Das totale (vollständige) Differential: Eine Methode zur Fehlerschätzung und Umgang mit Variationen in Funktionen

Das totale (vollständige) Differential

$$df = \frac{\delta f}{\delta x} dx + \frac{\delta f}{\delta y} dy$$

dx, dy, dz (oder df) … “kleine” Abschnitte in die jeweilige Richtung
df … Gesamtänderung, wenn sich x und y “ein bisschen” ändern (grafisch Buch S. 41)

Anwendung: Fehlersuchung (wenn mehrere Variablen schwanken)

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{maximaler Gesamtfehler}} \approx \left| \frac{\delta f}{\delta x} * \Delta x \right| + \left| \frac{\delta f}{\delta y} * \Delta y \right|$$

Bsp. Buch S. 42 $\rightarrow$ grauer kasten 2.52

Bsp von 2.10.2024

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Δs und Δt schwanken jeweils um 0.5%.
?Auswirkung auf v?

$\frac{\delta v}{\delta(\Delta s)} = \frac{1}{\Delta t}$
$\frac{\delta v}{\delta(\Delta t)} = \Delta s(-1 * (\Delta t)^{-2}) = -\frac{\Delta s}{(\Delta t)^{-2}}$

relativer Fehler $\frac{\Delta v}{v_0}$

$$\Delta v = \left| \frac{1}{\Delta t} * \Delta(\Delta s) \right| + \left| -\frac{\Delta s}{(\Delta t)^2} * \Delta(\Delta t) \right|$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\frac{1}{\Delta t} * \Delta(\Delta s)}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} + \frac{\frac{\Delta s}{(\Delta t)^2} * \Delta(\Delta t)}{\frac{\Delta s}{\Delta t}} =$$

$$= \frac{1}{\Delta t} * \Delta(\Delta s) * \frac{\Delta t}{\Delta s} + \frac{\Delta s}{(\Delta t)^2} * \Delta(\Delta t) * \frac{\Delta t}{\Delta s}$$

$$= \frac{\Delta(\Delta s)}{\Delta s} + \frac{\Delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

$$= 0.5\% + 0.5\% = \underline{\underline{1\%}}$$

Bsp.: Buch S. 42, 2.57

$U = 2h + 2r + \pi * r$

$$\frac{\delta u}{\delta)} = 2 + \pi$$

$$\frac{\delta u}{\delta h} = 2$$

$$\implies \Delta U = |(\pi + 2) * 0.3| + |2 * 0.2| = 1.94m$$

$$U_0 = 4.6 * \pi + 18.4 * 2 + 4.6 * 2 = 60.45m$$
$$U = 60.45 \pm 1.94m$$

Übbung:

Entwickle $y = ln(1 + x)$ in eine TR und gib eine Formel an, mit der man ln({0.5, 1.5, 3}) näherungsweise ermitteln kann.

gewählter punkt: 0

$$f(x) = a_0 * x^3 + a_1 * x^2 + a_2 * x + a_3$$

$$y = ln(1 + x) = ln(1 + 0) = a_0 * 0 + a_1 + 0 + a_2 * 0 + a_3 = a_3$$
$$\implies a_3 = 0$$

$$y' = \frac{1}{1 + x} = \frac{1}{1 + 0} = 3a_0^2 * 0 + 2a_1 * 0 + a_2 = 0 + 2a_2 + 0$$
$$\implies a_2 = \frac{1}{2}$$

$$y'' = -1 * (1 + x)^{-2} * 1 = -1 * 1^{-2} = 6a_0 * 0 + 2a_1$$
$$\implies a_1 = \frac{-2}{2} = -1$$