מבוא להסתברות וסטטיסטיקה | 80430

הרצאות | ד"ר נעה ניצן וד"ר אוהד נוי פלדהיים

כתיבה | נמרוד רק

תשפ"ב סמסטר א'

כל תרגול מופיע בשבוע שרלוונטי לנושא שלו, ולכן ייתכן שהועבר בשבוע שלפני המקום בו הוא מופיע בסיכום. תרגולים ע"פ קבוצה א' עם מר מרק בל.

𝕆 הגדרות

נספח רשימות | (הגדרות/משפטים)

𝕆 תזכורת מקורסים אחרים | תרגול

𝕀 מבוא ומרחב הסתברות | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕀𝕀 פרדקוס יום ההולדת וכלים לחישוב הסתברויות | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕀𝕀𝕀 הסתברות מותנית | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕀𝕍 פרדוקס שני הילדים ומשתנים מקריים | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕍 משתנים מקריים לעומק | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕍𝕀 טוחנים משתנים מקריים | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕍𝕀𝕀 התפלגות פואסונית ותוחלת | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕍𝕀𝕀𝕀 תוחלת ושונות | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕀𝕏 שונות משותפת וא"ש צ'בישב | הרצאה (א')

𝕏 הקשר לאלגברה לינארית, ריגרסיה לינארית ומומנטים | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕏𝕀 א"ש הופדינג ומרחבי הסתברות כלליים | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕏𝕀𝕀 הכל על מ"מ רציפים והתפלגות משותפת | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕏𝕀𝕀𝕀 התפלגויות נורמליות ומעריכית והתכנסות בהתפלגות | הרצאה (א'/ב') • תרגול

𝕏𝕀𝕍 התכנסות בהתפלגות וסטטיסטיקה היסקית | הרצאה (א'/ב') • תרגול

נספח | רשימות

רשימות אלו נוצרו באופן אטומטי, ע"י קוד פייתון שכתבתי לפני שנתיים עם תיעוד מינימלי שהיה מקבל ציון מאוד נמוך באינטרו. NSO - אם אתם קוראים את זה, תסתכלו לי בתיק פרויקטים וקחו אותי לרדוף עיתונאיים דחוף.

הגדרות

1. תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות. נאמר כי A_n עולה אם $A_n \subseteq A_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, ויורדת אם $A_n \supseteq A_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
2. תהיינה $\varnothing \neq \Omega \subseteq A$. הפונקציה המציינת של A היא $\mathbb{1}_A : \Omega \to \{0,1\}$ המוגדרת ע"י $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x\in A \\ 0 & x\notin A \end{cases}$, $\forall x\in\Omega$.
3. מרחב המדגם (מסומן ב-Ω) הוא אוסף התוצאות האפשרויות בניסוי.
4. יהי Ω מרחב מדגם. פ' $P:\Omega\to[0,1]$ המקיימת $\sum\limits_{\omega\in\Omega} P(\omega)=1$ נקראת פונקציית הסתברות נקודתית.
5. יהי Ω מרחב מדגם. מאורע הוא תת קבוצה של Ω. אוסף המאורעות מסומן ב-$\mathcal{F}=2^{\Omega}=\{A : A\subseteq\Omega\}$.
6. יהי Ω מרחב מדגם. פ' $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ המקיימת:
7. תהי פ' הסתברות נקודתית. התומך של p הוא $\text{supp}(p)=\{\omega\in\Omega : p(\omega)>0\}$, כלומר כל הערכים שיש סיכוי שיקרו.
8. עבור פ' הסתברות P עם $P(A)=1$ אז נאמר כי P נתמכת על A.
9. יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. נאמר כי P היא פונקציית הסתברות בדידה אם קיימת פ' הסתברות נקודתית $p:\Omega\to\mathbb{R}_+$ כך ש-$P=P_p$. במקרה כזה נאמר כי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ הוא מרחב הסתברות בדידה.
10. יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות ומאורע A המקיים $P(A)=1$. נאמר כי A מתרחש כמעט תמיד.
11. מרחב הסתברות בדידה $(\Omega,\mathcal{F},P)$ נקרא אחיד אם $p(\omega_1)=p(\omega_2)$, $\forall\omega_1,\omega_2\in\Omega$.
12. תהיינה $p_1:\Omega_1\to[0,1]$, $p_2:\Omega_2\to[0,1]$ פ' הסת' נקודתיות. נגדיר $p_1\times p_2 : \Omega_1\times\Omega_2\to[0,1]$ ע"י
$$p_1\times p_2\left((\omega_1,\omega_2)\right)=p_1(\omega_1)\,p_2(\omega_2)$$
$\forall(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2$.
13. יהיו $(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_{p_1}),(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_{p_2})$ מ"ה. המרחב $\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F}=2^{\Omega_1\times\Omega_2},P_{p_1\times p_2}\right)$ הוא מרחב המכפלה של המ"ה-ים. מאורע מהצורה $A\times B$ נקרא מאורע מכפלה.
14. יהיו Ω_1,Ω_2 מרחבי מדגם. ניסוי דו שלבי מתואר ע"י פ' הסת' נקודתית p על Ω_1 ו-$\forall\omega_1\in\Omega_1$ נתונה פ' הסת' נקודתית p_{ω_1} על Ω_2. בניסוי הדו שלבי מרחב המדגם הוא $\Omega_1\times\Omega_2$ ופ' הסת' הנקודתית $q:\Omega_1\times\Omega_2\to[0,1]$ כך שעבור $(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2$, $q(\omega_1,\omega_2)=p(\omega_1)\cdot p_{\omega_1}(\omega_2)$.

15. חלוקה $\mathcal{A}$ של המרחב מדגם Ω היא אוסף מאורעות זרים שאיחודם הוא Ω. $\mathcal{A}$ בת מניה תקרא חלוקה בת מניה.

16. יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסת', יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$P(B)>0$ אז ההסתברות המותנית של A בהינתן B היא

$$P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

17. נאמר כי יש בין A,B אי-תלות אם ל-A,B הסת' חיובית ובנוסף $P(A\mid B)=P(A)$ או לחלופין ש-$P(B\mid A)=P(B)$.

18. נאמר כי A,B מאורעות בלתי תלויים (ב"ת) אם $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

19. יהיו $A,B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{F}$. נאמר כי A ב"ת ב-$\{B_1,\ldots,B_n\}$ אם $\forall I\subseteq[n]$ מתקיים כי A ב"ת במאורע $\bigcap_{i\in I}B_i$.

20. (סימטרית, לעומת הקודמת) אוסף מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ יקראו ב"ת אם לכל $\varnothing\neq I\subseteq[n]$ אם $P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)=\prod_{i\in I}P(A_i)$.

21. מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ יקראו ב"ת בזוגות אם $\forall i\neq j$ מתקיים כי A_i,A_j ב"ת.

22. אוסף מאורעות $\mathcal{A}$ נקרא ב"ת אם כל תת אוסף סופי של מאורעות מתוך $\mathcal{A}$ הוא ב"ת.

23. יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה. משתנה מקרי הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

24. עבור מ"מ, נגדיר פ' $P_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $P_X(S)=P\left(X^{-1}(S)\right)$.

25. יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה ו-$A\in\mathcal{F}$. המ"מ $X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \omega\notin A\end{cases}$ נקרא המשתנה המציין (אינדיקטור) של A ומסומן ב-$\mathbb{1}_A$.

26. יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$. הפ' $P_X:\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\to[0,1]$ כך ש-$P_X=P\left(X^{-1}(S)\right)$, $\forall S\in\mathcal{F}_R$ נקראת התפלגות על X.

27. יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ המקיים $P_X=D$, נאמר כי X מתפלג לפי D ונסמן $X\sim D$. אם P_X היא פ' הסת' בדידה אז נאמר של-X יש התפלגות בדידה או ש-X הוא מ"מ בדיד. אם X מ"מ בדיד, פ' ההסת' הנקודתית המתאימה תסומן p_X ותכונה פונקציית ההתפלגות הנקודתית של X. לתומך של p_X נקרא התומך של X. אם $P_X(S)=1$, $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ אז נאמר שהמ"מ X נתמך על S.

28. יהיו X,Y מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

29. יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$. נגדיר $(X\mid A)$ המ"מ X על $(\Omega,\mathcal{F},P_A)$.

30. יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי. אזי $P_X=P_{X_1,\ldots,X_n}:\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\to[0,1]$ המוגדרת ע"י

$$P_X(A)=P\left(X^{-1}(A)\right)=P\left(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in A\}\right)$$

היא ההתפלגות המשותפת של X. ההתפלגות של כל X_k נקראת ההתפלגות השולית של P_X.

31. נאמר כי מ"מ X מתפלג ברנולי עם פרמטר p אם

$$P(X=0)=1-p$$
$$P(X=1)=p$$
$$P(X=\alpha)=0, \forall\alpha\notin\{0,1\}$$

ונסמן $X\sim \text{Ber}(p)$.

32. אוסף סופי של מ"מ $X=(X_1,\ldots,X_n)$ המוגדרים על אותו מ"ה נקרא וקטור מקרי.

33. יהיו X,Y מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ אז ההתפלגות המשותפת שלהם היא פ' $P_{XY}:\mathbb{R}^2\to[0,1]$ כך ש-

$$\begin{aligned}P_{XY}((a,b))&=P(X=a,Y=b)\\&=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)=a,Y=(\omega)=b\})\end{aligned}$$

ובאופן כללי אם $S,T\subseteq\mathbb{R}$ אזי

$$\begin{aligned}P_{XY}(S,T)&=P(X\in S\wedge Y\in T)\\&=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in S,Y(\omega)\in T\})\end{aligned}$$

34. וקטור מקרי (X,Y) יקרא בדיד והתפלגותו תקרא בדידה אם P_{XY} פ' הסת' בדידה.

35. אם $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ מוגדרים על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},P)$, אז $X=(X_1,\ldots,X_n)$ הוא וקטור מקרי ממימד n.

36. יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי ממימד n על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},P)$. הפ' $P_{X_1,\ldots,X_n}=P_X:\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\to[0,1]$ המוגדרת $\forall S\subseteq\mathbb{R}^n$,

$$P_X(S)=P(\{\omega\in\Omega:X_1(\omega)\wedge\cdots\wedge X_n(\omega)\})$$

נקראת ההתפלגות המשותפת.

37. יהיו X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ ו-$A\in\mathcal{F}$ כך ש-$P(A)>0$. X הוא מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P_A)$.

38. מ"מ X,Y על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ יקראו בלתי תלויים אם $\forall A,B\subseteq\mathbb{R}$,

$$P(X\in A\wedge Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$$

או במילים אחרות, אם המאורעות $\{X\in A\}$ ו-$\{Y\in B\}$ הם ב"ת.

39. סדרת מ"מ $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ב"ת אם לכל $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$,

$$P\left(\{X_n \in S_n : n \in \mathbb{N}\}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} P\left(X_n \in S_n\right)$$

40. יהיו $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ המוגדרים על אותו מ"ה. נאמר כי הם בלתי תלויים כאוסף אם לכל n קבוצות $S_1, \ldots, S_n \subseteq \mathbb{R}$, המאורעות $\{X \in S_1\}, \ldots, \{S_n \in S_n\} \in \mathcal{F}$ ב"ת.

41. נאמר סדרת מ"מ $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ היא בלתי תלויה אם כל תת אוסף סופי שלה הוא ב"ת.

42. עבור X מ"מ, $\overline{F}_X(n) = P(X > n)$ נקראת ההתפלגות השיורית של X.

43. X מ"מ מתפלג פואסון עם שכיחות $\lambda > 0$ אם לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ ונסמן $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

44. יהי X מ"מ המקבל ערכים ב-$\mathbb{N} \cup \{0\}$ ויהי $\lambda > 0$. נאמר כי X מתפלג פואסון עם שכיחות λ אם $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

במקרה זה נסמן $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

45. יהי X מ"מ בדיד. התוחלת של X מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha P(X = \alpha) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\, p(\omega) \end{aligned}$$

46. יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת סופית. השונות של X מוגדרת ע"י $\text{var}(X) = E\left[(x - E[X])^2\right]$.

47. סטיית התקן של X מ"מ בדיד בעל תוחלת היא $\sigma = \sqrt{\text{var}(X)}$.

48. יהיו X, Y מ"מ בעלי שונות. השונות המשותפת של X, Y היא $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.

49. אם $\text{cov}(X, Y) = 0$, נאמר כי X, Y הם בלתי מתואמים.

50. יהיו X, Y מ"מ ב"ש אז מקדם המתאם שלהם הוא $\text{corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

51. יהי X מ"מ. המומנט מסדר k של X הוא $m_k(X) = E\left[X^k\right]$. המומנט המרכזי מסדר k של X הוא

$$M_k(X) = E\left[(X - E[X])^k\right]$$

52. יהי X מ"מ. נגדיר $M_X(t) = E\left[e^{tx}\right]$ נקראת הפונקציה היוצרת מומנטים של X.

53. אם X, Y בעלי שונות אז $Z = E[X] + \frac{\operatorname{cov}(X,Y)(Y-E[Y])}{\operatorname{var}(Y)}$ הוא הריגרסיה הלינארית של X על בסיס Y.

54. יהי Ω מרחב מדגם. קבוצה $F \subseteq 2^{\Omega}$ תקרא σ-אלגברה אם:

55. תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על מרחב המדגם Ω ותהי $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ פ' הסת'. אזי השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ נקראת מרחב הסתברות.

56. σ-אלגברה בורל (על $\mathbb{R}$) המסומנת $\mathcal{F} = B(\mathbb{R})$ היא ה-σ-אלגברה המינימלית המכילה את כל הקטעים מהצורה $[a,b]$ (כלומר אם $\mathcal{F}$ σ-אלגברה כלשהי שמכילה את כל הקטעים $[a,b]$ אז $B(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$).

57. לכל קטע $I \subseteq \mathbb{R}$, σ-אלגברה בורל על I היא $B(I) = \{A \cap I : A \in B(\mathbb{R})\}$.

58. משתנה מקרי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא פ' המקיימת שלכל $a < b$, $X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}$ (במילים אחרות - יש תשובה לשאלה מה ההסת' ש-$a \le X(\omega) \le b$).

59. אם x מ"מ על מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ההתפלגות של X היא הפ' $P_X : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right)$, $\forall A \in B(\mathbb{R})$ ונסמן $X \sim P_X$.

60. יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. הפ' $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ המוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$ ע"י $F_X(t) = P(X \le t) = P((-\infty, t])$ נקראת פונקציית ההתפלגות המצטברת. $\overline{F}_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $\overline{F}_X(t) = P(X > t)$ נקראת פונקציית ההתפלגות השיורית.

61. יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

62. יהי X מ"מ. נאמר כי X רציף בהחלט אם קיימת פ' אינטגרבילית $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\ \mathrm{dx}$$

f נקראת הצפיפות של X והיא מסומנת ב-f_x.

63. יהי X מ"מ על מ"ה (לא בהכרח בדיד). נאמר כי X רציף אם קיימת $p_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $-\infty \le a \le b \le \infty$ מתקיים $P(a \le X \le b) = \int_a^b p_X(t)\ \mathrm{dt}$. p_X נקראת הצפיפות של X.

64. יהיו X, Y מ"מ על אותו מ"ה. פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת של X, Y היא $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $F_{X,Y}(a,b) = P(X \le a, Y \le b)$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

65. יהיו X, Y מ"מ מעל $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. נאמר כי יש להם צפיפות משותפת אם קיימת $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty)$ המקיימת כי לכל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{dy}\ \mathrm{dx}$$

66. יהי X מ"מ רציף בהחלט עם צפיפות f_X. התוחלת של X היא $E[X]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} sf_X(s)\ \mathrm{ds}$. התוחלת מוגדרת רק אם האינטגרל מתכנס בהחלט.

67. עבור X מ"מ רציף בהחלט בעל תוחלת, השונות של X מוגדרת ע"י $\mathrm{var}(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[X^2\right]-E[X]^2$.

68. בהינתן $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, נאמר כי $X\sim\mathrm{Unif}([a,b])$ אם צפיפותו היא $f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

69. יהי X עם פ' התפלגות F_X. נגדיר $Q_X:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $Q_X(t)=\inf F_X^{-1}([t,\infty))$ (אם F עולה חזק אז $Q_X(t)=F_X^{-1}(t)$). Q_X נקרא האחוזון של X.

70. X,Y יקראו בלתי תלויים אם לכל $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $P(X\in A,Y\in B)=P(X\in A)P(Y\in B)$.

71. X מתפלג קושי עם פרמטרים $(0,1)$ אם $f_X(t)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+1}$.

72. תהי D קבוצה עם שטח Ψ. נאמר של-(X,Y) צפיפות משותפת אחידה אם מתקיים $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\Psi} & (x,y)\in D\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

73. נאמר כי X מתפלג מעריכית עם פרמטר $\lambda>0$ ונסמן $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ אם צפיפותו היא $f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

74. יהיו X,Y מ"מ רציפים בהחלט בעלי התפלגות משותפת. הצפיפות של X בהינתן $Y=t$ (המקיים $f_Y(t)\neq 0$ ו-f_Y רציפה ב-t) נתונה ע"י

$$f_{X|Y=t}(s)=\frac{f_{XY}(s,t)}{f_Y(t)}=\frac{f_{XY}(s,t)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u,t)\ \mathrm{du}}$$

75. נאמר כי X מ"מ מתפלג נורמלית אם $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ כאשר μ התוחלת ו-σ^2 ונסמן $X\sim\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$.

76. נאמר כי X נורמלי תקני/סטנדרטי אם $X\sim\mathrm{N}(0,1)$ ובמקרה זה $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}$ ועקומתו נקראת עקומת הפעמון ונאמר כי X מתפלג גאוסיאנית.

77. יהיו X_n סדרת מ"מ, X מ"מ. נאמר כי X_n מתכנס בהתפלגות ל-X אם מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$, לכל t שבה F_X רציפה.

78. ההסת' לטעות מסוג I נקראת רמת המובהקות ומוגדרת ע"י

$$\alpha=P_{H_0}(X\in\mathcal{S})=P_{H_0}(\mathrm{Test}(x)=H_1)$$

$1-\alpha$ נקרא רמת הסמך.

79. ההסת' לטעות מסוג II ומוגדרת ע"י

$$\beta = P_{H_1}\left(X \notin \mathcal{S}\right) = P_{H_1}\left(\text{Test}\left(x\right) = H_0\right)$$

$1-\beta$ נקראת העוצמה של $\mathcal{S}$.

80. מבחן C טוב לפחות כמו מבחן D אם $\alpha_C \geq \alpha_D$ וגם $\beta_C \geq \beta_D$.

81. מבחן C טוב ממש ממבחן D אם C טוב לפחות כמו D ולפחות אחד מהא"ש מתקיים כאי שוויון חזק.

82. מבחן הוא מיטבי אם אין מבחן שטוב ממש ממנו.

83. עבור מבחן $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ נקרא אזור הדחייה ואילו $\mathcal{S}^C$ נקרא אזור הקבלה.

84. סטטיסטי הוא פ' של הדגימות $f\left(x\right)$. מבחן רף ע"פ הסטטיסטי $f\left(x\right)$ הוא $\mathcal{S} = \left\{f\left(x\right) < \alpha_0\right\}$.

85. נראות לפי H של דגימה $X=s$ היא $P_H\left(X=s\right)$. יחס הנראות בנקודה $X=s$ הוא $\frac{P_{H_0}(X=j)}{P_{H_1}(X=j)}$.

86. תהי D התפלגות לא ידועה. דגימות ב"ת מהתפלגות D זו סדרת ערכים $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ המתקבלת מ-$\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ כך ש-$X_j \sim D$ ב"ת.

87. תהי D התפלגות שהיא אחת מבין D_0, D_1. נסמן ב-H_0 את ההשערה ש-$D=D_0$ וב-H_1 את ההשערה ש-$D=D_1$.

88. מבחן הוא קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}^n$ כך שלכל דגימה $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, אם $\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in S$ נדחה את H_0 ואחרת נקבל את H_0.

89. תהי D התפלגות בדידה או רציפה בהחלט, $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ דגימה. פונקציית הנראות מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D\left(x_1,\ldots,x_n\right) &= P_D\left(X_1 = x_1,\ldots,X_n = x_n\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n} P_D\left(X_j = x_j\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n} f_{X_n}\left(x_j\right)\end{aligned}$$

90. נאמר ש-$C = \left\{X \in S\right\}$ הוא מבחן יחס נראות עם רף η אם לכל $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ כך ש-$r\left(x_1,\ldots,x_n\right) < \eta$ מתקיים $\left(x_1,\ldots,x_n\right) \in S$ ואם $r\left(x_1,\ldots,x_n\right) > \eta$ אז $\left(x_1,\ldots,x_n\right) \notin S$.

משפטים

1. תהי Ω קבוצה כלשהי. ההתאמה $\forall A \subseteq \Omega$,$A \mapsto \mathbb{1}_A$ זו התאמה חחע"ל מ-2^Ω (קבוצת החזקה) ל-$\{0,1\}^\Omega$.

2. (1.5) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות . אזי:

3. תהי $p : \Omega \to \mathbb{R}_+$ פ' הסתברות נקודתית על Ω אזי $P_p : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $\forall A \in \mathcal{F}$,$P_p(A) = \sum\limits_{\omega \in A} p(\omega)$ היא פ' הסתברות.

4. כל פ' הסתברות נקודתית משרה פ' הסתברות.

5. (אפיון מרחבי הסתברות בדידה) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסתברות. אזי התנאים הבאים שקולים:

6. $p_1 \times p_2$ היא פ' הסתברות נקודתית על $\Omega_1 \times \Omega_2$.

7. בתנאים הנ"ל, אם $A \in \mathcal{F}_1$, $B \in \mathcal{F}_2$ אזי $P_{p_1 \times p_2}(A \times B) = P_{p_1}(A) \cdot P_{p_2}(B)$.

8. (נוסחת ההסתברות השלמה) יהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מניה של Ω, ו-$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מרחב הסת'. אזי $\forall D \in \mathcal{F}$,$P(D) = \sum\limits_{A \in \mathcal{A}} P(A \cap D)$.

9. $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$.

10. (חסם האיחוד) אם $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ אז $P\left(\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) \leq \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} P(A_i)$.

11. (עקרון ההכלה וההדחה עם $n=2$) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

12. (עקרון ההכלה וההדחה עם $n=3$)

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

13. (עקרון ההכלה וההדחה)

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i \in [n]}\right) &= P(A_1) + \cdots + P(A_n) - \sum_{|I|=2} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) + \sum_{|I|=3} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) - \ldots + (-1)^{|I|+1} \sum_{|I|=n} P(A_i) \\ &= \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \end{aligned}$$

14. אם $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ה, $B \in \mathcal{F}$, $P(B) > 0$. נגדיר $P_B : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ ע"י $P_B(A) = P(A|B)$ אזי P_B פ' הסת'.

15. (כלל השרשרת) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ מ"ה, $P(B) > 0$, $A \in \mathcal{F}$, אז $P(A \cap B) = P(A|B) P(B)$ (שזה אינטואיטיבי, הסטודנטית המשקיעה תחשוב למה).

16. (כלל בייס) אם גם $P\left(A\right)>0$, אז $P\left(B|A\right)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

17. יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\Omega\right)$ ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$P\left(A\cap B\right)>0$. נסמן $P'=P_{A},P''=\left(P_{A}\right)_{B}$ אזי $\forall D\in\mathcal{F}$ מתקיים $P''\left(D\right)=P\left(D|A\cap B\right)$, כלומר $\left(P_{A}\right)_{B}=P_{A\cap B}=\left(P_{B}\right)_{A}$ (או במילים, סדר ההתנייה לא משפיע על פ' ההסת').

18. תחת הסימונים הנ"ל, הפ' P_{q} היא היחידה המקיימת $\forall a\in\Omega_{1},b\in\Omega_{2}$ כי $P\left(\left\{ \left(a,\cdot\right)\right\} \right)=p\left(a\right)$ וכן

$$P\left(\left\{ \left(\cdot,b\right)\right\} \mid\left\{ \left(a,\cdot\right)\right\} \right)=p_{a}\left(b\right)$$

כאשר $\left\{ \left(a,\cdot\right)\right\} =\left\{ a\right\} \times\Omega_{2}$ ו-$\left\{ \left(\cdot,b\right)\right\} =\Omega_{1}\times\left\{ b\right\}$.

19. יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ מאורעות ב"ת אזי:

20. יהיו $A_{1},\ldots,A_{n}\in\mathcal{F}$. $A_{1},\ldots,A_{n}$ מאורעות ב"ת אם"ם $\forall j\in\left[n\right]$ המאורע A_{j} ב"ת ביתר המאורעות $\left\{ A_{i}\mid j\neq i\in\left[n\right]\right\}$.

21. אם $A_{1},A_{2},\ldots$ מאורעות ב"ת אז $P\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}}A_{I}\right)=\prod_{i\in\mathbb{N}}P\left(A_{i}\right)$.

22. יהי X מ"מ על $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$. אז $\left(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},P_{X}\right)$ היא מ"ה.

23. אם $X\overset{a.s}{=}Y$ אז $X\overset{d}{=}Y$.

24. אם $X\overset{a.s}{=}Y$ אז $f\left(x\right)\overset{a.s}{=}f\left(y\right)$ וגם אם $X\overset{d}{=}Y$ אז $f\left(x\right)\overset{d}{=}f\left(y\right)$.

25. הפ' P_{XY} היא פ' הסת'.

26. לא ניתן ללמוד מ-P_{X},P_{Y} האם $X\overset{a.s.}{=}Y$ או איך מתפלג $X+Y$.

27. P_{X} היא פ' הסת'.

28. וקטור מקרי $X=\left(x_{1},\ldots,x_{n}\right)$ הינו בדיד אם"ם $X_{1},\ldots,X_{n}$ מ"מ בדידים (כלומר ההתפלגויות השוליות בדידות).

29. אם $X=\left(X_{1},\ldots,X_{n}\right)$ וקטורמ מקרי בדיד אז נוכל לחשב את ההתפלגות השולית הנקודתית לכל אחד מ-$X_{1},\ldots,X_{n}$ בעזרת פ' ההתפלגות הנקודתית של X,

$$P_{X_{k}}\left(\alpha_{k}\right)=\sum_{\left(\alpha_{1},\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n}\right)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}}P_{X}\left(\alpha_{1},\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_{k},\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_{n}\right)$$

30. (תכונת חוסר הזיכרון) אם $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$ אז $P\left(X=n+k\mid X>k\right)=P\left(X=n\right)$.

31. אם $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$, $Y\sim\text{Geo}\left(q\right)$, אז $\min\left(X,Y\right)\sim\text{Geo}\left(1-\left(1-p\right)\left(1-q\right)\right)$.

32. $X\sim\text{Ber}\left(p\right)$ ו-$Y\sim\text{Ber}\left(q\right)$ ו-X,Y ב"ת. אזי $XY\sim\text{Ber}\left(pq\right)$.

33. (נוסחת הקונבולוציה) X,Y מ"מ ב"ת הנתמכים על $\mathbb{Z}$, $Z=X+Y$. אזי

$$P\left(Z=n\right)=\sum_{j\in\mathbb{Z}}P\left(X=j\right)P\left(X=n-j\right)$$

34. $\left\{ X_n\right\}$ סדרת מ"מ ב"ת שווי התפלגות ולא קבועים על $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$. הראו כי המרחב לא בדיד.

35. יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות ותהי $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ כך ש-$P\left(X\in S\right)>0$ אזי $P_{X|\left\{ X\in S\right\} }=P_{Y|\left\{ Y\in S\right\} }$.

36. יהיו X,Y מ"מ בדידים אז X,Y ב"ת אם"ם $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$P\left(X=\alpha\wedge Y=\beta\right)=P\left(X=\alpha\right)P\left(Y=\beta\right)$$

37. $X_1,\ldots,X_n$ ב"ת אם"ם לכל $S_1,\ldots,S_n\subseteq\mathbb{R}$ $P\left(X\in S_1\wedge\ldots\wedge X_n\in S_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i\in S_i\right)$.

38. אם X,Y מ"מ ב"ת, ו-$f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אז $f\left(X\right),g\left(Y\right)$ מ"מ ב"ת.

39. אם $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ ב"ת ו-$0=b_0<\ldots<b_k=n$ אז הוקטורים המקריים $Y_1=\left(X_1,\ldots,X_{b_1}\right)$, $Y_2=\left(X_{b_1+1},\ldots,X_{b_2}\right)$ עד $Y_k=\left(X_{b_k+1},\ldots,X_{b_k}\right)$ הם ב"ת.

40. תהי $\left\{ X_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת מ"מ ב"ת ו-$\left\{ S_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, אזי

$$P\left(X_i\in S_i,\forall i\in\mathbb{N}\right)=\prod_{i\in\mathbb{N}}P\left(X_i\in S_i\right)$$

41. $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$ אם"ם $P\left(X>n\right)=\left(1-p\right)^{n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

42. יהי X מ"מ הנתמך על $\mathbb{N}$ המקיים $P\left(X=1\right)<1$. אזי שלושת התנאים הבאים שקולים:

43. אם $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ ו-$Y\sim\text{Bin}\left(m,p\right)$ הם מ"מ ב"ת אז $X+Y\sim\text{Bin}\left(m+n,p\right)$.

44. יהי λ ויהיו $X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ סדרת מ"מ אז $\forall k\in\mathbb{N}\cup\left\{ 0\right\}$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(X_n=k\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

45. $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$ ו-$Y\sim\text{Pois}\left(\mu\right)$, X,Y ב"ת אז $Z=X+Y\sim\text{Pois}\left(\lambda+\mu\right)$.

46. יהי $X \sim \text{Pois}\left(\lambda\right)$. נניח שלכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, מתקיים $\left(Y \mid X = n\right) \sim \text{Bin}\left(n, p\right)$ אז $Y \sim \text{Pois}\left(\lambda p\right)$.

47. $E\left[X\right] = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} \alpha P\left(X = \alpha\right)$.

48. יהי X מ"מ בדיד ותהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נסמן $Y = f\left(X\right)$ אזי $E\left[Y\right] = \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{R}} f\left(\alpha\right) P\left(X = \alpha\right)$.

49. (תכונות התוחלת) יהיו X, Y מ"מ בדידים. אזי:

50. אם X מ"מ כך ש-$\text{supp}\left(X\right) \subseteq \mathbb{N}$ אזי $E\left[X\right] = \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} P\left(X \geq n\right)$.

51. אם X, Y מ"מ בדידים, ב"ת ובעלי תוחלת אז $E\left[XY\right] = E\left[X\right] E\left[Y\right]$.

52. יהיו X, Y מ"מ בדידים על אותו מ"ה אז X, Y ב"ת אם"ם לכל שתי פ' $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $E\left[f\left(X\right) g\left(Y\right)\right] = E\left[f\left(X\right)\right] E\left[g\left(Y\right)\right]$.

53. תהי $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ חלוקה של מ"ה ו-X מ"מ בדיד בעל תוחלת. אזי

$$E\left[X\right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} E\left[X \mid A_i\right] P\left(A_i\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} E\left[X \mathbb{1}_{A_i}\right]$$

54. אם X מ"מ בעלת תוחלת סופית, אזי $P\left(X \geq E\left[X\right]\right) > 0$ וגם $P\left(X \leq E\left[X\right]\right) > 0$.

55. (אי-שוויון מרקוב) אם $X \geq 0$ כמעט תמיד מ"מ בדיד בעל תוחלת אזי $\forall a > 0$ מתקיים $P\left(X \geq a\right) \leq \frac{E[X]}{a}$ (או לחלופין $\forall b > 0$, $P\left(X \geq bE\left[X\right]\right) \leq \frac{1}{b}$).

56. $\text{var}\left(X\right) = E\left[X^2\right] - E\left[X\right]^2$.

57. (א"ש צ'בישב) יהי X מ"מ בעלת תוחלת ושונות ו-$a > 0$. נסמן $\text{var}\left(X\right) = \sigma^2$. אזי $P\left(\left|X - E\left[X\right]\right| \geq a\right) \leq \frac{\text{var}(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$.

58. (החוק החלש של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרה אינסופית של מ"מ ב"ת ש"ה בעלי תוחלת (ושונות). נסמן $E\left[X_i\right] = \mu$. אזי $\forall \epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{N \to \infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

כלומר הסיכוי שבאינסוף ממוצא התוצאות יחרוג אפילו קצת מהתוחלת הוא זניח. לחלופין, ממוצע התוצאות מתכנס בטווח קטן ככל שנרצה לתוחלת.

59. $\text{cov}\left(X, Y\right) = E\left[XY\right] - E\left[X\right] E\left[Y\right]$.

60. $\text{var}\left(X + Y\right) = \text{var}\left(X\right) + \text{var}\left(Y\right) + 2\text{cov}\left(X, Y\right)$.

61. (שונות של סכום מ"מ) אם $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ בעלתי שונות אזי

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{var}\left(X_i\right) + 3 \sum_{1\le i<j\le n} \text{cov}\left(X_i, X_j\right)$$

62. (א"ש קושי-שוורץ הסתברותי) יהיו X, Y מ"מ ב"ש אז $E\left[XY\right]$ קיימת ומתקיים $E\left[XY\right] \le \sqrt{E\left[X^2\right]E\left[Y^2\right]}$.

63. אם X, Y בעלתי ושנות אז $\text{cov}\left(X,Y\right)$ מוגדר.

64. (א"ש קושי-שוורץ) יהיו $u, v \in \mathbb{R}^n$ אז $\langle u \mid v\rangle \le \|u\| \cdot \|v\|$.

65. $-1 \le \text{corr}\left(X,Y\right) \le 1$ ומתקיים $\text{corr}\left(X,Y\right) = 1$ כאשר $Y = aX + b$, $a > 0$ ו-$\text{corr}\left(X,Y\right) = -1$ כאשר $Y = aX + b$, $a < 0$.

66. (תוחלת כממזערת סטיה ריבועית) $\text{var}\left(X\right) = E\left[\left(X - E\left[X\right]\right)^2\right] \le E\left[\left(X-a\right)^2\right]$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

67. נגדיר $Z = X - \frac{\text{cov}(X,Y)Y}{\text{var}(Y)}$ אזי המ"מ Z בלתי מתואם עם Y ו-$\forall a \in \mathbb{R}$, $\text{var}\left(X - aY\right) \ge \text{var}\left(Z\right)$.

68. ה-a שנותן את המינימום שביקשנו הוא $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$.

69. עבור $a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$ ו-$b = -E\left[aY - X\right]$ נקבל קירוב לינארי מתחשב בהתפלגות מיטבי $aY + b$ ל-X. זה נקרא ריגרסיה לינארית.

70. $\forall k$ זוגי ו-$a > 0$, $P\left(\left|X - E\left[X\right]\right| \ge a\right) \le \frac{M_k(X)}{a^k}$.

71. (א"ש צ'רנוף) יהי X מ"מ עם פ' יוצרת מומנטים M_X, $a \in \mathbb{R}$. אזי $\forall t > 0$ עבורו $M_X\left(t\right)$ מוגדרת מתקיים

$$P\left(X \ge a\right) \le M_X\left(t\right)e^{-ta}$$

72. $\left|\text{corr}\left(X,Y\right)\right| \le 1$.

73. אם X בעל מומנט מעריכי (פ' יוצרת מומנטים) אז הנגזרת ה-k שלו ב-0 היא המומנט מסדר k, כלומר

$$M_k^{(k)}\left(0\right) = E\left[X^k\right] = m_k\left(X\right)$$

74. (הלמה של הופדינג) אם X מ"מ המקיים $|X| \le 1$ כמעט תמיד וכן $E\left[X\right] = 0$ אז לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $M_X\left(t\right) \le e^{\frac{t^2}{2}}$.

75. (אי שוויון הופדינג) יהיו $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת כך ש-$|X_i| \le 1$, $E\left[X_i\right] = 0$. אזי $\forall a > 0$ מתקיים

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ge a\right) \le e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

76. קיים מ"ה לא בדידה.

77. קיימת פ' הסת' על $B\left([0,1]\right)$ כך שלכל $0\leq a<b\leq 1$ מתקיים $P\left([a,b]\right)=b-a$ והיא נקראת מידת לבג.

78. יהיו X מ"מ, $a\in\mathbb{R}$, $P\left(X=a\right)=F_X\left(a\right)-\lim\limits_{t\to a^-}F_X\left(t\right)$ (הגבול קיים כי היא עולה וחסומה).

79. אם x,Y מ"מ כך ש-$F_X=F_Y$ אז $X\overset{d}{=}Y$.

80. יהי X מ"מ בעל צפיפות f_X ותהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית חזק וגזירה. אזי $Y=g\left(X\right)$ הוא מ"מ בעל צפיפות ולכל $y\in\mathbb{R}$, עם $x=g^{-1}\left(y\right)$ מתקיים $f_Y\left(y\right)=\frac{f_X(x)}{|g'(x)|}$.

