חשבון אינפיניטסימלי 2 | 80132

הרצאות | מר איתמר צביק

כתיבה | נמרוד רק

תשפ"א סמסטר א'

תוכן העניינים

שבוע $\mathbb{I}$ | הנגזרת ומשפטי ערך ביניים

הרצאה 1

הגדרה יהי $I \subseteq \mathbb{R}$. נאמר כי I הוא קטע לא מנוון אם הוא לא ריק ולא מצטמצם לנקודה.

הערה נזכור כי עבור $f : A \to B$ נקרא ל-A התחום ול-$a \in A$ מקור וכן ל-B נקרא טווח ול-$b \in B$ נקרא תמונה. בנוסף, נסמן $\underline{dom}\ f = A, \underline{codom}\ f = B$.

משפט (קריטריון קרתיאודורי) יהיו $I \subseteq \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. f גזירה ב-a אם"ם קיימת $\varphi : I \to \mathbb{R}$ רציפה ב-a שמקיימת $\forall x \in I$, $f(x) - f(a) = \varphi(x)(x-a)$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח גזירות. נגדיר $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(x) & x = a \end{cases}$. $dom(\varphi) = D_\varphi = I$. לפי ההנחה

$$\varphi(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

לכן φ רציפה ב-a. נשים לב כי עבור $x \neq a$, $\varphi(x)(x-a) = f(x) - f(a)$ מהעברת אגפים ועבור $x = a$,

$$0 = \varphi(a)(a-a) = f(a) - f(a) = 0$$

$\Rightarrow$: נניח את נכונות הקריטריון. עבור $x \neq a$ מתקיים $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. מהיות φ רציפה ב-a קיים הגבול

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

לכן f גזירה ב-a ובמקרה הזה גם הרציפות של φ ב-a מבטיחה כי $\varphi(a) = f'(a)$. ■

דוגמות

1. $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ היא פונקצית דיריכלה. היא לא רציפה (וכמובן לא גזירה) ב-0 (מתדברת בסביבה הזו כי אפשר למצוא סדרה אינסופית של מספרים אי רציונאליים ולהשתמש בהיינה).
2. $g(x) = x \cdot D(x)$ היא רציפה (חסומה $\times$ מתאפסת) אבל לא גזירה ב-0.
3. $h(x) = x^2 \cdot D(x)$ היא גם רציפה (באותו האופן כמו g) וגזירה כי קיימת $\varphi(x) = x \cdot D(x)$ המקיימת

$$(x-0) \cdot xD(x) = h(x) - h(0) = x^2 D(x)$$

4. נגדיר $f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. f לא רציפה (ולכן גם לא גזירה) ב-0 (מתבדרת).

5. $g(x)=x\cdot f(x)$ היא רציפה (חסומה $\times$ אפסה) אבל לא גזירה ב-0.

6. $h(x)=x^2 f(x)$ היא רציפה (כמו g) וגזירה כי קיימת $\varphi(x)=x\cdot f(x)$ (בדומה לדיריכלה).

משפט יהיו $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to\mathbb{R}$ פונקציות הפוכות זו לזו מונוטוניות חזק ורציפות. יהי $a\in I$. כך ש-$J=f(I)$. אם f גזירה ב-a ומתקיים $f'(a)\neq 0$ אז g גזירה בנקודה $f(a)=b$ ומתקיים $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.

הוכחה: לפי ההנחה f גזירה ב-a, לכן לפי קרתיאודורי קיימת $\varphi:I\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש-$\forall x\in I, f(x)-f(a)=\varphi(x)(x-a)$ וכן $\varphi(a)=f'(a)$. נסמן $y=f(x)$ ו-$g(y)=x$. $y-b=(g(y)-g(b))\cdot\varphi(g(y))$. לפי הרציפות של φ ב-a, $\exists V\subseteq I$ כך ש-$a\in V$ וכן $sign(\varphi(x))=sign(\varphi(a))$ (ובפרט $\varphi(x)\neq 0$), $\forall x\in V$. נסמן $U=f(V)$. $\forall y\in U$ מתקיים $\varphi(g(y))\neq 0$ לכן $\forall y\in U, g(y)-g(b)=(y-b)\cdot\frac{1}{\varphi(g(y))}$ (מהעברת אגפים). g רציפה ב-b כי g מונוטונית על קטע ותמונתה קטע. φ רציפה ב-$a=g(b)$ ולכן $\psi=\frac{1}{\varphi(g(y))}$ גם היא רציפה ב-b ולכן מקרתיאודורי נוכל להסיק כי g גזירה ב-b ומתקיים

$$g'(b)=\psi(b)=\frac{1}{\varphi(g(b))}=\frac{1}{\varphi(a)}=\frac{1}{f'(a)}$$

■

תרגול 1

תרגיל תהי f פונקציה גזירה ב-$x_0\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$ קיים. הביעו את ערכו בעזרת $f'(x_0)$.

פתרון

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}&=\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0+3h)}{h}\\&=\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{h}-\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}\\&=-2\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}-3\frac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{3h}\\&\xrightarrow[h\to 0]{(*)}-2\cdot f'(x_0)-3\cdot f'(x_0)=-5f'(x_0)\end{aligned}$$

$(*)$

$$f'(x_0)=L\in\mathbb{R}\iff\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L\overset{\text{היינה}}{\iff}\forall(x_n)_{n=1}^{\infty}\ \Big|\ {\scriptstyle x_n\neq x_0 \atop x_n\to x_0}\ \Big|\ \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\underset{n\to\infty}{\to}L$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0)}{-2h}=L \overset{\text{היינו}}{\iff} \frac{f(x_0-2h_n)-f(x_0)}{-2h_n}\underset{n\to\infty}{\to} L \quad \forall\,(h_n)_{n=1}^{\infty}\ \Big|\ {\scriptstyle h_n\neq 0 \atop h_n\to 0} \overset{(**)}{\iff}$$

$(**)\Leftarrow$: תהי $(h_n)_{n=1}^{\infty}\ \Big|\ {\scriptstyle h_n\neq 0 \atop h_n\to 0}$. נבחר $x_n=x_0-2h_n$ ונשים לב כי היא מקיימת $x_n\to x_0$ וגם $x_n\neq x_0$. לכן מההנחה נובע כי $\frac{f(x_0-2h_n)-f(x_0)}{-2h_n}$.

$\Rightarrow$: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}\ \Big|\ {\scriptstyle x_n\neq 0 \atop x_n\to 0}$ נחפש סדרה h_n מתאימה. היא צריכה לקיים $x_n=x_0-2h_n \iff h_n=\frac{x_0-x_n}{2}$ מכאן, $h_n\to 0$ וגם $h_n\neq 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0-2h_n)-f(x_0)}{-2h_n}=L$.

למה (כלל ההצבה -תזכורת) אם מתקיים

(i) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=h_0$.

(ii) $\lim\limits_{h\to h_0}g(h)=L$.

(iii) קיימת סביבה מנוקבת של x_0 כך ש-$f(x)\neq h_0$, $\forall x$ בסביבה הנ"ל.

אזי $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=L$.

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת ע"י $f(x)=\sin x$. הוכיחו כי f גזירה, $\forall x_0\in\mathbb{R}$ והוכיחו כי $f'(x_0)=\cos x_0$.

פתרון נוכיח את קיום הגבול של הנגזרת.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\sin x-\sin x_0}{x-x_0}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{2\sin(\frac{x-x_0}{2})\cos(\frac{x+x_0}{2})}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\underbrace{\frac{\sin(\frac{x-x_0}{2})}{\frac{x-x_0}{2}}}_{\overset{(**)}{\to}1}\cdot\underbrace{\cos(\frac{x+x_0}{2})}_{\overset{(***)}{\to}\cos(x_0)}=\cos x_0$$

$(*)$ מהזהות הטריגונומטרית $\sin x-\sin y=2\sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2})$.

$(**)$ נזכור כי $\frac{\sin t}{t}\underset{t\to 0}{\longrightarrow}1$. נגדיר $f(x)=\frac{x-x_0}{2}$, $g(h)=\frac{\sin h}{h}$. נשים לב כי $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$ וגם $f(x)\neq 0$, $\forall x$ ולכן $\lim\limits_{x\to x_0}g(f(x))=\lim\limits_{h\to 0}g(h)=1$.

$(***)$ $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{2}=\frac{x_0+x_0}{2}=x_0$ ומרציפות $\lim\limits_{x\to x_0}\cos(\frac{x+x_0}{2})=\cos(\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x+x_0}{2})$.

למה (נגזרת היא תכונה מקומית) יהיו $x_0\in\mathbb{R}$, U סביבה של x_0, ו-f,g המתלכדות על U. כלומר, $f(x)=g(x)$, $\forall x\in U$. אז f גזירה ב-x_0 אם"ם g גזירה ב-x_0.

הוכחה: $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, $\forall x\in U$. בגלל שגבול הוא תכונה מקומית, הגבול של אגף שמאל ב-$x\to x_0$ קיים אם"ם הגבול של אגף ימין קיים. ■

תרגיל נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq 0\\ -x^2 & x<0\end{cases}$. מצאו את כל הנקודות בהן f גזירה, וחשבו את $f'(x_0)$.

פתרון אם $x_0\geq 0$ אז f מתלכדת עם $g(x)=x^2$ בסביבה $U=\left(x_0-\frac{1}{3}x_0,x_0+\frac{1}{3}x_0\right)$. $\forall x\in\left(\frac{2}{3}x_0,\frac{4}{3}x_0\right)$ מתקיים $x\geq 0$ ולכן $f(x)=x^2$ בסביבה זו. לכן מהלמה, $f'(x_0)=g'(x_0)=2x_0$.

אם $x_0<0$ אז f מתלכדת עם $h(x)=-x^2$ בסביבה $V=(2x_0,0)$. לכן שוב מהלמה, $f'(x_0)=h'(x_0)=-2x_0$. נותר לבדוק

ב-$x_0 = 0$. נעשה זאת מההגדרה. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$. נתבונן בנפרד בגבולות החד-צדדיים.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

לכן הגבול הדו כיווני קיים ושוה ל-0 $f'(0) = 0$.

תרגיל נתונה פונקציה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. מצאו את כל הנקודות שבהן היא גזירה וחשבו את הנגזרת

פתרון נשתמש בכללי גזירה

$$f'(x) = \left(x^2 \sin(\frac{1}{x})\right)' = (x^2)' \sin\frac{1}{x} + x^2 \left(\sin\frac{1}{x}\right)' \overset{x\neq 0}{=} 2x \sin\frac{1}{x} + \cancel{x^2} \cdot \cos\frac{1}{x} \cdot -\cancel{\frac{1}{x^2}} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

עבור $x = 0$ נבדוק מההגדרה

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{x} \overset{\text{ח×מ}}{=} 0$$

לכן $f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

תרגיל נגדיר $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \sqrt{6x-3}$. הוכיחו ש-f גזירה ב-$x_0 = 2$ ומצאו את $f'(x_0)$.

פתרון

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6x-3}-3}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6x-3}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{6x-3}+3}{\sqrt{6x-3}+3} = \lim_{x\to 2} \frac{6x-3-9}{(x-2)(\sqrt{6x-3}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}\cdot 6}{\cancel{(x-2)}(\sqrt{6x-3}+3)} = \lim_{x\to 2} \frac{6}{\sqrt{6x-3}+3} = \frac{6}{6} = 1 = f'(2)\end{aligned}$$

הרצאה 2

משפט (דרבו) יהי $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה ו-$[a,b] \subseteq I$ כך ש-$a < b$. אזי $\forall d$ כך ש-$f'(a) < d < f'(b)$, $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$f'(c) = d$.

הוכחה: נניח כי $f'(a) < 0 < f'(b)$. מהיות f רציפה בקטע $[a,b]$, $\exists x_{min} \in [a,b]$ (מויירשטראס) כך ש-$f(x_{min}) \leq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.
לכן $\exists p \in (a,b)$ כך ש-$0 > \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ $(*)$, כלומר $f(x) < f(a)$, $\forall x \in (a,p)$.

בנוסף לכך, $\exists q \in (a,b)$ כך ש-$0 < \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$ (באותו האופן כמו $(*)$), כלומר $f(x) < f(b)$, $\forall x \in (q,b)$ ולכן $x_{min} \in (a,b)$. נסמן $c := x_{min}$ ולפי משפט פרמה מתקיים $f'(c) = 0$.

$(*)$ מהיות $0 < \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \lim_{x \to a^+} = f'_+(a)$ קיימת סביבה ימנית של a כך ש-$0 < \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

עתה נניח כי $f'(a) < d < f'(b)$. נתבונן ב-$g(x) := f(x) - d \cdot x$. לפי אשג"ז g מוגדרת וגזירה ב-I ומקיימת

$$g'(a) = f'(a) - d < 0 < f'(b) - d = g'(b)$$

לכן לפי המקרה הקודם, $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$0 = g'(c) = f'(c) - d$ ולכן $f'(c) = d$.

אם $f'(b) < d < f'(a)$ נתבונן ב-$h := -f$ וננמק בצורה דומה. ■

משפט (לגרנז') תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$. נניח כי f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) אזי $\exists c \in (a,b)$ כך ש-

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

הוכחה: נגדיר פונקציית עזר $\psi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. נשים לב כי היא מקיימת $\psi(a) = \psi(b)$, רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) ולכן ממשפט רול $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$0 = \psi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ולכן $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. ■

הערה נזכור כי במשפט הרול האינטואיציה הגאומטרית אומרת שאם יש שתי נקודות שתמונותיהם שוות אז איפה שהוא באמצע יש נקודה אופקית לציר x. הרעיון בהגדרת פונקציית העזר בלגרנז' הוא "להטות" את הפונקציה כך שהנקודות a, b יהיו בעלות תמונה שווה וה"קו המחבר" ביניהן יהיה אופקי לציר x (כמו ברעיון הגאומטרי שעומד מאחורי רול) כדי שנוכל להשתמש ברול.

מסקנה (מלגרנז') תהי $f : I \to \mathbb{R}$.

(i) אם $f' = 0$ אזי $f = k$, $k \in \mathbb{R}$.

(ii) אם $f' > 0$ אזי f מונוטונית עולה חזק.

(iii) אם $f' < 0$ אזי f מונוטונית יורדת חזק.

הוכחה: יהיו $a, b \in I$. מלגרנז' $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$0 \iff f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ולכן $f(a) \iff f(b)$ ומכאן עבור המקרה הראשון f קבועה ובאותו האופן למקרים האחרים. ■

הרצאה 3

משפט (קושי) תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש-$a < b$. נניח כי f, g רציפות ב-$[a,b]$ וגזירות ב-(a,b) ובנוסף $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$. אזי $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הוכחה: נשים לב כי $g(a) \neq g(b)$ כי אחרת ממשפט רול $\exists t \in (a,b)$ כך ש-$g'(t) = 0$ בסתירה להנחה. נגדיר פונקציית עזר $\varphi(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. נשים לב כי φ מוגדרת היטב, רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) ולכן מרול $\exists c \in (a,b)$ כך ש-$0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)$ ולכן $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. ■

הגדרה $e := \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ (הוכחנו באינפי 1 כי הסדרה עולה וחסומה מלעל ולכן הגבול קיים). הראנו בנוסף כי

$$e^x := \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n$$

הערה $(e^x)' = e^x$.

טענה אם f גזירה ב-$\mathbb{R}$ כך ש-$f' = f$ וכן $f(0) = 1$. אז $f(a+b) = f(a)\cdot f(b)$.

הוכחה: יהיו $a,b \in \mathbb{R}$. נתבונן ב-$g(x) := f(a+b-x)\cdot f(x)$. נשים לב כי g קבועה כי

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(a+b-x)\cdot(-1)\cdot f(x) + f(a+b-x)\cdot f'(x) \\ &= f'(x)\cdot f(a+b-x) - f(x)\cdot f(a+b-x) \overset{f=f'}{=} 0 \end{aligned}$$

$$g(0) = f(a+b)\cdot f(0) = f(a+b), \quad g(b) = f(a+b-b)\cdot f(b) = f(a)\cdot f(b)$$

ומקביעות g, $f(a+b) = g(0) = g(b) = f(a)\cdot f(b)$. ■

מסקנה $\exp(x) = \exp(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}) = \exp(\frac{x}{2})\cdot\exp(\frac{x}{2}) = \exp^2(\frac{x}{2})$ ולכן $\exp \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ולכן גם $\exp' \geq 0$.

מסקנה $\exp(x)\cdot\exp(-x) = \exp(0) = 1$ לכן $\exp > 0$ וגם $\exp' > 0$ ולכן גם $\exp$ עולה חזק. מעבר לכך,

$$0 < \exp'' = \exp' = \exp$$

ולכן $\exp$ קמורה.

הערה מעתה נסמן $f := \exp$.

מסקנה $f(x) \geq 1 + x$, $\forall x \geq 0$.

הוכחה: נגדיר $d(x) := f(x) - (1+x)$ ונשים לב כי מתקיים $d'(x) = f'(x) - 1 = f(x) - 1$. $d' \geq 0$, $\forall x > 0$ ולכן $d(x) \geq d(0) = 0$ ולכן $f(x) - (1+x) \geq q0$. ■

מסקנה $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ (מטוסט).

מסקנה $1=f(0)=f(x)\cdot f(-x)$ ולכן $f(x)=\frac{1}{f(-x)}$ ולכן $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

מסקנה $Im\exp=\mathbb{R}_{>0}$ ולכן $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_{>0}$ היא פונקציה חח"ע ועל ולכן הפיכה ולכן קיימת לה פונקציה הפוכה שנסמנה $\ln x=\exp^{-1}x$.

טענה $\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y$.

הוכחה: $\ln(x\cdot y)=\ln(\exp(\ln x)\cdot\exp(\ln y))=\ln(\exp(\ln x+\ln y))=\ln x+\ln y$. ■

מסקנה $\ln' x=\frac{1}{x}$.

הוכחה: $\ln' y=\frac{1}{\exp'(\ln y)}=\frac{1}{\exp(\ln y)}=\frac{1}{y}$. ■

קמירות (משפטים שחשוב לדעת אבל הם לא חומר למבחן)

הגדרה נאמר כי $f:I\to\mathbb{R}$ קמורה ב-$I\subseteq D_f$ כאשר $\forall a,b$ כך ש-$a<b$ מתקיים $f(x)\le f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $\forall x\in(a,b)$.

משפט תהי $f:I\to\mathbb{R}$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f קמורה.

(ii) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(b)-f(x)}{b-x}$, $\forall x\in(a,b)$.

(iii) $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ עולה $\forall x\in I$.

(iv) $f((1-t)\cdot a+b\cdot t)\le(1-t)f(b)+f(a)t$, $\forall t\in(0,1)$.

הוכחה: $(i)\Leftarrow(ii)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ מהעברת אגפים על ההגדרה.

$$-f(x)\ge-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)=-f(a)-(f(b)-f(a))(1-\frac{b-x}{b-a})=-f(a)-((f(b)-f(a))-\frac{(f(b)-f(a))(b-x)}{b-a})$$

$$=-f(a)-f(b)+f(a)+\frac{(f(b)-f(a))(b-x)}{b-a}=-f(b)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-x)$$

ולכן $\frac{f(b)-f(x)}{b-x}\le\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$(ii)\Leftarrow(iii)$: יהיו $x,y\in[a,b]$ כך ש-$x<y$. נביט בקטע $[a,y]$, מהתנאי הקודם $\frac{f(y)-f(a)}{y-a}\le\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$(iii)\Leftarrow(i)$: נתבונן ב-$[a,b]$ נשים לב כי $x<b$ ולכן מההנחה $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\le\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ולכן $f(x)\le f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$.

$(iv) \iff (i)$: נשים לב כי $\forall x \in (a,b)$, $\exists t \in (0,1)$ כך ש-$x = (1-t)\cdot a + b\cdot t$ ($1 > \frac{x-a}{b-a} = t > 0$). נשים לב כי האגף השמאלי של שני האי שוויונות שנרצה להוכיח שהם שקולים הוא זהה -פשוט אחד כתוב x והאחר בתור הגרסה של x שתלויה במשתנה t. לכן מספיק שנוכיח כי שני האגפים הימניים שווים

$$f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}((1-t)a+bt-a) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}((b-a)(1-t))$$

$$= f(a) + (f(b)-f(a))(1-t) = (1-t)f(b) + f(a)t$$

נשים לב כי המשוואה היא דו כיוונית ולכן מוכיחה את שני הכיוונים. ■

משפט תהי $f : I \to \mathbb{R}$ גזירה.

f קמורה אם"ם f' עולה ורציפה.

אם f גזירה פעמיים אז f קמורה אם"ם $f'' \geq 0$.

הוכחה: יהיו $s,t \in I$ כך ש-$s < t$. יהי $x \in (s,t)$ לכן מהתנאי השקול הראשון $\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq \frac{f(t)-f(s)}{t-s} \leq \frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ ולכן ממונוטוניות הגבול $f'(s) = \lim_{x\to s}\frac{f(x)-f(s)}{x-s} \leq \lim_{x\to t}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = f'(t)$ ולכן f' עולה. בנוסף, f' רציפה כי היא פונקציה עולה שתמונתה היא קטע (היא מקיימת IVT).

עתה נניח כי f' עולה ונוכיח כי f קמורה. יהיו $a,b,x \in \mathbb{R}$ כך ש-$I \supseteq (a,b) \ni x$. ממשפט לגרנז' עבור $[a,x]$ ו-$[x,b]$ קיימים $s \in (a,x)\,, t \in (x,b)$ כך ש-$\frac{f(b)-f(x)}{b-x} = f'(t) \geq f'(s) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ולכן f קמורה.

אם f קמורה וגזירה פעמיים אז $f'' \geq 0$ כי f' עולה (הוכחנו למעלה). אם $f'' \geq 0$ אז f' עולה ורציפה ולכן היא קמורה. ■

משפט אם f קמורה בקטע הפתוח I אז f רציפה ב-I, f בעלת ניגזרות חד צדדיות בכל נקודה ב-I. כמו כן f ליפשיצית בכל תת-קטע סגור של I.

הוכחה: יהי $t \in I$. מהיות I קטע פתוח נוכל לבחור a,b כך ש-$t \in (a,b) \subseteq I$.

$\forall x \in (a,t)$ (בסביבה שמאלית של t) מתקיים $M =: \frac{f(b)-f(t)}{b-t} \geq \frac{f(t)-f(x)}{t-x} \geq \frac{f(t)-f(a)}{t-a} =: m$ (נפעיל את התנאי השקול הראשון על $t \in (x,b)$ ואז על $x \in (a,t)$) ולכן $(t-x)m \leq f(t)-f(x) \leq (t-x)M$ ולכן מסנדביץ' $\lim_{x\to t^-} f(t)-f(x) = 0$.

באותו האופן $\forall x \in (t,b)$ (בסביבה ימנית) $M =: \frac{f(b)-f(t)}{b-t} \geq \frac{f(x)-f(t)}{x-t} \geq \frac{f(t)-f(a)}{t-a} =: m$ ולכן

$$(x-t)m \leq f(x)-f(t) \leq (x-t)M$$

ולכן מסנדביץ' $\lim_{x\to t^-} f(t)-f(x) = 0$. לכן הגבולות החד צדדיים שווים ולכן f רציפה ב-I.

$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ עולה בקטע (a,t) וחסומה מלמעלה על ידי $M := \frac{f(b)-f(t)}{b-t}$ ולכן קיים $f_-(t) := \lim_{x\to t^-}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ (פונקציה עולה וחסומה מלעל בסביבה כלשהי שואפת ל-sup של קבוצת כל ערכיה בסביבה זו). באותו האופן $\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ עולה בקטע (t,b) וחסומה מלמטה על ידי $m := \frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ ולכן קיים $f_+(t) := \lim_{x\to t^+}\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$ ולכן שתי הנגזרות החד צדדיות קיימות לכל נקודה ב-I.

עבור $[a,b]\subseteq I$ כך ש-$a<b$ אז $\forall s\in[a,b]\setminus\{t\}$, $f'_+(a)\le\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\le f'_-(b)$ (ממונוטוניות הגבול כשמשאיפים את t ל-a ו-b). לכן $\exists K>0$ כך ש-$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}\right|\le K$ ומכאן ש-f היא ליפשיצית ב-$[a,b]$. ■

שבוע $\mathbb{III}$ | לופיטל ואיפיון פונקציות בעזרת הפולינום של טיילור

הרצאה 4

משפט יהיו f,g גזירות ב-(a,b) כך ש-$-\infty\le a<b\le\infty$ ומתקיים $g'\neq 0$ ב-(a,b). נניח כי קיים הגבול $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$. אם

$\lim_{x\to a}f(x)=0=\lim_{x\to a}g(x)$ (i)

או

$\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ (ii)

אז $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

הערה $g'\neq 0$ ב-(a,b) לכן לפי משפט דרבו $sign\ g'$ קבוע. אז g מונוטונית ממש. ניתן להניח כי $g\neq 0$ ב-(a,b) (ואם יש צורך מקטינים את b).

הוכחה: נניח כי $-\infty\le L<\infty$. נוכיח כי $\forall q>L$, קיים $a<c<b$ כך ש-$\forall x\in(a,c)$, $\frac{f(x)}{g(x)}<q$. יהי q $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L<q$. נבחר $L<r<q$. יהי $a<c_q<b$ כך ש-$\forall x\in(a,c_q)$, $\frac{f'(x)}{g'(x)}<r$. לכן מקושי $\forall s,t\in(a,c_q)$, קיים $s<\xi<t$ כך ש-$\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ כלומר אם $s,t\in(a,c_q)$ אזי $\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}<r<q$.

אם (i) מתקיים אז נקבע $t\in(a,c_q)$ ולכן $\frac{f(t)}{g(t)}\overset{\text{אש"ג}}{=}\lim_{s\to a}\frac{f(t)-f(s)}{g(t)-g(s)}$ וממונוטוניות הגבול $\frac{f(t)}{g(t)}\le r<q$. לכן אם $L=-\infty$ אז $\lim_{t\to a}\frac{f(t)}{g(t)}=-\infty$. אם $L\in\mathbb{R}$ אז $\forall p<L$ באותו האופן $\exists c_p\in(a,b)$ כך ש-$p<\frac{f(t)}{g(t)}$. אם ניקח $c:=\min\{c_p,c_q\}$ אז $\forall t\in(a,c)$ נקבל $p<\frac{f(t)}{g(t)}<q$.

עבור $L=\infty$ ניתן להוכיח באופן דומה. ■

דוגמות

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0}2\sqrt{x}\cos x=1\cdot 0=0$.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$. כלומר ברמת העיקרון עבור $x\approx 0$ מתקיים $\cos x\approx 1-\frac{1}{2}x^2$. אם נסתכל בסביבה של 0 נשים לב שהגרפים של שתי הפונקציות במשוואה הנ"ל מאוד דומים. בהמשך נראה שזה מגיע בדיוק מקירוב פולינומיאלי של $\cos x$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to0}e^x=e^0=1$.
4. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{1}{x}}{1}=1$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$.

תרגיל הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה. בסיס: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$.

$n-1\to n$: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{n\cdot x^{n-1}}\overset{\text{ה"א}}{=}\infty$. ■

מסקנה e^x גדול (כמעט תמיד) מכל פולינום.

דוגמה $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L'H}{=}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

מסקנה ניתן להוכיח כמו קודם כי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^n}=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ולהסיק כי $\ln x$ קטן מכל פולינום.

דוגמה

$$\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$$

דוגמה

$$\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x-x}{x\sin x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{-\sin x}{2\cos x-x\sin x}=\frac{-\sin 0}{2\cos 0-0\sin 0}=0$$

הגדרה $a^x:=e^{\ln a^x}=e^{x\ln a}$, $1\neq a<0$.

דוגמה $\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

תרגול 2

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ב-$\mathbb{R}$. הוכיחו כי f' אי-זוגית.

פתרון נתון $f(x)=f(-x)$ כלומר אם נגדיר $g(x)=-x$ אז $f(x)=f(g(x))$. לכן

$$f'\left(x\right)=f'(g\left(x\right))=f'(g(x))\cdot g'(x)=-f'(-x)$$

תרגיל הוכיחו שנגזרת של הפונקציה $f(x)=\left\{\begin{smallmatrix}\frac{1}{2}x+x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{smallmatrix}\right.$ חיובית ב-$x_0=0$ ולמרות זאת, f איננה מונוטונית (עולה) באף סביבה של 0.

פתרון עבור $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{1}{2}+2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$ ובנוסף

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}+x\sin\frac{1}{x}\overset{\text{מ}\times\text{ח}}{=}\frac{1}{2}>0$$

נניח בשלילה כי הפונקציה מונוטונית עולה בסביבה של 0, אז הנגזרת שלה תהיה אי שלילית בסביבה. אבל הסדרה $x_n=\frac{1}{2\pi n}$ קרובה כרצוננו לאפס ומקיימת

$$f'(x_n)=\frac{1}{2}+\frac{\sin(2\pi n)}{\pi n}-\cos(2\pi n)=-\frac{1}{2}<0$$

והגענו לסתירה כי כל סביבה של 0 תכיל איזשהו x_n שעבורו $f'(x_n)<0$.

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה, $f(0)=0$. וגם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$. הוכיחו שקיים $c\in(0,\infty)$ שעבורו $f'(c)=0$.

פתרון אם $f(x)=0$ לאיזשהו $x\in(0,\infty)$ אז ממשפט רול, $\exists c\in(0,x)$ כך ש-$f'(c)=0$.

אם $f(x)\neq 0$, $\forall x\in(0,\infty)$ אז f לא משנה סימן. נניח בה"כ ש-f חיובית (אם f שלילית אז נביט ב-$-f$ ונוכיח כי $(-f)'(c)=0$ שזה מספיק). נסמן $\lambda=f(1)$. משום ש-$f(0)=0<\frac{\lambda}{2}<\lambda=f(1)$ אז ממשפט ערך הביניים $\exists d\in(0,1)$ כך ש-$f(d)=\frac{\lambda}{2}$. בנוסף, מהיות $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, נובע כי $\exists M\in\mathbb{R}$ כך ש-$\forall x>M$ מתקיים $f(x)<\frac{\lambda}{2}$ לכן $f(M+1)<\frac{\lambda}{2}<\lambda=f(1)$. שוב, מערך הביניים, $\exists e\in(1,M+1)$ כך ש-$f(e)=\frac{\lambda}{2}$. מצאנו $f(d)=\frac{\lambda}{2}=f(e)$, $d\neq e$ אז ממשפט רול, $\exists c\in(d,e)$ עם $f'(c)=0$.

תרגיל יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a\in(0,1)$. הראו כי למשוואה $x-a\sin x=b$ יש פתרון ממשי יחיד.

פתרון נגדיר $h(x)=x-a\sin x-b$ ולכן מספיק שנמצא $x\in\mathbb{R}$ כך ש-$h(x)=0$ וכן $\forall x,y\in\mathbb{R}$ כך ש-$h(x)=h(y)=0$ מתקיים $x=y$. נשים לב כי

$$h(b+2)=b+2-a\sin(b+2)-b=2-a\sin(b+2)>2-1=1>0$$

$$h(b-2)=b-2-a\sin(b-2)-b=-2-a\sin(b-2)<-2+1=-1<0$$

לכן ממשפט ערך הביניים $\exists x\in(b-2,b+2)$ כך ש-$h(x)=0$, עתה נוכיח יחידות. מספיק להראות ש-h מונוטונית חזק. $h'(x)=1-a\cos x\overset{0<a<1}{\geq}1-a>0$. הנגזרת חיובית ממש בכל $\mathbb{R}$. לכן h עולה ממש ולכן היא מתאפסת רק פעם אחת, ולכן הפתרון למשוואה יחיד.

תרגיל האם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}$? אם כן, חשבו את ערכו.

פתרון $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x}\overset{L'H}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{\cos x}=1$.

תרגיל האם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to0}x^{x}$? אם כן, חשבו את ערכו.

פתרון נשים לב כי $x^{x}=e^{x\ln x}$.

$$\lim_{x\to0}x\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=\lim_{x\to0}-x=0$$

ולכן $\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}\overset{\text{רציפות}}{=}e^{\lim\limits_{x\to0}x\ln x}=e^{0}=1$.

תרגיל תהי f גזירה ב-$\mathbb{R}$ ומקיימת $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)>0$. הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

פתרון ננסה להשוות את f לפונקציה לינארית ששואפת ל-∞, ואז להשתמש בטוסט. נתון $\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=L>0$ אז $\exists M\in\mathbb{R}$ כך ש-$\forall x>M$ מתקיים $f'(x)>\frac{L}{2}$. מלגראנז', $\forall x>M+1$, $\exists c_{x}\in(M+1,x)$ כך ש-

$$\frac{L}{2}<f'(c_{x})=\frac{f(x)-f(M+1)}{x-(M+1)}$$

ולכן

$$\frac{L}{2}\left(x-(M+1)\right)<f(x)-f(M+1)$$

ולסיכום

$$f(M+1)+\frac{L}{2}\left(x-(M+1)\right)<f(x)$$

נשים לב כי

$$\lim_{x\to\infty}f(M+1)+\frac{L}{2}\left(x-(M+1)\right)=\infty$$

ולכן מטוסט $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

הרצאה 5

הגדרה תהי f מוגדרת בקטע $I\subseteq\mathbb{R}$ בעלת נגזרות מסדר $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ב-a אז $T_{n}f(x):=\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^{i}$ יקרא <u>הפולינום של טיילור</u> מסדר n סביב a.

הערה נרצה לתאר פונקציות לא פולינומיליות בעזרת פולינומים (לצרכי חישוב ערכים ספציפציים וכד'). הביטוי $\frac{f^{(i)}(a)}{i!}$ הוא המקדם של החזקה ה-i בפולינום שהוא "דמוי" הפונקציה הרצויה מבחינת הגרפים (עבור f שהוא פולינום וכן $a=0$ זה בדיוק הערך של המקדם בחזקה ה-i). ככל שנעלה את הדרגה n כך נוכל להגדיל את רמת הדיוק שלנו. אינטואיטיבית אפשר להגיע עם פולינומים ממעלות

גבוהות לרמות נוספות של קמירות, עקמומיות ודיוק ואין צורך להגביל את עצמנו לקו ישר (מעלה ראשונה) או פרבולה (מעלה שנייה) וכו'.

דוגמות

1. $f(x) = \exp(x)$, $a = 0$. $\exp^{(i)} = \exp$.

$$T_n \exp(x) = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

2. $g(x) = \cos x$, $a = 0$.

$$\cos^{(0)} = \cos, \quad \cos^{(1)} = -\sin, \quad \cos^{(2)} = -\cos, \quad \cos^{(3)} = \sin$$

$$T_0 \cos(x) = 1, \quad T_1 \cos(x) = 1 - \frac{0}{1!}x = 1, \quad T_2 \cos(x) = 1 - \frac{0}{1!}x - \frac{1}{2!}x^2 = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

עבור המקרה הכללי $T_n \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$ (החזקה ה-n-ית מופיעה רק בהנחה ו-n זוגי, זה רק תיאור רעיוני).

3. $h(x) = \sin(x)$. $T_n \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^n}{n!}$.

4. $k(x) = \ln x$. $a = 1$.

$$\begin{aligned} T_n \ln x &= \frac{0}{0!} + \frac{1}{1!}(x-1)^1 + \frac{-1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{4!}(x-1)^4 \\ &= (x-1)^1 - \frac{1}{2}(x-1)^1 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \cdots \pm \frac{1}{n}(x-1)^n \end{aligned}$$

מסקנה $\deg T_n f \leq n$.

הערה $f^{(i)}$ עבור $0 \leq i \leq n-1$ מוגדרת בסביבה של a.

הערה $T_n f(x)$ הוא הפולינום היחיד שמקיים $p^{(i)}(a) = f^{(i)}(a)$, $1 \leq \forall a \leq n$.

מסקנה $T_{n-j} f^{(j)} = T_n^{(j)} f$.

הרצאה 6

דוגמה $f(x)=-\ln(1-x)$.

$$f^{(1)}=(1-x)^{-1}\,,\quad f^{(2)}=1\,(1-x)^{-2}\,,\quad f^{(3)}=1{\cdot}2\,(1-x)^{-3}\,,\quad f^{(4)}=1{\cdot}2{\cdot}3\,(1-x)^{-4}\,,\quad f^{(n)}=(n-1)!\,(1-x)^{-n}$$

ועבור $x_0=0$,

$$T_nf(x)=0+1\frac{x}{1!}+1\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^3}{3!}+6\frac{x^4}{4!}+\cdots+(n-1)!\frac{x^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n}n\cdot x^k$$

עתה נגדיר $g(x)=(1-x)^{-1}$ ונשים לב כי עבורו מתקיים $T_ng(x)=\frac{1}{0!}+1!\frac{x}{1!}+2!\frac{x^2}{2!}+3!\frac{x^3}{3!}=\sum\limits_{k=1}^{n}x^k$.

משפט תהי f גזירה $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ פעמים ב-a אזי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-T_nf(x)}{(x-a)^n}=0$.

הערה נסמן גם $R_n=f(x)-T_n(x)$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה.

בסיס ($n=0$): $\lim\limits_{x\to a}f(x)-f(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-T_0f(x)}{(x-a)^0}=0$ וזה נכון כי f גזירה 0 פעמים ב-a ולכן היא רציפה.

צעד ($n-1\to n$):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_nf(x)}{(x-a)^n}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-T_n'f(x)}{n\,(x-a)^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to a}\frac{\overbrace{f'(x)}^{g(x)}-T_{n-1}f'(x)}{(x-a)^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to a}\frac{g(x)-T_{n-1}g(x)}{(x-a)^{n-1}}\overset{\text{ה"א}}{=}0$$

■

דוגמה נביט בפונקציה הקודמת שהסתכלנו עליה ונזכור כי $\frac{1-x^{n+1}}{1-x}=1+x+\cdots+x^n$ ולכן $\frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n+\frac{x^{n+1}}{1-x}$ ולכן $\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{1-x}-\left(1+x+x^2+\cdots+x^n\right)}{(x-0)^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{1-x}=0$.

טורים (השלמת חומר למי שלא למד, לא בחומר של המבחן)

הגדרה תהי (a_n) סדרה. <u>סדרת הסכומים החלקיים</u> שלה היא סדרה (S_n^a) הנתונה ע"י $S_n^a=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$. סדרת הסכומים החלקיים (S_n^a) נקראת גם הטור של (a_n).

דוגמה עבור הסדרה החשבונית $b_n=\alpha+(n-1)\,d$, סדרת הסכומים החלקיים היא $S_n^b=n\left(\alpha+\frac{d}{2}(n-1)\right)$ (למדנו בתיכון).

הגדרה סדרה (a_n) נקראת <u>ניתנת לסכימה</u> אם סדרת הסכומים החלקיים שלה (S_n^a) כלומר, הטור של (a_n), מתכנס. במקרה זה נסמן $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\lim\limits_{n\to\infty}S_n^a$.

דוגמה $a_n=(-1)^n$. סדרת הסכומים החלקיים היא $(S_n^a)=(-1,0,-1,0,\dots)$ לכן הסדרה לא ניתנת לסכימה ולכן הטור לא מתכנס.

משפט (אש"ט חיבור) תהיינה (a_n), (b_n) סדרות ניתנות לסכימה. אזי הסדרה (a_n+b_n) ניתנת לסכימה ומתקיים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k+b_k=\sum_{k=1}^{\infty} a_k+\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

הוכחה: נסמן ב-$\left(S_n^{a+b}\right)$ את סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה (a_n+b_n). נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$S_n^{a+b}=\sum_{k=1}^{n} a_k+b_k=\sum_{k=1}^{n} a_k+\sum_{k=1}^{n} b_k=S_n^a+S_n^b$$

ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n^{a+b}\overset{\text{אש"ג}}{=}\lim_{n\to\infty} S_n^a+\lim_{n\to\infty} S_n^b$. ■

משפט (אש"ט כפל) תהי (a_n) סדרה ניתנת לסכימה ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$ אזי הסדרה (αa_n) ניתנת לסכימה ומתקיים $\sum_{k=1}^{\infty}\alpha a_k=\alpha\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

הוכחה: נסמן ב-$(S_n^{\alpha a})$ את סדרת הסכומים החלקיים של הסדרה (αa_n). נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_n^{\alpha a}=\sum_{k=1}^{n}\alpha a_k=\alpha\sum_{k=1}^{n} a_k=S_n^a$ ולכן $\lim_{n\to\infty} S_n^{\alpha a}\overset{\text{אש"ג}}{=}\alpha\lim_{n\to\infty} S_n^a$. ■

משפט תהי (a_n) סדרה אי-שלילית אזי היא ניתנת לסכימה אם"ם סדרת הסכומים החלקיים שלה חסומה מלעל.

