



به نام خدا
دانشگاه تهران
دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر



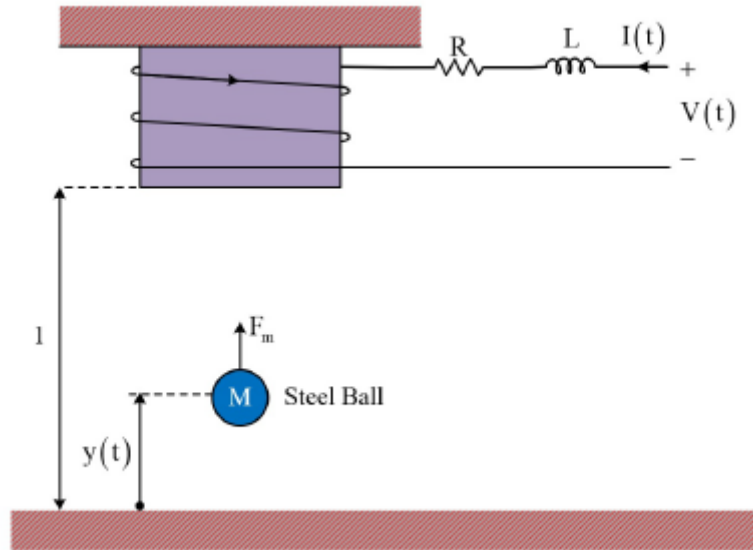
درس سیستم های کنترل دیجیتال پروژه

| | |
|--------------------|--------------------------------|
| نام و نام خانوادگی | نیما زمان پور – فاطمه نائینیان |
| شماره دانشجویی | 810198479 – 810198407 |
| تاریخ ارسال گزارش | 1402.04.16 |

فهرست

| | |
|----|-----------|
| 3 | خواسته 1 |
| 5 | خواسته 2 |
| 7 | خواسته 3 |
| 9 | خواسته 4 |
| 11 | خواسته 5 |
| 12 | خواسته 6 |
| 14 | خواسته 7 |
| 16 | خواسته 8 |
| 17 | خواسته 9 |
| 18 | خواسته 10 |
| 20 | خواسته 11 |

خواسته ۱



| R | L | g | c | m | f_v |
|-------------|-----------|----------------------|------------------------|----------------|-------------------------|
| $5[\Omega]$ | $0.02[H]$ | $9.8[\frac{m}{s^2}]$ | $0.3[\frac{N.m}{A^2}]$ | $(100 + a)[g]$ | $0.02[\frac{N.s}{m}]$ |

$$a = 9$$

$$\begin{cases} F_m = c \frac{I^2}{1 - y} \\ m\ddot{y} = -mg - f_v\dot{y} + F_m \\ V = RI + LI\dot{I} \end{cases}$$

$$y_d = 0.3 + 0.09 = 0.39$$

$$x_1 = y, \quad \dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}, \quad \dot{x}_2 = -g - \frac{f_v x_2}{m} + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{1 - x_1} = \ddot{y}, \quad \dot{x}_3 = \frac{1}{L}(-Rx_3 + V) = \dot{I}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g - \frac{f_v x_2}{m} + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{1 - x_1} \\ \dot{x}_3 = \frac{1}{L}(-Rx_3 + V) \\ x_1 = y \end{cases}$$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ -g - \frac{f_v x_2}{m} + \frac{c}{m} \frac{x_3^2}{1 - x_1} = 0 \rightarrow x_3 = \sqrt{\frac{gm}{c}}(1 - x_1) \\ \frac{1}{L}(-Rx_3 + V) = 0 \rightarrow V = Rx_3 \end{cases}$$

$$y_d = 0.39 \rightarrow x_1 = 0.39 \rightarrow x_2 = 0 \rightarrow x_3 = \pm 46.6 \rightarrow V = \pm 233$$

خطی سازی حول نقطه تعادل

$$\dot{x}' = A'x' + B'u \rightarrow x' = x - x^*$$

$$y' = C'x' + Du \rightarrow y' = y - y^*$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{c}{m} \frac{x_3^{*2}}{(1-x_1^*)^2} & -\frac{f_v}{m} & \frac{c}{m} \frac{2x_3^*}{1-x_1^*} \\ 0 & 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & -1.8 * 10^{-4} & 0.42 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0],$$

$$D = 0$$

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & -1.8 * 10^{-4} & 0.42 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} u', \quad x' = \begin{bmatrix} x_1 - 0.39 \\ x_2 \\ x_3 - 46.6 \end{bmatrix}, u' = (u - 233)$$

$$y' = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 - 0.39 \\ x_2 \\ x_3 - 46.6 \end{bmatrix}, \quad y' = y - 0.39$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = -\frac{21.03}{s^3 + 250s^2 - 16s - 4016}$$

سیستم یک قطب مثبت دارد. پس پاسخ پله آن ناپایدار است.

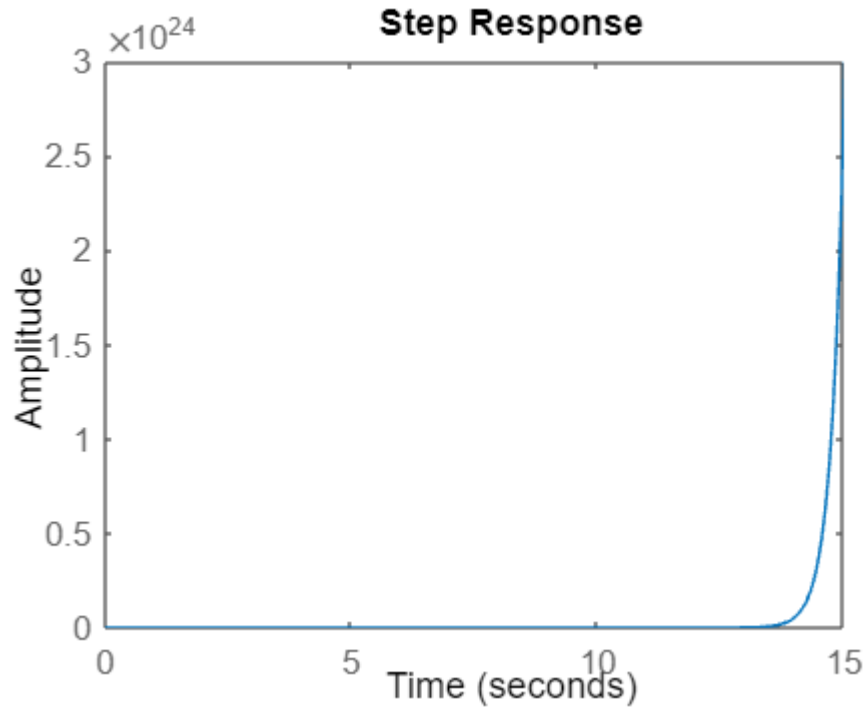


Figure 1 پاسخ پله سیستم

به کمک ابزار PID Tuner یک کنترلر PID طراحی می‌کنیم. ضرایب کنترلی بصورت زیر است:

$$G_c = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d * \frac{N}{1 + \frac{N}{s}} = 48 + \frac{74}{s} + K_d * \frac{7.87}{1 + \frac{N}{s}}$$

با اضافه کردن کنترلر در حلقه فیدبک پاسخ پله و مشخصات آن بصورت زیر در می‌آید:

```
ans = struct with fields:
    RiseTime: 0.0585
    TransientTime: 0.9965
    SettlingTime: 0.9965
    SettlingMin: 0.9006
    SettlingMax: 1.2617
    Overshoot: 26.1677
    Undershoot: 0
    Peak: 1.2617
    PeakTime: 0.2140
```