81. יהי X מ"מ רציף בהחלט עם פ' צפיפות f_X. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ (איחוד בן מניה של קטעים זרים) כך ש-$P\left(X\in A\right)>0$ אז מתקיים שפ' הצפיפות של $X\mid X\in A$ ($X\mid B=X\mid X\in A$ ($B=\{X\in A\}$) נתונה ע"י

$$f_{X|X\in A}\left(a\right)=\frac{\mathbb{1}_A f_X\left(a\right)}{P\left(X\in A\right)}$$

82. לכל מ"מ רציף בהחלט,

$$E\left[X\right]=\int\limits_0^\infty\overline{F}_X\left(x\right)\,\mathrm{dx}-\int\limits_{-\infty}^0 F_X\left(x\right)\,\mathrm{dx}$$

83. יהיו X מ"מ עם צפיפות f_X, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונגדיר $Y=g\left(X\right)$ אזי $E\left[Y\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(s\right)f_X\left(s\right)\,\mathrm{ds}$.

84. X,Y מ"מ רציפים בהחלט בעלי תוחלת אז:

85. יהי $X\sim\mathrm{Unif}\left([a,b]\right)$ אז עבור $Y=\alpha X+\beta$, אזי $y\sim\mathrm{Unif}\left([\alpha a+\beta,\alpha b+\beta]\right)$.

86. (תוחלת של פ' של מ"מ X,Y) אם ל-X,Y צפיפות משותפת f_{XY}, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז

$$E\left[g\left(X,Y\right)\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}g\left(x,y\right)f_{XY}\left(x,y\right)\,\mathrm{dx}\,\mathrm{dy}$$

87. אם X,Y רציפים בהחלט אז X,Y ב"ת אם לכל $s,t\in\mathbb{R}$, $f_{XY}\left(s,t\right)=f_X\left(s\right)f_Y\left(t\right)$.

88. X,Y ב"ת אם"ם לכל $a<b,c<d\in\mathbb{R}$,

$$P\left(X\in[a,b],Y\in[c,d]\right)=P\left(X\in[a,b]\right)P\left(Y\in[c,d]\right)$$

89. אם X,Y רציפים בהחלט ובעלי צפיפות שולית אז $f_X\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,y\right)\,\mathrm{dy}$ וגם $f_Y\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,y\right)\,\mathrm{dx}$.

90. (פוביני טונלי) יהיו $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $f,g,h,\sigma,\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש-

$$D=\left\{(x,y):x\in[a,b]\,,g\left(x\right)\le y\le h\left(x\right)\right\}=\left\{(x,y):y\in[c,d]\,,\varphi\left(y\right)\le x\le\sigma\left(y\right)\right\}$$

אזי

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)\,\mathrm{dx\,dy}=\int\limits_a^b\int\limits_{g(x)}^{h(x)}f\left(x,y\right)\,\mathrm{dy\,dx}=\int\limits_c^d\int\limits_{\varphi(y)}^{\sigma(y)}f\left(x,y\right)\,\mathrm{dx\,dy}$$

91. (תכונת חוסר הזיכרון של המ"מ המעריכי) אם $X\sim\mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$ אז עבור $Y=\left(X-X_0\mid X>X_0\right)$ מתקיים $Y\sim\mathrm{Exp}\left(\lambda\right)$ (כאשר $X_0\ge 0$). כלומר, אם הצלחה לא התרחשה עד זמן X_0, אז הזמן שנותר עד הצלחה, $X-X_0$, מתפלג מעריכית.

92. (נוסחת הקונבולוציה) אם x,Y ב"ת עם צפיפויות f_X,f_Y אז

$$f_{XY}\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_X\left(s\right)f_Y\left(t-s\right)\,\mathrm{ds}$$

93. (נוסחת הסת' שלמה רציפה) לכל X,Y מ"מ בעלי צפיות משותפת מתקיים

$$f_X\left(s\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y\left(t\right)f_{X|Y=t}\left(s\right)\,\mathrm{dt}$$

94. (נוסחת הקובנולוציה) $f_{XY}\left(s\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y\left(t\right)f_X\left(s-t\right)\,\mathrm{dt}$.

95. יהיו $X_1\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ ו-$X_2\sim\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ אזי:

96. (משפט הגבול המרכזי) יהיו $X_1,X_2,\ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה עם $\mathrm{var}\left(X_i\right)=1$ ו-$E\left[X_i\right]=0$ אזי $\frac{\sum\limits_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}Z$ כאשר $Z\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$.

97. (שקול לגבול המרכזי) יהיו X_n מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת μ ושונות σ^2 אז עבור $Y_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^n\frac{X_i-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}$ מתקיים $Y_n\xrightarrow{d}Z$ כאשר $Z\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$.

98. יהיו $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ ב"ת כך ש-$X_i\sim\mathrm{Exp}\left(\lambda_i\right)$ אז $\min\left\{X_1,\ldots,X_n\right\}\sim\mathrm{Exp}\left(\sum\limits_{i=1}^n\lambda_i\right)$.

99. (הרחבה של הגבול המרכזי) עבור $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה כך ש-$E[X_i] = \mu$, $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$, $Z' \xrightarrow{d} \sum_{i=1}^{n}$ כאשר $Z' \sim \mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

100. (הלמה של ניימן-פירסון) המבחן המיטבי לכל α נתון הוא מבחן רף ליחס הנראות, כלומר קיים $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ כך שהמבחן המיטבי מהצורה

$$\mathrm{Test}(x) = \begin{cases} H_0 & \frac{P_{H_0}(x)}{P_{H_1}(x)} > \lambda_0 \\ H_1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

101. $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{U}([0,1])$ ב"ת. נגדיר $Y_n = n(1 - \max\{X_1, \ldots, X_n\})$. אזי $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

102. נגדיר סדרה $\{X_n\}$ ע"י $f_{X_n}(x) = (1 - \cos(2\pi n x))\mathbb{1}_{[0,1]}$ (כלומר קוסינוסים שנדחסים עוד ועוד על $[0,1]$) אזי $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{U}([0,1])$.

103. תהי $\{X_n\}$ סדרת מ"מ ו-X מ"מ.

104. (הלמה של ניימן-פירסון) יהי C מבחן יחס נראות. אזי C מיטבי.

שבוע $\mathbb{O}$ | תזכורת מקורסים אחרים

תרגול

סקרנו קבוצות, פונקציות, חוקי דה-מורגן, מכפלה קרטזית, משלים, פעולות על קבוצות, ועוד דברים שעושים בדיסקרטית ולא כאן.

הגדרה תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת קבוצות. נאמר כי A_n עולה אם $\forall n\in\mathbb{N}$,$A_n\subseteq A_{n+1}$, ויורדת אם $\forall n\in\mathbb{N}$,$A_n\supseteq A_{n+1}$.

דוגמה $\{[0,n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ היא עולה ואילו $B_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_n$ היא יורדת, לכל סדרת קבוצות $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

הגדרה תהיינה $A\subseteq\Omega\neq\varnothing$. הפונקציה המציינת של A היא $\mathbb{1}_A:\Omega\to\{0,1\}$ המוגדרת ע"י $\forall x\in\Omega$,$\mathbb{1}_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$.

טענה תהי Ω קבוצה כלשהי. ההתאמה $\forall A\subseteq\Omega$,$A\mapsto\mathbb{1}_A$ זו התאמה חחע"ל מ-2^Ω (קבוצת החזקה) ל-$\{0,1\}^\Omega$.

הוכחה: יהיו $A\neq B$ לכן קיים (בה"כ) $x\in A$ אבל $x\notin B$ ולכן $\mathbb{1}_A(x)=1$ אבל $\mathbb{1}_B=0$ ולכן ההתאמה חח"ע.

תהי $f\in\{0,1\}^\Omega$. נסמן $A=f^{-1}(1)$ ונוכיח כי $\mathbb{1}_A=f$. יהי $x\in A$ ולכן $f(x)=1=\mathbb{1}_A(x)$ וכך גם עבור $x\notin A$ ולכן $f\equiv\mathbb{1}_A$. ■

סקרנו בנוסף דוגמאות לבעיות המניה, שבהן לא ניגע כי דיסקרטית זו טראומה מהעבר, אבל רק נזכיר את הטבלה ששיננו למבחן. מספר הדרכים לשלוף n כדורים שונים, k פעמים הוא:

	עם חזרות	בלי חזרות
עם חשיבות לסדר	n^k	6 (או לפחות ככה מריק המתרגל אמר)
בלי חשיבות לסדר	$\binom{n+k-1}{n-1}$ (מספר הפתרונות $x_1+\cdots+x_k=n$, $x_i\geq 0$)	$\binom{n}{k}$ (מספר תתי הקבוצות בגודל k של קבוצה בגודל n)

דוגמה משיבים 12 אבירים ליד שולחן עגול, אבל לנסלוט רוצה שפרסיבל לא ישב לידו כי פרסיבל חושב שדיסקרטית היה מעניין ולנלסוט בסך הכל רוצה לאכול את הפירה שלו בשקט. מה ההסתברות שרצונו של לנסלוט יתגשם?

ראשית נושיב את לנסלוט, לכך יש אפשרות אחת כי השולחן עגול. לאחר מכן נושיב את פרסיבל באחת מ-9 האפשרויות הרצויות (לא על לנסלוט ולא לידו). לאחר מכן נסדר את עשרת האבירים האחרים ב"שורה מעגלית" שמתחילה בצד אחד של לנסלוט ונגמרת בצד השני שלו (בהתעלם מפרסיבל), כך מספר האפשרויות הרצויות הוא $9\cdot 10!$. סך סידורי הישיבה בכללי הוא $11!$, ולכן ההסתברות שרצונו של לנסלוט יתגשם היא $\frac{9}{11}=\frac{9\cdot 10!}{11!}$.

שבוע $\mathbb{I}$ | מבוא ומרחבי הסתברות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

רשאית תורה ההסתברות תועדה בבעיית הנקודות (של פאצ'ולי)

שני שחקנים בוחרים עץ (או פלי), הראשון להטיל 6 על הצד שלו זוכה בפרס. המשחק נעצר ב-$5:3$ ואנחנו מאבדים את המטבע. איך נחלק את הפרס?

- פאצ'ולי טען שיש לחלק על פי היכולת שהופגנה עד כה, כלומר ביחס $5:3$.
- התשובה ה"אמיתית", שמתייחסת לתרחיש העתידי, התגלתה ע"י פרמה ופסקל במאה ה-17, והיא היחס $7:1$.

מהי הסתברות?

1. הגישה השכיחותית: אם נטיל מטבע הרבה פעמים השכיחות לפלי תשאף ל-$\frac{1}{2}$.
2. הגישה ההכרתית: לא נוכל לעשות את הניסוי יותר מפעם אחת (לדוגמה ניתוח), אבל אם ההסתברות לפלי תהיה 0.7 לדוגמה, "נצפה" שנטיל ונקבל פלי ו"נופתע" אם נקבל עץ.
3. הגישה המתמטית: נחשב את גודל הקבוצה שמכילה את האפשרויות ולפיכך נחשב את ההסתברות הרצויה.

סוג השאלות שנענה עליהן

1. פרדוקס יום ההולדת (מה הסיכוי שבכיתה עם n תלמידים יהיו שניים עם אותו תאריך יום הולדת).
2. אספן הקופונים (אם קוקה קולה עושה תחרות שכל מי שאוסף את כל אותיות הא"ב מבקבוקי קולה כשהאותיות מפוזרות באופן אחיד, כמה בקבוקים נצטרך לאסוף כדי לזכות בתחרות בהסתברות 0.9 לדוגמה).
3. ההולך השיכור (מה הסיכוי ששיכור שצועד באופן אקראי ימינה ושמאלה יחזור בסופו של דבר חזרה לביתו).
4. המלחים השיכורים (מה הסיכוי שאם n מלחים נכנסים למועדון ומניחים את הכובעים, כשיצאו, אף אחד לא יקח את הכובע ששייך לו).

המודל ההסתברותי

הגדרה <u>מרחב המדגם</u> (מסומן ב-Ω) הוא אוסף התוצאות האפשרויות בניסוי.

הגדרה יהי Ω מרחב מדגם. פ' $P:\Omega\to[0,1]$ המקיימת $\sum\limits_{\omega\in\Omega}P(\omega)=1$ נקראת <u>פונקציית הסתברות נקודתית</u>.

הערה Ω עשוי להיות אינסופי ואז התכנסות הטור $\sum\limits_{\omega\in\Omega}P(\omega)$ היא התכנסות בהחלט ולכן אין חשיבות לסדר.

הערה Ω עשוי להיות לא בן מניה, במקרה זה נשתמש בהגדרה א.16 בפרק בסוף הספר.

1. הטלת מטבע $\Omega=\{H,T\}$, $P(H)=P(T)=\frac{1}{2}$.

2. הטלת מטבע n פעמים $\Omega=\{H,T\}^n$, $\forall\omega\in\Omega$, $P(\omega)=\frac{1}{2^n}$ (כי $|\Omega|=2^n$).

3. בבעית המלחים השיכורים, נמדוד כמה מהמלחים חבשו את הכובע שלהם, $\Omega=\{0,1\ldots,n\}$.

הערה Ω יכול להכיל איברים שלא עשויים להתקבל בניסוי, לדוגמה 9 בבעית המלחים לעולם לא יתקבל.

הערה אותו ניסוי עשוי להוביל אותנו לשאלות שונות ולכן נשתמש במרחבי מדגם שונים.

4. הטלת מטבע n פעמים ומונים כמה פעמים נקבל עץ, $\Omega=\{0,1,\ldots,n\}$.

5. להטלת מטבע עד שננחת על עץ ונספור את מספר ההטלות עד שנחתנו על עץ, $\Omega=\mathbb{N}\cup\{\infty\}$.

$$P(1)=\frac{1}{2},P(2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\ldots,P(n)=\frac{1}{2^n}$$

נזכור כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ ולכן מתכונת פ' ההסתברות ידרש כי $P(\infty)=0$.

6. הטלת מטבע אינסוף פעמים, הניסוי הוא סדרת התוצאות המתקבלת, $\Omega=\{H,T\}^{\mathbb{N}}$.

הערה נשים לב כי במקרה של הגרלה אחידה על $[0,1]$, לא נוכל למודל הסתברותי נקודתי כי אם $P(x)>0$ נקבל שהטור לא יתכנס ($[0,1]$ הוא לא בן מניה) ואילו עבור $P(x)\equiv 0$ נקבל פ' הסתברות טריוויאלית ולא רלוונטית.

הגדרה יהי Ω מרחב מדגם. <u>מאורע</u> הוא תת קבוצה של Ω. אוסף המאורעות מסומן ב-$\mathcal{F}=2^{\Omega}=\{A:A\subseteq\Omega\}$.

הגדרה יהי Ω מרחב מדגם. פ' $P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ המקיימת:

(i) $P(\Omega)=1$.

(ii) (סכימות בת מניה) $P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}P(A_n)$, לכל $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\in\mathcal{F}$ מאורעות זרים בזוגות ($i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$).

נקראת <u>פוקנציית הסתברות</u>. השלשה $(\Omega,\mathcal{F},P)$ נקראת <u>מרחב הסתברות</u>.

טענה (1.5) יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות . אזי:

א' $P(\varnothing)=0$.

ב' (אדיטיביות) לכל אוסף סופי של מעוראות זרים (בזוגות) $\{A_i\}_{i=1}^{N}$, מתקיים $P\left(\bigcup\limits_{n\in[N]}A_n\right)=\sum\limits_{n\in[N]}P(A_n)$.

ג' $\forall A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$A\subseteq B$ מתקיים $P(A)\leq P(B)$.

ד' $\forall A\in\mathcal{F}$, $P(A)\leq 1$.

ה' $\forall A\in\mathcal{F}$, $P\left(A^C\right)=1-P(A)$.

הוכחה: (א') נגדיר $A_n=\varnothing$, $\forall n\in\mathbb{N}$ ולכן מסכימות בת מניה,

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n)=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(\varnothing)$$

והמספר היחיד שיקיים תכונה זו הוא 0.

(ב') נניח כי $\{B_n\}_{n\in[N]} \in \mathcal{F}$ מאורעות זרים. נגדיר $A_n = \begin{cases} B_n & n\in[N] \\ \varnothing & n\notin[N] \end{cases}$. מסכימות בת מניה,

$$P\left(\bigcup_{n\in[N]} B_n\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum_{n\in[N]} P(B_n)$$

■

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה תהי פ' הסתברות נקודתית. התומך של p הוא $\text{supp}(p) = \{\omega\in\Omega : p(\omega) > 0\}$, כלומר כל הערכים שיש סיכוי שיקרו.

הערה $\text{supp}(P)$ חייב להיות בן מניה.

טענה תהי $p:\Omega\to\mathbb{R}_+$ פ' הסתברות נקודתית על Ω אזי $P_p:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ המוגדרת ע"י $P_p(A) = \sum_{\omega\in A} p(\omega)$, $\forall A\in\mathcal{F}$ היא פ' הסתברות.

הוכחה: נוכיח את שתי תכונות פ' ההסתברות.

א' $P_p(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1$.

ב' תהי $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות זרים.

$$P_p\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{\substack{\omega\in A_n \\ n\in\mathbb{N}}} p(\omega) \overset{(*)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}}\sum_{\omega\in A_n} p(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P_p(A_n)$$

$(*)$ יש התכנסות בהחלט ולכן אפשר לשנות את סדר הסכימה. ■

מסקנה כל פ' הסתברות נקודתית משרה פ' הסתברות.

הגדרה עבור פ' הסתברות P עם $P(A) = 1$ אז נאמר כי P נתמכת על A.

הערה עבור P_p כנ"ל הפ' נתמכת על ידי הקבוצה $\text{supp}(p)\in\mathcal{F}$ שהיא בת מניה. הרי

$$1 = P_p(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = \sum_{\omega\in\text{supp}(p)} p(\omega) = P_p(\text{supp}(p))$$

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. נאמר כי P היא פונקציית הסתברות בדידה אם קיימת פ' הסתברות נקודתית $p:\Omega\to\mathbb{R}_+$ כך ש-$P_p = P$. במקרה כזה נאמר כי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ הוא מרחב הסתברות בדידה.

דוגמה $\Omega=\{H,T\}$, $p(H)=p(T)=\frac{1}{2}$. $P_p:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$.

$$P_p(\varnothing)=0,\quad P_p(\{H\})=P_p(\{T\})=\frac{1}{2},\quad P_p(\{H,T\})=1$$

משפט (אפיון מרחבי הסתברות בדידה) יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות. אזי התנאים הבאים שקולים:

1. P היא פ' הסתברות בדידה.
2. P נתמכת ע"י קבוצה בת מניה.
3. $\sum\limits_{\omega\in\Omega}P(\{\omega\})=1$.
4. $\forall A\in\mathcal{F}$, $P(A)=\sum\limits_{\omega\in A}P(\omega)$.

הערה מרחב הסתברות $(\Omega,\mathcal{F},P)$ עם Ω בת מניה הוא מרחבת הסתברות בדידה.

ניסוי ברנולי עם פרמטר $0\le p\le 1$ הוא ניסוי עם $\Omega=\{H,T\}$, $P(\{H\})=p, P(\{T\})=1-p$, כלומר הטלת מטבע לא (בהכרח) הוגן.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסתברות ומאורע A המקיים $P(A)=1$. נאמר כי A מתרחש <u>כמעט תמיד</u>.

דוגמה הטלת קוביה הוגנת. $\Omega=[7]$, $p(n)=\frac{1}{6}$, $n\in[6]$, $p(7)=0$. $A=\{\omega\in\Omega:p(\omega)>0\}$, $B=\{3,4,5,6\}$. P_p נתמכת ע"י A אבל לא ע"י B.

דוגמה $\Omega=\mathbb{R}$. נתונה פ' הסתברות P המקיימת $P(\{n\})=\frac{6}{\pi^2n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}$. (הערך משמועתי כי מאינפי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$). צ"ל P פ' הסתברות בדידה.

$$P(\mathbb{N})=\sum_{n\in\mathbb{N}}P(\{\omega\})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}=\frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{6}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

ולכן מאפיון מרחב הסתברות בדידה P היא פ' הסתברות בדידה.

הגדרה מרחב הסתברות בדידה $(\Omega,\mathcal{F},P)$ נקרא <u>אחיד</u> אם $p(\omega_1)=p(\omega_2)$, $\forall\omega_1,\omega_2\in\Omega$.

הערה מעתה, בהינתן פ' הסתברות בדידה P, מיד נוכל להשתמש ב-p הפ' הנקודתית שמשרה אותה.

הערה במרחב הסתברות (בדידה) אחיד(מה"א) אם Ω קבוצה סופית (חייבת להיות, אחרת הטור על כל האיברים לא יתכנס) אז $p(\omega)=\frac{1}{|\Omega|}$, $\forall\omega\in\Omega$ ובנוסף $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$, $\forall A\in\mathcal{F}$. כלומר פישטנו את כל מרחבי ההסתברות לקומבינטוריקה (חישוב $|\Omega|$, $|A|$, והמנה שלהם).

דוגמה מטילים 2 קוביות הוגנות בזה אחר זה. מה ההסתברות שסכום התוצאות יהיה 7?

$\Omega=[6]^2$. $|\Omega|=36$, $A=\{(6,1),(5,2),(4,3),(3,4),(2,5),(1,6)\}$ ולכן $P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

תרגול

1. מטילים קוביה 30 פעמים. חשבו את ההסתברות שיצא 6 לאחר לכל היותר 10 זריקות.

$\Omega=[6]^{30}$. $A=\{a\in\Omega:\exists j\in[10],x_j=6\}$.

$A^C=[5]^{10}\times[6]^{20}$ ולכן $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{5^{10}6^{20}}{6^{30}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.

$A_n=\{\omega\in\Omega:n$ -יצא 6 לראשונה בהטלה ה$\}$. $\{A_n\}$ זרות בזוגות. $A=\biguplus_{n=1}^{10}A_n$. ולכן $|A_1|=1\cdot6^{29},|A_2|=5\cdot1\cdot6^{28}$ ובאמצעות טור גאומטרי מגיעים לאותה תוצאה. $|A_{10}|=5^9\cdot6^{20}$

2. 8 בנים ו-8 בנות מסתדרים בשורה. מה ההסתברות שכל הבנים מימין וכל הבנות משמאל?

$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{8!8!}{16!}=\frac{1}{\binom{16}{8}}$ עם $\Omega=S_{16}$ (תמורות). $\tilde{P}(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{\binom{16}{8}}$ כאשר Ω הוא מרחב ההסתברות עבור מודל שבו נתעלם מהאינדיבידואליות של האנשים ונסתכל עליהם ככדורים שחורים ולבנים ב-16 סלים, במקרה זה נבחר לכדורים השחורים מקומות ואז בשאר את הלבנים. במקרה זה, $|\Omega|=\binom{16}{8}$ ואילו $|A|=1$ כי יש רק דרך אחת שכל קבוצה תהיה בדיוק באותו הצד.

3. מסדרים 4 כדורים ב-6 מגירות. בכל השמה נגריל באקראי באיזו מגירה נשים מה ההסתברות שמגירה 6 תהיה ריקה?

$\Omega=[6]^4$, $A=[5]^4$ ולכן $P(A)=\frac{5^4}{6^4}$.

4. הטלת קובייה, הפעם במרחב מדגם אינסופי. $\Omega=\mathbb{N}$, $P(A)=\frac{|A\cap[6]|}{6}$, הסטודנטית המשקיעה תוכיח שאכן זו פ' הסתברות.

5. $\Omega=\mathbb{N}$, $P(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{2^n}$ או באופן שקול $P(\{n\})=\frac{1}{2^n}$.

$$P(\Omega)=\sum_{n\in\Omega}2^{-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$$

עבור $A=\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n$,

$$P\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right)=P(A)=\sum_{n\in A}\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k\in A_n}\frac{1}{2^k}=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

ולכן זו פ' הסתברות. $P(\mathbb{N}_{even})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$.

6. $\Omega=\mathbb{N}$, נסמן $a=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ ונגדיר $P(\{n\})=\frac{1}{an^3}$. ברור שזו פ' הסתברות.

$$P(3\mathbb{N})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a(3n)^3}=\frac{1}{27a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{1}{27a}a=\frac{1}{27}$$

ולכן אע"פ שאיננו יודעים את הערך של a (מי שכן שישלח לי הודעה, זה שווה המון כסף), נוכל לחשב הסתברויות אפילו שהוא שם.

שבוע III | פרדקוס יום ההולדת וכלים לחישוב הסתברויות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמאות למה"א

1. מכניסים לכד 2 כדורים באקראיות, הוכנס לכד 2 שחורים $=A$.

אפשרות 1 לבחור באקראי בין הערכים $0,1,2$ והתוצאה תכתיב את מספר הכדורים השחורים. כאן $P\left(A\right)=\frac{1}{3}$ וכן $\Omega=\{0,1,2\}$.

אפשרות 2 בכל שלב נבחר בהסתברות $\frac{1}{2}$ כדור שחור ובהסת' $\frac{1}{2}$ כדור לבן. כאן $P\left(A\right)=\frac{1}{4}$, $\Omega=\{w,b\}^2$.

2. בכד 11 כדורים, 6 לבנים ו-5 שחורים. 2 כדורים נשלפים באקראי.

- מה ההסת' שהראשון שחור.

נסמן $\Omega=[11]$, כאשר $1,\dots,5$ הם כדורים שחורים ו-$6,\dots,11$ כדורים לבנים. במקרה זה Ω הוא מ"ה (מרחב הסת') אחיד.
A_1 הוא המאורע ששלפנו ראשון שחור. $P\left(A_1\right)=\frac{|A_1|}{|\Omega|}=\frac{5}{11}$.

- מה ההסת' שהשני שחור.

$\Omega=\{(a,b):a\neq b\in[11]\}$, $A_2=\{(a,b):[11]\ni a\neq b\in[5]\}$. $|A_2|=5\cdot10=50$, $|\Omega|=11\cdot10=110$,
$P\left(A_2\right)=\frac{|A_2|}{|\Omega|}$.

- מה ההסת' שנבחרו כדור לבן וכדור שחור.

$$A_3=\{(a,b):[5]\ni a\neq b\in\{6,\dots 11\}\}\underset{\text{איחוד זר}}{\biguplus}\{(a,b):\{6,\dots,11\}\ni a\neq b\in[5]\}$$

$|A_3|=5\cdot6+6\cdot5=60$, $P\left(A_3\right)=\frac{60}{110}$.

דוגמאות למכפלה של מ"ה

1. $\Omega_1 = \Omega_2 = [6]$, $p_1(i) = p_2(i) = \frac{1}{6}$, $\forall i \in [6]$.

	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\cdots$				
3	$\vdots$	$\ddots$				
4						
5						
6						

ולכן עבור $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $p(\omega) = \frac{1}{36}$, $\forall \omega \in \Omega$.

2. מטילים פעמיים מטבע שבו ההסת' ל-H הוא $p \in (0,1)$.

$I \backslash II$	H	T
H	$p \cdot p$	$(1-p)\,p$
T	$(1-p)\,p$	$(1-p)^2$

הגדרה תהיינה $p_1 : \Omega_1 \to [0,1]$, $p_2 : \Omega_2 \to [0,1]$ פ' הסת' נקודתיות. נגדיר $p_1 \times p_2 : \Omega_1 \times \Omega_2 \to [0,1]$ ע"י

$$p_1 \times p_2\left(\left(\omega_1, \omega_2\right)\right) = p_1\left(\omega_1\right) p_2\left(\omega_2\right)$$

$\forall \left(\omega_1, \omega_2\right) \in \Omega_1 \times \Omega_2$.

טענה $p_1 \times p_2$ היא פ' הסתברות נקודתית על $\Omega_1 \times \Omega_2$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2} p_1 \times p_2\left(\left(\omega_1, \omega_2\right)\right) &= \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega_1\times\Omega_2} p_1\left(\omega_1\right) p_2\left(\omega_2\right) \\
&= \sum_{\omega_1\in\Omega_1} \sum_{\omega_2\in\Omega_2} p\left(\omega_1\right) p_2\left(\omega_2\right) \\
&= \sum_{\omega_1\in\Omega_1} p_1\left(\omega_1\right) \sum_{\omega_2\in\Omega_2} p_2\left(\omega_2\right) \\
&\overset{\text{פה"נ } p_2}{=} \sum_{\omega_1\in\Omega_1} p_1\left(\omega_1\right) \cdot 1 \\
&= 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

■

הגדרה יהיו $\left(\Omega_2,\mathcal{F}_2,P_{p_2}\right),\left(\Omega_1,\mathcal{F}_1,P_{p_1}\right)$ מ"ה. המרחב $\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathcal{F}=2^{\Omega_1\times\Omega_2},P_{p_1\times p_2}\right)$ הוא <u>מרחב המכפלה</u> של המ"ה-ים. מאורע מהצורה $A\times B$ נקרא <u>מאורע מכפלה</u>.

טענה בתנאים הנ"ל, אם $A\in\mathcal{F}_1$, $B\in\mathcal{F}_2$ אזי $P_{p_1\times p_2}\left(A\times B\right)=P_{p_1}\left(A\right)\cdot P_{p_2}\left(B\right)$.

דוגמה סדרה של n הטלות מטבע עם פרמטר p שבו $p\left(1\right)=\alpha,p\left(0\right)=1-\alpha$. מה הסת' לקבלת התוצאה 1 בדיוק $k\leq n$ פעמים?

$\Omega=\{0,1\}^n$, $A=\left\{\left(a_1,\ldots,a_n\right):\sum\limits_{i=1}^{k}a_i=k\right\}$. $\forall\left(a_1,\ldots,a_n\right)\in\Omega$ נשים לב כי $p\left(x\right)=\alpha^x\left(1-\alpha\right)^{1-x}$ (בהצבת $x\in\{0,1\}$ זה פשוט עובד, הסטודנטית המשקיעה תבדוק) ולכן

$$\begin{aligned}p\left(\left(a_1,\ldots,a_n\right)\right)&=\prod_{i=1}^{n}p\left(a_i\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}\alpha^{a_i}\left(1-\alpha\right)^{1-a_i}\\&=\alpha^{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}\left(1-\alpha\right)^{n-\sum_{i=1}^{n}a_i}\\&=\alpha^k\left(1-\alpha\right)^{n-k}\end{aligned}$$

ולכן $P\left(A\right)=\left|A\right|\alpha^k\left(1-\alpha\right)^{n-k}=\boxed{\binom{n}{k}\alpha^k\left(1-\alpha\right)^{n-k}}$.

הגדרה יהיו Ω_1,Ω_2 מרחבי מדגם. <u>ניסוי דו שלבי</u> מתואר ע"י פ' הסת' נקודתית p על Ω_1 ו-$\forall\omega_1\in\Omega_1$ נתונה פ' הסת' נקודתית p_{ω_1} על Ω_2. בניסוי הדו שלבי מרחב המדגם הוא $\Omega_1\times\Omega_2$ ופ' הסת' הנקודתית $q:\Omega_1\times\Omega_2\to[0,1]$ כך שעבור $\left(\omega_1,\omega_2\right)\in\Omega_1\times\Omega_2$, $q\left(\omega_1,\omega_2\right)=p\left(\omega_1\right)\cdot p_{\omega_1}\left(\omega_2\right)$.

דוגמה גיל ודויד אלרועי (שמות מאות ספציפיים) קלעים. גיל קולע בהסת' 0.7 ואילו דוד ב-0.2. הניסוי הוא שמטילים מטבע הוגן, אם יוצא עץ, גיא קולע ואם יוצא פלי אז דוד קולע. מה ההסת' שתהיה קליעה?

$\Omega_1=\{H,T\}$ עם $P\left(H\right)=P\left(T\right)=\frac{1}{2}$.

$$P_H\left(\text{קלע}\right)=0.7,\quad P_H\left(\text{לא קלע}\right)=0.3$$
$$P_T\left(\text{לא קלע}\right)=0.2,\quad P_T\left(\text{לא קלע}\right)=0.8$$

$$\begin{aligned}P\left\{\left(H,\text{פגע}\right),\left(T,\text{פגע}\right)\right\}&=\frac{1}{2}P_H\left(\text{פגע}\right)+\frac{1}{2}P_T\left(\text{פגע}\right)\\&=\frac{1}{2}\cdot0.7+\frac{1}{2}\cdot0.2\\&=0.45\end{aligned}$$

הערה אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מה"א אז Ω^n גם אחיד.

פרדוקס יום ההולדת

נניח שתאריך יום ההולדת מוגרל באקראי מתוך $[365]$.

ישנם n אנשים ולכן נקבל מה"א על $\Omega=[365]^n$.

נרצה לחשב את הסת' המאורע

$$A=\{(x_1,\ldots,x_n)::\exists i<j\in[n]\,,x_i=x_j\}$$

נעבור למשלים.

$$A^C=\{(x_1,\ldots,x_n):\forall i,j\in[n]\,,x_i\neq x_j\}$$

ולכן $\left|A^C\right|=365\cdot364\cdot\ldots\cdot(365-(n-1))$

$$P\left(A^C\right)=\frac{\left|A^C\right|}{|\Omega|}=\frac{365!}{(n-2)!}\cdot\frac{1}{365^n}$$

וכבר ב-$n=50$ נקבל שההסת' של A היא 0.97.

הכינוי "פרדוקס" מתייחס לעובדה שהתוצאה היא לא אינטואיטיבית, כי אילו היינו מחשבים הסת' למאורע שלאדם הראשון יש יום הולדת זהה לאדם אחר בקבוצה, כלומר $B=\{(x_1,\ldots,x_n):\exists i,x_1=x_i\}$ אז $\left|B^C\right|=365\cdot364^{n-1}$ ולכן $P(B)=1-\frac{365\cdot364^{n-1}}{365^n}$. כלומר נצטרך n הרבה יותר גדול כדי לקבל איזה שהוא סיכוי ריאלי.

נכליל עתה לכל m ימים בשנה (במקום 365) ונחפש כמה גדול צריך להיות n כדי שההסתברות למאורע A תהיה קרובה לאחד.

$$P\left(A^C\right)=\frac{m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-(n-1))}{m^n}=\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i-1}{m}\right)$$

ולכן

$$\log P\left(A^C\right)=\log\left(\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{i-1}{m}\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\log\left(1-\frac{i-1}{m}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{i-1}{m}\right)=-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(i-1)=-\frac{1}{m}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$$

ולכן $P\left(A^C\right)\leq e^{-\frac{\frac{n(n-2)}{2}}{m}}=e^{-\frac{\binom{n}{2}}{m}}$ ולכן אם $\frac{\binom{n}{2}}{m}$ מאוד גדולה אזי $P\left(A^C\right)$ מאוד קטנה ולכן ההסת' הרצויה מאוד גדולה, או במילים אחרות, אם$n=\omega\left(\sqrt{m}\right)$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}P(A)=1$.

אם $n>m$ אז ברור כי $P(A)=1$.

הגדרה חלוקה $\mathcal{A}$ של המרחב מדגם Ω היא אוסף מאורעות זרים שאיחודם הוא Ω. $\mathcal{A}$ בת מניה תקרא חלוקה בת מניה.

משפט (נוסחת ההסתברות השלמה) יהי $\mathcal{A}$ חלוקה בת מניה של Ω, ו-$(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסת'. אזי $\forall D\in\mathcal{F}$, $P\left(D\right)=\sum_{A\in\mathcal{A}}P\left(A\cap D\right)$.

דוגמה מטילים קוביה הוגנת עם 6 פאות ואז מטילים קוביה הוגנת עם 12 פאות, $\Omega=[6]\times[12]$. $D=\{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega:\omega_1>\omega_2\}$ כלומר המאורע שהטלנו גבוה יותר בהטלה הראשונה מבשנייה. נגדיר $A_i=\{(i,\omega_2):\omega_2\in[12]\}$, $\forall i\in[6]$. $\{A_i\}$ היא חלוקה של Ω. $P\left(A_i\cap D\right)=\frac{|A_i\cap D|}{|\Omega|}=\frac{i-1}{72}$ ולכן $P\left(D\right)=\sum_{i=1}^{6}\frac{i-1}{72}$.

טענה $P\left(A\cup B\right)\le P\left(A\right)+P\left(B\right)$.

הוכחה: $A\cup B=A\uplus\left(B\setminus A\right)$. $B\setminus A\subseteq B$ ולכן $P\left(B\setminus A\right)\le P\left(B\right)$ ולכן $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\setminus A\right)\le P\left(A\right)+P\left(B\right)$. ■

משפט (חסם האיחוד) אם $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$(\Omega,\mathcal{F},P)$ אז $P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)\le\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(A_i\right)$.

הוכחה: נגדיר סדרת מאורעות $B_1,B_2,\ldots$ ע"י $B_1=A_1$, $B_2=A_2\setminus A_1$, $B_n=A_n\setminus\left(A_1\cup\ldots\cup A_{n-1}\right)$. נוכיח כי $\{B_n\}$ זרות (בזוגות). אם $\omega\in B_k$ אזי $\forall i\in[k-1]$, $\omega\notin B_i$ וכן, $\forall i>k$, $\omega\notin B_i$.