הוכחה: $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_{n+1}^a=S_n^a+a_{n+1}\geq S_n^a$ כלומר סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה. הוכחנו בעבר שסדרת מונוטונית עולה מתכנסת אם"ם היא חסומה מלעל. ■

מסקנה (מבחן ההשוואה) תהיינה (a_n), (b_n) סדרות אי-שליליות המקיימות $b_n\geq a_n$ כמעט תמיד. נניח בנוסף כי (b_n) ניתנת לסכימה אזי גם (a_n) ניתנת לסכימה.

הוכחה: נניח ש-$\forall n>N$, $a_n\leq b_n$ אזי $\forall n>N$, $\sum_{k=1}^{n} a_k=\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n} a_k\leq\sum_{k=1}^{N} a_k+\sum_{k=N+1}^{n} b_k$ ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה מלעל ולכן מהמשפט הקודם (a_n) ניתנת לסכימה. ■

משפט אם סדרה ניתנת לסכימה אזי היא מתכנסת ל-0.

הוכחה: תהי (a_n) סדרה ניתנת לסכימה, כלומר (S_n^a) היא סדרה מתכנסת. נשים לב כי $\forall n\in\mathbb{N}$, $S_{n+1}^a-S_n^a=a_{n+1}$ והוכחנו בעבר שאם סדרה מתכנסת אזי ההפרש בין איברים עוקבים מתכנס ל-0, כלומר (a_n) מתכנסת ל-0. ■

הערה נשים לב כי לא כל סדרה שמתכנסת לאפס ניתנת לסכימה. נגדיר $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ וראינו בעבר שסדרה זו מתכנסת לאפס, אבל סדרת הסכומים החלקיים לא מתכנסת.

$$S_n^a=\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)+\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)+\cdots+\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\sqrt{n}$$

היא אינה מתכנסת ולכן (a_n) אינה ניתנת לסכימה.

דוגמה האם הסדרה $a_n = \frac{1}{n}$ ניתנת לסכימה? נשים לב כי (a_n) אי-שלילית ולכן היא ניתנת לסכימה אם"ם סדרת הסכומים החלקיים חסומה מלעל נשים לב כי $\frac{n}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2} = \sum_{j=1}^{n} 2^{j-1}\frac{1}{2^j} \le \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2^{j-1}+1}^{2^j} \frac{1}{k} + 1 = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$ ולכן סדרת הסכומים החלקיים לא חסומה מלעל ולכן a_n לא ניתנת לסכימה.

משפט (תנאי קושי להתכנסות טורים) סדרה (a_n) ניתנת לסכימה אם"ם $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall m, n > N$ כך ש-$m > n$ מתקיים $\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| < \epsilon$.

הוכחה: נשים לב כי $S_m^a - S_n^a = \sum_{k=n+1}^{m} a_k$ וזה מתקיים אם"ם תנאי קושי על התכנסות סדרות (עבור הסדרה S_n^a). ■

דוגמה הסדרה (a_n) הנתונה ע"י $a_n = \frac{2+\sin^3(n+1)}{2^n+n^2}$ ניתנת לסכימה כי $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le a_n \le \frac{3}{2^n}$ ו-$b_n = \frac{3}{2^n}$ היא סדרה הנדסית שהטור שלה מתכנס.

דוגמה האם $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ ניתנת לסכימה? לא, נשים לב כי $a_n \ge \frac{1}{n}$ ולכן אם הטור של a_n היה ניתן לסכימה אז ממבחן ההשוואה $\frac{1}{n}$ גם הייתה ניתנת לסכימה בסתירה לכך שהוכחנו בעבר שהיא לא.

משפט (מבחן הגבול) תהיינה (a_n), (b_n) סדרות חיוביות המקיימות $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L \neq 0$ אזי (b_n) ניתנת לסכימה אם"ם (a_n) ניתנת לסכימה.

הוכחה: מאש"ג $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{L} \neq 0$ לכן יש סימטריה ומכאן שמספיק להוכיח כי אם (b_n) ניתנת לסכימה אז גם (a_n) ניתנת לסכימה ונסיים. נניח כי (b_n) ניתנת לסכימה. מהגבול הנתון $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n > N$, $\frac{a_n}{b_n} < L + 1$ ולכן $a_n < (L+1)\, b_n$ כמעט תמיד. לכן מש"ט כפל $(L+1)\, b_n$ ניתנת לכימה ולכן ממבחן ההשוואה (a_n) ניתנת לסכימה. ■

דוגמה נחזור לדוגמה $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ וכן $b_n = \frac{1}{n}$. נתבונן בסדרה $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n}{n^2+1} = 1 + \frac{n-1}{n^2+1}$ ונשים לב כי היא מתכנסת ל-1. בגלל ש-b_n אינה ניתנת לסכימה אז מקונטרה פוזיטיב על מבחן הגבול a_n גם היא אינה ניתנת לסכימה.

משפט (מבחן המנה של ד'אלמבר) תהי (a_n) סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$ אזי אם $r < 1$ אז הסדרה ניתנת לסכימה ואם $r > 1$ אז הסדרה לא ניתנת לסכימה.

הוכחה: נניח כי $r < 1$. מהגדרת הגבול, $\exists q \in (r, 1)$ כך ש-$\frac{a_{n+1}}{a_n}$ כמעט תמיד ($\forall n > N$ לצורך העניין) ולכן $a_{n+1} < a_n q$ כמעט תמיד וכן $a_{N+k} < a_N q^k = \left(a_N q^{-N}\right) q^{N+k}$. ולכן הסדרה חסומה מלעל כמעט תמיד ע"י הסדרה ההנדסית $b_n = \left(a_N q^{-N}\right) q^n$ שהמנה שלה (q) חיובית וקטנה מ-1 ולכן היא ניתנת לסכימה. מכאן שממבחן ההשוואה (a_n) ניתנת לסכימה.

עתה נניח כי $r > 1$. מהגדרת הגבול $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n > N$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ לכן $a_{n+1} > a_n$ כמעט תמיד. מכאן ש-a_n מונוטונית עולה כמעט תמיד והיא לא מתכנסת ל-0 וכן איננה ניתנת לסכימה. ■

דוגמה נסתכל על המקרה שעבורו $r = 1$ ונראה שתי דוגמות, אחת שניתנת לסכימה ואחת לא. נביט ב-$a_n = n$ שאיננה ניתנת לסכימה (ברור) אבל $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{1} = 1$. מצד שני, $a_n = \frac{1}{n^2}$ ניתנת לסכימה (הוכחה עוד מעט) אבל $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1$.

עתה נוכיח כי a_n מתכנסת. נביט ב-$b_n = \frac{1}{n(n-1)}$ (נגדיר ערך שרירותי (1 לצורך העניין) עבור b_1 שכן הביטוי מוגדר רק עבור $n > 1$).
נשים לב כי $\forall n > 1$, $a_n < b_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ ובנוסף $\sum_{k=1}^{n} b_k = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$ ולכן (b_n) ניתנת לסכימה וממבחן ההשוואה (a_n) גם היא ניתנת לסכימה.

דוגמה נתבונן ב-$a_n = \frac{x^n}{n!}$ כאשר $x \in \mathbb{R}$. האם הסדרה ניתנת לסכימה? $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} n!}{x^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n+1} = 0$ ולכן ממבחן המנה היא מתכנסת ולכן הסכום האינסופי $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ מוגדר.

משפט (מבחן השורש) תהי (a_n) סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r$ אזי אם $r < 1$ אז הסדרה ניתנת לסכימה ואם $r > 1$ אז הסדרה לא ניתנת לסכימה.

הוכחה: נניח כי $r < 1$. מהגדרת הגבול $\exists q \in (r, 1)$ כך ש-$\sqrt[n]{a_n} < q$ כמעט תמיד ($\forall n > N$ לצורך העניין) ולכן $a_n < q^n$ כמעט תמיד ולכן הסדרה חסומה מלעל כמעט תמיד ע"י $b_n = q^n$ שהמנה שלה (q) חיובית וקטנה מ-1 ולכן היא מתכנת וכן ממבחן השוואה גם (a_n) ניתנת לסכימה. ההוכחה עבור $r > 1$ היא מאוד דומה לזו של מבחן המנה. ■

משפט (לייבניץ) תהי (a_n) סדרה אי-שלילית מונוטונית יורדת כך ש-$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי הגבול $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k$.

הוכחה: נגדיר את הסדרה $b_n = (-1)^{n+1} a_n$. נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S^b_{2n+1} = S^b_{2n} + b_{2n+1} = S^b_{2n} + a_{2n+1} \geq S^b_{2n}$$

$$S^b_{2n+2} = S^b_{2n} + b_{2n+1} + b_{2n+2} = S^b_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S^b_{2n}$$

$$S^b_{2n+3} = S^b_{2n+1} + b_{2n+2} + b_{2n+3} = S^b_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leq S^b_{2n+1}$$

כלומר $S_1 \leq S^b_3 \leq S^b_5 \leq \cdots \leq S^b_6 \leq S^b_4 \leq S^b_2$. תת הסדרה $\left(S^b_{2n}\right)$ היא מונוטונית עולה וחסומה מלעל ולכן מתכנסת ל-$\alpha \in \mathbb{R}$ כלשהו.
תת הסדרה $\left(S^b_{2n+1}\right)$ היא מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן מתכנסת ל-$\beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha - \beta = \lim_{n\to\infty} S^b_{2n+1} - S^b_{2n} \overset{\text{אש"ג}}{=} \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

מכאן שתתי הסדרות $\left(S^b_{2n}\right)$, $\left(S^b_{2n+1}\right)$ מתכנסות לאותו הגבול שנסמנו α ומכאן ש-$\alpha = \lim_{n\to\infty} S^b_n = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. ■

דוגמה נביט ב-$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, מלייבניץ, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ קיים ונסמנו L. מאש"ט $\frac{L}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$ וכן $\frac{3L}{2} = L + \frac{L}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \ldots$ והגבול השתנה רק משינוי סדר האיברים!

הגדרה תהי (a_n) סדרה. נאמר כי (b_n) <u>מתקבלת משינוי סדר האיברים של (a_n)</u> אם קיימת $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ חח"ע ועל כך ש-$b_n = a_{\sigma(n)}$.

דוגמה עבור $\sigma=\begin{cases}2k & n=2k-1\\ 2k-1 & n=2k\end{cases}$, הסדרה המתקבלת היא החלפה של המקומות של האיברים הזוגיים ואי-זוגיים.

הגדרה תהי (a_n) סדרה. הטור של (a_n) נקרא מתכנס בהחלט אם קיים הגבול $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|$. אם טור של סדרה מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט נאמר כי הוא מתכנס בתנאי.

דוגמה $b_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ מתכנס (הוכחנו) אבל מתכנס בתנאי כי עבור סדרת הערכים המוחלטים זה טור הרמוני.

משפט תהי (a_n) סדרה. אם הטור של (a_n) מתכנס בהחלט אז הטור שלה מתכנס וכן אם (b_n) מתקבלת מ-(a_n) ע"י שינוי סדר איברים, אז גם (b_n) ניתנת לסכימה ומתקיים $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$.

מסקנה גבול של טור מתכנס בהחלט אינו תלוי בסדר האיברים.

הוכחה: ראשית נוכיח כי התכנסות בהחלט גוררת התכנסות. מתנאי קושי על הסדרה $|a_n|$ (שהטור שלה מתכנס כי הטור של a_n מתכנס בהחלט), $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m>N$ כך ש-$m>n$ מתקיים $\sum\limits_{k=n}^{m}|a_k|<\epsilon$ ולכן $\left|\sum\limits_{k=n}^{m}a_k\right|\overset{\Delta}{\leq}\sum\limits_{k=n}^{m}|a_k|<\epsilon$ ולכן (a_n) מקיימת את תנאי קושי להתכנסות טורים ולכן היא ניתן לסכימה ונסמן $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k=L$. נוכיח כי הגבול לא תלוי בסדר הסכימה. יהי $\epsilon>0$. מהגדרת הגבול, $|S_n^a-L|<\frac{\epsilon}{2}$ כמעט תמיד. בגלל ש-$|a_n|$ ניתנת לסכימה, גם $\sum\limits_{k=n}^{m}|a_k|<\frac{\epsilon}{2}$ כמעט תמיד. ננסח זאת אחרת $\exists K\in\mathbb{N}$- כך ש-$\forall J\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה סופית כך ש-$K>k$, $\forall k\in J$ מתקיים $\sum\limits_{k\in J}|a_k|<\frac{\epsilon}{2}$. נשלב את שני הביטויים $\exists K\in\mathbb{N}$- כך ש-$|S_k^a-L|<\frac{\epsilon}{2}$ ולכל $J\subseteq\mathbb{N}$ כנ"ל $\sum\limits_{k\in J}|a_k|<\frac{\epsilon}{2}$. תהי $b_n=a_{\sigma(n)}$ סדרה שהיא מתקבלת משינוי סדרה האיברים של a_n. נתבונן בקבוצת האינדקסים $I=\{k\in\mathbb{N}:\sigma(k)\leq K\}$, זו קבוצה סופית ונסמן את האיבר המקסימלי שלה ב-N. $\forall n>N$, $S_n^b=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{\sigma(k)}$ וגם מתקיים $\{\sigma(1),\dots,\sigma(n)\}\subseteq\{1,\dots,K\}$ ונגדיר $J_<=\{k\leq n:\sigma(k)\leq K\}$, $J_>\{k\leq n:\sigma(k)\leq K\}$. לכן $\forall n>N$, $S_n^b=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{\sigma(k)}=\sum\limits_{k\in J_<}a_{\sigma(k)}+\sum\limits_{k\in J_>}a_{\sigma(k)}=S_k^a+\sum\limits_{k\in J_>}a_{\sigma(k)}$ ולכן

$$\left|S_n^b-L\right|=\left|S_K^a+\sum_{k\in J_>}a_{\sigma(k)}-L\right|\overset{\Delta}{\leq}\left|S_K^a-L\right|+\sum_{k\in J_>}\left|a_{\sigma(k)}\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}$$

ולכן $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k=L$. ■

משפט (רימן) תהי (a_n) סדרה. אם הטור של a_n מתכנס בתנאי אז $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\exists(b_n)$ סדרה המתקבלת ע"י שינוי סדר האיברים של a_n כך ש-$\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k=\alpha$.

שבוע $\mathbb{III}$ | משפטים מתקדמים לטיילור ופונקציות מדרגות

הרצאה 7

משפט תהי $f:I\to\mathbb{R}$ בעלת n נגזרות ב-a כך ש-$a\in I$ אזי אם $p\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ עם $\deg p\leq n$ ומתקיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^{n}}=0$ אז $p(x)=T_{n}f(x)$.

הוכחה: תהיינה $p,q\in\mathbb{R}\left[x\right]$ כך ש-$\deg p,\deg q\leq n$ וכן $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{(x-a)^{n}}=0=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-q(x)}{(x-a)^{n}}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)-q(x)}{\left(x-a\right)^{n}}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-p(x)}{\left(x-a\right)^{n}}-\frac{f(x)-q(x)}{\left(x-a\right)^{n}}=0$$

נשים לב כי $r\left(x\right):=p(x)-q(x)$ הוא פולינום כך ש-$\deg r\leq n$. נראה כי אם $r(x)\in\mathbb{R}\left[x\right]$, $\deg r\leq n$ וגם $\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^{n}}=0$ אז $r(x)=0$ ומשם נסיק כי $p(x)=q(x)$ ונסיים. נוכיח באינדוקציה על $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$.

בסיס ($n=0$): $\deg r\leq 0$ (כלומר r הוא פולינום קבוע) לפי ההנחה $\lim\limits_{x\to a}r\left(x\right)=r\left(a\right)=0$ ולכן $r(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

צעד ($n\to n+1$): יהי $r\left(x\right)\in\mathbb{R}\left[x\right]$ כך ש-$\deg r\leq n+1$ וכן $\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^{n+1}}=0$.

$$0=\lim_{x\to a}\left(x-a\right)^{n+1}\frac{r(x)}{\left(x-a\right)^{n+1}}=\lim_{x\to a}r\left(x\right)$$

ולכן מרציפות $r\left(a\right)=0$.

$$r\left(x\right)=\underbrace{b_{0}}_{0}+b_{1}\left(x-a\right)+\cdots+b_{n+1}\left(x-a\right)^{n+1}=\left(x-a\right)\left(b_{1}+\cdots+b_{n+1}\left(x-a\right)^{n}\right)$$

בנוסף, $0=\lim\limits_{x\to a}\frac{b_{1}+\cdots+b_{n+1}(x-a)^{n}}{(x-a)^{n}}=\lim\limits_{x\to a}\frac{r(x)}{(x-a)^{n+1}}$ ונשים לב כי $b_{1}+\cdots+b_{n+1}\left(x-a\right)^{n}\in\mathbb{R}\left[x\right]$ הוא פולינום מדרגה קטנה או שווה ל-n ולכן מה"א $b_{1}+\cdots+b_{n+1}\left(x-a\right)^{n}=0$ ומכך נובע גם ש-$r\left(x\right)=0$. ■

דוגמה $f(x)=\frac{1}{1-x}$. נזכור כי מתקיים $1+\cdots+x^{n}=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $\forall x\neq 1$. קיבלנו בעבר כבר כי $T_{n,0}f(x)=1+x+\cdots+x^{n}$.

נקבל $g(x)=\frac{1}{1+x}$ נקבל $T_{n,0}g(x)=1-x+\cdots+\left(-1\right)^{n}x^{n}$.

עבור $h(x)=\frac{1}{1+x^{2}}$ נביט בביטוי האלגברי $1-x^{2}+\cdots+\left(-1\right)^{n}x^{2n}$, האם זהו פולינום טיילור כלשהו של h? נשתמש במשפט שעתה הוכחנו ונחשב את הגבול בעזרת הזהות האלגברית שמצאנו, נשים לב גם כי $x^{2(n+1)}=x^{2n+1}\cdot x$.

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^{2n+1}}\left(\frac{1}{1+x^{2}}-\left(1-x^{2}+\cdots+\left(-1\right)^{n}x^{2n}\right)\right)=\lim_{x\to0}\frac{1}{\cancel{x^{2n+1}}}\frac{\left(-1\right)^{n+1}\cancel{x^{2n+1}}x}{1+x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{\left(-1\right)^{n+1}x}{1+x^{2}}=0$$

ולכן הביטוי ההוא הוא פולינום הטיילור מסדר $2n+1$ של h.

משפט (נוסחת השארית של לגרנז') תהי $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה $n+1$ פעמים ב-I. אזי $\forall a,b\in I$ כך ש-$b\neq a$, $\exists\xi\in(a,b)$ כך ש-$f(b)=\sum\limits_{i=0}^{n}\left(\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\right)+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$.

הערה עבור $n=0$ המשפט קובע כי $f(b)=f(a)+f'(\xi)(b-a)$ כלומר $f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ שזהו משפט לגרנז' המקורי.

הוכחה: נגדיר

$$g(t):=f(t)-\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(t-a)^i\right)-K(t-a)^{n+1}$$

$\forall t\in I$. נשים לב כי g גזירה $n+1$ פעמים ב-I. נבחר K כך ש-

$$0=g(b)=f(b)-\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{f^{(i)}(a)}{i!}(b-a)^i\right)-K(b-a)^{n+1}$$

נשים לב כי $g(a)=0=g(b)$ ולכן מרול $\exists c_1\in(a,b)$ כך ש-$g'(c_1)=0$.

$$g'(t)=f'(t)-T_{n-1,a}f'(t)-K(n+1)(t-a)^n$$

$g'(a)=0=g'(c_1)$ ולכן לפי רול עבור g', $\exists c_2\in(a,c_1)\subseteq(a,b)$ כך ש-$g''(c_2)=0$. ובצעד ה-n-י, $\exists\xi\in(a,c_n)$ כך ש-

$$g^{(n+1)}(\xi)=0=f(\xi)-K(n+1)!$$

לכן $K=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, נחזור לנוסחה של g, נציב, ונקבל את הרצוי. ■

תרגול 3

תרגיל חשבו את הגבול $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(x^4)}{\arcsin^4 x}$.

פתרון נחשב את פולינומי הטיילור של $\sin,\arcsin$ סביב 0 מסדר 1 ואז נכתוב

$$\sin x=T_1\sin x+R_1\sin x,\quad \arcsin x=T_1\arcsin x+R_1\arcsin x$$

$T_1\sin x=\sin0+\frac{\cos0}{1!}x=x$ סביב 0. מכלל לייבניץ וכמה זהויות טריגונומטריות, $\arcsin' y=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$ ולכן

$$T_1\arcsin x=\arcsin0+\frac{\arcsin'0}{1!}x=x$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^4)}{\arcsin^4 x}=\lim_{x\to0}\frac{T_1\sin(x^4)+R_1\sin(x^4)}{(T_1\arcsin x+R_1\arcsin x)^4}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+R_1\sin(x^4)}{(x+R_1\arcsin x)^4}=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{R_1\sin(x^4)}{x^4}}{\left(1+\frac{R_1\arcsin x}{x}\right)^4}\overset{(*)}{=}1$$

(*) ממשפט שהוכחנו בהרצאה 6 מתקיים $\lim\limits_{x\to 0}\frac{R_1\sin x}{x}=0$ וכן $\lim\limits_{x\to 0}\frac{R_1\arcsin x}{x}=0$.

תרגיל מצאו קירוב רציונאלי ל-e עד כדי טעות של 10^{-4}.

פתרון $e=\exp(1)=\underbrace{T_n\exp(1)}_{\text{מספר רציונאלי}}+R_n\exp(1)$. נחפש n עבורו הטעות קטנה כלומר $|R_n\exp(1)|<10^{-4}$. ממשפט השארית של לגראנז', $\exists c\in(0,1)$ כך ש-

$$R_n\exp(1)=\frac{\exp^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}1^{n+1}=\frac{e^c}{(n+1)!}\le\frac{e}{(n+1)!}\le\frac{4}{(n+1)!}$$

נבדוק במחשבון ונקבל כי עבור $n=7$ מתקיים $R_7\exp(1)=\frac{4}{8!}=\frac{1}{10080}<10^{-4}$. עתה הקירוב שלנו יהיה $T_7\exp(1)=\sum\limits_{k=0}^{7}\frac{1}{k!}\in\mathbb{Q}$.

תרגיל הוכיחו כי e הוא אי-רציונאלי.

פתרון נזכור כי $e-T_{n,0}\exp(1)=R_n\exp(1)$ כלומר $e-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{e^{c_n}}{(n+1)!}$, $\forall n\in\mathbb{N}$ (משארית לגראנז'). נניח בשלילה כי $\exists p\in\mathbb{Z},q\in\mathbb{N}$ כך ש-$e=\frac{p}{q}$. $\forall n>q$ (אם כי בעיקרון גם עבור כל שאר הטבעיים) מתקיים

$$\mathbb{Z}\ni n!\frac{p}{q}-\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}=n!\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)=n!\frac{e^{c_n}}{(n+1)!}$$

ועבור אגף ימין בביטוי זה מתקיים $0<\frac{n!e^{c_n}}{(n+1)!}\le\frac{n!4}{(n+1)!}=\frac{4}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ סתירה (כי אגף שמאל תמיד שלם).

טענה תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה אינסוף פעמים בכל נקודה. נתון גם כי $\forall b>0$, $\exists M\in\mathbb{R}$ כך ש-$\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, $\forall x\in(0,b)$ ו-$\forall n\in\mathbb{N}$. הוכיחו כי $\forall b>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}T_{n,0}(b)=f(b)$.

הוכחה:

$$|f(b)-T_{n,0}f(b)|=|R_nf(b)|\underset{x\in(0,b)}{\overset{\text{לגראנז'}}{=}}\left|\frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}b^{n+1}\right|\le\frac{M|b|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow[n\to\infty]{(*)}0$$

(*) $0\xleftarrow[n\to\infty]{}\frac{b^{b+1}}{\lfloor b\rfloor!}\cdot\frac{b^{n-b}}{(b+1)^{n-b}}\ge\frac{b^{n+1}}{(n+1)!}$. ■

תרגיל תהי $f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty}T_nf(b)\neq f(b)$, $\forall b\neq 0$.

פתרון נוכיח באינדוקציה על $k\ge 0$ שעבורו $f^{(k)}(x)=\begin{cases}Q_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$, כאשר Q_k פולינום כלשהו שמקיים שמכיל בתוכו את כל הנגזרות ש"אספנו" עד כה כשגזרנו את הפונקציה k פעמים.

בסיס ($k=0$): ברור כי $Q_0(x)=1$.

צעד ($k\to k+1$): עבור $x\neq 0$,

$$f^{(k+1)}(x)=Q_k^{'}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}+Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{2}{x^3}=\left(Q_k^{'}\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)+Q_k\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{2}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

אז מספיק לבחור $Q_{k+1}(x) = Q_k'(x)\cdot\left(-x^2\right) + Q_k(x)\,x \cdot 2x^3$, בנוסף:

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{Q_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}Q_k\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x^2}}} = \lim_{y\to\infty}\frac{yQ_k(y)}{e^{y^2}} \overset{(*)}{=} 0$$

עתה, $T_nf(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = 0$ ולכן פולינום הטיילור כל הזמן מתאפס ולא מתקרב לפונקציה עצמה ששונה תמיד מאפס ולכן בפרט $T_nf(x) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} f(x)$, $\forall x \neq 0$. $(*)$ ראה הטענה הבאה.

טענה אם $P(x)$ פולינום אז $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^{x^2}} = 0$.

הוכחה: נשים לב כי $\left|\frac{P(x)}{e^{x}}\right| < \left|\frac{P(x)}{e^{x^2}}\right| \leq 0$ ולכן מספיק להוכיח כי $\left|\frac{P(x)}{e^{x}}\right| \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$ באינדוקציה על $\deg P$.

בסיס ($\deg P = 0$): ברור כי $\frac{c}{e^x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

צעד ($n \to n+1$): נסמן $\deg P = n+1$. $\frac{P(x)}{e^x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} \frac{?}{\infty}$ אז נשתמש בלופיטל $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{P'(x)}{e^x} \overset{\text{ה"א}}{=} 0$. ■

תרגיל $f(x) = x\left(1 - x^7 + x^7e^x\right)$. הוכיחו כי $T_{8,0}f(x) = x$.

פתרון $\frac{f(x)-x}{x^8} = \frac{-x^8+x^8e^x}{x^8} = -1 + e^x \underset{x\to0}{\longrightarrow} 0$ ולכן ממשפט שהוכחנו בהרצאה 7, $T_8f(x) = x$.

הרצאה 8

דוגמה נחשב קירוב ל-$\sqrt{1.1}$ ונאמוד את גודל השגיאה. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$. נזכור כי $f(x) = T_{n,a}f(x) + R_{n,a}f(x)$. עבור $n = 0$, $\sqrt{x} \simeq \sqrt{1} = 1$. נשים לב כי $f(x) = f(1) + f'(\xi)(x-1)$ מנוסחת השארית של לגראנז' וכן כי $f'(t) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}$. הנגזרת יורדת וחיובית ולכן $f'(t) \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\forall t \in (1, 1.1)$ ולכן $0 < \sqrt{1.1} - \sqrt{1} < \frac{1}{2}(1.1-1)$ ולכן זה אחוז השגיאה (0.05). עבור $n = 1$, $f(x) \simeq f(1) + f'(1)(x-1)$. במקרה שלנו, $\sqrt{x} \simeq \sqrt{1} + \frac{1}{2}(1.1-1) = 1.05$. f'' עולה ושלילית בכל נקודה ולכן $-\frac{1}{4} < f''(t) < 0$, $\forall t \in (1, 1.1)$. נחפש את השגיאה

$$\sqrt{1.1} - \left(\sqrt{1} + \frac{1}{2}(1.1-1)\right) = \frac{f''(\xi)}{2!}(1.1-1)^2$$

ולכן

$$-\frac{1}{800} = \frac{-\frac{1}{4}(1.1-1)^2}{2!} < \sqrt{1.1} - \left(\sqrt{1} + \frac{1}{2}(1.1-1)\right) < 0$$

ולכן השגיאה היא קטנה מ-$\frac{1}{800}$.

דוגמה נחשב את $\sin 0.06$. נבחר $f(t) = \sin t$ סביב $a = 0$. נזכור כי

$$T_0\sin(x) = 0, \quad T_1\sin(x) = x, \quad T_2\sin(x) = x, \quad T_3\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

ונעריך את הטעות עבור $\sin(0.06) \simeq 0$. $n=0$: $f(x)-T_0f(x)=\frac{\cos(\xi)}{1!}(x-0)$ לכן $\cos\xi\in(0,1)$, $\forall\xi\in(0,0.06)$ ולכן $0<\sin(0.06)<0.06-0$. עבור $n=1$ הקירוב הוא $\sin(0.06)=0.06$ ובעבור השגיאה: נזכור כי $f''(\xi)\in(-1,0)$ ולכן

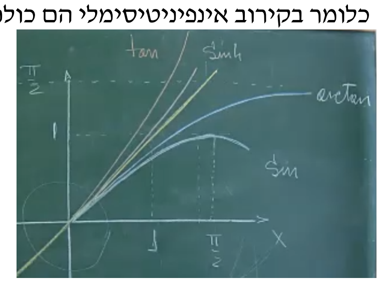
$$-\frac{1}{2}\left(\frac{6}{100}\right)^2=-1\cdot\frac{1}{2!}(x-0)^2<\underbrace{\frac{f''(\xi)}{2!}(x-0)^2}_{R_2(x)}<\frac{0}{2!}(x-0)^2=0$$

ולכן ההערכה היא גדולה מהערך האמיתי וגם השגיאה קטנה מ-$\frac{6^2}{2\cdot100^2}$. נשים לב כי עבור $n=2$ נקבל את אותה ההערכה אבל מנוסחת השארית של לגראנז' נגלה שהשגיאה היא אפילו יותר קטנה.

דוגמה נזכור כי $e^x\simeq1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots$ ובנוסף כי $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ולכן $\cosh x\simeq1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$ וגם בגלל ש-$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ ולכן $\sinh x\simeq x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$. נזכור גם כי $\cos x\simeq1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots$ וכן $\sin x\simeq x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots$. מחישוב מהיר של הנגזרות של $\tan$ נקבל כי $T_3\tan x=x+2\frac{x^3}{6!}$. עתה נביט בפולינומי טיילור של הפונקציות מסדר 3:

$$T_3\sin x=x-\frac{x^3}{3!},\quad T_3\sinh x=x+\frac{x^3}{3!},\quad T_3\tan x=x+\frac{x^3}{3},\quad T_3\arctan x=x-\frac{x^3}{3}$$

כלומר בקירוב אינפיניטיסימלי הם כולם פונקציית הזהות סביב 0. (ראו ציור)



משפט תהי $f:I\to\mathbb{R}$ גזירה n פעמים ב-$a\in I$. נניח כי $f^{(1)}(a)=\dots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq0$ אז אם n זוגי אז ל-f קיצון מקומי ב-a בהתאם לסימן של $f^{(n)}(a)$ ואם n אי-זוגי אז ל-f אין נקודת קיצון מקומית ב-a.

הוכחה: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)-\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}{(x-a)^n}\overset{(*)}{=}\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_nf(x)}{(x-a)^n}=0$ ולכן $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ ולכן קיימת סביבה שעבורה מתקיים $sgn\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=sgnf^{(n)}(a)$. כעת, אם n זוגי אז הסימן של הביטוי באגף ימין לא תלוי במכנה ולכן $f(a)$ או הגדולה ביותר בסביבה או הקטנה ביותר. אם n אי זוגי אז הסימן של המונה משתנה בהתאם לצד של a בו אנחנו נמצאים ולכן אין נקודת קיצון מקומית שם.

$(*)$ כל שאר האיברים בסכימה מתאפסים כי הנגזרות מתאפסות. ■

הרצאה 9

הגדרה $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא <u>פונקציית מדרגות</u> אם קיימת $\mathcal{P}=(x_0,\dots,x_n)$ סדרה עולה ב-$[a,b]$ כך ש-

$$a=x_0<x_1<\dots<x_n=b$$

וגם $(c_1,\dots c_n)$ סדרה ב-$\mathbb{R}$ כך ש-$\varphi\Big|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$, $\forall i \le n$.

דוגמה פונקציות קבועות הינן פ' מדרגות שכן $\mathcal{P} = (a = x_0, x_1 = b)$.

הערה בתנאי ההגדרה נאמר כי φ מיוצגת באמצעות החלוקה $\mathcal{P}$. ככלל, פ' מדרגות ניתנות להצגה באמצעות חלוקות שונות.

הערה נסמן $\mathcal{S} = \mathcal{S}\left([a,b]\right)$ (Step) את קבוצת פונקציות המדרגות בקטע $[a,b]$.

תכונות

1. $\mathcal{S}$ סגורה לחיבור וכפל. תהיינה $\varphi, \psi \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$. על ידי הוספת נקודות במידת הצורך ניתן להניח ששתיהן מיוצגות באמצעות אותה חלוקה $\mathcal{P} = (x_0, \dots x_n)$, כלומר קיימות $(c_1, \dots c_n)$, $(d_1, \dots d_n)$ סדרות ב-$\mathbb{R}$ כך ש-$\psi\Big|_{(x_{i-1},x_i)} = d_i$, $\varphi\Big|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$ ולכן $(\varphi + \psi)\Big|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i + d_i$ וגם $(\varphi \cdot \psi)\Big|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i \cdot d_i$ ולכן $\varphi + \psi, \varphi \cdot \psi \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$ בעזרת הסדרות $(c_1 + d_1, \dots c_n + d_n), (c_1 \cdot d_1, \dots c_n \cdot d_n)$ בהתאמה.
2. $\mathcal{S}$ סגורה לכפל בסקלר. (הוכחה אנלוגית לא').
3. אם $a \le c < d \le b$ ו-$\varphi \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$ אז $\varphi\Big|_{[c,d]} \in \mathcal{S}\left([c,d]\right)$ והיא נקראת הצמצום של φ. אם $\mathcal{P}$ משמשת כדי לייצג את φ, ניקח את $\mathrm{P}' = \mathrm{P} \cup \{c,d\}$ ונסדר את P' לחלוקה $\mathcal{P}'$ ונקבל ש-$\varphi\Big|_{[c,d]}$ מיוצגת באמצעות $\mathcal{P}'$ והינה מדורגת.
4. הרחבה ע"י אפס. נרחיב את $\psi \in \mathcal{S}\left([c,d]\right)$ בעזרת $\tilde{\psi}\Big|_{(d,b)} = \tilde{\psi}\Big|_{(a,c)} = 0$ ונמצא כי $\tilde{\psi} \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$.

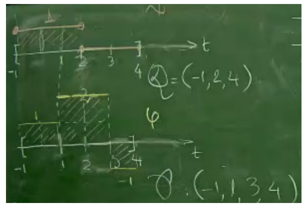
הגדרה תהי $\varphi \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$ מיוצגת באמצעות החלוקה $\mathcal{P} = (x_0, \dots x_n)$ וסדרת הערכים $(c_1, \dots c_n)$. נגדיר את <u>האינטגרל של פונקצית מדרגות</u> להיות $I_{\mathcal{P}}\, \varphi = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, c_i$.

דוגמה עבור הציור הבא, נחשב את האינטגרל:

$$I_{\mathcal{P}}\varphi = (1 - (-1)) + (3 - 1)\, 2 + (4 - 3)\, (-1) = 5$$

$$I_{\mathcal{Q}}\psi = (2 - (-1))\, 1 + (4 - 2)\, 0 = 3$$

$$I_{\mathcal{R}}\left(\varphi \cdot \psi\right) = (1 - (-1))\, 1 \cdot 1 + (2 - 1)\, 2 \cdot 1 + (3 - 2)\, 2 \cdot 0 + (4 - 3)\, (-1) \cdot 0 = 4$$



הערה האינטגרל אינו תלוי בערכי φ בנקודות החלוקה.

למת החתכים (לא בחומר אבל נשתמש בתורת האינטגרציה)

למה (למת החתכים) יהיו $\varnothing \neq L, U \subseteq \mathbb{R}$ כך ש-$\forall l \in L, u \in U$ מתקיים $l \leq u$ אזי

1. U חסומה מלרע ו-L חסומה מלעל.
2. $\sup L \leq \inf U$.
3. $\forall \epsilon > 0$, $\exists l \in L, u \in U$ כך ש-$\sup L - l < \epsilon$ וגם $u - \inf U < \epsilon$.
4. קיימות שתי סדרות $(u_n), (l_n)$ כך ש-$\{u_n\} \subseteq U, \{l_n\} \subseteq L$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \sup L$ וכן $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf U$.

ובנוסף, התנאים הבאים שקולים:

(i) $\sup L = \inf U$.

(ii) $\exists! I \in \mathbb{R}$ כך ש-$\forall l \in L, u \in U$ מתקיים $l \leq I \leq u$ וגם $\sup L = \inf U = I$.

(iii) $\forall \epsilon > 0$, $\exists l \in L, u \in U$ כך ש-$u - l < \epsilon$.

(iv) קיימות שתי סדרות $(u_n), (l_n)$ כך ש-$\{u_n\} \subseteq U, \{l_n\} \subseteq L$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - l_n = 0$.

(v) קיימות שתי סדרות $(u_n), (l_n)$ כך ש-$\{u_n\} \subseteq U, \{l_n\} \subseteq L$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} l_n = I (= \sup L = \inf U)$.

הוכחה: 1 עד 4 מיידיים, נוכיח את השקילות בין (i) עד (v).

$(i) \Leftarrow (ii)$. יהיו $I, I' \in \mathbb{R}$ כך ש-$\forall l \in L, u \in U$ מתקיים $l \leq I \leq I' \leq u$. מכאן ש-$\sup L \leq I$ ממינמליות החסם העליון ובנוסף $\inf U \geq I'$ ממקסימליות החסם התחתון ולכן $\sup L \leq I \not< I' \leq \inf U$ ולכן $I = I'$ ולכן I יחיד וגם $I = \sup L = \inf U$.

$(ii) \Leftarrow (iii)$ יהי $\epsilon > 0$. מיחידות I ותכונת ה-ϵ של החסם העליון והתחתון, $\exists l \in L, u \in U$ כך ש-$I - \frac{\epsilon}{2} < l \leq I \leq u < I + \frac{\epsilon}{2}$ ולכן $u - l < \epsilon$.

$(iii) \Leftarrow (iv)$ נביט ב-$\epsilon_n = \frac{1}{n}$ ויהיו $l_n \in L, u_n \in U$ (קיימות מההנחה) כך ש-$u_n - l_n < \frac{1}{n}$ ונזכור כי $0 \leq u_n - l_n < \frac{1}{n}$ ולכן מסנדביץ' $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - l_n = 0$.$(iv) \Leftarrow (v)$ יהיו $(u_n), (l_n)$ כך ש-$\{u_n\} \subseteq U, \{l_n\} \subseteq L$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} u_n - l_n = 0$ אזי מספיק להראות ש-u_n, l_n מתכנסות ונסיים. נשים לב כי $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sup L - l_n$ וגם $u_n - \inf U \leq u_n - l_n$ ולכן מסנדביץ' נקבל כי $\lim\limits_{n\to\infty} \sup L - l_n = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} u_n - \inf U$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \sup L$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \inf U$ ובנוסף, בהנחה וכל התנאים שקולים אז ניתן לומר בנוסף כי $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

$(v) \Leftarrow (i)$ נניח בשלילה כי $\sup L < \inf U$. יהיו $(u_n), (l_n)$ כך ש-$\{u_n\} \subseteq U, \{l_n\} \subseteq L$ ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} l_n = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. בנוסף, $l_n \leq \sup L < \inf L \leq u_n$ ולכן ממונוטוניות הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} l_n \leq \sup L < \inf L \leq \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ סתירה. ■

שבוע $\mathbb{IV}$ | אינטגרציה של פ' חסומות ותכונותיה

הרצאה 10

משפט תהי P' חלוקה המתקבלת מ-P ע"י הוספת נקודה אזי $I_{\mathcal{P}'}\varphi = I_{\mathcal{P}}\varphi$.

הוכחה: יהי x' האיבר החדש שהוספנו אזי $\exists! j \in (0,n]$ כך ש-$x_{j-1} < x' < x_j$ לכן

$$I_{\mathcal{P}}\varphi = \sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(x_i - x_{i-1}\right)c_i\right) + \left(x_j - x_{j-1}\right)c_j = \sum_{i\neq j}^{n}\left(\left(x_i - x_{i-1}\right)c_i\right) + \left(x' - x_{j-1}\right)c_j + \left(x_j - x'\right)c_j = I_{\mathcal{P}'}\varphi$$

■

משפט האינטגרל של φ על $[a,b]$ אינו תלוי בחלוקה P.