Figure 2 مشخصات پاسخ پله

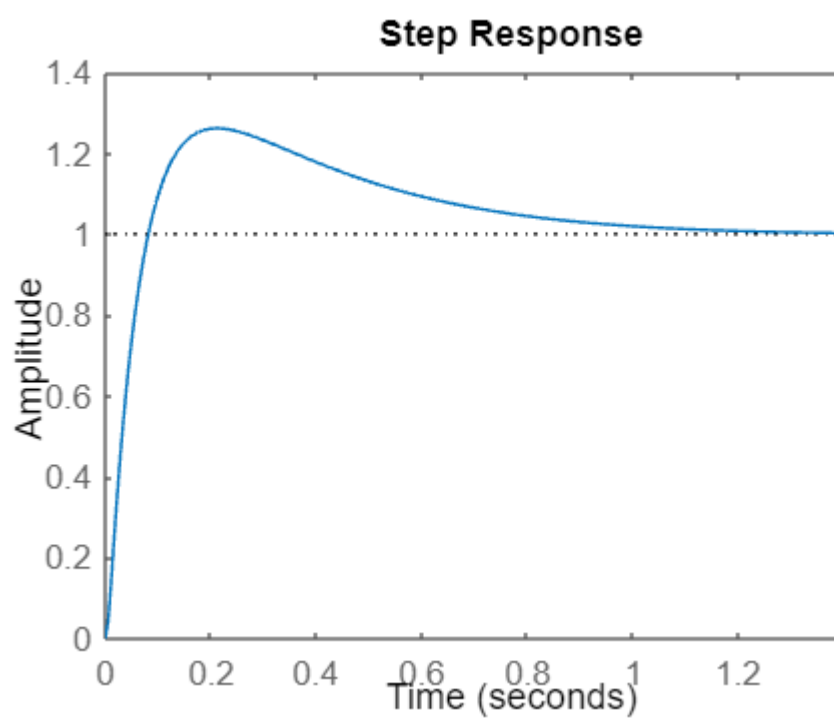


Figure 3 پاسخ پله جبران شده سیستم

خواسته ۳

با 3 نرخ نمونه برداری 0.1 و 0.01 و 0.001 گسسته سازی را انجام دادیم. می‌دانیم که تغییر نرخ نمونه برداری قطب های سیستم را جابجا می‌کند. و کاهش آن باعث ناپایداری و افزایش آن باعث قیمت زیاد تجهیزات و افزایش نویز می‌شود.

پاسخ پله برای 6 کنترلر گسسته شده با نگاه‌دار مرتبه 0 بصورت زیر است:

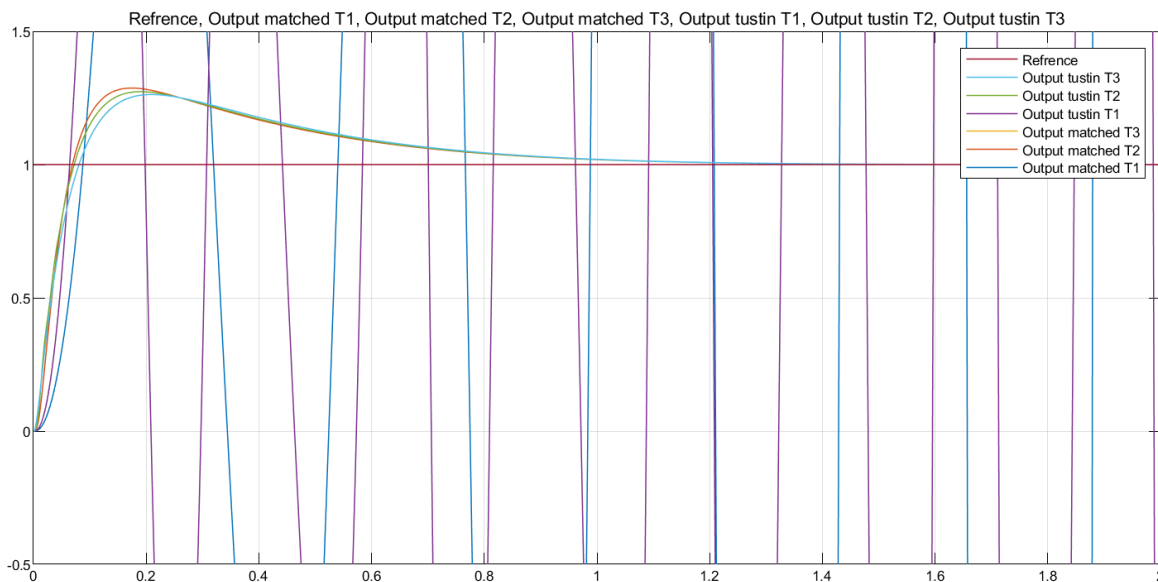


Figure 4 پاسخ پله کنترلر های گسسته شده

همانطور که می‌بینید کنترلر با نرخ نمونه برداری 0.1 ناپایدار شده است. اما دو نرخ دیگر پاسخ شبیه به هم دارند. پس منطقی ترین نرخ، همان 0.01 ثانیه است. که پاسخ پله آن مشخصات نزدیکی با سیستم آنالوگ دارد. همچنین روش تبدیل دوخطی پاسخ بهتری دارد.

```
ans = struct with fields:
    RiseTime: 0.0493
    TransientTime: 0.9887
    SettlingTime: 0.9887
    SettlingMin: 0.9020
    SettlingMax: 1.2735
    Overshoot: 27.3816
    Undershoot: 0
    Peak: 1.2735
    PeakTime: 0.1900
```

Figure 5 مشخصات سیستم با کنترلر گسسته شده

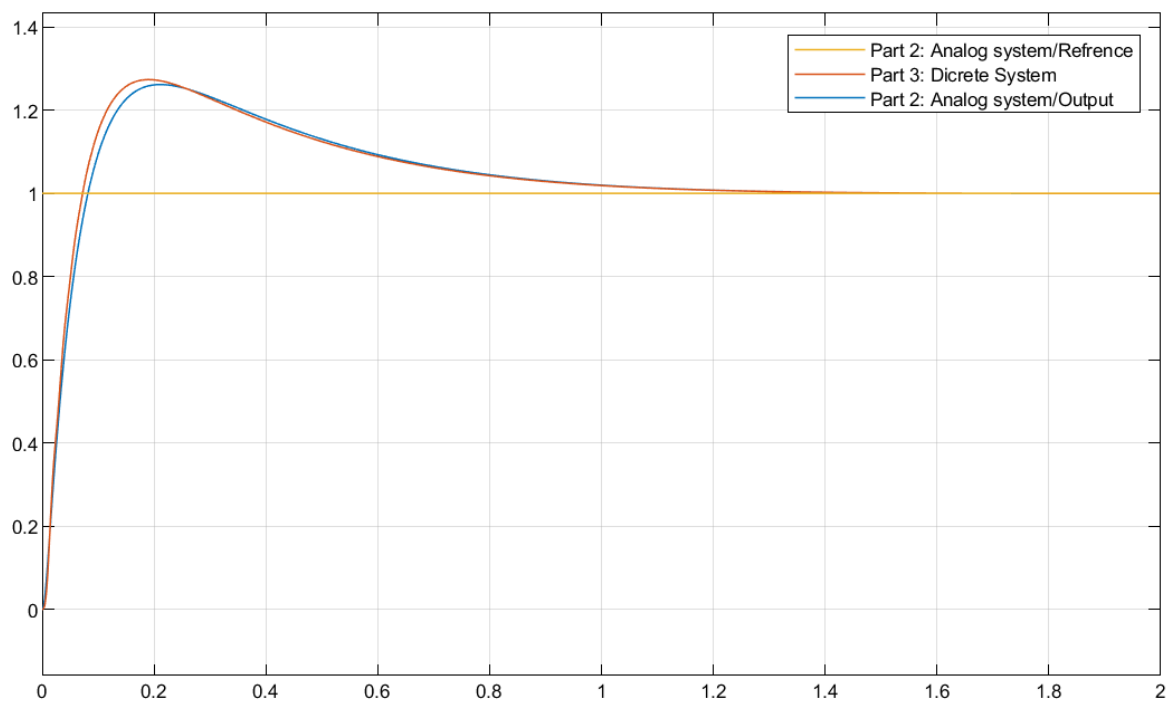


Figure 6 پاسخ پله سیستم آنالوگ و گسسته شده

خواسته ۴

تابع تبدیل گسسته شده سیستم اصلی پیوسته را به روش دو خطی و نرخ نمونه برداری 0.01 بدست می‌آوریم:

$$G_{pd} = \frac{6e - 5z^2 + 1.22e - 4z + 6e - 5}{z^3 - 2.082z^2 + 1.162z - 0.08193}$$

