תרגיל בית מס׳ 1

מועד הגשה: עד 1.2.2024 בשעה 23:59. הגשה אלקטרונית דרך Moodle.

הוראות הגשה:

א. יש להירשם לקבוצה במודל על מנת להגיש את התרגיל.
ב. ההגשה היא **בזוגות או ביחידים**, כאשר רק אחד הסטודנטים יגיש את הגיליון.
ג. יש להגיש קובץ PDF יחיד הנושא את השם: DryHw1_ID1_ID2.pdf.
כאשר במקום ID1 וID2 יש לכתוב את תעודות הזהות של הסטודנטים.
ד. יש לרשום את שמות הסטודנטים ואת תעודות הזהות שלהם בדף הראשון של הגיליון.

שאלה מס׳ 1

עבור כל אחת מן המערכות הבאות החליטו:

1. המערכת לינארית? הוכיחו את תשובתכם.
2. האם המערכת קבועה במקום? הוכיחו את תשובתכם?
3. האם קיימת תגובה להלם? אם כן כתבו מהי תגובה להלם. אם לא הסבירו מדוע.

א. נתונה המערכת H_1 המקבלת כקלט את התמונה $f\left(x,y\right)$ ומוציאה את התמונה:

$$g\left(x,y\right)=H_1\left\{f\left(x,y\right)\right\}=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y}f\left(\alpha,\beta\right)d\alpha d\beta$$

ב. כעת נתונה המערכת H_2 המקבלת כקלט את התמונה $f\left(x,y\right)$ ומוציאה את התמונה:

$$g\left(x,y\right)=H_2\left\{f\left(x,y\right)\right\}=f\left(2x-1,3y+1\right)$$

ג. נתונה המערכת הבאה הפועלת על תמונה רציפה <u>בתדר</u>:

$$G\left(u,v\right)=H\left\{F\left(u,v\right)\right\}=\begin{cases}2F\left(u,v\right), & u\geq 0\\ 0, & u<0\end{cases}$$

שאלה מס׳ 2

התמרת פוריה דו-מימדית עבור אותות בדידים מוגדרת ע״י

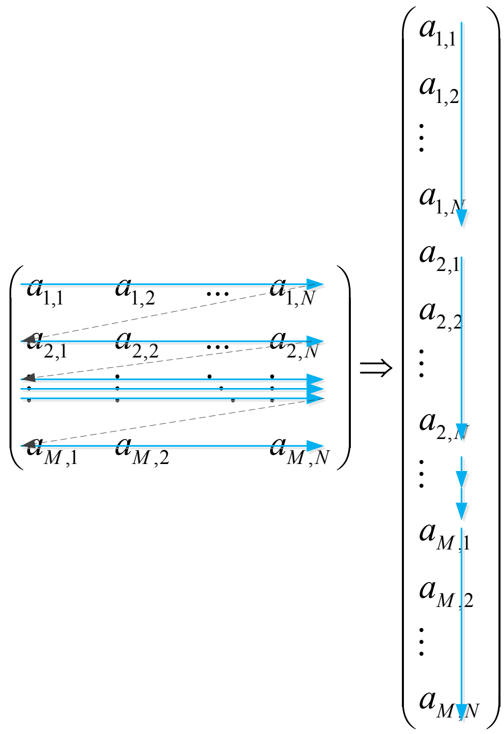
$$F\left(\omega_1,\omega_2\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}f\left[m,n\right]\cdot\exp\left(-j\omega_1 m-j\omega_2 n\right)$$

נניח שמתייחסים להתמרה כמערכת.

א. האם המערכת לינארית? הוכיחו את תשובתכם.
ב. האם קיימת תגובה להלם למערכת? אם כן, מצאו אותה.
ג. האם המערכת קבועה במקום? הוכיחו את תשובתכם.
ד. במקרה החד ממדי, נגדיר מערכת חסרת זיכרון כמערכת שבה ערך המוצא במקום t_0 תלוי אך ורק בערך הכניסה בזמן t_0 וב- t_0 עצמו (מערכת זו נקראת גם פעולת נקודה).
האם המערכת חסרת זיכרון? נמקו.
ה. האם המערכת ספרבילית? הוכיחו את תשובתכם.

שאלה מס' 3

נגדיר את הפעולה S, המבצעת מיון גלובלי למטריצות בגודל $M \times N$. ראשית, המטריצה $\underline{\underline{X}}$ עוברת המרה לווקטור ע"י סריקה משמאל לימין ומלמעלה למטה, באופן הבא:



נסמן את הווקטור המתקבל ב- $\underline{X}_{vect}$, וממנו נייצר וקטור חדש, $\underline{Y}_{vect}$, המכיל את כל איברי $\underline{X}_{vect}$ כך שמתקיים:

$$\underline{Y}_{vect}[n+1] \geq \underline{Y}_{vect}[n], \quad n \in [0, NM-2]$$

לאחר מכן, הווקטור $\underline{Y}_{vect}$ עובר המרה למטריצה $\underline{\underline{Y}}$ בתהליך הפוך לתהליך שתואר לעיל.
סה"כ לדוגמה:

$$\underline{\underline{X}} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathbf{S}}} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \underline{\underline{Y}}$$

האם הפעולה S לינארית? האם היא תלויה במקום? הוכיחו או הסבירו.
<u>הערה</u>: ניתן להתייחס להזזה ציקלית עבור תכונת הקביעות במקום.