הוכחה: תהיינה P_1, P_2 שתי חלוקות של $[a,b]$ שמשמשות להצגה של φ כפ' מדורגת. תהי P החלוקה של $[a,b]$ שמכילה את כל האיברים של P_1 ו-P_2. P מתקבלת הן מ-P_2 והן מ-P_1 ע"י הוספת מספר סופי של איברים בהתאמה ולכן $I_{\mathcal{P}_1}\varphi = I_{\mathcal{P}}\varphi = I_{\mathcal{P}_2}\varphi$. ■

הערה מעתה נסמן $I\varphi$ שכן האינטגרל לא תלוי בחלוקה.

תכונות

תהיינה $\varphi, \psi \in \mathcal{S}\left([a,b]\right)$.

1. אם $\psi \geq 0$ אז $I\psi \geq 0$ (חיוביות).
2. אם $\varphi \leq \psi$ אז $I\varphi \leq I\psi$ (מונוטוניות).
3. $\forall A, B \in \mathbb{R}$,$A \cdot I\varphi + B \cdot I\psi = I\left(A\varphi\right) + I(B\psi)$ (לינאריות).
4. $\forall c \in (a,b)$,$I_{[a,b]}\varphi = I_{[a,c]}\varphi + I_{[c,b]}\varphi$ (אדיטיביות).
5. $l\left([a,b]\right) = b - a = I\left(1\right)$ (היחידה).
6. עבור $\psi\left(t\right) := \varphi\left(t - c\right)$ נקבל $I_{[a+c,b+c]}\psi = I_{[a,b]}\varphi$ (אינווריאנטיות תחת הזה אופקית).
7. עבור $\psi\left(t\right) := \varphi\left(\frac{t}{c}\right)$ נקבל $\forall c > 0$,$I_{[ac,bc]}\psi = c \cdot I_{[a,b]}\varphi$ (הומותטיה).

הערה נסמן $\mathcal{B} = \mathcal{B}\left([a,b]\right)$ את קבוצת הפונקציות החסומות בקטע $[a,b]$. נשים לב כי $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$.

הגדרה תהי $f \in \mathcal{B}\left([a,b]\right)$. נגדיר $L\left(f\right) = \{I\varphi : \varphi \leq f\}$ (שהיא חסומה מלעל) וגם $U\left(f\right) = \{I\varphi : \varphi \geq f\}$ (שהיא חסומה מלרע).

הגדרה $f\in\mathcal{B}\left([a,b]\right)$ תקרא <u>אינטגרבילית</u> ב-$[a,b]$ אם $\exists! I\in\mathbb{R}$ כך ש-$\forall\varphi,\psi\in\mathcal{S}\left([a,b]\right)$ כך ש-$\varphi\le f\le\psi$ מתקיים $I\varphi\le I\le I\psi$.

דוגמה נביט בפונקציית דיריכלה ב-$[a,b]$. מצפיפות $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\forall\varphi\in\mathcal{S}\left([a,b]\right)$ כך $\varphi\le f$, $\varphi\le 0$ ובאותו האופן $\forall\varphi\in\mathcal{S}\left([a,b]\right)$ כך $\varphi\ge f$, $\varphi\ge 1$ ולכן פונקציית דיריכלה אינה אינטגרבילית לפי תורת רימן (שמשתמשת בהגדרה הנ"ל).

הערה נסמן $\mathcal{R}=\mathcal{R}\left([a,b]\right)$ את קבוצת הפונקציות האינטגרביליות בקטע $[a,b]$. נשים לב כי $\mathcal{S}\subset\mathcal{R}$.

הערה נסמן $\underline{I}\left(f\right)=\sup L\left(f\right)$ וגם $\overline{I}\left(f\right)=\inf U\left(f\right)$ ואם f אינטגרבילית אז נסמן את הערך המשותף $\int\limits_a^b f=\underline{I}\left(f\right)=\overline{I}\left(f\right)$.

תרגול 4

תרגיל נגדיר $\varphi:[0,5]\to\mathbb{R}$ ע"י $\varphi\left(t\right)=\begin{cases}1 & t\in[0,1)\\ 0 & t=1\\ 1 & t\in(1,2]\\ -2 & t\in(2,4)\\ 3 & t\in[4,5)\\ 1 & t=5\end{cases}$. חשבו את $I_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left(\varphi\right), I_{\left[\sqrt{2},\pi\right]}\left(3\varphi\right), I_{[3,5]}\left(\varphi-6\right)$ וגם את $\Phi:[0,5]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\Phi(x)=I_{[0,x]}\left(\varphi\right)$ וקבעו באילו נקודות Φ גזירה ובדקו האם מתקיים $\varphi=\Phi'$ (ראו גרף הפונקצייה למטה).

פתרון $I_{\left[0,\frac{1}{2}\right]}\left(\varphi\right)=1\cdot\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2}$ בעזרת $P=\left\{0,\frac{1}{2}\right\}$.

$$I_{\left[\sqrt{2},\pi\right]}\left(3\varphi\right)=3\cdot1\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)+3\cdot(-2)\cdot(\pi-2)=3\left(2-\sqrt{2}\right)-6\left(\pi-2\right)$$

בעזרת $P=\left\{\sqrt{2},2,\pi\right\}$.

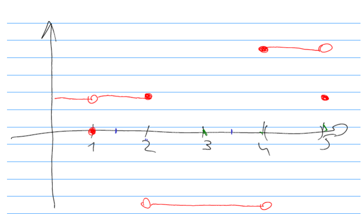
$$I_{[3,5]}\left(\varphi-6\right)=(-2-6)\cdot(4-3)+(3-6)\cdot(5-4)=-8-3=-11$$

$$\Phi(x)=\begin{cases}1(x-0) & t\in[0,1)\\ 1(1-0)+1(x-1) & t\in(1,2]\\ 1(1-0)+1(0-1)-2(x-2) & t\in(2,4)\\ 1(1-0)+1(0-1)-2(0-2)+3(x-4) & t\in[4,5)\end{cases}=\begin{cases}x & t\in[0,1)\\ x & t\in(1,2]\\ 6-2x & t\in(2,4)\\ 3x-14 & t\in[4,5)\end{cases}$$

נשים לב כי Φ גזירה ב-$[0,5]\setminus\{2,4\}$

$$\Phi'(x)=\begin{cases}1 & t\in[0,2)\\ -2 & t\in(2,4)\\ 3 & t\in(4,5)\end{cases}$$

ולכן $\Phi'=\varphi$, $\forall x\in[0,5]\setminus\{1\}$.



טענה תהי $\varphi \in \mathcal{S}([a,b])$ ו-$c \in \mathbb{R}$. נגדיר $\psi : [a+c,b+c] \to \mathbb{R}$ ע"י $\psi(t) := \varphi(t-c)$. אזי ψ היא פונקציית מדרגות ו-$I_{[a,b]}\varphi = I_{[a+c,b+c]}\psi$.

הוכחה: φ מדרגות ולכן קיימת חלוקה $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ של $[a,b]$ כך ש-$1 \le \forall i \le n$, $\exists c_i \in \mathbb{R}$ כך ש-$\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\varphi(x) = c_i$. נגדיר חלוקה של $[a+c,b+c]$ ע"י

$$\tilde{P} = \{a+c = x_0+c < x_1+c < \cdots < x_n+c = b+c\}$$

ונשים לב כי $1 \le \forall i \le n$, $\exists c_i \in \mathbb{R}$ כך ש-$\psi(x) = c_i$, $\forall x \in (x_{i-1}+c, x_i+c)$ ולכן ψ היא פונקציית מדרגות ובנוסף

$$I_{[a+c,b+c]}\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i + c - (x_{i-1}+c)\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = I_{[a,b]}\varphi$$

■

טענה תהי $\varphi \in \mathcal{S}([a,b])$ ויהי $m > 0$. נגדיר $\psi : [am,bm] \to \mathbb{R}$ ע"י $\psi(t) = \varphi\left(\frac{t}{m}\right)$ אזי ψ פ' מדרגות ומתקיים

$$I_{[am,bm]}\psi = mI_{[a,b]}\varphi$$

הוכחה: φ מדרגות ולכן קיימת חלוקה $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ של $[a,b]$ כך ש-$1 \le \forall i \le n$, $\exists c_i \in \mathbb{R}$ כך ש-$\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, $\varphi(x) = c_i$. נגדיר חלוקה של $[am,bm]$ ע"י $\tilde{P} = \{am = x_0m < x_1m < \cdots < x_nm = bm\}$ ונשים לב כי $1 \le \forall i \le n$, $\exists c_i \in \mathbb{R}$ כך ש-$\psi(x) = c_i$, $\forall x \in (x_{i-1}m, x_im)$ לכן ψ פ' מדרגות ובנוסף

$$I_{[am,bm]}\psi = \sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_im - x_{i-1}m\right) = m\sum_{i=1}^{n} c_i\left(x_i - x_{i-1}\right) = mI_{[a,b]}\varphi$$

■

טענה תהיינה $f,g \in \mathcal{R}([a,b])$ אינטגרבילית. אזי $f+g$ אינטגרבילית וכי $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. תהיינה $f \ge \varphi_1$, $g \ge \varphi_2$ פ' מדרגות כך ש-$I\varphi_1 \ge \int_a^b f - \frac{\epsilon}{2}$ וכן $I\varphi_2 \ge \int_a^b g - \frac{\epsilon}{2}$ (קיימות מהגדרת הסופרימום שכן $\int_a^b f = \sup L(f)$) ולכן

$$\int_a^b f + \int_a^b g - \epsilon \le I\varphi_1 + I\varphi_2 \overset{\text{לינאריות}}{=} I(\varphi_1+\varphi_2)$$

ולכן $\int_a^b f + \int_a^b g \le \overline{I}(f+g)$. נוכל באותו האופן להוכיח כי $\int_a^b f + \int_a^b g \ge \underline{I}(f+g)$ ומטרנזיטיביות נקבל כי $\int_a^b f + \int_a^b g = \underline{I}(f+g) =$ $.\overline{I}(f+g)$ ■

טענה תהי $f \in \mathcal{R}([a,b])$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ותהי g פונקציה המתקבלת מ-f ע"י שינוי מספר סופי של ערכים, כלומר $|\{x : f(x) \neq g(x)\}| < \infty$. אזי g אינטגרבילית וגם $\int_a^b g = \int_a^b f$.

הוכחה: נסמן $h(x) = g(x) - f(x)$. h היא פ' מדרגות כי היא שונה מ-0 במספר סופי של נקודות. נשים לב כי

$$P = \{x : f(x) \neq g(x)\} \cup \{a,b\}$$

היא חלוקה המייצגת את h (שכן $\forall x \notin P$ מתקיים $h(x) = 0$). מכאן גם $Ih = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$ ומלינאריות

$$\int_a^b g = \int_a^b (h+f) = \int_a^b h + \int_a^b f = \int_a^b f$$

■

הערה f אינטגרבילית אם"ם $\forall \epsilon > 0$, קיימות פ' מדרגות $\varphi \le f \le \psi$ כך ש-$I\psi - I\varphi < \epsilon$.

טענה תהיינה $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$. אזי $|f|, \min\{f,g\}, \max\{f,g\}$ הן אינטגרביליות.

הוכחה: נשים לב כי

$$\max(f,g) = \max(f-g,0) + g, \quad \min(f,g) = -\max(-f,-g), \quad |f| = \max(f,0) - \min(f,0)$$

לכן מספיק להראות כי עבור f כלשהי אינטגרבילית, $\max(f,0)$ אינטגרבילית. יהי $\epsilon > 0$. מהיות f אינטגרבילית קיימות $\varphi \le f \le \psi$ פ' מדרגות כך ש-$I(\psi - \varphi) = I\psi - I\varphi < \epsilon$. נגדיר $\tilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) & f(t) \ge 0 \\ 0 & f(t) < 0 \end{cases}$ ונשים לב כי היא פ' מדרגות המקיימת $\max\{f,0\} \le \tilde{\psi}$ בנוסף נגדיר $\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t) & f(t) \ge 0 \\ 0 & f(t) < 0 \end{cases}$ וגם זו פ' מדרגות והיא מקיימת $\tilde{\varphi} \le \max\{f,0\}$.

$$I\left(\tilde{\psi} - \tilde{\varphi}\right) = I\tilde{\psi} - I\tilde{\varphi} \le I\psi - I\varphi < \epsilon$$

ולכן $\max\{f,0\}$ אינטגרבילית. מכאן בעזרת הזהויות בתחילת ההוכחה נקבל כי הפונקציות הרצויות הינן אינטגרביליות. ■

הרצאה 11

דוגמה נרצה לחשב את $\int_0^1 x^2$. נחלק את $f(t) := t^2$ ל-n חלקים ב-$[0,1]$ ונבנה סדרה של אינטגרלים של פונקציות מדרגות שמעריכות את f. $A_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2}\right)$ היא סדרת האינטגרלים של ההערכות מלמעלה והסדרה האנלוגית של הערכות מלמטה היא

$a_n = \frac{1}{n}\left(\frac{0^2}{n^2}+\frac{1^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)$. עתה נשים לב כי $\lim\limits_{n\to\infty} A_n - a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{n^2}{n^2} = 0$ ולכן מלמת החתכים יש רק ערך אחד בין $U(f)$ ו-$L(f)$ ולכן f היא אינטגרבילית. עתה נרצה לחשב את האינטגרל. נשתמש בזהות האלגברית $1^2+2^2+\cdots+N^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ (שנניח כי היא נכונה).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ולכן $\int\limits_0^1 x^2 = \frac{1}{3}$.

תכונות

תהיינה $f,g\in\mathcal{R}([a,b])$.

1. אם $g\geq 0$ אז $\int\limits_a^b g\geq 0$.
2. אם $f\geq g$ אז $\int\limits_a^b f\geq\int\limits_a^b g$.
3. $f+g$ אינטגרבילית וגם $\int\limits_a^b (f+g) = \int\limits_a^b g+\int\limits_a^b f$.
4. $k\cdot f$ אינטגרבילית וגם $\int\limits_a^b f\, k = \int\limits_a^b (kf)$, $\forall k\in\mathbb{R}$.
5. $\forall c\in(a,b)$, $\int\limits_c^b f + \int\limits_a^c f = \int\limits_a^b f$.
6. עבור $c>0$ מתקיים $\int\limits_a^b f\, c = \int\limits_{ac}^{bc} f\left(\frac{t}{c}\right)$.

הוכחה: (לא נוכיח את כל הסעיפים, אבל יש עוד הוכחות בהרצאה 12)

(i) $U(g) = \left\{\int\limits_a^b\psi : g\leq\psi\right\}$, $L(g) = \left\{\int\limits_a^b\varphi : \varphi\leq g\right\}$. נזכור כי $\int\limits_a^b g = \sup L(g)$ ובנוסף כי $0\in\mathcal{S}([a,b])$ מקיימת $0\leq g$ ולכן $\int\limits_a^b 0 = 0 \leq \sup L(g) = \int\limits_a^b g$ ולכן $\int\limits_a^b g\geq 0$. ■

דוגמה עבור $f=x^2$ ועבור $c>0$ נקבל

$$\frac{1}{c^2}\int\limits_0^c t^2 \overset{\text{לינאריות}}{=} \int\limits_{0\cdot c}^{1\cdot c}\frac{t^2}{c^2} = c\int\limits_0^1 t^2 = c\frac{1}{3}$$

ולכן $\int\limits_0^c t^2 = \frac{c^3}{3}$. בנוסף, מאדיטיביות, עבור $a<b$ מתקיים $\int\limits_a^b t^2 + \int\limits_0^a t^2 = \int\limits_0^b t^2$ ולכן $\int\limits_a^b t^2 = \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$.

הערה נסמן $\mathcal{M}=\mathcal{M}([a,b])$ קבוצת הפונקציות המונוטוניות בקטע $[a,b]$. נשים לב כי $\mathcal{M}\subset\mathcal{B}$.

משפט $\mathcal{M}\left([a,b]\right)\subset\mathcal{R}\left([a,b]\right)$ כלומר פונקציות מונוטוניות בקטע סגור וחסום אינטגרביליות בו.

הוכחה: נתבונן בסדרה $\left(\mathcal{P}_n\right)$ של חלוקות הומוגניות הנתונה ע"י $\mathcal{P}_n=\left(x_0,\ldots,x_n\right)$ כך ש-$x_i=a+i\left(\frac{b-a}{n}\right)$. ננמק במקרה ש-$f$ מונוטונית עולה ב-$[a,b]$. נגדיר

$$\varphi_n\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=f(x_{i-1}),\quad \psi_n\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=f(x_i),\quad \varphi_n\left(x_i\right)=f(x_i)=\psi_n(x_i)$$

f עולה ולכן $\varphi_n\le f\le\psi_n$ וגם $\int\limits_a^b\psi_n=\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i-x_{i-1}\right)f(x_i)$ וכן $\int\limits_a^b\varphi_n=\sum\limits_{i=1}^n\left(x_i-x_{i-1}\right)f(x_{i-1})$ וגם

$$\int\limits_a^b\psi_n-\int\limits_a^b\varphi_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)=\frac{b-a}{n}\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)-\left(f\left(x_0\right)+\cdots+f\left(x_{n-1}\right)\right)\right)$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(f(b)-f(a)\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן מלמת החתכים קיים ערך יחיד בין $U(f)$ ו-$L(f)$ ולכן f אינטגרבילית. ■

הרצאה 12

הוכחה: נוכיח חלק מהתכונות של פונקציות אינטגרביליות שקבענו בהרצאה הקודמת.

(ii) נשים לב כי $L\left(f\right)\subseteq L\left(g\right)$ ולכן

$$\int\limits_a^b f=\sup L\left(f\right)\le\sup L\left(g\right)\le\inf U\left(g\right)=\int\limits_a^b g$$

(iii) עבור $\varphi^f\le f\le\psi^f$, $\varphi^g\le g\le\psi^g$ פ' מדרגות מתקיים $\varphi^f+\varphi^g\le f+g\le\psi^f+\psi^g$ וגם $\int\limits_a^b\left(\varphi^f+\varphi^g\right)\overset{\text{לינאריות}}{=}\int\limits_a^b\varphi^f+\int\limits_a^b\varphi^g$ ולכן $L\left(f\right)+L\left(g\right)\subseteq L\left(f+g\right)$. באותו האופן $\int\limits_a^b\left(\psi^f+\psi^g\right)\overset{\text{לינאריות}}{=}\int\limits_a^b\psi^f+\int\limits_a^b\psi^g$ ולכן $U(f)+U(g)\subseteq U(f+g)$. מכאן

$$\int\limits_a^b f+\int\limits_a^b g=\sup L(f)+\sup L\left(g\right)=\sup\left(L\left(f\right)+L\left(g\right)\right)\le\sup L\left(f+g\right)$$

$$\le\inf U\left(f+g\right)\le\inf\left(U\left(f\right)+U\left(g\right)\right)=\inf U\left(f\right)+\inf U\left(g\right)=\int\limits_a^b f+\int\limits_a^b g$$

ולכן $\sup L\left(f+g\right)=\inf U\left(f+g\right)$ וגם $\int\limits_a^b\left(f+g\right)=\int\limits_a^b f+\int\limits_a^b g$.

(iv) עבור $k>0$, $\forall\varphi^{f}\leq f$ פ' מדרגות מתקיים $k\varphi^{f}\leq kf$ ולכן גם $\int_{a}^{b}k\varphi^{f}=\int_{a}^{b}\varphi^{f}k$ ובנוסף עבור $\varphi^{kf}\leq kf$ מתקיים $\frac{1}{k}\varphi^{kf}\leq f$ וגם $\int_{a}^{b}\frac{1}{k}\varphi^{kf}=\frac{1}{k}\int_{a}^{b}\varphi^{kf}$ ולכן $L\left(kf\right)=kL\left(f\right)$ ומשום ש-$k>0$ אז $\sup L\left(kf\right)=k\sup L\left(f\right)$ ובאותו האופן $\inf U\left(kf\right)=k\inf U\left(f\right)$ ולכן

$$k\int_{a}^{b}f=k\sup L\left(f\right)=\sup L\left(kf\right)\leq\inf U\left(kf\right)=k\inf U\left(f\right)=k\int_{a}^{b}f$$

ולכן $\int_{a}^{b}kf=\int_{a}^{b}f\,k$. עבור $k<0$ ה-$\sup,\inf$ מחליפים סימן ומתהפכים. ■

שבוע $\mathbb{V}$ | רבמ"ש והקשר בין רציפות לאינטגרביליות

הרצאה 13

משפט (קריטריון רימן לאינטגרביליות) תהי $f\in\mathcal{B}$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) $f\in\mathcal{R}$.

(ii) $\forall\epsilon>0$, $\exists\varphi\leq f\leq\psi$ כך ש-$\int_{a}^{b}\psi-\int_{a}^{b}\varphi<\epsilon$ $\int_{a}^{b}\left(\psi-\varphi\right)=$ (כלומר $\int_{a}^{b}\left(\psi-\varphi\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(d_{i}-c_{i}\right)\left(x_{i}-x_{i-1}\right)<\epsilon$).

(iii) קיימות $\left(\psi_{n}\right)$ ו-$\left(\varphi_{n}\right)$ כך ש-$\varphi_{n}\leq f\leq\psi_{n}$ וגם $\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}\psi_{n}=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}\varphi_{n}$ במקרה זה $I=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}\psi_{n}=\lim_{n\to\infty}\int_{a}^{b}\varphi_{n}$.

דוגמה נשתמש בקריטריון רימן כדי להוכיח את תכונת (iii) של אינטגרביליות.

אינטגרביליות: בהינתן $\epsilon>0$ עלינו למצוא $\varphi\leq f+g\leq\psi$ כך ש-$\int_{a}^{b}\psi-\int_{a}^{b}\varphi<\epsilon$. לפי הקריטיריון של רימן עבור f,g בהתאמה קיימות $\varphi^{f}\leq f\leq\psi^{f}$ וגם $\varphi^{g}\leq g\leq\psi^{g}$ כך ש-$\int_{a}^{b}\psi^{f}-\int_{a}^{b}\varphi^{f}<\frac{\epsilon}{2}$ וגם $\int_{a}^{b}\psi^{g}-\int_{a}^{b}\varphi^{g}<\frac{\epsilon}{2}$.

$$\varphi:=\varphi^{f}+\varphi^{g}\leq f+g\leq\psi^{f}+\psi^{g}=:\psi$$

$$\begin{aligned}\int_{a}^{b}\psi-\int_{a}^{b}\varphi&=\int_{a}^{b}\left(\psi^{f}+\psi^{g}\right)-\int_{a}^{b}\left(\varphi^{f}+\varphi^{g}\right)=\left(\int_{a}^{b}\psi^{f}+\psi^{g}\right)-\left(\int_{a}^{b}\varphi^{f}+\int_{a}^{b}\varphi^{g}\right)\\&=\left(\int_{a}^{b}\psi^{f}-\int_{a}^{b}\varphi^{f}\right)+\left(\int_{a}^{b}\psi^{g}-\int_{a}^{b}\psi^{g}\right)<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

חישוב האינטגרל: יהיו $\left(\psi_n^f\right), \left(\varphi_n^f\right)$ כך ש-$\psi_n^f \geq f \geq \varphi_n^f$ וגם $\left(\psi_n^g\right), \left(\varphi_n^g\right)$ כך ש-$\psi_n^g \geq g \geq \varphi_n^g$ המקיימות

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n^f = \int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n^f, \quad \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n^g = \int_a^b g = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n^g$$

יהיו $\psi_n =: \psi_n^f + \psi_n^g \geq f + g \geq \varphi_n^f + \varphi_n^g := \varphi_n$ לכן $\int_a^b \varphi_n = \int_a^b \varphi_n^f + \int_a^b \varphi_n^g$ וגם $\int_a^b \psi_n = \int_a^b \psi_n^f + \int_a^b \psi_n^g$ ומאש"ג $\left(\int_a^b \psi_n\right), \left(\int_a^b \varphi_n\right)$ מתכנסות ומתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n^f + \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n^g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n^f + \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n^g = \int_a^b f + \int_a^b g$$

לכן $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.

הגדרה תהי $f : A \to \mathbb{R}$. נאמר כי f <u>רציפה במידה שווה</u> ב-A אם $\forall \epsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ (ו-δ תלוי רק ב-ϵ ולא בשום נקודה ספציפית) כך ש-$\forall s, t \in A$ כך ש-$|s-t| < \delta$ מתקיים $|f(s) - f(t)| < \epsilon$.

משפט תהי $f : A \to \mathbb{R}$ אזי f רבמ"ש ב-A אס"ם לכל (x_n) ו-(y_n) סדרות כך ש- $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$ מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(f\left(y_n\right) - f\left(x_n\right)\right) = 0$$

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי f רבמ"ש ב-A ויהיו $(y_n), (x_n)$ סדרות ב-A כך ש-$\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$. נראה כי $\lim_{n\to\infty} f(y_n) - f(x_n) = 0$ כלומר $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n > N$, $|f(y_n) - f(x_n)| < \epsilon$. בהינתן $\epsilon > 0$, יהי $\delta > 0$ כך שלפי רבמ"ש מתקיים $\forall s, t \in A$ כך ש-$|s-t| < \delta$ מתקיים $|f(s) - f(t)| < \epsilon$. עבור $\delta > 0$ יהי $N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n > N$ מתקיים $|x_n - y_n| < \delta$ ולכן $|f(y_n) - f(x_n)| < \epsilon$, $\forall n > N$.

$\Rightarrow$: הסטודנטית המשקיעה תוכיח. ■

דוגמה $f(x) = \frac{1}{x}$ לא רבמ"ש בקטע $(0,1]$. יהיו $y_n = \frac{1}{n}, x_n = \frac{1}{n^2}$. מתקיים $\lim_{n\to\infty} y_n - x_n = 0$ אבל

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) - f(x_n) = \lim_{n\to\infty} n^2 - n = n\left(n-1\right) = \infty \neq 0$$

סתירה.

תרגול 5

טענה $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$.

הוכחה:

$$2\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k+n-k+1)=\sum_{k=1}^{n}(n+1)=n(n+1)$$

$\blacksquare$

תרגיל הראו שהאינטגרל של $f(t)=t$ ב-$[0,1]$ מוגדר וחשבו אותו.

פתרון נגדיר חלוקה $P=\left\{0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<1\right\}$ ופ' מדרגות $\varphi_n\le f\le\psi_n$ ע"י $\psi_n(x)=\frac{k}{n}$, $\varphi_n(x)=\frac{k-1}{n}$ עבור $x\in\left[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}\right]$.

$$I(\psi_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}I(\varphi_n)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\cdot\left(\frac{k}{n}-\frac{k-1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(k-1)=\frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n}k-n\right)\\&=\frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}-n\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ולכן $\int_0^1 t=\frac{1}{2}$.

תרגיל הראו ע"י חישוב האינטגרל של הפ' המתאימה ששטח משולש ישר זווית בעל אורכי צלעות $\left\{a,b,\sqrt{a^2+b^2}\right\}$ הינו $\frac{ab}{2}$.

פתרון נסמן $f(t)=t$ ונגדיר $g:[0,a]\to\mathbb{R}$ ע"י $g(t)=bf\left(\frac{t}{a}\right)$ ולכן $\int_0^a g=b\cdot a\cdot\int_0^1 f=\frac{ba}{2}$.

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\end{cases}$ כך שכאשר x רציונאלי אז השבר הוא מצוצמם.

א. הוכיחו כי f לא רציפה ב-$\mathbb{Q}$ אבל כן ב-$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

ב. הוכיחו ש-f אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

ג. הוכיחו כי f מחזורית והסיקו שהיא אינטגרבילית בכל קטע סגור וחסום.

פתרון א. יהי $x\in\mathbb{Q}$. מצפיפות האי-רציונאליים, $\forall n\in\mathbb{N}$ קיים מספר אי-רציונאלי ב-$\left[x-\frac{1}{n},x+\frac{1}{n}\right]$ $r_n\in$. נשים לב כי מתקיים $\lim_{n\to\infty}r_n=x$, מצד שני,

$$f(r_n)=0\not\xrightarrow[n\to\infty]{}f(x)\neq0$$

(לכן סתירה להיינה). נראה כי f רציפה ב-$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. יהי $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ויהי $\epsilon > 0$. נסמן $A = \{y \in [x-1, x+1] : f(y) \geq \epsilon\}$ ונשים לב כי A סופית $(*)$.נסמן $\delta = \frac{1}{2}\min\{|y-x| : y \in A\}$. אם $x \in (x-\delta, x+\delta)$ אז $z \notin A$ ולכן $|f(z) - f(x)| = f(z) < \epsilon$.

$(*)$ יש רק מספר סופי של q טבעיים הקטנים מ-$\frac{1}{\epsilon}$. בנוסף, יש מספר סופי של $p \in \mathbb{Z}$ כך ש-$\frac{p}{q} \in [x-1, x+1]$ שבר מצומצם (לדוגמה עבור $[-1,1]$ ו-$q = 7$ נקבל $-\frac{7}{7}, -\frac{6}{7}, \ldots, 0, \ldots, \frac{7}{7}$.

ב. נוכיח כי f אינטגרבילית ב-$[0,1]$. תהי P חלוקה של $[0,1]$. מצפיפות האי-רציונאליים, בכל קטע חלוקה של P יש מספר אי-רציונאלי. לכן אם $\varphi \leq f$ אז $\varphi(x) \leq f(r) = 0$ לכל x בקטע החלוקה. מכאן ש-$I(\varphi) \leq 0$ ולכן $\underline{I}(f) \leq 0$. נשים לב כי $\varphi = 0$ היא פ' מדרגות עם $\varphi \leq f$ ולכן $\underline{I}(f) = 0$. נותר להוכיח כי $\overline{I}(f) = 0$, כלומר, $\forall\epsilon > 0$ קיימת $\psi \geq f$ מדרגות כך ש-$I(\psi) < \epsilon$.

יהי $\epsilon > 0$. נגדיר $B = \left\{x \in [0,1] : f(x) > \frac{\epsilon}{2}\right\}$. זו קבוצה סופית כי (ראו $(*)$). נסמן $N = |B|$. תהי חלוקה $P = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1\}$. נסמן ב-$I_b$ את אוסף קטעי החלוקה החותכים את B ו-I_g יתר קטעי החלוקה. $|I_b| \leq 2N$.

נגדיר $\psi(x) = \begin{cases} \frac{\epsilon}{2} & k \in I_g \\ 1 & k \in I_b \end{cases}$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$. נסמן $\Delta(P) = \max_{1 \leq k \leq n}|x_k - x_{k-1}|$.

$$I(\psi) = \sum_{k \in I_g}\frac{\epsilon}{2}(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k \in I_b}1(x_k - x_{k-1}) \leq \frac{\epsilon}{2} + |I_b| \cdot \Delta(P) \leq \frac{\epsilon}{2} + 2N \cdot \Delta(P) \overset{(*)}{\leq} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$(*)$ נבחר $\Delta(P) = \frac{\epsilon}{4N}$.

טענה תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז $\forall\epsilon > 0$ קיימת פונקציה רציפה $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ כך ש-$\int|f-g| < \epsilon$.

הוכחה: תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז קיימת פ' מדרגות $\psi \geq f$ כך ש-$\int f \leq I(\psi) \leq \int f + \frac{\epsilon}{2}$. תהי $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ החלוקה עבורה ψ מדרגות. $\psi(x) = c_k$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k]$, $\forall k = 1, \ldots, n$. יהי $\delta > 0$ שנבחר אח"כ. נגדיר $g(x) = \begin{cases} c_k & x \in [x_{k-1}, x_k - \delta] \\ c_k + (x - x_k + \delta)\frac{c_{k+1} - c_k}{\delta} & x \in [x_k - \delta, x_k] \end{cases}$. קיבלנו פ' רציפה (זו פונקציה שעוקבת כמעט על המדרגות אבל עוברת ברציפות ביניהן). $g - \psi = 0$, $\forall x \in [x_{k-1}, x_k - \delta]$. $\int|g-\psi| \leq n\delta(2M)$ כאשר M חסם מלעל של ψ (המשוואה נכונה כי המקומות היחידים שבהם ψ, g נפרדים הם בקטעים בגודל δ וזה קורה n פעמים וההפרש המקסימלי הוא הסופרימום של הסכום כלומר קטן או שווה לכל חסם מלעל של ψ ו-g אינטגרבילית כי היא רציפה). ואם ננסח זאת יותר פורמלית נקבל $|g - \psi| \leq h(x) = \begin{cases} 2M & x \in [x_k - \delta, x_k] \\ 0 & x \in [x_{k-1}, x_k - \delta] \end{cases}$.

אם נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{4nM}$ אז $\int|g-\psi| < \frac{\epsilon}{2}$ ולכן

$$\int|f-g| = \int|f - \psi + \psi - g| \overset{\Delta}{\leq} \int\left(|f-\psi| + \int\psi - g\right) = \int|f-\psi| + \int|\psi - g| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

■

הרצאה 14

משפט רציפות במ"ש בתחום גוררת רציפות באותו תחום.

הוכחה: תהי $x \in A$, לכל (x_n) סדרה ב-A כך ש- $\lim_{n\to\infty}x_n = x$ נתבונן בזוג הסדרות $(x_n), (y_n)$ כאשר $y_n = x$. לכן לפי רבמ"ש ב-A, $\lim_{n\to\infty}f(x_n) - f(y_n) = \lim_{n\to\infty}f(x_n) - f(x) = 0$ ולכן $\lim_{n\to\infty}f(x_n) = f(x)$ ומהיינה נסיים. ■

טענה (לסטודנטית המשקיעה) תהי $f:A\to\mathbb{R}$ רמב"ש. f מעבירה סדרות קושי ב-A לסדרות קושי בטווח, כלומר, אם (x_n) סדרת קושי ב-A אז $(f(x_n))$ סדרת קושי.

משפט (קנטור) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f רבמ"ש ב-$[a,b]$.

הוכחה: נניח בשלילה כי f לא רבמ"ש ב-$[a,b]$. אז קיימות $(x_n),(y_n)$ סדרות ב-A כך ש-$\lim\limits_{n\to\infty}(y_n-x_n)=0$ אבל לא מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}(f(y_n)-f(x_n))=0$, כלומר קיים $\epsilon>0$, כך ש-$\forall N\in\mathbb{N}$, קיים $n\geq N$ כך ש-$|f(y_n)-f(x_n)|\geq\epsilon$. ניתן לבחור (n_k) סדרה עולה ממש ב-$\mathbb{N}$ המקיימת את התנאי הנ"ל. נביט ב-$(x_{n_k})\lhd(x_n)$ ו-$(y_{n_k})\lhd(y_n)$ המקיימות $|f(y_{n_k})-f(x_{n_k})|\geq\epsilon$, $\forall k\in\mathbb{N}$. (x_{n_k}) סדרה ב-$[a,b]$ ולכן לפי BW קיימת $(x_{n_{k_l}})\lhd(x_{n_k})$ כך ש-$\lim\limits_{l\to\infty}x_{n_{k_l}}=x\in[a,b]$. מרציפות f והיינה, $\lim\limits_{l\to\infty}f\left(x_{n_{k_l}}\right)=f(x)$. נתבונן ב-$\left(y_{n_{k_l}}\right)$, היא סדרה חלקית של (y_{n_k}) ועל כן גם סדרה חלקית של (y_n) לכן $\begin{cases}\left(x_{n_{k_l}}\right)\lhd(x_n)\\ \left(y_{n_{k_l}}\right)\lhd(y_n)\end{cases}$ ומכאן ש-$\left(x_{n_{k_l}}-y_{n_{k_l}}\right)\lhd(x_n-y_n)$ ולכן ממשפט הירושה $\lim\limits_{l\to\infty}\left(y_{n_{k_l}}-x_{n_{k_l}}\right)=0$ ולכן $\lim\limits_{l\to\infty}y_{n_{k_l}}=\lim\limits_{l\to\infty}\left(y_{n_{k_l}}-x_{n_{k_l}}\right)+x_{n_{k_l}}=0+x=x$. לכן מרציפות והיינה

$$\lim_{l\to\infty}f\left(y_{n_{k_l}}\right)=f(x)=\lim_{l\to\infty}f\left(x_{n_{k_l}}\right)$$

כלומר $\lim\limits_{l\to\infty}f\left(y_{n_{k_l}}\right)-f\left(x_{n_{k_l}}\right)=0$ סתירה. $\blacksquare$

משפט $\mathcal{C}([a,b])\subset\mathcal{R}([a,b])$ כלומר אם f רציפה ב-$[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

הוכחה: נראה כי $\forall\epsilon>0$, קיימות $\psi\leq f\leq\varphi$ כך ש-$\int\limits_a^b(\psi-\varphi)<\epsilon$. יהי $\epsilon>0$. f רבמ"ש ב-$[a,b]$ כי היא רציפה שם. יהי $\delta>0$ כך ש-$\forall s,t\in[a,b]$ שעבורם $|s-t|<\delta$ מתקיים $|f(s)-f(t)|<\epsilon$. תהי $\mathcal{P}:(x_0,\dots,x_n)$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta x_i:x_i-x_{i-1}\}<\delta$. נגדיר

$$\psi\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=\max\{f(t):x_{i-1}\leq t\leq x_i\}=:M_i,\quad \varphi\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=\min\{f(s):x_{i-1}\leq s\leq x_i\}=:m_i$$

וגם $\psi(x_i)=:f(x_i):=\varphi(x_i)$, $1\leq\forall i\leq n$ (f חסומה בקטע סגור מווירשטראס). נשים לב כי $\psi\leq f\leq\varphi$ ב-$[a,b]$.

$$\int\limits_a^b(\psi-\varphi)=\int\limits_a^b\psi-\int\limits_a^b\varphi=\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^n(M_i-m_i)\Delta x_i\overset{(*)}{\leq}\sum_{i=1}^n\epsilon\Delta x_i=\epsilon(b-a)$$

$(*)$ עבור $s_i,t_i\in[x_{i-1},x_i]$ מתקיים $|s_i-t_i|\leq\Delta x_i<\delta$ ולכן $\psi(t_i)-\varphi(s_i)<\epsilon$. $\blacksquare$

משפט תהי $f\in\mathcal{B}([a,b])$ אז $f\in\mathcal{R}([a,b])$ אם"ם לכל $a<c<d<b$, f אינטגרבילית.

הוכחה: $\Leftarrow$: הוכחנו בתרגיל.

$\Rightarrow$: (לסטודנטית המשקיעה, אבל ככה נמרוד המסכם הוכיח) יהי $\epsilon>0$. נשים לב כי ל-f חסמי מלעל ומלרע M,m בהתאמה. יהיו $a<c<d<b$ שנבחר אח"כ. תהיינה $\varphi,\psi\in\mathcal{S}([a,b])$ כך ש-$\psi\leq f\leq\varphi$ וגם $\int\limits_a^b(\psi-\varphi)<\frac{\epsilon}{3}$ (נראה בהמשך למה דווקא $\frac{\epsilon}{3}$). תהי

$P=\{c=x_0<\cdots<x_n=d\}$ חלוקה המייצגת את φ,ψ. נגדיר פ' מדרגות

$$\tilde{\psi}\left(x\right)=\left\{\begin{smallmatrix}\psi(x) & x\in[c,d]\\ M & x\in[a,c)\cup(d,b]\end{smallmatrix}\right. ,\quad \tilde{\varphi}\left(x\right)=\left\{\begin{smallmatrix}\varphi(x) & x\in[c,d]\\ m & x\in[a,c)\cup(d,b]\end{smallmatrix}\right.$$

נשים לב כי אלו פ' מדרגות ביחס לחלוקה $P'=\{a<x_0<\cdots<x_n<b\}$.

$$\int\limits_a^b\left(\psi-\varphi\right)=\left(M-m\right)\left(c-a\right)+\int\limits_c^d\left(\psi-\varphi\right)+\left(M-m\right)\left(d-b\right)\overset{(*)}{<}\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$$

ולכן מקריטריון רימן f אינטגרבילית ב-$[a,b]$.

$(*)$ נבחר c,d כך ש-$c-a,d-b<\frac{\epsilon}{3}$. ■

הרצאה 15

דוגמה הפונקציה $f(x)=x^2$ רבמ"ש ב-$[0,a]$, $\forall a>0$. יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\epsilon}{2a}$. נשים לב כי לכל $|x-y|<\delta$ מתקיים כי

$$|f(x)-f(y)|=\left|x^2-y^2\right|=|x-y|\cdot|x+y|\leq|x-y|\cdot 2a<\delta 2a=\frac{\epsilon}{2a}2a=\epsilon$$

דוגמה $f\left(x\right)=x^2$ לא רבמ"ש ב-$(0,\infty)$. נבחר $\epsilon=1$. נניח בשלילה כי קיים $\delta>0$ כך ש-$\forall x,y\in(0,\infty)$ כך ש- $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<1$. $\forall x\in(0,\infty)$ מתקיים

$$\left|f(x)-f(x+\frac{\delta}{2})\right|=\left|x^2-\left(x+\frac{\delta}{2}\right)^2\right|=\left|x-\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right|\cdot\left|x+\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right|=\frac{\delta}{2}\left(2x+\frac{\delta}{2}\right)>\frac{\delta}{2}x$$

עבור $x>\frac{2}{\delta}$ מתקיים $\left|x-\left(x+\frac{\delta}{2}\right)\right|<\delta$ אבל $\left|f(x)-f(x+\frac{\delta}{2})\right|>\frac{\delta}{2}x>\frac{\delta}{2}\cdot\frac{2}{\delta}=1$ סתירה.

