עיבוד וניתוח תמונות - תרגיל יבש 2

שם : יואב אלימלך תעודת זהות : 316597640
שם : נמרוד בלכר תעודת זהות : 318226032

תרגיל בית מס' 2

מועד הגשה: עד 15.2.24 בשעה 23:59. הגשה אלקטרונית דרך Moodle.

הוראות הגשה:

א. ההגשה היא **בזוגות או ביחידים**, כאשר רק אחד הסטודנטים יגיש את הגיליון.
ב. יש להגיש קובץ PDF יחיד הנושא את השם : DryHw1_ID1_ID2.pdf.
כאשר במקום ID1 וID2 יש לכתוב את תעודות הזהות של הסטודנטים.
ג. יש לרשום את שמות הסטודנטים ואת תעודות הזהות שלהם בדף הראשון של הגיליון

שאלה מס' 1

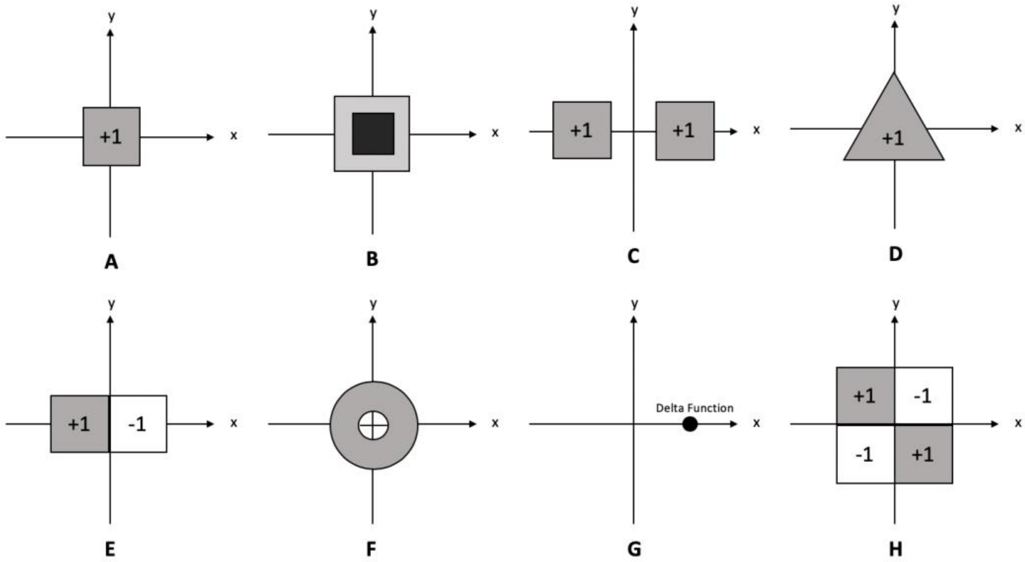
לכל אחד מהסעיפים הבאים, ציינו אילו מהתמונות עונות על התנאי ($F(u,v)$ היא התמרת פוריה דו-ממדית של התמונה).

א. $Im\{F(u,v)\} = 0$ לכל (u,v)

ב. $Re\{F(u,v)\} = 0$ לכל (u,v)

ג. $F(0,0) = 0$

ד. ל- $F(u,v)$ סימטריה מעגלית



שאלה מס' 2

הוכיחו כי התמרת פורייה של גאוסיין הינה גאוסיין כלומר

$$\mathbb{F}\left\{e^{-a\left(x^2+y^2\right)}\right\} = \frac{\pi}{a} e^{-\frac{1}{a}\pi^2\left(u^2+v^2\right)}$$

עבור $a > 0$

ניתן להיעזר באינטגרל החד-ממדי :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

שאלה 1:

