# בדיקה הסתברותית של הוכחות | 67790

## הרצאות | פרופ׳ גיא קינדלר

כתיבה | נמרוד רק

תשפ״ג סמסטר ב׳

השבוע הראשון הושלם באדיבותו (הרבה) של דויד קיסר-שמידט וסיכומו.

## תוכן העניינים

# שבוע $\mathbb{I}$ | מבוא

**הגדרה** <u>מכונת טיורינג</u> היא אוטומט עם סרט זיכרון שהיא יכולה לנוע עליו. מ"ט $M$ מקבלת שפה $L\subseteq\Sigma^{*}$ אם היא מסיימת במצב מקבל על $x$ אם"ם $x\in L$.

**הגדרה** <u>מ"ט חישוב</u> זו מ"ט שיש לה מצב עוצר שכשהיא מגיעה אליו הערך שרשום על הסרט הוא הפלט שלה.

**הגדרה** $\mathsf{P}=\{L:$ קיימת מ"ט המכריעה את $L$ בזמן פולי' $\}$.

**הגדרה** נאמר כי $L\in\mathsf{NP}$ אם קיימת שפה $L^{\pi}$ כך ש:

1. $L^{\pi}\in\mathsf{P}$.
2. המילים ב-$L^{\pi}$ הן מהצורה $(x,w)$ כאשר $x\in L$ ו-$|w|\le\mathsf{poly}(x)$.
3. לכל $x\in L$ קיים $w$ כך ש-$(x,w)\in L^{\pi}$.

**הערה** בעיות הכרעה של שפה $L$ הן למעשה חלוקה של $\Sigma^{*}$ ל-$(\mathcal{Y},\mathcal{N})$.

**הגדרה** <u>בעיית הבטחה</u> (promise problem) היא חלוקה $L=(\mathcal{Y},\Sigma^{*}\backslash(\mathcal{Y}\cup\mathcal{N}),\mathcal{N})$ של $\Sigma^{*}$. מ"ט שמזהה את $L$ מקבלת ודוחה נכונה מילים ב-$\mathcal{Y},\mathcal{N}$ בהתאמה (מבטיחה את התשובה עליהם) ומילים ב-$\Sigma^{*}\backslash(\mathcal{Y}\cup\mathcal{N})$ יכולות להתקבל, להדחות או שהמ"ט לא תעצור (אין ערובה לתוצאת הריצה).

**הערה** בעיית הכרעה של שפה $L$ היא בעיית הבטחה מהצורה $(L,\varnothing,\Sigma^{*}\backslash L)$.

**הערה** רדוקציה חשיבה לבעיות הבטחה מוגדרת בדומה לרדוקציה בבעיות הכרעה.

**הגדרה** נאמר כי $L\in\mathsf{NPH}$ אם לכל $L'\in\mathsf{NP}$ קיימת רדוקציה פולי' מ-$L'$ ל-$L$ (כאשר $L$ בעיית הבטחה).

**הגדרה** נאמר כי $L\in\mathsf{NPC}$ אם $L\in\mathsf{NPH}$ וגם $L\in\mathsf{NP}$.

**הגדרה** בעיית $\mathsf{MAX-3SAT}$ מקבלת קלט חוקי $I\in\mathsf{3CNF}$ (נוסחה המורכבת מהסגרים) והמטרה היא לתת השמה שתספק כמה שיותר הסגרים.

עבור קלט חוקי $I$ נגדיר $\mathrm{opt}(I)$ (מסומן לעתים $\mathrm{val}(I)$) האחוז המקסימלי של הסגרים שניתן לספק ב-$I$.

**הערה** $\mathsf{3SAT}\in\mathsf{NP}$ היא שפת כל הקלטים החוקיים שהערך שלהם הוא $1$ (נוסחה הניתנת לסיפוק במלואה).

**הערה** $\mathsf{MAX-3SAT}$ אינה בעיית הכרעה או הבטחה ולכן לעת עתה ההוכחה (העד) אינה מוגדרת היטב.

**הערה** ל-$3$SAT יש כמה מאפיינים מיוחדים מבחינת בדיקת הוכחות. ראשית ניתן לבדוק הוכחה במקביל על כל ההסגרים אם נתון לנו כוח חישוב מקבילי מספיק. ניתן לנצל מנגנון זה לצורכי בדיקה הסת' של השמה: אם $I\in\mathsf{3SAT}$ אז בהגרלת הסגרת, ההסת' שיסופק היא $P(\mathcal{Y})=1$ אבל אם $I\notin\mathsf{3SAT}$ אז $P(\mathcal{Y})\le1-\frac{1}{m}$ (לפחות הסגר אחד לא מסופק). כלומר ניתן להגדיר מוודא הסת' לבעיה.

**הגדרה** מוודא הסת' לבעיית הבטחה הוא מ"ט שמקיים את התנאים הבאים:

- (לוקליות) המ"ט מבצעת מספר גישות קבוע לעד (3 ביטים בלבד מתוך העד).
- (רנדומיות) המ"ט מגרילה $\mathcal{O}\left(\log n\right)$ ביטים.
- (שלמות) המ"ט מקבלת קלט בשפה בהסת' 1 (המוודא מושלם).
- (תקפות, Soundness) קיים חסם מלעל להסת' לקבלת קלט שאינו בשפה (במקרה שלנו $1-\Theta\left(\frac{1}{n}\right)$).

**טענה** לכל $L \in \mathsf{NP}$ קיים מוודא הסת' עם פרמטרים כמו שכתבנו למעלה.

**הוכחה:** ממשפט קוק-לוין, יש רדוקציה מ-$L$ ל-3SAT ולכן מספיק לבדוק הסת' את הקלט המתקבל ל-3SAT. ■

**משפט** (PCP בניסוח 3SAT) לכל $L \in \mathsf{NP}$ קיים מוודא הסת' עם פרמטרים כנ"ל ו-$1 > \mathsf{const} > \mathsf{soundness}$ (ישנו חסם מלעל קבוע קטן ממש מאחד לתקפות).

**הערה** כדי לקיים את הדרישה על התקפות צריך שהרדוקציה מהשפה לנוסחה ב-3CNF תיתן נוסחה שהיא בהסת' נמוכה ספיקה.

**הגדרה** $\mathsf{gap}-\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}\left[c,s\right]$ היא בעיית ההבטחה עם

$$\mathcal{Y}=\left\{I:\ \text{קלט חוקי לבעיית 3SAT } I\ \wedge\ \mathrm{val}\left(I\right)\geq c\right\}$$

$$\mathcal{N}=\left\{I:\ \text{קלט חוקי לבעיית 3SAT } I\ \wedge\ \mathrm{val}\left(I\right)\leq s\right\}$$

**הערה** אינטואטיבית, $c$ הוא המשלים (אחד פחות-) אחוז ה-false negative שאנחנו מוכנים לסבול ו-$s$ הוא אחוז ה-false postiive שאנחנו מוכנים לסבול.

**משפט** (ניסוח מחדש של PCP עם $\mathsf{gap}-\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}$) קיים $s<1$ כך ש-$\mathsf{gap}-\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}\left[1,s\right]\in\mathsf{NPH}$.

**הערה** הניסוח החדש מספיק כי ל-$\mathsf{gap}-\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}\left[1,s\right]$ יש מוודא הסת' שעונה על הקריטריונים האמורים לעיל ולכן עם רדוקציה מכל $L \in \mathsf{NP}$ נקבל את משפט ה-PCP המקורי.

המוודא מקבל $I=c_1\wedge\ldots\wedge c_m$ נוסחה חוקית ו-$f$ השמה (העד), מגריל $i\in\left[m\right]$ ובודק האם $c_i$ מסופקת ע"י $f$ (צריך לבדוק את שלושת הביטים ב-$f$ המתאימים לליטרלים ב-$c_i$). אם הפסוקית מסופקת יענה $\mathcal{Y}$ ואחרת $\mathcal{N}$.

- אם $I\in\mathcal{Y}$ אז יש השמה מספקת ולכן המוודא יענה $\mathcal{Y}$ על איזשהו עד (לכן תמיד נסווג נכון $I\in\mathcal{Y}$).
- אם $I\in\mathcal{N}$ אז $s\cdot m$ פסוקיות לכל היותר מסופקות ע"י כל השמה ולכן ההסת' שניפול על אחת מסופקת (שתגרום לנו לחשוב ש-$I$ כן ספיקה) היא $s$, כלומר $s$ הוא קבוע התקפות במקרה הזה.

**הגדרה** אלג' $\alpha$-מקרב ל-$\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}$ (עבור $\alpha\in\left[0,1\right]$) הוא אלג' שמקבל כקלט נוסחת 3CNF חוקית $I$ ומחזיר מספר $b$ שמקיים $\alpha\,\mathrm{val}\left(I\right)\leq b\leq\mathrm{val}\left(I\right)$.

**מסקנה** (ממשפט ה-PCP) אם $\mathsf{P}\neq\mathsf{NP}$ אז לא קיים אלג' $\alpha$-מקרב פולינומי ל-$\mathsf{MAX}-\mathsf{3SAT}$ עבור $\alpha>s$ (כאשר $s$ הקבוע ממשפט ה-PCP).

**הוכחה:** נניח בשלילה שקיים אלג' כזה. תהי $L\in$ NP, לכן קיימת רדוקציה $f$ מ-$L$ ל-$[1,s]$ gap − MAX − 3SAT. יהי $w$ קלט לבעיית ההכרעה $L$. נריץ את אלג' הקירוב על $f\left(w\right)$ ונקבל

$$\alpha\ \mathrm{val}\left(f\left(w\right)\right)\leq b\leq\mathrm{val}\left(f\left(w\right)\right)$$

- אם $w\in L$ אז $b\geq\alpha\underbrace{\mathrm{val}\left(f\left(w\right)\right)}_{\geq1}\geq\alpha>s$.
- אם $w\notin L$ אז $b\leq\mathrm{val}\left(f\left(w\right)\right)\leq s$.

כלומר השוואה של $b$ ל-$s$ תכריע האם $w\in L$ ולכן מ"ט דטר' פולי' בזמן יכולה להכריע את $L$ כלומר $L\in$ P, ולכן P $=$ NP סתירה. ■

**מסקנה** אם $[c,s]\in$ NPH gap − MAX − 3SAT וגם P $\neq$ NP אז אין אלג' קירוב עם פרמטר גדול מ-$\frac{s}{c}$.

**הוכחה:** כנ"ל. ■

## דוגמאות לאלג' קירוב לבעיות קשות ב-NP

- ראינו באלגו' אלג' $\frac{7}{8}$-מקרב ל-3SAT (מגרילים הרבה השמות עד שאחת מספקת לפחות $\frac{7}{8}$ מהפסוקיות).
- בעיית MAX − Exact3 − LIN2 היא בעיית האופטימיזציה מעל מערכת $n$ משוואות, בכל אחת שלושה משתנים (שניתן לשים בהם $0,1$) שערכה הוא המספר המקס' של משוואות שניתן לספק במערכת.

  אלג' $\frac{1}{2}$-מקרב לבעיה (שראינו באלגו') בודק לכל משתנה איזו השמה עדיפה (לפי תוחלת סיפוק המשוואה) ובוחר באופן חמדני את ההשמה העדיפה.

  ידוע כי $\left[1-\epsilon,\frac{1}{2}+\epsilon\right]$ gap − MAX − E3 − LIN2 היא בעיה קשה ב-NP לכל $\epsilon>0$ (כלומר אינטואיטיבית ממש קשה להבדיל בין מערכות משוואות שניתן לספק כמעט את כל המשוואות בהן לבין מערכות שניתן לספק קצת יותר מחצי ממשוואותיהן).
- בעיית MAX − IS לכל גרף מחזירה את גודל קבוצת הקודקודים הבת"ל (אף שני קודקודים בקבוצה אינם מחוברים בצלע) המקסימלית.

  ידוע כי $\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\epsilon,\epsilon\right]$ gap − MAX − IS קשה ב-NP לכל $\epsilon>0$ (ראו הסבר אינטואיטיבי לעיל).

## קווים לדמותו של PCP - משחק עם שני שחקנים חזקים ומוודא חלש

נתונים שני שחקנים (חזקים חישובית) שמשחקים משחק: בהינתן נוסחה, הם מתאמים עמדות (בוחרים השמה) ואז מופרדים.

שחקן אחד מקבל פסוקית ושחקן נוסף משתנה בפסוקית. הראשון מחזיר השמה למשתנים בפסוקית והאחרון השמה למשתנה.

הם מנצחים אם ההשמה של הראשון מספקת את הפסוקית ואם שני השחקנים מסכימים על הערך המושם במשתנה שניתן לאחרון מתוך הפסוקית.

**הערה** הרעיון מאחורי המשחק הזה הוא שקילות ה-PCP למצב בו שני שחקנים חזקים חישובית מנסים להראות הסת' למוודא חלש מאוד שניתן לספק את נוסחה מסוימת.

**טענה** בהינתן $\text{val}(I) \leq \alpha$ (שיעור הפסוקיות שניתנות לסיפוק בו זמנית המקסימלי), ההסת' שינצחו היא $P(\text{success}) \leq 1 - \frac{1-\alpha}{3}$.