טענה אם f גזירה ב-D והנגזרת שלה חסומה ב-D אז היא רבמ"ש ב-D.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\frac{\epsilon}{K}$. ממשפט לגראנז', $\forall x,y\in D$ מתקיים $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|=|f'(c)|<K$ כך ש-$k\in\mathbb{R}$, $c\in(x,y)$. לכן עבור $|x-y|<\delta$ נקבל $|f(x)-f(y)|<K|x-y|<K\delta=K\frac{\epsilon}{K}=\epsilon$. ■

דוגמה לא כל פ' רבמ"ש הנגזרת שלה היא חסומה. $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה ב-$[0,1]$ ולכן ממשפט קנטור היא רבמ"ש ב-$[0,1]$ וגם ב-$(0,1]$ אבל $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ לא חסומה ב-$(0,1]$.

הערה כל פונקציה עם נגזרת חסומה $\Leftarrow$ ליפשיצית $\Leftarrow$ רבמ"ש $\Leftarrow$ רציפה $\Leftarrow$ מקיימת את תכונת ערך הביניים. עם זאת, אבל הכיוון ההפוך לא עובד בהכרח באף אחד מהמעברים.

דוגמה $f(x)=\sin\left(x^{2}\right)$ פ' חסומה. היא לא רבמ"ש ב-$(0,\infty)$. נשתמש בטענה f רבמ"ש ב-D אם"ם לכל $(x_n),(y_n)\in D$ כך ש-$|x_n-y_n|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ מתקיים $|f(x_n)-f(y_n)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. נבחר $x_n=\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}$ ו-$y_n=\sqrt{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}$. מתקיים

$$|x_n-y_n|=\left|\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}\right|=\left|\frac{-\pi}{\sqrt{2\pi n+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2\pi n+\frac{3}{2}\pi}}\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

אבל

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|\sin\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(2\pi n+\frac{3\pi}{2}\right)\right|=|1-(-1)|=2\underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow}0$$

משפט תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$ עם חסמים $m\le f\le M$ ו-$g\in\mathcal{C}([m,M])$ ונגדיר $h:=g\circ f$ אזי $h\in\mathcal{R}([a,b])$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$. מהיות g רציפה ב-$[m,M]$ היא רבמ"ש ב-$[m,M]$ ולכן $\exists\delta>0$ כך ש-$\forall s,t\in[m,M]$ עם $|s-t|<\delta$ מתקיים $|g(s)-g(t)|<\epsilon$. בהסתמך על כך ש-f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ קיימות $\varphi_f\le f\le\psi_f$ כך ש-

$$\int_a^b(\psi_f-\varphi_f)=\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)\,\Delta x_i<\delta\cdot\epsilon$$

נגדיר

$$\psi_h\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=\max\{g(t):c_i\le t\le d_i\}=:L_i,\quad \varphi_h\Big|_{(x_{i-1},x_i)}:=\min\{g(s):c_i\le s\le d_i\}=:l_i$$

וגם $\varphi_h(x_i):=h(x_i)=:\psi_h(x_i)$. ברור כי מתקיים $\varphi_h\le h\le\psi_h$.

נגדיר $G=\{1\le i\le n:d_i-c_i<\delta\}$ וגם $B=\{1\le i\le n:d_i-c_i\ge\delta\}$. נשים לב כי אם $i\in G$ אז $L_i-l_i<\epsilon$.

$$\sum_{i\in G}(L_i-l_i)\,\Delta x_i<\epsilon\sum_{i\in G}\Delta x_i\le\epsilon\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\epsilon(b-a)$$

$$\delta\sum_{i\in B}\Delta x_i\le\sum_{i\in B}(d_i-c_i)\,\Delta x_i\le\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)\,\Delta x_i=\int_a^b(\psi_f-\varphi_f)<\delta\epsilon$$

ולכן $\sum_{i\in B}\Delta x_i<\epsilon$. נשתמש ב-$L,l\in\mathbb{R}$, החסמים של g המקיימים $l\le g\le L$ ונקבל

$$\sum_{i\in B}(L_i-l_i)\,\Delta x_i\le(L-l)\sum_{i\in B}\Delta x_i<(L-l)\,\epsilon$$

$$\int_a^b (\psi_h-\varphi_h) = \sum_{i=1}^n (L_i-l_i)\,\Delta x_i = \sum_{i\in G}(L_i-l_i)\,\Delta x_i + \sum_{i\in B}(L_i-l_i)\,\Delta x_i < \epsilon\,(b-a+L-l)$$

■

שבוע $\mathbb{VI}$ | המשפט היסודי של החשבון האינפיניטסימלי

הרצאה 16

הערה עבור $f\in\mathcal{R}([a,b])$ הוכחנו כי $|f|\in\mathcal{R}([a,b])$ ומתקיים $-|f|\le f\le|f|$ ולכן $-\int_a^b|f|\le\int_a^b f\le\int_a^b|f|$ ולכן $\left|\int_a^b f\right|\le\int_a^b|f|$.

הגדרה תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$. נגדיר $\int_b^a f=-\int_a^b f$, $\int_c^c f=0$.

משפט (FTC גרסה א') תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$. נגדיר $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ ע"י $F(x):=\int_a^x f$ אז F רציפה. אם f רציפה ב-$c\in[a,b]$ אז F גזירה ב-c ומתקיים $F'(c)=f(c)$.

הוכחה: נניח כי $|f|\le M$ ב-$[a,b]$. נוכיח כי קיים הגבול מימין ונשאיר לסטודנטית המשקיעה להוכיח את הצד השני.

יהי $h>0$.

$$|F(x+h)-F(x)| = \left|\int_x^{x+h} f\right| \le \int_x^{x+h}|f| \le M\cdot h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

כלומר $\lim_{h\to 0^+} F(x+h)-F(x)=0$.

תהי $c\in[a,b]$ בה f רציפה. נראה כי $F'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(c)$. יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta>0$ כך ש-$\forall t\in(c,c+\delta)$ מתקיים $|f(t)-f(c)|<\epsilon$. $\forall h\in(0,\delta)$ מתקיים

$$\left|\frac{F(c+h)-F(c)}{h}-f(c)\right| = \left|\frac{\int_a^{c+h} f-\int_a^c f}{h}-f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f-f(c)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f-\frac{1}{h}\int_c^{c+h} f(c)\right|$$

$$=\frac{1}{h}\left|\int_c^{c+h}\left(f-\underbrace{f(c)}_{\text{קבוע}}\right)\right| \le \frac{1}{h}\int_c^{c+h}|(f-f(c))| < \frac{1}{h}\int_c^{c+h}\epsilon=\epsilon$$

לכן f גזירה מימין. באותו האופן היא גזירה משמאל. ■

משפט (FTC גרסה ב') יהיו $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ו-$F \in \mathcal{C}([a,b])$ כך ש-F גזירה פרט למספר סופי של נקודות ובכל נקודה x ש-F גזירה בה נקבל $F'(x) = f(x)$ אזי $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

הוכחה: נראה כי לכל $\varphi \le f \le \psi$ מתקיים $\int_a^b \varphi \le F(b) - F(a) \le \int_a^b \psi$ ומלמת החתכים נסיק את הרצוי.

יהיו $\varphi \le f \le \psi$. ניתן להניח כי שתיהן מיוצגות באמצעות אותה חלוקה אשר מכילה ("מעלימה") את כל הנקודות בהן F איננה גזירה. מלגראנז' ב-$[x_{i-1}, x_i]$ על F נקבל כי $\exists t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ כך ש-$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1})$. תהי $\tau \in \mathcal{S}([a,b])$ המוגדרת ע"י $\tau\big|_{(x_{i-1},x_i)} = f(t_i)$ וגם $\tau(x_i) = f(x_i)$. נשים לב כי $\varphi \le \tau \le \psi$ ולכן $\int_a^b \varphi \le \int_a^b \tau \le \int_a^b \psi$.

$$\int_a^b \tau = f(t_1)(x_1 - x_0) + \cdots + f(t_n)(x_n - x_{n-1}) = (F(x_1) - F(x_0)) + \cdots + (F(x_n) - F(x_{n-1})) = F(b) - F(a)$$

■

תרגול 6

הגדרה תהי $f : I \to \mathbb{R}$, נאמר כי F היא <u>פונקציה קדומה</u> של f ב-I אם $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

טענה תהי F פ' קדומה של f ב-I. G פ' קדומה של f ב-I אמ"ם $\exists C \in \mathbb{R}$ כך ש-$G(x) = F(x) + C$, $\forall x \in I$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $G(x) = F(x) + C$ לכן $G'(x) = F'(x) = f(x)$ כלומר G קדומה.

$\Rightarrow$: נניח כי G קדומה של f. נסמן $H(x) = G(x) - F(x)$.

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

מלגראנז', $0 = H'(d) = \frac{H(x)-H(0)}{x-0}$ ולכן $H(x) = H(0) = C$, $\forall x$. כלומר $G(x) = F(x) + C$. ■

תרגיל הראו דוגמה לפ' אינטגרבילית שאין לה פ' קדומה.

פתרון לכל פ' מדרגות לא טריוויאליות אין פ' קדומה גלובלית. עם זאת, זה לא עניין מהותי שכן לכל קטע חלוקה כן יש פ' קדומה ואפשר לאסכם בנפרד. נביט בדוגמה לא טריוויאלית: $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q} \end{cases}$. אין לה פ' קדומה באף תת קטע. נניח בשלילה כי יש לה פ' קדומה ב-$[a,b]$. מצפיפות הרציונאלים, קיים $\mathbb{Q} \ni \frac{p}{q} \in [a,b]$ וגם $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \ni r \in [a,b]$ ומתקיים $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q}$, $f(r) = 0$. f היא נגזרת של הקדומה שלה ולכן ממשפט דרבו f מקבלת את כל הערכים בין 0 ל-$\frac{1}{q}$. אבל $\mathrm{Im} f \subset \mathbb{Q}$ ו-$\exists r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ כך ש-$0 < r < \frac{1}{q}$ סתירה.

תרגיל מצאו פ' קדומה ל-$\frac{1}{\cos^2 x}$.

פתרון נשים לב כי $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin' x \cos x - \sin x \cos' x}{\cos^2 x} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = (\tan x)'$ לכן $\tan x$ היא פ' קדומה של $\frac{1}{\cos^2 x}$.

תרגיל חשבו את $\int \left(2\cos x + 3x^7\right)\,\mathrm{dx}$.

פתרון $\int \left(2\cos x + 3x^7\right)\,\mathrm{dx} = 2\int \cos x\,\mathrm{dx} + 3\int x^7\,\mathrm{dx} = 2\sin x + \frac{3}{9}x^8$.

טענה (אינטגרציה בחלקים) יהיו $f, g : I \to \mathbb{R}$ גזירות. נניח כי ל-$f'g$ פ' קדומה אז גם ל-fg' יש פ' קדומה ומתקיים

$$\int f(x)\,g'(x)\,\mathrm{dx} = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{dx}$$

הוכחה: $(fg)' = f'g + fg'$ ולכן $(fg)' - f'g = fg'$. מלינאריות לאגף שמאל יש פ' קדומה השווה ל- $f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,\mathrm{dx}$.

■

דוגמה $\int \underbrace{x}_{f}\underbrace{\cos x}_{g'}\mathrm{dx} = x\sin x - \int \sin x\,\mathrm{dx} = x\sin x + \cos x$.

טענה (שינוי משתנה) תהי $f : J \to \mathbb{R}$ בעלת פ' קדומה F ב-J ותהי $\varphi : I \to J$ גזירה ב-I אזי

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,\mathrm{dx} = F(\varphi(x)) + C$$

הוכחה:

$$(F(\varphi(x)))' = F'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$$

■

תרגיל מצאו את $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{dx}$.

פתרון נגדיר $f(x) = \frac{1}{x}$, $\varphi(x) = 1 + \sqrt{x}$, $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} = \ln(1+\sqrt{x})$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} &= \int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{2\sqrt{x}+2-2}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{2\sqrt{x}+2}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} - 2\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{dx} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right) = 2\sqrt{x} - 2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)
\end{aligned}$$

דוגמה

$$\int\frac{1}{9x^2-6x+5}\,\mathrm{dx}=\int\frac{1}{(3x-1)^2+4}\overset{(*)}{=}\frac{1}{3}\int\frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\int\frac{1}{\left(\frac{t}{2}\right)^2+1}\,\mathrm{dt}$$
$$\overset{(**)}{=}\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 2\int\frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{du}=\frac{1}{6}\arctan\left(u\right)=\frac{1}{6}\arctan\left(\frac{3x-1}{2}\right)$$

$(*)$ $t=3x-1$, $\mathrm{dt}=3x\,\mathrm{dx}$, $\frac{1}{3}\,\mathrm{dt}=\mathrm{dx}$.

$(**)$ $u=\frac{t}{2}$, $\mathrm{du}=\frac{1}{2}\,\mathrm{dt}$, $2\mathrm{du}=\ \mathrm{dt}$.

הרצאה 17

הגדרה $\int f\,\mathrm{dx}=\{F:F'=f\}$.

תכונות

1. $\int f\,\mathrm{dx}+\int g\,\mathrm{dx}=\int\left(f+g\right)\,\mathrm{dx}$, עבור f,g אינטגרביליות.
2. $k\int f\,\mathrm{dx}=\int kf\,\mathrm{dx}$, $\forall k\in\mathbb{R}$, f אינטגרבילית.
3. $\int f'g\,\mathrm{dx}=fg-\int fg'\,\mathrm{dx}$.
4. $\int f\left(g\left(t\right)\right)\cdot g'\left(t\right)\,\mathrm{dt}=F\left(g\left(t\right)\right)+C$.

דוגמות

1. $\int\sin t\,\mathrm{dt}=\cos t+C$, $\int\cos t\,\mathrm{dt}=-\sin t+C$.
2. $\int\sinh t\,\mathrm{dt}=\cosh+C$, $\int\cosh t\,\mathrm{dt}=\sinh t+C$.
3. $\int\frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{dt}=\arctan t+C$, $\int\frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{dt}=\mathrm{arctanh}t+C$.
4. $\int x^\alpha\,\mathrm{dx}=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$, $\forall\alpha\neq-1$.
5. $\int\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=\ln|t|+C$.
6. $\int e^t t\,\mathrm{dt}=e^t t-\int e^t\cdot 1\,\mathrm{dt}=e^t t-e^t+C$.
7.

$$\int\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\int\cos t\cos t\,\mathrm{dt}=\sin t\cdot\cos t-\int\sin t\left(-\sin t\right)\,\mathrm{dt}=\sin t\cos t+\int\sin t\sin t\,\mathrm{dt}$$
$$=\sin t\cos t+\int\left(1-\cos^2 t\right)\,\mathrm{dt}=\sin t\cos t+t-\int\cos^2 t\,\mathrm{dt}$$

לכן $2\int\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\sin t\cos t+t+C$ ולסיכום $\int\cos^2 t\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\left(\sin t\cos t+t\right)+C$. (הסטודנטית המשקיעה יכולה לחשב גם את $\int\sin^2 t\,\mathrm{dt}$)

.8

$$\int\ln t\,\mathrm{dt}=\int 1\cdot\ln t\,\mathrm{dt}=t\ln t-\int t\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=t\ln t-t+C$$

ולכן

$$\int\limits_1^e\ln t\,\mathrm{dt}=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^e=\left(e\ln e-e\right)-\left(1\ln 1-1\right)=1$$

.9

$$\int e^{t^2}2t\,\mathrm{dt}=e^{t^2}+C$$
$$\int e^{\sin t}\cos t\,\mathrm{dt}=e^{\sin t}+C$$
$$\int e^{\ln t}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}=e^{\ln t}+C$$

.10 $\int f\left(at+b\right)\,\mathrm{dt}=\int f\left(at+b\right)\frac{a}{a}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{a}F\left(at+b\right)+C$.

הרצאה 18

בהרצאה הוכחנו משפט חלש ובעייתי שתיקנו בשיעור הבא והוכחנו מחדש, ואחריו עשינו דוגמה שהתבססה עליו. כדי למנוע אנכרוניזם, הדוגמה הועברה לסוף ההוכחה של המשפט בהרצאה הבאה.

שבוע $\mathbb{VIII}$ | המשך המשפט היסודי ואינטגרלים לא אמיתיים

הרצאה 19

משפט (אינטגרציה לפי הצבה) תהי g גזירה ברציפות בקטע $[a,b]$ ו-f רציפה בקטע $g\left([a,b]\right)$ אזי $h:=f\circ g$ רציפה ב-$[a,b]$ ומתקיים $\int\limits_{g(a)}^{g(b)}f\left(x\right)\,\mathrm{dx}=\int\limits_a^b f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)\,\mathrm{dt}$.

הוכחה: תהי F קדומה של f ב-$g\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי $F\circ g$ גזירה ב-$\left[a,b\right]$ ומתקיים $\left(F\circ g\right)'\left(t\right)=f\left(g\left(t\right)\right)\cdot g'\left(t\right)$, $\forall t\in\left[a,b\right]$ אזי לפי המשפט היסודי,

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)}f\left(x\right)\,\mathrm{dx}\overset{FTC}{=}F\left(g\left(b\right)\right)-F\left(g\left(a\right)\right)=\left(F\circ g\right)\left(b\right)-\left(F\circ g\right)\left(a\right)\overset{FTC}{=}\int\limits_{a}^{b}f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)\,\mathrm{dt}$$

■

דוגמה

$$\int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^{2}}\,\mathrm{dx}=\int\limits_{\pi}^{0}\sqrt{1-\cos^{2}t}\cdot\cos't\,\mathrm{dt}=\int\limits_{\pi}^{0}\sin t\cdot\left(-\sin t\right)\,\mathrm{dt}=\int\limits_{0}^{\pi}\sin^{2}t\,\mathrm{dt}$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi}1-\cos\left(2t\right)\,\mathrm{dt}=\frac{1}{2}\left(\pi-\left(\frac{\sin\left(2t\right)}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right)=\frac{\pi}{2}$$

משפט (אינטגרציה לפי חלקים) תהיינה $f,g\in\mathcal{C}\left(\left[a,b\right]\right)$ כך ש-$f',g'\in\mathcal{R}\left(\left[a,b\right]\right)$ אזי

$$\int\limits_{a}^{b}f'\left(t\right)g\left(t\right)\,\mathrm{dt}=f\left(b\right)g\left(b\right)-f\left(a\right)g\left(a\right)-\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)g'\left(t\right)$$

הוכחה: $\left(f\cdot g\right)'\left(t\right)=f'\left(t\right)g\left(t\right)+f\left(t\right)g'\left(t\right)$, $\forall t\in\left[a,b\right]$. לפי המשפט היסודי,

$$\int\limits_{a}^{b}f'\left(t\right)g\left(t\right)+f\left(t\right)g'\left(t\right)=\left(f\cdot g\right)\left(b\right)-\left(f\cdot g\right)\left(a\right)$$

■

דוגמה נסתכל על $\ln$ מנקודת מבט שונה מהעבר. נגדיר $\ln:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ ע"י $\ln\left(x\right):=\int\limits_{1}^{x}\frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$. $\operatorname{sgn}\ln=\begin{cases}1 & 1<x\\ 0 & x=1\\ -1 & x<1\end{cases}$ שכן $\frac{1}{t}$ חיובית עבור $t>0$ ולכן רק הגבולות של האינטגרל הם אלה שקובעים את הסימן. מהמשפט היסודי, $\ln$ גזירה ומתקיים $\ln'\left(x\right)=\frac{1}{x}$. $\operatorname{sgn}\ln'>0$ ולכן $\ln$ עולה. בנוסף מתקיים $\operatorname{sgn}\ln''<0$ ולכן היא קעורה.

טענה $\forall a,b>0$, $\ln\left(ab\right)=\ln a+\ln b$.

הוכחה: נרצה להראות כי $\int\limits_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \int\limits_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} + \int\limits_1^{b} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$. מהומותטיה (אחת מתכונות האינטגרל המסוים), $\int\limits_1^{b} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = c\int\limits_{1\cdot c}^{bc} \frac{1}{\frac{t}{c}}$ כלומר $\int\limits_1^{b} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \int\limits_c^{bc} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$ ולכן

$$\int\limits_1^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} = \int\limits_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} + \int\limits_a^{ab} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} \overset{c=a}{=} \int\limits_1^{a} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt} + \int\limits_1^{b} \frac{1}{t}\,\mathrm{dt}$$

■

מסקנות

1. $\ln a^n = \ln\left(a^{n-1}\cdot a\right) = \ln a^{n-1} + \ln a \overset{\text{ה"א}}{=} n\ln a$.
2. $0 = \ln(1) = \ln\left(\frac{1}{a}\cdot a\right) = \ln a + \ln\frac{1}{a}$ כלומר $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(2^n) = \lim\limits_{n\to\infty} n\ln 2 = \infty$ לכן גם $\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = \infty$.
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = \lim\limits_{x\to\infty} \ln\frac{1}{x} = -\lim\limits_{x\to\infty} \ln x = -\infty$.
5. $\ln$ מונוטונית ממש ורציפה ולכן קיימת לה הפוכה $\exp$ ומתקיים $\mathbb{R} \underset{\exp}{\overset{\ln}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}_+$. $\ln 1 = 0$ ולכן $\exp 0 = 1$. $\ln(\exp y) = y$, נגזור ונקבל $\frac{1}{\exp y}\exp' y = 1$ כלומר $\exp = \exp'$.
6. נניח כי $\ln a = x, \ln b = y$ אזי $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, נפעיל $\exp$ ונקבל

$$\exp(x)\exp(y) = \exp(\ln(ab)) = \exp(x+y)$$

כלומר $e^x e^y = e^{x+y}$ (לא נוכיח כי $\exp x = e^x$).

7. $a^b = e^{b\ln a}$ כלומר $\ln\left(a^b\right) = b\ln a$.
8.

$$1 = \ln'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+h) = \lim_{h\to 0}\ln(1+h)^{\frac{1}{h}} = \ln\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$$

לכן $\lim\limits_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ כלומר $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

תרגול 7

תרגיל תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה. $\forall\delta>0$, נגדיר $F_\delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\,\mathrm{dt}$.

א. הוכיחו ש-$\forall\delta>0$, F_δ רציפה.

ב. $\lim\limits_{\delta\to 0} F_\delta(x) = f(x)\ ,\forall x\in\mathbb{R}$.

פתרון א.

$$F_\delta(x) = \frac{1}{2\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta} f(x+t)\ \mathrm{dt} \overset{u=x+t}{=} \frac{1}{2\delta}\int\limits_{x-\delta}^{x+\delta} f(u)\ \mathrm{du} = \frac{1}{2\delta}\left(\int\limits_{0}^{x+\delta} f(u)\ \mathrm{du} + \int\limits_{x-\delta}^{0} f(u)\ \mathrm{du}\right)$$

$$= \frac{1}{2\delta}\left(\int\limits_{0}^{x+\delta} f(u)\ \mathrm{du} - \int\limits_{0}^{x-\delta} f(u)\ \mathrm{du}\right) = \frac{1}{2\delta}\left(G(x+\delta) - G(x-\delta)\right)$$

כאשר G היא קדומה של f. מהמשפט היסודי, G רציפה ולכן F_δ היא רציפה מאש"ר.

ב.

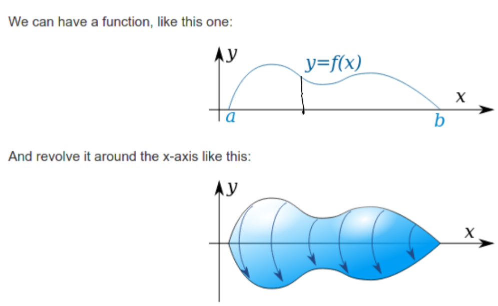
$$\lim_{\delta\to 0}\underbrace{\frac{1}{2\delta}\left(G(x+\delta) - G(x-\delta)\right)}_{F_\delta} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{G(x+\delta)-G(x)}{\delta} + \frac{G(x)-G(x-\delta)}{\delta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(G'(x) + G'(x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x)\right) = f(x)$$

הגדרה תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$. נגדיר את הנפח של הגוף הנוצר ע"י סיבוב של f סביב ציר ה-x בקטע $[a,b]$ להיות

$$V = \int\limits_{a}^{b} \pi\left(f(x)\right)^2\ \mathrm{dx}$$

הערה הרעיון מאחורי חישוב הנפח הזה נקרא "שיטת הדיסקיות" והוא שניתן להסתכל על כל ערך של f בתור רדיוס של דיסקית, וניתן לסכום את כל הדיסקיות יחדיו ולקבל נפח שבכל נקודה x שטח הדיסקית האופקית בנקודה ההיא יהיה $\pi\left(f(x)\right)^2$. (ראו דוגמה)



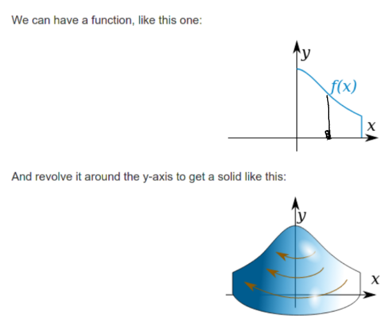
דוגמה חשבון נפח של כדור ברדיוס R. נגדיר $f:[-R,R]\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$.

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2\,\mathrm{dx}=\pi\int_{-R}^{R}R^2-x^2\,\mathrm{dx}=\pi R^2\int_{-R}^{R}\mathrm{dx}-\pi\int_{-R}^{R}x^2\,\mathrm{dx}$$
$$=\pi R^2(2R)-\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-R}^{R}=2\pi R^3-\pi\frac{R^3+R^3}{3}=\frac{4}{3}\pi R^2$$

הגדרה תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$. נגדיר את הנפח של הגוף הנוצר ע"י סיבוב של f סביב ציר ה-y בקטע $[a,b]$ להיות

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,\mathrm{dx}$$

הערה כאן הרעיון הוא לחשב את הנפח על ידי סכימת צילנדרים ברדיוסים סביב ציר y (קליפות) ששטח כל אחד מהם הוא גובה (x) × רדיוס $(f(x))\times 2\pi$, ונשים לב כי נקבל מעין "אוהל קרקס". (ראו דוגמה)



תרגיל חשבו את הנפח של קונוס שגובהו h ורדיוס בסיסו R.

פתרון נגדיר $f:[0,R]\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=h\left(1-\frac{x}{R}\right)$ ונשים לב כי היא מקיימת סיבוב סביב ציר ה-y נותן את הקונוס הרצוי.

$$V=\int_0^R 2\pi x f(x)\,\mathrm{dx}=\int_0^R 2\pi x h\left(1-\frac{x}{R}\right)\,\mathrm{dx}=2\pi h\left(\int_0^R x\,\mathrm{dx}-\int_0^R x^2\,\mathrm{dx}\right)$$
$$=2\pi h\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^R-\frac{1}{R}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^R\right)=2\pi h\left(\frac{R^2}{2}-\frac{1}{R}\frac{R^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi h R^2$$

תרגיל הוכיחו שהפונקציה $G:\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $G(x)=\int_{-\cos x}^{\sin x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{dt}$ קבועה.

פתרון נשים לב כי $G\left(x\right)=F\left(\sin x\right)-F\left(-\cos x\right)$ כאשר $F\left(x\right)=\int\limits_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{dt}$. נגזור ונקבל,

$$G'\left(x\right)=F'\left(\sin x\right)\cos x-F'\left(-\cos x\right)\sin x\overset{FTC}{=}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\cos x-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\sin x=\frac{\cos x}{\cos x}-\frac{\sin x}{\sin x}=1-1=0$$

לכן מלגרנז', G קבועה.

דוגמה

$$\int\limits_0^1\frac{1}{1+e^t}\,\mathrm{dt}\overset{(*)}{=}\int\limits_1^e\frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}=\int\limits_1^e\frac{1}{x\left(1+x\right)}\,\mathrm{dx}=\int\limits_1^e\frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{dx}$$
$$\overset{(**)}{=}-\int\limits_1^e\frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx}+\int\limits_1^e\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}=-\left[\ln\left(1+x\right)\right]_1^e+\left[\ln x\right]_1^e=1+\ln 2-\ln\left(1+e\right)$$

$(*)$ $e^t=x$, $\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}}=e^t$, $\mathrm{dt}=\frac{\mathrm{dx}}{x}$.

$(**)$ ננסה בעזרת ניחוש מושכל למצוא $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $\frac{b}{x}+\frac{a}{1+x}=\frac{1}{x(1+x)}$. כלומר $\frac{1}{x(1+x)}=\frac{ax+b(1+x)}{x(1+x)}=\frac{(a+b)x+b}{x(1+x)}$ $(a+b)x+b=1$ ועבור $x=0$ נקבל $b=1$ ומכאן ש-$a+b=0$ כלומר $a=-1$ ולכן $\frac{1}{x(x+1)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x}-$.

דוגמה

$$\int\limits_1^e\underbrace{x^3}_{f'}\underbrace{\ln^2 x}_{g}\,\mathrm{dx}\overset{(*)}{=}\left[\frac{x^4}{4}\ln^2 x\right]_1^e-\int\limits_1^e\frac{x^4}{4}2\ln x\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$$
$$=\frac{e^4\ln^2 e}{4}-\frac{1^4\ln^2 1}{4}-\frac{1}{2}\int\limits_1^e\underbrace{x^3}_{f'}\underbrace{\ln x}_{g}\,\mathrm{dx}$$
$$\overset{(*)}{=}\frac{e^4}{4}-\frac{1}{2}\left(\left[\frac{x^4}{4}\ln x\right]_1^e-\int\limits_1^e\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{dx}\right)$$
$$=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\int\limits_1^e x^3\,\mathrm{dx}\right)$$
$$=\frac{e^4}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\left(\frac{e^4}{4}-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{1}{32}\left(5e^4-1\right)$$

$(*)$ אינטגרציה בחלקים.

הרצאה 20

הגדרה תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[a,b]$ עבור $b>a$. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי (Improper Integral) $\int\limits_a^\infty f\left(t\right)\,\mathrm{dt}$ מתכנס אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{b\to\infty}\underbrace{\int\limits_a^b f\left(t\right)\,\mathrm{dt}}_{I(b)}$, ואחרת יקרא מתבדר.

הגדרה תהי $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע מהצורה $[c,b]$, $\forall c \in (a,b)$. נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^b f(t)\ \mathrm{dt}$ מתכנס אם קיים הגבול במובן הצר $\lim\limits_{c\to a^+} \int\limits_c^b f(t)\ \mathrm{dt}$.

הערה נוכל באותו האופן להגדיר את האינטגרל הלא אמיתי ל-$-\infty$ וכאשר f מוגדרת ב-$[a,b)$.

דוגמות

1. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ב-$[0,\infty)$.

$$I(b) = \int\limits_0^b \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{dx} = \arctan x|_0^b = \arctan b - \arctan 0 = \arctan b$$

$\lim\limits_{b\to\infty} I(b) = \lim\limits_{b\to\infty} \arctan b = \frac{\pi}{2}$ כלומר $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\ \mathrm{dx} = \frac{\pi}{2}$.

2. $g(x) = \frac{1}{x}$ ב-$[1,\infty)$.

$$I(b) = \int\limits_1^b \frac{1}{x}\ \mathrm{dx} = \ln b - \ln 1 = \ln b$$

$\lim\limits_{b\to\infty} I(b) = \lim\limits_{b\to\infty} \ln b = \infty$ לכן האינטגרל מתבדר.

3. $h(x) = \sin x$ ב-$[0,\infty)$.

$$I(b) = \int\limits_0^b \sin x\ \mathrm{dx} = (-\cos x)|_0^b = -\cos b + \cos 0 = -\cos b + 1$$

$\lim\limits_{b\to\infty} I(b) = \lim\limits_{b\to\infty} -\cos b + 1$ כלומר האינטגרל מתבדר.

4. משפחת הפונקציות $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\ \mathrm{dx}$ עבור $a > 0$, $p > 0$.

$$I(b) = \int\limits_a^b \frac{1}{x^p}\ \mathrm{dx} = \begin{cases} \ln b - \ln a & p=1 \\ \frac{b^{-p+1}}{-p+1} - \frac{a^{-p+1}}{-p+1} & p\neq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{b\to\infty} I(b) = \begin{cases} \infty & \text{מתבדר} & p=1 \\ \infty & \text{מתבדר} & -p+1>0 \\ -\frac{a^{-p+1}}{-p+1} & \text{מתכנס} & -p+1<0 \end{cases}$$

כלומר $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\ \mathrm{dx}$ מתבדר עבור $0 < p \leq 1$ ומתכנס עבור $p > 1$ ומתקיים $\int\limits_a^\infty \frac{1}{x^p}\ \mathrm{dx} = \frac{a^{-p+1}}{p-1}$.

תכונות

תהיינה $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות בכל קטע מהצורה $[a,b]$, $\forall b>a$ כך שהאינטגרלים הלא אמיתיים $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt},\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנסים אז:

1. (חיוביות) אם $g\geq 0$ אז $\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}\geq 0$.
2. (מונוטוניות) אם $f\leq g$ אז $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}\leq\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}$.
3. (לינאריות) $\begin{cases}\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}+\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}=\int\limits_a^\infty f(t)+g(t)\,\mathrm{dt}\\ \forall k\in\mathbb{R},\int\limits_a^\infty kf(t)\,\mathrm{dt}=k\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}\end{cases}$.
4. (אדיטיביות) $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}=\int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{dt}+\int\limits_c^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$.

משפט (קריטריון קושי להתכנסות אינטגרל לא אמיתי) תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ כך ש-$b>a$. אזי האינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס אם"ם $\forall\epsilon>0$, $\exists B\in\mathbb{R}$ כך ש- $\forall b,b'>B$, $\left|\int\limits_b^{b'} f(t)\,\mathrm{dt}\right|<\epsilon$.

קריטריוני התכנסות

תהיינה $f,g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ חיוביות ואינטגרביליות בכל תת קטע מהצורה $[a,b]$ עבור $b>a$.

1. (חסימות) $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס אם"ם הפונקציה $I(b)=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$ חסומה מלעל.
2. (השוואה) נניח כי $f\leq g$ אם $\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס אז $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס (ומי קונטרה-פוזיטיב אם $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ מתבדר אז $\int\limits_a^\infty g(t)\,\mathrm{dt}$ גם הוא מתבדר).

דוגמה נתבונן באינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$. נשים לב כי e^{-x^2} זוגית ולכן האינטגרל מתכנס אם"ם $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ מתכנס. בנוסף, מאדיטיביות, $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ מתכנס אם"ם $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ מתכנס. עבור $x>1$ נקבל כי $e^{-x^2}<e^{-x}$ ולכן

$$\int\limits_1^b e^{-x}\,\mathrm{dx}=\left(-e^{x}\right)\Big|_1^b=\left(-e^{-b}\right)-\left(-e^{-1}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^b}\underset{b\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{e}$$

כלומר $\int\limits_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{dx}$ מתכנס ולכן $\int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}$ מתכנס מקריטריון ההשוואה כי מתקיים $0\leq\int\limits_1^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{dx}\leq\int\limits_1^\infty e^{-x}\,\mathrm{dx}$ (ממונוטוניות).

הרצאה 21

משפט (קריטריון האינטגרל) תהי $f:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ חיובית מונוטונית יורדת. נגדיר (a_k) ע"י $a_k:=f(k)$. אזי הטור $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k$ מתכנס אם"ם האינטגרל $\int\limits_1^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס ובמקרה של התכנסות, $\int\limits_1^\infty f(t)\,\mathrm{dt}\leq\sum\limits_{k=1}^\infty a_k\leq a_1+\int\limits_1^\infty f(t)\,\mathrm{dt}$.

הוכחה: מהיות f מונוטונית, f אינטגרבילית בכל תת קטע סגור מהקרן.

$$S_k-a_1=a_2+\cdots+a_k\overset{(*)}{\le}\int_1^2 f(t)\,\mathrm{dt}+\cdots+\int_{k-1}^{k}f(t)\,\mathrm{dt}=\int_1^k f(t)\,\mathrm{dt}\le a_1+\cdots+a_k=S_k$$

$(*)$ $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{dt}\overset{(\star)}{\le}\int_1^2 f(2)\,\mathrm{dx}=f(2)$, $(\star)$ f מונוטונית יורדת. באותו האופן עבור שאר ערכי k.

$\Leftarrow$: אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אז ממונוטוניות הגבול מתקיים $\int_1^k f(t)\,\mathrm{dt}\le S_k\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ לכן עבור $I(b)=\int_1^b f(t)\,\mathrm{dt}$, $I(b)$ מונוטונית עולה (כי f חיובית). בנוסף, $I(b)$ חסומה מלעל $\forall b\ge 1$ כי

$$I(b)=\int_1^b f(t)\,\mathrm{dt}\le\int_1^{\lceil b\rceil}f(t)\,\mathrm{dt}\le S_{\lceil b\rceil}\le\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

כלומר f עולה וחסומה מלעל ולכן $\lim_{b\to\infty}I(b)$ קיים, כלומר $\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס ומתקיים האי-שוויון הרצוי ממונוטוניות הגבול.

$\Rightarrow$: אם $\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס אז $\int_1^{k}f(t)\,\mathrm{dt}\le\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$, $\forall k\in\mathbb{N}$ (כי f חיובית). ראינו כי $S_k-a_1\le\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$ ומכאן ש-(S_k) חסומה ומכך נובע כי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס וממונוטוניות הגבול מתקיים האי-שוויון הרצוי. ∎

דוגמה $f(t)=\frac{1}{t^p}$, $p>0$. $\int_1^{\infty}\frac{1}{t^p}\,\mathrm{dt}$ מתכנס אם"ם $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ מתכנס כלומר עבור $p>1$.

משפט (התכנסות בהחלט גוררת התכנסות) תהי $f:[1,\infty)\to\infty$ בכל תת קטע סגור מהקרן. אם $\int_1^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{dt}$ מתכנס אזי גם $\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס.

הוכחה: נגדיר $p(x):=\begin{cases}x & x\ge0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ו- $m(x):=\begin{cases}0 & x\ge0\\ -x & x<0\end{cases}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ונשים לב כי

$$p(x)-m(x)=x,\quad 0\le p(x),m(x)\le|x|,\quad p(x)+m(x)=|x|$$

לכן $\int_1^{\infty}|f(t)|\,\mathrm{dt}\le\int_1^{\infty}m(f(t))\,\mathrm{dt},\int_1^{\infty}p(f(t))\,\mathrm{dt},\le 0$ ולכן ממבחן השוואה $\int_1^{\infty}m(f(t))\,\mathrm{dt},\int_1^{\infty}p(f(t))\,\mathrm{dt}$ מתכנסים. לכן,

$$\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}=\int_1^{\infty}p(f(t))-m(f(t))\,\mathrm{dt}\underset{\text{לינאריות}}{=}\int_1^{\infty}p(f(t))\,\mathrm{dt}-\int_1^{\infty}m(f(t))\,\mathrm{dt}$$

ומאריתמטיקה של גבולות $\int_1^{\infty}f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס. ∎

שבוע $\mathbb{VIII}$ | אפיוני אינטגרלים לא אמיתיים ומשפט לבג

הרצאה 22

הגדרה תהי $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית בכל תת קטע בקרן. נאמר כי האיטגרל הלא אמיתי $\int\limits_a^\infty f(t)\ \mathrm{dt}$ <u>מתכנס בהחלט</u> אם $\int\limits_a^\infty |f(t)|\ \mathrm{dt}$ מתכנס ואם הוא לא אבל $\int\limits_a^\infty f(t)\ \mathrm{dt}$ כן מתכנס נאמר כי $\int\limits_a^\infty f(t)\ \mathrm{dt}$ <u>מתכנס בתנאי</u>.

דוגמה $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{dt}$ מתכנס. ההתכנסות של האינטגרל שקולה להתכנסות של $\int\limits_a^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{dt}$ עבור $a>0$.

$$I(b)=\int\limits_1^b \underbrace{\sin t}_{f'}\cdot\underbrace{\frac{1}{t}}_{g}\ \mathrm{dt}=\left.\left((-\cos t)\frac{1}{t}\right)\right|_1^b-\int\limits_1^b(-\cos t)\left(-\frac{1}{t^2}\right)\ \mathrm{dt}$$

$\lim\limits_{b\to\infty}\left(\frac{-\cos b}{b}-\frac{-\cos 1}{1}\right)=\cos 1$. נוכיח כי $\int\limits_1^\infty \cos t\cdot\frac{1}{t^2}\ \mathrm{dt}$ מתכנס בהחלט ומשם נסיק כי $\int\limits_1^\infty \cos t\cdot\frac{1}{t^2}\ \mathrm{dt}$ יתכנס. $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right|\le\frac{1}{t^2}$ ואנו יודעים כי $\int\limits_1^\infty \frac{1}{t^2}\ \mathrm{dt}$ מתכנס (ראינו בעבר) ולכן מקריטריון ההשוואה $\int\limits_1^\infty \cos t\cdot\frac{1}{t^2}\ \mathrm{dt}$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס. לכן $\int\limits_0^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{dt}$ מתכנס.