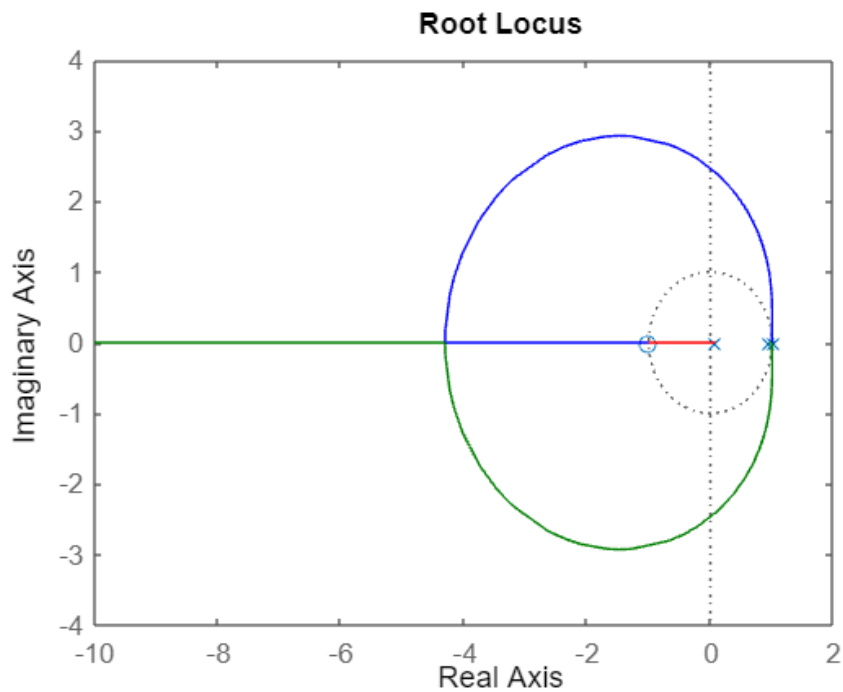


Figure 7 نمودار مکان ریشه سیستم دیجیتال شده برای بهره مثبت

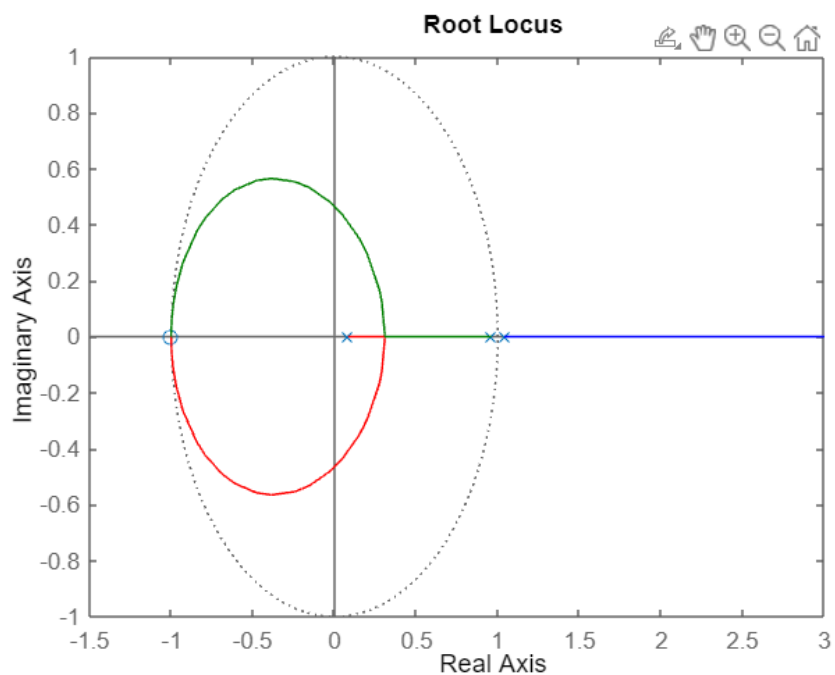


Figure 8 نمودار مکان ریشه سیستم دیجیتال شده برای بهره منفی

سیستم یک قطب و یک صفر خارج از دایره واحد (ناپایدار دارد)

سیستم یک قطب و یک صفر خارج از دایره واحد (ناپایدار دارد)

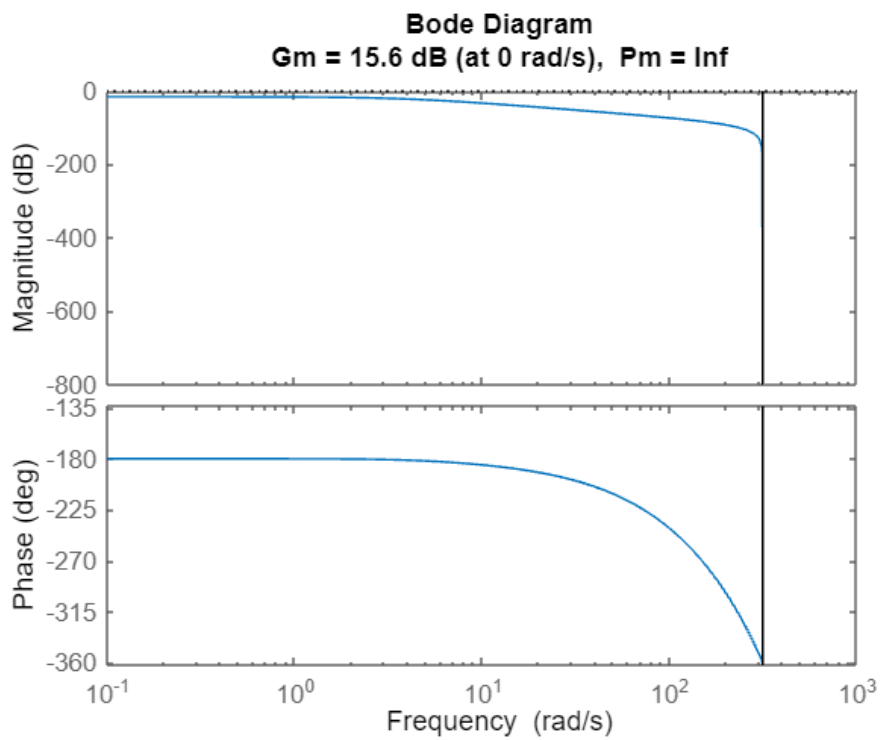


Figure 9 نمودار bode سیستم

حد بهره سیستم 15.6dB و حد فاز آن بی نهایت است.

خواسته ۵

کنترلر گسسته PID را به کمک PID Tuner طراحی می‌کنیم تا مشخصات شبیه سیستم آنالوگ شود.

$$G_{cd} = K_p + T_s K_i * \frac{1}{z-1} + K_d * \frac{N}{1 + T_s * \frac{N}{z-1}}$$

$$= 52.8 + T_s 85.4 * \frac{1}{z-1} + 8.17 * \frac{100}{1 + T_s * \frac{100}{z-1}}$$

بعد از طراحی کنترلر سیستم پایدار شده است اما مشخصات آن کمی بدتر از مشخصات سیستم آنالوگ است.