**הוכחה:** נניח שהשחקנים משחקים באסטרטגיה עם שיעור הצלחה $\beta$. לכן

$$\begin{aligned}
E_{c\in I}\left[\mathbb{1}_{\{\text{מפסידים על } c\}}\right] &\overset{(*)}{\leq} E_{c\in I}\left[\mathbb{1}_{s_1(c)\neq s_2(c)}\right] \\
&\overset{(**)}{\leq} 3\cdot E_{c\in I}\left[\frac{\sum_{i=1}^{3}\mathbb{1}_{s_1(c_i)\neq s_2(c_i)}}{3}\right] \\
&\overset{(***)}{=} 3\cdot(1-\beta)
\end{aligned}$$

$(*)$ מונוטוניות ההסת' : השחקנים אידאליים ולכן אם הפסוקית ניתנת להשמה תחת ההשמה (אסטרטגיה) שהוסכמה בהתחלה, שניהם ייתנו אותה. אם היא לא מסופקת תחת ההשמה שחקן 1 ידע את זה וישנה את ההשמה (שתספק ובתקווה תהיה זהה להשמת שחקן 2 למשתנה). לכן אם הם מפסידים הם בהכרח לא מסכימים על ההשמה לפסוקית (של שחקן 1 זו החדשה שהמציא עכשיו ממנה הוא חושף 3 ערכים למוודא ושל 2 היא המוסכמת במקור ממנה הוא חושף ערך אחד למוודא). $s_1(c), s_2(c)$ הן וקטורים ב-$\{0,1\}^3$.

$(**)$ הכפלה וחלוקה ב-3 וגם חסם האיחוד על אי ההסכמה על ההסגר (לפחות אחד מהליטרלים לא מוסכם).

$(***)$ הצלחה היא לשכנע את המוודא שניתן לספק את הפסוקית (במרמה או לאו), ואי הסכמה יש רק כשההשמה המקורית לא מספקת את הפסוקית (כלומר הנוסחה לא ספיקה). לכן ההסת' לכישלון $1-\beta$ היא ההסת' לאי הסכמה בין השחקנים, שזה בדיוק תוחלת ממוצע אי ההסכמה במשוואה למעלה.

ולכן

$$P(\text{success}) = \beta \leq 1 - \frac{E_{c\in I}\left[\mathbb{1}_{\{\text{לא מסופק } c\}}\right]}{3} \leq 1 - \frac{1-\alpha}{3}$$

■

**הגדרה** משחק בין שני שחקנים עם סיבוב אחד (2 Player 1 Round Game) הוא שלשה $G = \langle V, P_1, P_2\rangle$ כאשר:

- $P_1 = \langle Q_1, \Sigma_1\rangle, P_2 = \langle Q_2, \Sigma_2\rangle$ הם השחקנים כאשר $Q_1, Q_2$ אוסף שאלות ו-$\Sigma_1, \Sigma_2$ אוסף תשובות.
- $V = \langle D, P\rangle$ הוא מוודא כאשר $D$ התפלגות מעל $Q_1 \times Q_2$ (לא בהכרח ב"ת) ו-$P$ "פרדיקט" שהוא פ' $Q_1\times Q_2\times\Sigma_1\times\Sigma_2 \mapsto \{0,1\}$.

ערך ההצלחה של המשחק הוא $\text{val}(G) = \sup_{\text{strategies}} P(\text{success})$.

**טענה** נניח שאנחנו משחקים את המשחק למעלה עם שני השחקנים והנוסחה $I$ שעבורה מתקיים $\text{val}(I) = \alpha$. אז ניתן לחשב את $\text{val}(G)$ בזמן סופי.

**הוכחה:** תוחלת ההצלחה במשחק היא $\alpha$ (ההסת' שניפול על פסוקית שסופקה ע"י ההשמה המקסימלית שלנו) כלומר

$$\alpha = E\left[\mathbb{1}_{\text{success}}\right] = E_{r_1,r_2}\left[E_{\textsf{strategies}}\left[\mathbb{1}_{\text{success}}\right]\right]$$

כאשר $r_1, r_2$ סרטי ביטים אקראיים (ככה ממודלת גישה לערכים אקראיים), והאסטרטגיות בתוחלת הפנימית למעשה עוברות דטרמיניזציה כי בהינתן סרט עם הערכים האקראיים שלו, האסטרטגיה נהפכת לדטר'. מתכונות התוחלת, יש לפחות אסטרטגיה אחת (א"ד שנהיית דטר' תחת סרט מקרי כלשהו) עם לפחות ערך $\alpha$, שזה הכי הרבה שאנחנו יכולים להשיג. לכן מספיק שנעבור על כל האסטרטגיות הדטר' ונקבל $\text{val}\left(G\right) = \max_{\text{det}' \text{ strategies}} P\left(\text{success}\right)$ כלומר שהאסטרטגיה שמשיגה sup היא מתוך קבוצה סופית. ■

# שבוע $\mathbb{III}$ | קודים לתיקון שגיאות

כל טענה מתמטית ניתן לקודד באופן שמחשב יוכל להבין אותו (מעל א"ב כלשהו), ולכן בהינתן טענה $S$, נוכל לכתוב הוכחה $\pi$ שגם אותה נוכל לקודד. מעבר לכך ישנו אלג' שרץ בזמן פולי' (באורך הטענה וההוכחה) שמוודא את ההוכחה. עם זאת מציאת הוכחה לטענה נתונה היא לא כריעה.

**טענה** בהינתן טענה $S$ וסטרינג אונרי $1^n$, הבעיה האם יש תווים שמחליפים את $1^n$ כך שהם מהווים הוכחה חוקית ל-$S$, היא ב-NP (אפשר לוודא עד פולי'), ובפרט היא שלמה ב-NP.

**מסקנה** ממשפט ה-PCP, נוכל לבנות מוודא הסת' שדוגם מספר קבוע של ביטים מהוכחה לטענה מתמטית כלשהי (לא רק נוסחת 3SAT) וקובע האם היא תקינה או לא. כלומר הבדיקה הלוקאלית היא להוכחות כלליות ולא לבעיה ספציפית!

**הערה** קידוד הוא מחרוזת מוארכת מהמקורית שכולל יתירות כדי שיהיה אפשר לשחזר אותו לאחר שהושחת. קודים הם אוסף הקידודים של המילים (לאחר שקודדו), שמהם אפשר לבחור אחד שיעזור לשחזר תוכן מקורי וכו'.

**הגדרה** יהי $\Sigma$ אלפבית. קוד מעל $\Sigma$ הוא $C \subseteq \Sigma^n$ ויש לו ארבעה פרמטרים $(n, d, R, q)$:

- $n$ - אורך המילים המקודדות (block length).
- $d$ - המרחק של הקוד, שערכו $\min_{u \neq w \in C} \left\{h\left(u, w\right)\right\}$ כאשר $h\left(u, w\right) = P_{i \in [n]}\left(u_i \neq w_i\right)$ (שיעור הקוורדינטות עליהן הוקטורים מסכימים).
- $R$ - הקצב (rate) שערכו $\frac{\log|C|}{\log|\Sigma^n|}$.
- $q$ - גודל הא"ב, $q = |\Sigma|$.

**הערה** אם $u$ ו-$w$ בקוד מאוד רחוקות אחת מהשנייה לפי מרחק האמינג. אם נשדר את $u$ וחלק מהמידע מושחת כך שהתקבל $u'$, נוכל לשחזר אותה ל-$u$ כי כל מילה אחרת בקוד יותר רחוק מ-$u'$ מאשר $u$. למעשה כל מרחק פחות מ-$\frac{d}{2}$ ניתן לשחזר נכונה.

**הערה** הערך העליון בקצב, אם נסתכל בבסיס $|\Sigma|$ נותן לנו את מספר האותיות ב-$\Sigma$ שנדרשות כדי לייצג את כל המילים ב-$C$ (אם $\log_{|\Sigma|} |C| = 17$ אז נוכל לקודד את כל המילים באורך 17). לכן היחס למעשה מגדיר את היעילות של הקוד - כמה גדול הניפוח ממספר הביטים של האותיות שאנחנו רוצים לייצג ($\log_{|\Sigma|} |C|$) לאורך הקוד שלנו בסוף ($\log_{|\Sigma|} |\Sigma|^n = n$). לכן, $R$ גבוה הוא תכונה רצויה.

**הגדרה** בהינתן קוד $C$, $B_w^n(\alpha) = \{u \in \Sigma^n : h(u,w) \le \alpha\}$ הוא אוסף המילים במרחק (האמינג) לכל היותר $\alpha$.

**הגדרה** עבור $\Sigma = \mathbb{F}_q$ (שדה מודולו מעל $q$ ראשוני), $C \subseteq \Sigma^n = \mathbb{F}_q^n$ הוא קוד לינארי אם $C$ הוא מרחב וקטורי (ת"מ של $\Sigma^n$).

**הערה** במקרה כזה,

$$d(C) = \min_{u \neq w \in C} \{h(u,w)\} \stackrel{(*)}{=} \min_{u \in C \setminus \{0\}} \{h(u,0)\} \stackrel{(**)}{=} \min_{u \in C \setminus 0} |u|$$

$(*)$ $h(u,w) = h(u-w,0)$. $(**)$ כך נגדיר ערך מוחלט.

בנוסף, $R = \frac{\dim C}{n}$ כי כל איבר של $C$ ניתן לייצג ע"י $\dim C$ מספרים (שהם הקוורדינטות של וקטורי בסיס של $C$).

**הגדרה** בהינתן בסיס $\{M_1, \ldots, M_{Rn}\}$ (של וקטורים עומדים) לקוד $C$, $M = (M_1 \ \ldots \ M_{Rn})$ נקראת המטריצה היוצרת של $C$.

**הערה** באמצעות המטריצה היוצרת ניתן לקודד בקלות וביעילות ע"י $Mx$ מפני שתמונת $M$ היא $C$.

**טענה** $1 \ge R + \frac{d}{2} + o_{|\Sigma|}(1)$.

**הוכחה:**

$$|\Sigma|^n \stackrel{(i)}{\ge} |C| \cdot \left| B_0\left(\frac{d}{2}\right) \right| \stackrel{(ii)}{\ge} |C| \binom{n}{\frac{1}{2}dn - 1} |\Sigma|^{\frac{dn}{2}} \stackrel{(iii)}{\ge} |\Sigma|^{Rn + \frac{dn}{2}} 2^{\mathcal{O}(n)} \stackrel{|\Sigma| \to \infty}{=} |\Sigma|^{Rn + \frac{dn}{2} + o(n)}$$

$(i)$ כל מילה ב-$w$ נמצאת בכדור ברדיוס $\frac{d}{2}$ שבו היא נמצאת ללא מילים אחרות בקוד. לכן נוכל למלא את $|\Sigma|^n$ בכדורים ברדיוס $\frac{d}{2}$ סביב כל המילים ב-$C$ ועדיין לא למלא את כל $\Sigma^n$ (או בדיוק כן למלא).

$(ii)$ המילים ב-$B_0\left(\frac{d}{2}\right)$ הם המילים על לכל היותר $\frac{d}{2}$ אותיות שאינם 0. לכן קומבינטורית, נבחר את $\frac{1}{2}dn$ האותיות שנשנה (אחד פחות כדי למנוע התנגשויות), ונקבע בהם את הערכים החדשים (בפרט יכולים להיות גם 0).

$(iii)$ $\log|C| = Rn$ וחסם עליון ל-choose מהצורה $\binom{n}{\frac{1}{2}dn}$ הוא $2^{\mathcal{O}(n)}$.

ומשם ניקח $\log_{|\Sigma|}$ על שני האגפים, נחלק ב-$n$ ונקבל את הנדרש. ■

## קודי Reed-Solomon

בהינתן שתי פרבולות, אנחנו יודעים שהן נפגשות לכל היותר בשתי נקודות, ולכן מבחינת הערכים שלהן הן די שונות. באותו האופן פולינומים ממעלה נמוכה גם כן כשאינם זהים אינם חולקים ערכים רבים.

**הגדרה** נקבע את דרגת הפולינומים מעל $\mathbb{F}_q$ ($q$ ראשוני כי זה שדה) איתם נעבוד להיות $d \le n \le q$ ונבחר $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}_q$. הקוד של ריד-סולומן הוא

$$RS_{d,a_1,\ldots,a_n,q} = \{f(a_1), \ldots, f(a_n) \mid \deg f \le d \text{ פולינום עם } f : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q\}$$

**הערה** זהו קוד לינארי מסגירות הפולינומים מדרגה לכל היותר $d$ לחיבור.

נחשב את הפרמטרים של הקוד.

- אורך הקוד הוא $n$.
- מרחק הקוד הוא $1-\frac{d}{n}$ כי שני פולינומים שונים הם לכל היותר שווים ב-$d$ נקודות.
- קצב הקוד הוא $\frac{d+1}{n}$ כי $\dim C = d+1$ וזהו קוד לינארי.
- גודל הא"ב הוא $q=|\Sigma_q|$.

אם נבחר $d \leq \frac{n}{2}$ נקבל קצב ומרחק $\frac{1}{2}$ שזה מה שרצינו, וגודל א"ב בין $n$ ל-$2n$ (שם בהכרח יש ראשוני).

כרגע יש לנו $n^n$ מילים ב-$|\Sigma|^n$. נרצה משהו עם משמעותית פחות אותיות. אם נבחר קוד עם $n$ מילים, נוכל לבחור כל מילה לייצג אות אחרת ב-$\Sigma$ וכך לייצג קודים ב-$C$ באמצעות מילים מהקוד הקטן יותר, ובתקווה עדיין לשמר את אותן התכונות.