דוגמה $\int\limits_1^\infty \frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{dt}$ אינו מתכנס.

$$\int\limits_\pi^{(k+1)\pi}|\sin t|\ \mathrm{dt}=\sum_{i=1}^k\int\limits_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\ \mathrm{dt}=k\int\limits_0^\pi\sin t\,\mathrm{dt}=k\left(-\cos\pi-(-\cos 0)\right)=2k$$

$$\int\limits_\pi^{(k+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{dt}=\sum_{i=1}^k\int\limits_{i\pi}^{(i+1)\pi}\frac{|\sin t|}{t}\ \mathrm{dt}\overset{(*)}{\ge}\sum_{i=1}^k\left(\frac{1}{(i+1)\pi}\cdot\int\limits_{i\pi}^{(i+1)\pi}|\sin t|\ \mathrm{dt}\right)=\sum_{i=1}^k\frac{2k}{(i+1)\pi}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty$$

$(*)$ $\frac{1}{t}$ מונוטונית יורדת ולכן האינטגרל חסום מלרע ממונטוניות האינטגרל ע"י הביטוי מימין.

מסקנה $\int\limits_1^\infty \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{dt}$ מתכנס בתנאי.

משפט תהי $f\in\mathcal{C}([a,\infty))$ ותהי $g\in\mathcal{D}([a,\infty))$ ונגדיר $F(x):=\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{dt}$. אם

(i) $\int\limits_a^\infty |g'(t)|\ \mathrm{dt}$ מתכנס.

(ii) F חסומה.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

אז $\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\ \mathrm{dx}$ מתכנס.

הערה המקביל עבור טורים של אינטגרציה בחלקים זה

$$\sum_{k=1}^{n} b_k a_k = b_1 a_1 + \cdots + b_n a_n = B_1 a_1 + a_2 \left(B_2 - B_1\right) + \cdots + \left(B_n - B_{n-1}\right) a_n$$
$$= B_1 \left(a_1 - a_2\right) + \cdots + B_{n-1} \left(a_{n-1} - a_n\right) + B_n a_n$$

כאשר $B_k := b_1 + \cdots + b_k$. נשים לב כי הרעיון פה הוא שאינטגרל אנלוגי לסכימה של ערכים, והנגזרת היא הפרש של ערכים (אפשר להסתכל על זה כשחושבים על הנגזרת בתור שיפוע שאז $a'_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{n-(n-1)} = a_n - a_{n-1}$ הוא השיפוע בין האיברים ה-n-ים.

משפט (קריטריון דיריכלה) יהיו (b_k) ו-(a_k) סדרות ממשיות. תהי (B_n) מוגדרת ע"י $B_n = b_1 + \cdots + b_n$. נניח כי (B_n) חסומה וכי (a_n) מוטונית יורדת המקיימת $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ אזי $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k a_k$ מתכנס.

הוכחה: נניח כי $|B_n| \le K$.

$$\left|B_1 \left(a_1 - a_2\right) + \cdots + B_{n-1} \left(a_{n-1} - a_n\right)\right| \le K \sum_{i=1}^{n-1} \left|a_i - a_{i+1}\right| = K \sum_{i=1}^{n-1} a_i - a_{i+1} = K \left(a_1 - a_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} K a_1$$

$|B_n a_n| \le K |a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ ולכן מקריטריון ההשוואה ואי שוויון המשולש הטור הרצוי מתכנס. ■

דוגמה $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$. $b_k = (-1)^k$, $B_n = b_1 + \cdots + b_n = \begin{cases} 0 & 2|k \\ 1 & 2\nmid k \end{cases}$, $|B_n| \le 1$. $a_k = \frac{1}{k}$ מוטוניות יורדת ושואפת לאפס לכן הטור מתכנס.

תרגול 8

הערה עבור $f : (a,\infty) \to \mathbb{R}$, כדי להוכיח ש-$\int\limits_a^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt}$ מתכנס נצטרך להוכיח התכנסות של שני גבולות שכן

$$\int\limits_a^{\infty} f(t)\,\mathrm{dt} = \lim_{\delta\to 0^+} \int\limits_{a+\delta}^{b} f(t)\,\mathrm{dt} + \lim_{M\to\infty} \int\limits_b^{M} f(t)\,\mathrm{dt}$$

עבור $b \in (a,\infty)$ כלשהו. מתקיים מצב אנלוגי עבור $f : (-\infty, a) \to \mathbb{R}$.

תרגילים

.1

$$\int\limits_e^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty} \int\limits_e^{M} \frac{1}{x \ln^2 x}\,\mathrm{dx} \overset{(*)}{=} \lim_{M\to\infty} \int\limits_1^{\ln M} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{dt} = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^{\ln M} = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln M} + 1\right) = 1$$

$(*)$ נציב $t = \ln x$ ולכן $\mathrm{dt} = \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$.

.2

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\delta\to0^+}\int_0^{1-\delta} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\delta\to0^+}\left(\arcsin x\right)\Big|_0^{1-\delta} = \lim_{\delta\to0^+}\left(\arcsin\left(1-\delta\right)-\arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

.3

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{x^2+2-e^{-x}}\,\mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{x^2+2-e^{-x}}\,\mathrm{dx}$$

נשים לב כי $0 \le \frac{\sin^2\left(\sqrt{x}\right)}{x^2+2-e^{-x}} \le \frac{1}{x^2}$,$\forall x>1$ לכן מספיק להראות מקריטריון ההשוואה לפ' אי שליליות כי $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx}$ מתכנס.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{1}{x^2}\,\mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^M = \lim_{M\to\infty}\left(-\frac{1}{M}+1\right) = 1$$

לכן גם האינטגרל המקורי מתכנס.

משפט (מבחן ההשוואה הגבולי לפ' אי שליליות) תהיינה $f:(a,b]$ אי שליליות. אם הגבול $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ אז $\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$ מתכנס אם"ם $\int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$ מתכנס.

דוגמה (אינטגרל אוילר) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin x\right)\,\mathrm{dx}$. נשים לב כי $\forall x\in(0,\frac{\pi}{2}]$ מתקיים $\sin x\in(0,1]$ ולכן $\ln\left(\sin x\right)<0$.

לכן $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln\left(\sin x\right)\,\mathrm{dx}$ הוא אינטגרל של פ' אי שלילית. ניזכר כי $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ ולכן

$$\lim_{x\to0^+}\frac{-\ln\left(\sin x\right)}{-\ln x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\cos x\frac{x}{\sin x} = 1$$

ממבחן ההשוואה הגבולי, מספיק להוכיח כי $\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln x\,\mathrm{dx}$ מתכנס.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln x\,\mathrm{dx} = -\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\ln x}_{f}\cdot\underbrace{1}_{g'}\,\mathrm{dx} = \lim_{\delta\to0^+}\left(x\ln x - x\right)\Big|_\delta^{\frac{\pi}{2}} = \lim_{\delta\to0^+}\left(\frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}-\delta\ln\delta+\delta\right) \overset{(*)}{=} \frac{\pi}{2}\ln\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$$

$(*)\ \lim_{x\to0^+}x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}-x = 0$. לכן האינטגרל של אוילר גם הוא מתכנס.

הגדרה נגדיר את פ' גאמה להיות $\Gamma:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ ע"י $\Gamma\left(s\right)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}$.

תרגיל הוכיחו כי

א. האינטגל מתכנס לכל s (כלומר ש-Γ מוגדרת היטב).

ב. $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$, $\forall x\in(0,\infty)$.

פתרון א.

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}=\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^1 e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}+\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}$$

נראה בפעם האחרת כי האינטגרל הלא אמיתי $\lim\limits_{\delta\to0^+}\int\limits_\delta^1 e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}$ מתכנס. אבל כן נראה כי האינטגרל השני מתכנס: $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{-t}t^{s-1}}{e^{-\frac{t}{2}}}=\lim\limits_{t\to\infty}e^{-\frac{t}{2}}t^{s-1}\overset{(*)}{=}0$.

$(*)$ אם נוריד את האקספוננט למכנה ונפעיל את לופיטל s פעמים נקבל שזה מתאפס.

מכאן ש-$\exists T\in\mathbb{R}$ כך ש-$\forall t>T$ מתקיים $\left|\frac{e^{-t}t^{s-1}}{e^{-\frac{t}{2}}}\right|<1$ כלומר $0\le e^{-t}t^{s-1}\le e^{-\frac{t}{2}}$ ולכן ממבחן ההשוואה הרגיל מספיק להראות כי $\int\limits_1^\infty e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{dt}$ מתכנס.

$$\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-\frac{t}{2}}\,\mathrm{dt}=\lim_{M\to\infty}\left(-2e^{-\frac{t}{2}}\right)\Big|_1^M=\lim_{M\to\infty}\left(-2e^{-\frac{M}{2}}+2e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}$$

לכן גם $\int\limits_1^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}$.

ב.

$$\Gamma(s+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s}\,\mathrm{dt}=\lim_{\delta\to0^+}\int_\delta^1 e^{-t}t^{s}\,\mathrm{dt}+\lim_{M\to\infty}\int_1^M e^{-t}t^{s}\,\mathrm{dt}$$

$$\int\underbrace{e^{-t}}_{g'}\underbrace{t^s}_{f}\,\mathrm{dt}=-e^{-t}t^s+s\int e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}$$

$$\int_0^\infty e^{-t}t^s\,\mathrm{dt}=\underbrace{\lim_{\delta\to0^+}\left(-e^{-t}t^s\right)\Big|_\delta^1+\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-t}t^s\right)\Big|_1^M}_{\alpha}+\underbrace{s\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}\,\mathrm{dt}}_{s\Gamma(s)}$$

מספיק להוכיח כי $\alpha=0$ ונסיים.

$$\alpha=\lim_{\delta\to0^+}\left(-e^{-1}+e^{-\delta}\delta^s\right)+\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-M}M^s+e^{-1}\right)\overset{\text{חאמ}}{=}-e^{-1}+0+\lim_{M\to\infty}-e^{-M}M^s+e^{-1}\overset{(*)}{=}0$$

$(*)$ כמו מקודם, אם נוריד את האקספוננט למכנה ונפעיל את לופיטל s פעמים נקבל שזה מתאפס.

מסקנה $\Gamma(n+1)=n!$.

הוכחה: באינדוקציה

$n=0$: $\Gamma(1)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{dt}=\lim\limits_{M\to\infty}\left(e^{-t}\right)\Big|_0^M=1=0!$.

$n\to n+1$: $\Gamma(n+1)\overset{\text{ב'}}{=}n\Gamma(n)\overset{\text{ה"א}}{=}n(n-1)!=n!$. ■

משפט ($Bohr–Mollerup$), ממש לא בחומר) פ' גאמה היא היחידה שמרחיבה את הגדרת העצרת לממשיים וגם סופר קמורה (כלומר $\log\Gamma$ קמורה).

דוגמה $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{dx}$ לא מתכנס.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{dx}=\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M\sin x\,\mathrm{dx}+\lim_{M\to-\infty}\int\limits_M^0\sin x\,\mathrm{dx}$$

לכן מספיק שנראה שאחד הגבולות לא קיים.

$$\lim_{M\to\infty}\int\limits_0^M\sin x\,\mathrm{dx}=\lim_{M\to\infty}\left(-\cos x\right)\Big|_0^M=\lim_{M\to\infty}-\cos M+1$$

וזה לא קיים. עם זאת, נשים לב כי $0=\lim\limits_{M\to\infty}0\overset{\text{אי-זוגית}}{=}\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^M\sin x\,\mathrm{dx}$.

הגדרה תהי $f:(-\infty,\infty)$ אינטגרבילית בכל תת קטע מהצורה $[-M,M]$, $M\in\mathbb{R}_+$. נגדיר את <u>הערך הראשי של קושי</u> של f להיות $I(f)=\lim\limits_{M\to\infty}\int\limits_{-M}^M f(x)\,\mathrm{dx}$.

טענה אם $\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\,\mathrm{dx}$ מתכנס אז הוא שווה ל-$I(f)$.

הוכחה: ברור מאש"ג. ■

הרצאה 23

הגדרה תהי A קבוצה. נאמר כי A <u>סופית</u> אם היא ריקה או שקיים $n\in\mathbb{N}$ ופ' $\varphi:[n]\to A$ חח"ע ועל. אם A לא סופית היא תקרא <u>אינסופית</u>.

הגדרה תהי A קבוצה. נאמר כי A <u>בת מניה</u> אם קיימת פ' $\varphi:\mathbb{N}\to A$ חח"ע ועל.

הערה אם קיימת התאמה חח"ע ועל בין שתי קבוצות A ו-B אז A בת מניה אם"ם B בת מניה וגם A סופית אם"ם B סופית

טענה תהי $A\subseteq\mathbb{N}$ קבוצה. אזי A סופית או בת מניה.

הוכחה: אם A סופית אז סיימנו. אחרת, מעקרון הסדר הטוב ב-$\mathbb{N}$ (משפט המינימום) קיים $n_1\in A$ איבר מינימלי. בצעד ה-$k+1$, קיים $A\ni n_{k+1}>n_k>\cdots>n_2>n_1$ כך ש-$n_{k+1}\in A\setminus\{n_1,\ldots,n_k\}$ מינמלי. נגדיר $\varphi:\mathbb{N}\to A$ ע"י $\varphi(k)=n_k$.

φ חח"ע (כי היא עולה ממש) ועל (לכל מספר טבעי יש רק מספר סופי של מספרים טבעיים הקטנים ממנו). ■

מסקנה אם קיימת פ' $\psi:\mathbb{N}\to A$ חח"ע אז A בת מניה.

טענה אם קיימת פ' $\phi:A\to\mathbb{N}$ על אז A בת מניה.

טענה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ בת מניה.

הוכחה: תהי $\psi:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י $\psi((n,m))=2^n3^m$. ψ חח"ע (מהמשפט היסודי של האריתמטיקה יש ל-2^n3^m פירוק יחיד לראשוניים ב-$\mathbb{N}$). ■

הערה תהי $D\neq\varnothing$ סופית אזי $\mathbb{N}\times D$ בת מניה (אפשר להשתמש במלון הילברט).

הגדרה תהי $A\subseteq\mathbb{R}$. נאמר כי A הינה <u>בעלת מידה אפס</u> אם $\forall\epsilon>0$, קיימת $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קטעים חסומים ופתוחים כך ש-$A\subseteq\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}I_n$ וגם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ell(I_n)<\epsilon$ כאשר $\ell(I_n)$ הוא האורך של I_n.

דוגמות

1. עבור A סופית, A בעלת מידה אפס. נגדיר $(a_1,\ldots,a_n)$ סדרה שעוברת על כל איברי A. יהי $\epsilon>0$. נבחר $0<\epsilon'<\epsilon$ כלשהו ונגדיר סדרת קטעים חסומים ופתוחים

$$I_1=\left(a_1-\frac{\epsilon'}{2n},a_1+\frac{\epsilon'}{2n}\right),\ldots,I_n=\left(a_i-\frac{\epsilon'}{2n},a_i+\frac{\epsilon'}{2n}\right),I_{n+1}=\varnothing,\ldots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)=\underbrace{\frac{\epsilon'}{n}+\cdots+\frac{\epsilon'}{n}}_{\text{פעמים } n}=\epsilon'<\epsilon.$$

2. עבור A בת מניה, A בעלת מידה אפס. תהי (a_n) סדרת איברים ב-A כך ש-$A=\{a_n\}$ (קיימת כי קיימת פ' חח"ע ועל מהטבעיים). יהי $\epsilon>0$. נבחר $0<\epsilon'<\epsilon$ כלשהו. נגדיר (I_n) סדרת קטעים פתוחים וחסומים ע"י

$$I_n=\left(a_n-\frac{\epsilon'}{2\cdot2^n},a_n+\frac{\epsilon'}{2\cdot2^n}\right)$$

משפט (לבג, Lebesgue) תהי $f\in\mathcal{B}([a,b])$ ו-D קבוצת נקודות האי-רציפות של f. אזי $f\in\mathcal{R}([a,b])$ אם"ם D בעלת מידה אפס.

הגדרה יהיו $f\in\mathcal{B}([a,b])$, $\alpha>0$ ו-$x\in[a,b]$. נאמר כי f <u>α-רציפה</u> ב-x אם קיים $\delta>0$ כך ש- $\forall y,z\in[x-\delta,x+\delta]\cap[a,b]$ מתקיים $|f(y)-f(z)|<\alpha$.

טענה אם f רציפה ב-x אם"ם f α-רציפה, $\forall\alpha>0$.

הוכחה: $\Leftarrow$: יהי $\alpha > 0$. מהיות f רציפה, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|x-y| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \delta$. יהיו $x - \delta < s, t < x + \delta$. אזי $|s-x|, |t-x| < \delta$ לכן

$$|f(s) - f(x)|, |f(t) - f(x)| < \alpha$$

ולכן

$$|f(s) - f(t)| = |f(s) - f(x) + f(x) - f(t)| \leq |f(s) - f(x)| + |f(x) - f(t)| < 2\alpha$$

$\Rightarrow$: יהי $\epsilon > 0$. אזי f ϵ-רציפה ב-x ולכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $|t-x| < \delta$, $|f(x) - f(t)| < \epsilon$. $\blacksquare$

הגדרה תהי $f : A \to \mathbb{R}$ חסומה. התנודה של f ב-$x \in A$ מוגדרת להיות

$$\omega_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \sup_{s,t \in [x-\delta, x+\delta]} \{|f(t) - f(s)|\} = \inf_{\delta > 0} \sup_{s,t \in [x-\delta, x+\delta]} \{|f(t) - f(s)|\}$$

טענה (לסטודנטית המשקיעה) f α-רציפה ב-$x \in [a,b]$ אם"ם $\omega_f(x) < \alpha$.

הרצאה 24

הגדרה נסמן ב-$\mathcal{D}_\alpha \subseteq [a,b]$ את קבוצת כל הנקודות $x \in [a,b]$ כך ש-f איננה α-רציפה ב-x.

הערה עבור $0 < \beta < \alpha$, מתקיים $\mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_\beta$.

הערה $\mathcal{D} \subseteq \bigcup_{0<\alpha} \mathcal{D}_\alpha \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{\frac{1}{n}}$ כאשר $\mathcal{D}$ היא קבוצת נקודות האי רציפות של f ב-$[a,b]$. נשים לב כי ההכלה הימנית ביותר נכונה שכן $\forall \alpha > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n} < \alpha$ (ארכימדיות) ולכן מההערה הקודמת $\mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{D}_{\frac{1}{n}}$.

הגדרה תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נאמר כי A הינה בעלת תכולה אפס אם $\forall \epsilon > 0$, קיימת $(I_n)_{n=1}^{N}$ סדרה סופית של קטעים חסומים ופתוחים כך ש-$A \subseteq \bigcup_{n \leq N} I_n$ וגם $\sum_{n=1}^{N} \ell(I_n) < \epsilon$ כאשר $\ell(I_n)$ הוא האורך של I_n.

משפט (לבג כיוון א') תהי $f \in \mathcal{R}([a,b])$ ויהי $\alpha > 0$. אזי $\mathcal{D}_\alpha$ בעלת תכולה אפס.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $0 < \epsilon' < \epsilon$. מהיות f אינטגרבילית ב-$[a,b]$, קיימות $\varphi \leq f \leq \psi$ המיוצגות באמצעות החלוקה $\mathcal{P} = (a = x_0, \ldots, x_n = b)$ ומתקיים $\psi\Big|_{(x_{i-1}, x_i)} = d_i \geq c_i = \varphi\Big|_{(x_{i-1}, x_i)}$ וגם

$$\int_a^b (\psi - \varphi) = \sum_{i=1}^{n} (d_i - c_i) \Delta x_i < \alpha \epsilon'$$

נגדיר $B=\{1\leq i\leq n:\mathcal{D}_\alpha\cap(x_{i-1},x_i)\neq\varnothing\}$.

$$\alpha\sum_{i\in B}\Delta x_i\overset{(*)}{\leq}\sum_{i\in B}(d_i-c_i)\,\Delta x_i\leq\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)\,\Delta x_i<\alpha\epsilon'$$

$(*)$ $i\in B\iff d_i-c_i\geq\alpha$ (כי $\varphi\leq f\leq\psi$ ואם f לא α-רציפה איפשהו בתוך (x_{i-1},x_i) זה אומר שקיימות שתי נקודות שעבורן הפרש ערכי ה-f שלהם גדול שווה מ-α. ההפרש $\psi-\varphi$ בכל (x_{i-1},x_i) גדול שווה להפרש המקסימלי בין כל שני ערכים של f באותו קטע פתוח, כלומר במקרה הזה גדול מ-α).

לכן $\sum_{i\in B}\Delta x_i<\epsilon'$. נשים לב כי $\mathcal{D}_\alpha\backslash\mathrm{P}\subseteq\bigcup_{i\in B}(x_{i-1},x_i)$. נגדיר $(I_1,\ldots,I_m)$ סדרה סופית של קטעים חסומים ופתוחים כך ש- $\mathrm{P}\subseteq I_1\cup\cdots\cup I_m$ וגם $\ell(I_1)+\cdots+\ell(I_m)<\epsilon-\epsilon'$. לכן

$$\mathcal{D}_\alpha\subseteq\bigcup_{i\in B}(x_{i-1},x_i)\cup(I_1\cup\cdots\cup I_m)$$

$$\sum_{i\in B}\ell(x_{i-1},x_i)+\sum_{i=1}^{m}\ell(I_i)<\epsilon'+(\epsilon-\epsilon')=\epsilon$$

■

שבוע $\mathbb{IX}$ | סכומי רימן וגבולות עליונים ותחתונים

הרצאה 25

הגדרה כיול על קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ היא פ' $\delta:I\to\mathbb{R}$ חיובית ממש.

הגדרה חלוקה מתויגת של $[a,b]$ היא זוג מהצורה $(\mathcal{P},\mathcal{T})$ כך ש-$\mathcal{P}:(x_0,\ldots,x_n)$ חלוקה של הקטע ו-$\mathcal{T}:(t_1,\ldots,t_n)$ n-יית "תיוגים" באותו הקטע כך שלכל $1\leq i\leq n$, מתקיים $x_{i-1}\leq t_i\leq x_i$.

הגדרה תהי $\delta:I\to\mathbb{R}$ כיול על $[a,b]$. נאמר כי החלוקה המתויגת $(\mathcal{P},\mathcal{T})$ היא δ-עדינה אם

$$t_i\in[x_{i-1},x_i]\subseteq[t_i-\delta(t_i),t_i+\delta(t_i)]$$

טענה תהיינה $\delta:[a,b]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\delta(x)=\delta>0$ ו-$(\mathcal{P},\mathcal{T})$ החלוקה המתויגת כך ש-$\mathcal{P}$ החלוקה הומוגנית עם n ו-$\mathcal{T}$ היא סדרת איברי האמצע של $\mathcal{P}$. אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$(\mathcal{P},\mathcal{T})$ היא δ-עדינה.

הוכחה: בחלוקה ההומגנית, מתקיים $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$, לכל $0\leq i\leq n$. $t_i=\frac{a+\frac{b-a}{n}(i-1)+a+\frac{b-a}{n}i}{2}=a+\left(\frac{b-a}{n}\right)\left(i-\frac{1}{2}\right)$. החלוקה

δ-עדינה כשמתקיים $\frac{b-a}{n} < 2\delta$ (כי אז אורך הקטע ההומוגני קטן מאורך ההארכה של t_i לשני הכיוונים ב-δ) כלומר הרצוי מתקבל עבור $n > \frac{b-a}{2\delta}$. ■

משפט תהי $\delta : I \to \mathbb{R}$ כיול על $[a,b]$ אזי קיימת חלוקה מתויגת של $[a,b]$ שהיא δ-עדינה.

הוכחה: נניח בשלילה. נחלק את הקטע $[a,b]$ לשני תתי קטעים באורך שווה ונסמן ב- J_1 את תת הקטע שבו לא קיימת חלוקה מתויגת δ-עדינה. בצעד ה-$k+1$ נגדיר $J_{k+1} \subseteq J_k \subseteq [a,b]$ את תת הקטע שאין לו חלוקה מתויגת δ-עדינה ונשים לב שעבורו מתקיים $\ell\left(J_k\right) = \frac{b-a}{2^{k-1}}$. מהלמה של קנטור קיים $t \in \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} J_k$ יחיד. נשים לב כי קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $J_k \subseteq [t-\delta\left(t\right), t+\delta\left(t\right)]$ כלומר שעבור $J_k = [a_k, b_k]$ החלוקה המתויגת $\left(\left(a_k, b_k\right), t\right)$ היא δ-עדינה בסתירה לכך ש-J_n לא δ-עדינה, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

משפט (לבג כיוון ב') תהיינה $f \in \mathcal{B}\left([a,b]\right)$ ו-$\mathcal{D}$ קבוצת אי הרציפות של f. אם $\mathcal{D}$ בעלת מידה אפס אז f אינטגרבילית.

הוכחה: f חסומה ב-$[a,b]$ ולכן מתקיים $m \le f \le M$ עבור $m, M \in \mathbb{R}$. יהי $\epsilon > 0$. תהי $\left(I_k\right)$ סדרת קטעים פתוחים וחסומים כך ש- $\mathcal{D} \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} I_k$ וגם $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ell\left(I_k\right) < \epsilon$. $\forall x \in [a,b] \setminus \mathcal{D}$, f רציפה ב-x ולכן קיים $\delta\left(x\right) > 0$ כך ש-ϵ-$|f\left(t\right) - f\left(x\right)| <$, $\forall t \in [a,b]$ כך ש- $|t-x| < \delta\left(x\right)$. $\forall x \in \mathcal{D}$, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $x \in I_k$ לכן קיים $\delta\left(x\right) > 0$ כך ש- $[x-\delta\left(x\right), x+\delta\left(x\right)] \subseteq I_k$. נשים לב כי $\delta\left(x\right)$ היא פ' כיול ולכן מהמשפט האחרון קיימת $\left(\mathcal{P}, \mathcal{T}\right)$ חלוקה מתויגת δ-עדינה של $[a,b]$. נגדיר $G = \{1 \le i \le n : t_i \notin \mathcal{D}\}$ וגם $B = \{1 \le i \le n : t_i \in \mathcal{D}\}$. נגדיר

$$\psi\Big|_{\left(x_{i-1}, x_i\right)} := \sup\{f\left(t\right) : x_{i-1} \le t \le x_i\} =: M_i, \quad \varphi\Big|_{\left(x_{i-1}, x_i\right)} := \inf\{f\left(t\right) : x_{i-1} \le t \le x_i\} =: m_i,$$

$$\varphi\left(x_i\right) := f\left(x_i\right) =: \psi\left(x_i\right)$$

לכן מתקיים $\varphi \le f \le \psi$.

$$\begin{aligned}\int\limits_a^b \left(\psi - \varphi\right) =& \sum_{k=1}^{n} \left(M_i - m_i\right) \Delta x_i = \sum_{i\in G} \left(M_i - m_i\right) \Delta x_i + \sum_{i\in B} \left(M_i - m_i\right) \Delta x_i \\ &\overset{(*)}{\le} \epsilon \sum_{i\in G} \Delta x_i + \left(M-m\right) \sum_{k=1}^{\infty} \ell\left(I_k\right) < \epsilon\left(b-a\right) + \left(M-m\right)\epsilon \\ &= \epsilon\left(\left(b-a\right) + \left(M-m\right)\right)\end{aligned}$$

$(*)$ $|f\left(t\right) - f\left(t_i\right)| < \epsilon$, $\forall t \in [t_i - \delta\left(x\right), t_i + \delta\left(x\right)]$ מהגדרת δ ולכן לבטח שפ' המדרגות שחסומות אותן הפרשן קטן או שווה ל-ϵ. בנוסף, לכל $i \in B$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $\Delta x_i \le \ell\left(I_k\right)$ (מהתכונות של האינדקסים ב-B) ולכן $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I_k \ge \Delta x_i$. ■

תרגול 9

תרגיל קבעו עבור אילו ערכים הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$ מתכנס.

פתרון ראשית נזכור כי אם הטור מתכנס אז האיבר הכללי מתכנס לאפס. נערוך טבלה עבור המקרים

$\beta<0$	$\beta=0$	$\beta>0$	$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$
∞^*	∞^*	∞^*	$\alpha<0$
$\mathbf{0}$	1	∞	$\alpha=0$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\alpha>0$

$(*)$ אם α שלילי זה אומר שלפולינום יש חזקה חיובית וראינו בעבר כי כל פולינום "מנצח" את $\ln$ בגבול לאינסוף.

נותר לבדוק רק עבור המקרים בהם זה שואף לאפס (המודגשים). נרצה להשתמש במבחן האינטגרל, בשביל זה נבדוק האם $f(x) = x^{-\alpha}\ln^{-\beta} x = \frac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta} x}$ אי שלילית ומונוטונית יורדת כמעט תמיד (החל ממקום מסוים). עבור $\alpha=0,\ \beta>0$, f מונוטונית יורדת. עבור $\alpha>0,\ \beta\geq 0$, f מונוטונית יורדת. עבור $\alpha>0,\ \beta<0$ נבדוק את הנגזרת.

$$f'(x) = -\alpha x^{-\alpha-1}\ln^{-\beta} x + x^{-\alpha}(-\beta)\ln^{-\beta-1} x\cdot\frac{1}{x} = x^{-\alpha-1}\left(-\alpha\ln^{-\beta} x - \beta\ln^{-\beta-1} x\right) = -x^{-\alpha-1}\ln^{-\beta} x\left(\alpha+\frac{\beta}{\ln x}\right)$$

כלומר עבור x מספיק גדול מתקיים $f'(x)<0$. עתה נשתמש במבחן האינטגרל ונבדוק מתי האינטגרל $\int\limits_2^{\infty} f(t)\ \mathrm{dt}$ מתכנס.

$$I(M) = \int\limits_2^M \frac{1}{x^{\alpha}\ln^{\beta} x}\,\mathrm{dx} \overset{(**)}{=} \int\limits_{\ln 2}^{\ln M}\frac{e^t\,\mathrm{dt}}{e^{\alpha t}t^{\beta}} = \int\limits_{\ln 2}^{\ln M}\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}t^{\beta}}\,\mathrm{dt}$$

$(**)$ $t=\ln x$, $x=e^t$, $\frac{1}{x}\mathrm{dx}=\mathrm{dt}$, $\mathrm{dx}=e^t\mathrm{dt}$.

עבור $\alpha=1$ האינטגרל מתכנס רק עבור $\beta>1$. עבור $\alpha<1$, האינטגרל לא מתכנס כי ראינו בעבר (כמסקנה מלופיטל) ש-e^x "גובר" על כל פולינום החל מנקודה מסויימת ולכן האינטגרנד שואף לאינסוף ולכן גם האינטגרל לא מתכנס (קונטרה-פוזיטיב ממבחן ההשוואה - האינטגרנד גדול מ-2 החל מנקודה מסויימת ו-$\int\limits_2^{\infty} 2\ \mathrm{dt}$ לא מתכנס). עבור $\alpha>1$, נשווה (באינסוף) ל-$\frac{1}{t^2}$.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}t^{\beta}}}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}t^{\beta-2}} \overset{(\star)}{=} 0$$

$(\star)$ ראינו ש-e^x גובר על כל פולינום.

כלומר $\frac{\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}t^{\beta}}}{\frac{1}{t^2}}<1$ החל מנקודה מסוימת כלומר $\frac{1}{e^{(\alpha-1)t}t^{\beta}}<\frac{1}{t^2}$ ולכן ממבחן ההשוואה, האינטגרל מתכנס.

לסיכום הטור מתכנס רק עבור $\alpha=1,\ \beta>0$ או $\alpha>1$ ומתבדר בכל מקרה אחר.

משפט (מבחן דיריכלה) תהיינה $f:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה וגם $g:[a,\infty)\to\mathbb{R}$ גזירה ברציפות. נגדיר $F(x):=\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{dt}$. אם

(i) $\int\limits_a^{\infty}|g'(t)|\ \mathrm{dt}$ מתכנס.

(ii) F חסומה.

(iii) $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

אז $\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\ \mathrm{dx}$ מתכנס.

הוכחה:

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,g(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty}\int\limits_a^M f(x)\,g(x)\ \mathrm{dx} = \lim_{M\to\infty}\underbrace{\left(F(x)\,g(x)\right)\Big|_a^M}_{\text{אפסה}\times\text{חסומה}} - \int\limits_a^M f(x)\,g'(x)\ \mathrm{dx} = -F(a)\,g(a) - \lim_{M\to\infty}\int\limits_a^M F(x)\,g'(x)\ \mathrm{dx}$$

$\int\limits_a^\infty F(x)\,g'(x)\ \mathrm{dx}$ מתכנס בהחלט כי $\int\limits_a^\infty |F(x)\,g'(x)|\ \mathrm{dx} \le K\int\limits_a^\infty |g'(x)|\ \mathrm{dx}$ כאשר K חסם של F ולכן ממבחן ההשוואה זה מתכנס והרצוי מתקבל. $\blacksquare$

תרגיל הוכיחו כי $\int\limits_1^\infty \sin x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)\ \mathrm{dx}$ מתכנס.

פתרון נסמן $f(x) = \sin x,\ g(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. נשים לב כי $F(x) = -\cos x$ חסומה וגם

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to 0^+}\sin y = 0$$

כל שנותר לעשות הוא להראות ש-$\int\limits_a^\infty |g'(x)|$ מתכנס. $g'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$.

$$\int\limits_a^\infty \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right|\cdot\left|\frac{1}{x^2}\right|\ \mathrm{dx} \le \int\limits_a^\infty \frac{1}{x^2}\ \mathrm{dx}$$

וממבחן ההשוואה זה מתכנס. מכאן שממבחן דיריכלה, האינטגרל הרצוי מתכנס.

הגדרה תהי $\mathcal{P} : (x_0,\dots,x_n)$ חלוקה של הקטע $[a,b]$. <u>פרמטר החלוקה</u> של $\mathcal{P}$ מוגדר להיות

$$\Delta(\mathcal{P}) = \max\left\{x_i - x_{i-1} : 1\le i\le n\right\}$$

הגדרה תהי $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה ותהי $(\mathcal{P},\mathcal{T})$ חלוקה מתויגת של $[a,b]$. <u>סכום רימן</u> של f ביחס לחלוקה מתויגת מוגדר להיות $\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\mathcal{T}) := \sum\limits_{k=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

משפט תהי $f\in\mathcal{R}([a,b])$. אזי $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ כך שלכל חלוקה מתויגת $(\mathcal{P},\mathcal{T})$ כך ש-$\Delta(\mathcal{P})<\delta$ מתקיים

$$\left|\mathcal{R}(f,\mathcal{P},\mathcal{T}) - \int\limits_a^b f(t)\ \mathrm{dt}\right| < \epsilon$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. קיימת פ' מדרגות ψ $f \le \psi$ כך ש- $0 < I(\psi) - \int_a^b f < \frac{\epsilon}{2}$. נסמן ב- P_1 את החלוקה המתאימה ל-ψ. נסמן N להיות מספר הקטעים בחלוקה P_1 ו- $M = \max_{[a,b]} \psi - \inf_{[a,b]} f$. נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{N \cdot M}$. תהי חלוקה מתויגת (P,T) כך ש- $\Delta(P) < \delta$. נגדיר פ' מדרגות $\eta(x) = f(t_i)$, $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$. נשים לב כי מתקיים $\mathcal{R}(f,P,T) = I(\eta)$. נגדיר את החלוקה המעודנת $P_2 = P \cup P_1 = \{x'_0 < \cdots < x'_n\}$. נגדיר פ' מדרגות $\tilde{\psi}$ המיוצגת באמצעות החלוקה P_2 ע"י $\tilde{\psi}(I) = \begin{cases} f(t_i) & \exists i : t_i \in I \\ \psi(I) & \text{otherwise} \end{cases}$, לכל קטע חלוקה I ב-P_2. נשים לב כי $\eta \le \tilde{\psi} \le \psi$ ב-$[a,b]$. בנוסף, $I\left(\tilde{\psi}\right) - \int_a^b f \le I(\psi) - \int_a^b f < \frac{\epsilon}{2}$ ובנוסף

$$I\left(\tilde{\psi}\right) - I(\eta) = \sum_{I \in B} \left(\psi(I) - f(t_i)\right) \Delta x_i < NM\delta = \frac{\epsilon}{2}$$

כאשר $B = \{I : t_i \notin I,\ \forall i\}$. את ההוכחה יסיים התלמיד המשקיע, שכן נותר להראות דבר דומה עבור פ' מדרגות מלמטה ואז "לאחד" את שתי הפ' מדרגות לטענה קוהרנטית אחת. ∎

מסקנה אם f אינטגרבילית, ו-$(\mathcal{P}_n, \mathcal{T}_n)$ סדרה של חלוקות מתויגות עם פרמטר שואף לאפס, אז $\mathcal{R}(f, \mathcal{P}_n, \mathcal{T}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}$.

תרגיל השתמשו בסכומי רימן כדי למצוא את הגבול של הסדרה $u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i}$.

פתרון נחלק את $[0,1]$ ל-n קטעים שווים באורכם, כלומר, $P = \left\{0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{n}{n}\right\}$. נשים לב כי $\Delta(P) = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{1}{1+\frac{i}{n}}}_{"f(t_i)"} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{"\Delta x_i"}$$

נבחר $f(x) = \frac{1}{1+x}$ ותיוגים $t_i = \frac{i}{n} \in \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. מהמסקנה האחרונה,

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx} = \left(\ln(1+x)\right)\Big|_0^1 = \ln 2$$

הרצאה 26

הגדרה תהי (x_n) סדרה חסומה ב-$\mathbb{R}$. $p \in \mathbb{R}$ יקרא גבול חלקי (partial limit או subsequential limit) של (x_n) אם קיימת $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$ סדרה חלקית מתכנסת כך ש- $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$.

משפט $p \in \mathbb{R}$ הוא גבול חלקי של (x_n) אם"ם $\forall \epsilon > 0$, $p - \epsilon < x_n < p + \epsilon$ באופן שכיח (כלומר, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ כך ש- $n > N$ המקיים $p - \epsilon < x_n < p + \epsilon$).

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי p גבול חלקי של (x_n) אזי קיים $(x_{n_k}) \lhd (x_n)$ כך ש- $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} p$, כלומר $\forall \epsilon > 0$, $\exists K \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall k \in \mathbb{N}$ כך ש-

$k>K$ מתקיים $p-\epsilon<x_n<p+\epsilon$ $(\star)$. יהי $\epsilon>0$ ו- $N\in\mathbb{N}$. יהי K כך ש-$(\star)$ מתקיים. נזכור כי (n_k) היא סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים ובפרט מתקיים $k\geq n_k$. יהי $k>\max\{N,K\}$ אזי $n_k\geq k>N$ ולכן $p-\epsilon<x_{n_k}<p+\epsilon$.

$\Rightarrow$: נניח כי $\forall\epsilon>0$ מתקיים $p-\epsilon<x_n<p+\epsilon$ באופן שכיח. יהי n_1 כך ש- $p-1<x_{n_1}<p+1$ ובצעד ה-$k+1$, $p-\frac{1}{k+1}<x_n<p+\frac{1}{k+1}$ באופן שכיח ולכן נוכל לבחור $n_{k+1}>n_k$ כך ש- $p-\frac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}<p+\frac{1}{k+1}$. (n_k) סדרה עולה ממש ומתקיים ומתקיים $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\underset{\underset{p}{\downarrow}}{p-\frac{1}{k}}<x_{n_k}<\underset{\underset{p}{\downarrow}}{p+\frac{1}{k}}$$

לכן מסנדביץ' $x_{n_k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}p$. ■

הגדרה תהי (x_n) סדרה חסומה. תהי $S\subseteq\mathbb{R}$ קבוצת הגבולות החלקיים של (x_n). מ-BW, $S\neq\varnothing$ ובפרט אם $\{x_n\}\subseteq[a,b]$ אז $S\subseteq[a,b]$ קבוצה חסומה. נגדיר את <u>הגבול העליון</u> ו<u>התחתון</u> של x_n להיות

$$\underline{\lim}x_n=\liminf x_n=l=\inf S\leq\sup S=u=\limsup x_n=\overline{\lim}x_n$$

משפט $\{l,u\}\subseteq S\subseteq[l,u]$.