נוכיח כי $\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i$. ההכלה $\subseteq$ מידית. נראה כי $\bigcup B_i\supseteq\bigcup A_i$. יהי $\omega\in\bigcup A_i$. נסמן $J=\{j\in\mathbb{N}:\omega\in A_j\}\neq\varnothing$ ו-$j_0=\min J$. מתקיים $\omega\in B_{j_0}$ ולכן $\omega\in\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i$.

$$P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}B_i\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(B_i\right)\overset{B_i\subseteq A_i}{\le}\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(A_i\right)$$

■

הערה באופן טריוויאלי הטענה מתקבלת גם על סדרה סופית.

דוגמה נחזור לפרדוקס יום ההולדת. $A\subseteq[365]^n$ כמו שהגדרנו. $\forall i<j\in[n]$ נגדיר $A_{i,j}=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega:x_i=x_j\}$ המאורע ששניים חולקים יום הולדת. מתקיים $A=\bigcup_{i<j\in[n]}A_{i,j}$. $P\left(A_{i,j}\right)=\frac{365^{n-1}}{365^n}=\frac{1}{365}$. $P\left(A\right)\le\sum_{i<j}P\left(A_{i,j}\right)=\frac{\binom{n}{2}}{m}$ שזו אותה מנה שראינו למעלה!

טענה (עקרון ההכלה וההדחה עם $n=2$) $P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$.

טענה (עקרון ההכלה וההדחה עם $n=3$)

$$P\left(A\cup B\cup C\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)+P\left(C\right)-P\left(A\cap B\right)-P\left(A\cap C\right)-P\left(B\cap C\right)+P\left(A\cap B\cap C\right)$$

משפט (עקרון ההכלה וההדחה)

$$P\left(\bigcup_{i\in[n]}\right)=P\left(A_1\right)+\dots+P\left(A_n\right)-\sum_{|I|=2}P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)+\sum_{|I|=3}P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)-\ldots+(-1)^{|I|+1}\sum_{|I|=n}P\left(A_i\right)$$
$$=\sum_{\varnothing\neq I\subseteq[n]}(-1)^{|I|+1}P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$$

תרגול

1. בוחרים באקראי סידור בשורה של 3 כדורים אדומים, 5 לבנים, 7 שחורים. מה ההסת' ששני הקצוות באותו צבע?

$B_r=\{\text{כל הרצפים שבהם הקצוות אדומים}\}\ ,\ B_w=\{\text{כל הרצפים שבהם הקצוות לבנים}\}\ ,\ B_b=\{\text{כל הרצפים שבהם הקצוות שחורים}\}$

$|\Omega|=\binom{15}{3}\binom{12}{5}$ (בחירת 3 אינדקסים לכדורים האדומים, ואז 5 לאדומים ממה שנשאר, ואז השחורים יהיה כל השאר). באותו האופן $|B_r|=\binom{13}{1}\binom{10}{5}$, $|B_w|=\binom{13}{3}\binom{10}{3}$, $|B_b|=\binom{13}{3}\binom{10}{5}$ ומשום שזה מרחב הסת' אחיד אזי $P\left(A\right)=\frac{|B_r|+|B_w|+|B_b|}{|\Omega|}$ שזה מספר לא מעניין.

2. מגרילים באקראי מספר מ-$[20]$. מטילים מטבע 3 פעמים ומוסיפים למספר הראשון את כמות הפלי-ים שהטלנו. מה ההסת' שהסכום שייך לקבוצה $\{2,7,8\}$?

$B_k=\{\text{יצא פלי } k \text{ פעמים}\}$. ולכן $\Omega_2=\dot{\bigcup}_{i\in\{0,\ldots,3\}}B_i$. הניסוי הראשון הוא במרחב ההסת' $\left([20],\mathcal{F}_1,P_1\right)$ עם $P_1\left(\{n\}\right)=\frac{1}{20}$, $\forall n\in[20]$. הניסוי השני הוא במרחב ההסת' $\left(\{H,T\}^3,\mathcal{F}_2,P_2\right)$. ומתקיים

$$P_2\left(B_0\right)=\frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^3,\ \ P_2\left(B_1\right)=P_2\left(B_2\right)=\frac{3}{8},\ \ P_2\left(B_3\right)=\frac{1}{8}$$

(הסטודנטית המשקיעה תבדוק שאכן ההסת' מתאימות לספירת המאורעות).

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=(n,(x_1,x_2,x_3))$.

$$P\left(A\right)=P_1\left(A_1\right)P_2\left(B_1\right)+P_1\left(A_2\right)P_2\left(B_2\right)+P_1\left(A_3\right)P_2\left(B_3\right)+P_1\left(A_0\right)P_2\left(B_0\right)$$
$$=\frac{3}{20}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{20}\cdot\frac{3}{8}+\frac{2}{20}\cdot\frac{1}{8}+\frac{3}{20}\cdot\frac{1}{8}=\cdots=\frac{1}{8}$$

כאשר $A_1=\{1,6,7\ \text{יצא}\}$ ושאר המאורעות גם כן כך שיצא שהסכום של המספר שהוגרל וכמות הפלי שהוטלה ישתייך ל-$\{2,7,8\}$.

3. מתרגל בקורס זה הולך לקוסל ומבצע שתי זריקות לסל. ההסת' לקלוע היא $\frac{1}{2}$ בזריקה הראשונה. אם קלע הוא שמח ויקלע בשנייה בהסת' $\frac{3}{4}$ ואחרת יקלע בהסת' $\frac{1}{10}$. מה ההסת' שקלע בדיוק פעם אחת?

נסמן H_i המאורע שקלע בזריקה ה-i ו-M_i שפיספס במאורע ה-i.

$$\begin{array}{cc} P\left(H_1\right)=\frac{1}{2} & P\left(M_1\right)=\frac{1}{2} \\ P_{H_1}\left(H_2\right)=\frac{3}{4} & P_{H_1}\left(M_2\right)=\frac{1}{4} \\ P_{M_1}\left(H_2\right)=\frac{1}{10} & P_{M_1}\left(M_2\right)=\frac{9}{10} \end{array}$$

ולכן

$$\begin{aligned} P\left(\text{קלע פעם אחת}\right) &= P\left(\left(H_1,M_2\right)\right)+P\left(\left(M_1,H_2\right)\right) \\ &= P\left(H_1\right)P_{H_1}\left(M_2\right)+P\left(M_1\right)P_{M_1}\left(H_2\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10} \end{aligned}$$

4. תחילה מגרילים מספר טבעי בהסתברות $p\left(n\right)=\frac{1}{2^n}$ ולאחר מכן מגרילים מספר באופן אחיד ב-$[n]$. מה ההסת' שהמספר השני הוא 1?

$p\left(n\right)=\frac{1}{2^n}$, $p_n\left(m\right)=\begin{cases}\frac{1}{n} & m\le n\\ 0 & m>n\end{cases}$. $A=\left\{(n,1):n\in\mathbb{N}\right\}$. $A_n=\left\{(n,1)\right\}$.

$$P\left(A\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}p\left(n\right)p_n\left(1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n}\overset{\text{כככה}}{=}\ln 2$$

5. בוחרים באקראי מספר מ-$[1000]$. מה ההסת' שהוא מתחלק ב-3 או 5?

$$A_3=\left\{n\in\Omega:3\mid n\right\},A_5=\left\{n\in\Omega:5\mid n\right\},A_3\cap A_5=A_{15}$$

ולכן $\left|A_3\right|=333,\left|A_5\right|=200,\left|A_{15}\right|=66$ ולכן $P\left(A\right)=\frac{333+200-66}{1000}$.

6. מגרילים באקראי פ' $f\in[m]^{[n]}$. מה ההסת' שהיא על?

A^C כל הפ' שהן לא על. $B_j=\left\{f\in\Omega:j\notin\operatorname{Im}f\right\}$. $A^C=\bigcup_{j=1}^{m}B_j$.

$$\left|\bigcap_{l=1}^{k}B_l\right|=\left|\left\{f\in\Omega:[k]\not\subseteq\operatorname{Im}f\right\}\right|=\left|[m-k]^{[n]}\right|=(m-k)^n$$

$|\Omega| = m^n$ ולכן $\left(1-\frac{k}{m}\right)^n = \left(\frac{m-k}{m}\right)^n = P\left(\bigcap_{l=1}^{k} B_l\right)$.

$$P\left(A^C\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{m} B_k\right) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} \left(1-\frac{k}{m}\right)^n$$

7. Ω מרחב כל הסדרות באורך $2n$ של $\{0,1\}$ כך שיש בדיוק n 1-ים בהסת' אחידה. חסמו מלמעלה את ההסת' שיש k 1-ים ברצף.

$E_l = \{(x_1,\dots,x_{2n}) \in \Omega : x_l = \dots = x_{l+k-1} = 1\}$, $\forall l \in [2n-k+1]$. $A = \bigcup E_l$. $P(E_l) = \frac{\binom{2n-k}{n}}{\binom{2n}{n}}$ (נמקם n אפסים מתוך המקומות שנשארו במונה חלקי מספר הסדרות בכללי במכנה). לכן

$$P(A) \leq \sum_{l=1}^{2n-k+1} P(E_l) = (2n-k)\frac{\binom{2n-k}{n}}{\binom{2n}{n}}$$

הוכיחו שכאשר $k = n-1$ ו-$n \to \infty$ אז החסם שואף ל-0.

$$P(A) = (n+2)\frac{\binom{n+1}{n}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n+2)(n+1)}{\binom{2n}{n}} = \frac{(n+1)}{\frac{n+1}{1}\cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{n-1}\cdot\frac{2n}{n}} \leq \frac{n+1}{2\cdot\dots\cdot 2} = \frac{n+1}{2^n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

שבוע $\mathbb{III}$ | הסתברות מותנית

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הערה מנוסחת ההכלה וההדחה

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^C\right) = 1 + \sum_{\varnothing \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} P\left(\bigcap_{i\in I} A\right)$$

דוגמה בעיית המעטפות. מכניסים n מכתבים ל-n מעטפות באופן אקראי.

$\Omega = S_n$, $|\Omega| = n!$ הוא מה"א. נסמן $A_{n,k}$ המאורע שבדיוק k מכתבים הגיעו ליעדם (מתוך n).

1. מה ההסת' שאף מכתב לא יגיע ליעדו?

$P\left(A_{n,0}\right)$ היא ההסת' הרצויה. לשם חישובה נחשב את $P\left(A_{n,0}^{C}\right)$. נסמן $\forall i\in[n]$, A_i המאורע שהמכתב ה-i הוכנס למעטפה ה-i.
מתקיים $A_{n,0}^{C}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. $P\left(A_1\right)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$, $P\left(A_1\cap A_2\right)=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$ ובאופן כללי $P\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)=\frac{(n-|I|)!}{n!}$.

$$\begin{aligned}P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{|I|=k}(-1)^{k+1}P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k}\frac{(n-k)!}{n!}\\&=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}}(-1)^{k}\frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}}\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\end{aligned}$$

ולכן

$$P\left(A_{n,0}\right)=P\left(\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)^{C}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k}}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e}$$

שזה מזכיר מאוד את טור טיילור לאקספוננט ($e^x=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$).

2. מה ההסת' שבדיוק k מכתבים יגיעו ליעדם?

עבור $|I|=k$, $I\subseteq[n]$, נגדיר B_I המאורע שרק המכתבים ב-I הגיעו ליעדם. נשים לב כי אם $I\neq J$ ו-$|I|=|J|=k$ אז $B_I\cap B_j=\varnothing$. $|B_I|=\underbrace{(n-k)!\sum\limits_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}}_{(*)}$ ולכן $P\left(B_I\right)=\frac{|B_I|}{|\Omega|}=\frac{(n-k)!}{n!}\sum\limits_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$.

$(*)$ זה הביטוי שהגענו אליו למעלה של תמורה שאין בה נקודת שבת, הפעם בגודל $n-k$, כי אנחנו רוצים שאף אחת מהמעטפות האחרות לא תקבל את המכתב הנכון.

$A_{n,k}=\dot{\bigcup}B_I$.

$$P\left(A_{n,k}\right)=\sum_{I\subseteq[n]:|I|=k}P\left(B_I\right)=\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^k}{i!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{k!e}$$

שזה תואם לתוצאה הקודמת עבור $k=0$.

דוגמה מטילים פעמיים קוביה הוגנת, $\Omega=[6]^2$. A הוא שהסכום יצא 8. $A=\{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$, $P(A)=\frac{5}{36}$.

B הוא המאורע שבהטלה הראשונה התקבלה התוצאה 5. $P(B)=\frac{6}{36}$.

לחשו לנו שבהטלה הראשונה התקבלה התוצאה 5. מה ההסת' ל-A? $\frac{1}{6}$.

לחלופין, נודע לנו שהסכום הוא 8, מה ההסת' ל-B? $\frac{1}{5}$.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסת', יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$P(B)>0$ אז ההסתברות המותנית של A בהינתן B היא

$$P_B(A)=P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

הערה בדוגמה הנ"ל, אכן $P(A|B)=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{1}{6}$.

הערה אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ אחיד אז $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{|A\cap B|}{|\Omega|}}{\frac{|B|}{|\Omega|}}=\frac{|A\cap B|}{|B|}$.

טענה אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה, $B\in\mathcal{F}$, $P(B)>0$. נגדיר $P_B:\mathcal{F}\to\mathbb{R}_+$ ע"י $P_B(A)=P(A|B)$ אזי P_B פ' הסת'.

הוכחה: נוכיח את שתי הדרישות בהגדרת פ' הסת'.

$P_B(\Omega)=P(\Omega|B)=\frac{P(\Omega\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}$.

יהי אוסף של מאורעות זרים $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned}P_B\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}A_n\right)&=\frac{P\left(\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}A_n\right)\cap B\right)}{P(B)}\\&\overset{\text{עדיין זר}}{=}\frac{P\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}(A_n\cap B)\right)}{P(B)}\\&=\frac{\sum_{n\in\mathbb{N}}P(A_n\cap B)}{P(B)}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{P(A_n\cap B)}{P(B)}\\&=\sum_{n\in\mathbb{N}}P_B(A_n)\end{aligned}$$

■

הערה אפילו אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ הוא מה"א, $(\Omega,\mathcal{F},P_B)$ לא בהכרח אחיד (לדוגמה עבור B $\omega\in B,\omega'\notin B$, $P_B(\{\omega\})\neq P_B(\{\omega'\})=0$).

משפט (כלל השרשרת) יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה, $P(B)>0$, $A\in\mathcal{F}$, אז $P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$ (שזה אינטואיטיבי, הסטודנטית המשקיעה תחשוב למה).

משפט (כלל בייס) אם גם $P(A)>0$, אז $P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$.

טענה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Omega)$ ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש-$P(A\cap B)>0$. נסמן $P'=P_A,P''=(P_A)_B$ אזי $\forall D\in\mathcal{F}$ מתקיים $P''(D)=P(D|A\cap B)$, כלומר $(P_A)_B=P_{A\cap B}=(P_B)_A$ (או במילים, סדר ההתנייה לא משפיע על פ' ההסת').

הוכחה:

$$P''\left(D\right)=\left(P_{A}\right)_{B}\left(D\right)=\frac{P_{A}\left(B\cap D\right)}{P_{A}\left(B\right)}=\frac{\frac{P(A\cap D\cap B)}{P(A)}}{\frac{P(A\cap B)}{P(A)}}=\frac{P\left(D\cap\left(A\cap B\right)\right)}{P\left(A\cap B\right)}=P\left(D|A\cap B\right)=P_{A\cap B}\left(D\right)$$

■

חלק ב' של ההרצאה

דוגמה $\Omega=\left[6\right]^{2}$ הטלת מטבע הוגן פעמיים. $A=\left\{ 8\text{ סכום התוצאות}\right\}$, $B=\left\{ 4\text{ בהטלה הראשונה התקבל}\right\}$. אכן

$$P\left(A\mid B\right)=\frac{P\left(A\cap B\right)}{P\left(B\right)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}$$

$C=\left\{ 4\text{ באחת ההטלות התקבל}\right\}$. $|C|=11$ (החישוב עצמו לא מעניין).

$$P\left(A\mid C\right)=\frac{P\left(A\cap C\right)}{P\left(C\right)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{1}{11}$$

זו תוצאה מוזרה כי כשאיפשרנו ליותר מקרים להתקיים, ההסת' למאורע מסוים ירדה, אפילו שלכאורה היו לה יותר סיכויים לקרות.

אם לא היינו מבחינים בין שתי הקוביות, אז $|\Omega|=\binom{6}{2}+6=21$ (6 על זוגות של אותה ההטלה). כאן

$$C=\left\{ \left\{ 1,4\right\} ,\left\{ 2,4\right\} ,\left\{ 3,4\right\} ,\left\{ 4,4\right\} ,\left\{ 5,4\right\} ,\left\{ 6,4\right\} \right\}$$

ולכן $P\left(A\mid C\right)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{6}{21}}=\frac{1}{6}$ שזה כבר יותר הגיוני. כאן מרחב המדגם קטן יותר ממרחב הראשון.

ההסבר לתופעה הזו הוא שבגלל שמרחב המדגם קטן, אז הנתח של כל מאורע קטן ולכן ההסת' המותנת עצמה עולה, כי היא לא הושפעה יותר מדי. דוגמה זו היא אות אזהרה לסכנות של האינטואיציה בהסת' מותנת.

אם נצטרך להעריך, מה גדול יותר, במרחב הראשון, ההסת' שהסכום הוא 9 תחת המאורע C או שהסכום הוא 9 תחת המאורע C? $P\left(A_{9}\mid C\right)=\frac{P(C\cap A_{9})}{P(C)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{11}{36}}=\frac{2}{11}$ והנה לכם תעתוע!

הערה אם $\left\{ A_{i}\right\} _{i\in\mathbb{N}}$ חלוקה של Ω כך ש-$\forall i\in\mathbb{N}$, $P\left(A_{i}\right)>0$. עבור $B\in\mathcal{F}$,

$$P\left(B\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(B\cap A_{i}\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(B\mid A_{i}\right)P\left(A\right)$$

ומה אם $\bigcup A_{i}\neq\Omega$ אבל $P\left(\bigcup A_{i}\right)=1$? גם אז הנוסחה נכונה.

ומה אם $A_{i}\cap A_{j}\neq\varnothing$ אבל $P\left(A_{i}\cap A_{j}\right)=0$? גם אז הנוסחה נכונה.

דוגמה מטילים קוביה הוגנת. אם התקבל $1,2$ אז יוצאים לסרט, ואחרת למסעדה. ההסת' לבידוד אם הולכים לסרט היא 0.01 ולמסעדה היא 0.03.

נסמן A המאורע שיצאנו לסרט ו-B שקיבלנו בידוד. $P\left(A^{C}\right)=\frac{2}{3}$,$P\left(A\right)=\frac{1}{3}$, $P\left(B\mid A^{C}\right)=0.03$,$P\left(B\mid A\right)=0.01$

- מה הסיכוי לבידוד?

$$P\left(B\right)=P\left(B\mid A\right)P\left(A\right)+P\left(B\mid A^{C}\right)P\left(A^{C}\right)=0.01\cdot\frac{1}{3}+0.03\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{300}$$

- בהנתן שהערב הסתיים בבידוד, מה ההסת' שהלכנו למסעדה?

$$P\left(A^{C}\mid B\right)=\frac{P\left(A^{C}\cap B\right)}{P\left(B\right)}\overset{\text{כלל השרשרת}}{=}\frac{P\left(B\mid A^{C}\right)P\left(A^{C}\right)}{P\left(B\right)}=\frac{0.03\cdot\frac{2}{3}}{\frac{7}{300}}=\frac{6}{7}$$

כלומר רוב הסיכויים שהיינו במסעדה.

הערה ניזכר בניסוי דו שלבי, שם עבור Ω_1,Ω_2 מרחבי מדגם עם פ' הסתברות נקודתיות $p:\Omega_1\to\mathbb{R}_+$ ו-$p_a:\Omega_2\to\mathbb{R}_+$, $\forall a\in\Omega_1$. פ' ההסת' על $\Omega_1\times\Omega_2$ בניסוי הדו שלבי היא $q:\Omega_1\times\Omega_2\to\mathbb{R}_+$, $q\left(\left(a,b\right)\right)=p\left(a\right)p_a\left(b\right)$. נגדיר P פ' ההסתברות ש-q משרה.

טענה תחת הסימונים הנ"ל, הפ' P_q היא היחידה המקיימת $\forall a\in\Omega_1,b\in\Omega_2$ כי $P\left(\left\{(a,\cdot)\right\}\right)=p\left(a\right)$ וכן

$$P\left(\left\{(\cdot,b)\right\}\mid\left\{(a,\cdot)\right\}\right)=p_a\left(b\right)$$

כאשר $\left\{(a,\cdot)\right\}=\left\{a\right\}\times\Omega_2$ ו- $\left\{(\cdot,b)\right\}=\Omega_1\times\left\{b\right\}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}P\left(\left\{(a,b)\right\}\right)&=P\left(\left\{(a,\cdot)\right\}\cap\left\{(\cdot,b)\right\}\right)\\&=P\left(\left\{(\cdot,b)\right\}\mid\left\{(a,\cdot)\right\}\right)\underbrace{P\left(\left\{(a,\cdot)\right\}\right)}_{p(a)}\\&=p\left(a\right)p_a\left(b\right)=q\left(\left(a,b\right)\right)\end{aligned}$$

ולכן השני מתקבל (הראשון ברור). ■

הפרדת השערות פשוטות

נתונה השערת האפס (הסביר ביותר) H_0 עם $p\left(H_0\right)$ והשערה חלופית H_1 עם $p\left(H_1\right)$ ואנחנו מקבלים מדידות מתוך אחד העולמות (ההשערות) ואנחנו רוצים להעריך באיזו תאוריה אנחנו נמצאים.

דוגמה $\frac{1}{1000}$ מהאוכלוסיה נושאים את הנגיף. הבדיקה עשויה להחזיר תשובה שלילית לחולה בהסת' $\frac{1}{100}$ ותשובה חיובית לבריא בהסת' $\frac{1}{100}$ (כלומר אחוז 1 של שגיאה בכל תשובה).

נסמן $A = \{(H_1, \cdot)\} = \{\text{האדם חולה}\}$, $B = \{(\cdot, +)\} = \{\text{קיבל תשובה חיובית}\}$ כאשר H_0 שהאדם בריא ו-H_1 שהאדם חולה.

נתון לנו $P(A) = 0.001$, $P\left(A^C\right) = 0.999$, $P\left(B \mid A^C\right) = \frac{1}{100}$, $P(B \mid A) = 0.99$.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \mid A) P(A) + P\left(B \mid A^C\right) P\left(A^C\right) \\ &= 0.99 \cdot 0.001 + 0.01 \cdot 0.999 \\ &\approx 0.0011 \end{aligned}$$

נחשב מה ההסת' שהאדם חולה בהינתן שקיבל תשובה חיובית.

$$\begin{aligned} P(A \mid B) &= \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)} \\ &\approx \frac{0.99 \cdot 0.001}{0.011} \approx \frac{1}{11} \end{aligned}$$

כלומר אפע"פ שהבדיקות שלנו די מהימנות, הסיכוי להיות בריא ושהבדיקה שגויה גבוה (בכללי, ובפרט) בהרבה מהסיכוי להיות חולה ושהבדיקה נכונה.

עבור 10^6 אנשים, 1000 חולים ו-$999,000$ בריאים, מתוכם מקבלים תשובה חיובית $9,990$. מתוך 1000 החולים 990 מקבלים תשובה חיובית, כלומר הסברנו בדוגמה מספרית את הפער.

הגדרה נאמר כי יש בין A, B <u>אי-תלות</u> אם ל-A, B הסת' חיובית ובנוסף $P(A \mid B) = P(A)$ או לחלופין ש-$P(B \mid A) = P(B)$.

תרגול

1. מטילים קוביות, נתון שסכום התוצאות ≥ 7.

   (א) מה ההסת' שהוא ≥ 10?

   $P(s \geq 10 \mid s \geq 7) = \frac{P(s \geq 10 \cap s \geq 7)}{P(s \geq 7)} = \frac{P(s \geq 10)}{P(s \geq 7)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{21}{36}} = \frac{2}{7}$.

   (ב) נתון שבקוביה הראשונה יצא לפחות 5, מה ההסת' לסכום ≥ 10?

   $A = \{s \geq 7\}$, $B = \{\text{הקוביה הראשונה לפחות } 5\}$. $P(s \geq 10 \mid A \cap B) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(A \cap B)} = \frac{\frac{5}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{5}{11}$.

2. $\Omega = \mathbb{N}$, $p(n) = \frac{1}{an^2}$, $a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. מה ההסת' לקבל מספר זוגי מסוים ($2k$) בהינתן שיצא מספר זוגי?

   $P(\{2k\} \mid 2\mathbb{N}) = \frac{P(\{2k\})}{P(2\mathbb{N})} = \frac{\frac{1}{a4k^2}}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a(2n)^2}} = \frac{\frac{1}{a4k^2}}{\frac{a}{4a}} = \frac{1}{ak^2}$.

3. 6 ילדים משחקים כדורגל ואף אחד לא רוצה להיות שוער. הם מחליטים שכל אחד יקח גפרור מקופסה ומי שקיבלת את הקצר ביותר יהיה שוער, האם המשחק הוגן?

כן! $P\left(A_1\right)=\frac{1}{6}$,$A_k=\{$הילד ה-k נבחר להיות שוער$\}$,

$$\begin{aligned} P\left(A_2\right) &= P\left(A_1\right) P\left(A_2 \mid A_1\right)+P\left(A_1^C\right) P\left(A_2 \mid A_1^C\right) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 0+\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

וכך הלאה על $k=6$.

4. שלושה שופטים יושבים בהרכב וקובעים את גזר דינו של נאשם לפי רוב (שניים מזכים - זכאי וכיוצ"ב). שניים מהשופטים מזהים נכון את אשמתו של נאשם בהסת' 90% והשלישי, 51%. מה ההסת' לפסק דין נכון אם:

(א) החלטת כל שופט בלתי תלויה.

$$A=\underbrace{\left(A_1 \cap A_2\right)}_{\text{צודקים } 1,2} \cup \underbrace{\left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\right)}_{\text{צודקים } 2,3} \cup \underbrace{\left(A_1 \cap A_2^C \cap A_3\right)}_{\text{צודקים } 1,3}$$

$P\left(A_1 \cap A_2\right)=0.81$, $P\left(A_1^C \cap A_2 \cap A_3\right)=0.109\ldots$ ואז $P(A) \approx 0.909$.

(ב) השופטים המנוסים בוחרים באופן בלתי תלוי והשלישי בוחר באקראי באחד השופטים ומסכים איתו.

$P\left(A_1 \cap A_2\right)=0.81$,

$$P\left(A_1 \cap A_2^C \cap A_3\right)=P\left(A_1 \cap A_2^C\right) P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2^C\right)=(0.9 \cdot 0.1) \frac{1}{2}$$

ואז $P(A)=0.9$, יותר נמוך מהקודם!

5. בדיקת פוליגרף משטרתית מגלה שקרן בהסת' 0.8 ודובר אמת בהסת' 0.9. ידוע שבהסת' 0.7 הנבדק שקרן.

(א) מה ההסת' שיוכרז דובר אמת?

H_0 המאורע שהוא דובר אמת, H_1 שקרן, $\widetilde{H}_0$ שהוכרז אמת, $\widetilde{H}_1$ הוכרז שקרן.

$$\begin{aligned} P\left(\widetilde{H}_0\right) &= P\left(\widetilde{H}_0 \mid H_0\right) P\left(H_0\right)+P\left(\widehat{H}_0 \mid H_1\right) P\left(H_1\right) \\ &= 0.9 \cdot 0.3+0.2 \cdot 0.7 \\ &= \frac{41}{100} \end{aligned}$$

(ב) מה ההסת' שהוא דובר אמת, בהינתן שהוא הוכרז כדובר אמת?

$$P\left(H_0 \mid \widetilde{H}_0\right) = P\left(\widetilde{H}_0 \mid H_0\right) \frac{P\left(H_0\right)}{P\left(\widetilde{H}_0\right)}$$
$$= 0.9 \cdot \frac{0.3}{0.41} = \dots$$

6. סטודנט פותר מבחן אמריקאי. הסטודנט יודע את התשובה לשאלה בהסת' 0.6 ואחרת מנחש.

(א) בהינתן שאלה, מה ההסת' שהסטודנט ענה עליה נכון?

A ענה נכון ו-B ידע לענות. $P\left(A \mid B\right) = 1$, $P\left(B\right) = 0.6$, $P\left(A \mid B^C\right) = 0.25$.

$$P\left(A\right) = P\left(A \mid B\right) P\left(B\right) + P\left(A \mid B^C\right) P\left(B^C\right)$$
$$= 1 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.4 = 0.7$$

(ב) נניח שהוא ענה נכון על שאלה, מה ההסת' שלא ניחש?

$P\left(B \mid A\right) = P\left(A \mid B\right) \frac{P(B)}{P(A)} = 1 \cdot \frac{0.6}{0.7} = \frac{6}{7}$.

7. (פרדוקס מונטי הול) במשחק שלוש דלתות, מאוחרי שתיים עז, והשלישית מכונית. המתמודד בוחר אחת, ואז המנחה פותח דלת אחד שמאחוריה אין מכונית ומציע למתמודד להחליף את הדלת שלו בדלת הנותרת, האם משתלם למתמודד לעשות זאת?

כן! למרות שזה לא אינטואיטיבי. נניח שהתמודד בוחר את דלת 1. יש שלוש אפשרויות:

(א) המכונית מאוחרי דלת 1 והמנחה פותח את 2 או 3.

(ב) המכונית מאוחרי דלת 2 והמנחה פותח את 3.

(ג) המכונית מאחורי 3 והמנחה פותח את 2.

וכל אפשרות קוראת בהסת' שליש. אם הוא מחליף, אז הוא מנצח ב-b, c, כלומר בהסת' $\frac{2}{3}$, לעומת רק $\frac{1}{3}$ אחרת.

8. שולפים קלף אקראי מחפיסת קלפים. $E = \{\text{אס}\}$, $F = \{\text{לב}\}$, האם E, F ב"ת (נסמן $E \perp F$)?

כן! $P\left(E \cap F\right) = \frac{1}{52}$, $P\left(E\right) = \frac{1}{13}$, $P\left(F\right) = \frac{1}{4}$ ואכן מתקיימת הנוסחה לאי תלות.

9. בכד 3 מטבעות, 2 הוגנים והשלישי עם H בשני הצדדים. בוחרים מטבע אקראי ומטילים אותו פעמיים. נסמן $A_1 = \{\text{יצא עץ בהטלה } 1\}$, $A_2 = \{\text{יצא עץ בהטלה } 2\}$. האם $A_1 \perp A_2$?

D המאורע שלפנינו מטבע הוגן, $P\left(D\right)=\frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}P\left(A_{1}\right) & =P\left(A_{1}\mid D\right)P\left(D\right)+P\left(A_{1}\mid D^{C}\right)P\left(D^{C}\right)\\
 & =\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\\
 & =\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

וברור ש-$P\left(A_{1}\right)=P\left(A_{2}\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(A_{1}\cap A_{2}\right) & =P\left(A_{1}\cap A_{2}\mid D\right)P\left(D\right)+P\left(A_{1}\cap A_{2}\mid D^{C}\right)P\left(D^{C}\right)\\
 & =\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\frac{1}{3}\\
 & =\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

ולכן $A_{1}\not\perp A_{2}$.

שבוע $\mathbb{IV}$ | פרדוקס שני הילדים ומשתנים מקריים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הערה נוכל להכליל את כלל בייס ל-3 מאורעות. עבור $A,B,D\in\mathcal{F}$, עם $P\left(B\cap D\right),P\left(A\cap D\right)>0$ אז

$$P\left(A\mid B,D\right)=P_{D}\left(A\mid B\right)=\frac{P_{D}\left(B\mid A\right)P_{D}\left(A\right)}{P_{D}\left(B\right)}=\frac{P\left(B\mid A,D\right)P\left(A\mid D\right)}{P\left(B\mid D\right)}$$

הגדרה נאמר כי A,B מאורעות <u>בלתי תלויים</u> (ב"ת) אם $P\left(A\cap B\right)=P\left(A\right)P\left(B\right)$.

הערה הגדרה זו יותר כללית כי היא לא מניחה כלום על ההסת' של A,B והיא סימטרית.

דוגמה קוביה הוגנת, $\Omega=[6]$. $A=\{\text{התוצאה זוגית}\}$, $B=\{\text{התקבלה תוצאה 5 או 6}\}$. $P\left(A\right)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $A\cap B=\{6\}$. $P\left(A\mid B\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}}=\frac{1}{2}$ ולכן A,B ב"ת.

טענה יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ מאורעות ב"ת אזי:

א' A ב"ת ב-Ω וב-$\varnothing$.

ב' אם $P(B)>0$ אז $P(A\mid B)=P(A)$.

ג' A,B^{C} ב"ת.

הוכחה: א' $P(A\cap\Omega)=P(A)P(\Omega)=P(A)$, $0=P(\varnothing)=P(A\cap\varnothing)=P(A)P(\varnothing)=0$.

ג'

$$P\left(A\cap B^{C}\right)\overset{\text{הסת' שלמה}}{=}P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)P(B)=P(A)(1-P(B))=P(A)P\left(B^{C}\right)$$

■

דוגמה $\Omega=\{0,1\}^{2}$ שתי הטלות של מטבע הוגן.

$$A=\{\text{הסכום זוגי}\}=\{(0,0),(0,1)\}$$
$$B=\{\text{יצא בהטלה הראשונה אפס}\}$$
$$C=\{\text{יצא בהטלה השנייה אפס}\}$$

$P(A)=\frac{1}{2}$, $P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$, $A\cap C=A\cap B=\{(0,0)\}$, $P(A\cap C)=\frac{1}{4}=P(A)P(C)$ ובאותו האופן $P(A\cap B)=P(A)P(B)$ אבל

$$P(A\cap(B\cap C))=\frac{1}{4}\neq\frac{1}{8}=P(A)P(B\cap C)$$

כלומר, אם A ב"ת ב-B,C, זה לא אומר ש-A ב"ת ב-$B\cap C$!

הגדרה יהיו $A,B_1,\ldots,B_n\in\mathcal{F}$. נאמר כי A ב"ת ב-$\{B_1,\ldots,B_n\}$ אם $\forall I\subseteq[n]$ מתקיים כי A ב"ת במאורע $\bigcap\limits_{i\in I}B_i$.

הערה בהגדהרה מופיע מס' גדול של תנאים : 2^{n} תנאים.

הגדרה (סימטרית, לעומת הקודמת) אוסף מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ יקראו ב"ת אם לכל $\varnothing\neq I\subseteq[n]$ אם $P\left(\bigcap\limits_{i\in I}A_i\right)=\prod\limits_{i\in I}P(A_i)$.

טענה יהיו $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$. $A_1,\ldots,A_n$ מאורעות ב"ת אם"ם $\forall j\in[n]$ המאורע A_j ב"ת ביתר המאורעות $\{A_i\mid j\neq i\in[n]\}$.

הגדרה מאורעות $A_1,\ldots,A_n$ יקראו ב"ת בזוגות אם $\forall i\neq j$ מתקיים כי A_i,A_j ב"ת.

הערה ההגדרה חלשה יותר מב"ת כללי וראינו זאת בדוגמה ($\binom{n}{2}$ תנאים לעומת 2^{n} תנאים).

דוגמה מטילים n (זוגי) מטבעות הוגנים, $\Omega=\{H,T\}^{n}$. נגדיר $\forall i\in[n]$, A_i המאורע שהמטבע ה-i הוטל לעץ וגם B הוא המאורע שמס' הטלות העץ הינו זוגי.

נשים לב שלא מתקיים כי B ב"ת ב-$A_1,\dots,A_n$ כי $1 = P\left(B \mid A_1,\dots,A_n\right) \neq P\left(B\right) = \frac{1}{2}$. נראה כי אם $I \subsetneq [n]$ אז B ב"ת ב-$\{A_i\}_{i\in I}$.

תהי $I \subsetneq [n]$. יהי $j \in [n] \setminus I$. נראה כי $\left|B \cap \bigcap_{i\in I} A_i\right| = \left|B^C \cap \bigcap_{i\in I} A_i\right|$. נגדיר $\pi : \Omega \to \Omega$ הפ' שהופכת את התוצאה בקווארדינטה ה-j, כלומר

$$\pi\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) = \left(\omega_1,\dots,\omega_{j-1},1-\omega_j,\omega_{j+1},\dots,\omega_n\right)$$

נשים לב כי $\forall i \in I$, אם $\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in A_i$ אז $\pi\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in A_i$ ואם $\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in B$ אז $\pi\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in B^C$ ולכן אם $\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in B \cap \bigcap_{i\in I} A_i$ אז $\pi\left(\omega_1,\dots,\omega_n\right) \in B^C \cap \bigcap_{i\in I} A_i$ ולכן π חחע"ל ולכן $\left|\underbrace{B \cap \bigcap_{i\in I} A_i}_{D_2}\right| = \left|\underbrace{B^C \cap \bigcap_{i\in I} A_i}_{D_1}\right|$.