## הרכבת קודים

**הגדרה** יהיו $C_1$ קוד $(n_1,d_1,r_1,q_1)$ מעל $\Sigma$ ו-$C_2$ קוד $(n_2,d_2,r_2,q_2)$ מעל $\Sigma'$ כאשר $q_1 \gg q_2$. נדרוש $|C_2| \geq q_1$ וקיום $E:\Sigma \overset{\text{חח"ע}}{\to} C_2$ (קידוד אותיות למילים בקוד $C_2$). נגדיר את ההרכבה של הקודים $C_1, C_2$ להיות

$$C_1 \circ C_2 = \left\{ \left( E\left(x_1\right) || \ldots || E\left(x_{n_1}\right) \right) : x_1 \ldots x_{n_1} \in C_1 \right\}$$

## פרמטרים של הרכבה

- אורך הקוד הוא $n_1 \cdot n_2$ (יש לנו $n_1$ מילים משורשות, כל אחת באורך $n_2$).
- מרחק הקוד הוא $d\left(C_1 \circ C_2\right) \geq d_1 \cdot d_2$ כי כשנדגום קוורדינטה מקרית נדגום קודם קוורדינטה מהמילים המקוריות ב-$C_1$ לפני שתורגמו, שם הסיכוי לשוויון הוא $d_1$, ואז לאחר שנתרגם הסיכוי לשוויון בקוורדינטה הוא $d_2$.
- קצב הקוד הוא $R_1 \cdot R_2$ (עד כדי קבוע קטן) מהחישוב

$$\begin{aligned} R\left(C_1 \circ C_2\right) &= \frac{\log |C_1|}{\log \left(q_2^{n_1 \cdot n_2}\right)} \\ &= \frac{\log |C_1|}{\log \left(q_1^{n1}\right)} \cdot \frac{\log \left(q_1^{\cancel{n_1}}\right)}{\log \left(q_2^{\cancel{n_1} \cdot n_2}\right)} \\ &= R_1 \cdot R_2 \end{aligned}$$

כאשר באופן אופטימלי $|C_2|$ קרוב כמה שיותר (מלמעלה) ל-$q_1$.

**הערה** הרכבת קידודים לינאריים עם $E$ לינארית היא קוד לינארי.

## השגת קוד עם פרמטרים קבועים וא"ב בגודל 2

**משפט** קיים קוד מעל הא"ב $\{0,1\}$ עם מרחק וקצב קבוע ואורך מילה $\log\log\log n$.

**הוכחה:** נבחר $C_1$ קוד עם פרמטרים $\left(n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n\right)$ (ריד-סולומון עם $d = \frac{n}{2}, q = n$). יש ב-$C_1$ $n^{\frac{n}{2}}$ איברים, כי כל $\frac{n}{2}$-יה של ערכים ב-$\mathbb{F}_q$ ניתנת להשגה ע"י פולינום ממשפט האינטרפולציה, נניח כי $q = n$.

נבחר $C_2$ עם פרמטרים $\left(\log n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \log n\right)$ (ריד סולומון עם $q = k$ ו-$d = \frac{k}{2}$ עבור $k = \log n$) לכן יש בו $k^{\frac{k}{2}} = |C_2| \geq n$.

עתה $C = C_1 \circ C_2$ הוא קוד עם פרמטרים $\left(n\log n, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \log n\right)$.

נוכל להפעיל זאת שוב עם $C_3$ שלו פרמטרים $\left(\log\log n, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \log\log n\right)$ ונקבל $C \circ C_3$ עם פרמטרים $\left(n\log n\log\log n, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \log\log n\right)$.

בטווח הארוך אמנם, אנחנו מאבדים ביצועים ולא מתקרבים ל-$q = 2$. נצטרך גישה אחרת.

אם קיים קוד $C_4$ עם פרמטרים $\left(\log\log\log n, \frac{1}{100}, \frac{1}{100}, 2\right)$ ואז נוכל להרכיב אותו עם $C \circ C_3$ ולקבל קוד עם קצב, מרחק וגודל א"ב קבוע, ומספר מילים בקוד קרוב מאוד ל-$n$, שזו המטרה הסופית שלנו.

בנוסף, מספר תתי הקבוצות של מילים באורך $\log\log\log n$ מתוך $\{0,1\}^*$ הוא $\log n = 2^{2^{\log\log\log n}}$ כלומר נוכל בזמן פולי' לעשות ברוט פורס על כל הקבוצות עד שנגיע לאחת שהיא קוד עם פרמטרים מספקים. כל שנותר הוא להוכיח שיש קוד כזה. ■

**טענה** לכל $n \in \mathbb{N}$ קיים קוד מעל $\{0,1\}^N$ עם פרמטרים $\left(N, \frac{1}{100}, c, 2\right)$ כאשר $c \in [0,1]$ קבוע.

**הוכחה:** נראה אלג' שמוצא קוד שמוכל ב-$\{0,1\}^N$. נבחר $w_1 \in \{0,1\}^N$ ונשלול את כל מה שבכדור ברדיוס $\frac{1}{100}$ שלה. נבחר מילה נוספת זמינה ונשלול את מה שברדיוס שלה, וחוזר חלילה. מובטח לנו המרחק של לפחות $\frac{1}{100}$ בין כל שתי מילים. האלג' יפסיק כשאין עוד מילים זמינות.

ברור שלקוד מרחק $\frac{1}{100}$ לפחות. נוכיח שיש לקוד קצב קבוע. נניח שמצאנו $k$ מילות קוד ואז נתקענו. מתקיים $2^N \leq k \cdot \left|B_0\left(\frac{1}{100}\right)\right|$ כי בכל פעם לכל היותר שללנו $\left|B_0\left(\frac{1}{100}\right)\right|$ מילים, ולכן

$$k \geq \frac{2^N}{\left|B_0\left(\frac{1}{100}\right)\right|} \geq \frac{2^N}{\binom{N}{\frac{N}{100}-1}} \overset{(*)}{\geq} 2^{c \cdot N}$$

$(*)$ מתקיים $\binom{N}{\alpha N} \approx 2^{N\left(\log_2\frac{1}{\alpha} + \log_2\frac{1}{1-\alpha}\right)}$.

לכן $c = \frac{\log k}{\log 2^N} = R$ כאשר $c$ קבוע. ■

# שבוע $\mathbb{III}$ | בודקים-מקומיים

**הערה** נשתמש בקודים כדי לעשות PCP בגרסתו הפשוטה יותר: בהינתן וקטור בגודל $n$ (שהוא אסימפטוטית גדול), נרצה להחליט האם הוא מילת קוד או לא באמצעות דגימת מספר קבוע של ביטים מתוכו.

**הערה** ב-PCP אנחנו עושים "בדיקה" לוקאלית של "נכונות הוכחה" כאשר הבדיקה במרכאות כי היא הסת' ונכונות ההוכחה במרכאות כי בודקים את נכונות הטענה: בהינתן טענה, אם היא ספיקה אז בסבירות גבוהה הביטים שנדגום יספקו הסגר (ב-3SAT), אבל זה לא אומר שההוכחה הספציפית הזו דווקא נכונה.

## בדקן-מקומי לקוד

לכאורה אפשר לדחות מילה $w \in \Sigma^n$ אם הרישא שלה (בגודל קבוע) לא נכללת מבין רישאות מילות הקוד. זה לא עובד כי מספיק שנחליף אות אחת מקוד חוקי מקרית ובהסת' גבוהה (אסימפטוטית) נחליף ביט שאנחנו לא בודקים ובגלל שהמרחק בין קודים גדול הרי שהשינוי לא יהיה ב-$C$ אבל כן נאשר אותו.

עם זאת השיטה שבה נשתמש שכן תעבוד תדחה בהסת' $\delta$ את $w \in \Sigma^n$ אם $\epsilon \leq \Delta(w, C)$ כאשר $\epsilon, \delta$ קבועים כלשהם, $\Delta$ פ' מרחק ו-$\Delta(w, C) = \min_{c \in C} \Delta(w, c)$. כאן בגלל שקודים אמורים להיות רחוקים אחד מהשני וממילים מקריות שלא בקוד, הרי שמילים לא בקוד נדחה בסבירות גבוהה.

**הגדרה** יהי $n \in \mathbb{N}$ ו- $C \subseteq \Sigma^n$ קוד. $T$ אלג' רנדומי הוא $(\epsilon, \delta, h)$ –local – tester ל-$C$ אם:

1. הוא מבצע $h$ גישות אורקל למילה נתונה $w$ (שאילתות מהצורה "תן לי את האות באינדקס $i$").
2. לכל $w \in C$ מתקיים $P(w \text{ מקבל את } T) = 1$ (שלמות היא 1 במונחי PCP).
3. לכל $w$ כך ש-$\Delta(w, C) \geq \epsilon$ מתקיים $P(w \text{ דוחה את } T) \geq \delta$ (התקפות היא לכל היותר $1 - \delta$).

**הערה** $T$ תלוי ב-$C$ ו-$C$ יכול להשתנות לפי $n$ (כי כל קוד הוא למעשה משפחת Expander-ים) אבל נתעלם מהפער הזה.

**הערה** עם $h = 1$ אין אלג' שנותנים שלמות, $h = 2$ יש אלג' עם כמעט שלמות 1 ו-$h = 3$ כבר יש שלמות 1.

## local – tester עבור קוד ריד-סולומון

יהי קוד $C = RS_{d,a_1,\ldots,a_n,q} \subseteq \mathbb{F}_q^n$ כאשר $d < n \leq q$.

**דוגמה** קודים עם $d = 2$ הם שערוך פרבולה ב-$n$-הנקודות. עם $q = 4$ אפשר לדגום שלושה ערכים, הם מגדירים לנו את פרבולה (שהיא הפולינום של מילת הקוד אם זו אכן מילת קוד) ואז נקודה רביעית, ונבדוק האם הפרבולה שחזינו זהה לערך במילה, ונקבל אם כן. זה יתקיים לכל מילת קוד (וגם למילים שהן לא מילות קוד שבמקרה הנקודות שדגמנו חוזות נכונה את הנקודה האחרונה).

במקרה הכללי עם $d + 2$ נקודות אפשר לבנות בדקן-מקומי כזה ע"י דגימת $d + 1$ נקודות שקובעות את הפולינום המשרה את המילה (לכאורה) ואז חיזוי האות ה-$d + 1$ עם הפולינום ובדיקת שוויון עם מה שיש במילה באמת (מקבלים אם כן, דוחים אחרת). נקרא למבחן זה מבחן האינטרפולציה.

**טענה** "מבחן האינטרפולציה" הוא בוחן לוקאלי עבור $C$ עם פרמטרים $(\epsilon,\delta,h)=(2\delta,\delta,d+2)$ כאשר $\delta<\frac{1}{4(d+1)^2}$.

**הערה** הקשר הפרופורציוני בין $\epsilon$ ל-$\delta$ הוא הגיוני כי ככל שהמילים המטעות שלנו יותר קרובות למילות קוד אמיתיות, הסיכוי שנדגום אותיות שחושפות את היות המילה לא בקוד יורד (כי רוב האותיות משותפות עם מילת קוד אמיתית).

**הוכחה:** ברור שאנחנו מבצעים רק $h=d+2$ בקשות וברור שאם $w\in C$ אז נקבל בהסת' 1.

1. אם הסיכוי לקבל את $w$ הוא 1 אז $w\in C$ (נכונות הפרמטרים עבור $\delta=0$).

נבחר $\{a_1,\ldots,a_n\}\supseteq b_1\neq\ldots\neq b_{d+1}$. יהי $g:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q$ הפולינום היחיד מדרגה $\leq d$ שמסכים עם $w$ על $b_1,\ldots,b_{d+1}$ (קל להוכיח יחידות). לכל $a\in\{a_1,\ldots,a_n\}$:

- אם $a\in\{b_1,\ldots,b_{d+1}\}$ אז $g$ מסכים עם $w$ על $a$ מהגדרתו.
- אם $a\notin\{b_1,\ldots,b_{d+1}\}$ אז $g$ מסכים עם $w$ על $a$ (כי מקבלים בהסת' 1).

ולכן $g$ הוא פולינום מדרגה $\leq d$ שמשרה את $w$ כלומר $w\in C$.

2. אם $\Delta(w,C)=\delta$ אז ההסת' לדחות את $w$ היא לפחות $0<$ (נכונות התכונה השלישית).

נניח שהבדיקה בוחרת $b_0\neq\ldots\neq b_{d+1}\in\{a_1,\ldots a_n\}$ ועושה אינטרפולציה לערך $b_0$ לפי שאר הערכים. תהי $w\in\Sigma^n$ כך ש-$\Delta(w,C)=\delta>0$. נביט במאורע

$$E=\{\exists w\in C:w(b_0)\neq w'(b_0)\wedge w(b_i=w'(b_i)\quad\forall i\in[d+1])\}$$

במקרה כזה המבחן ידחה.

$$P(E)\geq\delta(1-(d+1)\delta)$$

כי ראשית נדגום את $b_0$ שהוא בהסת' $\delta$ (בדיוק) נקודת שוני בין $w,w'$, ואז נטען שההסת' ש-$b_i$ אחד לפחות הוא נקודת שוני היא לכל היותר $\delta(d+1)$ (ואז נסתכל על המשלים). זה נכון מחסם האיחוד כי ההסת' לכל אחד מה-$b_i$ (בנפרד) להיות נקודת שוני היא $\delta$.

זה לא מסיים את ההוכחה כי אם המילים מאוד שונות אי אפשר לבצע את אותו הניתוח כי אי אפשר להניח שנוכל להשיג $\{b_i\}_{i=1}^{d+1}$ שכן יסכימו עם מילת קוד כלשהי.