הוכחה: נוכיח כי $l\in S$. יהי $\epsilon>0$. נראה כי $l-\epsilon<x_n<l+\epsilon$ באופן שכיח. מתכונת ה-ϵ של החסם התחתון, קיים $p\in S$ כך ש- $l\leq p<l+\epsilon$. לכן $l-\epsilon<l\leq p<l+\epsilon$ כלומר $l-\epsilon<x_n<l+\epsilon$ באופן שכיח ולכן $l\in S$. ההוכחה עבור המקרה של u אנלוגית לזו והסטודנטית המשקיעה תוכיח אותה. ■

משפט תהי (x_n) סדרה חסומה. אזי $l=\underline{\lim}x_n$ אם"ם $\forall\epsilon>0$, $x_n<l+\epsilon$ באופן שכיח וגם $l-\epsilon<x_n$ כמעט תמיד.

הוכחה: $\Leftarrow$: $x_n<l+\epsilon$ שכיחה כי $l\in S$. נניח בשלילה כי $x_n\leq l-\epsilon$ באופן שכיח. קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך ש- $x_{n_1}\leq l-\epsilon$. בצעד ה-$k+1$, $x_n\leq l-\epsilon$ שכיחה ולכן קיים $n_{k+1}>n_k>\cdots>n_1$ כך ש- $x_{n_{k+1}}\leq l-\epsilon$. נשים לב כי $(x_n)\triangleleft(x_{n_k})$. (x_n) חסומה ולכן (x_{n_k}) גם היא חסומה ולכן מ-BW קיימת $(x_{n_k})\triangleleft\left(x_{n_{k_j}}\right)$ מתכנסת ל- $p\in\mathbb{R}$. נשים לב כי $(x_n)\triangleleft\left(x_{n_{k_j}}\right)$ ולכן $p\in S$. $x_{n_k}\leq l-\epsilon$, $\forall k\in\mathbb{N}$ ולכן $x_{n_{k_j}}\leq l-\epsilon$, $\forall j\in\mathbb{N}$ ולכן $p\leq l-\epsilon$ בסתירה לכך ש- $l=\inf S$.

$\Rightarrow$: מהנתון $l\in S$ (כי $\forall\epsilon>0$, $l-\epsilon<x_n<l+\epsilon$ באופן שכיח (כמעט תמיד גורר באופן שכיח)). נניח בשלילה כי $\exists p\in S$ כך ש- $p<l$. נבחר $\epsilon=l-p>0$. אזי $x_n<p+\epsilon=l$ באופן שכיח מההגדרה בסתירה להנחה. ■

הרצאה 27

הערה נגדיר $T_n = \{x_k : k \geq n\}$. אם $\{x_n\} \subseteq [a,b]$ אז $T_n \subseteq [a,b]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. נסמן $l_n = \inf T_n \leq \sup T_n = u_n$. נשים לב כי $l_n \leq l_{n+1} \leq u_{n+1} \leq u_n$.

משפט תהי (x_n) סדרה חסומה. אזי $\underline{\lim} x_n = \sup l_n \leq \inf u_n = \overline{\lim} x_n$, כלומר, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{n\leq k} \{x_k\} \leq \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{n\leq k} \{x_k\}$.

הוכחה: נוכיח רק כי $\underline{\lim} x_n = \sup l_n = l$ ונשאיר לסטודנטית המשקיעה להוכיח את הצד השני באופן אנלוגי. נרצה להוכיח כי $\forall \epsilon > 0$, $l - \epsilon \overset{\text{כ.ת.}}{<} x_n \overset{\text{שכיח}}{<} l + \epsilon$. נשים לב כי מתכונת ה-$\epsilon$ של החסם העליון, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש- $l - \epsilon < l_N \leq l$. לכן $\forall n \geq N$, $l - \epsilon < l_N \leq x_n$ (כי $l_N = \inf\{x_k : k \geq n\} \leq x_n$ כמעט תמיד). נניח בשלילה כי $x_n < l + \epsilon$ לא שכיחה, כלומר $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש- $l + \epsilon \leq x_n$, $\forall n \geq N$. לכן $l + \epsilon \overset{(*)}{\leq} l_N \overset{(**)}{\leq} l$ סתירה.

$(*)$ $l + \epsilon$ הוא חסם מלרע של $\{x_k : k \geq N\}$ ולכן $l_N \geq l + \epsilon$ ממקסימליות החסם התחתון.

$(**)$ $l = \sup l_n$ ולכן הוא חסם מלעל ולכן $l \geq l_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

הערה ראינו שלוש דרכים שקולות לאפיון הגבול התחתון והעליון. עבור העליון:

(i) $u = \sup S$ כאשר S היא קבוצת הגבולות החלקיים.

(ii) $\forall \epsilon > 0$, $u - \epsilon \overset{\text{שכיח}}{<} x_n \overset{\text{כ.ת.}}{<} u + \epsilon$.

(iii) $u = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ כאשר $u_n = \sup T_n$.

ובאותו האופן עבור התחתון.

משפט (קריטריון השורש) יהיו a_n $\sum$ טור ו- $\alpha = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$. אם $\alpha < 1$ אז הטור $\sum a_n$ מתכנס בהחלט. אם $\alpha > 1$ אז הטור מתבדר.

משפט (קריטריון המנה) יהי $\sum a_n$ טור חיובי ממש. אם $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור מתכנס. אם $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז הטור מתבדר.

דוגמה $\sum a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} \overset{(*)}{=} \overline{\lim} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n}} = \overline{\lim} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

ולכן הטור מתכנס ממבחן השורש. $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim} \frac{\frac{1}{2^{k+1}}}{\frac{1}{3^k}} = \overline{\lim} \frac{1}{2} \cdot \frac{3^k}{2^k} = \infty$ ולכן קריטריון המנה לא מבטיח לנו התכנסות.

$(*)$ תכלס דורש די הרבה נימוק אבל הרעיון הוא ש- $\{x_n\} \ni \frac{1}{2^n} \geq a_n$ ולכן השוויון מתקיים מתכונות של sup.

משפט אם (c_n) סדרה חיובית ממש אזי $\underline{\lim} \frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{c_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} \leq \overline{\lim} \frac{c_{n+1}}{c_n}$.

מסקנה קריטריון השורש הוא יותר חזק אבל קריטריון המנה יותר קל לשימוש - הסטודנטית המשקיעה תבחר היטב את הכלים הקלינים בטיפול בפציינט!

שבוע $\mathbb{X}$ | טורי פונקציות והתכנסות נקודתית ובמ"ש

הרצאה 28

הוכחה: (של קריטריון השורש, שהופיע בהרצאה הקודמת) נניח כי $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$ $\alpha =$. נבחר $0 < q < 1$ כך ש- $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ כמעט תמיד (קיים מהתנאי השקול שהראנו בהרצאה הקודמת), כלומר, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \geq N$, $\sqrt[n]{|a_n|} < q$. כלומר $|a_n| < q^n$ כמעט תמיד. $\sum\limits_{n \geq N} q^n$ מתכנס ולכן מקריטריון ההשוואה גם $\sum\limits_{n \geq N} |a_n|$ מתכנס.

עתה נניח כי $\alpha = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$. מאפיון $\overline{\lim}$, $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ שכיח כלומר $|a_n| > 1$ שכיח ולכן $a_n \not\to 0$ ומכאן שהטור מתבדר. ∎

הוכחה: (של קריטריון המנה, שהופיע בהרצאה הקודמת) נניח כי $\alpha = \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. נבחר $0 < q < 1$ כך ש- $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ כמעט תמיד, כלומר, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $a_{n+1} < qa_n$, $\forall n \geq N$. לכן $a_{N+k} < qa_{N+k-1} < \cdots < q^k a_N$, נחליף משתנה ל- $n = N + k$ לכן

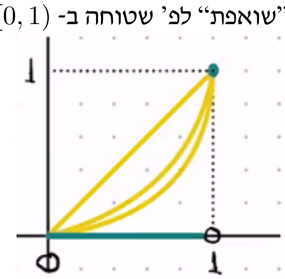
$$a_n < q^{n-N} q_N = q^n \left(\frac{a_N}{q^N}\right)$$

ולכן $\sum q^n$ מתכנס בהיותו טור גאומטרי (הנדסי) ולכן מאש"ט $\sum q^n \left(\frac{a_N}{q^N}\right)$ מתכנס ולכן מקריטריון ההשוואה גם $\sum a_n$ מתכנס. נשאיר לסטודנטית המשקיעה להוכיח את המקרה בו $\alpha > 1$. ∎

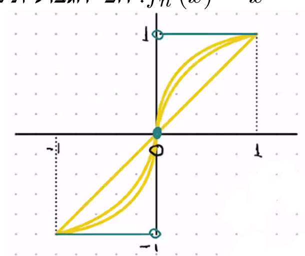
הגדרה תהי $X \subseteq \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות (ממשיות) על X היא סדרה $\mathbb{N} \to \mathbb{R}^X$ (כלומר שהאיבר ה-n-י הוא מהצורה $f_n : X \to \mathbb{R}$).

דוגמות

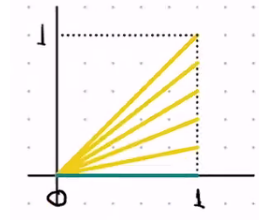
1. $X = [0,1]$, $f_n = x^n$. נשים לב כי עבור $x_0 \in [0,1)$ כלשהו, ככל שנשאיף את n לאינסוף, $f_n(x_0)$ קטן ומתקרב לאפס. סדרת הפ' "שואפת" לפ' שטוחה ב- $[0,1)$ וגם $f_n(1) = 1$ - כלומר מדובר בסדרת פ' רציפות ששואפות לפ' לא רציפה.



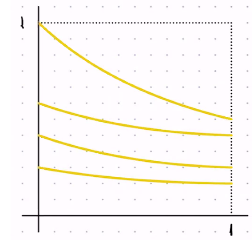
2. $f_n(x) = x^{\frac{1}{2n-1}}$. הפ' הגבולית פה היא פ' הסימן (sgn) והיא לא רציפה, אפילו שכל הפ' בסדרה רציפות בעצמן.



3. $f_n(x)=\frac{x}{n}$.



4. $X=[0,1]$, $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$.



הגדרה תהיינה (f_n) סדרה של פונקציות ו-f מוגדרת על X עם ערכים ממשיים. נאמר ש-f היא הגבול הנקודתי של הסדרה (f_n) ב-X אם $\forall x\in X$, מתקיים $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$.

הערה הררעיון הוא ש-$\forall x\in X$ יוצרים סדרת מספרים $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ ואז $f(x)$ הוא הגבול של סדרת המספרים הזו.

הערה ההגדרה שקולה ל-$\forall\epsilon>0$, $\forall x\in X$, $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall n\geq N$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

דוגמה $X=[0,1]$, $f_n(x)=x^n$, $f(x)=\begin{cases}0 & 0\leq x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. אזי $f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, כי אם $0\leq x<1$ אז $x^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ ואם $x=1$ אז $1^n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$.

הגדרה תהיינה (f_n) סדרת פונקציות ו-f פונקציה המוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$. נאמר כי (f_n) מתכנסת במידה שווה ל-f אם $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall x\in X$, $\forall n\geq N$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

הערה הרעיון הוא שכל הגרפים ניכנסים תחת הפרש מסוים מ-f "ביחד" (כמעט תמיד) ולא בכל נקודה בנפרד.

הגדרה תהי (f_n) סדרה של פונקציות המוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$. נאמר כי (f_n) היא סדרת קושי אם $\forall\epsilon>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall x\in X$, $\forall n,m\geq N$ מתקיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon$.

תרגול 10

דוגמה האם הסדרה $f_n(x)=\frac{x}{n}$ מתכנסת נקודתית ב-$\mathbb{R}$? כן, $\forall x\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}=0$ ולכן הסדרה f_n מתכנסת נקודתית לפי $f=0$.

דוגמה האם הסדרה $f_n(x)=\sin(nx)$ מתכנסת נקודתית ב-$\mathbb{R}$? לא, עבור $x=\frac{\pi}{2}$ מתקיים $f_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & n=2k\\ 1 & n=4k+1\\ -1 & n=4k+3\end{cases}$ והסדרה הזו מתבדרת. נשים לב כי לעומת זאת, הסדרה הנ"ל על הקבוצה $\{\pi k:k\in\mathbb{Z}\}$ כן מתכנסת נקודתית שכן $\sin(\pi kn)=0$, $\forall n\in\mathbb{N}$ והפ' הגבולית היא $f(x)=0$, $\forall x\in\{\pi k:k\in\mathbb{Z}\}$.

תרגיל מצאו את הגבול הנקודתי של הסדרה $f_n(x)=\begin{cases} n^2x & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ \frac{1}{x} & x\in\left[\frac{1}{n},2\right] \end{cases}$.

פתרון עבור $x=0$, $f_n(0)=0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0)=0$. עבור $x\in(0,2]$, $f_n(x)=\frac{1}{x}$ כמעט תמיד (מארכימדיות קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$\frac{1}{n}<x$). לכן $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{1}{x}$ כלומר הפ' הגבולית היא $f(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \frac{1}{x} & x\in(0,2] \end{cases}$.

הערות

1. גבול נקודתי של סדרת פ' חסומות לא בהכרח חסום (כמו בדוגמה הנ"ל).
2. גבול נקודתי של סדרת פ' רציפות לא בהכרח רציף (ראינו בהרצאה הקודמת).
3. גבול נקודתי של סדרת פ' אינטגרבילית לא בהכרח אינטגרבילית ובמקרה שכן, האינטגרל של הגבול לא בהכרח זהה לגבול של האינטגרלים.
4. גבול נקודתי של סדרת פ' גזירות לא בהכרח גזירה ובמקרה שכן, הנגזרת לא בהכרח שווה.
5. אם (f_n) פ' מתכנסת במידה שווה אז (f_n) מתכנס נקודתית.
6. הגבול הנקודתי יחיד (מיחידות הגבול).

תרגיל מצאו את הגבול הנקודתי או הבמ"ש של הסדרה $f_n(x)=\chi_{[n,n+1]}(x)=\begin{cases} 1 & x\in[n,n+1] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$.

פתרון נחפש קודם גבול נקודתי, ואז נבדוק האם הוא במ"ש או לא. נשים לב כי $f_n(x)=0$ כמעט תמיד (בפרט עבור $N=\lceil x\rceil$, $f_n(x)=0$, $\forall n\geq N$) כלומר $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ולכן הפ' הגבולית היא $f(x)=0$.

בתרגיל 10 נוכיח כי $f_n\longrightarrow f$ במ"ש אם"ם $b_n:=\sup\limits_x |f_n(x)-f(x)|$ שואפת לאפס. במקרה שלנו,

$$b_n:=\sup_x |f_n(x)-f(x)|=\sup_x \chi_{[n,n+1]}(x)=1$$

וזה לא שואף לאפס ולכן f_n לא מתכנסת במ"ש.

תרגיל האם $f_n(x)=\frac{1}{n}\arctan(nx)$ מתכנסת נקודתית ב-$\mathbb{R}$? אם כן, האם גם במ"ש? האם הגבול הנקודתי של סדרת הנגזרות של f_n שווה לנגזרת של הגבול הנקודתי של f_n?

פתרון $\arctan$ חסומה (התמונה שלה היא $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$) ולכן f_n שואפת לגבול הנקודתי $f(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ (חסומה כפול אפסה). נוכיח כי ההתכנסות היא במ"ש. יהי $\epsilon>0$. נבחר $N=\left\lceil\frac{\pi}{2\epsilon}\right\rceil$ ויהי $n\geq N$ וכן $x\in\mathbb{R}$.

$$|f_n(x)-f(x)|=\frac{1}{n}|\arctan(nx)|\leq\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{2}<\frac{2\epsilon}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}=\epsilon$$

סדרת הנגזרות של (f_n) היא $f_n'(x)=\frac{1}{1+n^2x^2}$ והגבול הנקודתי של סדרת הנגזרות הללו הוא $\begin{cases} 1 & x=0 \\ 0 & x\neq0 \end{cases}$ והוא לא שווה ל-$f'(x)=0$.

הערה גם כשהסדרה מתכנסת במ"ש, הנגזרת של של הגבול הנקודתי לא בהכרח שווה לגבול הנקודתי של סדרת הפ'.

תרגיל מצאו את הגבול של הסדרה $f_n(x)=\begin{cases} nx & x\in\left[0,\frac{1}{n}\right] \\ n\left(\frac{2}{n}-x\right) & x\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right] \\ 0 & x\in\left[\frac{2}{n},2\right] \end{cases}$ ב-$[0,2]$.

פתרון נשים לב כי $f_n(x)=0$ כמעט תמיד (ובפרט עבור $n\geq\left\lceil\frac{2}{x}\right\rceil$) לכן $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

הערה נשים לב כי בדוגמה הקודמת, $\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{x\to\frac{1}{n}}0=0$ אבל

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to\frac{1}{n}}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

כלומר שינוי סדר הגבולות יכול להשפיע על התוצאה. נרצה לבדוק מתי התופעה הזו לא יכולה להתקיים.

טענה יהיו I קטע ו- $x_0\in I$ וכן (f_n) סדרת פ' מתכנסות במ"ש ל-f כך ש- f רציפה ב-x_0. תהי סדרת מספרים $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש- $\{x_n\}\subseteq I$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x_n)=f(x_0)$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$. מההתכנסות במ"ש, קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N_1$, $|f_n(x_n)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}$, $\forall x\in I$ (ובפרט זה מתקיים עבור $\{x_n\}$). מהיות f רציפה בנקודה x_0, קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N_2$ מתקיים $|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}$. נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$ ויהי $N\geq n$ אזי

$$|f_n(x_n)-f(x_0)|\overset{\Delta}{\leq}|f_n(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_0)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

■

טענה תהי a_n סדרת מספרים. נגדיר את הזנב של a_n להיות $T_n=\{a_k:k\geq n\}$ אזי $\overline{\lim}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup T_n$ וגם $\underline{\lim}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf T_n$.

הוכחה: נסמן $l_n=\inf T_n$ וגם $u_n=\sup T_n$. ראינו בהרצאה כי $\overline{\lim}a_n=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$ וגם $\underline{\lim}a_n=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}l_n$. כל שנותר להראות הוא כי $\inf\limits_n u_n=\lim\limits_{n\to\infty}u_n$ וכן $\sup\limits_n l_n=\lim\limits_{n\to\infty}l_n$. נוכיח עבור l_n. נשים לב כי היא מונוטונית עולה ($T_{n+1}\subseteq T_n$ ולכן $l_n=\inf T_n\leq\inf T_{n+1}=l_{n+1}$) אז היא מתכנסת לסופרימום שלה (בין אם זה מספר ממשי כי הסדרה חסומה מלעל או אינסוף כי הסדרה לא חסומה מלעל). ■

הרצאה 29

משפט תהי (f_n) סדרת פ' מוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$. אזי קיימת f מוגדרת על X כך שהסדרה (f_n) מתכנסת ל-f ב-X במידה שווה אם"ם (f_n) סדרת קושי.

הוכחה: $\Leftarrow$: יהי $\epsilon>0$. נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N$ ו- $\forall x\in X$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{2}$. יהי $x\in X$ ו- $\mathbb{N}\ni n,m\geq N$ אזי

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f(x)f_m(x)|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon$$

$\Leftarrow$: נשים לב כי אם (f_n) היא סדרת קושי של פ', אז $\forall x\in X$, $(f_n(x))$ היא סדרת קושי של מספרים ממשיים. לכן, מקריטריון קושי עבור סדרות ממשיות, נוכל להגדיר $f:X\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)$. לכן f_n מתכנס ל-f נקודתית מההגדרה. נוודא שהסדרה מתכנסת ל-f גם במידה שווה.

יהי $\epsilon>0$ נבחר $0<\epsilon'<\epsilon$ ו-$N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall x\in X$ ו-$\forall n,m\geq\mathbb{N}$ מתקיים $|f_n(x)-f_m(x)|<\epsilon'$. נקבע את $N\leq n\in\mathbb{N}$ ונשאיף את m לאינסוף:

$$\underset{\underset{f(x)-\epsilon'}{\downarrow}}{f_m(x)-\epsilon'}<f_n(x)<\underset{\underset{f(x)+\epsilon'}{\downarrow}}{f_m(x)+\epsilon'}$$

ולכן $f(x)-\epsilon'\leq f_n(x)\leq f(x)+\epsilon'$ כלומר $|f_n(x)-f(x)|\leq e'<\epsilon$, $\forall n\geq N$ ו-$\forall x\in X$. ■

משפט תהיינה (f_n) סדרת פ' ו-f פ' מוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$ כך ש-$f\longrightarrow f_n$ נקודתית. אז הסדרה (f_n) איננה שואפת במידה שווה ל-f ב-X אם"ם קיימות $(f_n)\triangleleft(f_{n_k})$ ו-(x_k) סדרה ב-X כך ש-$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geq\epsilon$, $\forall k\in\mathbb{N}$.

הוכחה: f_n לא מתכנסת במידה שווה ל-f אם"ם $\exists\epsilon>0$ כך ש-$\forall N\in\mathbb{N}$, $\exists x\in X$ כך ש-$\exists n>N$ כך ש-$|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon$ כלומר שישנה סדרה x_k וסדרה חלקית של (f_n) כך שהשלילה של התנאי מתקיימת (כי השלילה של כמעט תמיד זה שתנאי לא מתקיים באופן שכיח). ■

דוגמה ניזכר בדוגמה של $f_n(x)=x^n$ ב-$[0,1]$. נגדיר $x_k=\sqrt[k]{\frac{1}{2}}$ וגם $f_{n_k}=f_k$ ונשים לב כי

$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|=\left|\frac{1}{2}-0\right|=\frac{1}{2}\geq 0$$

ולכן f_n לא מתנכסת במ"ש ל-$f(x)=\left\{\begin{smallmatrix}1 & x=1\\ 0 & 0\leq x<1\end{smallmatrix}\right.$.

משפט תהיינה (f_n) סדרת פ' ו-f פ' מוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$. אם $f_n\in\mathcal{C}(X)$ וגם $f\longrightarrow f_n$ במ"ש אז $f\in\mathcal{C}(X)$.

הוכחה: יהי $a\in X$. נראה כי f רציפה ב-a. יהי $\epsilon>0$. מהיות f_n מתכנסת במידה שווה, נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall n\geq N$, $|f_n(x)-f(x)|<\frac{\epsilon}{3}$, $\forall x\in X$. f_N רציפה ב-a ולכן נבחר $\delta>0$ כך ש-$\forall x\in X$ כך ש-$|x-a|<\delta$ מתקיים $|f_N(x)-f_N(a)|<\frac{\epsilon}{3}$. יהי $x\in X$ כך ש-$|x-a|<\delta$. אזי

$$|f(x)-f(a)|\leq\underbrace{|f(x)-f_N(x)|}_{\text{במ"ש } f_n\to f}+\underbrace{|f_N(x)+f_N(a)|}_{x_0\text{ רציפה ב-} f}+\underbrace{|f_N(a)-f(a)|}_{\text{במ"ש } f_n\to f}<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}<\epsilon$$

■

הגדרה תהי (f_n) סדרה של פונקציות המוגדרות על $X\subseteq\mathbb{R}$. נגדיר את טור הפונקציות שמתאים לסדרה (f_n) כסדרה (S_n) של פונקציות על X המוגדרת ע"י $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f_i$. נסמן סדרה זו ב-$\sum f_n$. נאמר שהטור מתכנס נקודתית ב-X אם $\forall x\in X$, הטור $\sum f_n(x)$

מתכנס. במקרה זה, נסמן את הגבול של הטור ב- $\sum f_n$. נאמר שהטור מתכנס במידה שווה אם סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת במידה שווה לסכום ב- X.

משפט (קריטריון קושי להתכנסות במ"ש של טורי פ') יהי $\sum f_n$ טור של פ' מוגדרות על X. הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש אם"ם $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall x \in X$ ו- $\forall m \geq n \geq N$ מתקיים $\left|\sum\limits_{i=n}^{m} f_i\left(x\right)\right| < \epsilon$.

הרצאה 30

משפט (קריטריון M של וירשטראס) תהיינה $\left(f_n\right)$ סדרת פ' על $X \subseteq \mathbb{R}$ ו- $\left(M_n\right)$ סדרה חיובית של ממשיים כך ש- $\left|f_n\left(x\right)\right| \leq M_n$, $\forall x \in X$ ו- $n \in \mathbb{N}$ וגם מתקיים כי $\sum M_n$ מתכנס. אזי הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב-X.

הוכחה: נוכיח כי $\sum f_n$ מתכנס במ"ש באמצעות קריטריון קושי להתכנסות טורי פ'. יהי $\epsilon > 0$. מקריטריון קושי להתכנסות טורי מספרים נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \geq m \geq N$ מתקיים $\left|\sum\limits_{k=n}^{m} M_k\right| < \epsilon$. לכן, $\forall m \geq n \geq N$ ו- $x \in X$ מתקיים

$$\left|\sum_{k=n}^{m} f_k\left(x\right)\right| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=n}^{m}\left|f_k\left(x\right)\right| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \epsilon$$

■

דוגמה $f_n\left(x\right) = \frac{\sin nx}{n^2}$. $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ ואנו יודעים כי $\sum \frac{1}{n^2}$ מתכנס ולכן $\sum f_n$ מתכנס במ"ש.

משפט (קריטריון Dini) תהי $\left(f_n\right)$ סדרה מונוטונית של פ' רציפות מוגדרות בקטע $\left[a,b\right]$ שמתכנסת נקודתית לפ' f רציפה על $\left[a,b\right]$. אזי f_n מתכנסת במ"ש ל-f ב-$\left[a,b\right]$.

הוכחה: בה"כ נניח כי $\left(f_n\right)$ סדרה עולה, אחרת, נביט ב- $\left(-f_n\right)$. תהי $\left(g_n\right)$ המוגדרת ע"י $g_n := f - f_n$. g_n היא סדרה אי שלילית, יורדת, אפסה (נקודתית) וכל g_n רציפה. תהי $\left(x_n\right)$ סדרה ב- $\left[a,b\right]$ כך ש- $M_n = g_n\left(x_n\right)$ כאשר $M_n = \max\limits_{\left[a,b\right]} g_n$ (שקיים כי g_n רציפה בקטע הסגור והחסום $\left[a,b\right]$). מספיק להראות כי $M_n \longrightarrow 0$ (כי אז $\forall\epsilon > 0$ נוכל לבחור $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \geq N$ מתקיים $M_n < \epsilon$ ולכן $\forall x \in \left[a,b\right]$ יתקיים $g_n\left(x\right) \leq g_N\left(x\right) \leq M_N < \epsilon$) לכן מהיות M_n יורדת, מספיק להוכיח כי $\forall\epsilon > 0$, קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $M_{n_0} < \epsilon$.

מ-BW קיימת תת סדרה $\left(x_{n_k}\right) \lhd \left(x_n\right)$ כך ש- $x_{n_k} \longrightarrow x_0 \in \left[a,b\right]$. נביט ב- $\left(g_j\left(x_0\right)\right)$ (סדרת ממשיים) ונזכור כי $g_n \longrightarrow 0$ ולכן $g_n\left(x_0\right) \longrightarrow 0$.

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $g_n\left(x_0\right) < \epsilon$, $\forall n \geq N$. g_N רציפה ב-x_0 ולכן קיים $\delta > 0$ כך ש- $\forall x \in \left[a,b\right]$ כך ש-$\left|x - x_0\right| < \delta$ מתקיים $g_N\left(x\right) \overset{(*)}{<} \epsilon$. נבחר $k_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\left|x_{n_{k_0}} - x_0\right| < \delta$ וגם $n_{k_0} > N$ לכן

$$M_{n_{k_0}} = g_{n_{k_0}}\left(x_{n_{k_0}}\right) \leq g_N\left(x_{n_{k_0}}\right) < \epsilon$$

לכן $\forall n \geq n_{k_0}$, $g_n\left(x\right) \leq M_n \leq M_{n_{k_0}} < \epsilon$, $\forall x \in \left[a,b\right]$.

$(*)$ נחלק למקרים עבור $g_N(x)$. אם $g_N(x) < g_N(x_0)$ אז $g_N(x) < g_N(x_0) < \epsilon$ והרצוי התקבל. אחרת, $g_N(x) \geq g_N(x_0)$ ולכן

$$|g_N(x) - g_N(x_0)| = |g_N(x)| - |g_N(x_0)| = g_N(x) - g_N(x_0)$$

ואז אם נציב בהגדרת הרציפות את ה-"ϵ" הרשמי להיות $\epsilon - g_N(x_0)$ נקבל

$$g_N(x) - g_N(x_0) = |g_N(x) - g_N(x_0)| < \epsilon - g_N(x_0)$$

ולכן אם נוסיף לשני האגפים $g_N(x_0)$ נקבל את הרצוי. ■

שבוע $\mathbb{XI}$ | הורשת תכונות בהתכנסות במ"ש וטורי חזקות

הרצאה 31

דוגמה $d_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} \cos^{2m}(n!x\pi)$. נשים לב כי $-1 \leq \cos n!x\pi \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ולכן

$$0 \leq \cos^{2m}(n!x\pi) = \left(\cos^2(n!x\pi)\right)^m \leq 1$$

$\cos^{2m}(n!x\pi) = 1$ אם"ם $n!x \in \mathbb{Z}$ כלומר $x \in \frac{\mathbb{Z}}{n!}$. $\forall n \in \mathbb{N}$ יש מספר סופי של $x \in [0,1]$ כך ש- $d_n(x) = 1$ (עבור $n = 1$ יש את $0, 1$, עבור $n = 2$ יש את $0, \frac{1}{2}, 1$, עבור $n = 3$ יש את $0, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}, 1$). לכן d_n היא פ' שמתאפסת ב- $[0,1]$ פרט למספר סופי של נקודות (כי כשמשאיפים חזקה של קבוע קטן מאחד לאפס מקבלים 0). מכאן ש- $\forall n \in \mathbb{N}$, d_n אינטגרבילית ב- $[a,b]$ וגם $\int\limits_0^1 d_n = 0$. נרצה לראות מה הפ' הגבולית של d_n. עבור $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, נקבל כי $d_n(x) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$ ולכן גם הפ' הגבולית תתאפס עבור נקודות אי-רציונאליות. נשים לב כי $\forall q \in \mathbb{Q}$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \geq N$ מתקיים $n!q \in \mathbb{Z}$ (המספר הטבעי שבמכנה של המספר מקיים תכונה זו, לדוגמה). לכן עבור $x \in \mathbb{Q}$, $n!x \in \mathbb{Z}$ כמעט תמיד ולכן $d_n(x) = 1$ כמעט תמיד כלומר הפ' הגבולית שווה ל-1 עבור אינדקסים רציונאליים. אם כן, קיבלנו כי $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = D$, שהיא לא אינטגרבילית (אפילו שהפ' בסדרה כן אינטגרביליות).

טענה (הוכחה בהרצאה הבאה) תהי $f \in \mathcal{B}([a,b])$ אזי $f \in \mathcal{R}([a,b])$ אם"ם $\forall \epsilon > 0$, קיימות $g, h \in \mathcal{R}([a,b])$ כך ש- $g \leq f \leq h$ וגם $\int\limits_a^b (h - g) < \epsilon$.

משפט תהי (f_n) סדרת פ' אינטגרביליות ב- $[a,b]$ שמתכנסות במ"ש לפ' f. אזי f אינטגרבילית ומתקיים $\int\limits_a^b f = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n$.

הוכחה: ראשית נוכיח כי $f \in \mathcal{B}([a,b])$. נבחר $\epsilon = 1$ ומהיות $f_n \longrightarrow f$ במ"ש אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $|f_N(x) - f(x)| < 1$, $\forall x \in [a,b]$. בנוסף, $f_N \in \mathcal{B}([a,b])$ ולכן קיים $0 < B \in \mathbb{R}$ כך ש- $|f_N(x)| < B$, $\forall x \in [a,b]$. לכן

$$-B - 1 < f_N(x) - 1 < f(x) < f_N(x) + 1 < B + 1$$

עתה נוכיח כי $f\in\mathcal{R}\left([a,b]\right)$. מספיק להוכיח כי $\forall\epsilon>0$, קיימות $g,h\in\mathcal{R}\left([a,b]\right)$ כך ש- $g\leq f\leq h$ וגם $\int\limits_a^b (h-g)<\epsilon$.

יהי $\epsilon>0$. נבחר $\epsilon'<\frac{\epsilon}{2(b-a)}$ ויהי $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N$ ו- $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\epsilon'$. נגדיר

$$g(x):=f_N(x)-\epsilon'<f(x)<f_N(x)+\epsilon'=:h(x)$$

$g,h\in\mathcal{R}\left([a,b]\right)$ מאריתמטיקה של אינטגרביליות ומתקיים $g\leq f\leq h$ וגם

$$\int\limits_a^b (h-g)=\int\limits_a^b 2\epsilon'=2\int\limits_a^b \epsilon'=2(b-a)\epsilon'<\epsilon$$

עתה נותר להוכיח כי $\int\limits_a^b f=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f_n$. יהי $\epsilon>0$. נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N$, $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\frac{\epsilon}{b-a}$, $\forall x\in[a,b]$. יהי $n\geq N$,

$$\left|\int\limits_a^b f_n-\int\limits_a^b f\right|=\left|\int\limits_a^b (f_n-f)\right|\overset{\int\triangle}{\leq}\int\limits_a^b \left|f_n-f\right|\leq\epsilon$$

■

מסקנה תהי (f_n) סדרת פ' אינטגרביליות ב- $[a,b]$ שמתכנסות במ"ש לפ' f. נגדיר $g_n(x):=\int\limits_a^x f_n$ וגם $g(x)=\int\limits_a^x f$, $\forall x\in[a,b]$. אזי (g_n) מתכנסת במ"ש ל-g ב-$[a,b]$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$. נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $\forall n\geq N$ מתקיים $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\epsilon$, $\forall x\in[a,b]$. יהי $n\geq N$ ו- $x\in[a,b]$ אזי

$$\left|g_n(x)-g(x)\right|=\left|\int\limits_a^x f_n-\int\limits_a^x f\right|\overset{\int\triangle}{\leq}\int\limits_a^x \left|f_n-f\right|\leq\int\limits_a^x \epsilon=\epsilon(x-a)\leq\epsilon(b-a)$$

■

תרגול 11

תרגיל נגדיר $f_n(x)=\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

א. מצאו את הגבול הנקודתי של f_n ב-$\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו כי $\int\limits_{-1}^1 f(x)\ \mathrm{dx}=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_{-1}^1 f_n(x)\ \mathrm{dx}$.

ג. יהי $a<0$, האם $f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f$ במ"ש ב-$[a,\infty)$?

ד. יהי $a>0$, האם $f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f$ במ"ש ב-$[a,\infty)$?

פתרון א. ראשית, $0 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = f_n(0)$. עבור $x \neq 0$, $1 \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\frac{1}{n^2x^2}+1} = \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} = f_n(x)$. לכן הגבול הנקודתי הוא $f(x) = \begin{cases} 1 & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$.

ב. $\int_{-1}^{1} f(x)\ \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{dx} = 2$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{n^2x^2}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} 1 - \frac{1}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = 2 - \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+n^2x^2}\,\mathrm{dx} = 2 - \left(\frac{1}{n}\arctan nx\right)\Big|_{-1}^{1} \xrightarrow[n\to\infty]{(*)} 2$$

$(*)$ arctan חסומה ולכן מדובר בחסומה כפול מתאפסת.

ג. לא. f_n רציפות ב- $[a,\infty)$ אבל $f(x)$ לא רציפה ב- $[a,\infty)$ (כי היא לא רציפה באפס) ולכן מקונטרה פוזיטיב ההתכנסות היא לא במ"ש.

ד. כן.

$$b_n = \sup_{x\in[a,\infty)} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,\infty)} \left|\frac{n^2x^2}{1+n^2x^2} - 1\right| = \sup_{x\in[a,\infty)} \frac{1}{1+n^2x^2} = \frac{1}{1+n^2a^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ולכן מהקריטריון שהוכחנו $f_n \longrightarrow f$ במ"ש ב-$[a,\infty)$.

תרגיל נביט בטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$. קבעו האם הוא מתכנס במ"ש עבור:

א. $[1,2]$.

ב. $[-1,1]$.

ג. $(0,2)$.

ד. (δ,∞) כאשר $\delta > 0$.

פתרון נתבונן בסדרת הסכומים החלקיים $S_N(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$. $\frac{x^2}{(1+x^2)^k} \geq 0$ ולכן S_n עולה ובנוסף היא רציפה ב-$\mathbb{R}$ (ברור).

א. נחפש גבול נקודתי

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^2 \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(1+x^2)^k} \overset{(*)}{=} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = \frac{\frac{x^2}{1+x^2}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1$$

$\forall x \in [a,b]$. לכן הפ' הגבולית רציפה ומקריטריון דיני ההתכנסות היא במ"ש.

$(*)$

$$(1-q)\sum_{k=1}^{N} q^k = \sum_{k=1}^{N} q^k - \sum_{k=2}^{N+1} q^k = q - q^{N+1}$$

ולכן $\frac{q}{1-q} \xrightarrow[N\to\infty]{0<q<1} \frac{q-q^{N+1}}{1-q} = \sum_{k=1}^{N} q^k$ ובמקרה שלנו נציב $q = \frac{1}{1+x^2}$.

ב. $\lim_{N\to\infty} S_N(0) = 0$ אבל $1 \xrightarrow[N\to\infty]{} S_N(x)$, $\forall x \neq 0$ לכן הגבול לא רציף ב-$[-1,1]$ אבל $S_N(x)$ רציפה ב-$[-1,1]$, $\forall N$ ולכן הגבול לא במ"ש (קונטרה פוזיטיב לכך שסדרות של פ' מורישות רציפות בהתכנסות במ"ש).

ג.

$$S_N(x) = x^2 \cdot \frac{\frac{1}{1+x^2} - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{N+1}}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = 1 - x^2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{N+1}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N$$

$$b_n = \sup_{x\in(0,2)} |S_N(x) - 1| = \sup_{x\in(0,2)} \left|1 - \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N - 1\right| = \sup_{x\in(0,2)} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N = 1 \cancel{\xrightarrow[N\to\infty]{}} 0$$

לכן הטור לא מתכנס במ"ש ב-$(0,2)$.

ד. $b_N = \sup_{x\in(\delta,\infty)} \left(\frac{1}{1+x^2}\right)^N = \left(\frac{1}{1+\delta^2}\right)^N \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$ ולכן הטור מתכנס במ"ש ב- (δ,∞).

תרגיל יהי $\alpha > 2$. הוכיחו שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ מתכנס במ"ש וכן שהפ' הגבולית גזירה ברציפות.

פתרון $\left|\frac{\cos nx}{n^\alpha}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$ ולכן ממבחן ה-M של ויירשטראס מהיות $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אזי טור הפ' מתכנס בהחלט ובמ"ש.

$$(S_N(x))' = \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos nx}{n^\alpha}\right)' = \sum_{n=1}^{N} -\frac{\sin nx}{n^{\alpha-1}}$$

ונשים לב כי $\left|-\frac{\sin nx}{n^{\alpha-1}}\right| < \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ והטור $\sum \frac{1}{n^{\alpha-1}}$ מתכנס ולכן מקריטריון M של ויירשטראס $S_N'(x)$ מתכנסת במ"ש, בנוסף, S_N מתכנסת נקודתית לפחות בנקודה אחת (כי היא במ"ש בכל $\mathbb{R}$) לכן ממשפט שנראה בהרצאה הבאה $f(x) = \sum \frac{\cos nx}{n^\alpha}$ גזירה והנגזרת שלה היא $\sum -\frac{\sin nx}{n^{\alpha-1}}$ וכמובן ש-S_N' רציפות ולכן מירושת רציפות בהתכנסות במ"ש של סדרות פ' גם f' רציפה.

תרגיל תהי $\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x}$ פ' זטא של רימן.

א. הוכיחו כי הטור $\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס במ"ש בקרן $[\alpha,\infty)$, $\forall \alpha > 1$.

ב. הוכיחו כי הטור הנ"ל מתכנס נקודתית ב- $(1,\infty)$ אך לא במ"ש.

פתרון א. נשים לב כי $\left|\frac{1}{n^x}\right| \le \frac{1}{n^\alpha}$, $\forall x \in [\alpha,\infty)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. הטור $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס ולכן ממבחן ה-M של ויירשטראס, הטור $\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס בהחלט במ"ש ב-$[a,\infty)$.