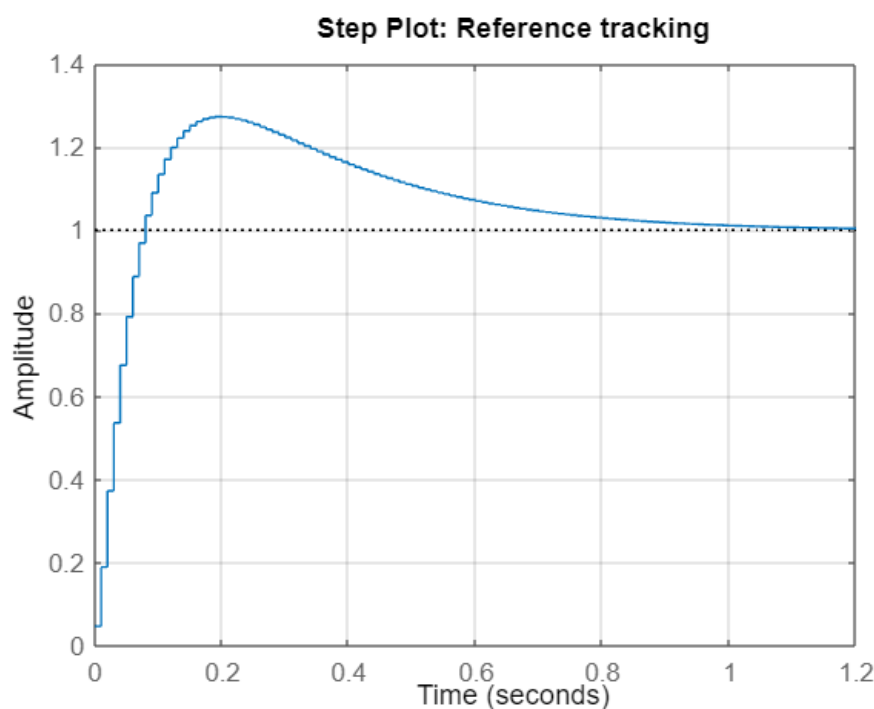


Figure 10 پاسخ پله سیستم تمام دیجیتال

```
ans = struct with fields:
    RiseTime: 0.0585
    TransientTime: 0.9965
    SettlingTime: 0.9965
    SettlingMin: 0.9006
    SettlingMax: 1.2617
    Overshoot: 26.1677
    Undershoot: 0
    Peak: 1.2617
    PeakTime: 0.2140
```

Figure 11 مشخصات پاسخ پله تمام دیجیتال

بعد از جبران سازی با کنترلر تمامی صفر ها و قطب های سیستم حلقه بسته به داخل دایره واحد منتقل شدند. حد فاز کمتر شده و به 106 درجه و حد بهره نیز کاهش یافته و به 13dB رسید.

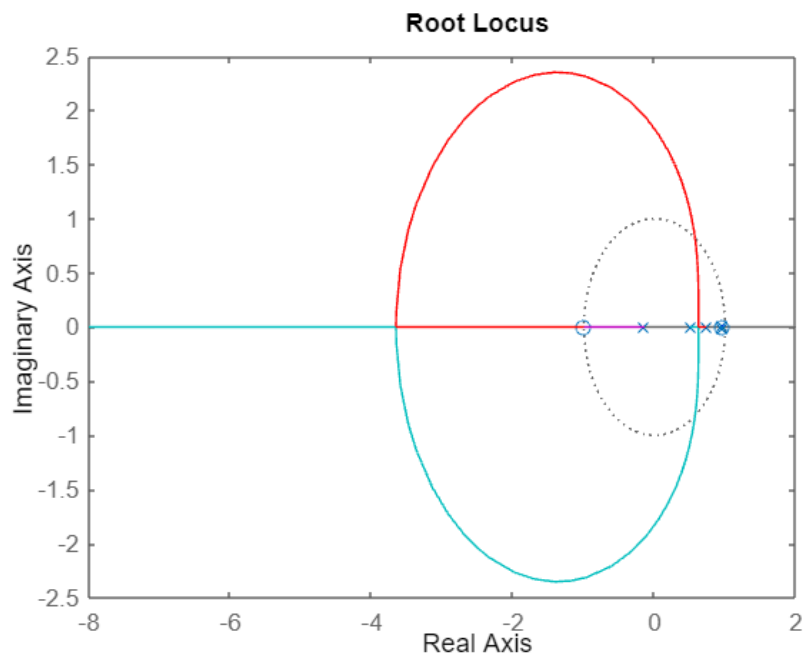


Figure 12 نمودار مکان ریشه برای بهره های مثبت

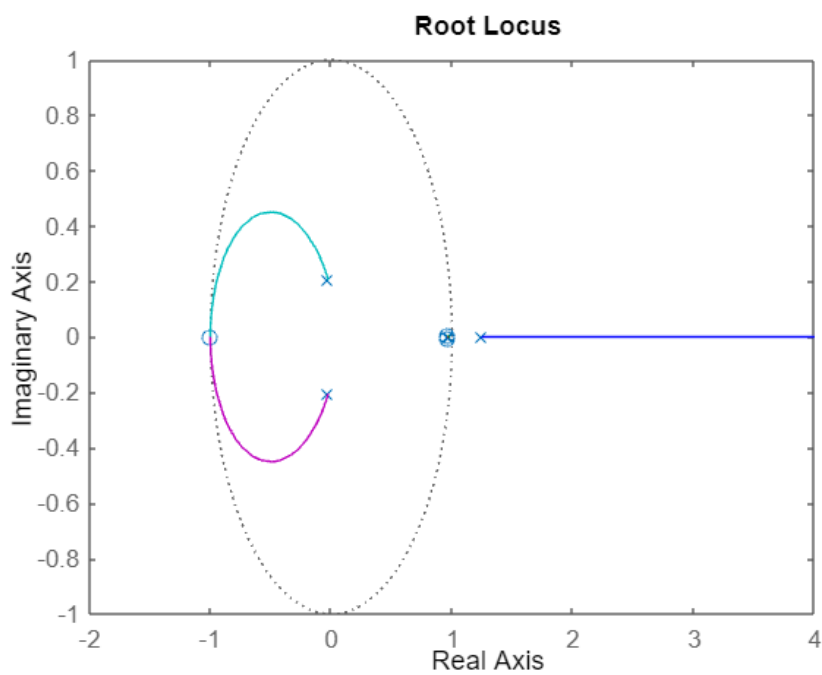


Figure 13 نمودار مکان ریشه برای بهره های منفی

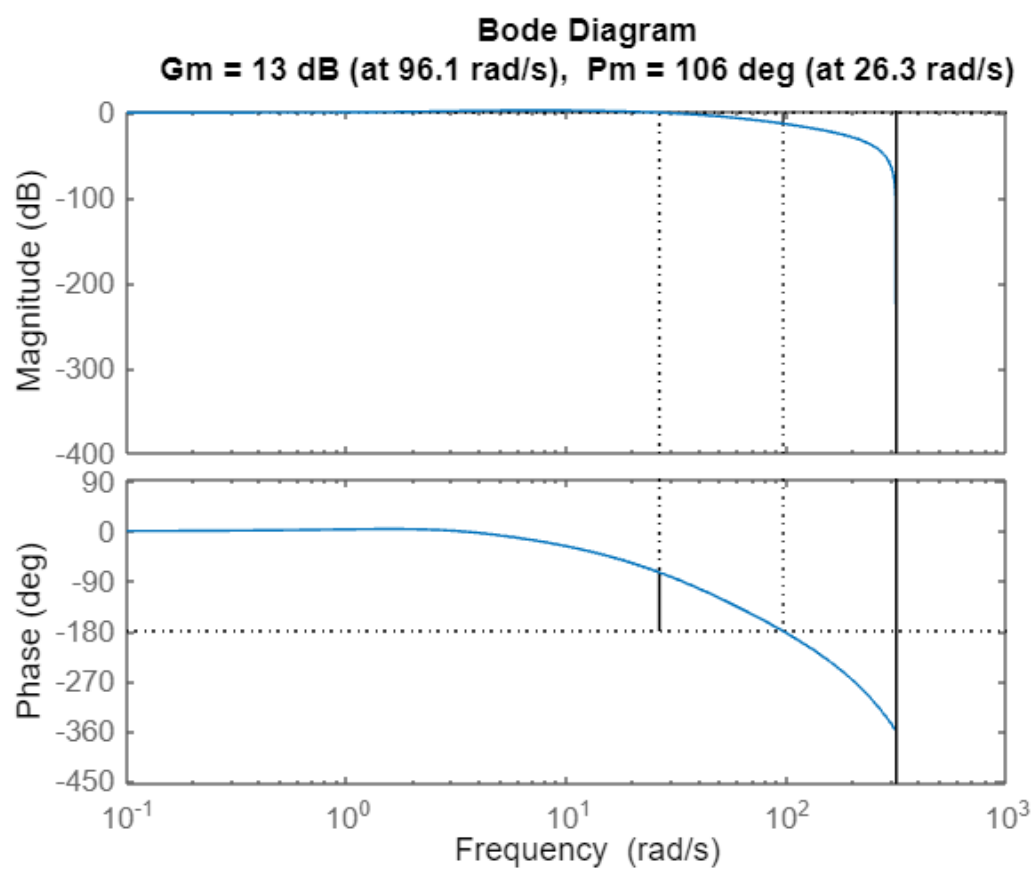


Figure 14 نمودار bode سیستم جبران شده

$$G_{discrete} = 6.5 * 10^{-5} \frac{(z + 2.293)(z + 0.1288)}{(z - 1.04)(z - 0.9598)(z - 0.08208)}$$