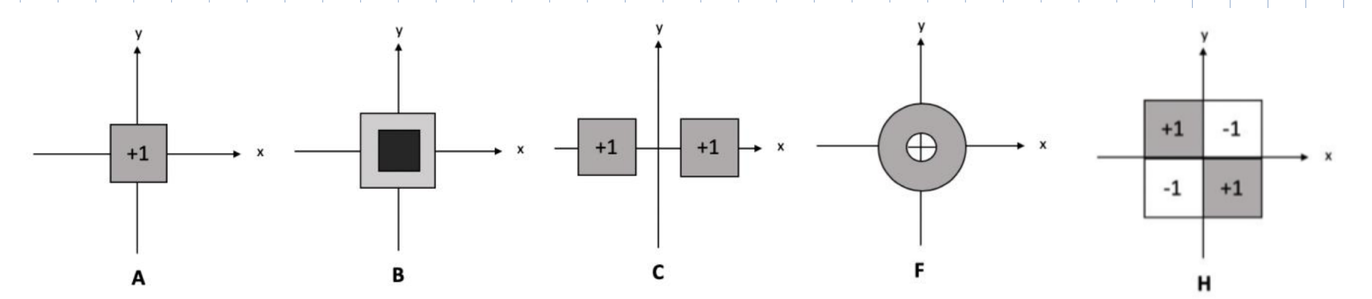
א. $Im\{F(u,v)\}=0$ לכל u,v:

$Im=0 \Rightarrow$ התמונה ממשית

$$(1)\quad \mathcal{F}\{f^*(x,y)\} = F^*(-u,-v) \underset{\text{ממשית}}{=} F(-u,-v) = \mathcal{F}\{f(-x,-y)\}$$

$$\mathcal{F}\{f^*(x,y)\} = \mathcal{F}\{f(-x,-y)\} \xRightarrow[\text{ממשית}]{f} \mathcal{F}\{f(x,y)\} = \mathcal{F}\{f(-x,-y)\} \Rightarrow f(x,y) = f(-x,-y) \Rightarrow$$ $f(x,y)$ סימטרית

מכיון כי אם f ממשית אזי היא סימטרית. לכן נבחר את $f(x,y)$ הסימטריות:

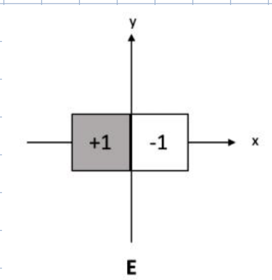


ב. $Re\{F(u,v)\}=0$ לכל u,v:

בהינתן שההתמרה מדומה מתקיים: $f(x,y) = -f(-x,-y)$ אנטי סימטרית

נימוק:
$$\mathcal{F}\{f(x,y)\} = F(u,v) = -F(-u,-v) = -\mathcal{F}\{f(-x,-y)\} = \mathcal{F}\{-f(-x,-y)\}$$

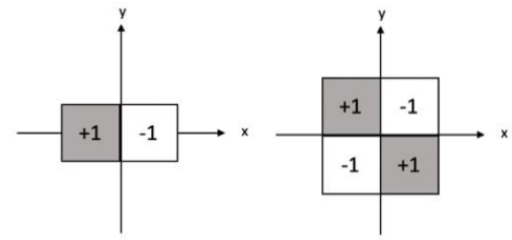
מכיון כי מקרה E הוא המקרה המתאים.



ג. $: F(0,0) = 0$

$$F(0,0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) e^{-jw\cdot 0} dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx\,dy = 0$$

כלומר נבחר גם $f(x,y)$
שה"שטח" מתחת לגרף שלו הינו 0.



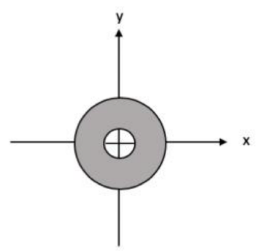
E H

ד. $F(u,v)$ בעלת סימטריה מעגלית:

עבור $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ מטריצת סיבוב מתקיים לפי הנתון כי :

$$\mathcal{F}\{f(A(x,y)^T)\} = F(A(u,v)) = F(u,v) = \mathcal{F}\{f(x,y)\}$$

כלומר הפונקציה f בעלת סימטריה מעגלית גם היא ולכן :



F

שאלה 2:

$$\mathcal{F}\{e^{-a(x^2+y^2)}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x^2+y^2)} \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)}\,dx\,dy \overset{\text{ספרביליות האינטגרל}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \cdot e^{-j2\pi \cdot ux}\,dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} \cdot e^{-j2\pi \cdot vy}\,dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + j\frac{\pi u}{\sqrt{a}}\right)^2} \cdot e^{\frac{\pi^2 u^2}{a}}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}y + j\frac{\pi v}{\sqrt{a}}\right)^2} \cdot e^{\frac{\pi^2 u^2}{a}}\,dy =$$

$$= e^{\frac{\pi^2 u^2}{a}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}x + j\frac{\pi u}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dx \cdot e^{\frac{\pi^2 v^2}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\sqrt{a}y + j\frac{\pi v}{\sqrt{a}}\right)^2}\,dy \underset{\text{הצבה}}{=}$$