מנוסחת ההסת' השלמה, $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = P\left(D_1\right) + P\left(D_2\right)$, לכן $\prod_{i\in I} P\left(A_i\right) P\left(B\right) = P\left(\bigcap_{i\in I}\right) \frac{1}{2} = P\left(B \cap \bigcap_{i\in I} A_i\right)$ ולכן B ב"ת ב-$\bigcap_{i\in I} A_i$.

הערה בדוגמה הנ"ל הראנו כי כל עוד לא מקבלים את כל ה-2^n תנאים הרצוים, אפילו אם זה $2^n - 1$, לא נוכל להשוות אף הגדרה להגדרה של אי-תלות של אוסף.

הגדרה אוסף מאורעות $\mathcal{A}$ נקרא ב"ת אם כל תת אוסף סופי של מאורעות מתוך $\mathcal{A}$ הוא ב"ת.

טענה אם $A_1, A_2, \dots$ מאורעות ב"ת אז $\prod_{i\in\mathbb{N}} P\left(A_i\right) = P\left(\bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_I\right)$.

פרדוקס שני הילדים

למר ג'ונס שני ילדים (במין בינארי - בן או בת, כמה לא פרוגרסיבי מצדו). $\Omega = \{B,G\}^2$ אחיד.

$$B_1 = \{\text{הילד הבכור הוא בן}\} = \{(B,G),(B,B)\}$$
$$B_2 = \{\text{הילד הקטן הוא בן}\} = \{(G,B),(B,B)\}$$
$$B = \{\text{אחד הילדים הוא בן}\} = \{(B,G),(B,B),(G,B)\}$$
$$A = \{\text{למר ג'ונס שני בנים}\} = \{(B,B)\}$$

$P\left(A \mid B_1\right) = \frac{P(A\cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$ שזו ההסת' ששניהם בנים אם ידוע שהבכור בן וכן $P\left(A \mid B_2\right) = \frac{1}{2}$ שזו ההסת' ששניהם בנים אם ידוע שהצעיר בן. בנוסף, $P\left(A \mid B\right) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$ שזו ההסת' ששניהם בנים אם ידוע שאחד מהם הוא בן.

עתה לניסוי קצת אחר: דפקנו בדלת ופתח בן. D_1 הוא המאורע שלפנינו בן, D_2 המאורע שהילד האחר הוא בן ו-F הילד שלפנינו בכור.

$$\begin{aligned}P\left(D_2 \mid D_1\right) &= P_{D_1}\left(D_2\right)\\ &= \underbrace{P_{D_1}\left(D_2 \mid F\right)}_{P(A|B_1)} P_{D_1}(F) + \underbrace{P_{D_1}\left(D_2 \mid F^C\right)}_{P(A|B_2)} P_{D_1}\left(F^C\right)\\ &= \frac{1}{2} P_{D_1}(F) + \frac{1}{2} P_{D_1}\left(F^C\right)\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

זו ההסת' שהילד האחר בן בהינתן שמי שפתח בן, כלומר ההסת' שבהינתן שפתח בן, שני בניו של מר ג'ונס הם בנים. אם כן, הנה הפרדוקס - ההסת' עלתה כשמדובר בניסוי לכאורה שקול.

את הפער ניתן להסביר בשל העובדה שהנתונים לא לוקחים בחשבון את אופן הבחירה בילד/ה שיפתח את הדלת - האם תמיד הבכור פותח? האם תמיד בן פותח? האם תמיד הצעירה פותחת? וכו'.

חלק ב' של ההרצאה

אם המנגנון לפתיחת הדלת היה "אם יש בת - היא פותחת, ואחרת הבכור פותח" אז ההסת' שבהינתן שפתח בן שני בניו של מר ג'ונס הם בנים הוא 1.

ננסה לנסח מנגנון שמייצג באופן נטרלי בחירת ילד שיפתח את הדלת.

ננסח את הניסוי פורמלית כדי למנוע את העמימות ואת דואליות ההסת' שקיבלנו. $\Omega=\{B,G\}^2\times\{1,2\}$ כאשר האינדקס קובע מי מבין הילדים פותח את הדלת (הבכור הוא הראשון בסדר).

1. אם יש בן בבית, אז הוא פותח ואם יש שני בנים, אז הצעיר יפתח ואם יש שתי בנות, הצעירה פותחת.

   במקרה זה $P\left(\{\omega_1,\omega_2\} \mid \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_6\}\right)=\frac{\frac{1}{4}+0}{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{1}{3}$ כלומר זה מנגנון שיביא אותנו לתוצאה הראשונה שראינו.

2. מי שפותח את הדלת נבחר באקראי.

   במקרה זה $P\left(\{\omega_1,\omega_2\} \mid \{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_6\}\right)=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}{4\cdot\frac{1}{8}}=\frac{1}{2}$ וזה מייצג את התוצאה השנייה שקיבלנו.

i	ω	I	II
1	$BB1$	0	$\frac{1}{8}$
2	$BB2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
3	$BG1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
4	$BG2$	0	$\frac{1}{8}$
5	$GB1$	0	$\frac{1}{8}$
6	$GB2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
7	$GG1$	0	$\frac{1}{8}$
8	$GG2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה. <u>משתנה מקרי</u> הוא פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$.

דוגמה $\Omega=[6]^2$, הטלה של שתי קוביות. $X((a,b))=a+b$, $\forall(a,b)\in\Omega$.

הערה עבור $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $X^{-1}(S)=\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in S\}$. כלומר קבוצת תוצאות של מ"מ מגדירה לנו (היטב) מאורע במרחב המדגם. בדוגמה הנ"ל, $X^{-1}([1,2])=\{(1,1)\}$.

הגדרה עבור מ"מ, נגדיר פ' $P_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $P_X(S)=P\left(X^{-1}(S)\right)$.

דוגמה הטלת שני מטבעות אחידים. $\left(\{H,T\}^2,\mathcal{F},P\right)$. נגדיר את X כך שימנה את מס' העצים.

$$P_X(\{1\})=P(X=1)=P(X\in\{1\})=P(\{(H,T),(T,H)\})=\frac{1}{2}$$

$$P_X([0,1])=P(\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in[0,1]\})=\frac{3}{4}$$

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מ"ה ו-$A\in\mathcal{F}$. המ"מ $X(\omega)=\begin{cases}1 & \omega\in A\\ 0 & \omega\notin A\end{cases}$ נקרא <u>המשתנה המציין</u> (אינדיקטור) של A ומסומן ב-$\mathbb{1}_A$.

הערה אם X מ"מ עם $\mathrm{Im}X=\{0,1\}$ אז אם נגדיר $A=X^{-1}(\{1\})$ אז $X=\mathbb{1}_A$.

הגדרה יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$. הפ' $P_X:\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\to[0,1]$ כך ש-$P_X=P\left(X^{-1}(S)\right)$, $\forall S\in\mathcal{F}_R$ נקראת <u>התפלגות</u> על X.

משפט יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$. אז $(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},P_X)$ היא מ"ה.

הוכחה: $\forall S\in\mathcal{F}_R$, $P_X(S)\geq 0$.

$P_X(\mathbb{R})=P\left(X^{-1}(\mathbb{R})\right)=P(\Omega)=1$.

יהי אוסף זר $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, נשים לב כי אם $\{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ זר אז גם $\left\{X^{-1}(S_i)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. כי אם $\omega\in S^{-1}(S_i)$ ולכן $X(\omega)\in S_i$ ואם $i\neq j$ אז $S_i\cap S_j=\varnothing$ ולכן $X(\omega)\notin S_j$ ולכן $\omega\notin X^{-1}(S_j)$.

$$P_X\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}S_i\right)=P\left(X^{-1}\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}S_i\right)\right)=P\left(\dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}}X^{-1}(S_i)\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P\left(X^{-1}(S_i)\right)=\sum_{i\in\mathbb{N}}P_X(S_i)$$

■

הגדרה יהי X מ"מ על $(\Omega,\mathcal{F},P)$ המקיים $P_X=D$, נאמר כי X <u>מתפלג</u> לפי D ונסמן $X\sim D$. אם P_X היא פ' הסת' בדידה אז נאמר של-X יש <u>התפלגות בדידה</u> או ש-X הוא <u>מ"מ בדיד</u>. אם X מ"מ בדיד, פ' ההסת' הנקודתית המתאימה תסומן p_X ותכונה <u>פונקציית ההתפלגות הנקודתית</u> של X. לתומך של p_X נקרא <u>התומך</u> של X. אם $P_X(S)=1$, $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ אז נאמר שהמ"מ X <u>נתמך</u> על S.

הערה נסמן

$$\{x \in S\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\}$$

$$\{X > a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\}$$

$$P(X = 0) = P\left(X^{-1}(\{0\})\right)$$

$$P(X \in S \mid X \in T) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in S\} \mid \{\omega \in \Omega : X(\omega)\} \in T)$$

וכיוצ"ב.

הערה אם $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ בדיד אז גם $(\mathbb{R}, \mathcal{F}_{\mathbb{R}}, P_X)$ בדיד (אבל ההפך לא נכון).

דוגמה יוני ביצע 3 בדיקות קורונה (מועד ג').

- אם קיבל תשובות שליליות, יקבל יום מחלה אחד.
- אם קיבל חיובית חלשה, יקבל 4 ימי מחלה.
- אם חיובית אז 14 ימי מחלה.

$\Omega = \{N, P, P_\omega\}^3$. נגדיר מ"מים X הוא מס' הבדיקות החיוביות, Y מס' הבדיקות החיוביות-חלשות ו-Z מס' הבדיקות השליליות. נגדיר מעבר לכך V מ"מ של מספר ימי המחלה שיקבל יוני, $V = 14X + 4Y + Z$ (בהנחה שאפשר לסכום ימי חופשה על כל בדיקה).

הגדרה יהיו X, Y מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. נאמר כי $X = Y$ אם $X(\omega) = Y(\omega)$, $\forall \omega \in \Omega$.
2. $X \overset{a.s.}{=} Y$ אם $P(X = Y) = 1$ (כלומר $de\ jure$ הם שונים אבל כל המאורעות עליהם הם שונים קורים בהסת' 0).
3. $X \overset{d}{=} Y$ אם X, Y הם שווי התפלגות, כלומר $P_X = P_Y$.

דוגמה מטבע לא הוגן $\Omega = \{H, T\}$, $P(H) = 1, P(T) = 0$. נגדיר שני מ"מ

$$X(H) = 3, X(T) = 2, Y(H) = 3, Y(T) = -11$$

לא מתקיים $X = Y$ אבל כל ערך שיכול להתקבל, כן שווה, ולכן $X \overset{a.s.}{=} Y$.

תרגול

הגדרה יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. נגדיר $(X \mid A)$ המ"מ X על $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$.

1. פוגשים אדם אקראי ברחוב ורוצים לדעת מה ההסת' שגובהו ≤ 1.70 מטר. $\Omega = \{$אנשים$\}$. נגדיר $X : \Omega \to \mathbb{R}$ שהוא הגובה, $P(X \geq 1.70)$ יפשט את הבעיה.

2. יש שלושה מחירים למחשב בשוק, $1697, 2677, 3323$. $\Omega=\{\text{מחשבים}\}$, מחיר המחשב $=X\left(\text{מחשב}\right)$. וכך נוכל לבדוק את ההסת' לכל מחיר.

3. מטילים קוביה פעמיים. מה ההסת' שהערך הראשון גדול מהשני? $\Omega=\left[6\right]^{2}$, עבור $i\in\left[2\right]$, תוצאת ההטלה ה-i $=X_{I}\left(\omega\right)$.

4. מטילים שתי קוביות הוגנות, N סכום ההטלות, מה ההתפלגות של N? $\Omega=\left[6\right]^{2}$. P אחידה. נגדיר $X_{1}\left(\omega\right)=X_{1}\left(\omega_{1},\omega_{2}\right)=\omega_{2}$ ו-$X_{2}\left(\omega\right)=\omega_{2}$ ולכן $N\left(\omega\right)=X_{1}\left(\omega\right)+X_{2}\left(\omega\right)$. $P_{N}\left(1\right)=P\left(N=1\right)=0$, $P_{N}\left(2\right)=P\left(N=2\right)=\frac{1}{36}$ וכו'.

5. יש שתי קבויות הוגנות, אחת עם 6 פאות והשנייה עם 4. מטילים מטבע - אם נחת על עץ, מטילים את הראשונה ואחרת את השנייה. תארו את ההסת' לכל תוצאה אפשרית בניסוי.

$\Omega=\left[6\right]\times\left[4\right]\times\left\{ H,T\right\}$ ולכן עבור מרחב מדגם זה, נקבל מה"א. נגדיר $Z\left(\omega\right)=\begin{cases}1 & \omega_{3}=H\\ 0 & \omega_{3}=T\end{cases}$, $X_{1}\left(\omega\right)=\omega_{1}$ ו-$X_{1}\left(\omega\right)=\omega_{2}$.
נסמן ב-X את התוצאה בניסוי, לכן מבחינה נוסחתית מתקיים $X=X_{1}Z+X_{2}\left(1-Z\right)$.

$$\begin{aligned}P_{X}\left(1\right) & =P\left(\left(Z=1\wedge X_{1}=1\right)\vee\left(Z=0\wedge X_{2}=1\right)\right)\\ & =P\left(Z=1\wedge X_{1}=1\right)+P\left(Z=0\wedge X_{2}=1\right)\\ & =\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{24}\end{aligned}$$

$$P_{X}\left(2\right)=\frac{5}{24}$$

- חשבו את ההתפלגות של $\left(X\mid Z=1\right)$ (זה מאורע).

$$P_{\left(X|Z=1\right)}\left(k\right)=P_{Z=1}\left(X=k\right)=P\left(X=k\mid Z=1\right)=\frac{P\left(X=k\wedge Z=1\right)}{P\left(Z=1\right)}=\frac{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

- חשבו את ההתפלגות של $\left(X\mid X\in\left\{ 4,5\right\} \right)$.

$$
\begin{aligned}
P_{(X|X\in\{4,5\})}(k) &= P(X=k \mid X\in\{4,5\}) \\
&= \frac{P(X=k\wedge X\in\{4,5\})}{P(X\in\{4,5\})} \\
&\overset{k=4,5}{=} \frac{P(X=k)}{P(X\in\{4,5\})} \\
&= \begin{cases} \frac{5}{7} & k=4 \\ \frac{2}{7} & k=4 \end{cases}
\end{aligned}
$$

ואם $k\neq 4,5$ אז ההתפלגות היא 0.

6. X,Y מ"מ על אותו מרחב.

- הוכחי/הפריכי: אם X,Y שווים כמעט תמיד אז $X\sim Y$.

נכון! תהי $A\subseteq\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
P_X(A) &= P(X\in A) \\
&\overset{\text{הסת' שלמה}}{=} P(X\in A\wedge X=Y)\,P(X=Y)+P(X\in A\wedge X\neq Y)\,P(X\neq Y) \\
&= P(Y\in A\wedge X=Y)\,P(X=Y) \\
&= P(Y\in A\wedge X=Y)\,P(X=Y)+P(X\in A\wedge X\neq Y)\,P(X\neq Y) \\
&\overset{\text{הסת' שלמה}}{=} P_Y(A)
\end{aligned}
$$

- הוכיחי/הפריכי: אם $X\sim Y$ אז X,Y שווים כמעט תמיד.

לא נכון! הטלת שתי קוביות, X_1,X_2 מייצג את ערך כל קוביה. $P_{X_1}(k)=P_{X_2}(k)=\frac{1}{6}$ אבל $P(X_1\neq X_2)>0$ כי תיתכן הטלה לא שווה, לדוגמה $(2,6)$.

7. מטילים קוביות וסוכמים את התוצאות מודולו 6. הראו כי התוצאה מתפלגת אחיד על $\{0,\dots,6\}$.

$$
P_X(0)=P(X=0)=P(S=6\vee S=12)=\frac{1}{6}
$$

וכך גם על כל השאר.

הגדרה יהי $X=(X_1,\dots,X_n)$ וקטור מקרי. אזי $P_X=P_{X_1,\dots,X_n}:\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\to[0,1]$ המוגדרת ע"י

$$
P_X(A)=P\left(X^{-1}(A)\right)=P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in A\})
$$

היא ההתפלגות המשותפת של X. ההתפלגות של כל X_k נקראת ההתפלגות השולית של P_X.

שבוע $\mathbb{V}$ | משתנים מקריים לעומק

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמה $\Omega=[6]^2$, $X((a,b))=a+b$, $Y\equiv a+b \mod 6$.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_X	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

וזו ההתפלגות של X.

Y	0	1	2	3	4	5
P_Y	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{6}{36}$

כלומר $(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},P_Y)$ הוא לא מ"ה אחיד (כי כל $\mathbb{R}\setminus[6]$ מקבל 0).

דוגמה בעיית המעטפות $\Omega=S_n$, A_i אוסף התמורות בהן יש נק' שבת. נגדיר X המונה את מס' נקודות השבת. $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_i}$.

דוגמה $\Omega=\{H,T\}$, $P(H)=\frac{1}{2}$, נגדיר $X=\begin{cases}1 & \omega=H\\ 0 & \omega=T\end{cases}$. $P_X(\{H\})=P_X(\{T\})=\frac{1}{2}$.

דוגמה $\Omega=[6]$ קוביה הוגנת. $Y=\begin{cases}1 & \text{זוגי } \omega\\ 0 & \text{אי זוגי } \omega\end{cases}$ ולכן $X\overset{d}{=}Y$.

טענה אם $X\overset{a.s}{=}Y$ אז $X\overset{d}{=}Y$.

טענה אם $X\overset{a.s}{=}Y$ אז $f(x)\overset{a.s}{=}f(y)$ וגם אם $X\overset{d}{=}Y$ אז $f(x)\overset{d}{=}f(y)$.

הגדרה נאמר כי מ"מ X מתפלג ברנולי עם פרמטר p אם

$$P(X=0)=1-p$$
$$P(X=1)=p$$
$$P(X=\alpha)=0,\forall\alpha\notin\{0,1\}$$

ונסמן $X\sim\text{Ber}(p)$.

X מתפלג אחיד על קבוצה סופית $S \subsetneq \mathbb{R}$ אם $\forall s \in S$, $P\left(X=s\right)=\frac{1}{|S|}$ (ואם $\alpha \notin S$ אזי $P\left(x=\alpha\right)=0$) ונסמן $X \sim \mathrm{Unif}\left(S\right)$.

X מתפלג קבוע אם קיים $c \in \mathbb{R}$ כך ש-$P\left(X=c\right)=1$ (כלומר המאורע $\{X=c\}$ מתקיים כמעט תמיד).

X מתפלג גאומטרית אם $P_X\left(n\right)=\begin{cases} p\left(1-p\right)^{n-1} & n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ ונסמן $X \sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$.

X מתפלג בינומית אם $P_X\left(k\right)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$ ונסמן $X \sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)$

הערה התפלגות גאומטרית מתארת את ההסת' שבהטלה ה-n-ית נקבל עץ לראשונה עם מטבע p-הוגן.

התפלגות בינומית מתארת את ההסת' שנקבל בדיוק k הטלות עץ מתוך n הטלות של מטבע p-הוגן,

הערה כל משתנה מציין $\mathbb{1}_A$ מתפלג ברנולי עם פרמטר $p=P\left(A\right)$.

דוגמה בבית קשת לבנה וקשת אדומה. האחיות מרים ולוטס בוחרות קשת באקראי, $\Omega=\{W,R\}^2$. נסמן X המ"מ המציין למאורע שמרים לקחה קשת לבנה ו-Y המ"מ המציין למאורע לוטס בחרה קשת לבנה. נגדיר $Z=1-X$ ונשים לב כי $X+Y=1$. האם $Y=Z$?

נשים לב כי $X\left(\left(W,W\right)\right)=1$ (אפע"פ שההסת' למאורע היא 0) ו-$X\left(\left(W,W\right)\right)=1$ אבל $Z=1-X\left(\left(W,W\right)\right)=0$.

האם $Z \overset{a.s}{=} Y$?

$Z\left(\left(W,R\right)\right)=Y\left(\left(W,R\right)\right)$ וגם $Z\left(\left(R,W\right)\right)=Y\left(\left(R,W\right)\right)$ ולכן התשובה היא כן.

נשים לב כי $X,Y,Z \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. רק המידע על ההתפלגות של המ"מים לא מספיק לנו לקביעה בנוגעה לשוויון או שוויון כמעט תמיד שלהם.

הגדרה אוסף סופי של מ"מ $X=\left(X_1,\ldots,X_n\right)$ המוגדרים על אותו מ"ה נקרא <u>וקטור מקרי</u>.

הגדרה יהיו X,Y מ"מ על $\left(\Omega,\mathcal{F},P\right)$ אז <u>ההתפלגות המשותפת</u> שלהם היא פ' $P_{XY}:\mathbb{R}^2 \to \left[0,1\right]$ כך ש-

$$\begin{aligned} P_{XY}\left(\left(a,b\right)\right) &= P\left(X=a,Y=b\right) \\ &= P\left(\{\omega \in \Omega : X\left(\omega\right)=a, Y=\left(\omega\right)=b\}\right) \end{aligned}$$

ובאופן כללי אם $S,T \subseteq \mathbb{R}$ אזי

$$\begin{aligned} P_{XY}\left(S,T\right) &= P\left(X \in S \wedge Y \in T\right) \\ &= P\left(\{\omega \in \Omega : X\left(\omega\right) \in S, Y\left(\omega\right) \in T\}\right) \end{aligned}$$

דוגמה נטיל 2 קיוביות ונגדיר X ערך ההטלה הגדולה ביניהן, Y ערך הקטנה ביניהן.

P_{XY}	1	2	3	4	5	6	P_X
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{7}{36}$
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{9}{36}$
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
P_Y	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	

מנוסחת ההסת' השלמה,

$$P_X(1) = P(X=1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{6}(X=1,Y=i)\right) = \sum_{i=1}^{6} P(X=1,Y=i) = \sum_{i=1}^{6} P_{XY}(1,i)$$

הערה באופן כללי, $P_X(\{x\}) = \sum_{y\in\mathbb{R}} P_{XY}((x,y))$ וכן $P_Y(\{y\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}} P_{XY}((x,y))$, כלומר לא איבדנו מידע במעבר להתפלגות משותפת.

הגדרה וקטור מקרי (X,Y) יקרא <u>בדיד</u> והתפלגותו תקרא בדידה אם P_{XY} פ' הסת' בדידה.

טענה הפ' P_{XY} היא פ' הסת'.

דוגמה X,Y מ"מ. נתונה ההתפלגות המשותפת

$$P_{XY}(0,0) = \tfrac{1}{3}$$
$$P_{XY}(0,1) = \tfrac{1}{6}$$
$$P_{XY}(1,0) = \tfrac{1}{6}$$
$$P_{XY}(1,1) = \tfrac{1}{3}$$

$$P_X(0) = P_{XY}(0,0) + P_{XY}(0,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

ולכן $X \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ (וגם $Y \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$).

חלק ב' של ההרצאה

הערה אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ בדיד ו-$X:\Omega\to\mathbb{R}$ מ"מ אזי $(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},P_X)$ בדיד (כלומר X מ"מ בדיד).

דוגמה מטבע הוגן, $\Omega = \{H,T\}$, $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$, $X = \mathbb{1}_{\{H\}}$ ולכן $X \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. נגדיר $Y = X$ ולכן גם $Y \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$.
$X+Y = \begin{cases} 2 & \omega = H \\ 0 & \omega = T \end{cases}$. $P_{X+Y}(2) = P(H) = \frac{1}{2}$ וגם $P_{X+Y}(0) = \frac{1}{2}$ ולכן $X+Y \sim \text{Unif}(\{0,2\})$.

נגדיר $Z=1-X$, $Z=\begin{cases}0 & \omega=H\\ 1 & \omega=T\end{cases}$. גם $Z\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ אבל Y,Z לא שווים, גם לא כמעט תמיד ואפילו $X+Z\equiv1$.

מסקנה לא ניתן ללמוד מ-P_X,P_Y האם $X\overset{a.s.}{=}Y$ או איך מתפלג $X+Y$.

הגדרה אם $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ מוגדרים על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},P)$, אז $X=(X_1,\ldots,X_n)$ הוא <u>וקטור מקרי</u> ממימד n.

הגדרה יהי $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטור מקרי ממימד n על מ"ה $(\Omega,\mathcal{F},P)$. הפ' $P_{X_1,\ldots,X_n}=P_X:\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\to[0,1]$ המוגדרת $\forall S\subseteq\mathbb{R}^n$,

$$P_X\left(S\right)=P\left(\left\{\omega\in\Omega:X_1\left(\omega\right)\wedge\cdots\wedge X_n\left(\omega\right)\right\}\right)$$

נקראת <u>ההתפלגות המשותפת</u>.

הערה ההגדרה של קבוצה תומכת, מ"מ בדיד, התפלגות בדידה, שוויון, שוויון כמעט תמיד ושוויון בהתפלגות נשארים זהים למקרה החד מימדי. אם X מ"מ בדיד, אז

$$p_X\left(x_1,\ldots,x_n\right)=P\left(X=\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)=P\left(\bigcap_{i=1}^{n}X_i^{-1}\left(x_i\right)\right)$$

טענה P_X היא פ' הסת'.

טענה וקטור מקרי $X=(x_1,\ldots,x_n)$ הינו בדיד אם"ם $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ בדידים (כלומר ההתפלגויות השוליות בדידות).

מסקנה אם $X=(X_1,\ldots,X_n)$ וקטורמ מקרי בדיד אז נוכל לחשב את ההתפלגות השולית הנקודתית לכל אחד מ-$X_1,\ldots,X_n$ בעזרת פ' ההתפלגות הנקודתית של X,

$$P_{X_k}\left(\alpha_k\right)=\sum_{\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n\right)\subseteq\mathbb{R}^{n-1}}P_X\left(\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1},\alpha_k,\alpha_{k+1},\ldots,\alpha_n\right)$$

הערה בעזרת P_{XY} נבדוק אם $X\overset{a.s.}{=}Y$.

$$\begin{aligned}X\overset{a.s.}{=}Y&\iff P\left(X=Y\right)=1\\&\iff P\left(\left\{\omega\in\Omega:X\left(\omega\right)=Y\left(\omega\right)\right\}\right)=1\\&\iff P\left(\left\{\omega\in\Omega:\left(X\left(\omega\right),Y\left(\omega\right)\right)\in\left\{\left(\alpha,\alpha\right):\alpha\in\mathbb{R}\right\}\right\}\right)=1\\&\iff P\left(\left(X,Y\right)\in\left\{\left(\alpha,\alpha\right):\alpha\in\mathbb{R}\right\}\right)=1\\&\iff P_{XY}\left(\left\{\left(\alpha,\alpha\right):\alpha\in\mathbb{R}\right\}\right)=1\end{aligned}$$

נוכל לבצע עוד חישובים בעזרת ההתפלגות המשותפת.

$$P(X \geq Y) = P_{XY}(\{(\alpha, \beta) : \alpha \geq \beta\})$$

הגדרה יהיו X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ו-$A \in \mathcal{F}$ כך ש-$P(A) > 0$. X הוא מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$.

דוגמה $X \sim \text{Unif}([6])$, נגדיר $A = \{X > 2\}$. נמצא את פ' התפלגות הנקודתית.

$$\begin{aligned} p_{X|A}(1) &= P(X = 1 \mid X > 2) \\ &= \frac{P(X = 1 \wedge X > 2)}{P(X > 2)} = 0 \end{aligned}$$

ומאותה סיבה גם $P_{X|A}(2) = 0$. עבור $k \in \{3, \dots, 6\}$,

$$\begin{aligned} p_{X|A}(k) &= P(X = k \mid X > 2) \\ &= \frac{P(X = k \wedge X > 2)}{P(X > 2)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{4}{6}} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

ולכן X בהינתן A מתפלג אחיד על $\{3, \dots, 6\}$, כלומר $X \mid A \sim \text{Unif}(\{3, \dots, 6\})$.

דוגמה $A = \{X = 1\}$,

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

$$P_{Y|A}(\{1\}) = P(Y = 1 \mid X = 1) = \frac{P(Y = 1 \wedge X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

הגדרה מ"מ X, Y על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ יקראו <u>בלתי תלויים</u> אם $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}$,

$$P(X \in A \wedge Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B)$$

או במילים אחרות, אם המאורעות $\{X \in A\}$ ו-$\{Y \in B\}$ הם ב"ת.

תרגול

הערה אם $X\sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$ אז $P\left(X>k\right)=\left(1-p\right)^{k}$ (ההסת' שיהיה לנו רצף של לפחות ממש k הטלות פלי ורק לאחריהן עץ הוא ההסת' ש-k ההטלות הראשונות הן פלי).

דוגמה ערכו בדיקה ו-40% מהסטודנטים לתואר השני הם מתרגלים פעילים. רועי רוצה לקבל חתימה ממתרגל פעיל ועוצר אקראית סטודנטים בקמפוס. נסמן ב-X את מספר הסטודנטים אליהם פנה עד שפגש מ"פ (לא מפקד פלוגה).

$$P\left(X\le 3\right)=1-P\left(X>3\right)=1-0.6^{3}$$

טענה (תכונת חוסר הזיכרון) אם $X\sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$ אז $P\left(X=n+k\mid X>k\right)=P\left(X=n\right)$.

הערה המשמעות של זה היא שאם לא הטלנו עץ k פעמים, אז סדרת הטלות נוספת זהה להתחלה מחדש של סדרת הטלות.

דוגמה איתמר ואלעד משחקים זוג או פרט שוב ושוב עד שאחד מהם מוביל ב-2 נקודות. נסמן ב-Xאת מספר הפעמים בסדרת המשחקים שבהן היה תיקו, כיצד מתפלג X? כל פעם שהמצב הוא תיקו המצב זהה, לכן $X\sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$.

דוגמה אליס נמצאת בחדר מבואה עם דלת כניסה ושלוש דלתות יציאה - לארץ הפלאות, לשפרינצק וחזרה לאותו החדר. בכל כניסה לחדר היא בוחרת בהסת' p_1 להיכנס לשפרינצק ולארץ הפלאות בהסת' p_2, $p_1+p_2<1$.

- מה הסיכוי שאליס תגיע לארץ הפלאות?

ω_n המאורע שאליס מגיע לארץ הפלאות בדיוק בפעם ה-n ו-$A=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}\omega_n$ המאורע הרצוי.

$$\begin{aligned}P\left(A\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\omega_n\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\left(p_1+p_2\right)\right)^{n-1}p_2\\&=\frac{p_2}{1-\left(1-\left(p_1+p_2\right)\right)}=\frac{p_2}{p_1+p_2}\end{aligned}$$

- כיצד מתפלג מספר הביקורים של עליסה בחדר המבואה בהיתן שבסופו של דבר הגיעה לארץ הפלאות.

X מספר הביקורים בחדר.

$$\begin{aligned}P\left(X=n\mid A\right)&=\frac{P\left(\left\{X=n\right\}\cap A\right)}{P\left(A\right)}\\&=\frac{P\left(\omega_n\right)}{\frac{p_2}{p_1+p_2}}\\&=\left(p_1+p_2\right)\left(1-\left(p_1+p_2\right)\right)^{n-1}\end{aligned}$$

ולכן $(X \mid A) \sim \text{Geo}(p_1 + p_2)$.

דוגמה רובין פותח n עוגיות מזל שבכל אחת יש נבואה טובה בהסת' k. יהי k מספר הנבואות הטובות שנמצא. רובין פותח עוד k עוגיות מזל מחברה אחרת שבכל אחת מהן נבואה טובה בהסת' q. מה ההתפלגות של מספר הנבואות הטובות בערימה השנייה.

X מספר הנ"ט (נבואות טובות, לא נגד טנקים) בערמה הראשונה ו-Y מספר הנ"ט בערימה השנייה. $X \sim \text{Bin}(n,p)$ ו-$(Y \mid X = k) \sim \text{Bin}(k,q)$ (הסטודנטית המשקיעה תיקח דקה כדי להפנים למה זהו המצב).

$$\begin{aligned}
P_Y(j) &= \sum_{k=0}^{n} P(Y = j \mid X = k) P(X = k) \\
&= \sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} \binom{n}{k} q^k (1-q)^{n-k} \\
&= \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} (pq)^j (1-pq)^{n-j}
\end{aligned}$$

ובסופו של דבר מגיעים לכך ש-$Y \sim \text{Bin}(n, p \cdot q)$.

טענה אם $X \sim \text{Geo}(p)$, $Y \sim \text{Geo}(q)$, אז $\min(X,Y) \sim \text{Geo}(1-(1-p)(1-q))$.

הערה יש לזה הסבר אינטואיטיבי - נטיל שני מטבעות (p ו-q הוגנים בהתאמה) במקביל ונעשה זאת עד שאחד מהם הוא עץ. ההסת' שאחד מהם יהיה עץ זה בדיוק $1-(1-p)(1-q)$ (אריתמטיקה בסיסית).

טענה $X \sim \text{Ber}(p)$ ו-$Y \sim \text{Ber}(q)$ ו-X,Y ב"ת. אזי $XY \sim \text{Ber}(pq)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
P(XY = 1) &= P(X = 1, Y = 1) \\
&\overset{\text{ב"ת}}{=} P(X = 1) P(Y = 1) \\
&= pq
\end{aligned}$$

■

טענה (נוסחת הקונבולוציה) X,Y מ"מ ב"ת הנתמכים על $\mathbb{Z}$, $Z = X + Y$. אזי

$$P(Z = n) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} P(X = j) P(X = n - j)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
P\left(Z=n\right) &= \sum_{r\in\mathbb{R}} P\left(Z=n\mid X=r\right)P\left(X=r\right)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} P\left(X+Y=n\mid X=j\right)P\left(X=j\right)\\
&= \sum_{j\in\mathbb{Z}} P\left(Y=n-j\mid X=j\right)P\left(X=j\right)\\
&\overset{\text{ב"ת}}{=} \sum_{j\in\mathbb{Z}} P\left(Y=n-j\right)P\left(X=j\right)
\end{aligned}$$

■

דוגמה X,Y מ"מ ב"ת על $(\Omega,\mathcal{F},P)$, $A\in\mathcal{F}$ עם $P\left(A\right)>0$.ה ראו כי $\left(Y\mid A\right),\left(X\mid A\right)$ גם ב"ת.

$$\begin{aligned}
P_A\left(X\in S,Y\in T\right) &= P\left(X\in S,Y\in T\mid X,Y\in A\right)\\
&= \frac{P\left(X\in S\cap A,Y\in T\cap A\right)}{P\left(X\in A,Y\in A\right)}\\
&= \frac{P\left(X\in S\cap A,Y\in T\cap A\right)}{P\left(X\in A\right)P\left(Y\in A\right)}\\
&= \frac{P\left(X\in S\cap A\right)}{P\left(X\in A\right)}\cdot\frac{P\left(Y\in T\cap A\right)}{P\left(Y\in A\right)}\\
&= P_A\left(X\in S\right)P_A\left(Y\in T\right)
\end{aligned}$$

הגדרה סדרת מ"מ $\left\{X_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ ב"ת אם לכל $\left\{S_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$,

$$P\left(\left\{X_n\in S_n:n\in\mathbb{N}\right\}\right)=\prod_{n=1}^{\infty}P\left(X_n\in S_n\right)$$

טענה $\left\{X_n\right\}$ סדרת מ"מ ב"ת שווי התפלגות ולא קבועים על $(\Omega,\mathcal{F},P)$. הראו כי המרחב לא בדיד.

הוכחה: יהי $\omega\in\Omega$ ונראה כי $P\left(\omega\right)=0$. נסמן $p=\max_{s\in\mathbb{R}}P\left(X_1=s\right)$.

p קיים כי אחרת יש לנו סדרה עולה ממש של ממשיים חיובים $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ כך ש-$P(X_1=s_i)<P(X_1=s_{i+1})$ ואז

$$\begin{aligned}P(X_1=s_1\vee X_2=s_2\vee\ldots)&\overset{\text{זרים}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}P(X_1=s_i)\\&>\sum_{n=1}^{\infty}P(X_1=s_2)\\&\overset{P(X_1=s_2)>0}{=}\infty\end{aligned}$$

בסתירה לכך שזו פ' הסתברות. לכן עבור סדרת ממשיים $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}P(\{X_n=s_n:n\in\mathbb{N}\})&=\prod_{n=1}^{\infty}P(X_n=s_n)\\&=\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}P(X_n=s_n)\\&\leq\lim_{N\to\infty}\prod_{n=1}^{N}p=\lim_{N\to\infty}p^N=0\end{aligned}$$

נציב $s_n=X_n(\omega)$ ולכן $P(\{X_n=s_n:n\in\mathbb{N}\})\leq 0$ ולכן $P(\omega)\overset{\text{לא בהכרח זרים}}{\leq}$ ולכן $P(\omega)=0$. ■

שבוע $\mathbb{VI}$ | טוחנים משתנים מקריים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

טענה יהיו X,Y מ"מ שווי התפלגות ותהי $S\in\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$ כך ש-$P(X\in S)>0$ אזי $P_{X|\{X\in S\}}=P_{Y|\{Y\in S\}}$.