ב. יהי $x \in (1,\infty)$ אזי הטור $\sum \frac{1}{n^x}$ מתכנס (כמו לפני) ולכן הגבול הנקודתי קיים ב-$(1,\infty)$. נראה שהפ' הגבולית לא חסומה בסביבת 1 למרות ש- $S_n(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x}$ כן חסומים בסביבת 1 ומכאן נסיק שהגבול לא במ"ש ב- $(1,\infty)$ (כי חסימות זו תכונה שעוברת בירושה בהתכנסות במ"ש של סדרות פ' כפי שראינו בתחילת ההוכחה של הורשת אינטגרביליות). נראה כי $\zeta(x) \ge \int_1^\infty \frac{1}{y^x}\,\mathrm{dy}$ (וכי האינטגרל הלא אמיתי לא חסום ב-1) ונסיים. $\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} \ge \int_1^N \frac{1}{y^x}\,\mathrm{dy}$ ולכן ממונוטוניות הגבול

$$\zeta(x) = \sum \frac{1}{n^x} \ge \int_1^\infty \frac{1}{y^x}\,\mathrm{dy} = \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{1}{y^x} = \lim_{M\to\infty} \left(\frac{y^{1-x}}{1-x}\right)\Bigg|_1^M = \lim_{M\to\infty} \frac{1-M^{1-x}}{1-x} = \frac{1}{1-x}$$

כלומר $\zeta(x) \ge \frac{1}{1-x}$ ולכן היא לא חסומה בסביבות 1.

הרצאה 32

דוגמה $f_n\left(x\right):=\frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$. $\left|f_n\left(x\right)\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ ולכן $f_n\longrightarrow f=0$. עם זאת, $f_n'\left(x\right)=\sqrt{n}\cos nx$ זו סדרה שלא מתכנסת בכל תחומה (ולכן גם הפ' הגבולית שלא קיימת לא גזירה).

משפט תהי $\left(f_n\right)$ סדרה של פ' גזירות ברציפות בקטע I כך ש-$\left(f_n'\right)$ מתכנסת במ"ש בכל תת קטע סגור וחסום של I לפ' g. אם קיימת $a\in I$ כך ש- $\left(f_n\left(a\right)\right)$ מתכנסת אזי $\left(f_n\right)$ מתכנסת לפ' גזירה f ב-I ומתקיים $f'=g$.

הוכחה: מהיות $\left(f_n'\right)$ סדרת פ' רציפות (ולכן אינטגרביליות) המתכנסת במ"ש ל-g בכל תת-קטע חסום אזי g רציפה (ואינטגרבילית בכל תת קטע חסום) גם היא. עבור $a\in I$ מתקיים $f_n\left(x\right)-f_n\left(a\right)\overset{\text{FTC}}{=}\int\limits_a^x f_n'\longrightarrow\int\limits_a^x g$. לכן, מראיתמטיקה של סדרות מתכנסות, $f_n\left(x\right)=f_n\left(a\right)+\int\limits_a^x f_n'$ מתכנסת נקודתית. נגדיר $f\left(x\right):=\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$, $\forall x\in I$.

$$f\left(x\right)-f\left(a\right)=\lim_{n\to\infty}\left(f_n\left(x\right)-f_n\left(a\right)\right)=\int\limits_a^x g$$

ולכן $f\left(x\right)=\int\limits_a^x g+f\left(a\right)$ ומהיות g רציפה אזי הפ' הצוברת שלה גזירה מ-FTC ולכן מאריתמטיקה של גזירות f גזירה בכל I ומתקיים $f'\left(x\right)=\left(\int\limits_a^x g+f\left(a\right)\right)'=g\left(x\right)$, $\forall x\in I$. ∎

משפט תהי $\left(f_n\right)$ סדרה של פ' רציפות בקטע I. אם הטור $\sum f_n$ במ"ש ל-f אזי f רציפה ב-I.

משפט תהי $\left(f_n\right)$ סדרה של פ' אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. אם הטור $\sum f_n$ מתכנס במ"ש ב-$[a,b]$ ל-f אזי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים $\int\limits_a^b f=\sum\int\limits_a^b f_n$.

משפט תהי $\left(f_n\right)$ סדרה של פ' גזירות ברציפות בקטע I. אם קיים $a\in I$ כך שהטור $\sum f_n\left(a\right)$ מתכנס והטור $\sum f_n'$ מתכנס במ"ש בכל תת קטע סגור וחסום של I אז הטור $\sum f_n$ מתכנס ב-I ל-f גזירה ב-I ומתקיים $f'=\sum f_n'$.

הגדרה יהיו $\left(c_n\right)_{n=0}^{\infty}$ סדרה של ממשיים ו- $a\in\mathbb{R}$. הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\left(x-a\right)^n$ מכונה <u>טור חזקות</u>.

דוגמות

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$, $a=0$, $c_n=\frac{1}{n!}$. עבור $x=0$ הוא בוודאי מתכנס. עבור $x\neq0$ נפעיל את קריטריון המנה

$$\frac{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|c_nx^n\right|}=\frac{\left|n!x^{n+1}\right|}{\left|(n+1)!x^n\right|}=\left|x\right|\frac{1}{n+1}\longrightarrow0$$

לכן הטור מתכנס (בהחלט) $\forall x\in\mathbb{R}$.

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, $a=0$, $c_n=1$. הטור מתכנס עבור $x=0$. עבור $x\neq 0$ נפעיל את קריטריון המנה

$$\frac{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|c_n x^n\right|}=\frac{\left|x^{n+1}\right|}{\left|x^n\right|}=|x|\longrightarrow |x|$$

לכן עבור $|x|<1$ הטור מתכנס (בהחלט) ועבור $|x|>1$ הטור מתבדר. בנוסף, עבור $x=\pm 1$ הטור מתבדר.

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!x^n$, $a=0$, $c_n=n!$. הטור מתכנס עבור $x=0$. עבור $x\neq 0$ נפעיל את קריטירון המנה ונקבל

$$\frac{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|c_n x^n\right|}=\frac{\left|(n+1)!x^{n+1}\right|}{\left|n!x^n\right|}(n+1)\,|x|\longrightarrow \infty$$

ולכן הטור מתבדר עבור $x\neq 0$.

משפט (הלמה של Abel) יהיו (c_n) סדרת ממשיים ו- $\mathbb{R}\ni\xi\neq 0$ כך שהטור $\sum c_n\xi^n$ מתכנס. אזי לכל $0<r<|\xi|$ הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס בהחלט ובמ"ש בקטע $[-r,r]$.

הוכחה: מהיות $\sum c_n\xi^n$ מתכנס אזי האיבר הכללי $(c_n\xi^n)$ שואף לאפס ולכן חסום. יהי $K>0$ כך ש- $|c_n\xi^n|\leq K$, $\forall n\in\mathbb{N}$. נניח כי $|x|\leq r<\xi$ אזי $|c_n x^n|=|c_n\xi^n|\cdot\left|\frac{x}{\xi}\right|^n\leq K\left|\frac{r}{\xi}\right|^n$. הטור הגאומטרי $\sum\left|\frac{r}{\xi}\right|^n$ מתכנס ולכן מקריטריון M של ווירשראטס הרצוי מתקבל. ■

משפט יהי טור חזקות $\sum c_n x^n$ אזי אחת ורק אחת מבין האפשרויות הבאות מתקיימות:

(i) הטור מתכנס $\forall x\in\mathbb{R}$.

(ii) קיים $\mathbb{R}\ni\rho>0$ כך ש- $\forall x\in\mathbb{R}$, אם $|x|<\rho$ הטור מתכנס ואם $|x|>\rho$ הטור מתבדר.

(iii) הטור מתכנס עבור $x=0$.

הוכחה: תהי $S=\{|\xi|:\sum c_n\xi^n\ \text{converges}\}$. נשים לב כי $0\in S$ ולכן $S\neq\varnothing$.

1. אם S לא חסומה כלומר שהיא לא חסומה מלעל אזי $\forall x\in\mathbb{R}$ נוכל לבחור $\xi\in\mathbb{R}$ כך ש- $|\xi|\in S$ וגם $|x|<|\xi|$ ולכן הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס לפי הלמה של Abel.

2. אם S חסומה אזי היא גם חסומה מלמעלה לכן נסמן $\rho:=\sup S$. אם $|x|>\rho$ והטור $\sum c_n x^n$ מתכנס אזי $|x|\in S$ ולכן $\rho<|x|\leq\rho$ בסתירה לטריכוטומיה. נניח כי $\rho>0$. $\forall x\in\mathbb{R}$ כך ש- $\rho>|x|$ קיים $\xi\in\mathbb{R}$ כך ש- $|\xi|\in S$, $\rho\leq|\xi|<|x|$ ולכן הטור מתכנס לפי הלמה של Abel.

3. אם $\rho=0$ אז הטור $\sum c_n x^n$ מתכנס רק עבור $x=0$. ■

מסקנה תחום ההתכנסות של טור חזקות מהצורה $\sum c_n x^n$ הוא סימטרי ביחס לראשית.

הערה נקרא לתחום ההתכנסות של טור חזקות כזה קטע התכנסות. נגיד שרדיוס ההתכנסות הוא $\rho=\infty$ או ρ בהתאם לקטגוריה בה הטור נופל לפי המשפט הקודם.

דוגמה $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{n}}{n}$. $c_{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

$$\frac{\left|c_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|c_{n}x^{n}\right|}=\frac{\left|\left(-1\right)^{n+2}\right|}{n}\cdot\frac{\left(n+1\right)}{\left|\left(-1\right)^{n+1}\right|}\left|x\right|\longrightarrow\left|x\right|$$

לכן $\rho=1>0$. הטור מתכנס גם עבור $x=1$ (טור לייבניץ) אבל לא מתכנס עבור $x=-1$ (הטור ההרמוני).

עבור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{(-x)^{n}}{n}$ רדיוס ההתכנסות הוא 1 והטור מתכנס ב-$x=-1$ אבל לא ב-$x=1$ (המצב בדיוק הפוך מהקודם).

עבור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{x^{2n}}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{\left(x^{2}\right)^{n}}{n}$ רדיוס ההתכנסות הוא 1 והטור מתכנס גם ב-±1.

מסקנה עבור $\left|x\right|=\rho$ אי אפשר לקבוע באופן גורף את ההתכנסות של הטור שם.

הרצאה 33

משפט (נוסחת קושי-אדמר) $\frac{1}{\rho}=\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}$ כאשר $\frac{1}{0}=\infty,\frac{1}{\infty}=0$.

הוכחה: נשים לב כי $\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}x^{n}\right|}=\left|x\right|\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}$ ולכן מקריטריון השורש, הטור $\sum c_{n}x^{n}$ מתכנס בהחלט עבור $\left|x\right|\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}<1$ (כלומר $\left|x\right|<\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}}=\rho$) ומתבדר עבור $\left|x\right|\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}>1$ (כלומר $\left|x\right|>\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\left|c_{n}\right|}}=\rho$). ■

הערה אם אפשר (רק אם $c_{n}\neq0$ כמעט תמיד), ניתן להשתמש בקריטריון המנה כדי לחשב את ρ. (ואז $\overline{\lim}\left|\frac{c_{n+1}x^{n+1}}{c_{n}x^{n}}\right|=\left|x\right|\overline{\lim}\left|\frac{c_{n+1}}{c_{n}}\right|$ אפשר להעביר אגפים ולקבל ביטוי דומה).

משפט (Abel) נניח כי הטור $\sum c_{n}$ מתכנס. תהי $f\left(x\right):=\sum c_{n}x^{n}$ עבור $-1<x<1$ ו-$f\left(1\right):=s=\sum c_{n}$ אזי

$$\lim_{x\to1^{-}}f\left(x\right)=f\left(1\right)$$

הערה הטור $\sum c_{n}x^{n}$ מתכנס במ"ש מלמת Abel (כי $\xi=1$) ולכן כל תת-קטע סגור המוכל ב-$\left(-1,1\right)$ הטור יתכנס.

הוכחה: נסמן $s_{n}:=c_{0}+\cdots+c_{n}$. הסדרה s_{n} מתכנסת ולכן חסומה. יהי $\left|s_{n}\right|\leq K\in\mathbb{R}$, $\forall n\in\mathbb{N}_{0}$. $\forall x\in\left(-1,1\right)$ מתקיים $\left|s_{n}x^{n}\right|\leq K\left|x^{n}\right|$ ולכן הטור $\sum s_{n}x^{n}$ מתכנס בקטע $\left(-1,1\right)$ (מהתכנסות טור גאומטרי עבור בסיס בין -1 ל-1 וקריטריון ההשוואה).

נשים לב כי $c_n = s_n - s_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. לכן

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0} c_n x^n &= c_0 + \left(\sum_{n=1} s_n x^n - \sum_{n=1} s_{n-1} x^n\right) \\
&= c_0 + \left(\sum_{n=1} s_n x^n - x \sum_{n=1} s_{n-1} x^{n-1}\right) \\
&= \left(c_0 + \sum_{n=1} s_n x^n\right) - x \sum_{n=1} s_{n-1} x^{n-1} \\
&= \sum_{n=0} s_n x^n - x \sum_{m=0} s_m x^m \\
&= (1-x) \sum_{n=0} s_n x^n
\end{aligned}$$

באותו התחום מתקיים $(1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1$ (כי $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$ מהתיכון) ולכן $s = (1-x)\sum s x^n$ ולכן

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum (s_n - s) x^n$$

עבור $-1 < x < 1$.

יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \geq N$, $|s_n - s| < \frac{\epsilon}{2}$. לכן בתחום הזה מתקיים

$$\left|\sum_{m=N+1} (s_n - s) x^n\right| \leq \sum_{m=N+1} |(s_n - s) x^n| \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=N+1} |x^n|$$

ועבור $0 \leq x < 1$ נקבל

$$\left|\sum_{m=N+1} (s_n - s) x^n\right| \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{m=N+1} x^n \leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{n=0} x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{\epsilon}{2}$$

$$f(x) - f(1) = (1-x) \sum_{n=0} (s_n - s) x^n = (1-x) \left(\sum_{n=0}^{N} (s_n - s) x^n + \sum_{n=N+1} (s_n - s) x^n\right)$$

נשים לב כי $\sum\limits_{n=0}^{N} (s_n - s) x^n$ פולינום ולכן חסום בערך מוחלט על ידי $L > 0$ כלשהו בקטע $[0,1]$. נבחר $0 < \delta < 1$ כך שמתקיים $(1-\delta) L < \frac{\epsilon}{2}$. לכן עבור $0 < \delta < x < 1$ מתקיים $(1-x) L < (1-\delta) L < \frac{\epsilon}{2}$.

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(1)| &\leq (1-x) \left|\sum_{n=0}^{N} (s_n - s) x^n\right| + (1-x) \left|\sum_{n=N+1} (s_n - s) x^n\right| \\
&\leq (1-x) \left|\sum_{n=0}^{N} (s_n - s) x^n\right| + \frac{\epsilon}{2} \leq (1-x) L + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon
\end{aligned}$$

■

מסקנה יהי $R>0$ ונניח כי הטור $\sum c_n R^n$ מתכנס. תהי $f:(-R,R]\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\sum c_n x^n$ עבור $x\in(-R,R)$ ו-$f(R)=\sum c_n R^n$ אזי $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)=f(R)$.

הוכחה: נגדיר $g(x):=f(xR)$, $\forall x\in(-1,1]$. נשים לב כי מתקיים $g(1)=f(R)=\sum c_n R^n$, וגם

$$g(x)=f(xR)=\sum c_n R^n x^n$$

לכן g עומדת בתנאי משפט Abel. לכן

$$\lim_{x\to R^-} f(x)\overset{t=\frac{x}{R}}{=}\lim_{t\to1^-} f(tR)=\lim_{t\to1^-} g(t)=g(1)=f(R)$$

■

משפט תהי $f(x):=\sum c_n x^n$ בקטע ההתכנסות. אזי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ בעל אותו רדיוס התכנסות כמו הקודם וסכומו $f'(x)$ בתוך קטע ההתכנסות.

הוכחה: רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum c_n n x^{n-1}$ נתון ע"י $\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}=\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{n|c_n|}}$ (כי $\lim\sqrt[n]{n}=1$). לפי משפט על התכנסות במ"ש של טור וגזירות בכל תת קטע סגור וחסום של קטע ההתכנסות נקבל כי $\sum c_n n x^{n-1}$ מגדיר פ' שערכה באותו תת-קטע סגור וחסום שווה ל-$(\sum c_n x^n)'$. ■

תרגיל (לסטודנטית המשקיעה) אם (a_n) סדרה מתכנסת וגבולה a, אזי $\overline{\lim} a_n x_n=a\overline{\lim} x_n$.

מסקנה תהי $f(x):=\sum c_n x^n$ בקטע ההתכנסות של טור החזקות. אזי ל-f נגזרות מכל סדר באותו קטע התכנסות ומתקיים $c_0=f(0)/0!$, $c_1=f'(0)/1!$, $c_2=f''(0)/2!$ וכו'.

מסקנה עבור $a\neq0$, נקבל גם כי $f^{(k)}(x)=\sum\limits_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}c_n(x-a)^{n-k}$

מסקנה (יחידות הטור) אם $\sum c_n x^n=f(x)=\sum d_n x^n$ אזי $d_n=c_n$ (כי c_n נקבע ביחידות ע"י הנגזרות של f ב-0).

משפט תהי $f(x):=\sum c_n x^n$ בעל רדיוס התנכסות ρ. הטור $\sum\frac{c_n}{n+1}x^{n+1}$ בעל אותו רדיוס התכנסות וגם בכל תת-קטע סגור וחסום של קטע ההתכנסות יתקיים $\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{dt}=\sum\int\limits_a^x c_n t^n\ \mathrm{dt}$.

מסקנה עבור $a\neq0$, נקבל גם כי $\int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{dt}=\sum\frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$.

דוגמות

1. $\sum x^n=\frac{1}{1-x}$ (ראינו בתיכון כי לזה מתכנס הטור).

2. $\frac{1}{1+x}=\sum\left(-1\right)^{n}x^{n}$.

$$\ln\left(1+x\right)=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{1+t}\,\mathrm{dt}=\sum\left(-1\right)^{n}\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\dots$$

$\forall x\in\left(-1,1\right)$. בנוסף עבור $x=1$ הטור גם מתכנס (טור לייבניץ) ו-$\ln\left(1+x\right)$ רציפה ולכן

$$\ln 2=\ln\left(1+1\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots$$

3.

$$\arctan x=\int\limits_{0}^{x}\frac{1}{1+t^{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\int\limits_{0}^{x}t^{2n}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

ולכן $\frac{\pi}{4}=\arctan 1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\dots$.

שבוע $\mathbb{XII}$ | טורי חזקות כמייצגים פ' אלמנטריות וסכומים לא מסודרים

הרצאה 34

דוגמות

1. $E\left(x\right)=\sum\frac{x^{n}}{n}$.

נשים לב כי הטור מתכנס ב-$\mathbb{R}$.

$$E'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=E\left(x\right)$$

תנאי ההתחלה הוא $E\left(0\right)=1$. נוכיח כי $E\left(x\right)=e^{x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

$$\left(\frac{E\left(x\right)}{e^{x}}\right)'=\frac{E^{'}\left(x\right)e^{x}-E\left(x\right)e^{x}}{\left(e^{x}\right)^{2}}=\frac{1}{e^{x}}\left(E'\left(x\right)-E\left(x\right)\right)=0$$

לכן קיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש- $\frac{E(x)}{e^{x}}=C$. עבור $x=0$ נקבל $C=\frac{1}{1}$ לכן $E\left(x\right)=e^{x}$. מכאן נסיק כי $e^{x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$.

2. $C(x)=\sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S(x)=\sum \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

שני הטורים מתכנסים בכל $\mathbb{R}$. נשים לב כי $C'=S$ וגם $S'=C$. $E(x)=C(x)+S(x)$. נגדיר

$$\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\frac{E(x)+E(-x)}{2}=C(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\dots$$

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{E(x)-E(-x)}{2}=S(x)=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\dots$$

בנוסף, מתקיים $\sinh''=\sinh$ וגם $\cosh''=\cosh$.

3. $C(x)=\sum(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $S(x)=\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

שני הטורים מתכנסים ב-$\mathbb{R}$. נשים לב כי $C'=-S$ וגם $S'=C$. נשים לב כי עבור שתי הפ' מתקיים $f''+f=0$. בנוסף, $C(0)=1$ וגם $S(0)=0$.

$$\left(C^2(x)+S^2(x)\right)'=2C(x)\cdot C'(x)+2S(x)\cdot S'(x)=0$$

לכן $C^2(x)+S^2(x)=C$ ועבור $x=0$ נקבל כי $C^2(x)+S^2(x)=1$.

$$\left((\cos x-C(x))^2+(\sin x-S(x))^2\right)'=2(\cos x-C(x))\cdot(-\sin x-(-S(x)))+2(\sin x-S(x))\cdot(\cos x-C(x))=0$$

לכן $(\cos x-C(x))^2+(\sin x-S(x))^2=C\in\mathbb{R}$. עבור $x=0$ נקבל $(\cos 0-C(0))^2+(\sin 0-S(0))^2=0$. ב-$\mathbb{R}$, סכום של ריבועים מתאפס רק כאשר שני הריבועים מתאפסים. לכן $\cos x=C(x)$ וגם $\sin x=S(x)$.

4. $B_\alpha(1+x):=\sum\binom{\alpha}{n}x^n$ כאשר $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}$ (הביטוי הזה מתלכד עם ההגדרה של המספרים הקומבינטוריים $\binom{m}{n}$ עבור $\alpha=m\in\mathbb{N}$). עבור $m\in\mathbb{N}$ נקבל

$$B_m(1+x)=\sum_{n=0}^{m}\binom{m}{n}x^n=(1+x)^m$$

כאשר $\binom{m}{n}=0$, עבור $n>m$.

עבור $n\in\mathbb{N}$, $\alpha\notin\mathbb{N}$. $c_n=\binom{\alpha}{n}$.

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\left|\frac{\binom{\alpha}{n+1}x^{n+1}}{\binom{\alpha}{n}x^n}\right|=|x|\cdot\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-(n+1)+1)}{\alpha(\alpha-1)\cdot\dots\cdot(\alpha-n+1)}\cdot\frac{n!}{(n+1)!}\right|=|x|\cdot\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\xrightarrow[n\to\infty]{}|x|$$

כלומר הטור מתכנס כאשר $|x|<1$, כלומר $\rho=1$.

לדוגמה עבור $\alpha=\frac{1}{2}$, נקבל:

$$B_{\frac{1}{2}}(1+x)=1+\binom{\frac{1}{2}}{1}x+\binom{\frac{1}{2}}{2}x^2+\dots=1+\frac{\frac{1}{2}}{1!}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\dots=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x^2+\dots$$

תרגול 12

תרגילים

1. $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות.

$\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)} = 4$ לכן הטור מתכנס עבור $x \in (-4,4)$ ולא מתכנס עבור $x \in \mathbb{R}\setminus[-4,4]$. נותר לבדוק עבור $x = \pm 4$. נראה שהאיבר הכללי של $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n$ לא שואף לאפס ומשם נסיק כי הוא לא מתכנס שם.

$$\frac{\frac{(n!)^2}{(2n)!}4^n}{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}4^{n+1}} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\frac{1}{4} = \frac{n^2+\frac{6}{4}n+\frac{1}{2}}{n^2+2n+1} < 1$$

לכן הסדרה שמגדירה את הטור מונוטונית עולה ממש וחיובית ולכן היא לא שואפת לאפס ולכן גם הטור לא מתכנס שם. עבור -4 הפתרון זהה. לכן תחום ההתכנסות הוא $(-4,4)$.

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^{k^2}$ מצאו את רדיוס ההתכנסות ותחום ההתכנסות.

נשים לב כי זהו לא טור חזקות קונבנציונאלי שכן החזקה של המשתנה לא לינארית. אם כן, נוכל להגדיר טור חזקות שיהיה מקביל לו שיהיה $\sum a_n x^n$ כאשר $a_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & n=k^2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. לא נוכל להשתמש בדלאמבר כי זה שווה לאפס באופן שכיח. $\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{\overline{\lim}_n\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{n^2}}}\right)} = 1$. אז הטור מתכנס ב-$(-1,1)$ ומתבדר ב-$\mathbb{R}\setminus[-1,1]$. נציב $x=1$ ונקבל $\sum \frac{1}{k}$ הטור הרמוני שהוא מתבדר. עבור $x=-1$, $\sum \frac{1}{k}(-1)^{k^2} = \sum \frac{1}{k}(-1)^k$ (כי k זוגי אם"ם k^2 זוגי) וזהו טור לייבניץ שהוא מתכנס ולכן קטע ההתכנסות הוא $[-1,1)$.

3. מצאו טור חזקות שמתכנס ל-$\cos x$ ב-$\mathbb{R}$.

ראינו שאם $\sum c_n x^n$ מתכנס בסביבה של אפס אז המקדמים נקבעים ביחידות ע"י $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. ננסה לבנות טור עם מקדמים שמתאימים ל-$\cos$. $\cos^{(n)} x = \begin{cases} -\sin x & n=4k+1 \\ -\cos x & n=4k+2 \\ \sin x & n=4k+3 \\ \cos x & n=4k \end{cases}$ ולכן $\cos^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & 2\nmid n \\ -1 & n=4k+2 \\ 1 & n=4k \end{cases}$. נציב ונקבל את טור הטיילור של $\cos$, $\sum \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$. נחפש רדיוס התכנסות. $\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{0} = \infty$ ולכן רדיוס ההתכנסות הוא ∞ כלומר שהטור מתכנס בכל $\mathbb{R}$.

$(*)$ $(2n)! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\dots\cdot n\cdot(n+1)\cdot\dots\cdot(2n) \geq 1\cdot 1\cdot\dots\cdot 1\cdot n\cdot\dots\cdot n = n^n$ ולכן מטוסט $\overline{\lim}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} \geq \overline{\lim}\frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \overline{\lim}\frac{1}{n} = 0$.

נותר להראות כי הטור אכן מתכנס ל-$\cos$. מצורת השארית של לגראנז',

$$\left|\cos x - \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right| = \left|\frac{\cos^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}\right| \leq \frac{\left|x^{N+1}\right|}{(N+1)!} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

האם ההתכנסות במ"ש ב-$\mathbb{R}$?

לא. נזכור כי התכנסות במ"ש מורישה חסימות אבל במקרה שלנו הפ' הגבולית היא $\cos x$ שהיא חסומה והסכומים החלקיים $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ הם פולינומים שלא חסומים ב-$\mathbb{R}$.

4. הראו שקיימת $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש-$f(0)=1$ וגם $f'(x)=f(x)+x$.

נשים לב כי

$$f^{(n+1)}(x)=(f')^{(n)}(x)=(f(x)+x)^{(n)}=f^{(n)}(x)+(x)^{(n)}$$

לכן באינדוקציה ניתן להראות כי f גזירה מכל סדר. ננחש שקיים טור חזקות $f(x)=\sum c_nx^n$ עם רדיוס התכנסות חיובי הפותר את המשוואה.

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n$$

מהתנאי הנתון,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n+x=c_0+(c_1+1)x+\sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n$$

לכן נסיק (ע"י השוואת המקדמים של שני הטורים) כי $c_1=c_0$, $2c_2=c_1+1$, $(n+1)c_{n+1}=c_n$, $\forall n\geq 2$ לכן $c_0=f(0)=1$ ולכן $c_1=1$ וגם $c_2=\frac{c_1+1}{2}=1$ ובצעד ה-n-י,

$$c_{n+1}=\frac{c_n}{n+1}=\frac{c_{n-1}}{n(n+1)}=\cdots=\frac{c_2}{3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1)}=\frac{2}{(n+1)!}$$

לכן

$$\begin{aligned}f(x)&=1+x+x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n!}x^n=1+x+x^2+2\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=1+x+x^2-2-2x-x^2+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=-1-x+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\\&=-1-x+2e^x\end{aligned}$$

כלומר $f(x)=-1-x+2e^x$ מקיים את הנדרש.

הרצאה 35

תרגיל (לסטודנטית המשקיעה) $\binom{\alpha+1}{n}=\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n-1}$ וגם $\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha}{n}\binom{\alpha-1}{n-1}$, עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ ו-$n\in\mathbb{N}$.

משפט עבור $-1<x<1$, $B_\alpha(1+x)=(1+x)^\alpha$.

הוכחה: אם $f(x)=(1+x)^\alpha$ אז $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ ולכן $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$. נוכיח ראשית כי $(1+x)B'_\alpha(1+x)=$

ולכן $B'_\alpha(1+x)=\sum\limits_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n x^{n-1}$.$\alpha B_\alpha(1+x)$

$$\begin{aligned}(1+x)B'_\alpha(1+x) &= \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n x^n = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} n x^n \\ &\overset{(*)}{=} \alpha + \sum_{n=1}^\infty \alpha\binom{\alpha-1}{n}x^n + \sum_{n=1}^\infty \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}x^n = \alpha + \alpha\sum_{n=1}^\infty\left(\binom{\alpha-1}{n}+\binom{\alpha-1}{n-1}\right)x^n \\ &\overset{(**)}{=} \alpha\left(1+\sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n}x^n\right) = \alpha\sum_{n=0}^\infty\binom{\alpha}{n}x^n = \alpha B_\alpha(1+x)\end{aligned}$$

$(*)$ $\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$.

$(**)$ $\binom{m+1}{n} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n-1}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{B_\alpha(1+x)}{(1+x)^\alpha}\right)' &= \frac{B'_\alpha(1+x)(1+x)^\alpha - B_\alpha(1+x)\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{((1+x)^\alpha)^2} \\ &= \frac{(B'_\alpha(1+x)(1+x) - B_\alpha(1+x)\alpha)(1+x)^{\alpha-1}}{((1+x)^\alpha)^2} \\ &= \frac{(\alpha B_\alpha(1+x) - B_\alpha(1+x)\alpha)(1+x)^{\alpha-1}}{((1+x)^\alpha)^2} = 0\end{aligned}$$

לכן $B_\alpha(1+x)=C(1+x)^\alpha$. בהצבת $x=0$ נקבל $1=C\cdot 1$ ולכן $B_\alpha(1+x)=(1+x)^\alpha$. ∎

דוגמה $\alpha=-\frac{1}{2}$.

$$B_{-\frac{1}{2}}(1+x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\dots = 1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\dots$$

עבור $-1<x<1$.

$$B_{-\frac{1}{2}}\left(1-x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\dots$$

נזכור כי $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ולכן $\arcsin x = \cancel{C} + x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{3}{8}\frac{x^5}{5}+\dots$ (קבוע האינטגרציה מתאפס כי בהצבת $x=0$ נקבל $\arcsin 0 = 0$).

משפט יהיו $\sum a_n, \sum b_n$ שני טורים מתכנסים בהחלט עם סכומים A, B בהתאמה. נגדיר $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$. אזי הטור $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n$ מתכנס בהחלט וסכומו C מקיים $C=A\cdot B$.

משפט (מכפלת קושי של טורי חזקות) יהיו $\sum a_n x^n, \sum b_n x^n$ שני טורי חזקות אשר מתכנסים בקטע פתוח I. נגדיר $c_n = \sum\limits_{i+j=n} a_i b_j$. אזי הטור $\sum c_n$ מתכנס ב-I ומתקיים $\sum\limits_{n=0}^\infty c_n x^n = \left(\sum\limits_{n=0}^\infty a_n x^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^\infty b_n x^n\right)$.

דוגמה נשים לב כי מתקיים

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^iy^{n-i}=n!\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^j}{j!}$$

כלומר $\sum\limits_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\cdot\frac{y^j}{j!}=\frac{(x+y)^n}{n!}$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$, לכן $E\left(y\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}$, $E\left(x\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

$$E\left(x+y\right)=\sum\frac{(x+y)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=n}\frac{x^i}{i!}\frac{y^j}{j!}\right)=E\left(x\right)E\left(y\right)$$

כלומר הסקנו ממכפלת קושי את אחת מזהויות exp.

הרצאה 36

הגדרה תהי $f:I\to\mathbb{R}$. נאמר כי f <u>אנליטית</u> באותו הקטע אם $\forall a\in I$ קיימת (c_n) סדרת איברים וטור חזקות $\sum c_n\left(x-a\right)^n$ אשר מתכנס בסביבה של a בקטע I.

דוגמה $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ אנליטית על $(-\infty,0)\cup(0,\infty)$ בכל אחד מהתת קטעים הפתוחים של תחום ההגדרה. $a>0$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}&=\frac{1}{(x-a)+a}=\frac{1}{a}\frac{1}{\frac{(x-a)}{a}+1}=\frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{x-a}{a}}=\frac{1}{a}\left(1-\left(\frac{x-a}{a}\right)+\left(\frac{x-a}{a}\right)^2-\ldots\right)\\&=\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{a}\left(x-a\right)+\frac{1}{a^2}\left(x-a\right)^2-\ldots\right)=\sum\left(-1\right)^n\frac{1}{a^{n+1}}\left(x-a\right)^n\end{aligned}$$

הטור מתכנס עבור $\left|\frac{x-a}{a}\right|<1$ כלומר $|x-a|<a$ (הסביבה בה הטור מתכנס היא a ימינה ושמאלה).

משפט יהי $\sum c_n\left(x-a\right)^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות חיובי (ממש, במובן הרחב) אזי $f\left(x\right)=\sum c_n\left(x-a\right)^n$ אנליטית בכל קטע ההתכנסות של הטור, כלומר, $\forall b\in I$ קיים $\sum b_n\left(x-a\right)^n$ אשר מתכנס בקטע פתוח סביב b שכולו מוכל ב-I מגדיר אותה הפ' f.

הגדרה תהי $I\neq\varnothing$. <u>משפחה</u> ב-I עם ערכים ממשיים היא פ' $x:I\to\mathbb{R}$.

הערה תהי $(x_i)_{i\in I}$ משפחה ב-$\mathbb{R}$ עם אינדקסים בקבוצה $I\neq\varnothing$, כלומר $x:I\to\mathbb{R}$, $x\left(i\right)=x_i$. $\forall F\subseteq I$ סופית, נסמן ב- $S_F:=\sum\limits_{i\in F}x_i$ הסכום (הסופי). אם $F=\varnothing$ נגדיר $S_\varnothing:=0$. נסמן ב-$\mathcal{F}_I$ את אוסף כל הקבוצות החלקיות הסופיות של I.

הגדרה נאמר שהמשפחה <u>סכימה</u> אם קיים $S\in\mathbb{R}$ כך ש- $\forall\epsilon>0$, קיים $F_\epsilon\in\mathcal{F}_I$ כך שלכל $\mathcal{F}_I\ni F\supseteq F_\epsilon$ מתקיים $|S_F-S|<\epsilon$. במקרה זה נאמר שה-S הוא <u>הסכום</u> של המשפחה או של הטור $\sum\limits_{i\in I}x_i$ הלא מסודר ונכתוב $S=\sum\limits_{i\in I}x_i$.

משפט (יחידות הגבול) אם $\sum\limits_{i\in I}x_i$ סכימה עם סכומים S,S' אזי $S=S'$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

משפט (לינאריות של סכימות) תהיינה $x,y:I\to\mathbb{R}$ סכימות עם סכימות $\sum\limits_{i\in I}x_i,\sum\limits_{i\in I}y_i$ בהתאמה. אזי $\forall a,b\in\mathbb{R}$ המשפחה : $ax+by$ $I\to\mathbb{R}$ סכימה ומתקיים $\sum\limits_{i\in I}\left(ax+by\right)_i=a\sum\limits_{i\in I}x_i+b\sum\limits_{i\in I}y_i$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

משפט תהי $x : I \to \mathbb{R}$ חיובית (חלש) אזי $(x_i)_{i\in I}$ סכימה אם"ם קבוצת הסכומים החלקיים $\{S_F : F \in \mathcal{F}_I\}$ חסומה ובמקרה שאכן, מתקיים $S = \sum\limits_{i\in I} x_i = \sup\{S_F : F \in \mathcal{F}_I\}$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $(x_i)_{i\in I}$ סכימה וסכומה $S = \sum\limits_{i\in I} x_i$. יהי $\epsilon = 1$ ונבחר $F_1 \in \mathcal{F}_I$ כך שלכל $F_1 \subseteq F \ni \mathcal{F}_I$ מתקיים $|S_F - S| < 1$ ולכן $S_F < 1 + S$. $\forall F \in \mathcal{F}_I$ יתקיים $F \subseteq F_1 \cup F$ לכן $S_F \leq S_{F_1\cup F} < 1 + S$ ולכן $1 + S$ חסם מלעל של קבוצת הסכומים החלקיים.

$\Rightarrow$: נסמן $S := \sup\{S_F : F \in \mathcal{F}_I\}$. $\forall\epsilon > 0$, קיים $F_\epsilon \in \mathcal{F}_I$ כך ש- $S - \epsilon < S_{F_\epsilon} \leq S$ אזי $\forall F_\epsilon \subseteq F \in \mathcal{F}_{\mathcal{I}}$ תקיים $S - \epsilon < S_{F_\epsilon} \leq S_F < S$ לכן $\sum\limits_{i\in I} x_i = S$. ■

שבוע $\mathbb{XIII}$ | סכומים לא מסודרים ופ' אנליטיות

הרצאה 37

דוגמה $I = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. ננסה לסכום את את המשפחה הבאה

$$\begin{array}{|ccccc}
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & -1 & 0 & 1 & \cdots \\
0 & 0 & -1 & 0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

נשים לב כי אינטואטיבית, המשפחה לא ניתנת לסכימה שכן נוכל לכל קבוצה שנבחר להגדרת הסכימה, לכלול הרבה מאוד 1-ים שישאיפו את הסכום לאינסוף ולכן לא נקבל "התכנסות".

דוגמה עבור $-1 < q, r < 1$, המשפחה הבאה היא כן סכימה (רעיונית, בהמשך נוכיח משפט שיעזור לנו להוכיח זאת בהחלט)

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & q & q^2 & q^3 & \cdots & \\
\hline
1 & 1 & q & q^2 & q^3 & \cdots & 1\cdot\frac{1}{1-q} \\
r & r & rq & rq^2 & rq^3 & \cdots & r\cdot\frac{1}{1-q} \\
r^2 & r^2 & r^2q & r^2q^2 & r^2q^3 & \cdots & r^2\frac{1}{1-q} \\
r^3 & r^3 & r^3q & r^3q^2 & r^3q^3 & \cdots & r^3\frac{1}{1-q} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\
 & 1\cdot\frac{1}{1-r} & q\cdot\frac{1}{1-r} & q^2\frac{1}{1-r} & q^3\frac{1}{1-r} & & \frac{1}{1-r}\frac{1}{1-q}
\end{array}$$

הערה נסמן את הסכום של המשפחה $x : I \to \mathbb{R}$ ע"י $\sum\limits_I x$.

משפט תהי $x : I \to \mathbb{R}$ כאשר $I \neq \varnothing$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) $\sum\limits_I x$ סכימה.

(ii) $\sum\limits_I |x|$ סכימה.

(iii) $\left\{\sum\limits_F |x|\right\}$ חסומה.

(iv) $\left\{\sum\limits_F x\right\}$ חסומה.

הערה נגדיר $x^+ = \left\{\begin{smallmatrix} x & x\geq 0 \\ 0 & x<0 \end{smallmatrix}\right.$ וגם $x^- = \left\{\begin{smallmatrix} -x & x\leq 0 \\ 0 & x>0 \end{smallmatrix}\right.$. נשים לב כי $0 \leq x^+, x^- \leq |x|$.

הוכחה: $(iii) \Leftarrow (ii)$ ראינו.

$(ii) \Leftarrow (i)$ $\forall F \in \mathcal{F}$, $\sum\limits_F |x| \leq \sum\limits_F x^+, \sum\limits_F x^- \leq 0$ ומהיות $\sum\limits_F |x|$ סכימה אזי $\sum\limits_F x^+, \sum\limits_F x^-$ סכימות (כי הסכומים החלקיים שלה חסומים) ומלינאירות של משפחות סכימות, $\sum\limits_F x = \sum\limits_F x^+ - \sum\limits_F x^-$ סכימה.

$(iv) \Leftarrow (iii)$ נגדיר $I^+ := \{i \in I : x_i \geq 0\}$ וגם $I^- := \{i \in I : x_i \leq 0\}$. $\forall F \in \mathcal{F}$,

$$\sum_F x = \sum_{F\cap I^+} x + \sum_{F\cap I^-} x = \sum_F x^+ - \sum_F x^-$$

לכן מהיות $\left\{\sum\limits_F x\right\}$ חסומה אזי גם $\left\{\sum\limits_F x^-\right\}, \left\{\sum\limits_F x^+\right\}$ חסומות ולכן $\sum\limits_I x^+, \sum\limits_I x^-$ סכימות ומלינאריות נקבל כי $\sum\limits_I |x| = \sum\limits_I x^+ + \sum\limits_I x^-$ סכימה.