נציב:

$\tilde{x} = \sqrt{a}x + j\frac{\pi u}{\sqrt{a}}$ $\quad$ $\tilde{y} = \sqrt{a}y + j\frac{\pi u}{\sqrt{a}}$

$d\tilde{x} = \sqrt{a}\,dx$ $\quad$ $d\tilde{y} = \sqrt{a}\,d$

$dx = \frac{d\tilde{x}}{\sqrt{a}}$ $\quad$ $dy = \frac{d\tilde{y}}{\sqrt{a}}$

$$\underset{\text{אינטגרל נתון בשאלה}}{=} e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{x}^2}\,d\tilde{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tilde{y}^2}\,d\tilde{y} = \frac{e^{-\frac{\pi^2(u^2+v^2)}{a}}}{a}$$

שאלה מס׳ 3

נתונה התמונה $I(x,y)$ שהתמרת פורייה שלה הינה:

$$\mathcal{F}\{I(x,y)\}(u,v)=\begin{cases}1, & |u|\le 3, |v|\le \sqrt{3}\\ 0, & o.w.\end{cases}$$

א. מצאו ביטוי לתמונה $I(x,y)$.

בשל שינוי במערכת, מערכת הצירים של התמונה הסתובבה בזווית $\theta=\frac{\pi}{6}$. כלומר, כעת נתונה התמונה $\tilde{I}(x,y)=I\left(A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)$ כאשר $A=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\end{pmatrix}$.

ב. סטודנט מעוניין לדגום את התמונה $\tilde{I}(x,y)$ באמצעות סריג דגימה מלבני. מהו סריג הדגימה המלבני הטוב ביותר?
רמז: בדקו איך המטריצה A משפיעה על מיקום קודקודי המלבן בתדר.

שאלה מס׳ 4

תמונה רציפה בעלת תמך סופי $g(x,y)$ נדגמה ע"י שריג מלבני במרווחי דגימה D_x, D_y המקיימים את תנאי נייקויסט. כתוצאה מכך התקבלה התמונה הדגומה

$$g[m,n]=g\left(mD_x,nD_y\right),\quad m,n\in[-N,...,N].$$

מעוניינים להגדיל את הרזולוציה בתמונה פי שניים בכל אחד מהצירים. כלומר, מעוניינים לבצע אינטרפולציה לתמונה ולחשב את:

$$g[k,l]=g\left(k\frac{D_x}{2},l\frac{D_y}{2}\right),\quad k,l\in[-2N,...,2N]$$

רשמו ביטוי לחישוב $g[k,l]$ באמצעות התמונה $g[m,n]$ עבור:

א. אינטרפולצית "שכן קרוב".
ב. אינטרפולציה בילינארית.
ג. אינטרפולציה bicubic.
ד. אינטרפולציה "אידיאלית".

הערה: אם ישנם מספר פיקסלים באותו מרחק, בחרו באופן שרירותי (אך קונסיסטנטי) איזה פיקסל הוא קרוב יותר.

שאלה מס׳ 5

נתונות שתי תמונות **רציפות שונות** $f(x,y), g(x,y)$. התמונות נדגמו על סריג מלבני עם מרווח D_x בציר x, D_y בציר y.
בהנחה ששתי התמונות הדגומות **זהות**, מה ניתן לומר על הערכים האפשריים של D_x, D_y?

