z \leq \frac{(23 + 0.5) - 50 * 0.56}{\sqrt{50 * 0.56 * 0.44}}\right)$$

P(z)=0.1003

3.adım: Kritik değer soruda belirlenen α değeridir.

veya tablodan z_α değeri bulunur. $z_{0.05} = 1.645$

4.adım Karar verilir.

$$p = 0{,}1003 > \alpha = 0.05$$

veya $z_{hes} = -1.282 < z_{0.05} = -1.645$ olduğundan H0 'ı red edecek yeterli kanıt bulunamamıştır, kitlede 25 yaşından daha genç suçluların oranının %56 ve daha fazla olduğu söylenebilir.

n	x	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
20	0	0.358	0.122	0.039	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
	1	0.736	0.392	0.176	0.069	0.024	0.008	0.002	0.001	0.000	0.000
	2	0.925	0.677	0.405	0.206	0.091	0.035	0.012	0.004	0.001	0.000
	3	0.984	0.867	0.648	0.411	0.225	0.107	0.044	0.016	0.005	0.001
	4	0.997	0.957	0.830	0.630	0.415	0.238	0.118	0.051	0.019	0.006
	5	1.000	0.989	0.933	0.804	0.617	0.416	0.245	0.126	0.055	0.021
	6	1.000	0.998	0.978	0.913	0.786	0.608	0.417	0.250	0.130	0.058
	7	1.000	1.000	0.994	0.968	0.898	0.772	0.601	0.416	0.252	0.132
	8	1.000	1.000	0.999	0.990	0.959	0.887	0.762	0.596	0.414	0.252
	9	1.000	1.000	1.000	0.997	0.986	0.952	0.878	0.755	0.591	0.412
	10	1.000	1.000	1.000	0.999	0.996	0.983	0.947	0.872	0.751	0.588
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.995	0.980	0.943	0.869	0.748
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.994	0.979	0.942	0.868
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.979	0.942
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994	0.979
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.998	0.994
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

28.03.2023 30

```r
zDonusum<-function(x,mu,std)
{
  (x-mu)/std
}

binomTest<- function(x,n,p=0.05,alternative=c("two.sided","less","greater"))
{
  if (n>=25)
  {
    if (alternative=="less")
    {
    mu=n*p
    std<-sqrt(n*p*(1-p))
    if(x<mu) x<-x+0.5 else z<-x-0.5
    z= zDonusum(x,mu,std)
    pvalue=pnorm(z)
    }
  return(list(z=z,pdegeri=pvalue))
  }
  if (n<25)
  {
    binom.test(x,n,p,alternative="less")

  }
```

```
}
binomTest(7,20,p=0.05,alternative="less")

##
##  Exact binomial test
##
## data:  x and n
## number of successes = 7, number of trials = 20, p-value = 1
## alternative hypothesis: true probability of success is less than 0.05
## 95 percent confidence interval:
##  0.0000000 0.5580345
## sample estimates:
## probability of success
##                   0.35

binomTest(23,50,0.56,alternative="less")

## $z
## [1] -1.282056
##
## $pdegeri
## [1] 0.09991142
```

Tek Örneklem Ki-kare(Chi-Square) Testi

Ki–Kare dağılımı ilk olarak 1900'lü yıllarda Pearson tarafından ortaya atılmıştır. Ki-Kare dağılımı oldukça yaygın olarak ve bir çok maksatla kullanılan bir dağılımdır. Çoğu araştırmada çeşitli kategorilere giren deneklerin, nesnelerin veya cevapların sayısı ile ilgilenilir.

Örneğin, bir grup insan belli bir anketin sorularına verdikleri cevaplara göre sınıflandırılabilirler. Araştırmacı belli bir tip cevabın diğerlerine kıyasla daha sık ortaya çıkıp çıkmayacağını belirlemek isteyebilir. Bu gibi durumlarda ve özellikle de sayımla belirlenen kalitatif özelliklerle ilgili testlerde daha çok Ki-Kare testi kullanılır. - Ki-Kare dağılımı; uygunluk, bağımsızlık, varyans, homojenlik ve bağımlı grupların testinde oldukça sık kullanılır.

- Ki-Kare uyum iyiliği testi, tek değişkeni kategorilerine ayırarak, beklenen ve gözlenen frekansları arasındaki farkı temel alan ki-kare değerini hesaplar.
- Ki-kare uyum iyiliği testi örneklemdeki gruplar içindeki beklenen ve gözlenen frekansları karşılaştırmada kullanılır. Yani; gözlenen sonuçların beklenen sonuçlardan farklı olup olmadığını inceler.Beklenen sonuçlar tüm kitleden hareketle veya teorik değerden hareketle bulunabilir.