דוגמה X,Y תוצאות ההטלות של שתי קוביות הוגנות ונגדיר $Z=X+Y$. מה התפלגות Z בהינתן שערכו זוגי ומה הם $P(Z=4\mid A)$, $P(X=4\mid A)$?

$A=\{\text{זוגי } Z\}=2\mathbb{N}$. נרצה את $P_{Z|A}$.

$$\begin{aligned}P(A)&=P(\{X,Y\in 2\mathbb{N}\}\cup\{X,Y\notin\mathbb{N}\})\\&=\underbrace{P(\{X,Y\in 2\mathbb{N}\})}_{\text{מכפלת ההסת' שכל אחד זוגי}}+P(\{X,Y\notin 2\mathbb{N}\})\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P(Z=2) &= \frac{1}{36} = P(Z=12)\\
P(Z=4) &= P(Z=10) = \frac{3}{36}\\
P(Z=6) &= P(Z=8) = \frac{5}{36}
\end{aligned}
$$

$$P(Z=k \mid A) = \frac{P(Z=k\cap A)}{P(A)} \overset{\text{אם } k \text{ זוגי}}{=} \frac{P(Z=k)}{\frac{1}{2}}$$

k	2	4	6	8	10	12
$P(Z=k \mid A)$	$\frac{1}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{3}{18}$	$\frac{1}{18}$

$$P(X=4 \mid A) \overset{\text{ב"ת}}{=} \frac{P(X=4)\,P(A \mid X=4)}{P(A)} = \frac{1}{6}$$

וככלל $X \mid A \sim \mathrm{Unif}([6])$.

הערה X,Y ב"ת אם"ם מכפלת ההתפלגויות השוליות של הוקטור המקרי שלהם שווה להתפלגות המשותפת.

טענה יהיו X,Y מ"מ בדידים אז X,Y ב"ת אם"ם $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$P(X=\alpha \wedge Y=\beta) = P(X=\alpha)\,P(Y=\beta)$$

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$: יהיו $A,B\subseteq\mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
P(X\in A \wedge Y\in B) &= \sum_{\alpha\in A,\beta\in B} P(X=\alpha, Y=\beta)\\
&= \sum_{\alpha\in A}\sum_{\beta\in B} P(X=\alpha)\,P(Y=\beta)\\
&= \sum_{\alpha\in A} P(X=\alpha)\sum_{\beta\in B} P(Y=\beta)\\
&= P(X\in A)\,P(Y\in B)
\end{aligned}
$$

■

דוגמה $X,Y\sim \text{Unif}\left(\{0,\ldots,5\}\right)$, $Z=X+Y \mod 6$. האם X,Z ב"ת?

$$\begin{aligned} P\left(Z=0\right) &= \sum_{i=0}^{5} P\left(X=i,Y=6-i\right) \\ &\overset{X,Y\text{ ב"ת}}{=} \sum_{i=0}^{5} P\left(X=i\right)P\left(Y=6-i\right) \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

ובאופן כללי

$$\begin{aligned} P\left(Z=b\right) &= \sum_{i=0}^{5} P\left(X=i,Y=b-i \mod 6\right) \\ &\overset{X,Y\text{ ב"ת}}{=} \sum_{i=0}^{5} P\left(X=i\right)P\left(Y=b-i \mod 6\right) \\ &= 6\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \end{aligned}$$

ולכן $Z\sim \text{Unif}\left(\{0,\ldots,5\}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(Z=k,X=k\right) &= P\left(X=k,Y=l-k \mod 6\right) \\ &\overset{X,Y\text{ ב"ת}}{=} P\left(X=k\right)P\left(Y=l-k \mod 6\right) \\ &= \frac{1}{36}=P\left(X=k\right)P\left(Z=l\right) \end{aligned}$$

ולכן אפע"פ שיש קשה אדוק בין X,Z, הם עדיין ב"ת.

הגדרה יהיו $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ המוגדרים על אותו מ"ה. נאמר כי הם <u>בלתי תלויים</u> כאוסף אם לכל n קבוצות $S_1,\ldots,S_n\subseteq\mathbb{R}$, המאורעות $\{X\in S_1\},\ldots,\{S_n\in S_n\}\in\mathcal{F}$ ב"ת.

טענה $X_1,\ldots,X_n$ ב"ת אם"ם לכל $S_1,\ldots,S_n\subseteq\mathbb{R}$ $P\left(X\in S_1\wedge\ldots\wedge X_n\in S_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i\in S_i\right)$.

הערה לחלופין, $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ בדידים הם ב"ת כאוסף אם"ם $\forall s_1,\ldots,s_n\in\mathbb{R}$,

$$P\left(X_1=s_1,\ldots,X_N=s_n\right)=\prod_{i=1}^{n}P\left(X_i=s_i\right)$$

דוגמה (בעיית אספן הקופונים) רוכשים k בקבוקי קולה, על כל אחד יש אות באנגלית. $X_1,\ldots,X_k$ מ"מ המייצגים את האות הרשומה על הפקקים, ונניח כי $X_i\sim \text{Unif}\left([n]\right)$, n אותיות באנגלית. נניח בנוסף כי $X_1,\ldots,X_k$ ב"ת. כמה גדול צריך להיות k כדי שההסת' שאספנו את כל ה-$[n]$ תהיה קרובה ל-1?

נגדיר A_j המאורע שלא קיבלנו את האות ה-j.

$$\begin{aligned}P\left(A_j\right) &= P\left(X_1 \neq j, \ldots, X_k = j\right)\\ &\overset{\text{ב"ת}}{=} \prod_{i=1}^{k} P\left(X_i \neq j\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\\ &\overset{\text{אינפי}}{\leq} e^{-\frac{k}{n}}\end{aligned}$$

נגדיר $E = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$ כלומר המאורע שלא אספנו את כל האותיות.

$$P\left(E\right) \overset{\text{חסם האיחוד}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \leq ne^{-\frac{k}{n}}$$

נציב $k = cn\log n$ (ככה דברים מצטמצים יפה) ונבדוק איזה c יתן לנו הסת' מספיק קטנה ל-E (שפיספסנו אות).

$$P\left(E\right) \leq n \cdot e^{-c\frac{n\log n}{n}} = n^{1-c} \overset{\text{עבור } c>1}{\longrightarrow} 0$$

ולכן אם נרכוש $cn\log n$, $c > 1$ בקבוקים, אז סביר שנקבל את כל n האותיות.

הערה $A_1, \ldots, A_n$ מאורעות ב"ת כאוסף אם"ם $\mathbb{1}_{A_1}, \ldots, \mathbb{1}_{A_n}$ מ"מ ב"ת כאוסף.

טענה אם X, Y מ"מ ב"ת, ו-$f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ אז $f\left(X\right), g\left(Y\right)$ מ"מ ב"ת.

טענה אם $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת ו-$0 = b_0 < \ldots < b_k = n$ אז הוקטורים המקריים $Y_1 = \left(X_1, \ldots, X_{b_1}\right)$, $Y_2 = \left(X_{b_1+1}, \ldots, X_{b_2}\right)$ עד $Y_k = \left(X_{b_k+1}, \ldots, X_{b_k}\right)$ הם ב"ת.

חלק ב' של ההרצאה

דוגמה יהיו $X_1, \ldots, X_4$ מ"מ ב"ת. אם נגדיר $Y_i = X_i + X_{i+1}$, $\forall i \in [3]$ אז Y_1, Y_3 ב"ת. מהנתון, $\left(X_1, X_2\right), \left(X_3, X_4\right)$ וקטורים ב"ת ולכן אם נפעיל את $f\left(a, b\right) = a + b$ אז נקבל שוב כי $Y_1 = X_1 + X_2, Y_3 = X_3 + X_4$ ב"ת. $\left(Y_1, Y_2\right), Y_3$ כי המ"מ המרכיבים אותם ב"ת אחד עם השני.

הגדרה נאמר סדרת מ"מ $\left\{X_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ היא בלתי תלויה אם כל תת אוסף סופי שלה הוא ב"ת.

טענה תהי $\left\{X_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת מ"מ ב"ת ו-$\left\{S_i\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת מאורעות ב-$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, אזי

$$P\left(X_i \in S_i, \forall i \in \mathbb{N}\right) = \prod_{i\in\mathbb{N}} P\left(X_i \in S_i\right)$$

הערה אם X,Y מ"מ ו-P_X, P_Y ידועות וגם X,Y ב"ת אז נוכל להסיק באופן ישיר את P_{XY}.

עבור סדרה $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ של מ"מ ב"ת ש"ה (שווי התפלגות) כך ש-$X_i \sim \text{Ber}(p)$, $\forall i$. נגדיר $X=\min\{n \mid X_n = 1\}$.

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P(X_1=0 \wedge X_2=0,\ldots,X_{n-1}=0,X_n=1) \\ &\overset{\text{ב"ת}}{=} \prod_{i=1}^{n-1} P(X_1=0)\cdot P(X_n=1) = (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

במקרה זה, $X\sim \text{Geo}(p)$ ודוגמה זו עוזרת להבנה אינטואיטיבית של ההתפלגות שלו.

נבדוק התפלגות גאומטרית היא בעלת תומך $\mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1}p = p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = p\frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

ונשלים את התמונה ע"י הבחנה כי

$$P(X_i=0,\forall i) = \prod_{i=1}^{\infty}P(X_i=0) = \prod_{i=1}^{\infty}(1-p) \underset{\text{למשועממים}}{\overset{\text{אינפי}}{=}} 0$$

הגדרה עבור X מ"מ, $\overline{F}_X(n) = P(X>n)$ נקראת <u>ההתפלגות השיורית</u> של X.

טענה $X\sim\text{Geo}(p)$ אם"ם $P(X>n) = (1-p)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

הוכחה: $\Leftarrow$:

$$P(X>n) = P(X_i=0,\forall i) = \prod_{I=1}^{n}P(X_i=0) = (1-p)^n$$

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned} P(X=n) &= P(X>n-1) - P(X>n) \\ &= (1-p)^{n-1} - (1-p)^n \\ &= (1-p)^{n-1}(1-(1-p)) \\ &= (1-p)^{n-1}p \end{aligned}$$

■

טענה יהי X מ"מ הנתמך על $\mathbb{N}$ המקיים $P\left(X=1\right)<1$. אזי שלושת התנאים הבאים שקולים:

1. $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$.
2. X ו-$X-1\mid X>1$ שווי התפלגות, כלומר ההסת' של הטלת עץ לראשונה מזה $n-1$ הטלות פלי שווה להסת' שבהטלה הראשונה יצא פלי ואז שכחנו את זה והתחלנו את הניסוי ולאחר $n-2$ פלי-ים, קיבלנו לראשונה עץ.
3. X ו-$X-s\mid X>s$ שווי התפלגות, הסבר דומה לעיל.

הוכחה: $(i)\Leftarrow(ii)$

$$\begin{aligned}P\left(X-1=n\mid X>1\right) & =\frac{P\left(X-1=n,X>1\right)}{P\left(X>1\right)}\\ & =\frac{P\left(X=n+1\right)}{P\left(X>1\right)}\\ & =\frac{\left(1-p\right)^{n}p}{1-p}\\ & =\left(1-p\right)^{n-1}p\\ & =P\left(X=n\right)\end{aligned}$$

ואת השאר הסטודנטית המשקיעה תוכיח. ■

נתונים $X_{1},\ldots,X_{n}$ מ"מ ב"ת ש"ה ל-$\text{Ber}\left(p\right)$. נגדיר $X=\sum_{i=1}^{n}X_{i}$. X מודד את מס' ההצלחות ב-n ניסויים. $\text{supp}X\subseteq\{0,\ldots,n\}$.

$$P\left(X=k\right)=P\left(a\in\{0,1\}^{n}:\sum_{i=1}^{n}a_{i}=k\right)\overset{\text{דיסקרטית}}{=}\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}$$

מ"מ המתפלג כמו X נקרא מ"מ בינומי.

טענה אם $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ ו-$Y\sim\text{Bin}\left(m,p\right)$ הם מ"מ ב"ת אז $X+Y\sim\text{Bin}\left(m+n,p\right)$.

הוכחה: נסמן $X_{1},\ldots,X_{n},Y_{1},\ldots,Y_{m}$ מ"מ ב"ת המקיימים $X'=\sum_{i=1}^{n}X_{i},Y'=\sum_{i=1}^{n}Y_{i}$ שהם מ"מ המקיימים $X'\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ ו-$Y'\sim\text{Bin}\left(m,p\right)$. נשים לב כי X',Y' מ"מ ב"ת

$$X'+Y'=\sum_{i=1}^{n}X_{i}+\sum_{i=1}^{m}Y_{i}\sim\text{Bin}\left(n+m,p\right)$$

ובנוסף נבחין כי $X'\overset{d}{=}X$ וגם $Y'\overset{d}{=}Y$ וכן X,Y ו-X',Y' ב"ת ולכן $P_{X,Y}=P_{X',Y'}$ ולכן $X'+Y'\overset{d}{=}X+Y$ ולכן

$$X+Y\sim\text{Bin}\left(n+m,p\right)$$

■

תרגול

הגדרה X מ"מ מתפלג פואסון עם שכיחות $\lambda > 0$ אם לכל $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$ ונסמן $X \sim \text{Pois}(\lambda)$.

הערה התפלגות פואסון $P(X = k)$ מתארת מה ההסת' שלאורך פרק זמן "כלשהו" יקרו k אירועים כשלרוב קורים בערך λ אירועים כאלה.

1. מספר הלקוחות בקפיטריה מתפלג פואסונית עם שכיחות 10. ההסת' שנכנסו בשעה כלשהי 20 לקוחות לקיפטריה היא

$$P(X = 20) = \frac{e^{-10}10^{20}}{20!} \approx 0.002$$

2. ידוע שבכל דקה מדקות היום מספר הפניות למוקד 144 מתפלג $\text{Pois}(5)$. באופן ב"ת בין הדקות

- מה ההסת' שבין $10:00$ ל-$10:01$ לא התקבלה אף פנייה?

  $P(X_1 = 0) = \frac{e^{-5}5^0}{5!} = e^{-5}$.

- מה ההסת' שבין $10:00$ ל-$10:05$ התקבלו 4 פניות בדיוק?

  $X = \sum_{k=1}^{5} X_k \sim \text{Pois}(25)$ ולכן $P(X = 4) = \frac{e^{-25}25^4}{4!}$.

3. $X_1, X_2, X_3 \sim \text{Ber}(p)$ וב"ת. איך מתפלג (X_1, X_2, X_3) אם ידוע כי $X_1 + X_2 + X_3 = 2$?

נגדיר את המאורע

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \in \{0,1\}, x_1 + x_2 + x_3 = 2\} \\ &= \{(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\} \end{aligned}$$

ולכן, $\forall (x_1, x_2, x_3) \in A$,

$$\begin{aligned} P(X = (x_1, x_2, x_3) \mid A) &= \frac{P(\{(x_1, x_2, x_3)\} \cap A)}{P(A)} \\ &= \frac{P(\{x_1, x_2, x_3\})}{P(A)} \\ &= \frac{p^2(1-p)}{3p^2(1-p)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ולכן $(X \mid A)$ מתפלג אחיד ואינו תלוי ב-p.

4. $\Omega = \{0,1\}^k$ בהסת' אחידה. כיצד מתפלג מספר הרצפים? (לדוגמה ב-$0,1,1,1,0,0,1,0,0,1$ יש 6 רצפים).

נסמן X משתנה שסופר את כמות הרצפים. נשים לב כי המאורע $\{X = n\}$ הוא קבוצת כל האיברים שעבורם קיימים מספרים טבעיים $l_1 + \ldots + l_n = k$, כאשר l_i מייצג את כמות הקוורדינטות בכל תא (שמייצג רצף אחד). $|\{X = n\}|$ הוא מספר הפתרונות למשוואה

הנ"ל כפול 2 כי כל סידור יכול להיות רצפי אחדים-אפסים-אחדים או אפסים-אחדים-אפסים. מדיסקרטית, הפתרון למשוואה הוא $\binom{k-1}{n-1}$ ולכן

$$P\left(X=n\right)=\frac{\left|\left\{X=n\right\}\right|}{2^{k}}=\frac{2\binom{k-1}{n-1}}{2^{k}}$$

5. אלעד ואיתמר משחקים כל יום סיבוב במשחק הבא: ביום ה-n של המשחק, אלעד מגריל מספר בין 1 ל-$n+1$ ואיתמר מנסה לנחש אותו באופן ב"ת בניחושים הקודמים.

- מה ההסת' שאיתמר יטעה בכל השבוע הראשון אם הוא מנחש באקראי?

נגדיר X_n מ"מ המציין האם איתמר ניחש נכון ביום ה-n, לכן $X_n \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{n+1}\right)$.

$$\begin{aligned}P\left(A\right) &= P\left(X_{n}=0,\forall n\in\left[7\right]\right)\\ &\overset{\text{ב"ת}}{=}\prod_{n=1}^{7}P\left(X_{n}=0\right)\\ &=\prod_{n=1}^{7}\left(1-\frac{1}{k+1}\right)\\ &=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\\ &=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

- הפעם אלעד מגריל רק מספרים מ-$[9]$ ומסבתר שבימים זוגיים הוא בוחר מספרים זוגיים ובאי זוגיים, אי זוגיים. לאחר שאיתמר גילה את התבנית של אלעד, מה ההסת' שינחש נכון בדיוק 3 פעמים באותו שבוע?

נגדיר X מ"מ שסופר ניחושים נכונים בימים זוגיים ו-Y באי זוגיים בכל השבוע. לכן $X \sim \text{Bin}\left(3,\frac{1}{4}\right)$ ו-$Y \sim \text{Bin}\left(4,\frac{1}{3}\right)$ והם ב"ת.

$$P\left(A\right)=P\left(X+Y=3\right)=\sum_{n=0}^{3}P\left(X=n\right)P\left(Y=3-n\right)=\frac{349}{2500}$$

6. יש n חברים וכל אחד מטיל קוביה הוגנת באופן הבא: בכל סיבוב כולם מטילים את הקוביה בזה אחר זה באופן ב"ת. אם אחד מהם קיבלת תוצאה מכולם הוא מנצח, אחרת משחקים סיבוב נוסף, מה התפלגות זמן המשחק?

X מ"מ שסופר את מספר המשחקים ששוחקו. $X \sim \text{Geo}\left(p\right)$ כאשר p הוא ההסת' שאחד קיבל יותר מכולם. נגדיר $Y_k \sim \text{Unif}\left(\left[6\right]\right)$

מתאר את הטלת הקוביה של השחקן ה-k. נגדיר $G_k \sim \mathrm{Ber}\left(q\right)$ מתאר אם השחקן ה-k ניצח.

$$\begin{aligned}
q &= P\left(G_k = 1\right) \\
&= \sum_{l=1}^{6} P\left(G_l = 1, Y_k = l\right) \\
&= \sum_{l=2}^{6} P\left(Y_k = l\right) \prod_{j\in[n]\setminus\{k\}} P\left(X_j < l\right) \\
&\overset{\text{ב"ת}}{=} \sum_{l=2}^{6} \frac{1}{6} \prod_{j\in[n]\setminus\{k\}} \left(\frac{l-1}{6}\right)^{k} \\
&= \frac{1}{6^n}\left(1^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 5^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$P\left(X=1\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left\{G_k = 1\right\}\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(G_k = 1\right) = nq$$

ולכן $X \sim \mathrm{Geo}\left(nq\right)$.

7. אש קצ'אם רוצה לתפוס n פוקימונים, כל פוקימון נתפס באופן אחיד וב"ת. כמה פוקימונים ילכוד עד שילכוד את כולם?

X_k מ"מ הסופר כמה פוקימונים עד שנתפס הפוקימון עם אינדקס k ולכן $\left(\frac{1}{n}\right)$ $X_k \sim \mathrm{Geo}$, $\forall k \in [n]$. נגדיר מ"מ אינדיקטור E_n שאש לא תפס את כולם ב-N זריקות.

$$\begin{aligned}
P\left(E_N\right) &= P\left(\exists k \in [n] : X_k > N\right) \\
&= P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left\{X_k > N\right\}\right) \\
&\le \sum_{k=1}^{n} P\left(X_k > N\right) \\
&\overset{\text{מ"מ גאומטרי}}{=} \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{N} \\
&= n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{N} \le ne^{N}
\end{aligned}$$

8. יש אי בודד עם $n+1$ אנשים. בן אדם מספר למישהו אקראי את השמועה, והוא לאקראי אחר, וכל אחד יכול לשמוע יותר מפעם אחת.

- מה התפלגות מספר הפעמים שהשמועה עברה עד שחזרה להוגה שלה?

X המ"מ של מספר הפעמים שעברה השמועה עד שחזרה. $X-1 \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{n}\right)$ כי הוא לא מספר לעצמו, אבל אחרי הראשון כן

מדובר בגאומטרי (הטלת עץ - חזר להוגה, פלי - המשיך הלאה עם עץ בהסת' $\frac{1}{n}$).

$$P\left(X=k\right)=P\left(X-1=k-1\right)=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-2}$$

- מה התפלגות מספר הפעמים שהשמועה עוברת עד ששומע אותה מישהו שכבר שמע?

נסמן A_j את המאורע שהאדם ה-j ששמע את השמועה לא מכיר אותה, $P\left(A_1\cap\ldots\cap A_{k-1}\right)=\frac{k-1}{n}$.

נסמן בנוסף $B_k=\bigcap\limits_{j=1}^{k}A_j$ המאורע ש-k האנשים הראשונים ששמעו את השמועה (כולל ההוגה) לא שמעו אותה לפני

$$\begin{aligned}P\left(B_{k+1}\right)&=\frac{P\left(B_{k+1}\right)}{P\left(B_k\right)}\cdot\frac{P\left(B_k\right)}{P\left(B_{k-1}\right)}\cdot\ldots\cdot\frac{P\left(B_2\right)}{P\left(B_1\right)}P\left(B_1\right)\\&=P\left(A_{k+1}\mid B_k\right)P\left(A_k\mid B_{k-1}\right)\cdot\ldots\cdot P\left(A_2\mid B_1\right)P\left(B_1\right)\\&=\frac{n-k}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n}\\&=n^{-k}\frac{(n-1)!}{(n-(k+1))!}\end{aligned}$$

ואם נסמן ב-Y את מספר הפעמים שהשמועה הופצה עד שהגיע למישהו ששמע אותה אז

$$P\left(Y>k\right)=P\left(B_k\right)=n^{-k+1}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

ולכן

$$\begin{aligned}P\left(Y=k+1\right)&=P\left(Y>k\right)-P\left(Y>k+1\right)\\&=\ldots=n^{-i}\frac{(n-1)!}{(n-k)!}k\end{aligned}$$

שבוע $\mathbb{VIII}$ | התפלגות פואסונית ותוחלת

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

נתעניין בערך המקסימלי בהתפלגות בינומית - הוא מתקבל כאשר $X=\frac{n}{2}$. עבור $X\sim\text{Bin}\left(2n,\frac{1}{2}\right)$,

$$\begin{aligned}P\left(X=n\right) &= \binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\\ &= \frac{\left(2n\right)!}{\left(n!\right)^{2}}2^{-2n}\\ &\overset{\text{סטירלינג}}{=} \frac{2^{-2n}\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(1+\mathcal{O}\left(1\right)\right)}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\left(1+\mathcal{O}\left(1\right)\right)\right)^{2}}\\ &\approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}\end{aligned}$$

כלומר דועך לאפס, אבל לאט מאוד.

הערה ההערה המדויקת יותר היא $\frac{0.62}{\sqrt{n}}\leq P\left(X=n\right)\leq\frac{0.47}{\sqrt{n}}$ ולכן אם יש $10,000$ הטלות מטבע הוגן, יש סיכוי של בערך $\frac{1}{200}$ לתיקו.

דוגמה שיכור עומד על הנקודה $(0,0)$ במישור. בכל צעד הוא נע או ימינה או שמאל בהסת' שווה. מה הסת' שלאחר $2n$ צעדים יחזור לנקודת ההתחלה (כלומר יש תיקו בצעדים).

נגדיר X_i מ"מ המציין האם פנינו ימינה בצעד ה-i, $\forall i\in[2n]$. $X_i\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. נגדיר $X=\sum\limits_{i=1}^{2n}X_i$ ולכן $X\sim\text{Bin}\left(2n,p\right)$ ונקבל כי $P\left(X=n\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ היא ההסת' הרצויה.

התפלגות פואסונית רלוונטית במצב של התפלגות בינומית עם n מאוד גדול ו-p מאוד קטן. לדוגמה $n=800,000$, $p=\frac{1}{100,000}$ ובמקרה זה.

$$P\left(X=k\right)=\binom{800,000}{k}\left(\frac{1}{100,000}\right)^{k}\left(1-\frac{1}{100,000}\right)^{800,000-k}$$

וזה ביטוי שלא קל לעבוד איתו כי הוא אסטרונומי או אינפיניסטסימלי. נוכל להגדיר $p=\frac{8}{n}$, ונשאיף את n לאינסוף וכך נשמור על מס' ההצלחות "בממוצע" - 8. נתבונן ב-$X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{8}{n}\right)$. נתובנן ב-$\lim\limits_{n\to\infty}P\left(X_n=k\right)$ ונראה כי זוהי התפלגות ופס' הסתברות.

נגדיר $X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ ובמקרה זה מספר ההצלחות "בממוצע" לא תלוי ב-n (הוא תמיד $\frac{1}{\lambda}$)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}P\left(X_n=k\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(n-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(n-k+1\right)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\ &= \lim_{n\to\infty}\underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n}}_{\longrightarrow 1}\cdot\frac{\lambda^{k}}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\longrightarrow e^{-\lambda}}\cdot\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1}\\ &= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}\end{aligned}$$

ונראה כי זו אכן פ' הסתברות

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}\overset{\text{אינפי}}{=}e^{-\lambda}e^{\lambda}=1$$

הגדרה יהי X מ"מ המקבל ערכים ב-$\mathbb{N}\cup\{0\}$ ויהי $\lambda>0$. נאמר כי X מתפלג פואסון עם שכיחות λ אם $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$P\left(X=k\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

במקרה זה נסמן $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$.

טענה יהי λ ויהיו $X_{n}\sim\text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$ סדרת מ"מ אז $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(X_{n}=k\right)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

הערה אנשים נמצאים בבית קפה שקיים הרבה זמן בהסת' ברנולי ממש קטנה, ובעבר היו בו בממוצע λ אנשים וגם היום איכשהו יש בו λ אנשים, אף על פי שהאוכלוסיה גדלה בהרבה. ההסבר לכך הוא שעם גדילת האוכלוסיה גדלה גם כמות בתי הקפה ובמקרה זה, מ"מ פואסוני ייצג את מספר האורחים אליו מתכנס מספר האורחים לאורך השנים.

טענה $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$ ו-$Y\sim\text{Pois}\left(\mu\right)$, X,Y ב"ת אז $Z=X+Y\sim\text{Pois}\left(\lambda+\mu\right)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
P\left(Z=k\right) & \overset{\text{קונבולוציה}}{=}\sum_{l=0}^{k}P\left(X=l,Y=k-l\right)\\
 & =\sum_{l=0}^{k}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{l}}{l!}\cdot\frac{e^{-\mu}\mu^{k-l}}{(k-l)!}\\
 & =\frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\frac{k!}{l!\left(k-l\right)!}\lambda^{l}\mu^{k-l}\\
 & =\frac{e^{-\lambda-\mu}}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}\lambda^{l}\mu^{k-l}\\
 & \overset{\text{בינום}}{=}\frac{e^{-\lambda-\mu}\left(\lambda+\mu\right)^{k}}{k!}
\end{aligned}$$

■

טענה יהי $X\sim\text{Pois}\left(\lambda\right)$. נניח שלכל $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, מתקיים $\left(Y\mid X=n\right)\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$ אז $Y\sim\text{Pois}\left(\lambda p\right)$.

הערה זה מתאר את הניסוי שידוע לנו שיש n אנשים בבית הקפה, והם קוראים את התפריט ואם הוא נאה להם הם נשארים בפנים, אחרת יוצאים, בהסת' ברנולי עם מקדם p ("הצלחה" בבינומי היא להישאר בבית הקפה). במקרה זה, Y הוא מ"מ של כמות האנשים שנשארו אחרי שקראו את התפריט, ולכן אינטואיטיבית הוא יהיה בשכיחות כמות האנשים שנכנסו, ומתוכם שנשארו גם אחרי קריאת התפריט, לכן λp.

הוכחה:

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=0}^{k} P(X=n, Y=k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X=n) P(Y=k \mid X=n) \\ &\overset{\text{השאר מתאפסים}}{=} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{n}}{n!}\binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k} \\ &= p^{k}\lambda^{k}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}(1-p)^{n-k} \\ &\overset{m=n-k}{=} (\lambda p)^{k}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda}\lambda^{m}}{(m+k)!}\cdot\frac{(m+k)!}{k!m!}(1-p)^{m} \\ &= \frac{(\lambda p)^{k} e^{-\lambda}}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda p)^{m}}{m!} \\ &= \frac{(\lambda p)^{k} e^{-\lambda} e^{\lambda-\lambda p}}{k!} \\ &= \frac{(\lambda p)^{k} e^{-\lambda p}}{k!} \end{aligned}$$

■

הגדרה יהי X מ"מ בדיד. התוחלת של X מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha P(X=\alpha) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) p(\omega) \end{aligned}$$

הערה התוחלת נועדה להכליל את הממוצע, בהינתן מ"מ מתפלג אחיד נקבל בדיוק ממוצע.

חלק ב' של ההרצאה

הערה עבור X מ"מ, נגדיר תוחלת כנ"ל כאשר הטור מתכנס בהחלט. אם הטור לא מתכנת או מתכנס בתנאי אז נאמר ש-X חסר תוחלת.

טענה $E[X] = \sum_{\alpha\in\mathbb{R}} \alpha P(X=\alpha)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha P\left(X=\alpha\right) &= \sum_{\alpha\in\mathbb{R}}P\left(\left\{\omega\in\Omega:X\left(\omega\right)=\alpha\right\}\right)\\ &=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha\sum_{\omega\in\Omega:X(\omega)=\alpha}P\left(\left\{\omega\right\}\right)\\ &=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\sum_{\omega\in\Omega:X(\omega)=\alpha}X\left(\omega\right)P\left(\left\{\omega\right\}\right)\\ &=\sum_{\omega\in\Omega}X\left(\omega\right)P\left(\left\{\omega\right\}\right)\end{aligned}$$

■

הערה אם $X\overset{d}{=}Y$ בעלתי תוחלת אזי $E\left[X\right]=E\left[Y\right]$.

הערה נשים לב שאם X מקבל ערכים שאינם שווי סימן אז צריך לבדוק התכנסות בהחלט.

תוחלות של מ"מ מוכרים

1. ברנולי: $\Omega=\left\{H,T\right\}$, $X\left(H\right)=1,X\left(T\right)=0$, $X\sim\text{Ber}\left(p\right)$.

$$E\left[X\right]=X\left(H\right)p+X\left(T\right)\left(1-p\right)=p$$

2. אחיד: $X\sim\text{Unif}\left(\left[n\right]\right)$.

$$E\left[X\right]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\left(n+1\right)}{2n}=\frac{n+1}{2}$$

3. בינומי : $X\sim \mathrm{Bin}\left(n,p\right)$.

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{k=1}^{n} kP\left(X=k\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot n!}{k!\left(n-k\right)!}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}\\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-k\right)!}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k}\\
&= np\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-k}\\
&\overset{m=k-1}{=} np\sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m}p^{m}\left(1-p\right)^{\left(n-1\right)-m}\\
&= np\left(p+\left(1-p\right)\right)^{n-1} = np
\end{aligned}$$

4. פואסוני : $X\sim \mathrm{Pois}\left(\lambda\right)$.

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{\left(k-1\right)!}\\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!}\\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda
\end{aligned}$$

שזה הגיוני כי פואסון מוגדר ע"י הידיעה שבפרק זמן מסוים קורה "בממוצע" λ אירועים, כאן ה"ממוצע" או ה"בערך" מיתרגם לתוחלת.

5. גאומטרי : $X\sim \mathrm{Geo}\left(p\right)$.

$$\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{k=1}^{\infty} kP\left(1-p\right)^{k-1}\\
&= p\sum_{k=1}^{\infty} k\left(1-p\right)^{k-1}\\
&\overset{(*)}{=} p\frac{1}{p^{2}} = \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$(*)$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n} = \frac{1}{1-x}$ ואם נגזור איבר איבר נקבל $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{\left(1-x\right)^{2}}$ ולכן $\sum_{k=1}^{\infty} k\left(1-p\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\left(1-p\right)\right)^{2}} = \frac{1}{p^{2}}$.

טענה יהי X מ"מ בדיד ותהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נסמן $Y=f\left(X\right)$ אזי $E\left[Y\right]=\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{R}}f\left(\alpha\right)P\left(X=\alpha\right)$.

הוכחה: נחשוב על f כעל מ"מ על מרחב ההסתברות $\left(\mathbb{R},\mathcal{F}_{\mathbb{R}},P_{X}\right)$. לכן מ"ה Ω מומר ל-$\mathbb{R}$ ופ' ההסתברות הופכת מ-P ל-P_X, והמ"מ שאת תוחלתו אנו מחשבים עובר מ-X ל-f. נשים לב כי $Y\overset{d}{=}f$ ולכן, מהגדרת התוחלת,

$$E\left[Y\right]=\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}f\left(\alpha\right)P\left(X=\alpha\right)$$

■

דוגמה יש בקמפוס $1,000$ תלמידים. 2 כיתות של 200, 4 כיתות של 100 ו-4 כיתות של 50. מה ממוצע התלמידים בכיתה?

1. נבחר כיתה מקרית ונחשב את תוחלת הגודל שלה. $X\sim\text{Unif}\left(\left[10\right]\right)$. $Y=f\left(X\right)$, $f\left(X\right)=\begin{cases}200 & X\in\left\{1,2\right\}\\ 100 & X\in\left\{3,\ldots,6\right\}\\ 50 & X\in\left\{7,\ldots,10\right\}\end{cases}$

   הוא המ"מ הרצוי. $E\left[Y\right]=\frac{1000}{10}=100$.

2. נבחר סטודנטית מקרית ונחשב את תוחלת מס' התלמידים בכיתה של הסטודנטית. $Z\sim\text{Unif}\left(\left[1000\right]\right)$.

$$g\left(Z\right)=\begin{cases}200 & 1\leq Z\leq400\\ 100 & 400<z\leq800\\ 50 & 800<z\leq1000\end{cases}$$

   $Q=g\left(Z\right)$ הוא המ"מ הרצוי. $E\left[Q\right]=200\cdot\frac{2}{5}+100\cdot\frac{2}{5}+50\cdot\frac{1}{5}=\frac{650}{5}=130$.

הערה דוגמה זו מדגימה תופעה שנקראת הטיית הגודל - בחישוב תוחלת, אפשר להסתכל משתי נקודות מבט. בדוגמה הזו, אנו שואלים תחילה כל כיתה כמה תלמידים יש בה, ומקבלים תוצאה אחת, ואז שואלים כל תלמיד כמה תלמידים נוספים יש בכיתה שלו, ומקבלים תוצאה שונה לגמרי.

טענה (תכונות התוחלת) יהיו X,Y מ"מ בדידים. אזי:

1. (חיוביות התוחלת) אם $X\geq0$ כמעט תמיד אז $E\left[X\right]\geq0$ ואם $X>0$ כמעט תמיד אז $E\left[X\right]>0$.
2. (לינאריות התוחלת) יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ אזי $E\left[aX+bY\right]=aE\left[X\right]+bE\left[Y\right]$.
3. (מונוטוניות התוחלת) אם $X\geq Y$ כמעטת מדי אזי $E\left[X\right]\geq E\left[Y\right]$.

הוכחה:

1. מידי.

.2

$$\begin{aligned}E[aX+bY] &= \sum_{\omega\in\Omega}(aX(\omega)+bY(\omega))P(\{\omega\})\\ &= a\sum_{\omega\in\Omega}X(\omega)P(\{\omega\})+b\sum_{b\in\Omega}Y(\omega)P(\{\omega\})\\ &= aE[X]+bE[Y]\end{aligned}$$

3. נסמן $X=Y+(X-Y)$. $X-Y\geq 0$ כמעט תמיד ולכן מחיוביות $E[X-Y]\geq 0$ ולכן מלינאריות

$$E[X]=E[Y]+E[X-Y]\geq E[Y]$$

■

דוגמה חישוב אלטרנטיבי לתוחלת של מ"מ בינומי. $X\sim\text{Bin}(n,p)$. נחשוב על X כסכום $X_1,\dots,X_n$, $X_i\sim\text{Ber}(p)$ המקיימים $E[X_i]=p$ ולכן מלינאריות התוחלת $E[X]=np$.