$(i) \Leftarrow (iv)$ יהי $s = \sum\limits_I x$. נראה כי $\left\{\sum\limits_F x : F \in \mathcal{F}\right\}$ חסומה. נבחר $\epsilon = 1$ ולכן קיימת F_ϵ כך ש- $\forall F \supseteq F_\epsilon$

$$\left|\sum_F x - s\right| < 1$$

ולכן

$$-1 - |s| \leq -1 + s < \sum_F x < 1 + s \leq 1 + |s|$$

$\forall F \in \mathcal{F}$, $\sum\limits_F x = \sum\limits_{F\cup F_\epsilon} x - \sum\limits_{F_\epsilon \setminus F} x$ לכן

$$\left|\sum_F x\right| \overset{\triangle}{\leq} \left|\sum_{F\cup F_\epsilon} x\right| + \sum_{F_\epsilon\setminus F} |x| \leq 1 + |s| + \sum_{F_\epsilon} |x|$$

וזה חסם אוניברסילי לכל הסכומים החלקיים. ■

מסקנה תהיינה $x, y : I \to \mathbb{R}$ כך ש- $|y| \leq x$. אם $\sum\limits_I x$ סכימה אזי $\sum\limits_I y$ סכימה.

מסקנה אם $\sum\limits_{I} x$ סכימה אז $\forall J \subseteq I$, $\sum\limits_{J} x$ סכימה.

הוכחה: $\mathcal{F}_J \subseteq \mathcal{F}_I$ ולכן אזי $\left\{\sum\limits_{F\in\mathcal{F}_I} x\right\} \subseteq \left\{\sum\limits_{F\in\mathcal{F}_J} x\right\}$ חסומה. ■

משפט תהי $x : I \to \mathbb{R}$ סכימה. אזי $D := \{i \in I : x_i \neq 0\}$ סופית או בת מניה.

הוכחה: נגדיר $I_n := \left\{i \in I : \frac{1}{n} < |x_i|\right\}$ לכן $D = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. נוכיח כי I_n סופית $\forall n \in \mathbb{N}$. $\sum\limits_{I}|x| \geq \sum\limits_{I_n}|x| \geq \frac{1}{n}|I_n|$ ולכן $|I_n| \leq n\sum\limits_{I}|x|$. לכן D איחוד בן מניה של קבוצות סופיות ולכן D סופית או בת מניה. ■

משפט תהי $x : I \to \mathbb{R}$. אם $I = I_1 \dot\cup I_2$. אזי $\sum\limits_{I} x$ סכימה אם"ם $\sum\limits_{I_1} x, \sum\limits_{I_2} x$ סכימות ומתקיים $\sum\limits_{I} x = \sum\limits_{I_1} x + \sum\limits_{I_2} x$.

תרגול 13

הגדרה תהי f פ' גזירה אינסוף פעמים ב-x_0. אזי טור הטיילור של f סביב x_0 מוגדר להיות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. סכום חלקי של טור הטיילור הוא פולינום טילור.

דוגמות

1. טור הטיילור של e^x סביב אפס הוא $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. רדיוס ההתכנסות הוא ∞. השארית שואפת לאפס, ולכן הגבול הוא e^x, כלומר, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$.
2. ראינו כי $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$.
3. בתרגול 3 ראינו שטור הטיילור של $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ סביב אפס הוא 0. רדיוס ההתכנסות הוא ∞. ולמרות זאת, הגבול של הטור הוא $f(x) \neq 0$.
4. ראינו כי $\forall x \in (-1,1)$, $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n$ (מהפיתוח של הטור הגאומטרי). זהו טור הטיילור של $\frac{1}{1+x}$ מיחידות (שכן המקדמים נקבעים ביחידות ע"י $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$). מאינטגרציה איבר איבר, נקבל

$$f(x) = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n = g(x)$$

$\forall x \in (-1,1)$. נשים לב כי f, g מתלכדות ב-$(-1,1)$. f לא מוגדרת ב-$(-\infty,-1]$ אבל כן ב-$[1,\infty)$. g לא מוגדר (מתבדר) ב-$(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$. הטור מתכנס ב-$x = 1$ (מטור לייבניץ) אבל לא ב-$x = -1$ (שזה לא כל כך משנה כי גם f לא מוגדרת שם). לכן ממשפט אבל, g רציפה משמאל ב-$x = 1$, כלומר

$$g(1) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \ln 2$$

לכן $\ln 2 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

תרגיל סדרת פיבונאצ'י מוגדרת באופן הבא: $a_0 = a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $\forall n \geq 2$. נסמן $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

א. הראו כי לטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ יש רדיוס התכנסות חיובי (ממש).

ב. הראו כי בתחום ההתכנסות מתקיים $f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)$.

ג. מצאו ביטוי למפורש ל-$f(x)$.

ד. פתחו אותו לטור חזקות ומצאו נוסחה סגורה למספרי פיבונאצ'י.

פתרון א. $\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}}$. a_n היא סדרה חיובית ועולה (באינדוקציה). $2 = 1+1 > 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ לכן $a_n < 2a_{n-1}$ ולכן $a_n < 2a_{n-1} < 2 \cdot 2a_{n-2} < \cdots < 2^n$. לכן $\rho = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}} \geq \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{2^n}} = \frac{1}{2}$ כלומר רדיוס ההתכנסות הוא לפחות חצי.

ב.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} + a_{n-2}) x^n \\
&= 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n = 1 + x + x \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} x^{n-1} + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n-2} \\
&= 1 + x + x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + xf(x) + x^2 f(x)
\end{aligned}
$$

ג. $f(x) = 1 + xf(x) + x^2 f(x)$ ולכן $f(x)\left(1 - x - x^2\right) = 1$ ולכן $f(x) = \frac{1}{-x^2-x+1}$. $-x^2 - x + 1 = 0$ עבור $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{-2} = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. נזכור כי יחס הזהב הוא $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ וגם $\alpha^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. לכן $f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)(x-\alpha^{-1})}$. נחפש A, B כך ש-

$$
\frac{1}{(x+\alpha)\left(x-\alpha^{-1}\right)} = \frac{A}{x+\alpha} + \frac{B}{x-\alpha^{-1}} = \frac{A\left(x-\alpha^{-1}\right) + B(x+\alpha)}{(x+\alpha)\left(x-\alpha^{-1}\right)}
$$

נציב $x = 0, 1$ ונקבל $A + B = 0$ וגם $B\alpha - A\alpha^{-1} = 1$. אחרי קצת אלגברה, נקבל כי $B = \frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}}$ וכן $A = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}}$. לכן

$$
f(x) = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \frac{1}{x-\alpha^{-1}} = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \left(\frac{1}{x+\alpha} - \frac{1}{x-\alpha^{-1}}\right)
$$

נזכור כי מתקיים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ברדיוס התכנסות $|x| < 1$. לכן

$$
f(x) = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \left(\frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{\alpha}\right)} + \frac{1}{\alpha^{-1}} \frac{1}{1-\frac{x}{\alpha^{-1}}}\right) = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{\alpha}\right)^n + \alpha \sum_{n=0}^{\infty} (x\alpha)^n\right)
$$

לכן

$$
a_n = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \left(\frac{1}{\alpha} \left(-\frac{1}{\alpha}\right)^n + \alpha \cdot \alpha^{n+1}\right) = -\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}} \left((-1)^n \alpha^{-(n+1)} + \alpha^{n+1}\right)
$$

ומיחידות המקדמים בטורי חזקות, אלו איברי סדרת פיבונאצ'י, כלומר, $a_n=-\frac{1}{\sqrt{5}}\left((-1)^n\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

תרגיל הוכיחו כי $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

פתרון $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ כאשר $a_n=\begin{cases}0 & 2|n\\ \frac{1}{n!} & n=4k+1\\ -\frac{1}{n!} & n=4k+3\end{cases}$, $b_n=\begin{cases}0 & 2\nmid n\\ \frac{1}{n!} & n=4k\\ -\frac{1}{n!} & n=4k+2\end{cases}$. ממכפלת טורים של קושי, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ כאשר $c_n=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$ מתכנס ל-$\sin x\cos x$. הסטודנטית המשקיעה (וגם הסטודנטית הרגילה בתרגיל 13) תוכיח ש-$2c_n$ הם המקדמים של הטור של $\sin 2x$ ותסיים.

טענה אם n אי זוגי, אז מתקיים $\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$.

הוכחה: $\binom{n}{2k+1}$ זה כמה תתי קבוצות בגודל $2k+1$ יש בקבוצה בגודל n. $\sum\limits_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{2k+1}$ זה כמה תתי קבוצות בגודל אי זוגי כלשהו יש בקבוצה בגודל n. מספר תתי הקבוצות הכולל הוא 2^n. ניתן להוכיח כי מספר תתי הקבוצות בגודל אי זוגי שווה למספר תתי הקבוצות בגודל זוגי ומשם נסיק כי מספר תתי הקבוצות בגודל אי זוגי הוא 2^{n-1}. ■

הרצאה 38

תרגיל (לסטודנטית המשקיעה) אם $x\geq 0$ ו-$\sum\limits_{I}x$ סכימה אזי $\forall J\subseteq K\subseteq I$, $\sum\limits_{I}|x|\leq\sum\limits_{K}|x|\leq\sum\limits_{J}|x|$.

משפט תהי $x:I\to\mathbb{R}$ כך ש- $I=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}I_n$ (איחוד זר בן מניה). אזי $x:I\to\mathbb{R}$ סכימה אם"ם

(i) x סכימה בכל I_n.

(ii) הטור $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{I_k}|x|\right)$ מתכנס.

יתר על כן, אם x סכימה (מעל I) אזי $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{I_k}x\right)=\sum\limits_{I}x$.

הוכחה: בה"כ, נוכל להניח שהמשפחה חיובית ($x\geq 0$) (כי סכימות שקולה לסכימות בהחלט ולכן גם x^+,x^- סכימות).

$\Leftarrow$: נניח כי x סכימה. $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n\subseteq I$ (מהתרגיל המוזכר לעיל) ולכן $\sum\limits_{I_n}x$ סכימה ומתקיים $\sum\limits_{I_n}x\leq\sum\limits_{I}x$. $\forall N\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{I_n}x\right)=\sum_{I_1}x+\cdots+\sum_{I_N}x\overset{\text{אדיט'}}{=}\sum_{I_1\cup\cdots\cup I_N}x\leq\sum_{I}x$$

לכן (חסימות של סכומים חלקיים של טור חיובי שקולה להתכנסות הטור) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{I_n}x\right)$ מתכנס ומתקיים $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{I_n}x\right)\leq\sum\limits_{I}x$. נזכור כי $\sum\limits_{I}x=\sup\left\{\sum\limits_{F\in\mathcal{F}_I}x\right\}$. יהי $\epsilon>0$. מתכונת ה-ϵ של החסם העליון, קיימת $F_\epsilon\in\mathcal{F}_I$ כך ש- $\sum\limits_{I}x-\epsilon<\sum\limits_{F_\epsilon}x<\sum\limits_{I}x$. נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $F_\epsilon\subseteq I_1\cup\cdots\cup I_N\subseteq I$ (בגלל ש-F_ϵ סופית נוכל "לפזר" את איבריה על איחוד זר וסופי) ולכן

$$\sum_{I}x-\epsilon<\sum_{F_\epsilon}x\leq\sum_{I_1\cup\cdots\cup I_N}x\leq\sum_{I}x<\sum_{I}x+\epsilon$$

יתר על כן, $\forall m>N$, $\sum\limits_{I_1\cup\dots\cup I_m} x \le \sum\limits_{I_1\cup\dots\cup I_N} x$ ולכן

$$\sum_I x-\epsilon<\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{I_n}x\right)\le\sum_{n=1}^{m}\left(\sum_{I_n}x\right)\le\sum_I x<\sum_I x+\epsilon$$

ולכן $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{I_n}x\right)=\sum\limits_I x$

$\Leftarrow$: כדי להוכיח סכימות על כל I, מספיק להראות כי הקבוצה $\left\{\sum\limits_{F\in\mathcal{F}_I} x\right\}$ חסומה מלעל. תהי $F\in\mathcal{F}_I$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש- $F\subseteq I_1\cup\dots I_N$ ולכן $\sum\limits_{I_1\cup\dots\cup I_N} x$ סכימה מאדיטיביות ומתנאי (i). $\sum\limits_F x$ סכימה וממונוטוניות מתקיים

$$\sum_F x\le\sum_{I_1\cup\dots\cup I_N}x=\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{I_n}x\right)\overset{(ii)}{\le}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{I_n}x\right)$$

■

משפט (Fubini) תהי $(x_{n,m})_{n,m\in\mathbb{N}_0}$ סדרה כפולה $x:\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0\to\mathbb{R}$ ויהי $\sigma:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ סידור (פ' חחע"ל) אז התנאים הבאים שקולים:

(i) x סכימה מעל $\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$ ומתקיים $\sum\limits_{n,m\in\mathbb{N}_0} x_{n,m}=\sum\limits_{(n,m)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0} x_{n,m}$.

(ii) הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ מתכנס בהחלט (סכימה לפי הסידור הנתון)

(iii) $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty}|x_{j,k}|\right)$ מתכנס (סכימה לפי עמודות)

(iv) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{j=0}^{\infty}|x_{j,k}|\right)$ מתכנס (סכימה לפי שורות)

(v) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i+j=0}^{\infty}|x_{i,j}|\right)$ מתכנס (סכימה לפי משולשים)

ואם התנאים מתקיים אז

$$\sum_{\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}x=\sum_{n=0}^{\infty}x_{\sigma(n)}=\sum_j\sum_k x_{j,k}=\sum_k\sum_j x_{j,k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=0}^{\infty}x_{i,j}\right)$$

הוכחה: נשים לב כי כל אלו הם מקרים פרטיים של כיסויים בני מנייה, נציין אילו כיסויים מתאימים לכל סכימה.

(ii) $I_n=\{\sigma(n)\}$.

(v) $I_n=\{(i,j):i+j=n\}$.

■

משפט יהיו $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ שני טורים מתכנסים בהחלט עם סכומים A,B בהתאמה. אם $c_n:=\sum\limits_{i+j=n} a_ib_j$ אז $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס בהחלט וסכומו $A\cdot B$.

הוכחה:

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|a_ib_j|\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(|a_i|\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}|a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right)\leq\left(\sum_{i=0}^{\infty}|a_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}|b_j|\right)$$

לכן נקבל התכנסות בהחלט ויתקיים כי $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}|a_ib_j|\right)$ מתכנס. לכן, ממשפט Fubini (וריאציה (v)) נקבל כי

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0}a_ib_j=\sum_{n=0}^{\infty}c_n=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_ib_j\right)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(a_i\sum_{j=0}^{\infty}b_j\right)=\left(\sum_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}b_j\right)=A\cdot B$$

■

הערה אם $\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n$ מתכנסים בתחום משותף, אז $\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-c)^n$ מתכנס באותו תחום כאשר $c_n:=\sum_{i+j=n}a_ib_j$ וסכומו

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-c)^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-c)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-c)^n\right)$$

הרצאה 39

דוגמה $a_n=b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. $\sum a_n$ מתכנס בתנאי. נביט ב-$c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j$.

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n-1+1}}=(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{1}}\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\frac{1}{\sqrt{1}}\right)$$

לכן $|c_n|\geq 1$, כלומר שהאיבר הכללי לא שואף לאפס ולכן הטור לא מתכנס.

הערה כדי שמכפלת קושי של סדרות תתכנס, נהיה חייבים התכנסות בהחלט של שני הטורים.

משפט יהי $\sum a_n(x-a)^n$ בעל רדיוס התכנסות $\rho>0$ ותחום התכנסות I. נגדיר $f:I\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x):=\sum a_n(x-a)^n$ אזי f אנליטית.

הוכחה: יהי $R>0$ כך שיתקיים $[a-R,a+R]\subseteq I$. יהי $b\in I$ כך ש-$|b-a|<R$. נראה כי קיימת (b_n) סדרת ממשיים ו-$r>0$ כך ש-$f(x)=\sum b_n(x-b)^n$, $\forall x\in(b-r,b+r)$ וגם $(b-r,b+r)\subseteq I$. נשים לב כי $x-a=(x-b)+(b-a)$. מהבינום של

ניוטון נקבל

$$(x-a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i}$$

לכן

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \sum_{i=0}^{n} \left(\binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right)\end{aligned}$$

$(*)$ נגדיר $\binom{n}{i} = 0$, $\forall i > n$ (שזה הגיוני קומבינטורית - יש 0 דרכים לבחור 5 איברים מתוך 3).

עתה מספיק שנוכיח כי הטור מתכנס בהחלט ומשם נוכל להסיק כי

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x-b)^i (b-a)^{n-i} \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (b-a)^{n-i} \right) (x-b)^i\end{aligned}$$

ואז לאמר שה-(b_i) שלנו היא $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (b-a)^{n-i}$ ולסיים.

נביט במשפחה $\left(|a_{i+j}| \binom{i+j}{j} |x-b|^j |b-a|^i \right) = (|x_{i,j}|)$, לכל $(i,j) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$. נוכיח כי היא סכימה. נגדיר כיסוי בן מניה $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} I_n$ כאשר $I_n = \{(i,j) : i+j = n\}$.

$$\begin{aligned}\sum_{I_n} |a_{i+j}| \binom{i+j}{j} |x-b|^i |b-a|^i &= |a_n| \sum_{i+j=n} \binom{i+j}{j} |x-b|^j |b-a|^i \\ &= |a_n| (|x-b| + |b-a|)^n\end{aligned}$$

כלומר $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| (|x-b| + |b-a|)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{I_n} |x_{i,j}| \right)$ הוא טור מתכנס (בהחלט) (כי נוכל לבחור $r := R - |b-a|$ ואז לקבל

$$|x-a| \overset{\triangle}{\leq} |x-b| + |b-a| < (R - |b-a|) + |b-a| < R$$

שכן $x \in (b-r, b+r)$) והטור המקורי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ בעל רדיוס התכנסות R. ■

הערה כל הנושא של סכומים לא מסודרים נלמד כדי שנוכל להוכיח שפ' המיוצגת ע"י טור חזקות היא אנליטית.

שבוע $\mathbb{XIV}$ | פנינות באנליזה

הרצאה 40

משפט (משפט הקירוב של ווירשטראס, WAT) $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אזי $\forall\epsilon>0$ קיימת $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ פולינומליאלית כך ש-$\forall t\in[a,v]$ מתקיים $|f(t)-p(t)|<\epsilon$.

הגדרה $l:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא לינארית אם קיימים $c,d\in\mathbb{R}$ כך ש-$l(t)=c+dt$, $\forall t\in[a,b]$.

הגדרה $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ תקרא לינארית למקוטעין אם קיימת $\mathcal{P}:(x_0,\dots,x_n)$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$g\Big|_{(x_{i-1},x_i)}$ לינארית לכל $1\le i\le n$.

הערה אם $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה ולינארית למקוטעין ב-$[a,b]$ אזי $g|_{[x_{i-1},x_i]}$ לינארית לכל $1\le i\le n$.

משפט קיימת סדרת פולינומים המתכנסת במ"ש ל-$|x|$ ב-$[-1,1]$.

הוכחה: נגדיר $q_0:=1$. נגדיר ריקורסיבית $q_{n+1}:=\frac{1}{2}\left(x^2+2q_n-q_n^2\right)$, $n\ge0$. ברור כי q_n פולינום, $\forall n\in\mathbb{N}$. נשים לב כי אם $1\ge q_n\ge|x|$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח שהתנאי הזה תמיד מתקיים) אזי

$$q_n-q_{n+1}=q_n-\frac{1}{2}\left(x^2+2q_n-q_n^2\right)=\frac{1}{2}\left(q_n^2-x^2\right)\ge0$$

$$q_{n+1}-|x|=\frac{1}{2}\left(x^2+2q_n-q_n^2\right)-|x|=\frac{1}{2}\left(x^2-2|x|+2q_n-q_n^2\right)=\frac{1}{2}\left((1-|x|)^2-(1-q_n)^2\right)\overset{\text{ה"א}}{\ge}0$$

כלומר $1\ge q_n\ge q_{n+1}\ge|x|$. לכן, $\forall t\in[-1,1]$, $(q_n(t))$ היא סדרה מונוטונית יורדת וחסומה מלרע ולכן היא מתכנסת. נסמן $q:=\lim\limits_{n\to\infty}q_n$ לכן מתקיים $q=\frac{1}{2}\left(x^2+2q-q^2\right)$ כלומר $x^2=q^2$. נשים לב כי $q\ge0$ ולכן $q=|x|$. נזכור בנוסף כי q_n מונוטוניות ורציפות ומתכנסות נקודתית ל-q ולכן מדיני ההתכנסות היא במ"ש כרצוי.

(WAT) יהי $\epsilon>0$. תהי $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ לינארית למקוטעין ורציפה כך ש-$|f(t)-g(t)|<\frac{\epsilon}{2}$, $\forall t\in[a,b]$ (נוכיח בהרצאה הבאה כי קיימת כזו) וגם $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ פולינומיאלית כך ש-$|g(t)-p(t)|<\frac{\epsilon}{2}$, $\forall t\in[a,b]$ $(*)$. לכן מתקיים $|f(t)-p(t)|<\epsilon$, $\forall t\in[a,b]$.

$(*)$ נראה בהרצאה הבאה כי ניתן לקרב פולינומיאלית כל פ' מהצורה $f(x)=|x-c|$. בנוסף, נוכיח כי כל פ' לינארית למקוטעין ניתנת להצגה כקומבינציה לינארית של פ' מהצורה $f(x)=(x-c)^+=\begin{cases}x-c & x-c\ge0\\ 0 & x-c<0\end{cases}$ כאשר $c\in[a,b]$. נוכל לחבר את שתי הטענות הללו למסקנה אחת: נזכור כי $x^+=\frac{1}{2}(|x|+x)$ וברור שניתן לקרב את x פולינומיאלית, ולכן ניתן לקרב את הצירוף הלינארי הזה בעזרת פולינומים. לכן, כל פ' לינארית למקוטעין ניתנת להצגה כצירוף לינארי של פ' שניתנות לקירוב פולינומיאלי גם הן, ולכן גם היא ניתן להצגה כקירוב פולינומיאלי (נוכיח כי פ' עם התכונה הזו מהוות מ"ו מעל $\mathbb{R}$ בהרצאה הבאה גם כן). ■

תרגול 14

הוכחה: (יחידות הסכום, נוסח אי שם בהרצאה 36) נניח בשלילה כי $s \neq s'$. נבחר $0 < \epsilon = \frac{|s-s'|}{2}$. מסכימות x, קיימות F_ϵ, F'_ϵ כך ש- $\left|\sum\limits_F x - s\right|, \left|\sum\limits_F x - s'\right| < \epsilon$, לכל $F_\epsilon \subseteq F \in \mathcal{F}_I$, $F'_\epsilon \subseteq F \in \mathcal{F}_I$. נבחר $F = F_\epsilon \cup F'_\epsilon$ לכן

$$|s-s'| \overset{\triangle}{\leq} \left|s - \sum_F x\right| + \left|\sum_F x - s'\right| < 2 \cdot \frac{|s-s'|}{2} = |s-s'|$$

סתירה. ■

משפט (קריטריון מסוג קושי לסכימות של משפחות) תהי $x : I \to \mathbb{R}$. אזי x סכימה על I אם"ם $\forall \epsilon > 0$, קיימת $F_\epsilon \in \mathcal{F}_I$ כך ש- $\forall F \subseteq I$ כך ש- $F \cap F_\epsilon = \varnothing$ מתקיים $\left|\sum\limits_F x\right| < \epsilon$.

הוכחה: $\Leftarrow$: יהי $\epsilon > 0$. מסכימות, קיימת $F_\epsilon \in \mathcal{F}_I$ כך שלכל $F_\epsilon \subseteq F \in \mathcal{F}_I$ מתקיים $\left|\sum\limits_F x - S\right| < \frac{\epsilon}{2}$. תהי $F \in \mathcal{F}_I$ כך ש- $F \cap F_\epsilon = \varnothing$. לכן

$$\left|\sum_F x\right| \overset{\triangle}{\leq} \left|\sum_F x + \sum_{F_\epsilon} x - S\right| + \left|\sum_{F_\epsilon} x - S\right| \overset{(*)}{=} \left|\sum_{F \cup F_\epsilon} x - S\right| + \left|\sum_{F_\epsilon} x - S\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$(*)$ כי הן זרות, וסכימה סופית של קבוצות זרות זה הסכום של איחוד הקבוצות.

$\Rightarrow$: נגדיר $a_n = \sum\limits_{F_{\frac{1}{n}}} x$ (כלומר סדרה שאיבריה הן הסכום של קבוצות מהצורה $F_{\frac{1}{n}}$ כך שלכל קבוצה כזו, מתקיים כי $\forall F \in \mathcal{F}_I$ כך ש- $F \cap F_{\frac{1}{n}} = \varnothing$ מתקיים $\left|\sum\limits_F x\right| < \epsilon$). נראה כי a_n מתכנסת. מספיק שנוכיח כי a_n היא סדרת קושי. יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \frac{2}{\epsilon}$ ונקבל כי $\forall n, m \geq N$,

$$|a_n - a_m| \overset{\triangle}{\leq} \left|\sum_{F_{\frac{1}{n}}} x - \sum_{F_{\frac{1}{n}} \cap F_{\frac{1}{m}}} x\right| + \left|\sum_{F_{\frac{1}{m}}} x - \sum_{F_{\frac{1}{n}} \cap F_{\frac{1}{m}}} x\right| = \left|\sum_{F_{\frac{1}{n}} \setminus F_{\frac{1}{m}}} x\right| + \left|\sum_{F_{\frac{1}{m}} \setminus F_{\frac{1}{n}}} x\right| \overset{(*)}{<} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$(*)$ $F_{\frac{1}{n}} \setminus F_{\frac{1}{m}} \cap F_{\frac{1}{m}} = \varnothing = F_{\frac{1}{m}} \setminus F_{\frac{1}{n}} \cap F_{\frac{1}{n}}$ ולכן התנאי מסוג קושי מתקיים עליהן.

לכן a_n סדרת קושי ולכן היא מתכנסת. נסמן $S = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$. נוכיח כי S הוא הסכום של x. יהי $\epsilon > 0$. מהתכנסות a_n, קיים N כך ש- $\left|\sum\limits_{F_{\frac{1}{N}}} x - S\right| = |a_N - S| < \frac{\epsilon}{2}$. נבחר $F_\epsilon = F_{\frac{1}{N}}$ ותהי $F_\epsilon \subseteq F \in \mathcal{F}_I$. נזכור כי $F = F_\epsilon \cup (F \setminus F_\epsilon)$ (איחוד זר). נסמן $A = F \setminus F_\epsilon$, לכן

$$\left|\sum_F x - S\right| = \left|\sum_{F_\epsilon \cup A} x - S\right| = \left|\sum_{F_\epsilon} x + \sum_A x - S\right| \overset{\triangle}{\leq} \left|\sum_A x\right| + \left|\sum_{F_\epsilon} x - S\right| \overset{(**),(\star)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$(**)$ A זרה ל- $F_\epsilon = F_{\frac{1}{N}}$.

$(\star)$ גם $\sum\limits_{F_\epsilon} x = a_N$. ■

תרגיל הוכיחו כי קבוצת הפ' האנליטיות בקטע הפתוח D מוכלת ממש בקבוצת הפ' הגזירות אינסוף פעמים ב-D.

הוכחה: תהי f אנליטית ב-D ותהי $a \in D$. נכתוב $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$. נשים לב כי הטור גזיר אינסוף פעמים ב-(a) (ומתקיים $f^{(n)}(a) = a_n \cdot n!$).

מצד שני, נביט בפ' $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. היא גזירה באינסוף אבל לא ניתן לפיתוח לטור חזקות סביב אפס (כי כל נגזרותיה שם הן אפס אבל הערך באפס הוא לא אפס), כלומר ההכלה היא ממש. ■

הרצאה 41

משפט תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי $\forall \epsilon > 0$ קיימת $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ לינארית למקוטעין ורציפה כך ש- $|f(t) - g(t)| < \epsilon$, $\forall t \in [a,b]$.

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. מהיות f רציפה ב-$[a,b]$ אזי מקנטור היא גם רבמ"ש שם. מהיות f רבמ"ש ב-$[a,b]$, נבחר $\delta > 0$ כך ש- $\forall s,t \in [a,b]$ כך ש- $|s-t| < \delta$ מתקיים $|f(s) - f(t)| < \epsilon$. תהי $\mathcal{P} : (x_0, \ldots, x_n)$ חלוקה של $[a,b]$ כך ש- $\Delta(\mathcal{P}) < \delta$ (פרמטר החלוקה). תהי $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g(t) := f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(t - x_{i-1})$, עבור $t \in [x_{i-1}, x_i]$. נוכיח כי $|f(t) - g(t)| < \epsilon$ ב-$[a,b]$. תהי $t \in [x_{i-1}, x_i]$. אזי מתקיים $f(x_{i-1}) \le g(t) \le f(x_i)$ ולכן ממשפט ערך הביניים עבור f ב-$[x_{i-1}, x_i]$ קיים $x_{i-1} \le s \le x_i$ כך ש- $g(t) = f(s)$. לכן $|f(t) - g(t)| = |f(t) - f(s)| < \epsilon$ שכן $x_{i-1} \le t, s \le x_i$ ולכן $|t-s| \le x_i - x_{i-1} < \delta$. ■

תרגיל (לסטודנטית המשקיעה) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי $\forall \epsilon > 0$ קיימת $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ פ' מדרגות כך ש- $|f(t) - \varphi(t)| < \epsilon$, $\forall t \in [a,b]$.

משפט $\forall c \in \mathbb{R}$, קיימת (p_n) סדרה של פולינומים המתכנסת במ"ש ל-$|x-c|$ בכל תת קטע סגור וחסום של $\mathbb{R}$.

הוכחה: תהי (Q_n) סדרה של פולינומים כך ש- $||Q_n(t) - |t|| < \frac{1}{n^2}$ ב-$[-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (קיימת מ-WAT, שכן $|t|$ רציפה). נגדיר $p_n(t) := nQ_n\left(\frac{t-c}{n}\right)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. לכן

$$|p_n(t) - |t-c|| = \left|nQ_n\left(\frac{t-c}{n}\right) - n\left|\frac{t-c}{n}\right|\right| < \frac{1}{n^2}n = \frac{1}{n}$$

לכל $-1 \le \frac{|t-c|}{n} \le 1$, כלומר עבור $-n \le |t-c| \le n$. יהי $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. נבחר $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $[a,b] \subseteq [-N,N]$. לכן נוכל להפיק' את אותה סדרה ולהתבונן בתת-סדרה החל מאינדקס ה-N-י. ■

משפט על קבוצת כל הפ' $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ עם התכונה כי $\forall \epsilon > 0$ קיימת $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ פולינומיאלית כך ש- $\forall t \in [a,b]$ מתקיים $|f(t) - p(t)| < \epsilon$ מוגדר מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, כלומר קבוצה סגורה תחת סכום וכפל בסקלר.

הוכחה: תהיינה $f_1,f_2\in\mathcal{C}\left([a,b]\right)$ עם התכונה הנ"ל וגם $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. נניח כי $\alpha,\beta\neq0$ (אחרת אם שניהם 0 אז זה טריוויאלי, ואם אחד מהם 0 אז נתעלם ממנו ונביט רק במקדם ששונה מאפס). יהי $\epsilon>0$. אזי קיימות p_1,p_2 פ' פולינומיאליות כך ש- $\left|f_1\left(t\right)-p_1\left(t\right)\right|<\frac{\epsilon}{2\alpha}$ וגם $\left|f_2\left(t\right)-p_2\left(t\right)\right|<\frac{\epsilon}{2\beta}$ ולכן

$$\begin{aligned}\left|\left(\alpha f_1+\beta f_2\right)\left(t\right)-\left(\alpha p_1+\beta p_2\right)\left(t\right)\right| &= \left|\alpha f_1\left(t\right)-\alpha p_1\left(t\right)+\beta f_2\left(t\right)-\beta p_2\left(t\right)\right| \\ &\overset{\triangle}{\leq} \alpha\left|f_1\left(t\right)-p_1\left(t\right)\right|+\beta\left|f_2\left(t\right)-p_2\left(t\right)\right|<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

וגם ברור כי 0 מקיימת את התכונה, ולכן קבוצה זו היא ת"מ של $\mathcal{C}\left([a,b]\right)$ ולכן היא מ"ו בפני עצמה. ■

משפט קבוצת הפ' $\left\{(t-c)^{+}:c\in[a,b]\right\}$ מהווה בסיס למרחב הפ' הרציפות לינאריות למקוטעין ב-$[a,b]$.

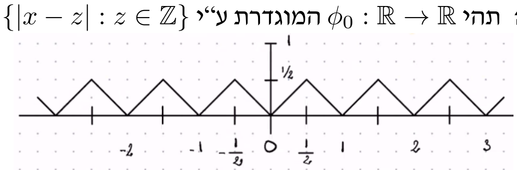
הוכחה: תהי g לינארית למקוטעין ורציפה ב-$[a,b]$. אזי $\mathcal{P}\ :\ \left(c_0,\ldots,c_n\right)$ חלוקה של $[a,b]$ ו-$\left(m_1,\ldots,m_n\right)$, $\left(d_1,\ldots d_n\right)$ סדרות של סקלרים כך ש-$g\left(t\right)=d_{i-1}+m_i\left(t-x_{i-1}\right)$, $\forall t\in\left[c_{i-1},c_i\right]$. הסטודנטית המשיקעה תוכיח כי מתקיים

$$g\left(t\right)=g\left(a\right)+\sum_{i=1}^{n}m_i\left(t-c_{i-1}\right)^{+}$$

■

הרצאה 42 (ואחרונה ☹)

הגדרה תהי $\phi_0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\phi_0\left(x\right):=\text{dist}\ \left(x,\mathbb{Z}\right)=\min\left\{|x-z|:z\in\mathbb{Z}\right\}$ (ראו איור).



הערה נשים לב כי נוכל להגדיר את הפ' בנוסף ע"י הגדרתה ב-$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ להיות $|x|$ ואז כל קטע אחר נוכל להגדיר את הפ' באופן מחזורי.

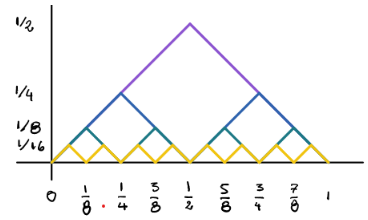
תכונות

ϕ_0 היא

1. רציפה בכל נקודה;
2. מחזורית, כלומר $\phi_0\left(x+1\right)=\phi\left(x\right)$;
3. חסומה, כלומר $0\leq\phi_0\leq\frac{1}{2}$;
4. סימטרית, ביחס לנקודות מהצורה $x=\frac{k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$;

5. גזירה בכל נקודה למעט נקודות הסימטריה שהוזכרו לעיל;

הגדרה נגדיר את סדרת הפ' (ϕ_n) ע"י $\phi_n(x) := \frac{1}{2^n}\phi_0(2^n x)$ (ראו איור).



הערה כל ϕ_n שומרת על כל התכונות של ϕ_0 (עד כדי החסמים עצמם, גודל המחזור, הנקודות סביבן מתקיימת הסימטריה, ולכן גם נקודות האי-גזירות).

הגדרה תהי $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (פ' טאקאגי) המוגדרת ע"י $T(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}\phi_0(2^n x)$.

הערה T מוגדרת היטב שכן $|\phi_n(x)| \le \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2}$ ולכן ממבחן M של ויירשטראס הטור מתכנס במ"ש ובהחלט ב-$\mathbb{R}$ לפ' רציפה f (כי כל $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N}\phi_n$ היא פ' רציפה ב-$\mathbb{R}$).

הערה אם $f: I\to\mathbb{R}$ גזירה ב-I אזי לכל $x\in I$ ב-$(u_n),(v_n)$ המקיימות $u_n \le x \le v_n$ וגם $0 < v_n - u_n \longrightarrow 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(v_n)-f(u_n)}{v_n-u_n} = f'(x)$ (נובע מהיינה, אבל זה לא תנאי שקול).

משפט (הצגה בינארית של מספרים ממשיים, הוכחה באחרית הימים) $\forall x\in\mathbb{R}$, קיימת סדרה $(a_0,a_1\dots)$ כך ש-$a_0\in\mathbb{Z}$ וגם $\forall i\in\mathbb{N}$, $a_i\in\{0,1\}$ כך ש-$\forall n\in\mathbb{N}$, $a_0+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{2^n} \le x < a_0+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$.

הערה נסמן $a_0.a_1\dots a_n := a_0+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{2^n}$. נשים לב כי מתקיים $x = \sup\{a_0.a_1\dots a_n : n\in\mathbb{N}\}$.

משפט f לא גזירה ב-$\mathbb{R}$.

הוכחה: יהי $x\in\mathbb{R}$. מההצגה הבינארית של מספרים ממשיים, קיימות $(v_n),(u_n)$ המוגדרות ע"י $u_n = a_0+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{2^n}$, $v_n = a_0+\frac{a_1}{2}+\dots+\frac{a_n}{2^n}+\frac{1}{2^n}$ סדרות המקיימות $v_n-u_n = \frac{1}{2^n}$ וגם $u_n \le x < v_n$. לכן מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}v_n = x = \lim\limits_{n\to\infty}u_n$ (מלמת החתכים). $\forall i\ge n$ מתקיים $2^i u_n, 2^i v_n\in\mathbb{Z}$ ולכן $\phi_i(u_n) = 0 = \phi_i(v_n)$ ולכן $\frac{T(v_n)-T(u_n)}{v_n-u_n} = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\frac{\phi_i(v_n)-\phi_i(u_n)}{v_n-u_n}$ נשים לב כי עבור $i<n$, ϕ_i לינארית ב-$[u_n,v_n]$ עם שיפוע ±1 לסירוגין, כלומר $\frac{\phi_i(v_n)-\phi_i(u_n)}{v_n-u_n} = \pm1$ ולכן הטור $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{\phi_i(v_n)-\phi_i(u_n)}{v_n-u_n}$ אינו מתכנס, ומכאן שהגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T(v_n)-T(u_n)}{v_n-u_n}$ לא קיים. ■

סוף.

דבר המרצה

להלן דבריו של המרצה, מר איתמר צביק, אל הסטודנטים לקראת ההכנה למבחן (מובאים באישורו).

על מנת ללמוד מן הראוי לקרא כל טקסט לפחות שלוש פעמים. יש לפרש את טקסט הקורס במובן הרחב אשר כולל את ההרצאות, התירגולים, הסיכומים, רשימה ביבליוגרפית והתרגילים. בפועל הקריאה ראשונה מתבצעת במהלך הסמסטר. קריאה זו הינה המפגש הראשון עם החומר בקצב אשר מוכתב על ידי המסגרת המחייבת. בתום הסמסטר ישנה הזדמנות לחזור על החומרים לפי הקצב האישי של כל אחד ואחת. אני נוהג להמליץ, לכל מי שמתאים לו, לשכתב את התוכן ההרצאות במו ידיו ולתת לגוף לחוות ולהפנים את התכנים. זהו רגע של סינטזה כאשר ניתן להביט על הקורס כמכלול, רגע של תובנות והתבוננות מושכלת כאשר התורה מתגלה במלוא ההרמוניה וההיגיון הפנימי שלה. זה שלב של שיחה אינטימית, אנחנו מדברים עם עצמנו, מומנט של הקשבה מרוכזת. הקריאה השלישית כרוכה ביצירה בה כל אחד מנסח בשפתו הוא את אשר למד. זהו שלב שבו אנחנו משוחחים עם האחר ומנסים למצוא את הדרך להעביר לזולת את את ארגון החומרים לפי הסגנון והאסתטיקה האישיים.

המתמטיקה הינה דיסציפלינה עם מבנה פורמלי דדוקטיבי. בבואנו לבחינה אנו מתבקשים להראות בקיאות בחומר ומיומנות בטכניקות הנרכשות. מול הבודק עומד מסמך אשר התלמיד הגיש לשיפוט. בניסוח הטענות הפורמליות על התלמיד להתנסח בבהירות תוך ציטוט מלא ומפורש של כל הטענות והמשפטים שמשמשים כדי לנמק ולהצדיק את קביעותיו. על הנבחן מוטל האתגר לשכנע את הבודק שהוא אכן מבין את מה שהוא כותב. אנו פועלים במסגרת קהילה לומדת והמבחן הוא אחד מאותם הרגעים שהתלמיד מתבקש לנהל שיח של עמיתים עם מחנכיו.

ההכנה לבחינה הוא שלב של אימון אינטנסיבי. על מנת להיות בכושר יש מקום לעבודה שיטתית וחזרה על התרגילים ששימשו אותנו במהלך הסמסטר. ככלל אין בפורמט הבחינה דבר מה אשר מחייב הערכות מיוחדת. מי ש"מתכונן לבחינה" עלול למצא את עצמו מפספס את העיקר.

אם במהלך הסמסטר הדגש הוא על הקשבה ועבודה עצמית, שלב זה הוא הזדמנות לשיח עם ובין עמיתים. שוחחו ביניכם ואיתנו והרשו לנו לאחל לכלנו עבודה פוריה, הצלחה ובעיקר הנאה.