$$F(z) = \frac{C(z)G_d(z)}{1 + C(z)G_d(z)}$$

$$F(z) = f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3}$$

یک صفر ناپایدار در -2.293 دارد و یک قطب ناپایدار در 1.04 دارد و هم ورودی پله دارد. پس

$$\begin{aligned} F(z) &= f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + f_3 z^{-3} = (1 + 2.293 z^{-1})M(z) \\ &= (1 + 2.293 z^{-1})\beta_1 z^{-1}(1 + \beta_2 z^{-1}) \end{aligned}$$

$$f_1 = \beta_1, \quad f_2 = 2.293\beta_1 + \beta_1\beta_2, \quad f_3 = 2.293\beta_1\beta_2$$

$$f_2 = 2.293f_1 + \frac{f_3}{2.293}$$

$$1 - F(z) = (1 - z^{-1})N(z)$$

$$1 - F(z) = (1 - 1.04z^{-1})T(z)$$

$$1 - F(z) = 1 - f_1 z^{-1} - f_2 z^{-2} - f_3 z^{-3} = (1 - 1.04z^{-1})(1 - z^{-1})(1 - \alpha z^{-1})$$

$$F(1) = 1 \rightarrow f_1 + f_2 + f_3 = 1$$

$$f_1 = \alpha + 2.04, \quad f_2 = -2.04\alpha - 1.04, \quad f_3 = 1.04\alpha$$

$$f_1 = 0.8455, \quad f_2 = 1.3969, \quad f_3 = -1.2423$$

$$\alpha = -1.1945, \quad \beta_1 = 0.8455, \quad \beta_2 = -0.6408$$

$$\begin{aligned} U(z) &= b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b(z^{-3} + \dots) = \frac{F(z)}{G_d(z)(1 - z^{-1})} \\ &= \frac{(z - 1.04)(z - 0.9598)(z - 0.08208)(1 - 1.04z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 1.1945z^{-1})}{6.5 * 10^{-5}(z + 2.293)(z + 0.1288)(1 - z^{-1})} \end{aligned}$$

سیگنال کنترلی از جایی به بعد ثابت می شود.

$$C(z) = \frac{F(z)}{G_D(z)[1 - F(z)]}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(z - 1.04)(z - 0.9598)(z - 0.08208)(1 + 2.293z^{-1})0.8455z^{-1}(1 - 0.6408z^{-1})}{6.5 * 10^{-5}(z + 2.293)(z + 0.1288)(1 - 1.04z^{-1})(1 - z^{-1})(1 + 1.1945z^{-1})} \\ &= \frac{(z - 1.04)(z - 0.9598)(z - 0.08208)(z + 2.293)0.8455(z - 0.6408)}{6.5 * 10^{-5}(z + 2.293)(z + 0.1288)(z - 1.04)(z - 1)(z + 1.1945)} \\ &= \frac{0.8455(z - 0.9598)(z - 0.08208)(z - 0.6408)}{6.5 * 10^{-5}(z + 0.1288)(z - 1)(z + 1.1945)} \end{aligned}$$

پس از شبیه سازی خروجی سیستم بصورت زیر است:

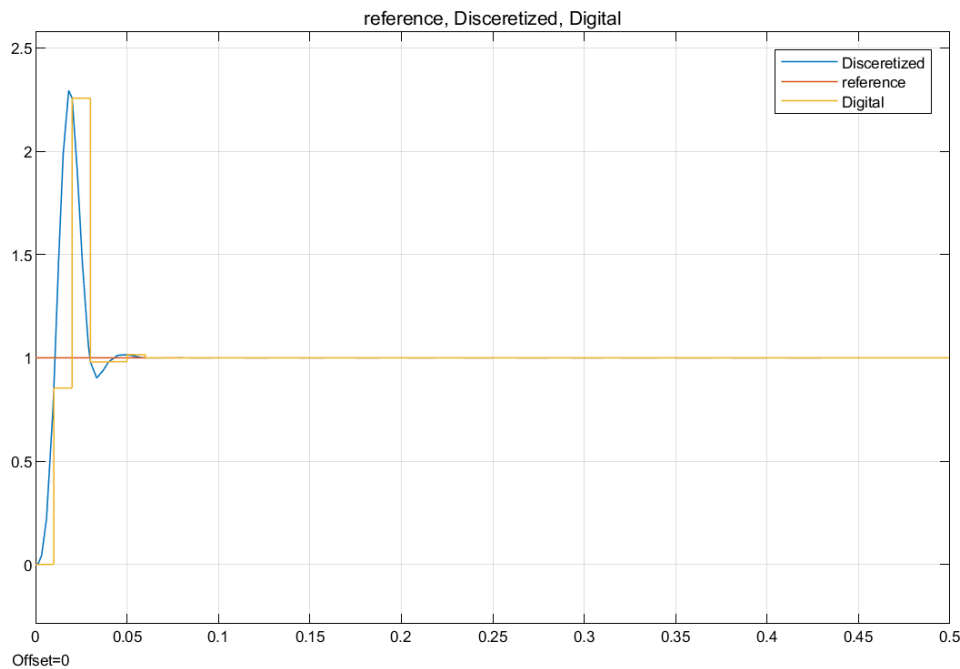


Figure 15 پاسخ پله سیستم ها با کنترلر مرده‌نوش

سیستم دیجیتال پس از 6 گام به مقدار نهایی می‌رسد. رفتار سیستم گسسته شده نیز تقریباً مشابه سیستم دیجیتال است و در 6 گام خطای آن سیستم نیز صفر می‌شود.

حال این 4 کنترلر را به پلنت اصلی وصل می‌کنیم. با شبیه سازی هر 4 کنترلر موفق به پایدار سازی سیستم می‌شوند. به ترتیب کنترلر آنالوگ سپس کنترلر دیجیتال و در آخر نیز کنترلر گسسته شده با نگه دار (با مقداری اختلاف بیشتر) بهترین نتیجه را از نظر فراجاهش و زمان نشست داشتند. کنترلر deadbeat اما موفق به پایداری سیستم نشده است.

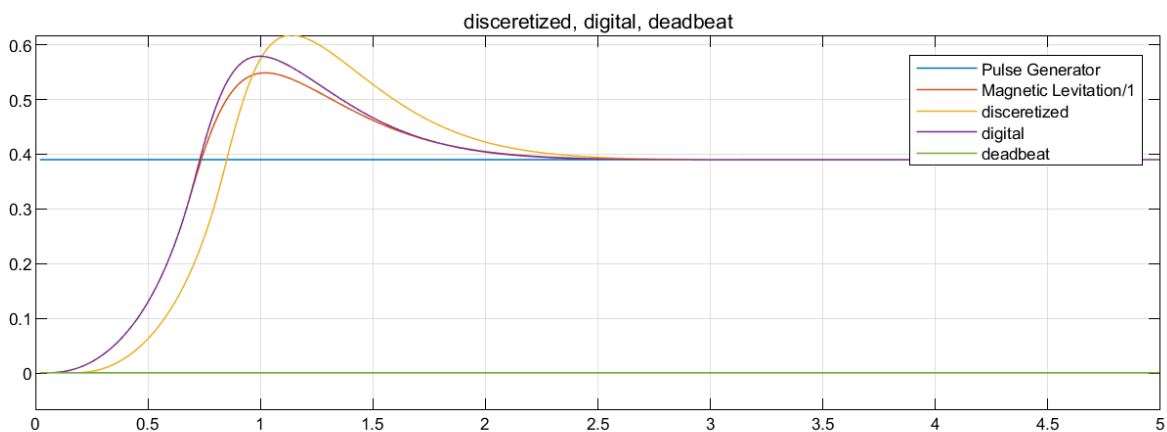


Figure 16 پاسخ پله سیستم اصلی با کنترلر های مختلف

حال در حضور نویز پاسخ پله سیستم های اشاره شده را بررسی می کنیم. نویز روی سیگنال وجود دارد و رفته رفته کم می شود. اما به دلیل گسسته بودن کنترلر ها، در حد فاصل زمان نمونه برداری نویز روی سیگنال می ماند و کاملاً حذف نمی شود. پاسخ دو سیستم دیجیتال و گسسته شده شبیه به هم است. اما پاسخ سیستم با کنترلر مرده نویز عملکرد ضعیفتری در برابر نویز دارد. در پلنت اصلی اما بسیار حساس به نویز است و با همان مقدار نویز ناپایدار می شود. اما با مقدار نویز کمتر یا کاهش دوره نمونه برداری پایدار می شود.