דוגמה תוחלת מספר נקודות שבת בתמורה מקרית. $\Omega=S_n$ אחיד. $A_i=\{\sigma\in\Omega:\sigma(i)=i\}$, $P(A_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$. נגדיר $X=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{A_i}$ המסופר את מספר נקודות השבת. $\mathbb{1}_{A_i}\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$ ולכן $E[X]=n\cdot\frac{1}{n}=1$.

דוגמה אם $X\sim\text{Geo}(p)$ אז $\overline{F}(X)=P(X>n)=(1-p)^n$.

טענה אם X מ"מ כך ש-$\text{supp}(X)\subseteq\mathbb{N}$ אזי $E[X]=\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}P(X\geq n)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{n=0}^{\infty}nP(X=n)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}P(X=n)\\ &= \sum_{(k,n):k\leq n\in\mathbb{N}}P(X=n)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}P(X=n)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)\end{aligned}$$

■

תרגול

סקרנו את כל התכונות שהוכחנו בהרצאה השנייה של שבוע $\mathbb{VI}$ וההרצאה הראשונה של $\mathbb{VIII}$.

1. סטודנטים הולכים לנמנם בספרייה. אורך תנומה מתפלג אחיד על $\{30,\dots,60\}$ דקות. מה תוחלת אורכה של תנומה מקרית?

נסמן ב-X את אורך התנומה, $X\sim \text{Unif}\left(\{30,\dots,60\}\right)$.

$$
\begin{aligned}
E\left[X\right] &= \sum_{n=30}^{60} nP\left(X=n\right)=\sum_{n=30}^{60} n\frac{1}{31}\\
&=\frac{1}{31}\sum_{n=30}^{60} n=\frac{1395}{31}=45
\end{aligned}
$$

2. n חברים מטילים קוביה הוגנת. מה תוחלת ערך ההטלה הנמוכה ביותר? נסמן ערך זה ב-X. $P\left(X\ge k\right)=\left(\frac{7-k}{6}\right)^n$ כי אנחנו מגבילים את האפשרויות להטלה ל-$\{k,\dots,6\}$ ולכן $E\left[X\right]=\sum\limits_{k=1}^{\infty}P\left(X\ge k\right)=\sum\limits_{k=1}^{6}\left(\frac{7-k}{6}\right)^k$.

3. מטילים קוביה שוב ושוב עד שיוצא 1, מה תוחלת סכום ההטלות?

$X\sim \text{Geo}\left(\frac{1}{6}\right)$ מספר ההטלות עד שיצא 1. $\forall j\in\mathbb{N}$ נגדיר $Y_j\sim \text{Unif}\left([6]\right)$ ערך ההטלה ה-j. Y סכום ההטלות.

$$
\begin{aligned}
E\left[Y\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} E\left[Y\mid X=n\right]P\left(X=n\right)\\
&\overset{\text{תוחלת שלמה}}{=}\sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{j=1}^{n}\left(Y_j\mid X=n\right)\right]P\left(X=n\right)\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n} E\left[Y_j\mid X=n\right]P\left(X=n\right)\\
&\overset{(*)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(n-1\right)4+1\cdot 1\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}\\
&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(4n-3\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}\\
&=4\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\
&\overset{(**)}{=}4\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 6=21
\end{aligned}
$$

$(*)$

$$
\left(Y_j\mid X=n\right)\sim \text{Unif}\left(\{2,\dots,6\}\right)\Rightarrow E\left[Y_j\mid X=n\right]=4,\quad \forall j\le n-1
$$

וגם $(Y_n \mid X=n) \equiv 1$ ולכן $E\left[Y_n \mid X=n\right]=1$.

$(**)$ הטור הראשון הוא בעצם תוחלת של מ"מ גאומטרי עם פרמטר p ולכן מתכנס ל-$\frac{1}{\frac{1}{6}}$. הטור השני הוא גאומטרי שסכומו $6=\frac{1}{1-\frac{5}{6}}$.

4. בסל 5 כדורים שחורים ו-5 לבנים. מוציאים ארבעה כדורים ומשאירים אותם בחוץ אחר כך, מוציאים זה אחר זה עם החזרה כדורים עד שיוצא כדור שחור. מה תוחלת מספר הכדורים שהוצאו?

נסמן את מספר הכדורים שהוצאו ב-Y. נגדיר X מ"מ שתוצאתו היא מספר הכדורים השחורים שיצאו בהתחלה.

$(Y \mid X=k) \sim \text{Geo}\left(\frac{5-k}{6}\right)$ (השתכנעו בנכונות). $P\left(X=k\right)=\frac{\binom{5}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{10}{4}}$ כי X מפתלג היפרגאומטרית (הופיע בתרגיל ובויקיפדיה).

$$\begin{aligned} E\left[Y\right] &= \sum_{k=0}^{4} E\left[Y \mid X=k\right] P\left(X=k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{4} \frac{6}{5-k} \cdot \frac{\binom{5}{k}\binom{5}{4-k}}{\binom{10}{4}} = \frac{461}{210} \end{aligned}$$

5. אליסה נכנסת לחדר מבואה ובו שלוש דלתות, הראשונה תיקח אותם לארץ הפלאות תוך 30 דקות השנייה תחזיר אותה תוך 50 דקות לאותו חדר, והשלישית תחזיר אותם גם כן לאותו החדר תוך 70 דקות. לאליסה בעיות זיכרון כתצואה מפטריות ההזיה שהיא לקחה לפניכן ולכן שוכחת איזו דלת מובילה לאן, ולכן בוחרת באקראי. מה תוחלת הזמן שלוקח לה להגיע לארץ הפלאות?

נסמן ב-X את הזמן בדקות שלוקח לה להגיע לארץ הפלאות וב-Y את הדלת בה הם בוחרים בביקור הראשון במבואה.

$$\begin{aligned} E\left[X \mid Y=2\right] &= \sum_{x \in \text{supp}(X)} xP\left(X=x \mid Y=2\right) \\ &= \sum_{x \in \text{supp}(X)} x\frac{P\left(X=x, Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)} \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{x \in \text{supp}(X)} x\frac{P\left(X=x-50\right)P\left(Y=2\right)}{P\left(Y=2\right)} \\ &= \sum_{x \in \text{supp}(X)} xP\left(X=x-50\right) \\ &= \sum_{z \in \text{supp}(X)} \left(z+50\right)P\left(X=z\right) \\ &= E\left[X+50\right] = E\left[X\right]+50 \end{aligned}$$

$(*)$ קפיצה שדורשת כלים שאין לנו בקורס ולכן נצטרך לסבול את הכמיהה שלנו להבנתה.

$E[X \mid Y=3] = E[X]+70$ באותו האופן. $E[X \mid Y=1] = 30$ ולכן

$$\begin{aligned}E[X] &= \sum_{n=1}^{3} E[X \mid Y=n]\, P(Y=n)\\ &= \sum_{n=1}^{3} E[X \mid Y=n]\,\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(30+E[X]+50+E[X]+70\right)\end{aligned}$$

ולכן עם העברת אגפים נקבל $E[X]=150$.

נשים לב כי לשם החישוב הזה היינו צריכים להוכיח של-X יש תוחלת בכלל, נעשה זאת. עבור Z מספר הביקורים במבואה, $X \leq 70Z$ ו-$Z \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$ ולכן $E[X] \leq E[70Z] = 70E[Z] = 70\cdot 3$.

6. ילד מקבל מהוריו כל בוקרכסף לקנות חטיף שבו יש פוג מתוך $[n]$ באקראי.

- מה תוחלת הזמן עד שסיים את האיסוף?

$\forall j\in[n]$ נגדיר X_j שתוצאתו היא מספר הימים שלקח לילד להשיג פוג חדש לאחר שהשיג $j-1$ פוגים. $X_j \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{n-(j-1)}{n}\right)$.
הזמן שיקח לו להשיג את כולם הוא $X=\sum_{j=1}^{n} X_j$.

$$\begin{aligned}E[X] &= E\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} E[X_j] = \sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n-(j-1)}\\ &\overset{i=n-(j-1)}{=} \sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i} = n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} \overset{\text{אינפי}}{\leq} n(\log n+1)\end{aligned}$$

- לאחר כמה ימים t ניתן לקבוע שההסתברות שהילד לא השלים את האוסף היא לכל היותר $\frac{1}{2}$?

נדרוש כי יתקיים $\frac{1}{2} \geq \frac{n(\log n+1)}{t} \geq \frac{E[X]}{t} \overset{\text{מקרוב}}{\geq} E[X\geq t]$ וזה מתקיים עבור $t \geq 2n(\log n+1)$. כלומר, הגענו לאותה תוצאה שהגענו לה בתרגול הקודם (אז זה היה עם פוקימונים) רק בקלות רבה הרבה יותר באמצעות תכונות התוחלת.

שבוע $\mathbb{VIII}$ | תוחלת ושונות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הערה לינאריות לא דורשת X,Y ב"ת. לדוגמה חישוב תוחלת של מס' נקודות שבת, $A_i = \{\sigma(i)=i\}$, $\{\mathbb{1}_{A_i}\}_{i=1}^{n}$ אינם ב"ת אבל לינאריות עדיין עובדת. אם הם כן היו ב"ת אז $X=\sum \mathbb{1}_{A_i}$ היה משתנה בינומי $\left(n,\frac{1}{n}\right)$ (כל אחד היה ברנולי ב"ת).

דוגמה $X\sim\text{Geo}\left(p\right)$. $P\left(X\geq n\right)=\left(1-p\right)^{n-1}$ ומהטענה מההרצאה הקודמת

$$E\left[X\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-p\right)^{n-1}=\sum_{j=0}^{\infty}\left(1-p\right)^{j}=\frac{1}{1-\left(1-p\right)}=\frac{1}{p}$$

דוגמה נגדיר מ"מ חסר תוחלת. $X\sim\text{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y=2^{X}$,

$$E\left[Y\right]=\sum_{n\in\mathbb{N}}f\left(n\right)P\left(X=n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}2^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\sum_{n\in\mathbb{N}}1=\infty$$

עתה נסתכל על דוגמה בה הוא חסר תוחלת כי הוא לא מתכנס בהחלט. $Z=\frac{\left(-2\right)^{X}}{X}$,

$$E\left[Z\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-2\right)^{n}}{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n}}{n}$$

וזה טור שמכתנס בתנאי.

דוגמה $X=Y\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$, ולכן $XY\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ ולכן $E\left[XY\right]=\frac{1}{2}\neq E\left[X\right]E\left[Y\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. כלומר לא תמיד מתקיימת כפליות. לעומת זאת, אם X,Y ב"ת ו-$\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ אז $X,Y\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ אז $XY\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{4}\right)$ ואז כן מתקיימת כפליות.

טענה אם X,Y מ"מ בדידים, ב"ת ובעלי תוחלת אז $E\left[XY\right]=E\left[X\right]E\left[Y\right]$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}E\left[XY\right] & =\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\alpha P\left(XY=\alpha\right)\\
 & =\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\sum_{s,t\in\mathbb{R}:st=\alpha}stP\left(X=s,Y=t\right)\\
 & =\sum_{\alpha\in\mathbb{R}}\sum_{s,t\in\mathbb{R}:st=\alpha}stP\left(X=s\right)P\left(Y=t\right)\\
 & =\sum_{s\in\mathbb{R}}\sum_{t\in\mathbb{R}}stP\left(X=s\right)P\left(Y=t\right)\\
 & =\sum_{s\in\mathbb{R}}sP\left(X=s\right)\sum_{t\in\mathbb{R}}tP\left(X=t\right)\\
 & =E\left[X\right]E\left[Y\right]
\end{aligned}$$

■

דוגמה מכפלת תוצאות קוביות הוגנות ב"ת. $X,Y\sim\text{Unif}\left(\left[6\right]\right)$, $E\left[XY\right]=\left(3.5\right)^{2}$.

טענה יהיו X,Y מ"מ בדידים על אותו מ"ה אז X,Y ב"ת אם"ם לכל שתי פ' $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $E\left[f\left(X\right)g\left(Y\right)\right]=E\left[f\left(X\right)\right]E\left[g\left(Y\right)\right]$.

הוכחה: $\Leftarrow$: X,Y ב"ת ולכן $f\left(X\right),g\left(Y\right)$ ב"ת ולכן התוחלת כפלית עליהם.

$\Rightarrow$:

$$\begin{aligned}P\left(X=x,Y=y\right) & =E\left[\mathbb{1}_{\left\{ X=x,Y=y\right\} }\right]\\
 & =E\left[\mathbb{1}_{\left\{ X=x\right\} }\mathbb{1}_{\left\{ Y=y\right\} }\right]\\
 & \overset{(*)}{=}E\left[\mathbb{1}_{\left\{ X=x\right\} }\right]E\left[\mathbb{1}_{\left\{ Y=y\right\} }\right]\\
 & =P\left(X=x\right)P\left(Y=y\right)
\end{aligned}$$

כאן השתמשנו בנתון עם הפ' $f\left(X\right)=\begin{cases}1 & X=x\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$ ובאותו האופן עבור $g\left(Y\right)$. ■

טענה תהי $\left\{ A_{n}\right\} _{n\in\mathbb{N}}$ חלוקה של מ"ה ו-X מ"מ בדיד בעל תוחלת. אזי

$$E\left[X\right]=\sum_{n\in\mathbb{N}}E\left[X\mid A_{i}\right]P\left(A_{i}\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}E\left[X\mathbb{1}_{A_{i}}\right]$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}E\left[X\right] & =\sum_{s\in\mathbb{R}}sP\left(X=s\right)\\
 & =\sum_{s\in\mathbb{R}}s\sum_{n\in\mathbb{N}}P\left(\left\{ X=s\right\} \cap A_{n}\right)\\
 & =\sum_{s\in\mathbb{R}}s\sum_{n\in\mathbb{N}}P\left(X=s\mid A_{n}\right)P\left(A_{n}\right)\\
 & =\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{s\in\mathbb{R}}sP\left(X=s\mid A_{n}\right)\right)P\left(A_{n}\right)\\
 & \overset{(*)}{=}\sum_{n\in\mathbb{N}}E\left[X\mid A_{n}\right]P\left(A_{n}\right)
\end{aligned}$$

$(*)$

$$\begin{aligned} E[X \mid A] &= \sum_{s\in\mathbb{R}} sP(X=s \mid A) \\ &\overset{(**)}{=} \frac{E[\mathbb{1}_A X]}{P(A)} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}} s\frac{P(\mathbb{1}_A X = s)}{P(A)} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}} s\frac{P(\{X=s\}\cap A)}{P(A)} \\ &= \sum_{s\in\mathbb{R}} sP(X=s \mid A) \end{aligned}$$

$(**)$

$$P(\mathbb{1}_A X = s) = P(\{\omega : \omega \in A \wedge X(\omega) = s\}) = P(\{X=s\}\cap A)$$

$\blacksquare$

דוגמה בוחרים באקראי בין שני מטבעות, אחד הוגן ואחד $\frac{1}{3}$-הוגן. את המטבע הנבחר מטילים 4 פעמים. מה התוחלת של מס' העצים?

$A = \{\text{נבחר המטבע הראשון}\}$ ו-$A^C = \{\text{נבחר המטבע השני}\}$.

$$\begin{aligned} E[X] &= P(A)E[X \mid A] + P\left(A^C\right)E\left[X \mid A^C\right] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

טענה אם X מ"מ בעלת תוחלת סופית, אזי $P(X \geq E[X]) > 0$ וגם $P(X \leq E[X]) > 0$.

הוכחה: אם בשלילה $P(X \geq E[X]) = 0$ אז כמעט תמיד מתקיים $X < E[X]$ וממונוטוניות מתקיים $E[X] \overset{\text{קבוע}}{=} E[E[X]] < E[X]$ סתירה (וכך גם על האי שוויון ההפוך). $\blacksquare$

הערה באופן אינטואיטיבי, לא ייתכן שהממוצע גדול מכל הנתונים, או קטן מכל הנתונים.

משפט (אי-שוויון מרקוב) אם $X \geq 0$ כמעט תמיד מ"מ בדיד בעל תוחלת אזי $\forall a > 0$ מתקיים $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$ (או לחלופין $\forall b > 0$,$P(X \geq bE[X]) \leq \frac{1}{b}$).

הוכחה: נגדיר $Y = a \cdot \mathbb{1}_{\{X \geq a\}} = \begin{cases} a & X(\omega) \geq a \\ 0 & X(\omega) < a \end{cases}$ ולכן $Y \leq X$ ולכן $E[Y] \leq E[X]$.

$$E[X] \geq E[Y] = 0 \cdot P(X < a) + aP(X \geq a)$$

ולכן $P(X \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}$. ■

דוגמה אם הממוצע בכיתה הוא 30 אז נתח התלמידים שקיבלו 60 ומעלה הוא לכל היותר $\frac{1}{2}$.

דוגמה X מס' נקודות השבת בתמורה מקרית. התוחלת של לפחות 3 נקודות שבת היא $\frac{1}{3} = \frac{E[X]}{3} \leq P\left(X \geq \frac{1}{3}\right)$.

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי X מ"מ בדיד בעל תוחלת סופית. השונות של X מוגדרת ע"י $\mathrm{var}(X) = E\left[(x - E[X])^2\right]$.

הערה אם $Y \stackrel{d}{=} X$ אז $\mathrm{var}(X) = \mathrm{var}(Y)$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח זאת).

טענה $\mathrm{var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X) &= E\left[(X - E[X])^2\right] \\
&= E\left[X^2 - 2XE[X] + E[X]^2\right] \\
&= E\left[X^2\right] - 2E[X]^2 + E[X]^2 \\
&= E\left[X^2\right] - E[X]^2
\end{aligned}$$

■

הגדרה סטיית התקן של X מ"מ בדיד בעל תוחלת היא $\sigma = \sqrt{\mathrm{var}(X)}$.

דוגמה $X \sim \mathrm{Ber}(p)$, $X \sim \mathrm{Ber}(p)$ $X^2 \stackrel{a.s.}{=} X$.

$$\mathrm{var}(X) = E\left[X^2\right] - E[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

תכונות השונות

1. לכל מ"מ X בעלת שונות מתקיים $\text{var}(X) \geq 0$.

הסבר $(X - E[X])^2$ מ"מ אי שלילי ולכן כך גם תוחלתו.

2. X מ"מ בעלת שונות, $a \in \mathbb{R}$, אזי $\text{var}(X+a) = \text{var}(X)$

הסבר

$$\begin{aligned} \text{var}(X+a) &= E\left[\left((X+a) - E[X+a]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(X + a - E[X] - a\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(x - E[X]\right)^2\right] = \text{var}(X) \end{aligned}$$

(אינטואיטיבית זה מתפזר אותו הדבר, גם אם עם ערכים שונים).

3. $\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X)$.

הסבר

$$\text{var}(aX) = E\left[\left(aX - E[aX]\right)^2\right] = E\left[\left(aX - aE[X]\right)^2\right] = E\left[a^2\left(X - E[X]\right)^2\right] = a^2 E\left[\left(x - E[X]\right)^2\right] = a^2 \text{var}(X)$$

4. X, Y מ"מ ב"ת בעלתי שונות. אזי $\text{var}(X+Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y)$

הסבר נסמן $\mu_X = E[X], \mu_Y = E[Y]$.

$$\begin{aligned} \text{var}(X+Y) &= E\left[\left((X+Y) - E[X+Y]\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(X + Y - \mu_X - \mu_y\right)^2\right] \\ &= E\left[\left((x - \mu_X) + (Y - \mu_Y)\right)^2\right] \\ &= E\left[\left(X - \mu_X\right)^2\right] + 2E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] + E\left[\left(Y - \mu_Y\right)^2\right] \\ &\overset{\text{ב"ת}}{=} \text{var}(X) + 2\underbrace{E[X - \mu_X]}_{E[X]-E[X]=0} E[Y - \mu_Y] + \text{var}(Y) \\ &= \text{var}(X) + \text{var}(Y) \end{aligned}$$

שונויות של התלפגויות מוכרות

1. $X \sim \text{Ber}(p)$, $\text{var}(X) = p(1-p)$.

2. $X\sim \text{Unif}\left([n]\right)$.

$$E\left[X^{2}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^{2}}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$$

$$\text{var}\left(X\right)=E\left[X^{2}\right]-E\left[X\right]^{2}=\frac{\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}-\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2}=\frac{n^{2}-1}{12}$$

3. $X\sim \text{Bin}\left(n,p\right)$. יהיו $Y_{1},\dots,Y_{n}\sim \text{Ber}\left(p\right)$ ב"ת. נסמן $Y=\sum_{i=1}^{n}Y_{i}\sim \text{Bin}\left(n,p\right)$.

$$\text{var}\left(X\right)=\text{var}\left(Y\right)=\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_{i}\right)\overset{\text{ב"ת}}{=}\sum_{i=1}^{n}\text{var}\left(Y_{i}\right)=np\left(1-p\right)$$

4. $X\sim \text{Pois}\left(\lambda\right)$. אינטואטיבית, זה גבול של בינומי, לכן λ $\text{var}\left(X_{n}\right)=n\cdot\frac{\lambda}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)\longrightarrow$ כאשר $X_{n}\sim \text{Bin}\left(n,\frac{\lambda}{n}\right)$. נחשב פורמלית

$$\begin{aligned}E\left[X\left(X-1\right)\right]&=\sum_{k=0}^{\infty}k\left(k-1\right)P\left(X=k\right)\\&=\sum_{k=2}^{\infty}k\left(k-1\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}\\&=\lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{\left(k-2\right)!}\\&\overset{j=k-2}{=}\lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^{j}}{j!}\\&=\lambda^{2}e^{-\lambda}e^{\lambda}=\lambda^{2}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\text{var}\left(X\right)&=E\left[X^{2}\right]-E\left[X\right]^{2}\\&=E\left[X\left(X-1\right)\right]+E\left[X\right]-E\left[X\right]^{2}\\&=\lambda^{2}+\lambda-\lambda^{2}=\lambda\end{aligned}$$

5. $X \sim \text{Geo}(p)$.

$$\begin{aligned}E[X(X-1)] &= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-1} p \\ &= (1-p)p\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)(1-p)^{k-2} \\ &\overset{(*)}{=} (1-p)p\cdot\frac{2}{p^3} = \frac{2(1-p)}{p}\end{aligned}$$

$(*)$ $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ ולכן $\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ ולכן $\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

$$\begin{aligned}\text{var}(X) &= E\left[X^2\right] - E[X]^2 \\ &= E[X(X-1)] + E[X] - E[X]^2 \\ &= \frac{2(1-p)}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \\ &= \frac{1-p}{p^2}\end{aligned}$$

משפט (א"ש צ'בישב) יהי X מ"מ בעלת תוחלת ושונות ו-$a>0$. נסמן $\text{var}(X)=\sigma^2$. אזי $P(|X-E[X]|\geq a) \leq \frac{\text{var}(X)}{a^2} = \frac{\sigma^2}{a^2}$.

הוכחה: נגדיר $Y=(X-E[X])^2$, $Y \overset{a.s.}{\geq} 0$. $E[Y]=\text{var}(X)$. נפעיל את א"ש מרקוב.

$$P(Y\geq b) \leq \frac{E[Y]}{b} = \text{var}(X)$$

ועבור $b=a^2$ נקבל $P(|X-E[X]|\geq a) \leq \frac{\text{var}(X)}{a^2}$ $P(Y\geq a^2) = P\left((X-E[X])^2\right) \overset{\checkmark}{=} P(|X-E[X]|\geq a)$. ■

הערה א"ש צ'בישב מראה שסביר שהמ"מ יקבל ערכים שמרחקם מהתוחלת לא עובר סטיית תקן σ, כלומר $P(|X-E[X]|\geq\sigma) \leq$ $\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$. אבל, להתרחק מרחק של 10 סטיות תקן כבר כמעט ולא יקרה כי

$$P(|X-E[X]|\geq 10\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{100\sigma^2} = \frac{1}{100}$$

דוגמה מטילים 10^6 מטבעות הוגנים. רוצים לחסום את ההסת' לכך שיצאו בין $495,000$ ל-$505,000$ עצים.

יהיו $Y_1,\ldots,Y_{10^6} \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$, $Y=\sum_{i=1}^{10^6} Y_i \sim \text{Ber}\left(10^6,\frac{1}{2}\right)$ מספר העצים שהוטלו. $E[Y]=500,000$. מא"ש צ'בישב,

$$P(|Y-500,000|\leq 5,000) \geq \frac{10^6\cdot\frac{1}{4}}{(5\cdot 1000)^2} = \frac{1}{100}$$

ולכן ההסת' המבוקשת היא $\frac{99}{100}$.

משפט (החוק החלש של המספרים הגדולים) יהיו $X_1, X_2, \ldots$ סדרה אינסופית של מ"מ ב"ת ש"ה בעלי תוחלת (ושונות). נסמן $E[X_i] = \mu$. אזי $\forall\epsilon > 0$ מתקיים

$$\lim_{N\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{n} - \mu\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

כלומר הסיכוי שבאינסוף ממוצא התוצאות יחרוג אפילו קצת מהתוחלת הוא זניח. לחלופין, ממוצע התוצאות מתכנס בטווח קטן ככל שנרצה לתוחלת.

הוכחה: נגדיר $S_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$, ולכן $E[S_n] \overset{\text{לינאריות}}{=} \frac{1}{n}n\mu = \mu$. נסמן $\mathrm{var}(X_i) = \sigma^2$.

$$\mathrm{var}(S_n) \overset{\text{ב"ת}}{=} \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{var}(X_i) = \frac{1}{n^2}n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

מא"ש צ'בישב, $P(|S_n - \mu| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathrm{var}(S_n)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\epsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. ■

הגדרה יהיו X, Y מ"מ בעלי שונות. השונות המשותפת של X, Y היא $\mathrm{cov}(X,Y) = E[(X - E[X])(Y - E[Y])]$.

טענה $\mathrm{cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}(X,Y) &= E[XY - E[X]Y - E[Y]X + E[X]E[Y]] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y] - E[X]E[Y] + E[X]E[Y] \\ &= E[XY] - E[X]E[Y]\end{aligned}$$

■

הערה אם X, Y ב"ת אז השונות המשותפת שלהם היא 0.

הגדרה אם $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$, נאמר כי X, Y הם בלתי מתואמים.

הערה אם X, Y ב"מ, הם לא בהכרח ב"ת.

טענה $\mathrm{var}(X+Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X,Y)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X+Y) &= E\left[\left((X+Y)-E[X+Y]\right)^2\right]\\ &= E\left[\left((X-E[X])+(Y-E[Y])\right)^2\right]\\ &= E\left[(X-E[X])^2\right]+E\left[(Y-E[Y])^2\right]+2E\left[(X-E[X])(Y-E[Y])\right]\\ &= \operatorname{var}(X)+\operatorname{var}(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y)\end{aligned}$$

■

תרגול

דוגמה בכיתה n תלמידים. מה התוחלת והשונות של X מספר הזוגות בכיתה שחולקים יום הולדת?

$X_j\sim \operatorname{Unif}([365])$, לכל זוג $i\neq j\in[n]$ נגדיר $X_{ij}\sim \operatorname{Ber}\left(\frac{1}{365}\right)$ המ"מ של-i ו-j אותו יום הולדת. $X=\sum\limits_{1\le i<j\le n}X_{ij}$.

$$\begin{aligned}E[X] &= E\left[\sum X_{ij}\right]=\sum E[X_{ij}]\\ &= \sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{365}=\frac{\binom{n}{2}}{365}\end{aligned}$$

נבדוק מתי X_{ab},X_{cd} ב"ת. אם $a\neq b\neq c\neq d$ אז הם ב"ת. אם $a=c,b\neq d$ אז

$$\begin{aligned}P(X_{ab}=1,X_{cd}=1) &= P(Y_a=Y_b=Y_d)=\sum_{k=1}^{365}P(X_a=X_b=X_d=k)\\ &= 365\cdot\frac{1}{365^3}=\frac{1}{365^2}\end{aligned}$$

$$\operatorname{var}(X)=\sum\operatorname{var}(X_{ij})=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{1}{365}-\frac{1}{365^2}\right)=\binom{n}{2}\frac{364}{365^2}$$

דוגמה מטילים מטבע הוגן עד שיוצא עץ. אם העץ התקבל בהטלה ה-n מקבלים a^n ליטר של חלב קוקוס כאשר $0<a\neq 1$. יהי X מ"מ שמתאר כמה חלב קיבלנו.

- מה ההתפלגות של X?

  $X=a^Y$ כאשר $Y\sim\operatorname{Geo}\left(\frac{1}{2}\right)$, $P_X\left(a^k\right)=k\cdot\frac{1}{2^k}$.

- עבור אילו ערכי a יש ל-X תוחלת? שונות?

  $E[X]=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a^k\cdot\frac{1}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a}{2}\right)^k$ ולכן יש אם"ם $a<2$.

$E\left[X^2\right]=\sum\limits_{k=1}^{\infty}a^{2k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a^2}{2}\right)^k$ ולכן קיימת אם"ם $a<\sqrt{2}$.

הערה אם $E\left[X\right]<c$ אז

$$\begin{aligned}P\left(X\geq c\right)&=P\left(X-E\left[X\right]\geq c-E\left[X\right]\right)\\&\leq P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|\geq c-E\left[X\right]\right)\\&\leq\frac{\text{var}\left(X\right)}{\left(c-E\left[X\right]\right)^2}\end{aligned}$$

דוגמה נחזור לדוגמת ימי ההולדת. יש בכיתה 30 תלמידים. נחסום את ההסת' ש-5 זוגות חולקים יום הולדת.

$$E\left[X\right]=\frac{30\cdot 29}{2\cdot 365}\approx x1.191,\text{var}\left(X\right)\approx 1.188$$

$P\left(X\geq 5\right)\leq\frac{E\left[X\right]}{5}\approx 0.2382$ מא"ש צ'בישב. מא"ש מרקוב היינו מקבלים $P\left(X\geq 5\right)\leq\frac{\text{var}(X)}{(5-E[X])^2}\approx 0.0819$

הערה אפשר לחשוב על שונות משותפת כך: אם $X>E\left[X\right]$ ו-$Y>E\left[Y\right]$ קורים ביחד וגם $X<E\left[X\right]$ ו-$Y<E\left[Y\right]$ ביחד אז השונות תקבל ערך גדול מאוד חיובי, ואילו הם קורים בחוסר תיאום (האחד גדול כשהשני קטן מהתוחלות בהתאמה) אז נקבל ערך שלילי גדול מאוד.

דוגמה מטילים באופן ב"ת שתי קוביות הוגנות. $X,Y\sim\text{Unif}\left([6]\right)$. נחשב את השונות המשותפת של המ"מ.

$$\begin{aligned}\text{cov}\left(X+Y,X\right)&=\text{cov}\left(X,X\right)+\text{cov}\left(X,Y\right)\\&\overset{\text{ב"ת}}{=}\text{var}\left(X\right)+0\\&=E\left[X^2\right]-E\left[X\right]^2\\&=\left(\sum_{k=1}^{6}k^2\cdot\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{7}{2}\right)^2\\&=\ldots=\frac{35}{12}\end{aligned}$$

דוגמה מסדרים את המספרים $[n]$ בשורה בסדר אקראי באופן אחיד. X מספר נקודות השבת.

נגדיר X_iש-i נקודת שבת. $X_i\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{n}\right)$. $E\left[X\right]=\sum E\left[X_i\right]=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$.

$$P\left(X_1=1,X_2=1\right)=\frac{\left(n-2\right)!}{n!}=\frac{1}{n\left(n-1\right)}\neq\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}$$

ולכן הם אינם ב"ת.

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(X_i) &= E\left[X_i^2\right] - E\left[X_i\right]^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\\ \operatorname{cov}(X_1, X_2) &= E\left[X_1 X_2\right] - E\left[X_1\right]E\left[X_2\right]\\ &= \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\\ \operatorname{var}(X) &= \sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}(X_i) + 2\sum_{1\le i<j\le n}\operatorname{cov}(X_i, X_j)\\ & 1 - \frac{1}{n} + 2\binom{n}{2}\left(\frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2}\right)\\ &= 1\end{aligned}$$

עבור $1 \le k \le n$, נחסום את ההסת' ש-$X \ge k$. $P(X \ge k) \le \frac{E[X]}{k} = \frac{1}{k}$ מא"ש מרקוב וכן

$$P(X \ge k) \le \frac{\operatorname{var}(X)}{(k - E[X])^2} = \frac{1}{(k-1)^2}$$

מא"ש צ'בישב.

שבוע $\mathbb{IX}$ | שונות משותפת וא"ש צ'בישב

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמה פרדוקס יום ההולדת, הפעם עם א"ש מרקוב ותוחלות. $X_1, \ldots, X_n \sim \operatorname{Unif}([m])$ מ"מ ב"ת שכל אחד מייצג את יום ההולדת של אדם כלשהו. $A_{ij} = \{X_i = X_j\}$, $A_{ij} \sim \operatorname{Ber}\left(\frac{1}{m}\right)$. $Y = \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{1}_{A_{ij}}$ הוא מספר האנשים עם יום הולדת משותפת.

$$E[Y] = \sum_{1\le i<j\le n} E\left[\mathbb{1}_{A_j}\right] = \frac{\binom{n}{2}}{m}$$

ולכן מא"ש מרקוב $P(Y \ge 1) \le \frac{E[Y]}{1} = \frac{\binom{n}{2}}{m}$ שזה אותו חסם שמצאנו בזמנו עם חסם האיחוד.

נכליל - נרצה לאמוד את ההסת' של-k אנשים יש את אותו יום הולדת. נסמן $A_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ המאורע ש-$X_{i_1} = \ldots = X_{i_k}$.

$$P(A_{i_1\ldots i_k}) = \sum_{j=1}^{m} P(X_{i_1} = \ldots = X_{i_k} = j) = m\left(\frac{1}{m}\right)^k = \frac{1}{m^{k-1}}$$

מספר קבוצות האנשים עם יום הולדת משותף הוא $Y=\sum\limits_{i_1<\dots<i_k}\mathbb{1}_{A_{i_1\dots i_k}}$ ולכן

$$E\left[Y\right]=\sum E\left[\mathbb{1}_{A_{i_1\dots i_k}}\right]=\binom{n}{k}\frac{1}{m^{k-1}}\leq\frac{n^{k-1}}{k!m^{k-1}}$$

ומא"ש מרקוב, $P\left(Y\geq1\right)\leq E\left[Y\right]$.

סקרנו מחדש את כל ההגדרות והמשפטים מההרצאה הקודמת והוכחנו את החוק החלש של המספרים הגדולים.

הערה לא פחות חשוב מהחוק החלש של המספרים הגדולים, חשובה דדך הוכחותו. במקרים שבהם אין לנו מ"מ ב"ת אלא קשר אחר, נוכל באמצעות השונות המשותפת לחקות את ההוכחה והשימוש בא"ש צ'בישב בה ולהגיע למסקנה דומה.

דוגמה בעיית הנקודות פצ'ולי. משחקים משחק שבו מטילים מטבע ואם יוצא עץ מקבל השחקן הראשון נקודה ואחרת השחקן השני. המשחק נגמר כששחקן אחד קיבל 6 נקודות. משחקים 8 סבבים בהם השחקן הראשון מנצח 5 ואז מפסיקים לפתע, מה הדרך הכי הוגנת לחלק את הפרס?

$X_1,\dots,X_{11}\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ מ"מ ב"ת. $Y=\sum\limits_{i=1}^{11}X_i$ הניקוד של השחקן הראשון, $Z=\mathbb{1}_{Y\geq6}$ השחקן הראשון ניצח.
$A=\left\{\sum\limits_{i=1}^{8}X_i=5\right\}$ המאורע ששיחקו 8 משחקים והשחקן הראשון ניצח 5 פעמים. נרצה את ההסת' של A של $Z\mid A$.

$$E\left[Z\mid A\right]=P\left(\sum_{i=1}^{11}X_i\geq6\mid A\right)=P\left(\sum_{i=9}^{11}X_i\geq1\right)=1-P\left(\sum_{i=9}^{11}X_i=0\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

ולכן ממוצא הנתח של השחקן הראשון שואף ל-$\frac{7}{8}$ ולכן זו החלוקה ההוגנת של הכסף.

הערה אם X,Y ב"ת אז הם ב"מ (בלתי מתואמים) אבל לא בהכרח הפוך:

$X\sim\text{Unif}\left(\{-1,0,1\}\right)$, $Y=X^2$ ולכן ברור שהם אינם ב"ת. $E\left[X\right]=0$ ובנוסף $E\left[XY\right]=E\left[X^3\right]=0$ ולכן
$E\left[XY\right]=E\left[X\right]\cdot E\left[Y\right]=0$ ולכן X,Y ב"מ.

