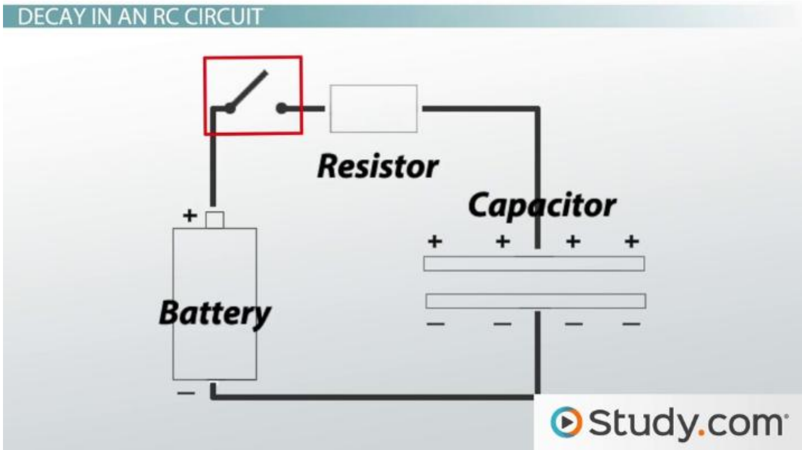
Differentialgleichungen



Maschenregel

$$-U_0 + R \circ i + \underbrace{U_C}_{U_C = \frac{q}{C}}$$

$$-U_0 + R \circ C \circ U_C'(t) + U_C(t) = 0 \text{ und } U_C(t)$$

$$\text{Näherung } U_C' \approx \frac{\Delta U_C}{\Delta t} \approx \frac{U_{C_{n+1}} - U_{C_n}}{\Delta t}$$

Beispiel

$$U_0 = 5$$
$$\Delta t = 0.1$$
$$RC = 1$$

ggb $\implies$ Tabelle

Radioaktiver Zerfall

$$\frac{dN_{(t)}}{dt} = c * N_{(t)}$$

homogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung (max erste Ableitung) (mit konstanten Koeffizienten)

Fall:

$$m * \frac{d^2}{dt^2} = m * g - k * \left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Dgl - Differentialgleichung

Die Lösung von Differentialgleichung hängt von der Art der Differentialgleichung ab, daher gibt es einige Begriffe zur Klssifizierung

- homogen
  - es sind Summanden enthalten, die die gesuchte Funktion enthalten
- inhomogen

- es gibt zusätzlich ein Störglied (= Teil, der die gesuchte Funktion NICHT enthält)

- Ordnung der Differentialgleichung
    - höchste vorkommende Ableitung
- linear | nichtlinear
- mit Konstanten / variablen Koeffizienten

1. Ordnung

Viele Differentialgleichungen lassen sich mit Hilfe von Seperation (= “Trennung der Variablen”) lösen (**alle**) homogenen und manche inhomogene

z.B: $y' = \frac{x}{y}$
Sep:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\int \frac{1}{y} * dy = \int \frac{1}{x} * dx$$

$$\ln(|y|) = \ln(|x|) + c$$

$$|y| = e^{\ln(|x|)} + c = e^{c} * e^{\ln(|x|)} = \tilde{c} * |x|$$

Allgemeine Lösung

$y = \underbrace{c}_{\text{offene Konstante}} * x \text{ (für } x \geq 0)$

falls man eine Zusatzinformationen hat, z.B. dass P(3|4) auf den Graf liegen soll, ergibt sich daraus die “spezielle Lösung”
$4 = c * 3 \implies c = \frac{4}{3}$
$\implies y_s = \frac{4}{3} * x$

Buch S. 98

4.53a

$$y' + 6y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -6y$$

$$\frac{1}{y} * dy = -6 * dx$$

$$\int \frac{1}{y} * dy = \int -6 * dx$$

$$\ln(|y|) = -6x + c$$

$$|y| = e^{-6x+c} = e^c * e^{-6x}$$

$$|y| = \tilde{c} * e^{-6x}$$

4.57 a

Trick:
$y' = 3 - 0.5y$
Dividiere durch die ganze rechte seite (und *dx)

$$y' + 0.5y = 3; \; y_0 = -1$$

$$y' = 3 - 0.5y$$

$$\frac{dy}{3 - 0.5y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{3 - 0.5y} = \int 1 * dx$$

$$(\frac{-1}{0.5}) \ln(3 - 0.5y) = x + c$$

HÜ: foto von lilo

WH

$$y' + 3y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -3y$$
$$\int \frac{1}{y} dy = \int -3dx$$
$$\ln(|y|) = -3x + c$$
$$y = e^{-3x+c} = \underbrace{\tilde{c}}_{>0} * e^{-3x}$$