<u>שאלה מס' 4</u>

נתונה התמונה הבאה בגודל 4X4 :

$$f=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&0&3&0\\2&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

ונתון המסנן :

$$h=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

א. איירו את התמונה : $g_1=f*h$ כאשר מרכז המסנן הוא בh(1,1).

ב. איירו את התמונה : $g_2=f*h$ כאשר מרכז המסנן הוא בh(2,2).

<u>הערה</u> : על מנת להתחשב בקצוות ריפדו את המטריצה באפסים.

שאלה 1:

א.

① ליניאריות:

$$g(x,y)=H_1\{f(x,y)\}=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} f(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta$$

$$H_1\{a f_1(x,y)+b f_2(x,y)\}=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} a f_1(\alpha,\beta)+b f_2(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta \overset{\text{ליניאריות האינטגרל}}{=}$$

$$=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} a f_1(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta+\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} b f_2(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta \overset{\text{כפל בקבוע}}{=} a\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} f_1(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta+b\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y} f_2(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta=$$

$$=a H_1\{f_1(x,y)\}+b H_1\{f_2(x,y)\}$$

לכן לפי הגדרה המערכת ליניארית.

② קביעות במקום:

$$H\{f(x,y)\}=g(x,y)$$

$$H\{f(x-x_0,y-y_0)\}=\int_{x-x_0}^{x-x_0+2}\int_{y-y_0-4}^{y-y_0} f(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta = \int_{x'}^{x'+2}\int_{y'-4}^{y'} f(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta = g(x',y') \overset{(*)}{=} g(x-x_0,y-y_0)$$

נציב
$x-x_0=x'$ (*)
$y-y_0=y'$

לכן המערכת קבועה במקום ובזמן.

③

תזכורת: מערכת היא לינארית וקבועה במקום אם ורק אם ניתן לייצג אותה כפעולת קונבולוציה.

כפי שהוכח בסעיפים הקודמים, המערכת ליניארית וקבועה במקום ולכן ניתן לייצגה כפעולת קונבולוציה.

$$h(x,y)=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y}\delta(\alpha,\beta)\,d\alpha\, d\beta=\int_{x}^{x+2}\int_{y-4}^{y}\delta(\alpha)\,\delta(\beta)\,d\alpha\, d\beta=$$

$$\int_{x}^{x+2}\delta(\alpha)\,d\alpha+\int_{y-4}^{y}\delta(\beta)\,d\beta=\begin{cases}1, & -2<\alpha<0\\ 0, & \text{else}\end{cases}+\begin{cases}1, & 0<\beta<4\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

$$=u(\alpha+2)-u(\alpha)+u(\beta)-u(\beta-4)$$

ב.

$$g(x,y) = H_2\{f(x,y)\} = f(2x-1, 3y+1)$$

① לינאריות:

$$H_2\{\alpha f_1(x,y) + \beta f_2(x,y)\} = \alpha f_1(2x-1, 3y+1) + \beta f_2(2x-1, 3y+1) =$$
$$= \alpha H_1\{f_1(x,y)\} + \beta\{f_2(x,y)\}$$

לכן המערכת לינארית.

② קביעות במקום:

$$g(x-x_0, y-y_0) = f_1(2(x-x_0)-1, 3(y-y_0)+1) = g(x-x_0, y-y_0)$$
$$\neq$$
$$H_2\{f(x-x_0, y-y_0)\} = f(2x-1-x_0, 3y+1-y_0)$$

המערכת לא קבועה במקום.

③ לפי הסעיפים הקודמים והמשפט שלמדנו לא ניתן לייצג את המערכת כפעולת קונבולוציה.

ג.

$$G(u,v) = H\{F(u,v)\} = \begin{cases} 2F(u,v) & , u \geq 0 \\ 0 & , u < 0 \end{cases}$$

ניתן לייצג את המערכת באמצעות פעולת קונבולוציה:

$$h(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} 2\delta(u,v)\, du\, dv =$$

שאלה 2:

$$F(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n}$$

א. המערכת לינארית:

לינאריות של סכום

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha f[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} + \beta g[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} =$$

קבועים ביחס לסכום

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha f[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta g[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} =$$

$$= \alpha\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} + \beta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} g[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} = \alpha F(\omega_1,\omega_2) + \beta G(\omega_1,\omega_2)$$

ב. תגובה להלם:

$$F\{\delta[m,n]\}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[m-m_0,n-n_0]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} \underset{(*)}{=} e^{-j\omega_1 m_0 - j\omega_2 n_0}$$

$$(*)\quad \delta[m-m_0,n-n_0] = \begin{cases} 1, & m=m_0 \ \& \ n=n_0 \\ 0, & \end{cases}$$

ג. קביעות במקום:

$$F\{f[m-m_0,n-n_0]\}(\omega_1,\omega_2) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m-m_0,n-n_0]\, e^{-j\omega_1(m-m_0) - j\omega_2(n-n_0)}$$

עבור הזזה לאחר התמרה:

$$F\{\delta[m,n]\}(\omega_1-m_0,\omega_2-n_0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\, e^{-j(\omega_1-m_0)m - j(\omega_2-n_0)n}$$

נשים לב כי לא מתקיים שוויון ולכן המערכת לא קבועה במקום.