■

**הגדרה** יהי קוד $C=RS_{d,0,\ldots,(n-1),q}$ כאשר $d<n=q$ כלומר $\{a_i\}=\mathbb{F}_q$. מבחן האינטרפולציה האריתמטי הוא המבחן הבא: נבחר $b_0\in\mathbb{F}_q$ מקרי ו-$r\in\mathbb{F}_q\setminus\{0\}$ ונעשה אינטרפולציה בנקודה $b_0$ בעזרת הנקודות $b_0+r,b_0+2r,\ldots,b_0+(d+1)r$ (ונקבל אם החיזוי נכון ואחרת לא).

**הערה** המשפט נכון עם מבחן האינטרפולציה האריתמטי ולא המבחן הרגיל, ואת ההוכחה לכך נראה לאחר שנוכיח נכונות של בדקן-מקומי לקודי הדמארד.

**הערה** המבחן הזה לא טוב כי כדי לקודד מילים באורך $k$ צריך קוד עם $d \approx k$, והקוד ריד-סולומון שראינו עם תכונות טובות היה לו $d = \frac{n}{2}$ או איזשהו אחוז קבוע מ-$n$ כלומר הלוקאליות שלנו היא לא משהו, כי אנחנו קוראים אחוז קבוע של המילה שהיא באורך $n$, שהוא אסימפטוטית גדול מאוד.

## קודי ריד-מולר והדמארד

**הגדרה** יהיו $m, d < q \in \mathbb{N}$ קוד ריד-מולר הוא

$$RM_{m,d,q} = \left\{ \left(f\left(v_1, \ldots, v_m\right)\right)_{\left(v_1, \ldots, v_m\right) \in \mathbb{F}_q^m} \mid d \geq \text{פולי' ממעלה טוטאלית } f : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q \right\} \subseteq \mathbb{F}_q^{q^m}$$

**הערה** מילת הקוד פשוט כוללת את כל הערכים של פולינום רב-משתנים כלשהו. נשערך לפי

$$f\left(x_1, \ldots, x_m\right) = \sum_{\vec{i} : i_1 + \ldots + i_m \leq d} c_{\vec{i}} x^{\vec{i}}$$

כאשר $x^{\vec{i}} = x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{i_m}$ ו-$d$ המעלה הטוטאלית של $f$.

הפרמטרים של הקוד הם $\left(n, d, R, q\right) = \left(q^m, 1 - \frac{d}{q}, \frac{\binom{d+m+1}{d}}{q^m}, q\right)$ כאשר המרחק נכון כי שני פולינומים שונים ב-$m$-משתנים ממעלה טוטאלית $d$ מסכימים על לכל היותר $d$ ערכים ממשפט שוורץ-זיפל והקוד לינארי ו-$\left\{x^{\vec{i}}\right\}_{\vec{i}}$ הוא בסיס למרחב המולטינומים ויש $\binom{d+m+1}{d}$ מונומים כי יש לנו $m - 1$ מחיצות (המפרידות בין חזקות $x_i$) שביניהן אנחנו מחלקים $d$ כדורים (כל כדור מייצג אינסטנס אחד של אחד המשתנים).

**הערה** אם נבחר $d = q$ אז נוכל לקודד מספר אקספ' של מילים ב-$d$ ולכן נקבל ביצועים טובים לבדקן-לוקאלי אבל הפרמטרים של הקוד יהיו לא טובים.

המבחן שלנו יהיה בחירת ישר אפיני מקרי מתוך הקוביה שהיא מילת הקוד (ממימד $m$), והרצת המבחן של ריד-סולומון כרגיל (נבחר $d+1$ נקודות ואז נחזה את הנקודה הבאה ונבדוק שוויון למילה הנבחנת). זאת משום שהישר נותן לנו $q$ נקודות מהצורה $\left\{v + tu : t \in \mathbb{F}_q\right\}$ כאשר $u, v \in \mathbb{F}_q^m$ והצבת $v + tu$ בפולינום רב-משתני נותן פולינום במשתנה אחד $t$, הלא הוא הפולינום המשרה את הישר האפיני אם הקוביה היא מילת קוד.

הוכחת הנכונות של המבחן מתבססת על נכונות המבחן לסולומון-ריד יחד עם התכונה הגאומטרית לפיה לשתי נקודות סיכוי שווה להיות על ישר אפיני מקרי מתוך קוביה $n$-ממדית.

**הגדרה** קוד הדמארד הוא קוד ריד-מולר עם $q = 2, d = 1$ ובלי המקדם החופשי, כלומר $H_m = \left\{f : f\left(x\right) = \sum_{i=1}^m a_i x_i,\ a_i \in \mathbb{F}_q\right\}$.

**הערה** עתה הקוד מכיל פ' ולא וקטורים כי זה שקול לחלוטין כי ב-$RM$ דוגמים את כל ערכי הפ' (כלומר הוקטור פשוט מייצג את הפ') ולכן נשתמש בשמות לחלופין מעתה.

**הערה** נבחר $m$ גדול כרצוננו כדי שבקוד יהיו הרבה אותיות ביחס למספר האותיות שנדגום במבחן וכך נקבל לוקאליות טובה. עם זאת נקבל קצב נורא, שהוא $\frac{m}{2^m}$ כי ייצוג של מילה דורש $2^m$ ביטים (ערך לכל קלט לפ'), גם אם כשהמילה היא מילת קוד היא אכן מושרת מוקטור עם $m$ ביטים ומספר מילות הקוד הוא $m$ (אחת לכל וקטור ב-$M_{1\times m}\left(\mathbb{F}_2\right)$).

הפרמטרים של קוד האדמארד הם $(n,d,R,q)=\left(2^m,\frac{1}{2},\frac{m}{2^m},2\right)$ כאשר הקצב נובע מהיות הקוד לינארי (הוא הרחבה של קוד ריד-מולר שהוא הרחבה של קוד ריד-סולומון שהוא לינארי).

# שבוע $\mathbb{IV}$ | הבודק הלינארי לקודי הדמארד וריד-סולומון

מעתה נתייחס לקודי ריד-סולומון עם כל המספרים ב-$\{a\}$ בלבד, כלומר $RS_{d,q}$ הוא למעשה $RS_{d,0,\ldots,q-1,q}$ כאשר $q$ תמיד ראשוני.

**הערה** בהסתכלות על מילות קוד כפ' מתקיים

$$RS_{d,q}=\{f:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q:\deg f\le d\}$$
$$RM_{m,d,q}=\left\{f:\mathbb{F}_q^m\to\mathbb{F}_q:\deg f\le d\right\}$$
$$H_m=\{f:\mathbb{F}_2^m\to\mathbb{F}_2:\exists M\in M_{1\times m}\left(\mathbb{F}_2\right),f\left(x\right)=Mx,\forall x\}$$

**הערה** לפ' אין דרגה, גם אם הן ניתנות לייצוג ע"י פולינום, ולכן $\deg f$ משמעו דרגת הפולינום מהדרגה הנמוכה ביותר שמייצג את הפ' (במקרה שלנו אין כמה פולינומים אבל עקרונית זו ההגדרה).

ככלל אמנם נדמה שהקצב לעתים הוא גרוע (אקספ' ב-$d$), אבל $d$ לא אמור לעניין אותנו יותר מדי. יותר מעניין להסתכל על הקצב כפ' של $n$, שמייצג את מספר המילים שאנחנו מקודדים.

**דוגמה** עבור קוד ריד-מולר עם $m=d,q=2d$, נקבל קצב שהוא בקירוב (5 סתם לשם הדגמה) $\frac{c^d}{(5c)^d}\approx\frac{\binom{2d}{d}}{q^d}$ כאשר למעשה הקודים שאנחנו מייצגים מושרים מפולינומים שדורשים $n=c^d$ לייצוג, ומפיתוח קצר מקבלים שזה פולינומי קטן ב-$n$.

לעומת זאת קוד הדמארד נותן קצב $\frac{m}{2^m}$ שהוא אקספוננציאלי קטן ב-$m$ שזה רע מאוד, כי קצב גבוה הוא טוב.

## בדקן-מקומי לקודי הדמארד

**הערה** אי אפשר להכליל את מה שאמרנו על ריד-מולר (שם בחרנו ישר דרך הקוביה והרצנו את הבדקן של ריד-סולומון על הישר) להדמארד כי כדי לעשות מבחן אינטרפולציה צריך לפחות 3 נקודות על אותו ישר, וב-$\mathbb{F}_2$ יש רק שני איברים ולכן אין שלושה איברים על אותו ישר.

נבדוק שהפ' מקיימת $f\left(x\right)=f\left(y\right)+f\left(x+y\right)$ (בגלל שאנחנו ב-$\mathbb{F}_q$ + ו-− מבצעים את אותה הפעולה). $f$ היא מילת קוד חוקית אם"ם המשוואה מתקיימת בהסת' 1 על פני $x,y\in_R\mathbb{F}_2^m$ (כאשר ההגרלה היא אחידה, כלומר מתקיים לכל $x,y$).

**הגדרה** $f$ נקראת random-self-reducable אם היא מקיימת שלכל $x$, בהסת' גבוהה מתקיים $f(x)=f(y)+f(x+y)$ כאשר $y$ מוגרל באקראי.

**הערה** התכונה שימושית כי אם נרצה לחשב את $f(x)$ כאשר ידועים לנו ערכים אחרים של הפ', נגריל $y$ אקראי ונחשב $f(x)=f(y)+f(x+y)$ כאשר אמנם $y,x+y$ תלויים אחד בשני מאוד, כל אחד מהם בנפרד מתפלג אחיד.

**הגדרה** הבודק הלינארי בוחר באקראיבאקראי $x,y\in\mathbb{F}_2^m$ ומחזיר

$$B(x,y)=B_f(x,y)=\mathbb{1}_{\{x,y:f(x)=f(y)+f(x+y)\}}(x,y)$$

**טענה** הבודק הלינארי הוא בודק-לוקאלי עם פרמטרים $(\epsilon,\delta,h)=(\epsilon,2\epsilon,3)$ עבור $H_n$ כאשר $\epsilon<\frac{1}{8}$.

**הערה** לצורך הוכחת המשפט נשתמש באינטואיציה הבאה: אם במקרה ידוע לנו ש-$f$ היא פ' $\epsilon$-קרובה לפ' $g$ לינארית, אז $f(x)=f(y)+f(x+y)$ בהסת' גבוהה כי $P(f(y)=g(y))\geq1-\epsilon$ וכך גם עבור $x+y$ ולכן $P(f(x)=g(x))\geq1-2\epsilon$ מחסם האיחוד.
אם לא ידוע לנו ש-$f$ קרובה לפ' לינארית, נצטרך לפעול בצורה אחרת.

**הוכחה:** ברור שהבודק מקבל מילים בקוד ושהוא דוגם רק שלושה ערכים. נוכיח את התכונה השלישית בקונטרה פוזיטיב, כלומר שאם מילה עוברת את המבחן בהסת' גבוהה, אז היא קרובה למילה בקוד. תהי $f:\mathbb{F}_2^m\to\mathbb{F}_2$ כך ש-$P_{x,y}(B_f(x,y))\geq1-\epsilon$. נרצה למצוא את $g:\mathbb{F}_2^m\to\mathbb{F}_2$ הלינארית הקרובה ל-$f$. נגדיר את $g$ לכל $x\in\mathbb{F}_2^m$ ע"י

$$g(x)=\underset{y\in\mathbb{F}\mathbb{F}_2^m}{\mathrm{Maj}}\left(f(y)+f(x+y)\right)$$

כאשר הרעיון הוא שבגלל שרוב הערכים של $f$ מתנהגים כמו פ' לינארית, אז חישוב ערכו של $g$ באמצעות דעת הרוב של $f$ (על ערכים שונים מ-$x$ אמנם) תיתן תוצאות מיטיבות ואכן כך. נוכיח כי $\mathrm{dist}(f,g)\leq2\epsilon$.

$$\begin{aligned}1-\epsilon&\leq P_{x,y}(f(x)=f(y)+f(x+y))\\ \text{התוחלת השלמה}&=E_x\left[P_y(B_f(x,y)\mid x)\right]\\ (*)&\leq P_x(M)\cdot1+(1-P_x(M))\frac{1}{2}\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_x(M)\end{aligned}$$

$(*)$ נסמן $M=\left\{x:P_y(B_f(x,y))\geq\frac{1}{2}\right\}$ ונשתמש בנוסחת ההסת' השלמה (משמאל כל הסת' קטנה מ-1 ומימין ההסת' תחת $M^C$ ל-$B_f(x,y)$ היא לכל היותר $\frac{1}{2}$ מהגדרת $M$).

ומהעברת אגפים נקבל $\frac{1}{2}P_x(M) \geq \frac{1}{2}-\epsilon$ כלומר

$$P_x(f(x)=g(x))=P_x(M)\geq 1-2\epsilon$$

כלומר של-$1-2\epsilon$ מה-$x$-ים לפחות חצי מה-$y$-ים מקיימים את המבחן, ומכך נובע שהמרחק אכן חסום ע"י $2\epsilon$.

נרצה לחזק את המשוואה הנ"ל עד כדי הוכחת התכונה השלישית

נאמר כי $(x,y,x+y)$ חופשית אם $x,y\in_R \mathbb{F}_2^m$, מעוגנת אם $x$ קבוע ו-$y\in_R \mathbb{F}_2^m$ וקבועה אם $x,y$ קבועים.