הוכחנו את הקשר בין השונות לשונות המשותפת

דוגמה $\left(X,Y\right)\sim\text{Unif}\left(\left(0,0\right),\left(1,0\right),\left(0,1\right)\right)$. $X,Y\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{3}\right)$ ולכן $E\left[X\right]=E\left[Y\right]=\frac{1}{3}$. $XY\overset{a.s}{=}0$ ולכן $E\left[XY\right]=0$.

$$\text{cov}\left(X,Y\right)=E\left[XY\right]-E\left[X\right]E\left[Y\right]=-\frac{1}{9}$$

$X+Y\sim\text{Ber}\left(\frac{2}{3}\right)$ ולכן $\text{var}\left(X+Y\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=\frac{2}{9}$ ואכן כמו בטענה מתקיים

$$\begin{aligned}\text{var}\left(X+Y\right)&=\underbrace{\text{var}\left(X\right)}_{\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)}+\text{var}\left(Y\right)+2\text{cov}\left(X,Y\right)\\&=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=\frac{4}{9}-\frac{2}{9}=\frac{2}{9}\end{aligned}$$

תכונות השונות המשותפת

1. סימטריה: $\text{cov}(X,Y)=\text{cov}(Y,X)$.
2. בילנאריות: $\text{cov}(aX+bY,Z)=a\text{cov}(X,Z)+b\text{cov}(Y,Z)$, $\forall a,b\in\mathbb{R}$ וגם באיבר השני.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(aX+bY,Z) &= E[(aX+bY)Z]-E[(aX+bY)]E[Z] \\
&= a(E[XZ]+bE[YZ]-aE[X]E[Z]-bE[Y]E[Z]) \\
&= a(E[XZ]-E[X]E[Z])+b(E[YZ]-E[Y]E[Z]) \\
&= a\text{cov}(X,Z)+b\text{cov}(Y,Z)
\end{aligned}$$

■

נוכל להכליל את הבילנאריות ל-$\text{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i,Z\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i\text{cov}(X_i,Z)$ (וכך גם באיבר השני).

הערה $\text{cov}(X,X)=\text{var}(X)$

טענה (שונות של סכום מ"מ) אם $X_1,\ldots,X_n$ מ"מ בעלתי שונות אזי

$$\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_i)+3\sum_{1\le i<j\le n}\text{cov}(X_i,X_j)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\text{var}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right) &= \text{cov}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i,\sum_{j=1}^{n}X_j\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\text{cov}(X_i,X_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}\text{cov}(X_i,X_j)
\end{aligned}$$

■

דוגמה רצפים בסדרת הטלות. מטילים מטבע n פעמים וסופרים כמה פעמים הופיעו 2 עצים ברצף.

$X_1,\dots,X_n \sim \text{Ber}(p)$ מ"מ ב"ת ש"ה. נגדיר לכל $i\in[n-1]$ מ"מ $Y_i = X_i\cdot X_{i+1}$ שהרצף הכפול מתחיל ב-i. $Y_i\sim\text{Ber}\left(p^2\right)$.

$$\text{var}\left(Y_i\right) = p^2\left(1-p^2\right) = p^2-p^4$$

וגם $E\left[Y_i\right]=p^2$. נגדיר $Y=\sum_{i=1}^{n-1} Y_i$ ונרצה לחשב את השונות שלו כדי להשתמש בא"ש צ'בישב.
$$\text{cov}\left(Y_i,Y_j\right) = \begin{cases} 0 & j>i+1 \\ p^3-p^4 & j=i+1 \end{cases}$$
כי אם אלו שני רצפים זרים אז הם ב"ת, אחרת

$$\begin{aligned}\text{cov}\left(Y_i,Y_j\right) &= E\left[Y_iY_j\right]-E\left[Y_i\right]E\left[Y_j\right] \\ &= E\left[\underbrace{X_iX_{i+1}X_{i+1}X_{i+2}}_{=1\iff X_i=X_{i+1}=X_{i+2}=1}\right]-p^4 = p^3-p^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{var}\left(Y\right) &= \sum_{i=1}^{n-1}\text{var}\left(Y_i\right)+2\sum_{1\le i<j\le n-1}\text{cov}\left(Y_i,Y_j\right) \\ &= (n-1)\,p^2\left(1-p^2\right)+2\,(n-2)\left(p^3-p^4\right)\end{aligned}$$

$Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i$,

$$E\left[\frac{Y}{n-1}\right] \overset{\text{לינאריות על } Y_i}{=} \frac{1}{n-1}\,(n-1)\,p^2 = p^2$$

$$\text{var}\left(\frac{Y}{n-1}\right) = \frac{(n-1)\,p^2\left(1-p^2\right)+2\,(n-2)\left(p^3-p^4\right)}{(n-1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$P\left(\left|\frac{Y}{n-1}-p^2\right|\ge\epsilon\right) \le \frac{\text{var}\left(\frac{Y}{n-1}\right)}{\epsilon^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן ממוצע מספר הרצפים שואף לתוחלת, אפע"פ שהמ"מ אינם ב"ת.

שבוע $\mathbb{X}$ | הקשר לאלגברה לינארית, ריגרסיה לינארית ומומנטים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמה (בעיית האספן) על כל פקק בקבוק מופיעה באקראי אחת מ-n אותיות. שאלנו, אם פותחים k בקבוקים, מה ההסת' לאסוף את כל האותיות? ראינו שעבור $k=cn\log n$, $c<1$, אז כש-$n\to\infty$ ההסת' תשאף ל-1.

נגדיר $\forall i\in[n]$ מ"מ X_i שערכו הוא מס' הבקבוקים שצריך לפתוח כדי להשיג אות נוספת לאחר שכבר השגנו $i-1$ אותיות. $X_i\sim \text{Geo}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$. נגדיר $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ מס' הבקבוקים שהובילו לאיסוף כל n האותיות. נשים לב כי $\{X_i\}$ ב"ת. בתרגול ראינו כי $n\log n\leq E[X]=n\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\leq n(\log n+1)$.

$$
\begin{aligned}
\text{var}(X)&=\sum_{i=1}^{n}\text{var}(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{i-1}{n}}{\left(\frac{n-i+1}{n}\right)^2}\right)\\
&\overset{j=n-i+1}{=}\sum_{j=1}^{n}\frac{n(n-j)}{j^2}=n^2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}-n\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\\
&\leq n^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}=\frac{n^2\pi^2}{6}
\end{aligned}
$$

- כמה בקבוקים עלינו לפתוח כדי להשיג את האותיות בהסת' של 75%?

$$
P\left(|X-E[X]|\geq\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\right)\overset{\sigma=\sqrt{\text{var}(X)}\leq\frac{n\pi}{\sqrt{6}}}{\leq}P\left(|X-E[X]|\geq 2\sigma(X)\right)\overset{\text{צ'בישב}}{=}\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}
$$

כלומר $P\left(|X-E[X]|<\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\right)\geq\frac{3}{4}$.

$$
\begin{aligned}
&\iff |X-E[X]|<\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\\
&\iff -\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}<X-E[X]<\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\\
&n\log n-\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\leq E[X]-\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}<X<E[X]+\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}\leq n\log n+\frac{2n\pi}{\sqrt{6}}
\end{aligned}
$$

ולכן לדוגמה עבור $n=50$, התשובה היא ש-X הוא בין 123 ו-317 בהסת' 0.75 (כלומר $X>317$ בהסת' קטנה מ-0.25) ואילו קודם קיבלנו חסם של $50\cdot 4\log 50$ שזה הרבה יותר גרוע.

דוגמה נתון גרף שריג $(n+1)\times(n+1)$ (מתחיל מאינדקס 0 בכל ציר). נצבע בהסת' p כל צלע באדום (אחרת היא לא צבועה בכלל). לכל

נקודה (i,j) עם $1\leq i,j\leq n$ (לא על השפה) נגדיר

$$ij_{|}=\begin{cases}1 & \text{הצלע מעל נצבעת באדום}\\ 0 & \text{הצלע מעל לא נצבעת באדום}\end{cases}\qquad ij_{-}=\begin{cases}1 & \text{הצלע מימין נצבעה באדום}\\ 0 & \text{הצלע מימין לא נצבעה באדום}\end{cases}$$

$ij_{|},ij_{-}\sim\text{Ber}\left(p\right)$. נגדיר בנוסף לכל $1\leq i,j\leq n$, X_{ij} כל הריבע שזהו הקודקוד המשאלי-תחתון שלו צבוע באדום.

$X_{ij}\sim\text{Ber}\left(p^{4}\right)$ (הם אינם ב"ת). $E\left[X_{ij}\right]=p^{4}$.

$$\text{var}\left(X_{ij}\right)=p^{4}\left(1-p^{4}\right)=p^{4}-p^{8}$$

נגדיר $X=\sum\limits_{1\leq i,j\leq n}X_{ij}$ מס' הריבועים האדומים בגרף. $E\left[X\right]=n^{2}p^{4}$. אם (i,j) ו-(k,l) אינם שכנים הם ב"ת ואז $\text{cov}\left(X_{ij},X_{kl}\right)=0$. אם (i,j), (k,l) שכנים אז

$$\text{cov}\left(X_{ij},X_{kl}\right)=\underbrace{E\left[XY\right]}_{\text{רק 7 נדרשות}}-E\left[X\right]E\left[Y\right]=p^{7}-p^{8}$$

בכל שורה יש $n-1$ זוגות שכנים ויש n שורות אבל גם יש שכנים אנכיים לכן מכפילים ב-2 ולכן יש $2n\left(n-1\right)$ זוגות שכנים.

$$\text{var}\left(X\right)=n^{2}\left(p^{4}-p^{8}\right)+2n\left(n-1\right)\left(p^{7}-p^{8}\right)$$

$E\left[\frac{X}{n^{2}}\right]=\frac{n^{2}p^{4}}{n^{2}}=p^{4}$ וגם $\text{var}\left(\frac{X}{n^{2}}\right)=\frac{\text{var}(X)}{n^{4}}$

$$P\left(\left|\frac{X}{n^{2}}-E\left[\frac{X}{n^{2}}\right]\right|\geq\epsilon\right)\leq\frac{\text{var}\left(\frac{X}{n^{2}}\right)}{\epsilon^{2}}\leq\frac{n^{2}\left(p^{4}-p^{8}\right)+2n\left(n-1\right)\left(p^{3}-p^{2}\right)}{\epsilon^{2}n^{4}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ושוב הגענו לאותה הנוסחה של החוק החלש של המספרים הגדולים גם בלי ההנחה שהמ"מ הם ב"ת.

$$P\left(\frac{\text{כמות הריבועים האדומים בפועל}}{\text{מס' הריבועים הפוטנציאלים}}\right)\longrightarrow\text{ההסת' של ריבוע אחד בודד}$$

תזכורת (מלינארית 2) $f\left(x,y\right)$ היא מכפלית פנימית אם:

- $f\left(x,y\right)=f\left(y,x\right)$.
- בי-לינאריות.
- $f\left(x,x\right)\geq0$ ו-$f\left(x,x\right)=0$ אם"ם $x=0$.

הערה השונות המשותפת מקיימת את כל התכונות הללו פרט לאי-ניוון.

$\forall X$ מ"מ, $E\left[X-E\left[X\right]\right]=0$ (והזזה לא משנה תכונות מהותיות). מעל המ"מ בעלי תוחלת 0, השונות המשותפת מקיימת תכונות של

מכ"פ. הנורמה הנובעת מהמכ"פ הזו היא סטיית התקן, $\sigma(x)=\sqrt{\text{var}(X)}=\sqrt{\text{cov}(X,X)}$.

הערה $\forall X$ מ"מ, $\text{var}\left(\frac{X}{\sigma(X)}\right)=1$. לכן כדי לתקנן מ"מ, נגדיר $\frac{X-E[X]}{\sigma(X)}$ ונקבל מ"מ עם תוחלת 0 ושונות 1.

משפט (א"ש קושי-שוורץ הסתברותי) יהיו X,Y מ"מ ב"ש אז $E[XY]$ קיימת ומתקיים $E[XY]\le\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$.

הוכחה: אם $X\overset{a.s}{=}0$ או $Y\overset{a.s}{=}0$ סיימנו. אחרת, $E[X^2]\neq 0$, $E[Y^2]\neq 0$. נגדיר $\overline{X}=\frac{X}{\sqrt{E[X^2]}},\overline{Y}=\frac{Y}{\sqrt{E[Y^2]}}$.

נוכיח כי $E\left[\overline{X}\cdot\overline{Y}\right]\le 1$. נשים לב כי $E\left[\overline{X}^2\right]=\frac{E[X^2]}{E[X^2]}=1$ וגם $E\left[\overline{Y}^2\right]=1$.

אם $(a-b)^2\ge 0$ אז $a^2-2ab+b^2\ge 0$ ולכן $ab\le\frac{a^2+b^2}{2}$ ולכן $E\left[\overline{X}\cdot\overline{Y}\right]\le\frac{E\left[\overline{X}^2\right]+E\left[\overline{Y}^2\right]}{2}=\frac{1+1}{2}=1$ ולכן

$$E\left[\frac{XY}{\sqrt{E[X^2]}\sqrt{E[Y^2]}}\right]\le 1$$

כרצוי. ■

מסקנה אם X,Y בעלי ושנות אז $\text{cov}(X,Y)$ מוגדר.

מסקנה (א"ש קושי-שוורץ) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ אז $\langle u\mid v\rangle\le\|u\|\cdot\|v\|$.

הוכחה: נגדיר $Z\sim\text{Unif}([n])$ ואז $X=u_Z,Y=v_Z$ (הקוארדינטה ה-Z בכל אחד מהוקטורים).

$$E\left[X^2\right]=\sum_{i=1}^n\frac{(u_i)^2}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(u_i)^2=\frac{\|u\|^2}{n}$$

ובדומה $E\left[Y^2\right]=\frac{\|v\|^2}{n}$.

$$E[XY]=\sum_{i=1}^n\frac{u_iv_i}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_iv_i=\frac{\langle u\mid v\rangle}{n}$$

ומא"ש קושי שוורץ ההסת', $E[XY]\le\sqrt{E[X^2]E[Y^2]}$ כלומר $\frac{\langle u|v\rangle}{n}\le\sqrt{\frac{\|u\|^2}{n}\cdot\frac{\|v\|^2}{n}}$ כלומר קיבלנו את אשק"ש. ■

נרצה להגדיר מקדם דומה לשונות המשותפת שאינווריאנטי למתיחות והזזות, כלומר מכפלה בסקלר והוספת קבוע.

הגדרה יהיו X,Y מ"מ ב"ש אז <u>מקדם המתאם</u> שלהם הוא $\text{corr}(X,Y)=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

תכונות של קורלציה

1. $\text{corr}(X,Y)=\text{corr}(Y,X)$.
2. $-1\le\text{corr}(X,Y)\le 1$ ו-$\text{corr}(X,X)=1$.

טענה $-1 \le \text{corr}(X,Y) \le 1$ ומתקיים $\text{corr}(X,Y)=1$ כאשר $Y=aX+b$, $a>0$ ו-$\text{corr}(X,Y)=-1$ כאשר $Y=aX+b$, $a<0$.

בהינתן שני מ"מ X,Y, נרצה למצוא $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש- $aY+b$ מתאר באופן המיטבי את X (שימושי אם ידוע לנו הרבה על Y וקצת על X) בהתייחס לערכיו והתפלגותו. נרצה למזער את $E\left[(aY+b-X)^2\right]$.

טענה (תוחלת כממזערת סטיה ריבועית) $\text{var}(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]\le E\left[(X-a)^2\right]$, $\forall a\in\mathbb{R}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
E\left[(X-a)^2\right] &= E\left[\left(X-\mu+\underbrace{\mu-a}_{\Delta}\right)^2\right]\\
&= E\left[(X-\mu)^2\right]+2\Delta\underbrace{E[X-\mu]}_{0}+\Delta^2\\
&= E\left[(X-\mu)^2\right]+\Delta^2
\end{aligned}$$

ולכן הביטוי מקבל מינימום כאשר Δ מינימלי כלומר כאשר $a=E[X]$. ■

נחפש a הממזער את התנודתיות של ההפרש $X-aY$, כלומר $\min \text{var}(X-aY)$.

טענה נגדיר $Z=X-\frac{\text{cov}(X,Y)Y}{\text{var}(Y)}$ אזי המ"מ Z בלתי מתואם עם Y ו-$\forall a\in\mathbb{R}$, $\text{var}(X-aY)\ge\text{var}(Z)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\text{cov}(Z,Y) &= \text{cov}\left(X-\frac{\text{cov}(X,Y)\,Y}{\text{var}(Y)},Y\right)\\
&= \text{cov}(X,Y)-\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}\text{cov}(Y,Y)\\
&= 0
\end{aligned}$$

נכתוב $a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}+b$. נוכיח כי $\text{var}(X-aY)$ מינימלי כאשר $b=0$.

$$\begin{aligned}
\text{var}(X-aY) &= \text{var}\left(\underbrace{X-\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}Y}_{Z}-bY\right)\\
&= \text{var}(Z)+2\underbrace{\text{cov}(Z,-bY)}_{\text{0, כי בלתי מתואמים}}+b^2\text{var}(Y)\\
&= \text{var}(Z)+b^2\text{var}(Y)
\end{aligned}$$

וזה מינימלי כאשר $b=0$. ■

מסקנה ה-a שנותן את המינימום שביקשנו הוא $a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$.

עתה נחפש a,b שממזערים את $E\left[\left(aY+b-X\right)^2\right]$.

$$E\left[\left(aY+b-X\right)^2\right]=E\left[\left(\left(aY-X\right)-E\left[aY-X\right]+\underbrace{E\left[aY-X\right]+b}_{\Delta}\right)^2\right]$$

ניזכר במשפט על התוחלת כממזערת סטיה ריבועית ונקבל שביטוי זה מקבל ערך מינימלי כאשר $\Delta=0$, כלומר $b=-E\left[aY-X\right]$.

מסקנה עבור $a=\frac{\text{cov}(X,Y)}{\text{var}(Y)}$ ו-$b=-E\left[aY-X\right]$ נקבל קירוב לינארי מתחשב בהתפלגות מיטבי $aY+b$ ל-X. זה נקרא <u>ריגרסיה לינארית</u>.

הגדרה יהי X מ"מ. <u>המומנט מסדר k</u> של X הוא $m_k\left(X\right)=E\left[X^k\right]$. <u>המומנט המרכזי</u> מסדר k של X הוא

$$M_k\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left[X\right]\right)^k\right]$$

הערה $E\left[X\right]=m_1\left(X\right),\text{var}\left(X\right)=M_2\left(X\right)$.

טענה $\forall k$ זוגי ו-$a>0$, $P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|\geq a\right)\leq\frac{M_k(X)}{a^k}$.

הוכחה: זהה לא"ש צ'בישב (עבור $k=2$ זה ממש הוא). הרעיון הוא שמסתכלים על $\left|X-E\left[X\right]\right|^k\geq a^{-k}$ ומציבים בא"ש מרקוב ומשם מהיות k זוגי מקבלים את הרצוי. ■

דוגמה $X_i\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ ב"ת, $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$. $X\sim\text{Bin}\left(n,\frac{1}{2}\right)$. נחשב את $m_3\left(X\right)$.

$$\begin{aligned}m_3\left(X\right)=E\left[X^3\right]&=E\left[\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}X_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}X_i\right)\right]\\&=E\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}X_iX_jX_k\right]\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}E\left[X_iX_jX_k\right]\\&\overset{(*)}{=}n\cdot\frac{1}{2}+3n\left(n-1\right)\frac{1}{4}+n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\frac{1}{8}\end{aligned}$$

$(*)$ אם $i=j=k$, $X_iX_jX_k\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. אם $i=j\neq k$ אז $X_iX_jX_k\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{4}\right)$ ואילו אם $i\neq j\neq k$ אז $X_iX_jX_k\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{8}\right)$.

הערה בעזרת המומנטים ניתן לחשב מומנט מרכזי.

$$M_k\left(X\right)=E\left[\left(X-E\left[X\right]\right)^k\right]=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}m_i\left(X\right)^i\left(-E\left[X\right]\right)^{k-i}$$

דוגמה $X_i\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$ ב"ת, $X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\text{Bin}\left(n,\frac{1}{2}\right)$. נרצה לחסום את ההסת' של מספר הפעמים שיצא עץ הוא לפחות שלושת רבעי מהפעמים.

$$P\left(X\geq\frac{3}{4}n\right)\leq P\left(\left(X-\underbrace{\frac{n}{2}}_{E[X]}\right)\geq\frac{n}{4}\right)\overset{\text{צ'בישב}}{\leq}\frac{\text{var}\left(X\right)}{\left(\frac{n}{4}\right)^2}=\frac{4}{n}$$

אם נגדיר $Y=2^X$ אז $Y>0$ ומונוטוני עולה. $P\left(X\geq\frac{3}{4}n\right)=P\left(Y\geq2^{\frac{3}{4}n}\right)\overset{\text{מרקוב}}{\leq}\frac{E[Y]}{2^{\frac{3n}{4}}}=\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^{\frac{3n}{4}}}=\left(0.9\right)^n$ וזו דעיכה מעריכית שהיא הרבה יותר חזקה ממה שקיבלנו עד כה.

$$E\left[Y\right]=E\left[2^X\right]=E\left[2^{\sum_{i=1}^{n}X_i}\right]=E\left[\prod_{i=1}^{n}2^{X_i}\right]\overset{\text{פ' על ב"ת}}{=}\prod_{i=1}^{n}E\left[2^{X_i}\right]=\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

$$E\left[2^{X_i}\right]=\frac{1}{2}\cdot2^0+\frac{1}{2}\cdot2^1=1.5$$

הגדרה יהי X מ"מ. נגדיר $M_X\left(t\right)=E\left[e^{tx}\right]$ נקראת <u>הפונקציה היוצרת מומנטים</u> של X.

הערה בהצבת כל t שנרצה נוכל להגיע לאיזה בסיס שרק נרצה.

תכונות של פ' יוצרת מומנטים

1. לכל t, $M_X\left(t\right)\geq0$ (כשהוא מוגדר).
2. כפליות: אם X,Y ב"ת אז $M_{X+Y}\left(t\right)=M_X\left(t\right)M_Y\left(t\right)$.

$$M_{X+Y}\left(t\right)=E\left[e^{tX+tY}\right]=E\left[e^{tX}e^{tY}\right]\overset{\text{ב"ת}}{=}E\left[e^{tX}\right]E\left[e^{tY}\right]=M_X\left(t\right)M_Y\left(t\right).$$

משפט (א"ש צ'רנוף) יהי X מ"מ עם פ' יוצרת מומנטים M_X, $a\in\mathbb{R}$. אזי $\forall t>0$ עבורו $M_X\left(t\right)$ מוגדרת מתקיים

$$P\left(X\geq a\right)\leq M_X\left(t\right)e^{-ta}$$

הוכחה: $e^{tX} \geq 0$. המאורע $X \geq a$ זהה למאורע $e^{tX} \geq e^{ta}$ (כי $t > 0$). ממרקוב,

$$P\left(X \geq a\right) = P\left(e^{tX} \geq e^{ta}\right) \leq \frac{E\left[e^{tX}\right]}{e^{ta}} = M_X\left(t\right)e^{-ta}$$

■

הערה במרקוב וצ'בישב קיבלנו חסם אחד לכל a ואילו בצר'נוף קיבלנו אינסוף חסמים (בהנחה שיש אינסוף t-ים) לכל a.

תרגול

דוגמה יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת, $X_j \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$. $Y_j = \max\left\{X_j, X_{j+1}\right\}$, $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

- חשבו את $\text{var}\left(Z_n\right)$.

נסמן $Y_j \sim \text{Ber}\left(p\right)$ עם $p = \frac{3}{4}$ כי $Y_j = 0$ אם"ם $X_j = X_{j+1} = 0$.

$$E\left[Z_n\right] = \sum_{j=1}^{n} E\left[Y_j\right] = \sum_{j=1}^{n} p = pn = \frac{3}{4}n$$

$$\begin{aligned}\text{var}\left(Z_n\right) = \text{var}\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j\right) &= \sum_{n=1}^{n} \text{var}\left(Y_j\right) + 2\sum_{1\leq i,j\leq n} \text{cov}\left(Y_i, Y_j\right)\\ = \frac{3}{16}n + 2\left(n-1\right)\frac{1}{16} = \frac{5n-2}{16}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{var}\left(Y_j\right) &= \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}\\ \text{cov}\left(Y_i, Y_j\right) &= 0, \qquad i+1 < j\\ \text{cov}\left(Y_i, Y_{i+1}\right) &= \text{cov}\left(Y_1 Y_2\right)\\ &= E\left[Y_1 Y_2\right] - E\left[Y_1\right]E\left[Y_2\right]\\ &\overset{(*)}{=} \frac{5}{8} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}\end{aligned}$$

$(*)$

$$
\begin{aligned}
P\left(Y_1Y_2=1\right) &= P\left(Y_1,=1,Y_2=1\right)\\
&= P\left(X_2=1\vee\left(X_1=1,X_2\neq 1,X_3=1\right)\right)\\
&\overset{\text{בנינו אותם זרים}}{=} P\left(X_2=1\right)+P\left(X_1=1,X_2\neq 1,X_3=1\right)\\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}
\end{aligned}
$$

- הוכיחו כי $\forall\epsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}Y_j-\frac{3}{4}\right|\geq\epsilon\right)=0$.

מא"ש צ'בישב, $P\left(\left|Z_{2n}-\frac{3}{4}\left(2n\right)\right|\geq 2n\epsilon\right)\leq\frac{\frac{10n-2}{16}}{4n^2\epsilon^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ אבל אנחנו לא רוצים חיים קלים.

נגדיר $\alpha_n=Y_1+Y_3+\cdots+Y_{2n-1}$ ו-$\beta_n=Y_2+Y_4+\cdots+Y_{2n}$.

$$
\begin{aligned}
\left|Z_{2n}-\frac{3n}{2}\right| &= \left|\alpha_n+\beta_n-\frac{3n}{2}\right|\\
&= \left|\alpha_n-\frac{3n}{4}+\beta_n-\frac{3n}{4}\right|\\
&\overset{\triangle}{\leq} \left|\alpha_n-\frac{3n}{4}\right|+\left|\beta_n-\frac{3n}{4}\right|
\end{aligned}
$$

$$
P\left(\left|Z_{2n}-\frac{3n}{2}\right|\geq 2n\epsilon\right)\leq P\left(\left|\alpha_n-\frac{3n}{4}\right|\geq n\epsilon\vee\left|\beta_n-\frac{3n}{4}\right|\geq n\epsilon\right)
$$

ולכן מחוק החלש של המספרים הגדולים עבור β_n

$$
\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\beta_n-\frac{3n}{4}\right|\geq\frac{\epsilon n}{2}\right)=\lim_{n\to\infty}P\left(\frac{1}{n}\left|X_2+X_4+\cdots+X_n-\frac{3}{4}\right|\geq\epsilon\right)=0
$$

ובדומה מתקיים גם כך עבור α_n ולכן מהמשוואה הנ"ל זה ההסת' הרצויה שואפת לאפס.

דוגמה מטילים שתי קוביות הוגנות באופן ב"ת (ערך הטלתן $X,Y\sim\text{Unif}\left(\left[6\right]\right)$ בהתאמה). נחשב את מקדם המתאם של אחת ההטלות עם

הסכום.

$$\begin{aligned}\operatorname{corr}(X,X+Y) &= \frac{\operatorname{cov}(X,X+Y)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\operatorname{var}(X+Y)}}\\ &= \frac{\operatorname{cov}(X,X)+\underbrace{\operatorname{cov}(X,Y)}_{0}}{\sqrt{\operatorname{var}(X)\left(\operatorname{var}(X)+\underbrace{\operatorname{var}(Y)}_{=\operatorname{var}(X)}\right)}}\\ &= \frac{\operatorname{var}(X)}{\sqrt{\operatorname{var}(X)^2+\operatorname{var}(X)^2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

כי $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+a^2}}$. למעשה זה נכון על כל שני מ"מ ב"ת ש"ה. יש לזה משמעות גאומטרית לא חשובה (הזווית בין המ"מ במישור).

דוגמה נגדיר $X\sim \operatorname{Unif}\{-1,0,1\}$, $Z=X^2$ (ראינו את הדוגמה הזו בהרצאה). $E[X]=0$, $E[Z]=E\left[X^2\right]=\frac{2}{3}$, $E[XZ]=0$ ולכן $\operatorname{cov}(X,Z)=E[XZ]-E[X]E[Z]=0$ ולכן על אף שהם בלתי מתואמים הם מאוד תלויים (Z מוגדר על ידי X).

סקרנו מחדש את אשק"ש ההסת'.

טענה $|\operatorname{corr}(X,Y)|\le 1$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}|\operatorname{cov}(X,Y)| &= |E[(X-E[X])(Y-E[Y])]|\\ &\overset{\text{אשק"ש ההסת'}}{\le} \sqrt{E\left[(X-E[X])^2\right]}\sqrt{E\left[(X-E[X])^2\right]}\\ &= \sqrt{\operatorname{var}(X)}\sqrt{\operatorname{var}(Y)}\end{aligned}$$

■

ריגרסיה לינארית (שלמדנו בהרצאה) היא ניסיון למצוא ישר שממצע את הנקודות של X, על בסיס Y.

הגדרה אם X,Y בעלי שונות אז $Z=E[X]+\frac{\operatorname{cov}(X,Y)(Y-E[Y])}{\operatorname{var}(Y)}$ הוא <u>הריגרסיה הלינארית</u> של X על בסיס Y.

דוגמה חוקרת מקבלת רשימה של מדידות טמפרטורה של המים וכמה וירוסים יש במים לכל מדידה:

Ω	1	2	3	4	5	6	7	8
T	1	2	3	5	6	7	8	$8\frac{1}{2}$
V	1	0	2	5	100	117	69	34

נחפש את הקירוב האפיני הטוב ביותר למדידות (זוהי הריגרסיה הלינארית).

כדי לא לבזבז את זמננו היקר, נצמצם את הניסוי לשלושת הדגימות הראשונות, כלומר נביט בניסוי בהינתן $A=\{1,2,3\}$. נסמן X וירוסים (שהוא בעצם $X\mid A$ אבל נפסיק להזכיר את זה מעתה), Y טמפרטורה. $E[X]=1$, $E[Y]=2$.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)&=E[XY]-E[X]E[Y]=\frac{7}{3}-2=\frac{1}{3}\\ \operatorname{var}(Y)&=E\left[Y^2\right]-E[Y]^2=\frac{14}{3}-4=\frac{2}{3}\end{aligned}$$

ומכאן אפשר לחשב את הריגרסיה הלינארית.

סקרנו מחדש את תכונות המומנט ואת א"ש צ'רנוף.

טענה אם X בעל מומנט מעריכי (פ' יוצרת מומנטים) אז הנגזרת ה-k שלו ב-0 היא המומנט מסדר k, כלומר

$$M_k^{(k)}(0)=E\left[X^k\right]=m_k(X)$$

דוגמה $X\sim\operatorname{Pois}(\lambda)$. לכן $E[X]=\operatorname{var}(X)=\lambda$. בעזרת א"ש צ'בישב נוכל לחסום

$$P\left(\left|X-\underbrace{\lambda}_{E[X]}\right|\geq\underbrace{\lambda}_{c}\right)<\frac{\operatorname{var}(X)}{c^2}=\frac{\lambda}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}$$

בתרגיל נוכיח כי $M_X(t)=e^{\lambda\left(e^t-1\right)}$, ולכן בעזרת א"ש צ'רנוף נקבל

$$\begin{aligned}P(X\geq2\lambda)&\leq e^{\lambda\left(e^t-1\right)}e^{-2\lambda t}\\&=e^{\lambda e^t-2\lambda t-\lambda}\end{aligned}$$

עתה נחפש מתי $f(t)=\lambda e^t-2\lambda t-\lambda$ מקבל מינימום. $f'(t)=\lambda e^t-2\lambda$ כלומר $t=\ln2$ מקיים זאת ולכן

$$P(X\geq2\lambda)\leq e^{2\lambda-2\lambda\ln2-\lambda}=\left(\frac{e}{4}\right)^{\lambda}$$

שזה חסם הרבה יותר חזק (הסטודנטית המשקיעה תבדוק שאכן כך).

שבוע $\mathbb{XI}$ | א"ש הופדינג ומרחבי הסתברות כלליים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמה $X\sim\text{Bin}\left(n,p\right)$. נחשב $M_{X}\left(t\right)=E\left[e^{tX}\right]$:

$$\begin{aligned}E\left[e^{tX}\right] & =\sum_{k=0}^{n}e^{tk}P\left(X=k\right)\\
 & =\sum_{k=0}^{n}e^{tk}\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k}\\
 & =\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{t}p\right)^{k}\left(1-p\right)^{n-k}=\left(pe^{t}+1-p\right)^{n}
\end{aligned}$$

דוגמה עבור $S\sim\text{Bin}\left(n,\frac{1}{n}\right)$,

- חסמו את $P\left(S\geq a\right)$.

$$M_{S}\left(t\right)=\left(\frac{1}{n}e^{t}+1-\frac{1}{n}\right)^{n}=\left(1+\frac{e^{t}-1}{n}\right)^{n}\overset{\text{אינפי}}{\leq}\left(e^{\frac{e^{t}-1}{n}}\right)^{n}=e^{e^{t}-1}$$

ולכן מצ'רנוף, $P\left(S\geq a\right)\leq M_{S}\left(t\right)e^{-ta}\leq e^{e^{t}-1-ta}$.

נבדוק איזה t ממעזר את אגף ימין: $\left(e^{t}-1-ta\right)'=e^{t}-a$ ולכן זה עבור $t=\log a$.

כלומר קיבלנו ש-$P\left(S\geq a\right)\leq e^{a-1-a\log a}\leq e^{-a\left(\log a-1\right)}$. מאחר שהשאלה מעניינת רק עבור $a>1$ הרי ש-$t=\log a>0$ ולכן ניתן להפעיל א"ש צ'רנוף על ה-t המוחזר.

מטילים n כדורים באקראי באופן ב"ת אל n תאים.

- כמה כדורים יש באופן טיפוסי בתא העמוס ביותר?

יהיו $X_{1},\ldots,X_{n}\sim\text{Unif}\left(\left[n\right]\right)$ ב"ת. X_{i} מייצג את התא אליו הגיע הכדור ה-i. נגדיר $Y_{i}=\mathbb{1}_{\left\{ X_{i}=1\right\} }$ האם הכדור ה-i הגיע לתא הראשון. נסמן $S_{1}=\sum_{i=1}^{n}Y_{i}$ מספר הכדורים בתא הראשון. X_{i} ב"ת ולכן Y_{i} ב"ת ולכן $S_{1}\sim\text{Bin}\left(n,\frac{1}{n}\right)$ באותו האופן נקבל $S_{1},\ldots,S_{n}$ כאשר S_{j} מספר הכדורים בתא ה-j. נחפש a כך שלכל j, $P\left(S_{j}\geq a\right)$ קטנה.

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left\{ S_{j}\geq a\right\} \right)\overset{\text{חסם האיחוד}}{\leq}\sum_{j=1}^{n}P\left(S_{j}\geq a\right)\leq ne^{-a\left(\log a-1\right)}=e^{\log n-a\left(\log a-1\right)}$$

נחפש a שעבורו ביטוי זה הולך וקטן ל-0. כלומר $\log n-a\left(\log a-1\right)\longrightarrow-\infty$.

בחירה של $a=\log n$ תעבוד, אבל אפשר לשפר את זה. $a=\frac{c\log n}{\log\log n}$, $c>1$ (זו הבחירה הכי טובה שנותנת את התוצאה הרצויה).

$$\begin{aligned}\log n-a\left(\log a-1\right) & =\log n-c\frac{\log n}{\log\log n}\left(\left(\log c+\log\log n-\log\log\log n\right)-1\right)\\
 & =\log n-c\log n\left(1+\mathcal{O}\left(1\right)\right)\longrightarrow-\infty
\end{aligned}$$

כלומר $P\left(S_{j}\leq a,\forall j\right)\geq1-e^{\log n-a\left(\log a-1\right)}$ ו-$a=c\frac{\log n}{\log\log n}$, $c>1$.

א״ש צ׳רנוף עבור התפלגויות מיוחדות

1. $X \sim \mathrm{Ber}(p)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = e^{t\cdot 1}P(X=1) + e^{t\cdot 0}P(X=0) \\ &= e^t p + 1 - p \end{aligned}$$

2. $X \sim \mathrm{Unif}([n])$.

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{e^{it}}{n} = \frac{e^t\left(1-e^{nt}\right)}{n\left(1-e^t\right)}$$

3. $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$. נבחר $Y_1,\dots,Y_n$ ב״ת, $Y_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ ונגדיר $Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ ולכן $Y \sim \mathrm{Bin}(n,p)$.

$$M_Y(t) = M_{\sum Y_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{Y_i}(t) = \left(e^t p + 1 - p\right)^n$$

ולכן $M_X(t) = M_Y(t) = \left(e^t p + 1 - p\right)^n$ כמקודם.

4. $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(e^t\lambda\right)^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{e^t\lambda} = e^{\lambda\left(e^t-1\right)} \end{aligned}$$

5. $X \sim \mathrm{Geo}(p)$.