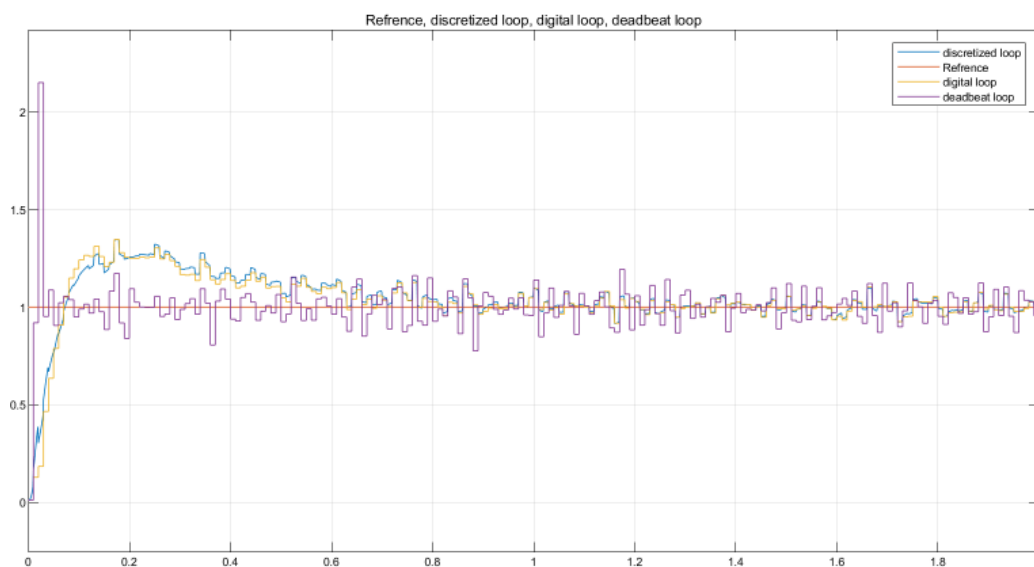


Figure 177 پاسخ پله سیستم های دیجیتال و گسسته شده و مرده نویز همراه با نویز

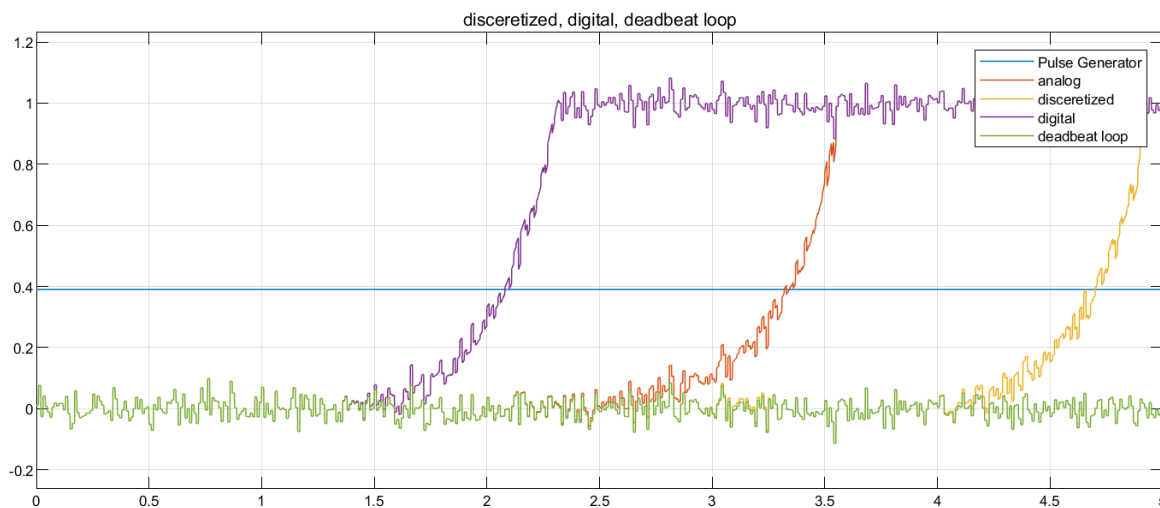


Figure 188 پاسخ پله سیستم اصلی با کنترلر های مختلف در حضور نویز

خواسته ۹

روابط پیوسته به صورت زیر به دست آمده بود.

$$\dot{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 16 & -1.8 \times 10^{-4} & 0.42 \\ 0 & 0 & -250 \end{bmatrix} x' + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} u', \quad x' = \begin{bmatrix} x_1 - 0.39 \\ x_2 \\ x_3 - 46.6 \end{bmatrix}, \quad u' = (u - 233)$$

$$y' = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 - 0.39 \\ x_2 \\ x_3 - 46.6 \end{bmatrix}, \quad y' = y - 0.39$$

برای گسسته سازی از زمان نمونه برداری بخش های قبلی یعنی 0.01 استفاده میکنیم و با کمک متلب روابط زیر را حل میکنیم.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x[k+1] = Gx[k] + Hu[k] \\ y[k] = Cx[k] + Du[k] \end{cases}$$

$$G = e^{AT} = \begin{bmatrix} 1 & 0.01 & 0.0003 \\ 0.16 & 1 & 0.05 \\ 0 & 0 & 0.08 \end{bmatrix}, \quad H = \int_0^T e^{A\tau} B d\tau = \begin{bmatrix} 0.0001 \\ 0.0168 \\ 0.1836 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس کنترل پذیری را با کمک متلب به دست آورده و رنک آن را حساب میکنیم. میبینیم که کنترل پذیر است.

```
M=[H Ge*H Ge*Ge*H]

M = 3×3
    0.0001    0.0003    0.0006
    0.0168    0.0258    0.0265
    0.1836    0.0151    0.0012

rank_M = rank(M)

rank_M = 3
```

Figure 19 ماتریس کنترل پذیری

سپس ماتریس رویت پذیری را محاسبه میکنیم و رنک آن را حساب میکنیم. میبینیم که رویت پذیر نیز هست.

```
N=[C;C*Ge;C*Ge*Ge]

N = 3×3
    1.0000         0         0
    1.0008    0.0100    0.0003
    1.0032    0.0200    0.0009

rank_N = rank(N)

rank_N = 3
```

Figure 20 ماتریس رویت پذیری

خواسته ۱۰

برای پیدا کردن K دو روش وجود دارد. روش اول این است که با پیدا کردن تحقق کنترل پذیر فیدبکی پیدا کنیم و در روش دوم با معادله آکرمن مستقیم به جواب میرسیم .

$$K = [0 \ 0 \ 1]M^{-1}\varphi(G)$$

برای اینکه پاسخ مرده نوش داشته باشد باید $\varphi(G) = G^3$ شود. بنابراین K به صورت زیر به دست می آید.

```
phi = Ge*Ge*Ge;
K = [0, 0, 1]*inv(M)*phi

K = 1×3
103 ×
    4.1087    0.0741    0.0031
```

Figure 21 محاسبه K

برای اینکه خروجی حتما ورودی که پله است را دنبال کند نیز یک K_follow باید بر سر ورودی قرار دهیم. این ضریب از معکوس مقدار نهایی سیستم در $z=1$ به دست می آید.

```
k_follow= (C*(eye(3)-Ge+H*K)^-1*H)^-1|
k_follow = 4.0990e+03
```

Figure 22 ضریب ورودی

حال ان را در سیمولینک به صورت زیر شبیه سازی میکنیم.