WH

direkt proportional: $y = k * x$
indirekt poportional: $y = c * \frac{1}{x}$

Übung

BS 84

4.8

Die Steigung der Tangente an eine Funktion is in jedem Punkt p(x|y)

a)

gleich dem Quadrat der x-Koordinate

$$f'(x) = x^2$$
$$f(x) = \int x^2 = \frac{x^3}{3} + C$$

d)

$$f'(x) = \frac{1}{x * y}$$

4.6)

buch

4.10a)

Beim freien Fall im Vakuum ist die Änderung der Geschwindigkeit v in Abhängigkeit von der Höhe h indirekt proportional zur Wurzel aus der Höhe.

$$\frac{dv}{dh} = \frac{k}{\sqrt{h}}$$

4.10b)

Wird eine Wachsschicht der Dicke d gleichmäßig erwärmt, so ist die Änderung der Dicke mit der Zeit direkt proportional zur momentanen Wachsdichte.

$$\frac{dr}{dt} = k * r$$

4.10c)

Die Änderung des Dampfdrucks p mit der Temperatur T ist für eine bestimmte Substanz direkt proportional zum Dampfdruck und indirekt proportional zum Quadrat der Temperatur.

$$\frac{dp}{dT} = k * \frac{p}{T^2}$$

Beispiel

Änderung der Anzahl von Kernen mit der Zeit ist proportional zur Anzahl.

a)

Dgl = $\frac{dN}{dt} = kN$

b)

allgemeine Lösung für anfangs N_0 Kerne

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$
$$ln(N) = k * t + C$$
$$N_{(t)} = \tilde{c} * e^{k*t}$$
$$N_{(0)} = N_0 = \tilde{c} * 1 \implies N_{(t)} = N_0 * e^{k*t}$$

c)

spezielle Lösung für HWZ = 5370

$$Hwz \implies \frac{N_0}{2} = N_0 * e^{k*5370} \implies k = \frac{\ln(0.5)}{5370} = -0.00029$$

Heizungstechnik

a)

In einem bestimmten Zimmer steigt nach dem Einschalten der Heizung die Temperatur T an. Der Verlauf der Temperatur T kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{dT}{dt} = a * (b - T)$$
$$t\text{... Zeit nach dem Einschalten der Heizung in min}$$
$$T(t)\text{... Temperatur im Zimmer zur Zeit t in }^\circ\text{C}$$
$$a, b\text{... Parameter}$$

a1)

Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an. (einfach störungsglied wecklassen)

$$\frac{dT}{dt} = a * b - a * T$$
$$\frac{dT}{dt} = -a * T$$

a2)

es wurde bereits ein speziefischer Wert eingesetzt.

$$T_n = c * e^{-\frac{t}{10}} \implies a = ?$$

$$\frac{dT}{dt} = -a * T$$
$$\int \frac{1}{T}\, dT = \int -a\, dt$$
$$\ln(T) = -a * t + c$$
$$T_n = e^{-a*t} * \tilde{c}$$

wird dies nun mit der Aufgabenstellung verglichen, eribt sich:

$$a = \frac{1}{10}$$

4.18

$$s''(t) = a$$
$$a = 0.5$$
$$v_0 = 1$$
$$s_0 = 2$$

1x Integrieren

$$s' = 0.5 * t + c = 0.5 * t + v_0$$

2x Integrieren

$$s = \frac{0.5 * t^2}{2} + v_0 * t + s_0 = 0.25t^2 + t + 2$$

b)

$$a = 0$$
$$v_0 = 15$$
$$s_0 = 120$$

$$s' = \int a\, dt = 0 + c = 15$$
$$s = \int s'\, dt = 15 * t + 120$$

HÜ:

1x von S.87
1x von S.88-92