Varsayımları

- Veriler, n bağımsız gözlemlerden oluşan rassal örneklemi oluşturur.
- Her türlü ölçekteki verilere uygulanabilir.

- Gözlemler, çakışmayan r olası kategorinin sınıflandırılmasından oluşur; kategoriler karşılıklı ayrıktır. Belirli bir kategoriye düşen gözlemlerin sayısı o kategorinin gözlenen frekansı olarak adlandırılır.

Kategoriler	1	2	3	…	i	…	r	Toplam
Gözlenen frekanslar	O_1	O_2	bu bilgisayar konumuna kaydedildi			…	O_r	n

- Kategoriler sayısal ya da nominal olarak gösterilebilir. Örneğin bir birim iki kategoriden birinde gösterilebilir; kadın, erkek..
- Eğer yaş ile ilgileniyorsak, örnek bu kategorilerden herhangi birinde yer alabilir; bu kategoriler 0-15;15-24;25-34;34,- şeklinde olabilir.

Adımları

1. Adım Hipotezler kurulur.

H_0: Örneklem, belirlenmiş bir dağılımdan gelen kitleden çekilmiştir.

H_1: Örneklem, belirlenmiş bir dağılımdan gelen kitleden çekilmemiştir.

not: Alternatif hipotez, doğru dağılımın hipotez dağılımdan ne kadar farklı olduğunu söylememektedir.

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

- Her kategori için, iddia edilen kitleden rassal çekilmiş bir gözlemin o kategoriye düşme olasılığı vardır.
- Her kategori için 1,2, … , i, … , r, bu olasılıkları p_1,p_2,…,p_r şeklinde tasarlayabiliriz.
- H_0 hipotezinin doğru olduğu varsayımı altında her kategori için beklenen frekansı n ile o kategorinin olasılığını çarparak elde edebiliriz. Örneğin np_1, np_i ve np_r, H_0 altında 1, i ve r. kategoriler için beklenen frekanslardır.
- Kitleden çekilen rassal örneklemlerin kitlenin karakteristiklerini yansıtmasını bekleriz.
- İlgilendiğimiz kitleden çektiğimiz örneklemin beklenen ve gözlenen frekanslarının çeşitli kategoriler için birbirine çok yakın olmasını bekleriz.
- Eğer H_0 hipotezi doğruysa beklenen ve gözlenen değerler birbirine çok yakındır.
- Beklenen ve gözlenen ölçütlerin yakınlığı konusunda karar verebilmek üzere bir test istatistiği hesaplanmaktadır.

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.

- Ki-Kare uygunluk testi sağ kuyruk testidir. Çünkü, Ei - Oi farklarının kareleri alınarak test istatistiği hesaplanır. Fark büyüdükçe, farkların kareleri pozitif yönde sonsuza doğru büyür. Böylece red bölgesi daima dağılımın sağ kuyruğunda olur.
- Kritik değer alfa önem seviyesi ve s.d = r-1-m göre hazırlanmış ki-kare kritik değerler tablosundan belirlenir.
- Burada r değişkene ait kategori sayısını gösterir. Bu sebeple, kritik değer, $\chi^2_{\alpha,r-1}$ şeklinde belirlenir.

4. Adım Karar verilir.

- Test istatistiğinde hesaplanan değer ile kritik değer mukayese edilerek karar verilir.
- $\chi^2_{hesap} < \chi^2_{\alpha,r-1}$ ise, H_0 hipotezi kabul edilerek gözlenen değerlerle beklenen değerlerin birbirine (o_i 'lerin e_i 'lere) uygun olduğuna, görülen farklılığın önemsiz olduğuna α önem seviyesinde karar verilir.

Örneklem Genişliği

- Test istatistiği χ^2 eğer n büyükse yaklaşık ki-kare dağılıma sahiptir.
- Örneklem genişliğinin en az 30 olması bir çok uygulamada yeterli kabul edilmiştir.
- Hiçbir beklenen frekansın 1'den küçük olmaması beklenir.
- Eğer 1'den küçük bir frekans varsa, komşu kategoriyle birleştirilir.
- Bu durumda serbestlik derecesinin yeniden hesaplanması gerekebilir.