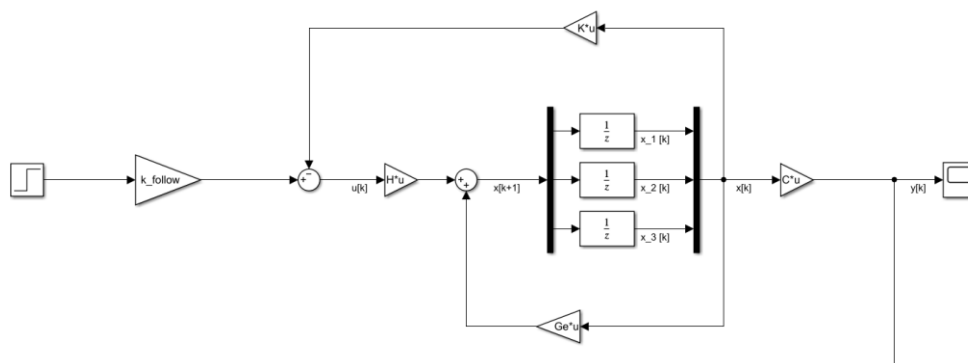


Figure 23 سیستم خطی شده با فیدبک K

خروجی این حالت به شکل زیر است

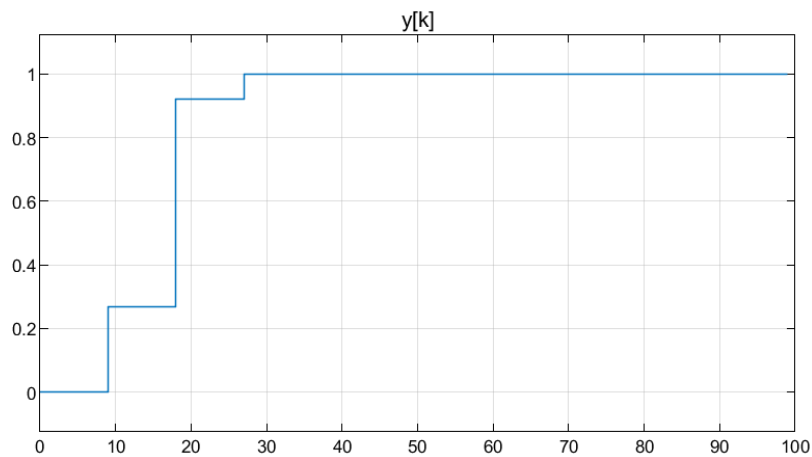


Figure 24 خروجی سیستم در حضور فیدبک حالت

فیدبک را در سیستم غیر خطی نیز اعمال میکنیم.

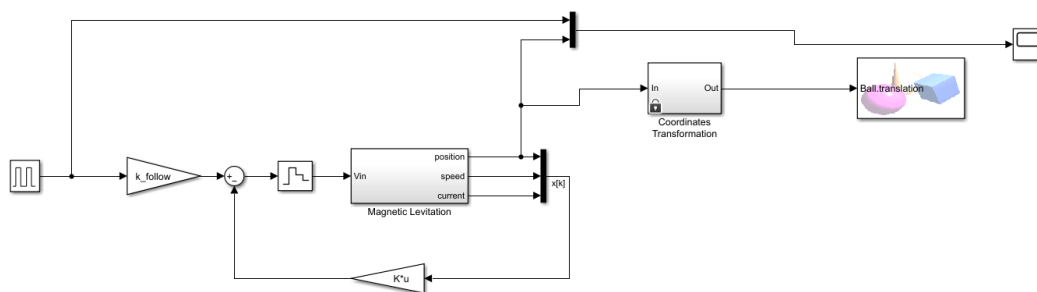


Figure 25 فیدبک حالت سیستم غیر خطی

میبینیم توانسته خروجی منطبق بدهد.

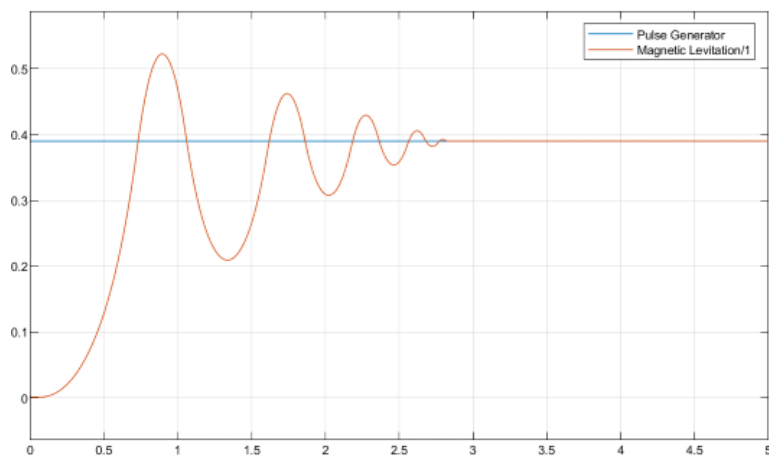


Figure 26 خروجی سیستم در حضور فیدبک حالت

خواسته ۱۱

برای به دست آوردن L از رابطه آکرمن استفاده میکنیم و به صورت زیر می شود.

$$L = \varphi(G)N^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

برای اینکه پاسخ مرده نوش داشته باشد باید $\varphi(G) = G^3$ شود. بنابراین L به صورت زیر به دست می آید.

```
phi = Ge*Ge*Ge;
L = phi*inv(N)*[0;0;1]
```

```
L = 3×1
    2.0819
   108.7950
    3.0884
```

Figure 27 محاسبه L برای رویتر

برای رسم سیستم در سیمولینک به ماتریس $G-LC$ نیز نیاز داریم پس آن را نیز محاسبه میکنیم.

```
E = Ge-L*C
```

```
E = 3×3
   -1.0811    0.0100    0.0003
  -108.6344    0.9990    0.0488
   -3.0884         0    0.0821
```

Figure 28 ماتریس حالت با حضور رویتر

حال آن را در سیمولینک شبیه سازی میکنیم.

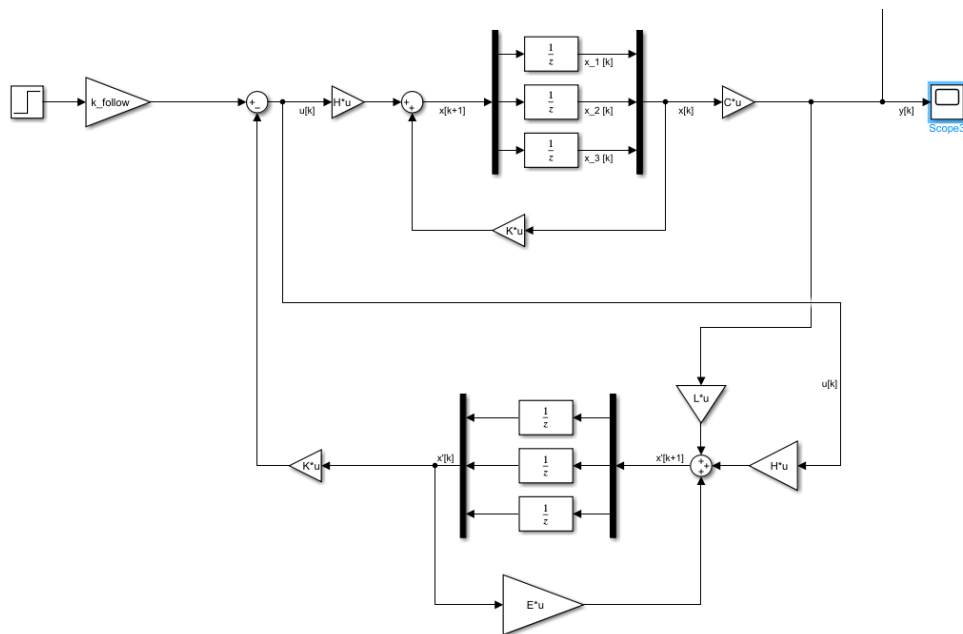


Figure 29 سیستم خطی در حضور رویتگر و فیدبک حالت

خروجی آن در چهار دوره به مقدار نهایی میرسد.