**טענת ביניים קטנה** לכל $x$,

$$(\star)=P_{y^1,y^2}\left(f\left(y^1\right)+f\left(x+y^1\right)=f\left(y^2\right)+f\left(x+y^2\right)\right)\geq 1-2\epsilon$$

**הוכחה:** מתקיים ש-$y_1,y_2,y_1+y_2$ היא חופשית, וכך גם $x+y_1,x+y_2,y_1+y_2$ ולכן מהתנאי שדרשנו לעצמנו בתחילת ההוכחה הכללית, ההסת' שכל אחת מהמשוואות הבאות לא מתקיימות הוא לכל היותר $\epsilon$

$$f\left(y^1\right)=f\left(y^2\right)+f\left(y^1+y^2\right)$$
$$f\left(x+y^1\right)=f\left(x+y^2\right)+f\left(y^1+y^2\right)$$

ולכן השוויון הבא מתקיים בהסת' לפחות $1-2\epsilon = 1-\epsilon-\epsilon$ (המשלים להסת' שאחד האי שוויונות לא מתקיים, שנחסם מחסם האיחוד)

$$\begin{aligned}f\left(y^1\right)+f\left(x+y^1\right)&=f\left(y^1\right)+f\left(x+y^2\right)+f\left(y^1+y^2\right)\\&=f\left(y^2\right)+f\left(y^1+y^2\right)+f\left(x+y^2\right)+f\left(y^1+y^2\right)\\&=f\left(y^2\right)+f\left(x+y^2\right)\end{aligned}$$

■

**טענת ביניים גדולה** לכל $x$ (לא רק $1-2\epsilon$ מתוך כולם), $P_y(g(x)=f(x+y)+f(y))\geq 1-2\epsilon$ (כלומר יש רוב מוחץ של $y$-ים שנותנים ערך $f(x)=g(x)$).

**הוכחה:** יהי $x\in\mathbb{F}_2^m$. נסמן $p=P_y(f(y)+f(x+y))=0$ ולכן $g(x)=0$ אם $p>\frac{1}{2}$ ואחרת $g(x)=1$. לכן מתקיים

$$1-2\epsilon\leq(\star)=p^2+(1-p)^2=1-2p(1-p)$$

כלומר $p(1-p)\leq\epsilon$. אם $p<\frac{1}{2}$ אז $\frac{1}{2}p<p(1-p)$ כלומר $p\leq 2\epsilon$ ואחרת $1-p\leq 2\epsilon$. זה אומר ש-$p\geq 1-2\epsilon$ או ש-$1-p\geq 1-2\epsilon$.

המקרה הראשון משמעו שברוב של $1-2\epsilon$ האינטרפולציה תיתן $0$ והשני שבאותו רוב היא נקבל $1$, כך שכך או כך, חישוב $g$ הוא ברוב מוחץ על פני האינטרפולציות. ■

נסיים את הוכחת הטענה הכללית ע"י הוכחה ש-$g\left(x\right)=g\left(z\right)+g\left(x+z\right)$ לכל $x,z$, כלומר ש-$g$ אכן לינארית. נביט בנקודות הבאות

$$\begin{array}{ccc} x & y^{1} & x+y^{1}\\ z & y^{2} & z+y^{2}\\ x+z & y^{1}+y^{2} & x+z+y^{1}+y^{2} \end{array}$$

עבור $y^{1},y^{2}$ מקריים, שלושת השורות הן שלשות מעוגנות (סכום ביטים מתפלגים אחיד מתפלג אחיד) ושתי העמודות הימניות הן שלשות חופשיות. לכן בהסת' לפחות $0<1-8\epsilon=1-\left(2\epsilon+2\epsilon+\epsilon+\epsilon+2\epsilon\right)$

$$\begin{aligned} g\left(z\right)+g\left(x+z\right) & =f\left(y^{2}\right)+f\left(z+y^{2}\right)+g\left(x+z\right)\\ & =f\left(y^{2}\right)+f\left(z+y^{2}\right)+f\left(y^{1}+y^{2}\right)+f\left(x+z+y^{1}+y^{2}\right)\\ & =f\left(y^{1}\right)+f\left(x+y^{1}\right)\\ & =g\left(x\right) \end{aligned}$$

כאשר כל מעבר מתקיים לא בהסת' $1$ אלא בהסת' נמוכה מ-1 ולכן לכאורה השוויון מתקיים בהסת' נמוכה מ-1, אבל מאחר שאין לנו פה הסת' לנוסחה הסופית (שכוללת רק את $x,z$ שהם קבועים), הרי שהמשוואה מתקיימת תמיד ולכן $g$ לינארית. לסיום הראנו ש-$f$ $2\epsilon$-קרובה ל-$g$ שהיא לינארית, כלומר מילת קוד חוקית. ■

**הערה** ההוכחה היא הדרגתית: קודם הוכחנו ש-$f$ קרובה ל-$g$ בהסת' גבוהה לשלשות חופשיות, ואז בהסת' גבוהה לשלשות מעוגנות ואז בהסת' $1$ לשלשות קבועות.

נספק הוכחה בראשי פרקים (אנלוגית לחלוטין להוכחה הנ"ל) לכך שבדקן לריד סולומון עם מבחן האינטרפולציה האריתמטי הוא אכן בדקן-מקומי.

נגדיר לכל $x$, $g\left(x\right)=\underset{r\in_{R}\mathbb{F}_{q}}{\mathrm{plur}}\sum a_{i}f\left(x+r\cdot i\right)$. ניתן להוכיח כי $g$ $d\epsilon$-קרוב ל-$f$. משם נראה שהאינטרפולציות עבור $r_{1},r_{2}$ מקריים שוות בהסת' קרובה ל-1 (כלומר שוויון על סדרות חופשיות, זו טענת הביניים הקטנה). משם ניתן להוכיח שהשוויון בין $g$ ו-$f$ מתקיים לסדרות מעוגנות בהסת' $\approx 1-d^{2}\epsilon$ באמצעות טיעון מהסת' שלא קשור לקודים (החישוב עם $p$). לסיום אפשר להוכיח ש-$f$ שווה ל-$g$ עבור סדרות קבועות בהסת' קרובה ל-1. זה מוכיח ש-$g$ מקיים את האינטרפולציות לכל סדרה חשבונית, ובתרגיל הוכחנו שתחת שדה ראשוני זה מספיק כדי להוכיח ש-$g$ הוא פולינום.

# שבוע $\mathbb{V}$ |

**הגדרה** יהי הטור $p\left(x_{1},\ldots,x_{m}\right)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_{0}^{m}}a_{\alpha}\Pi_{i=1}^{n}x_{i}^{\alpha_{i}}$. אם המקדמים של $p$ מתאפסים מחוץ לתחום חסום, נגדיר את המעלה הטוטאלית

של $p$ להיות

$$\deg p = \max_{\alpha : a_\alpha \neq 0} \sum_{i=1}^{m} \alpha_i$$

ואת המעלה האינדיוידואלית להיות

$$\deg' p = \max_{\alpha : a_\alpha \neq 0} \|\alpha\|_\infty$$

**דוגמה** עבור $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_7^2$, הדרגה הטוטאלית היא 4 והאינדיבידואלית היא 2.

**הגדרה** נגדיר $RM'_{d,m,q} = \left\{f : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q : \deg' f \le d\right\}$.

**הערה** מתקיים $RM_{d,m,q} \subseteq RM'_{d,m,q} \subseteq RM_{dm,m,q}$.

**הערה** כיצד נקודד עם $RS_{d,m,q}$? נרצה לקודד את המילה $(a_0, \ldots, a_d)$. נשתמש בה כמקדמים של הפולינום המושרה ואז נשערך ב-$0, \ldots, q-1$ וזו תהיה מילת הקוד שלנו. הבעיה היא שאין לנו דרך לשחזר ממילת הקוד את המילה המקורית.

בהינתן $(a_0, \ldots, a_d)$, נגדיר פולינום באמצעות אינטרפולציה ביחידות ע"י $f(i) = a_i$ ואז $f$ תהיה מילת הקוד שלנו **איך היא מויצגת??**

איך נכליל זאת לפולינום בכמה משתנים? לדרגה טוטאלית $d$ יש לנו $\binom{d+m}{m}$ מקדמים, לכן נצטרך לבחור קבוצה $S \subseteq \mathbb{F}_q^m$ בגודל $\binom{d+m}{d}$ שבו נשערך וזו תהיה מילת הקוד שלנו.

**הגדרה** $S$ היא <u>קבוצת אינטרפולציה</u> לקוד $C$ (שמכיל פ' $\mathbb{F}_q^m \mapsto \mathbb{F}_q$) אם לכל פ' חלקית $\tilde{f} : S \to \mathbb{F}_q$ קיימת הרחבה יחידה ל-$f : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q$ שהיא פ' ב-$C$.

**דוגמה** עבור $m = 1$, $S = \{0, \ldots, d\}$ היא קבוצת אינטרפולציה (ישיר ממשפט האינטרפולציה).

**דוגמה** למה לא כל קבוצה היא קבוצת אינטרפולציה? נביט ב-$m \gg 1$ ו-$d = 2$. לכן $|S| \approx m^2$. נבחר ישר ועליו נדרוש ש-$\tilde{f}$ יהיה 0 על כל הערכים חוץ מ-1 שיהיה 1. $m > 4$ ולכן יש לפחות שלושה אפסים על הישר, ובגלל שכל פולינום רב משתני ממעלה טוטאלית לכל היותר $d$ הוא מדרגה $d$ על כל ישר (אם נחליף את הפרמטרים ב-$u + tv$ אז זה פולינום במשתנה יחיד מדרגה לכל היותר $d$), זה בהכרח פולינום האפס. עם זאת כמובן שיש לנו ערך שונה מאפס שדרשנו לכן לא נוכל להרחיב את $\tilde{f}$ לפולינום בקוד.

## Low-Degree Extension

נרצה לבצע קידוד אינטרפולציה ל-$RM'_{d,m,q}$.

**טענה** נבחר $H \subseteq \mathbb{F}_q$ בגודל $d+1$ (לדוגמה $H = \{0, \ldots, 1, d\}$) ו-$S = H^m \subseteq \mathbb{F}_q^m$. לכל $f : S \to \mathbb{F}_q$ קיימת הרחבה יחידה $\hat{f} : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q$ שהיא מילת בקוד $RM'_{d,m,q}$.

**הערה** במקרה כזה נאמר כי $\hat{f}$ היא ה-low-degree extension של $f$.

**הוכחה:** יהי $x^0 \in S$. נסתכל על $\mathbb{1}_{x^0} : S \to \mathbb{F}_q$. עבור כל $i$ נגדיר את $f_i : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ להיות הפולינום היחיד מדרגה $\geq d$ המקיים $f_i(y) = \mathbb{1}_{\{y=x_i^0\}}$ לכל $0 \leq y \leq d$.

עתה נגדיר $f(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x_i)$. לפולינום הזה יש דרגה אינדבידואלית $d$.

כל פ' היא קומבינציה לינארית של פ' מהצורה $\mathbb{1}_x$ ולכן גם ניתן להרחיבה. יחידות מתקבלת כי אם $\hat{f}, \hat{f}'$ פולינומים שונים שעונים על התנאים בטענה, אז הם מדרגה לכל היותר $d$, ובנוסף הם מסכימים על כל $H$ שהיא מגודל $d+1$, ולכן הם אינם שווים (הוכחנו טענה זו בשאלה $6(b)$ של התרגיל עבור $m=2$). ∎

## בדיקת סכום ומכפלה על אורקל פולינומי

נניח שיש לנו "קופסה פולינומית" שמציגה ממשק $f_{d,m,q}$ כאשר $f : \mathbb{F}_q^m \to \mathbb{F}_q$ פ' מדרגה טוטאלית לכל היותר $d$ ונוכל להגיש שאילתות לחישוב ערכי $f$.

**הערה** שערוך מקרי בפולינום (שנקבע מראש) מדרגה טוטאלית $\geq dm$ מתאפס בסיכוי $1$ (פולינום האפס) או בסיכוי לכל היותר $\geq \frac{dm}{q}$ (ממשפט שוארץ-זיפל).

בהינתן $f_{d,m,q}$ ו-$g_{d,m,q}$ ו-$h_{2d,m,q}$, נרצה לבדוק האם $f+g=h$ או $f \cdot g = h$.

נביט במבחן בדיקת סכום פולינומי: עבור $x \in_R \mathbb{F}_q^m$ נוודא כי $f(x)+g(x)=h(x)$. השלמות היא $1$ כי אם $f+g=h$ אז תמיד נקבל שוויון, והנאותות היא $\frac{dm}{q}$ (כי גם אם $(f+g)-h$ אינו פולינום האפס, הוא עדיין מתאפס בהסת' לכל היותר $\frac{dm}{q}$).

**הערה** אם זה היה דטרמיניסטי היינו צריכים להשוות $d^m$ ערכים.

**הערה** כדי לקבל נאותות $0$ נצטרך להשוות את הערכים של הקופסאות על קבוצת אינטרפולציה ועל כל קבוצה אחרת גם אם כל השוויונות יתקבלו לא נוכל להכריע בהסת' $1$ האם באמת מתקיים שוויון.

עתה מבחן בדיקת מכפלה פולינומית: עבור $x \in_R \mathbb{F}_q^m$ נוודא כי $f(x) \cdot g(x) = h(x)$. השלמות היא שוב $1$ והנאותות היא $\frac{2dm}{q}$.