שאלה 3

א. נמצא ביטוי לתמונה $I(x,y)$

נבחין כי במישור התדר נוכל להציג את התוצאה כמכפלה של פונקציות חלון.

$$F(u,v) = rect\left(\frac{u}{6}\right) \cdot rect\left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)$$

$$F^{-1}\left\{rect\left(\frac{u}{6}\right) \cdot rect\left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)\right\} \underset{\text{ספרביליות התמרה}}{=} F^{-1}\left\{rect\left(\frac{u}{6}\right)\right\} \cdot F^{-1}\left\{rect\left(\frac{v}{2\sqrt{3}}\right)\right\} \underset{\text{תכונת הכיווץ}}{=} 6F^{-1}\{rect(u)\}(6x) \cdot 2\sqrt{3} \cdot F^{-1}\{rect(v)\}(2\sqrt{3}y)$$

$$\underset{\text{התמרה ידועה}}{=} 6\,sinc(6x) \cdot 2\sqrt{3}\,sinc(2\sqrt{3}y) = 12\sqrt{3}\,sinc(6x)\,sinc(2\sqrt{3}y)$$

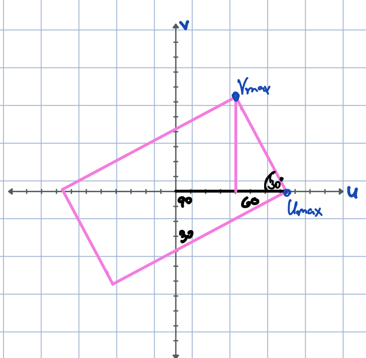
ב. סריג דגימה אופטימלי הוא תמונה כזה שאין "חפיפת" תדרים חופפים ו"אפשר" שחזור מושלם, אך כל מרווח דגימה גדול יותר הצפיפות יחסכון בזכרון.

נמצא את התדר המקסימלי בכל ציר (לאחר הסיבוב) ונמצא בתדר המינימלי שעומד בתנאי נייקוויסט.

כלומר $2 \cdot U_{max}$, $2 \cdot V_{max}$ $\Leftarrow$ $\Delta x = \frac{1}{2U_{max}}$ $\Delta y = \frac{1}{2V_{max}}$

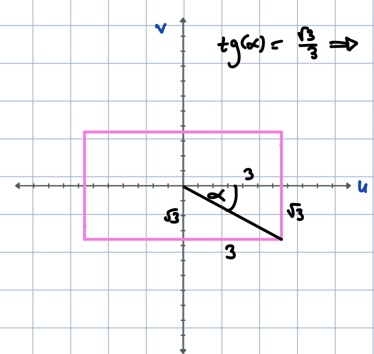
כפי שראינו בתרגול, סיבוב התמונה במקום בזווית θ גורר סיבוב באותה הזווית בתדר.

נמצא את הקודקוד המקורי ונסיק את מיקום הקודקודים החדשים:



$\alpha = 30°$ ולכן לאחר סיבוב של $30°$ אלכסון המלבן יתלכד עם ציר u

$tg(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$



ניתן לראות כי $U_{max} = \sqrt{3^2 + \sqrt{3}^2} = 2\sqrt{3}$

$\cos(30°) = \frac{V_{max}}{3} \Rightarrow V_{max} = 3\cos(30)$

כפי שהסברנו, צריך לדגום בצפיפות פעמיים תדר הדגימה ולכן

$\Delta x = \frac{1}{2U_{max}} = \frac{1}{4\sqrt{3}}$

$\Delta y = \frac{1}{2V_{max}} = \frac{1}{6}$

שאלה 4:

א. <u>אינטרפולצית שכן קרוב:</u> באינטרפולצית שכן קרוב בוחרים לייצג כל פיקסל שלא היה שייך לתמונה המקורית לפי ערכו של הפיקסל הקרוב ביותר אליו שהיה שייך לתמונה המקורית. מכיון:

$$\tilde{g}[k,l]=g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right]=g\left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor D_x,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor D_y\right),\ k,l\in[-2N,-2N+1,\dots,2N]$$

בחרנו לבצע את האינטרפולציה באמצעות ערך תחתון אבל גם באמצעות ערך עליון היינו מקבלים תוצאה נכונה. ניתן לראות כי אם ערך של פיקסל היה שייך לתמונה המקורית $g[m,n]$, אזי לאחר הקטנת תדר הדגימה נקבל כי מיקומו החדש הנו $\tilde{g}[k,l]=g[2m,2n]$ ולכן הנוסחה תניב את ערכו המקורי:

$$\tilde{g}[k,l]=g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right]=g\left[\left\lfloor\frac{2m}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{2n}{2}\right\rfloor\right]=g[m,n]$$