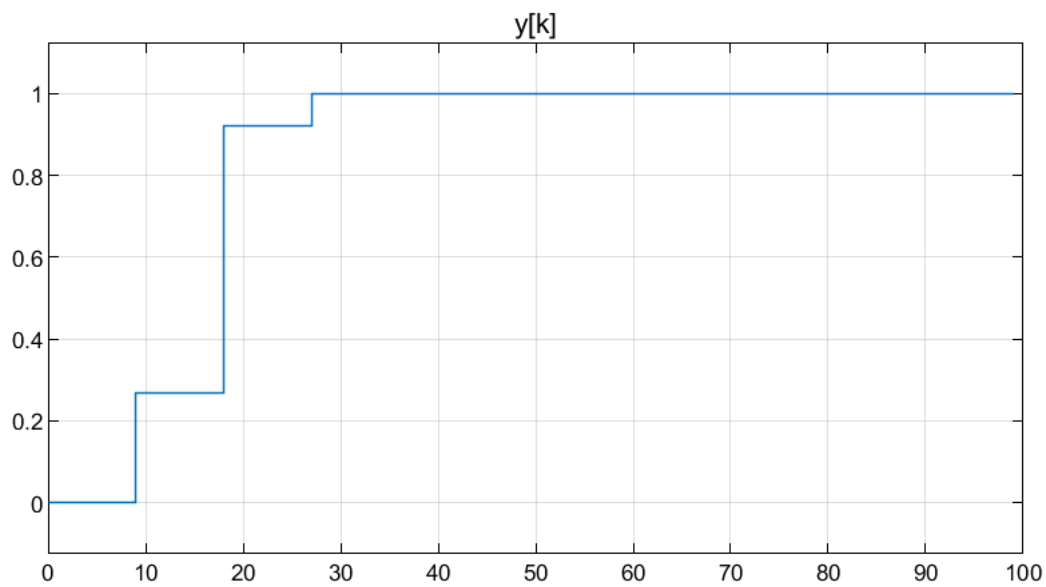


Figure 30 خروجی سیستم خطی در حضور رویتگر و فیدبک حالت

رویتگر در سیستم غیر خطی به شکل زیر است که متاسفانه پاسخ درستی نمیدهد.

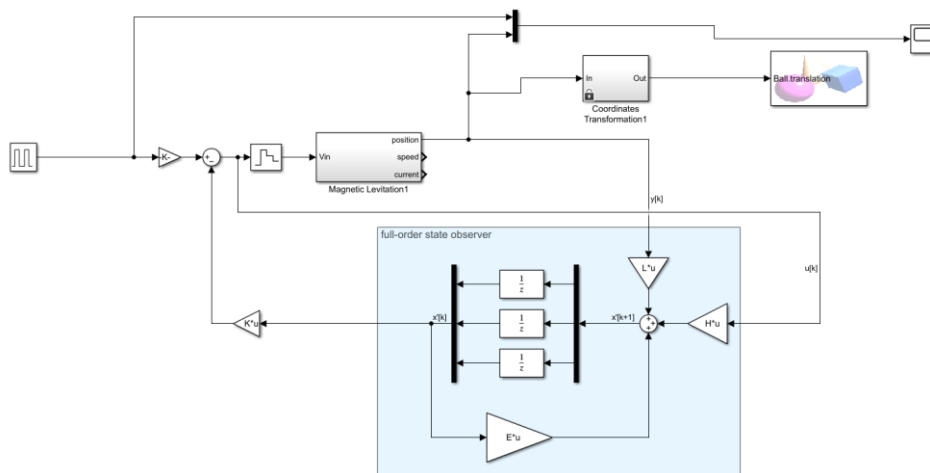


Figure 31 سیستم غیر خطی با رویتگر

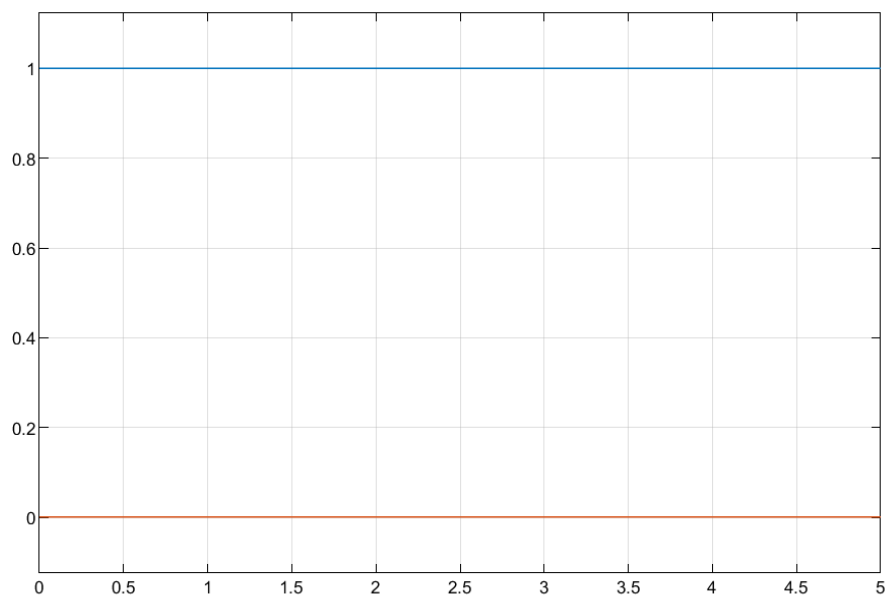


Figure 32 خروجی سیستم غیر خطی با رویتگر

اختلاف خروجی برای حالت با رویتگر و بدون رویتگر در سیستم خطی به صورت زیر است.

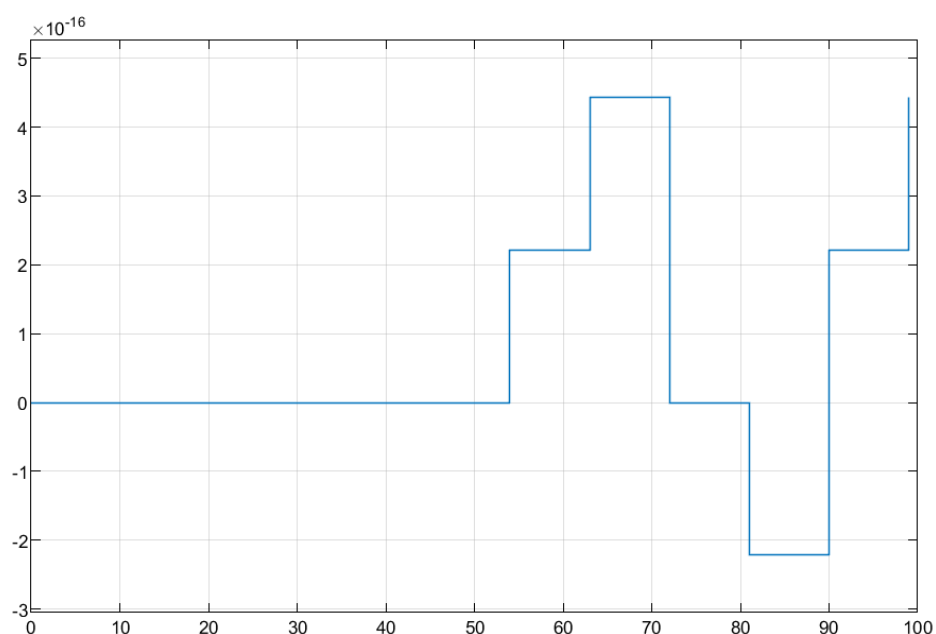


Figure 33 اختلاف خروجی سیستم خطی با رویتگر و بدون رویتگر

این اختلاف از $O(10^{-16})$ است که به نسبت ناچیز است و نشان میدهد حضور رویتگر تغییرات خاصی در سیستم اعمال نکرده است.