## מבחן ה-sum-check

**הגדרה** נתונות קופסאות $f^0_{d,m,q}, f^1_{d,m-1,q}, \ldots, f^{m-1}_{d,1,q}, f^m$ כאשר $f^m \in \mathbb{F}_q$. נאמר כי $(f^0, \ldots, f^m)$ מקיימת את תכונת הסכום אם

$$f^i(x_{i+1}, \ldots, x_m) = \sum_{y=0}^{d} f^{i-1}(y, x_{i+1}, \ldots, x_m)$$

לכל $i \in [m]$ ו-$(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{F}_q^m$.

נרצה לחשב סכום של $d^m$ ערכים בזמן תת-אקספ'. נגדיר לכל מספר אינדקס מהקבוצה $S=\{0,\dots,d\}^m$ (נסדרם על קוביה $m$-ממדית), זה מגדיר פ' $f:S\to\mathbb{F}_q$. נגדיר $f^0=\hat{f}$, הרחבת ה-low-degree ל-$\mathbb{F}_q^m$.

נניח שיש לנו $\left(f^0,\dots,f^m\right)$ שמקיימים את תכונת הסכום. הסכום של כל הערכים של $f^0$ במרחב (מיושר לצירים, אנכי לאחד הממדים) שווה לערך אחד של $f^1$ בקוביה $m-1$ ממדית. כדי לסכום את כל הערכים בקוביה $S$ (שהם ערכי הפולינום $f^0$ בכל נקודה), מספיק שנסכום רק את כל הערכים בקוביה ה-$m-1$ ממדית של ערכי $f^1$. באותו האופן, כל סכום ערכי ישר בקוביה של ערכי $f^1$ הוא ערך אחד בקוביה של $f^2$ וחוזר חלילה. לסיום $f^m$ יהיה סכום הערכים שלנו.

המהלך הסופי שלנו הוא כזה: נרצה לחשב סכום של $d^m$ ערכים. ניתן לכוח על לתת לנו $\left(f^0,\dots,f^m\right)$ פולינומים שלכאורה מקיימים את תכונת הסכום ו-$f^0$ מכיל את הערכים שנרצה לסכום. נבדוק האם ה-$m$-יה מקיימת את תכונת הסכום, ואם כן סכום המספרים יהיה $f^m$.

המבחן שלנו יהיה כזה: לכל $i$, נגריל $\left(x_i,\dots,x_m\right)$ חדשה ונבדוק האם המשוואה בהגדרת תכונת הסכום מתקיימת עבור $x$ ו-$i$ (כלומר האם המעבר מ-$f^{i-1}$ ל-$i$ עובד). כל בדיקה דורשת $d+2$ קריאות כלומר סה"כ $\approx dm$ קריאות. למבחן הזה יש שלמות 1 ונאותות $\frac{dm}{q}$ (המקרה המאתגר ביותר הוא עבור טעות במעבר יחיד ב-$m$-יה, והיא בין $f^0$ ל-$f^1$, ושם ההסת' שיעבדו עלינו היא $\frac{dm}{q}$).

**הערה** הבעיה עם להגריל $x$ לכל שלב היא שיש לנו מספר בדיקות אפשריות מאוד גדולה $q^m q^{m-1}\dots q^1\approx q^{m^2}$ ובשביל רדוקציה ב-PCP זה הרבה אילוצים.

מבחן עם פחות בדיקות אפשריות יקבע את $x$ בהתחלה ואז בכל שלב יבצע את הבדיקה על $\left(x_i,\dots,x_m\right)$. למבחן זה יש שלמות 1 ונאותות $\frac{dm}{q}$ ולוקאליות $m\left(d+2\right)$. זהו מבחן ה-sum-check.

**הערה** עתה מספר הבדיקות השונות שהמבחן יכול לעשות הוא $q^m$ (רק את $x$ מגרילים פעם אחת).

**הגדרה** הבעיה $QS_{n,q}$ מקבלת קלט של אוסף משוואות מדרגה טוטאלית 2 ב-$n$ משתנים מעל $\mathbb{F}_q$ ובכל משוואה $\geq h$ משתנים שונים.

**דוגמה** עבור $q=11$ מערכת המשוואות הבא היא קלט תקין לבעיה
$$\begin{cases} x_1x_2+x_3^2-7=0\\ x_7x_3+x_2^2-1=0\\ \vdots \end{cases}$$

**משפט** לכל ראשוני $q$, $QS_{4,q}\in$ NPH.

**הערה** אם נוכיח כי $\text{gap}\left(1,\frac{1}{2}\right)-QS_{c,q}$ הוא NP-קשה עבור $c,q$ קבועים, זה נותן לנו את PCP: נעשה רדוקציה פולי' מ-3SAT ל-$QS_{c,q}$ כך שניתן יהיה לספק את הקלט ל-3SAT אם"ם ניתן לספק את הקלט ל-$QS_{c,q}$.

**הוכחה:** נוכיח $QS_{4,q}\leq_p$ 3SAT. בהינתן הסגר $x_1\vee x_2\vee x_3$ נסתכל עליו כ-$x_1+x_2+x_3$. נרצה משוואה שתקבל 0 אם הסכום מקבל 0 ו-1 אם הוא מקבל $1,2,3$. נעשה אינטרפולציה ונקבל פולינום ממעלה 3 שמקיים זאת. לחלופין מעקרון ההכלה וההדחה נקבל שהמשוואה היא

$$x_1\vee x_2\vee x_3=x_1+x_2+x_3-x_1x_2-x_2x_3-x_1x_3+x_1x_2x_3=1$$

קל לקבל משוואה דומה להסגרים עם ליטרלים עם שלילה.

- כדי לאכוף ש-$x_i$ מקבל 0 או 1, נוסיף משוואות $x_i^2 - x_i = 0$.
- כדי להוריד את הדרגה הטוטאלית של המשוואות המרכזיות ל-2, נגדיר לכל $ij$ $x_{ij}$ שיחליף מכפלה של המשתנים $x_i$ ו-$x_j$, ונוסיף לכל $ij$ את המשוואה $x_{ij} = x_i \cdot x_j$.

אכן יש לכל היותר $4$ משתנים במשוואה כי יש רק מונום אחד עם דרגה 3 ואותו נוריד לדרגה $2$ עם משתנה נוסף, כלומר 3 משתני הסגרים ומשתנה איחוי אחד. במשוואות האכיפה האחרות ברור שאנחנו מתחת ל-$4$.

נחזיר את מערכת המשוואות שכוללת את כל המשוואות משלושת הסוגים. ■

עתה נרצה להוכיח $QS_{n,q} - \text{gap}\left(1, \frac{1}{\sqrt{q}}\right) \leq_p QS_{4,q}$ כאשר $q = \log^2 n$. כלומר נרצה בהינתן מערכת משוואות $\begin{pmatrix} p_1=0 \\ \vdots \\ p_k=0 \end{pmatrix}$ להעביר אותה למערכת משוואות $\begin{pmatrix} r_1=0 \\ \vdots \\ r_{k^{10}}=0 \end{pmatrix}$ כך שאם אחת מהמשוואות $p_i$ לא ספיקה, הרבה מאוד מ-$r_j$ לא יהיו ספיקות. נבצע את הטרנס' עם הכפלה במטריצה $M$. $M$ היא מטריצה יוצרת של קוד וכך נקבל את התכונה הבאה: אם יש השמה מספקת למשוואות אז הכפלת $M$ בשערוך היא $M \cdot 0 = 0$. אם ההשמה לא מספקת, אז מילת הקוד היא לא 0 ובגלל שזה קוד (אידאלית טוב), היא רחוקה מאוד ממילת הקוד $0$ ולכן הרבה משוואות לא ישתערכו ל-0 כנדרש.

כדי להוריד את מספר המשתנים שאנחנו צריכים לשערך, נשתמש בשיטה שלנו לסכום הרבה מספרים (לכל משוואה בנפרד).

# שבוע $\mathbb{VII}$ |

בהינתן $f : \mathbb{F}^m \to \mathbb{F}$, נרצה לבדוק האם היא פולינום מדרגה נמוכה (LDE).

**הערה** נניח ש-$f$ מיוצג לנו באמצעות טבלת ערכים $B^0$, וכן שיש לנו את $B^1$ ו-$B^2$ שהן טבלאות פולינומים (חד- ודו-משתניים בהתאמה) לכל ישר ומישור בהתאמה.

## בדיקות דרגה-נמוכה

- Line Test: לבחור ישר מקרי ב-$\mathbb{F}^m$ (קוביה $m$-ממדית) ולבדוק שכל הישר מקבל את הערכים של הפולינום שמשרות $d+1$ הנקודות הראשונות.
- Line v. Point Test: לבחור ישר מקרי ב-$\mathbb{F}^m$ ולבדוק שנקודה מקרית לא על הישר מסכימה עם הפולינום המתאים לישר ב-$B_1$.
- Plane v. Point Test: לבחור מישור מקרי וההמשך כנ"ל.
- Plane v. Plane (Line) Test: לבחור שני מישורים ולבדוק האם הפולינומים המתאימים להם ב-$B^2$ מסכימים על הישר שהוא החיתוך שלהם.

**הערה** כל הטסטים האלה שקולים מבחינת החוזק שלהם, אבל את האחרון הכי קל להוכיח, ספציפית עבור $m = 3$ ומשם באינדוקציה.

**משפט** נקבע $m=3$ ו-$\delta$ כלשהי ונניח שמתקיים

$$P_{p_1,p_2}\left(\frac{B^2\left[p_1\right]|_{p_1\cap p_2}=B^2\left[p_2\right]|_{p_1\cap p_2}}{\mathcal{S}}\right)\geq\epsilon$$

כאשר $p_1,p_2$ מישורים (ולכן $p_1\cap p_2$ ישר או הקבוצה הריקה). אזי יש רשימה קצרה של פולינומים $f_1,\ldots,f_{\frac{1}{\delta}}$ כך ש-$\deg f\leq d$ ו-

$$P\left(\mathcal{S}\wedge\exists i:B^2\left[p_1\right]=f_i|_{p_1}\wedge B^2\left[p_2\right]=f_i|_{p_2}\right)\geq\epsilon-\delta-2\sqrt{\frac{d+1}{q}}$$

**הערה** אין לנו בעיה ש-$p_1,p_2$ לא יסכימו, אבל נרצה שאם הם מסכימים אז זה יהיה בהכרח כי הם שווים לאחד מה-$f_i$-ים.

**הערה** כאן $\epsilon$ הוא מהותית כמה שיותר קרוב ל-1, וגם $\delta=C\cdot\frac{d+1}{q}$, ומעבר לכך $q$ גדול מחזקה קבועה של $d$ ו-$n\approx\log n$ כך שסה"כ קיבלנו חסם פולילוגריתמי ב-$n$.

**הגדרה** יהי $G=\langle V,E\rangle$ גרף לא מכוון. נאמר כי $G$ <u>טרנזיטיבי</u> אם לכל $(v,u),(u,w)\in E$ מתקיים $(v,w)\in E$. בנוסף נגדיר לכל $(u,w)\notin E$ את

$$\beta\left(u,w\right)=P_{v\in V}\left(\left(v,u\right)\in E\wedge\left(v,w\right)\in E\right)$$

ולגרף כולו נגדיר $\beta\left(G\right)=\max\limits_{(u,w)\notin E}\beta\left(u,w\right)$ (האי-צלע שעבורה כמה שיותר קודקודים לא מקיימים טרנזטיביות על שלושת הקודקודים).

**הערה** גרף טרנזטיבי הוא איחוד זר של קליקות (רכיבי הקישרות).

**טענה** בגרף $G$ מספיק למחוק לכל היותר $2\sqrt{\beta\left(G\right)}\left|V\right|^2$ קשתות כדי להפכו לטרנזיטיבי.

**הוכחה:** נציג אלג' להפיכת $G$ לגרף טרנזיטיבי ונוכיח שהורדנו את כמות הקשתות המותרת. האלג' הוא הבא:

1. לכל $v\in V$ עם $d\left(v\right)\leq\sqrt{\beta}\left|V\right|$ (מספר השכנים שלו), נוריד את כל הקשתות שיוצאות ממנו.
2. לכל $v\in V$ שנשארו (עם שכנים), נמחק קשתות בין שכנים של $v$ לאי-שכנים של $v$ (אם $(v,u)\in E$ ו-$(v,w)\notin E$, נוריד את $(u,w)\notin E$).

נובע ישירות משלב 2 ש-$G$ לאחר מחיקת הקשתות הוא טרנזטיבי.

נשים לב כי לכל $v$ שעבורו נמחק צלעות בשלב השני, אוסף הצלעות שנמחקות (בריצת האלג', כלומר זה לא סטטי אלא תלוי בסדר הריצה על הקודקודים) הוא

$$E_{remove}^{v}=\left\{\left(u,w\right)\in E:w\in C\left(v\right)\setminus\left(N\left(v\right)\cup v\right)\wedge u\in N\left(v\right)\right\}$$

כלומר כל הצלעות $(u,w)$ כאשר $u$ שכן של $v$ אבל $w$ באותו רכיב קישרות (אבל אינו $v$ או שכניו).

בדומה נסמן את אוסף זוגות הקודקודים שאילו היו צלעות היו נמחקות בשלב 2 על $v$, כלומר שאנחנו "מסתכלים" עליהם לצורך מחיקה בשלב השני

$$E_{non}^{v}=\{(u,w):w\in C\left(v\right)\setminus\left(N\left(v\right)\cup v\right)\wedge u\in N\left(v\right)\}$$

מתקיים

$$\left|E_{remove}^{v}\right|\leq\left|C\left(v\right)\setminus\left(N\left(v\right)\cup v\right)\right|\cdot\beta\cdot\left|V\right|$$

כי ל-$w$ יש $\left|C\left(v\right)\setminus\left(N\left(v\right)\cup v\right)\right|$ אפשרויות ולכל $w$ יש לכל היותר $\beta\left|V\right|$ $u$-ים כך ש-$(v,u)\in E$ ו-$(u,w)\in E$ אבל כאמור $(v,w)\notin E$.