ב. <u>אינטרפולציה בילינארית:</u> באינטרפולציה בילינארית בוחרים את ערכו של פיקסל שאינו שייך לתמונה המקורית באמצעות פונקציה לינארית שמקדמיה נקבעים לפי ארבעת הפיקסלים הקרובים ביותר לדגימה $\tilde{g}[k,l]$.

$$g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right]\quad g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right]\quad g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right]\quad g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right]$$

באמצעות הערכים הנ"ל נוכל למצוא את המקדמים שפותרים את מערכת המשוואות:

$$\begin{bmatrix} 1 & \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor D_x & \left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor D_y & \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor D_xD_y \\ 1 & \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor D_x & \left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)D_y & \left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor\left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)D_xD_y \\ 1 & \left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1\right)D_x & \left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor D_y & \left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1\right)\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor D_xD_y \\ 1 & \left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1\right)D_x & \left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)D_y & \left(\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1\right)\left(\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right)D_xD_y \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a_{00} \\ a_{10} \\ a_{01} \\ a_{11} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right] \\ g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor\right] \\ g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right] \\ g\left[\left\lfloor\frac{k}{2}\right\rfloor+1,\left\lfloor\frac{l}{2}\right\rfloor+1\right] \end{bmatrix}$$

לאחר מציאת המקדמים ניתן לייצג את התמונה לאחר האינטרפולציה כך:

$$\tilde{g}[k,l]=a_{00}+a_{10}k+a_{01}l+a_{11}k\cdot l$$

6. <u>אינטרפולציית bicubic</u>: באינטרפולציה ביליניארית בוחרים את ערכו של פיקסל שאינו שייך לתמונה המקורית באמצעות פולינום ממעלה שלישית שמקדמיו נקבעים לפי 16 הפיקסלים הקרובים ביותר לדגימה $\tilde{g}[k,l]$.

$g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+1\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+1\right]$

$g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1\ \lfloor\frac{l}{2}\rfloor+2\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+2,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+2\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+2,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+2\right]$

$g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+2,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right]$

$g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+2\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor+2,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor+1\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-1,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-2\right]$ $\quad g\left[\lfloor\frac{k}{2}\rfloor-2,\lfloor\frac{l}{2}\rfloor-1\right]$

כעת בדומה לסעיף הקודם נפתור מערכת משוואות כאשר החזקות הן לכל היותר מסדר שלישי:

$$\tilde{g}[m,n] = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} a_{ij}x^i x^j$$

3. <u>אינטרפולציה אידיאלית</u>:

$$\tilde{g}[k,l] = \sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-N}^{N} g[m,n]\cdot \mathrm{Sinc}\left(\frac{k-m_x D_x}{D_x}, \frac{l-n_y D_y}{D_y}\right)$$

בשחזור אידיאלי ניתן לראות כי כל נקודה בשחזור תלויה בכל הדגימות מהתמונה המקורית.

שאלה 5:

נתונות $g(x,y)$, $f(x,y)$ תמונות רציפות שונות אשר נדגמו על סריג מלבני עם מרווחי דגימה D_x בציר x ו-D_y בציר y. לפי הנתון מתקיים כי:

$$f(mD_x,nD_y)=g(mD_x,nD_y)\quad \forall m,n\in\mathbb{N}$$

מכיון שדגמנו באמצעות סריג בעל המרווחים הנ"ל, נקבל שכפולים של האות במלבן אשר מוגדר ע"י: $\left[-\frac{1}{D_x},\frac{1}{D_x}\right]\cap\left[-\frac{1}{D_y},\frac{1}{D_y}\right]$.

מכיון שהתמונות לאחר השחזור זהות אזי התרחשה תופעת התחלפות, כלומר לפחות אחת התמונות התחלפה.

לא עמדנו בתנאי ניקוויסט. מכאן 2 אפשרויות

1) תמונה חסומת סרט:

מרחקי הדגימות אינם מספיק קטנים בשביל שנעמוד בתנאי ניקוויסט. מכאן כי בהכרח מתקיים:

$$\frac{1}{D_x}<2U_{max}\quad \text{ו/או}\quad \frac{1}{D_y}<2V_{max}$$

כאשר U_{max}, V_{max} הם התדרים המקסימליים בכל אחד מהצירים.

2) התמונה אינה חסומת סרט: לא נוכל להציב תנאים על D_x, D_y שכן U_{max}, V_{max} אינם מוגדרים (אינסופיים).