Örnek 1. Bir araştırma şirketi, farklı ırk ve etnik kökenlerden gelmiş insanların aynı ya da benzer etnik gruplardan olan kişilerden danışmanlık almayı tercih edip etmediği konusunda yapılan bir araştırmayı rapor halinde yayımlar. Bir eğitim programına dahil olan 36 stajyer üzerinde yapılan bu araştırmada, stajyerlerin zenci erkek, kuzeyli beyaz erkek, Apaçili kadın, kuzeyli beyaz kadın, zenci kadın ve Apaçili erkek olan danışmanlar arasından seçim yapmalarını isterler.

Danışman Seçimi	Beklenen Frekanslar	Gözlenen Frekanslar
Siyah Erkek	6	13
Kuzeyli Beyaz Erkek	6	6
Apaçili kadın	6	0
Kuzeyli beyaz kadın	6	3
Siyah kadın	6	11
Apaçili erkek	6	3
Total	36	36

Çözüm

1.adım Hipotezler kurulur.

H_0 : Uygun olan herhangi bir danışmanın tercih edilmesi (kitlenin dağılımı tekdüze)

H_1 : En az bir uygun danışmanın diğerine göre tercih edilmesi (dağılım tekdüze değil)

2. Adım Test istatistiği hesaplanır.

Bütün danışmanların eşit tercih edildiği H_0 hipotezi alında p_i, bütün kategoriler için aynı ve $p_i = 1/6$

$$\chi^2_{hesap} = \frac{(13-6)^2}{6} + \frac{(6-6)^2}{6} + \ldots + \frac{(3-6)^2}{6} = 21.33$$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur. r-1=6-1=5'lük serbestlik derecesine sahibiz.

$\chi^2_{0.05,6-1} = 11.07$ 'dir.

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hesap} = 21.33 > 11.07 = \chi^2_{0.05,5}$ olduğundan H_0 reddedilir.

```
### İyilik uyum testi
g<-c(13,6,0,3,11,3)
fit <- chisq.test(g)
fit

##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  g
## X-squared = 21.333, df = 5, p-value = 0.0007006

kikaretest<- function(g,alpha)
{
  b<-mean(g)
  kiHesap<-sum((g-b)^2/b)
  kiTablo<-qchisq(1-alpha, (length(g)-1), lower.tail=TRUE)
  pvalue<- 1-pchisq(kiHesap,(length(g)-1))
  return(list=c(testİstatistik=kiHesap,tabloDegeri=kiTablo,pdegeri=pvalue))
}
round(kikaretest(g,0.05),7)

## testİstatistik    tabloDegeri        pdegeri
##     21.3333333     11.0704977      0.0007006
```

Örnek 2. Cinayet davaları, hakimler kurulu tarafından 4 ayrı ceza mahkemesine rassal olarak atanmaktadır. Ateşli silahla işlenen 896 cinayet davası için yapılan atamalar, senelik gözlenen frekanslar şekliyle tabloda verilmektedir. Her bir mahkeme için yapılan atamaların rassal olup olmadığına karar veriniz.

	Ayrı Mahkemeler			
Gözlenen	225	264	211	196
Beklenen	224	224	224	224

1.Adım** Hipotezler kurulur.

H_0 : Yapılan atamalar rassaldır.

H_1 : Yapılan atamalar rassal değildir.

2.Adım Test istatistiği hesaplanır. Toplam durum 896, Eğer rassal olarak atanmışsa (896 / 4) = 224 durum her mahkemeye atanmıştır. (Beklenen frekans) $\chi^2_{hesap} = \frac{(225-224)^2}{224} + \frac{(264-224)^2}{224} + \frac{(211-224)^2}{224} + \frac{(196-224)^2}{224} = 11.40$

3. Adım Kritik tablo değeri bulunur.$r - 1 = 4 - 1 = 3$ serbestlik derecesine sahip olduğumuzdan tablo değeri $\chi^2_{0.05,3} = 7.815$ olarak bulunur.