ד. המערכת מורכבת מסכומים שתלויים בכל הערכים של m,n ולכן המערכת אינה חסרת זכרון.

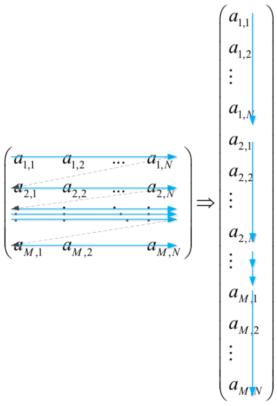
ה. ספרביליות:

באופן כללי אם המערכת ספרבילית, אזי גם ההתמרה ספרבילית. אך במקרה שלנו $f[m,n]$ לא בטוח ספרבילית, בהנחה שהיא כן, אזי מתקיים:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f[m,n]\cdot e^{-j\omega_1 m - j\omega_2 n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f[m]\cdot e^{-j\omega_1 m}\cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\cdot e^{-j\omega_2 n} = F_{1D}(\omega_1)F_{1D}(\omega_2)$$

שאלה 3:

נגדיר את הפעולה S, המבצעת מיון גלובלי למטריצות בגודל $M\times N$. ראשית, המטריצה $\underline{\underline{X}}$ עוברת המרה לווקטור ע"י סריקה משמאל לימין ומלמעלה למטה, באופן הבא:



נסמן את הווקטור המתקבל ב- $\underline{X}_{vect}$, וממנו נייצר וקטור חדש, $\underline{Y}_{vect}$, המכיל את כל איברי $\underline{X}_{vect}$ כך שמתקיים:

$$\underline{Y}_{vect}[n+1]\ge \underline{Y}_{vect}[n],\ \ n\in[0,NM-2]$$

לאחר מכן, הווקטור $\underline{Y}_{vect}$ עובר המרה למטריצה $\underline{\underline{Y}}$ בתהליך הפוך לתהליך שתואר לעיל.
סה"כ לדוגמה:

$$\underline{\underline{X}}=\begin{pmatrix}4&2&1\\4&-3&5\end{pmatrix}\boxed{\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\2\\1\\4\\-3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\4\\4\\5\end{pmatrix}\mathbf{S}}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&1&2\\4&4&5\end{pmatrix}=\underline{\underline{Y}}$$

האם הפעולה S ליניארית? האם היא תלויה במקום? הוכיחו או הסבירו.
<u>הערה:</u> ניתן להתייחס להזזה ציקלית עבור תכונת הקביעות במקום.

ליניאריות: הפעולה כמובן איננה ליניארית. דוגמה נגדית:

$$\underline{\underline{X_1}}=\begin{pmatrix}4&2&1\\4&-3&5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\2\\1\\4\\-3\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3\\1\\2\\4\\4\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&1&2\\4&4&5\end{pmatrix}=\underline{\underline{Y_1}}$$

$$\underline{\underline{X_2}}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-3&-4&4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-3\\-4\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-4\\-3\\1\\2\\3\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-4&-3&1\\2&3&4\end{pmatrix}=\underline{\underline{Y_2}}$$

$$\underline{\underline{Y_1}}+\underline{\underline{Y_2}}=\begin{pmatrix}-7&-2&3\\6&7&9\end{pmatrix}$$

לעומת זאת אם נחבר לפני הפעולה נקבל :

$$\underline{\underline{X_1}} + \underline{\underline{X_2}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ 1 & -7 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -7 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -7 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & 9 \end{pmatrix} = \underline{\underline{Y_1}} + \underline{\underline{Y_2}}$$

לכן המערכת איננה לינארית.

קביעות במקום : הפעולה לא קבועה במקום מכיוון שהזזה במקום של כל איברי המטריצה תיצור את אותה התוצאה של המטריצה הסופית. המיון מתבצע מראש ובגלל שהזזת האיברים לא משפיעה על המיון עצמו כלומר הזזת איברים לא משפיעה על הזזת המוצא ולכן המערכת לא קבועה במקום.

שאלה 4:

$$f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

נהפוך את h בשביל פעולת הקונבולוציה:

$$\tilde{h} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. עבור מרכז מסנן ב- $h(1,1)$:

$$f * h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. עבור מרכז מסנן ב- $h(2,2)$

$$f * h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$