בנוסף מתקיים

$$\left|E_{non}^{v}\right|\geq\sqrt{\beta}\left|V\right|\cdot\left|C\left(v\right)\setminus\left(N\left(v\right)\cup v\right)\right|$$

כי בשלב הראשון הורדנו את כל הקודקודים עם $d\left(v\right)\leq\sqrt{\beta}\left|V\right|$ ובשלב השני אנחנו מורידים את כל הצלעות של כל השכנים של $v$.

לסיום

$$\sum_{v\in V}\left|E_{remove}^{v}\right|\leq\sum_{v\in V}\sqrt{\beta}\left|E_{non}^{v}\right|\overset{(*)}{\leq}\sqrt{\beta}\left|V\right|^{2}$$

$(*)$ נטען כי לכל $(u,w)\in E$ קיים לכל היותר $v$ יחיד עבורו $(u,w)\in E_{non}^{v}$, כי אם הוא הופיע ב-$E_{non}^{v_1}$ אז $u$ שכן של $v_1$ ו-$w$ לא (אבל כן ברכיב הקשירות), ולכן כל $v_2$ אחר ש-$u$ שכן שלו, הוא ברכיב הקשירות של $v_1$ ולכן לא באותו רכיב קשירות כמו $w$ כי הוצאנו את $w$ מרכיב הקשירות שלהם בהורדה כשראינו את $v_1$ לפני $v_2$. ■

**הגדרה** יהיו $m,q$. גרף המישורים הוא $G_p=\langle V_p,E_p\rangle$ כאשר $V_p=\{\mathbb{F}^m$ מישורים ב- $\}$ ו-$(p_1,p_2)\in E_p$ אם"ם מתקיים $B^2\left[p_1\right]|_{p_1\cap p_2}=B^2\left[p_2\right]|_{p_1\cap p_2}$ (המאורע $\mathcal{S}$).

**טענה** $\beta\left(G_p\right)\leq\frac{d+1}{q}$.

**הוכחה:** תהי $(p_1,p_2)\notin E_p$. יהי $p_3$ מישור נוסף. בסיכוי נמוך מאוד, $p_3$ מקביל ל-$p_1\cap p_2$ (כלומר לאחד מ-$p_1,p_2$). הסיכוי הזה הוא $\frac{1}{q}$ כי אם המישור מוגדר ע"י $\left\{v:wv^T=a\right\}$ אז ישר $u$ מקביל למישור אם $wu=0$ ובגלל שהכל מתפלג אחיד זה $\frac{1}{q}$. אחרת, $p_1\cap p_2$ נחתך עם $p_3$, הלא זו נקודת חיתוך של שלושת המישורים. הנקודה הזו מתפלגת אחיד על $p_1\cap p_2$. אם $p_1,p_2$ לא מסכימים על אותו פולינום בישר המשותף (מ-$B_2$), אז הפולינומים שלהם מסכימים על לכל היותר $\frac{d+1}{q}$ נקודות (קונטרה-פוזיטיב לשוורץ-זיפל) ולכן מהיות נקודת המפגש מתפלגת אחיד, הרי שהסיכוי ש-$p_3$ מסכים עם $p_1$ וגם עם $p_2$ בנקודה הזו הוא לכל היותר $\frac{d+1}{q}$, כלומר $\beta\left(p_1,p_2\right)\leq\frac{d+1}{q}$. ■

# שבוע $\mathbb{VIII}$ I

נמשיך את הוכחת הטענה מההרצאה הקודמת. אם שני מישורים מסכימים, יש בדיוק שלוש אפשרויות:

- הסרנו את צלע ההסכמה שלהם מהגרף $G_p$ - נוכיח שזה קורה בהסת' קטנה (הודות למספר קטן של צלעות שהאלג' שלנו מסיר). זה קורה בהסת' $\leq \sqrt{\frac{d+1}{q}}$.

- יש ביניהם צלע והם יחד בקליקה ב-$G_p$ בגודל $\leq \delta$ - נשים לב להבחנות הבאות:

1. יש לכל היותר $\frac{1}{\delta}$ קליקות בגודל $\leq \delta$ (מהקודקודים), כי אנחנו בגרף איחוד זר של קליקות.

2. הסיכוי ששני צמתים מקריים ב-$G_p$ יהיו שייכים לאותה קליקה בגודל $\leq \delta$ הוא לכל היותר $\delta$. **הוכחה:** נגריל את הצומת הראשון, הוא נמצא בקליקה כלשהי. עתה נגריל את הצומת השני, ובגלל שבקליקה המקורית יש $\delta$ מהקודקודים רק בסיכוי $\leq \delta$ גם הצומת השני יהיה שם. ■

לכן הם ביחד בקליקה (בגודל פחות מ-$\delta$) בהסת' $\delta$ (מ-$(2)$).

- יש ביניהם צלע והם ביחד בקליקה ב-$G_p$ בגודל $\leq \delta$. זה המקרה הטוב, כלומר שהם מסכימים וגם שווים לפולינום מהרשימה הקצרה.

עתה ידוע לנו שהמאורע הרע שלנו, הסיכוי ששני מישורים מסכימים על החיתוך שלהם אבל לא חברים בקליקה גדולה, מתחלק לאחת משתי אפשרויות זרות (שתי הראשונות). לכן ההסת' שהוא יקרה חסומה מלמעלה ע"י סכום ההסת' של שני המקרים, כלומר $\delta+2\sqrt{\frac{d+1}{q}}$. כלומר

$$P\left(\mathcal{S}\wedge\nexists i:B^{2}\left[p_{1}\right]=f_{i}|_{p_{1}}\wedge B^{2}\left[p_{2}\right]=f_{i}|_{p_{2}}\right)\geq\delta+2\sqrt{\frac{d+1}{q}}$$

נותר להוכיח שכל קליקה גדולה מתאימה לפולינום גלובלי יחיד.

**טענה** נניח כי $\delta\geq\frac{2(d+1)}{q}$ תהי $K$ קליקה של לפחות $\delta$ מישורים עם השמות שהן פולינום מדרגה $\leq \delta$ מסכימים (בחיתוך של כל זוג). לכן קיים $f:\mathbb{F}_{q}^{3}\to\mathbb{F}$ מדרגה $\leq d$ שמסכים עם כולם.

**הוכחה:** נטען שעבור ישר מקרי יש בתוחלת $\delta$ מישורים מאונכים לכיוון הזה כי

$$\delta\overset{(*)}{\leq}P_{\text{כיוון, מישור}}\left(\text{כיוון}+\text{מישור}\in K\right)=E_{\text{כיוון}}P_{\text{מישור}}\left(\left\{ \text{מישור}+\lambda\text{כיוון}\in K:\lambda\in q\right\} \right)$$

$(*)$ כיוון (הזזה אפינית) עם מישור (אפיני) נותנים מישור מקרי מתפלג אחיד.

לכן מהמונוטוניות ההפוכה של התוחלת, קיים כיוון ומישור עבורם לפחות $\delta$ (חלקיות) מהמישורים שהם הזזות של המישור לפי הכיוון הם בקליקה, כלומר $q\cdot\delta\ \geq\ 2\left(d+1\right)$. נסמן את $d+1$ ערכי $x$ (ציר מיושר לכיוון שלנו) שעבורם הזזת המישור לפי הכיוון היא בקליקה

ב-$\{\xi_1,\ldots,\xi_{d+1}\}$ נגדיר $\varphi_i:\mathbb{F}_q\to\mathbb{F}_q$ פולי' מדרגה $d$ שמקיים $\varphi_i(\xi_j)=\delta_{ij}$. נגדיר $f_i(y,z)$ להיות ההשמה של המישור הניצב ל-$x$ ועובר ב-$x=\xi_i$. לסיום נגדיר

$$f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{d}\varphi_i(x)\,f_i(y,z)$$

בגלל ש-$\varphi_i$ ו-$f_i$ הם מדרגה לכל היותר $d$ כל אחד, $f$ מדרגה לכל היותר $2d$. קיים כיוון (לא נוכיח למה) שאינו $x$ ומישור שחותך את המישור שמצאנו בישר שלהם יש לפחות $2d+1$ הזזות שלהם שבקליקה $K$. כל מישור בסט השני של הזזות חותך את הסט הראשון בבדיוק $d+1$ נקודות ולכן שני הסטים מסכימים על $f$.

לכאורה זה לא מספיק כי הפולינום הוא מדרגה $2d$ ויש לנו הסכמה רק ב-$d+1$ חיתוכים. עם זאת, הפולינום הגלובלי הוא רק מדרגה $d$ (כשמסתכלים עליו כפולינום במשתנה אחד) בכיוון $x$ ולכן עבור נקודה $p$ על מישור מהסט השני, נוכל להעביר ישר מ-$p$ בכיוון $x$ שיחתוך את $d+1$ המישורים מהסט הראשון. מכאן ש-$p$ חייבת לקבל את הערך של הפולינום הגלובלי כי הדרגה היא $d$ ויש לנו $d+1$ הסכמות עם הפולינום הגלובלי על המישור מהסט השני בכיוון $x$.

בנוסף, לכן מטיעון גאומטרי שלא נוכיח, כל מישור ב-$\mathbb{F}_q^3$ חותך את $3(d+1)$ המישורים בבדיוק $d+1$ נקודות ולכן כל ה-$3d+2$ מסכימים על הישרים שבחיתוכים שלהם. לכן כל המרחב מסכים על $f$.

נותר להוכיח ש-$f$ הוא בעצם מדרגה $d$ (כדי שבאינדוקציה על $m$ הדרגה לא תעלה). הטיעון הוא שבגלל שהפולינום הגלובלי שווה להשמה בכל מישור, התכונה הגלובלית של דרגה $d>$ מתקיימת עבור מישור כלשהו (לא נוכיח שקיים), ולכן אחת ההשמות היא מדרגה גדולה מ-$d$ בסתירה לכך שכולן בדרגה לכל היותר $d$ (כך מסופקת לנו $B_2$). ■

נרצה שהערכים שאנחנו משתמשים בהם בsum-check (שבודקים שהמשוואה ב-QS מתקיימת לאחר פירוק) יובטח לנו שהם מאחד מבין רשימה קצרה של פולינומים גלובליים מדרגה נמוכה. מבחן ה-PvP נותן לנו רק שייכות של השמה לפולינום גלובלי על הערכים שאנחנו בודקים (המישורים המקריים המוגרלים), אבל אנחנו רוצים לבדוק ב-sum-check ערך ספציפי שלא בהכרח נופל על המישור של PvP. לשם כך נגריל שני מישורים ונקבל (בהסת' גבוהה) ישר שהוא החיתוך שלהם. הנקודה שנרצה לשערך בה יחד עם הישר מגדירים לנו מישור. **מה הלאה**.

**הערה** כל מה שקורה:

- התחלנו מעד לנוסחת 3SAT.
- עשינו רדוקציה ל-QS-GAP והוכחנו שלא ניתן לספק את 3SAT אם"ם אפשר לספק לכל היותר $\epsilon_1$ משוואות ב-QS.
- פרקנו כל משוואה ב-QS להרבה משוואות באמצעות ה-sum-check וטענו שאם יש פולינום גלובלי אחד מאחורי הקופסאות ב-sum-check אז אפשר לספק לכל היותר $\epsilon_2>\epsilon_1$ משוואות (כל משוואה פורקה לכמה משוואות, ואלו שלא ניתן לספק הוסיפו כמה משוואות קטנות שניתנות לסיפוק). **איך פרקנו משוואות**
- הסרנו את ההנחה שמאחורי הקופסאות יש פולינום גלובלי אחד עם ה-Plane v. Plane Test במחיר של הסת' $\delta$ (וקבוע) שעבורו ההשמה למשתנים היא לא פולינום מהרשימה הקצרה של פולינומים גלובליים. בנוסף במקרה הגרוע נספק $\epsilon_2 k$ משוואות כאשר $k$ גודל הרשימה הקצרה כי נוכל לספק $\epsilon_2$ משתנים עם כל פולינום ברשימה בכל צמצום ב-sum-check ובמקרה הגרוע הם זרים.

**מה קורה כאן**

# שבוע $\mathbb{VIII}$ |

בהאדמארד ראינו מבחן פשוט שמקבל פ' $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ ובודק האם מתקיים $f(x)+f(y)=f(x+y)$ עבור $x,y\in_R\{0,1\}^n$.

נשתמש בזה כדי להוכיח ש-3Lin2 הוא קשה ב-NP.

**הערה** נרצה לעבור מחיבור לכפל. נמפה $1\mapsto -1, 0\mapsto 1$ ונעבור מחיבור לכפל, ונקבל בדיוק את אותו המבחן עם שינוי שמות ("0" שהוא עכשיו "1" עדיין לא משפיע על החישוב, כ-0 בחיבור ו-1 בכפל).

**הגדרה** נאמר כי $\chi:\{-1,1\}^n\to\{-1,1\}$ היא כפלית (multiplicative character) אם $\chi(x)\chi(y)=\chi(x\cdot y)$ לכל $x,y\in\{-1,1\}^n$ כאשר כפל הוא pair-wise.