4. Adım Karar verilir.

$\chi^2_{hesap} = 11.40 > 7.815 = \chi^2_{0.05,3}$ olduğundan H_0 reddedilir.

```
### İyilik uyum testi
g<-c(225,264,211,196)
fit <- chisq.test(g)
fit

##
##  Chi-squared test for given probabilities
##
## data:  g
## X-squared = 11.402, df = 3, p-value = 0.00974

g<-c(225,264,211,196)

kikaretest<- function(g,alpha)
{
  b<-mean(g)
  kiHesap<-sum((g-b)^2/b)
  kiTablo<-qchisq(1-alpha, (length(g)-1))
  pvalue<- 1-pchisq(kiHesap,(length(g)-1))
  return(list=c(testİstatistik=kiHesap,tabloDegeri=kiTablo,pdegeri=pvalue))
}
kikaretest(g,0.05)

## testİstatistik    tabloDegeri        pdegeri
##   11.401785714    7.814727903    0.009740321
```

TABLE C: χ^2 CRITICAL VALUES

	Tail probability p										
df	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.02	.01	.005	.0025	.001
1	1.32	1.64	2.07	2.71	3.84	5.02	5.41	6.63	7.88	9.14	10.83
2	2.77	3.22	3.79	4.61	5.99	7.38	7.82	9.21	10.60	11.98	13.82
3	4.11	4.64	5.32	6.25	7.81	9.35	9.84	11.34	12.84	14.32	16.27
4	5.39	5.99	6.74	7.78	9.49	11.14	11.67	13.28	14.86	16.42	18.47
5	6.63	7.29	8.12	9.24	11.07	12.83	13.39	15.09	16.75	18.39	20.51
6	7.84	8.56	9.45	10.64	12.59	14.45	15.03	16.81	18.55	20.25	22.46
7	9.04	9.80	10.75	12.02	14.07	16.01	16.62	18.48	20.28	22.04	24.32
8	10.22	11.03	12.03	13.36	15.51	17.53	18.17	20.09	21.95	23.77	26.12
9	11.39	12.24	13.29	14.68	16.92	19.02	19.68	21.67	23.59	25.46	27.88
10	12.55	13.44	14.53	15.99	18.31	20.48	21.16	23.21	25.19	27.11	29.59
11	13.70	14.63	15.77	17.28	19.68	21.92	22.62	24.72	26.76	28.73	31.26
12	14.85	15.81	16.99	18.55	21.03	23.34	24.05	26.22	28.30	30.32	32.91
13	15.98	16.98	18.20	19.81	22.36	24.74	25.47	27.69	29.82	31.88	34.53
14	17.12	18.15	19.41	21.06	23.68	26.12	26.87	29.14	31.32	33.43	36.12
15	18.25	19.31	20.60	22.31	25.00	27.49	28.26	30.58	32.80	34.95	37.70
16	19.37	20.47	21.79	23.54	26.30	28.85	29.63	32.00	34.27	36.46	39.25
17	20.49	21.61	22.98	24.77	27.59	30.19	31.00	33.41	35.72	37.95	40.79
18	21.60	22.76	24.16	25.99	28.87	31.53	32.35	34.81	37.16	39.42	42.31
19	22.72	23.90	25.33	27.20	30.14	32.85	33.69	36.19	38.58	40.88	43.82
20	23.83	25.04	26.50	28.41	31.41	34.17	35.02	37.57	40.00	42.34	45.31
21	24.93	26.17	27.66	29.62	32.67	35.48	36.34	38.93	41.40	43.78	46.80
22	26.04	27.30	28.82	30.81	33.92	36.78	37.66	40.29	42.80	45.20	48.27
23	27.14	28.43	29.98	32.01	35.17	38.08	38.97	41.64	44.18	46.62	49.73
24	28.24	29.55	31.13	33.20	36.42	39.36	40.27	42.98	45.56	48.03	51.18
25	29.34	30.68	32.28	34.38	37.65	40.65	41.57	44.31	46.93	49.44	52.62
26	30.43	31.79	33.43	35.56	38.89	41.92	42.86	45.64	48.29	50.83	54.05
27	31.53	32.91	34.57	36.74	40.11	43.19	44.14	46.96	49.64	52.22	55.48
28	32.62	34.03	35.71	37.92	41.34	44.46	45.42	48.28	50.99	53.59	56.89
29	33.71	35.14	36.85	39.09	42.56	45.72	46.69	49.59	52.34	54.97	58.30
30	34.80	36.25	37.99	40.26	43.77	46.98	47.96	50.89	53.67	56.33	59.70
40	45.62	47.27	49.24	51.81	55.76	59.34	60.44	63.69	66.77	69.70	73.40
50	56.33	58.16	60.35	63.17	67.50	71.42	72.61	76.15	79.49	82.66	86.66
60	66.98	68.97	71.34	74.40	79.08	83.30	84.58	88.38	91.95	95.34	99.61
80	88.13	90.41	93.11	96.58	101.9	106.6	108.1	112.3	116.3	120.1	124.8
100	109.1	111.7	114.7	118.5	124.3	129.6	131.1	135.8	140.2	144.3	149.4