**הערה** $\chi$ היא הומומורפיזם מ-$\{-1,1\}^n$ לחבורה הכפלית $\{-1,1\}$.

**הגדרה** נסמן $L_2(\{-1,1\}^n)=\mathbb{R}^{\{-1,1\}^n}$. לכל $f\in L_2(\{-1,1\}^n)$ נגדיר

$$\|f\|_2=\sqrt{\frac{1}{2^n}\sum_{x\in\{-1,1\}^n}f^2(x)}=\sqrt{E_{x_R\in\{-1,1\}^n}\left[f^2(x)\right]}$$

ו-$\langle f\mid g\rangle=E_x\left[f(x)g(x)\right]$.

**הערה** היתרון בשינוי השקוף בשמות הוא שההרחבה ל-$\mathbb{R}$ הוא הרבה יותר נוח (אחרת $1+1=2$ ב-$\mathbb{R}$ וזה עושה בעיות).

**דוגמה** עבור $\chi$ כפלית נקבל ש-$\|\chi\|_2=1$ כי זה ממוצע הערכים של $\chi$ (בערך מוחלט), שהם כולם 1.

אם $f\in\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ היא פ' לינארית, אז מתקיים

$$f(x)=\sum_{i=1}^n a_ix_i=\sum_{i\in S\subseteq[n]}x_i$$

עתה לכל $S\subseteq[n]$ נגדיר $\chi_S(x)=\prod_{i\in S}x_i$ ולכן אוסף כל הפ' הכפליות הוא $\{\chi_S\}_{S\subseteq[n]}$.

**טענה** $\chi_S\cdot\chi_T=\chi_{S\triangle T}$.

**הוכחה:** למה. ■

**מסקנה**

$$\langle\chi_S\mid\chi_T\rangle=E_x\left[\chi_S(x)\chi_T(x)\right]=E_x\left[\chi_{S\triangle T}(x)\right]=\begin{cases}1 & S=T\\ 0 & S\neq T\end{cases}$$

כי אם $S=T$ אז $S\triangle T=\varnothing$ ואז כל המכפלות הן 1 ואחרת יש מספר שווה של $n$-יות שנותנות $-1$ ו-1 ולכן זה מצטמצם (יש $2^{|S\triangle T|}$ $n$-יות כאלה, חצי מהן נותנות 1 והחצי השני $-1$).

**מסקנה** אוסף הפ' הכפליות הוא קבוצה אורתונ', ובפרט הוא בסיס אורתונ' של $\{\pm1\}^n \rightarrow \{\pm1\}$ : $f$ (לכל $y \in \{\pm1\}^n$ אפשר להגדיר $S_y = \{i : y_i = -1\}$ ואז נסכום $\chi_{S_y}$ לכל $y \in \{\pm1\}^n$ עבורו $f(y) = -1$).

בהתאם, לכל $f$ קיים $S$ יחיד עבורו $f = \sum_{S\subseteq[n]} \hat{f}(S)\chi_S$ כאשר $\hat{f}(S) = \langle f \mid \chi_S\rangle \in [-1,1]$ (תכונה של בסיסים אורתונ').

**טענה** ככל ש-$f, g$ יותר קרובות, כך המכ"פ שלהן יותר קרוב ל-0.

**הוכחה:** מהגדרת המכ"פ ש-$\mathrm{dist}(f,g) = P_x(f(x) \neq g(x))$ ואז עבור $f, g : \{\pm1\}^n \rightarrow \{\pm1\}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle f \mid g\rangle &= E[f(x)g(x)] = 1\cdot P_x(f(x) = g(x)) + (-1)P_x(f(x) \neq g(x))\\ &= 1 - 2\mathrm{dist}(f,g)\end{aligned}$$

■

**הערה** לכל $f : \{\pm1\}^n \rightarrow \{\pm1\}$ מתקיים $f = \chi_S$ אם"ם $\hat{f}(S) = 1$ כי $1 = \|f\|_2^2 = \sum_S \hat{f}^2(S) = 1$ (מההגדרה) ואז אם יש $S$ עבורו $\hat{f}(S) = 1$ אז כל השאר מתאפסים.

**מסקנה** אם $\langle f \mid \chi_S\rangle = \hat{f}(S) > 1-\epsilon$ אז $\mathrm{dist}(f,\chi_S) \leq \frac{1}{2}\epsilon$ (מהטענה הנ"ל).

## מבחן הכפליות

**טענה** אם $P_{x,y}(f(x)f(y) = f(x\cdot y)) > 1-\epsilon$ אז קיים $S$ כך ש-$\hat{f}(S) > 1 - c\cdot\epsilon$ (ו-$\mathrm{dist}(f,\chi_S) \leq \frac{c}{2}\cdot\epsilon$).

**הערה** הוכחנו את זה במקרה של מבחן הלינאריות, עתה נוכיח אותה שוב עם כלים אחרים.

**הוכחה:** מההנחה, $f(x)f(y)f(x\cdot y)$ היא 1 בהסת' לפחות $1-\epsilon$ ו-$-1$ בהסת' לכל היותר $\epsilon$, לכן מתקיים

$$\begin{aligned}1-2\epsilon &< E_{x,y}[f(x)f(y)f(x\cdot y)]\\ &= E_{x,y}\left[\left(\sum_S \hat{f}(S)\chi_S(x)\right)\left(\sum_T \hat{f}(T)\chi_T(y)\right)\left(\sum_R \hat{f}(R)\chi_R(x\cdot y)\right)\right]\\ &= \sum_{S,R,T} \hat{f}(S)\hat{f}(R)\hat{f}(T)E_{x,y}[\chi_S(x)\chi_T(y)\chi_R(x\cdot y)]\\ &= \sum_{S,R,T} \hat{f}(S)\hat{f}(R)\hat{f}(T)E_{x,y}[\chi_S(x)\chi_T(y)\chi_R(x)\chi_R(y)]\\ &= \sum_{S,R,T} \hat{f}(S)\hat{f}(R)\hat{f}(T)E_x[\chi_S(x)\chi_R(x)]E_y[\chi_T(y)\chi_R(y)]\\ &= \sum_{S,R,T} \hat{f}(S)\hat{f}(R)\hat{f}(T)\delta_{S,R}\delta_{T,R}\\ &= \sum_S \hat{f}^3(S)\end{aligned}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
1-2\epsilon \leq \sum_S \hat{f}^3(S) &\leq \max_S \left\{\hat{f}(S)\right\} \sum_S \hat{f}^2(S) \\
&\leq \max_S \left\{\hat{f}(S)\right\}
\end{aligned}
$$

ולכן קיים $S$ עבורו $1-2\epsilon \leq \hat{f}(S)$, ומכאן גם ש-$\mathrm{dist}(f,\chi_S) \leq \epsilon$. ■

**מסקנה** אם $P_{x,y}(f(x)f(y)=f(x\cdot y)) = \frac{1}{2}+\epsilon$ אז קיים $S$ כך ש-$\mathrm{dist}(f,\chi_S) \leq \frac{1}{2}-\epsilon$. כלומר, גם אם הסיכוי לשוויון הוא ממש קצת מעל זה של פ' מקרית, אז $f$ כבר הרבה יותר קרובה לפ' ב"קוד" מאשר פ' מקרית.

**הערה** מספר ה-$S$-ים עבורם $\hat{f}(S) = \langle f \mid \chi_S\rangle \geq 2\epsilon$ הוא לכל היותר $\frac{1}{4\epsilon^2}$ כי $\sum \hat{f}^2(S) = 1$.

## מבחן ה-Long-Code

יהיו $f,g:\{\pm1\}^n \to \{\pm1\}$. נרצה מבחן שאם עוברים אותו בהסת' $< \frac{1}{2}+\delta$ אז יהיה $S$ עבורו

$$
\hat{g}(S) > \varphi_1(\delta) \wedge \left|\hat{f}(S)\right| > \varphi_2(\delta) \wedge 0 < |S| \leq \varphi_3(\delta)
$$

כלומר ש-$g$ תהיה קרובה למילת קוד, $f$ תהיה קרובה למילת קוד או מינוס מילת קוד, ומילת הקוד לא תהיה ריקה אבל גודלה חסום.

נצטרך לוותר על השלמות, בפרט עבור $f=\chi_{\{i\}}$ ($|S|=1$) הטסט יעבור בסיכוי $1-\epsilon$.

**הערה** $\chi_{\{i\}}(x) = x_i$, כלומר זה קידוד של $i$. הקוד $\left\{\chi_{\{i\}}\right\}_{i\in[n]}$ נקרא Long Code, ויש לו קצב $\frac{1}{2^n}$.

**דוגמה** נביט במבחן הבא: נבחר $x,y \in_R \{\pm1\}^n$ ונבדוק $f(x)g(y) = f(xy)$. עבור $f,g$ המתאימים ל-$\chi_\varnothing$, נקבל $1\cdot1=1$ כך שנעבור את המבחן בהסת' $1$ בניגוד לכך שלא קיימת $S$ שמקיימת את התנאים שנרצה שיתקיימו.

**דוגמה** נשפר את המבחן הקודם: נבחר $x,y \in_R \{\pm1\}^n$ ו-$\mu \in_R \{\pm1\}$ ונבדוק $\mu f(\mu x) g(y) = f(xy)$, עתה $\chi_\varnothing$ לא עובר את המבחן בהסת' $1$ אלא בהסת' $\frac{1}{2}$, רק עבור $\mu=1$ (עבור $\mu=-1$ נקבל $-1\cdot1\cdot1\neq1$ לכל $x,y$). הבעיה היא שעדיין $f,g$ שמקיימות את שתי התכונה הראשונות אבל עם $S$ גדולה יעברו את המבחן בהסת' גבוהה, לכן נוסיף רעש שיוריד את ההסת' הזו.

המבחן הסופי יהיה הבא: נבחר $x,y \in_R \{\pm1\}^n$, $\mu \in_R \{\pm1\}$ ו-$z \in \{\pm1\}^n$ כאשר

$$
P(z_i=1) = 1-\epsilon,\ P(z_i=-1)=\epsilon
$$

ואז נבדוק $\mu\cdot f(\mu\cdot x)g(y) = f(z\cdot x\cdot y)$.

נשים לב שמילת Long Code חוקית עוברת ב-$1-\epsilon$ (ההסת' ש-$z_i$ עבור $i$ הקוורדינטה המקודדת היא $1$, כי ב-$-1$ המבחן נכשל).

נניח ש-

$$\frac{1}{2}+\delta \leq P\left(\mu \cdot f\left(\mu \cdot x\right) g\left(y\right)=f\left(z \cdot x \cdot y\right)\right)$$

לכן מכפלת האגפים תהיה $1$ בהסת' לפחות $\frac{1}{2}+\delta$ ו-$-1$ בהסת' לכל היותר $\frac{1}{2}-\delta$ ובמעבר לתוחלת נקבל

$$\begin{aligned}
2\delta &\leq E\left[\mu \cdot f\left(\mu \cdot x\right) g\left(y\right) f\left(z \cdot x \cdot y\right)\right] \\
&= E\left[\mu\left(\sum_{S} \hat{f}\left(S\right) \chi_{S}\left(\mu \cdot x\right)\right)\left(\sum_{T} \hat{g}\left(T\right) \chi_{T}\left(y\right)\right)\left(\sum_{R} \hat{f}\left(R\right) \chi_{R}\left(z \cdot x \cdot y\right)\right)\right] \\
&= \sum_{S,T,R} \hat{f}\left(S\right) \hat{g}\left(T\right) \hat{f}\left(R\right) \cdot E\left[\mu \cdot \chi_{S}\left(\mu \cdot 1^{n}\right) \chi_{S}\left(x\right) \chi_{T}\left(y\right) \chi_{R}\left(z\right) \chi_{R}\left(x\right) \chi_{R}\left(y\right)\right] \\
&= \sum_{S,T,R} \hat{f}\left(S\right) \hat{g}\left(T\right) \hat{f}\left(R\right) \cdot E_{\mu}\left[\mu \cdot \chi_{S}\left(\mu \cdot 1^{n}\right)\right] \cdot E\left[\chi_{S}\left(x\right) \chi_{R}\left(x\right)\right] \cdot E_{y}\left[\chi_{T}\left(y\right) \chi_{R}\left(y\right)\right] E_{z}\left[\chi_{R}\left(z\right)\right] \\
&= \sum_{S,T,R} \hat{f}\left(S\right) \hat{g}\left(T\right) \hat{f}\left(R\right) \cdot E_{\mu}\left[\mu \cdot \chi_{S}\left(\mu \cdot 1^{n}\right)\right] \cdot \delta_{S,R} \cdot \delta_{T,R} \cdot E_{z}\left[\chi_{R}\left(z\right)\right] \\
&= \sum_{S} \hat{f}\left(S\right)^{2} \hat{g}\left(S\right) \cdot E_{\mu}\left[\mu \cdot \chi_{S}\left(\mu \cdot 1^{n}\right)\right] E\left[\chi_{S}\left(z\right)\right] \\
(*) &= \sum_{S: 2 \nmid |S|} \hat{f}\left(S\right)^{2} \hat{g}\left(S\right) \cdot E\left[\chi_{S}\left(z\right)\right]
\end{aligned}$$

$(*)$ עבור $|S|$ זוגי מתקיים $E_{\mu}\left[\mu \cdot \chi_{S}\left(\mu \cdot 1^{n}\right)\right]=E_{\mu_R \in \{\pm 1\}^{n}}\left[\mu^{|S|+1}\right]=0$.

**הערה** אם למבחן הייתה שלמות של $1$ היינו מקבלים שלפתור מערכת משוואות לינאריות זה קשה ב-NP שזה לא פשוט לא נכון (תהליך גאוס-ז'ורדן).