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{tk} p (1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} e^t e^{t(k-1)}(1-p)^{k-1} \\ &= pe^t \sum_{k=1}^{\infty}\left(e^t(1-p)\right)^{k-1} \overset{(*)}{=} pe^t \cdot \frac{1}{1-e^t(1-p)} \end{aligned}$$

$(*)$ מתקיים רק אם $e^t(1-p) < 1$ כלומר $e^t < \frac{1}{1-p}$ כלומר $t < -\log(1-p)$. $1-p < 1$ ולכן $\log(1-p) < 0$ ולכן $-\log(1-p) > 0$ ולכן קיימים t לא״ש צ׳רנוף שהם חיוביים כנדרש.

בהינתן מ"מ ב"ת (לא בהכרח ש"ה) $X_1,\dots,X_n$ כך ש-$E[X_i]=0$, $|X_i|\le 1$ כמעט תמיד. נרצה לחסום את $P\left(\sum X_i\ge a\right)$.

משפט (הלמה של הופדינג) אם X מ"מ המקיים $|X|\le 1$ כמעט תמיד וכן $E[X]=0$ אז לכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים $M_X(t)\le e^{\frac{t^2}{2}}$.

הוכחה: ראשית נוכיח כי $M_X(t)\le\frac{e^t+e^{-t}}{2}$. יהי t.

עבור $f(x)=e^{tx}$, $f'(x)=xe^{tx}$, $f''=\left(x^2+1\right)e^{tx}\ge 0$ ולכן f קמורה. נגדיר את $g(x)$ להיות הישר המחבר בין הנקודות $(1,f(1)),(-1,f(-1))$ כלומר בין הנקודות $(1,e^t),(-1,e^{-t})$. f קמורה ולכן לכל $-1\le x\le 1$, $f(x)\le g(x)$. כלומר $f(X)\le g(X)$ כמעט תמיד. ממונוטוניות התוחלת, $E[f(x)]\le E[g(x)]$. נסמן $g(x)=ax+b$ כאשר $a=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$ (סתם חשבון) וגם $b=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$.

$$E[g(X)]=E[aX+b]=a\underbrace{E[X]}_{0}+b=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

עתה נוכיח כי $\frac{e^t+e^{-t}}{2}\le e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}\frac{e^t+e^{-t}}{2}&=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-t)^k}{k!}\right)\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k+(-t)^k}{2k!}=\sum_{k\ \text{זוגי}}\frac{2t^k}{2k!}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l}}{(2l)!}\overset{(*)}{\le}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{2l}}{2^l l!}\\&=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t^2}{2}\right)^l}{l!}=e^{\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

$(*)$ $(2l)!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2l\ge 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2l=2^l(1\cdot 2\cdot\ldots\cdot l)=2^l l!$. ■

משפט (אי שוויון הופדינג) יהיו $X_1,\dots,X_n$ מ"מ ב"ת כך ש-$|X_i|\le 1$, $E[X_i]=0$. אזי $\forall a>0$ מתקיים

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\ge a\right)\le e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

הוכחה: נגדיר $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ ולכן

$$M_X(t)=M_{\sum_{i=1}^{n}X_i}(t)\overset{\text{ב"ת}}{=}\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)\le e^{\frac{nt^2}{2}}$$

מא"ש צ'רנוף לכל $t>0$ מתקיים $P\left(X\geq a\right)\leq M_{X}\left(t\right)e^{-ta}\leq e^{\frac{nt^{2}}{2}-ta}$. נחפש t שממזער את החסם הזה.

$$\left(\frac{nt^{2}}{2}-ta\right)'=nt-a=0$$

ולכן $t=\frac{a}{n}>0$. נציב חזרה:

$$P\left(X\geq a\right)\leq e^{n\cdot\frac{a^{2}}{2n^{2}}-\frac{a^{2}}{n}}=e^{-\frac{a^{2}}{2n}}$$

■

דוגמה מטילים 10^{6} מטבעות הוגנים ורוצים לחסום את ההסת' לכך שהתקבלו בין $495,000$ ל-$505,000$ עצים (צ'בישב קיבלנו 0.99).

נגדיר $X_{i}\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$, $i\in\left[10^{6}\right]$. $X=\sum_{i=1}^{10^{6}}X_{i}$, $X\sim\text{Bin}\left(10^{6},\frac{1}{2}\right)$.

נגדיר $\forall i\in\left[10^{6}\right]$, $Y_{i}=2X_{i}-1$. $Y_{i}\sim\text{Unif}\left(\{-1,1\}\right)$, $E\left[Y_{i}\right]=0$.

$$\begin{aligned}P\left(X-\frac{1}{2}10^{6}\geq5,000\right) & =P\left(\sum_{i=1}^{10^{6}}\left(X_{i}-\frac{1}{2}\right)\geq5,000\right)\\
 & =P\left(\sum_{i=1}^{10^{6}}\left(2X_{i}-1\right)\geq10,000\right)\\
 & =P\left(\sum_{i=1}^{10^{6}}Y_{i}\geq10,000\right)\\
 & \overset{\text{הופדינג}}{\leq}e^{-\frac{10,000^{2}}{2\cdot10^{6}}}=e^{-50}<<0.01
\end{aligned}$$

מהפעלה נוספת של הופדינג על $-Y_{i}$, נקבל $P\left(\left|X-500,000\right|>5,000\right)\leq2e^{-50}$ שזה הרבה יותר טוב מצ'בישב.

נרצה לצאת ממגבלות ההסת' הבדידה ולחשב הסת' גם על קבוצות יותר רחבות - לדוגמה פ' הסת' אחידה על $[0,1]$. ברור שאי אפשר לעשות זאת עם המודל הנוכחי של פ' הסת' בדידה כי נקבל שההסת' היא ∞. עם מ"ה הסת' כללי גם אי אפשר, כי עם האקסיומות הנתונות לנו אין פ' הסתברות P כך ש-$\left(\left[0,1\right],2^{\left[0,1\right]},P\right)$ הוא מ"ה. לכן או שנשנה את ההגדרה או שנשנה את האקסיומות. לכן נשנה את ההגדרה וניגע במה שעד כה לא נגענו - $\mathcal{F}$.

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי Ω מרחב מדגם. קבוצה $F\subseteq2^{\Omega}$ תקרא <u>σ-אלגברה</u> אם:

1. $\varnothing\in\mathcal{F}$.
2. סגירות לאיחוד בן מניה של קבוצות, כלומר אם $\left\{ A_{i}\right\} _{i\in\mathbb{N}}\subseteq\mathcal{F}$ אז $\bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}}A_{i}\in\mathcal{F}$.

3. סגירות למשלים, כלומר אם $A \in \mathcal{F}$ אז גם $A^C \in \mathcal{F}$.

כל $A \in \mathcal{F}$ נקרא מאורע מדיד.

הערה σ-אלגברה היא הכללה שמגדירה את המינימום הנדרש כדי שנוכל (באמצעות חוקי דה-מורגן) להפעיל את כל הפעולות המוכרות לנו (איחוד, חיתוך, משלים, חיסור וכו').

הערה $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ היא σ-אלגברה.

הגדרה תהי $\mathcal{F}$ σ-אלגברה על מרחב המדגם Ω ותהי $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$ פ' הסת'. אזי השלשה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ נקראת מרחב הסתברות.

הערה פשוט הרחבנו את ההגדרה המקורית שלנו למ"ה.

משפט קיים מ"ה לא בדידה.

הגדרה σ-אלגברה בורל (על $\mathbb{R}$) המסומנת $\mathcal{F} = B(\mathbb{R})$ היא ה-σ אלגברה המינימלית המכילה את כל הקטעים מהצורה $[a,b]$ (כלומר אם $\mathcal{F}$ σ-אלגברה כלשהי שמכילה את כל הקטעים $[a,b]$ אז $B(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}$).

הערה גם $(a,b) \in B(\mathbb{R})$ כי זה החיתוך של $[a,b]$ עם המשלים של $[a,a]$ ו-$[b,b]$.

הגדרה לכל קטע $I \subseteq \mathbb{R}$, σ-אלגברה בורל על I היא $B(I) = \{A \cap I : A \in B(\mathbb{R})\}$.

טענה קיימת פ' הסת' על $B([0,1])$ כך שלכל $0 \le a < b \le 1$ מתקיים $P([a,b]) = b - a$ והיא נקראת מידת לבג.

הערה באופן מפורט, $\forall A \in B([0,1])$, $P(A) = \int\limits_0^1 \mathbb{1}_A \, \mathrm{dx}$.

הגדרה משתנה מקרי $X : \Omega \to \mathbb{R}$ הוא פ' המקיימת שלכל $a < b$, $X^{-1}([a,b]) \in \mathcal{F}$ (במילים אחרות - יש תשובה לשאלה מה ההסת' ש-$a \le X(\omega) \le b$).

הערה מההגדרה נובע לכל $A \in B(\mathbb{R})$, $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$.

דוגמה (לאי קיום ההגדרה) $S \subseteq \Omega$ כך ש-$S \notin \mathcal{F}$, נגדיר $X = \mathbb{1}_S$ אז $S = X^{-1}([1,1]) \notin \mathcal{F}$ ולכן X אינו מ"מ.

דוגמה $\mathcal{F} = \{\varnothing, \Omega\}$, $\Omega = \{0,1\}$, $X = \mathrm{id}$. $X^{-1}(\{1\}) = \{1\} \notin \mathcal{F}$ ולכן X שוב אינו מ"מ.

הגדרה אם X מ"מ על מ"ה $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, ההתפלגות של X היא הפ' $P_X : B(\mathbb{R}) \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right)$, $\forall A \in B(\mathbb{R})$ ונסמן $X \sim P_X$.

הגדרה יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. הפ' $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ המוגדרת לכל $t \in \mathbb{R}$ ע"י $F_X(t) = P(X \le t) = P((-\infty, t])$ נקראת פונקציית ההתפלגות המצטברת. $\overline{F}_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $\overline{F}_X(t) = P(X > t)$ נקראת פונקציית ההתפלגות השיורית.

דוגמאות לפ' התפלגות מצטברת

1. $X = a$ כמעט תמיד. $F_X(t) = P(X \le t) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t \ge a \end{cases}$.

2. $X \sim \text{Ber}(p)$. $F_X(t) = P(X \le t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-p & 0 \le t < 1 \\ 1 & t \ge 1 \end{cases}$. נשים לב כי גובה הקפיצה בכל פעם הוא בדיוק ההסת' באותה הנקודה.

טענה יהיו X מ"מ, $a \in \mathbb{R}$, $P(X=a) = F_X(a) - \lim\limits_{t \to a^-} F_X(t)$ (הגבול קיים כי היא עולה וחסומה).

טענה אם X, Y מ"מ כך ש-$F_X = F_Y$ אז $X \overset{d}{=} Y$.

הגדרה יהי X מ"מ על $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

נאמר כי ל-X <u>התפלגות בדידה</u> אם קיימת A בת מניה כך ש- $P(X \in A) = 1$.

נאמר כי ל-X <u>התפלגות רציפה</u> אם לכל $a \in \mathbb{R}$, $P(X=a) = 0$.

דוגמה X לא חייב להיות לא רציף ולא בדיד. עבור המ"ה על $[0,1]$ עם מידת לבג, $X(t) = \begin{cases} t & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 7 & t = \frac{1}{2} \end{cases}$, $P(X=7) = \frac{1}{2}$ ולכן הוא לא מתפלג רציף ו-$P\left(X \le \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$ ולכן X לא מתפלג בדיד.

הגדרה יהי X מ"מ. נאמר כי X <u>רציף בהחלט</u> אם קיימת פ' אינטגרבילית $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ כך שלכל $a < b \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) \, \mathrm{dx}$$

f נקראת <u>הצפיפות של X</u> והיא מסומנת ב-f_X.

הערה פ' הצפיפות, אם קיימת, לא יחידה (אפשר לשנות מספר בן מניה של נקודות) ולכן גם לא חייבת לקבל ערכים ב-$\mathbb{R}_+$.

הערה נשים לב כי $F_X(t) = P(X \le t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x) \, \mathrm{dx}$ ובדומה $\overline{F}_X(t) = P(X > t) = \int\limits_{t}^{\infty} f(x) \, \mathrm{dx}$.

הערה $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, \mathrm{dx} = 1$.

דוגמה נניח ש-X מ"מ עם צפיפות $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \, \mathrm{dx} = \int_{-1}^{1} \frac{1+x}{2} \, \mathrm{dx} = \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1$$

נחשב $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right)$.

$$P\left(X \ge \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{1+x}{2} \, \mathrm{dx} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1+x}{2} \, \mathrm{dx} = \ldots = \frac{7}{16}$$

הערה אם X מ"מ רציף בהחלט, כלומר $F_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} f(x)\ \mathrm{dx}$, אזי $F_X(t)$ רציפה (מהמשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי) ו-$\forall a \in \mathbb{R}$, $P(X=a)=0$, כלומר X רציף.

תרגול

דוגמה ראינו שעבור $X \sim \mathrm{Geo}(p)$, $M_X(t) = \frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$. הפ' יוצרת המומנטים מוגדרת לכל $t < \ln \frac{1}{1-p}$.

דוגמה X בינומי שלילי עם פרמטרים (r,p) (מטילים מטבע p-הוגן עד שמקבלים r כשלונות). נגדיר $X_j \sim \mathrm{Geo}(p)$ ולכן $X = \sum\limits_{j=1}^{r} X_j$ ומטענה שראינו בהרצאה, $M_X(t) = M_{\sum\limits_{j=1}^{r} X_j}(t) = \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}\right)^r$.

דוגמה $X \sim \mathrm{Unif}([n])$.

$$M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \sum_{k=1}^{n} e^{tk} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} e^{tk}\frac{1}{n} = \frac{e^t\left(e^{nt}-1\right)}{n\left(e^t-1\right)}$$

דוגמה S סכום שתי הטלות קוביה. $M_S(t) = M_{X_1+X_2}(t) = \left(\frac{e^t\left(e^{6t}-1\right)}{6\left(e^t-1\right)}\right)^2$.

דוגמה X בינומי שלילי $\left(r, p=\frac{1}{2}\right)$. נחסום את $P(X \geq 2E[X])$. מצ'רנוף,

$$\begin{aligned} P(X \geq 2E[X]) &\leq \left(\frac{pe^t}{1-(1-p)e^2}\right)^2 e^{-t\cdot 2E[X]} \\ &= e^{r\left(\ln\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)+t-t\cdot\frac{2}{p}\right)} \\ &\overset{p=\frac{1}{2}}{=} e^{r\left(\ln\left(\frac{1}{2e^t}-3t\right)\right)} \\ &\overset{t=\ln\frac{3}{2}\text{ מינימלי}}{=} \left(\frac{16}{27}\right)^r \end{aligned}$$

שזה חסם אקספוננציאלי. מצ'בישב נקבל $P(X \geq 2E[X]) \leq \frac{\mathrm{var}(X)}{4E[X]^2} = \frac{1}{8r}$ שזה חסם לינארי, כלומר הרבה פחות טוב.

דוגמה יהיו $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ ב"ת ונניח שקיים $M>0$ כך ש-$|X_j - E[X_j]| \leq M$, $\forall j$. נגדיר $Y_j = \frac{X_j - E[X_j]}{M}$. $\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ הם ב"ת ומקיימים $E[Y_j]=0$ וגם $|Y_j| \leq 1$. לכן עבור $a > \sum\limits_{j=1}^{n} E[X_j]$, מהופדינג,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \geq a\right) &= P\left(\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - E[X_j]\right) \geq a - \sum E[X_j]\right) \\ &= P\left(\sum_{j=1}^{n} Y_j \geq \underbrace{\frac{a-\sum\limits_{i=1}^{n} E[X_i]}{M}}_{t \text{ נסמן}}\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2n}} \end{aligned}$$

דוגמה מטילים מטבע הוגן n פעמים (n אי זוגי). X מספר הפעמים שיצאו שני עצים ברצף. חסמו את $P\left(X\le\frac{n-1}{4}-\alpha\right)$ (כפונקציה של $\alpha>0$) בעזרת הופדינג.

נגדיר $X_j\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{4}\right)$ ההטלה ה-j ו-$j+1$ הן עץ. יש לנו שלוש בעיות: האי-שוויון בכיוון הלא נכון, התוחלות לא 0 והם לא ב"ת.

נגדיר $Z_j=\frac{1}{4}-X_j$. נשים לב כי $|Z_j|\le1$ כמעט תמיד כי $Z_j\in\left\{-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right\}$. $Z_2,Z_4,\ldots,Z_{n-1}$ ב"ת וגם $Z_1,Z_3,\ldots,Z_n$ ב"ת.

נגדיר $S_1=\sum\limits_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}Z_{2j-1},S_2=\sum\limits_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}Z_{2j}$ (סכום האי זוגיים וסכום הזוגיים).

$$S=S_1+S_2=\sum_{j=1}^{n-1}Z_j=\sum_{j=1}^{n-1}\left(\frac{1}{4}-X_j\right)=\frac{n-1}{4}-X$$

ולכן $S\ge\alpha$ אם"ם $X\le\frac{n-1}{4}-\alpha$.

$$\begin{aligned}P\left(X\le\frac{n-1}{4}-\alpha\right)&=P\left(S\ge\alpha\right)\\&\le P\left(S_1\ge\frac{\alpha}{2}\vee S_2\ge\frac{\alpha}{2}\right)\\&\le P\left(S_1\ge\frac{\alpha}{2}\right)+P\left(S_2\ge\frac{\alpha}{2}\right)\\&\overset{\text{הופדינג}}{\le}2e^{-\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{2\left(\frac{n-1}{2}\right)}}=2e^{-\frac{\alpha^2}{4(n-1)}}\end{aligned}$$

שזה חסם די טוב (שמתאפס מאוד מהר).

סקרנו מחדש את כל אינפי 2, מי שלא זוכרת שתזכיר לעצמה.

דוגמה פ' גאממא מוגדרת ע"י $\Gamma\left(r\right)=\int\limits_0^\infty t^{r-1}e^{-t}\text{ dt}$ עבור $r>0$.

$$\Gamma\left(1\right)=\int\limits_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\text{ dt}=\int\limits_0^\infty e^{-t}\text{ dt}=1$$

נוכיח כי $\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!$ באינדוקציה. את הבסיס בר עשינו.

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+1\right)&=\int\limits_0^\infty\underbrace{t^n}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v'}\text{ dt}\\&\overset{\text{חלקים}}{=}\left(\underbrace{t^n}_{u}\underbrace{e^{-t}}_{v}\right)\Big|_0^\infty-\int\limits_0^\infty\underbrace{nt^{n-1}}_{u'}\cdot\underbrace{\left(-e^{-t}\right)}_{v}\text{ dt}\\&=0-0+n\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-t}\text{ dt}\\&=n\Gamma\left(n\right)\end{aligned}$$

הגדרה יהי X מ"מ על מ"ה (לא בהכרח בדיד). נאמר כי X רציף אם קיימת $p_X:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ כך שלכל $-\infty\le a\le b\le\infty$ מתקיים $P\left(a\le X\le b\right)=\int\limits_a^b p_X\left(t\right)\ \mathrm{dt}$. p_X נקראת הצפיפות של X.

הערה זו גרסה מוחלשת של רציפות בהחלט.

תכונות של מ"מ רציף

1. $P\left(X=a\right)=\int\limits_a^a P_X\left(t\right)\ \mathrm{dt}=0$.
2. $P\left(a<X\le b\right)=P\left(a\le X<b\right)=P\left(a<X<b\right)=\int\limits_a^b p_X\left(t\right)\ \mathrm{dt}$.
3. $P\left(-\infty\le X\le\infty\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X\left(t\right)\ \mathrm{dt}=1$.
4. אם $F\left(t\right)=P\left(X\le t\right)$ אז $F'\left(t\right)=p_X\left(t\right)$.

דוגמה יהי X עם צפיפות $p_X\left(t\right)=\begin{cases}2C\left(2x-x^2\right) & t\in[0,2]\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$. מנורמליות p_X,

$$\begin{aligned}1&=\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_X\left(t\right)\ \mathrm{dt}=\int\limits_0^2 2C\left(2x-x^2\right)\ \mathrm{dx}\\&=2C\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2C\left(4-\frac{8}{3}\right)\end{aligned}$$

ולכן $1=C\frac{8}{3}$, כלומר $C=\frac{3}{8}$. ההתפלגות המצטברת של X היא

$$P\left(X\le t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ \int\limits_0^1 \frac{3}{4}\left(2x-x^2\right)\ \mathrm{dx} & 0\le t\le 2\\ 1 & t>2\end{cases}$$

(המקרה האחרון הוא בגלל ש-$X\le 2$ כמעט תמיד).

שבוע $\mathbb{XIII}$ | הכל על מ"מ רציפים והתפלגות משותפת

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

תכונות של פ' ההסת' המצטברת

1. $\lim\limits_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$.
2. $\lim\limits_{t\to\infty} F_X(t) = 1$.
3. F מונוטונית עולה חלש.

הערה X מ"מ בדיד אם ל-X תומך בן מנייה.

X מ"מ רציף אם לכל a, $P(X=a)=0$ ("ראינו" שזה אם"ם F_X רציפה).

הערה במידת לבג, $P([a,b]) = \int\limits_a^b 1 = b-a$. כלומר במקום פ' הסת' נקודתית, נוכל לשאול מה ההסת' ליחידת אורך.

הערה אם X מ"מ רציף בהחלט, כלומר קיימת לו פ' צפיפות אינטגרבילית, אז $P(X\in A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_A f_X(x)\ \mathrm{dx}$.

בנוסף F_X רציפה ומונוטונית עולה ממש (רציף בהחלט הוא גם רציף). אם F_X גזירה ב-a אז $F_X'(a) = f_X(a)$. מתקיים גם $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{dx} = 1$.

דוגמה עבור $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{2} & x\in[-1,1] \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$, נקבל פ' הסת' שהיא משולש שמתחיל ב-$(-1,0)$ ומסתיים ב-$(1,1)$ (עם ציר X כצלע). שם $P(X\in[-1,0]) < P(X\in[0,1])$ אפע"פ שאורכי הקטעים שווים, כי זו לא מידת לבג.

$$F_X(t) = P(X\le t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\ \mathrm{dx} = \begin{cases} 0 & t<-1 \\ (*) & t\in[-1,1] \\ 1 & t>1 \end{cases}$$

$(*)$ עבור $t\in[-1,1]$,

$$F_X(t) = \int\limits_{-1}^{t} \frac{1+x}{2}\ \mathrm{dx} = \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{-1}^{t} = \frac{t}{2}+\frac{t^2}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$$

הערה אם X רציף בהחלט, אז ההסת' להימצא בסביבת ϵ של x_1 הוא בערך $2\epsilon f_X\left(x_1\right)$.

אם X מ"מ רציף בהחלט, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, האם $g\left(X\right)$ רציף בהחלט? כן! מ-f_X ניתן להגיע ל-F_X ומשם לחשב את F_Y ובכל נקודה גזירה לחשב את f_Y.

דוגמה $Y=5X$ בדוגמה הקודמת.

$$F_Y\left(t\right)=P\left(Y\le t\right)=P\left(X\le\frac{t}{5}\right)=\begin{cases}0 & \frac{t}{5}<-1\\ \frac{t}{10}+\frac{t^2}{100}+\frac{1}{4} & -1\le\frac{t}{5}\le1\\ 1 & \frac{t}{5}>1\end{cases}=\begin{cases}0 & t<-5\\ \frac{t}{10}+\frac{t^2}{100}+\frac{1}{4} & t\in\left[-5,5\right]\\ 1 & t>5\end{cases}$$

לכן $f_Y\left(t\right)=\left(F_Y\left(t\right)\right)'=\begin{cases}0 & t<-5\\ \frac{1}{10}+\frac{t}{50} & t\in\left[-5,5\right]\\ 0 & t>5\end{cases}$. כלומר מתקיים $f_Y\left(t\right)=\frac{1}{5}f_X\left(\frac{t}{5}\right)$.

עבור $Y=X^2$,

$$F_Y\left(t\right)=P\left(Y\le t\right)=P\left(X^2\le t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sqrt{t} & 0\le t\le1\\ 1 & t>1\end{cases}$$

כי

$$\begin{aligned}P\left(-\sqrt{t}\le X\le\sqrt{t}\right)&=\int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}}f_X\left(x\right)\,\mathrm{dx}=F_X\left(\sqrt{t}\right)-F_X\left(-\sqrt{t}\right)\\&=\frac{\sqrt{t}}{2}+\frac{t}{4}+\frac{1}{4}-\left(\frac{-\sqrt{t}}{2}+\frac{t}{4}+\frac{1}{4}\right)=\sqrt{t}\end{aligned}$$

לכן $f_Y\left(t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{2\sqrt{t}} & t\in\left[0,1\right]\\ 0 & t>1\end{cases}$.

טענה יהי X מ"מ בעל צפיפות ותהי f_X $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית חזק וגזירה. אזי $Y=g\left(X\right)$ הוא מ"מ בעל צפיפות ולכל $y\in\mathbb{R}$, עם $x=g^{-1}\left(y\right)$ מתקיים $f_Y\left(y\right)=\frac{f_X\left(x\right)}{\left|g'\left(x\right)\right|}$.

הוכחה: נניח בה"כ כי g עולה חזק.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left(g(X) \le g\left(g^{-1}(y)\right)\right)$$
$$\overset{\text{עולה חזק}}{=} P\left(X \le g^{-1}(y)\right) = F_X\left(g^{-1}(y)\right)$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \left(F_X\left(g^{-1}(y)\right)\right)' \overset{\text{כלל השרשרת}}{=} f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \left(g^{-1}(y)\right)' = f_X\left(g^{-1}(y)\right) \cdot \frac{1}{g'\left(g^{-1}(y)\right)} = \frac{f_X(x)}{g'(X)}$$

הערך המוחלט מגיע כש-g' שלילית (g יורדת). ■

הגדרה יהיו X, Y מ"מ על אותו מ"ה. <u>פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת</u> של X, Y היא $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ המוגדרת ע"י $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $F_{X,Y}(a,b) = P(X \le a, Y \le b)$.

הערה פ' ההתפלגות המצטברת מחשבת את ההסת' להיות משמאל ל-a ומתחת ל-b במישור.

הגדרה יהיו X, Y מ"מ מעל $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. נאמר כי יש להם <u>צפיפות משותפת</u> אם קיימת $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ המקיימת כי לכל $a, b \in \mathbb{R}$,

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X \le a, Y \le b) = \int\limits_{-\infty}^{a} \int\limits_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y) \text{ dy dx}$$

הערות על צפיפות משותפת

1. נובע מההגדרה כי $P(a \le X \le b, c \le Y \le d) = \int\limits_a^b \int\limits_c^d f_{X,Y} \text{ dy dx}$, לכל $a < b, c < d$. באופן כללי,

$$P((X,Y) \in A) = \iint\limits_A f_{X,Y} \mathbb{1}_A \text{ dy dx}$$

לכל מאורע $A \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}^2}$.

2. $\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f_{XY} \text{ dy dx} = 1$.

3. $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY} = f_{XY}$.

דוגמה $f_{XY}(x,y) = \begin{cases} x+y & (x,y) \in [0,1]^2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ כלומר מדרון מ-$(0,0)$ ל-$(1,1)$ סימטרי על $(y,x), (x,y)$.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y) \text{ dy dx} = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (x+y) \text{ dy dx} = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 \text{ dx} = \int\limits_0^1 x + \frac{1}{2} \text{ dx} = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

נחשב את הסת' המאורע $A = \{X + Y \leq 1\}$.

$$\begin{aligned}
P\left((X,Y) \in A\right) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{1-x} f_{XY} \text{ dy dx} \\
&= \int\limits_{0}^{1} \int\limits_{0}^{1-x} x + y \text{ dy dx} \\
&= \int\limits_{0}^{1} \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{0}^{1-x} \text{ dx} \\
&= \int\limits_{0}^{1} x\left(1-x\right) + \frac{\left(1-x\right)^2}{2} \text{ dx} \\
&= \cdots = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

משפט יהי X מ"מ רציף בהחלט עם פ' צפיפות f_X. תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ (איחוד בן מניה של קטעים זרים) כך ש-$P\left(X \in A\right) > 0$ אז מתקיים שפ' הצפיפות של $X \mid X \in A = X \mid B$ ($B = \{X \in A\}$) נתונה ע"י

$$f_{X|X\in A}\left(a\right) = \frac{\mathbb{1}_A f_X\left(a\right)}{P\left(X \in A\right)}$$

חלק ב' של ההרצאה

הערה במסגרת הקורס הזה, רציפות ורציפות בהחלט של מ"מ שקולות.

הגדרה יהי X מ"מ רציף בהחלט עם צפיפות f_X. התוחלת של X היא $E\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s f_X\left(s\right) \text{ ds}$. התוחלת מוגדרת רק אם האינטגרל מתכנס בהחלט.

דוגמה $X \sim \text{Unif}\left(\left[0,1\right]\right)$.

$$E\left[X\right] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} s f_X\left(s\right) \text{ ds} = \int\limits_{0}^{1} s \cdot 1 \text{ ds} = \frac{s^2}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}$$

ניזכר שעבור מ"מ בדיד הנתמך על $\mathbb{N}$, $E\left[X\right] = \sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq n\right)$. נחפש נוסחה דומה עבור מ"מ רציף.

אם X נתמך על $\mathbb{Z}$, נרצה להכפיל את $P\left(X = -1\right)$ ב-$\left(-1\right)$ ולכן נקבל בסכום את $-P\left(X \leq -1\right)$ וכך גם על השאר, כלומר,

$$E\left[X\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left(X \geq n\right) - \sum_{n=-1}^{-\infty} P\left(X \leq n\right)$$

טענה לכל מ"מ רציף בהחלט,

$$E[X]=\int\limits_0^\infty \overline{F}_X(x)\ \mathrm{dx}-\int\limits_{-\infty}^0 F_X(x)\ \mathrm{dx}$$

הערה זה נכון גם עבור מ"מ לא רציפים בהחלט, אך לא נוכל להוכיח זאת בכלים הנתונים לנו בקורס.

טענה יהיו X מ"מ עם צפיפות f_X, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונגדיר $Y=g(X)$ אזי $E[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(s)f_X(s)\ \mathrm{ds}$.

הוכחה: (מקרה פרטי ש-g מונוטונית ממש)

$$E[Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\ \mathrm{dy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} y\frac{f_X\left(g^{-1}(y)\right)}{g'\left(g^{-1}(y)\right)}\ \mathrm{dy}\overset{y=g(x)}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\frac{f_X(x)}{g'(x)}g'(x)\ \mathrm{dx}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)\ \mathrm{dx}$$

■

דוגמה $X\sim \mathrm{Unif}([0,1])$. $Y=X^k$ ($k\in\mathbb{N}$).

$$E\left[X^k\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty} s^kf_X(s)\ \mathrm{ds}=\int_0^1 s^k\ \mathrm{ds}=\frac{1}{k+1}$$

נחשב עתה ללא הנוסחה.

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P\left(X^k\le t\right)=\begin{cases}0 & t<0\\ P\left(X\le t^{\frac{1}{k}}\right)=t^{\frac{1}{k}} & 0\le t\le 1\\ 1 & t>1\end{cases}$$

ולכן $f_Y(t)=F_Y'(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{k}t^{\frac{1}{k}-1} & 0\le t\le 1\\ 0 & t>1\end{cases}$. עבור $k=2$ לדוגמה, $Y=X^2$ נקבל $E[Y]=\frac{1}{3}$.

טענה X,Y מ"מ רציפים בהחלט בעלי תוחלת אז:

1. אם $X\ge 0$ אז $E[X]\ge 0$.
2. $E[aX+bY]=aE[X]+bE[Y]$
3. אם $Y\ge X$ כמעט תמיד אז $E[X]\ge E[Y]$.

הגדרה עבור X מ"מ רציף בהחלט בעל תוחלת, השונות של X מוגדרת ע"י $\operatorname{var}(X)=E\left[(X-E[X])^2\right]=E\left[X^2\right]-E[X]^2$.

הערה עכשיו שהגדרנו את השונות במ"מ רציפים, שמקיימת את אותן התכונות כמו במקרה הבדיד, נקבל מיד את א"ש מרקוב, צ'בישב, צ'רנוף והופדינג.

דוגמה נחזור לדוגמה הקודמת, $X\sim\operatorname{Unif}([0,1])$.

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\int_{-\infty}^{\infty}e^{ts}f_X(s)\ \mathrm{ds}=\int_0^1 se^{ts}\ \mathrm{ds}=\left.\frac{e^{ts}}{t}\right|_0^1=\frac{e^t-1}{t}$$

הגדרה בהינתן $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, נאמר כי $X\sim\operatorname{Unif}([a,b])$ אם צפיפותו היא $f_X(t)=\begin{cases}\frac{1}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

באופן כללי, $\forall A\in B(\mathbb{R})$, נאמר כי $X\sim\operatorname{Unif}(A)$ אם $f_X(t)=\frac{\mathbb{1}_A}{\int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_A\ \mathrm{ds}}$

דוגמה עבור $X\sim\operatorname{Unif}([a,b])$,

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}sf_X(s)\ \mathrm{ds}=\int_a^b s\frac{1}{b-a}\ \mathrm{ds}=\frac{1}{b-a}\left.\frac{s^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2}\cdot\frac{1}{b-a}=\frac{b+a}{2}$$

$E\left[X^2\right]=\ldots=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$ ולכן $\operatorname{var}(X)=\ldots=\frac{(b-a)^2}{12}$ (ממש דומה להתפלגות אחידה בדידה).

טענה יהי $X\sim\operatorname{Unif}([a,b])$ אז עבור $Y=\alpha X+\beta$, אזי $Y\sim\operatorname{Unif}([\alpha a+\beta,\alpha b+\beta])$.

דוגמאות אקטואליות

1. זווית הנפילה מתפלגת אחיד על $[0,2\pi]$.
2. בבחירת אדם מקרי, אחוז האנשים הגבוהים ממנו מתפלג אחיד על $[0,1]$ כי ללא תלות בפיזור הגבהים באוכלוסיה, ההסת' להימצא באחוזון השלישי שווה להסת' להיות באחוזון ה-79 וכו'.

הגדרה יהי X עם פ' התפלגות F_X. נגדיר $Q_X:[0,1]\to\mathbb{R}$ ע"י $Q_X(t)=\inf F_X^{-1}([t,\infty))$ (אם F עולה חזק אז $Q_X(t)=F_X^{-1}(t)$). Q_X נקרא האחוזון של X.

הערה החציון הוא $Q_X\left(\frac{1}{2}\right)$.

טענה (תוחלת של פ' של מ"מ X,Y) אם ל-X,Y צפיפות משותפת f_{XY}, $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אז

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)\,f_{XY}(x,y)\ \mathrm{dx\ dy}$$

הגדרה X,Y יקראו בלתי תלויים אם לכל $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $P\left(X\in A,Y\in B\right)=P\left(X\in A\right)P\left(Y\in B\right)$.

טענה אם X,Y רציפים בהחלט אז X,Y ב"ת אם לכל $s,t\in\mathbb{R}$, $f_{XY}\left(s,t\right)=f_X\left(s\right)f_Y\left(t\right)$.

טענה X,Y ב"ת אם"ם לכל $a<b,c<d\in\mathbb{R}$,

$$P\left(X\in\left[a,b\right],Y\in\left[c,d\right]\right)=P\left(X\in\left[a,b\right]\right)P\left(Y\in\left[c,d\right]\right)$$

תרגול

דוגמה אוטובוס מגיע לתחנה כל רבע שעה עגולה. אדם מגיע לתחנה בזמן בין $7:00$ ו-$7:30$ (מתפלג אחיד). מה ההסת' שיחכה לאוטובוס יותר מחמש דקות?

אם הוא מחכה פחות מחמש דקות, הוא יכול להגיע ב-$7:00$, בין $7:10$ ו-$7:15$ ובין $7:25$ ו-$7:30$.

$$P\left(X\in\left[7\frac{1}{6},7\frac{1}{4}\right]\right)=\int\limits_{7\frac{1}{6}}^{7\frac{1}{4}}\frac{1}{7\frac{1}{2}-7}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{6}$$

וגם $P\left(X\in\left[7\frac{25}{60},7\frac{1}{2}\right]\right)=\frac{1}{6}$ (באותו האורך על מתפלג אחיד) ואילו ההסת' ל-$7:00$ היא אפס לכן סה"כ נקבל הסת' שליש.

הגדרה X מתפלג קושי עם פרמטרים $(0,1)$ אם $f_X\left(t\right)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{t^2+1}$.

הערה זו אכן פ' התפלגות כי $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{dt}=\frac{1}{\pi}\arctan t|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=1$.

דוגמה X מ"מ עם צפיפות $f_X\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{4\sqrt{|t|}} & t\in(-1,1)\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. נמצא את F_X.

עבור $t\leq-1$ ברור ש-$F_X\left(t\right)=0$. עבור $-1<t<0$,

$$F_X\left(t\right)=\int\limits_{-1}^{t}\frac{1}{4\sqrt{-s}}\,\mathrm{ds}=\int\limits_{-t}^{1}\frac{1}{4\sqrt{s}}\,\mathrm{ds}=\frac{1}{2}\left.\sqrt{s}\right|_{-t}^{1}=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{-t}\right)$$

עבור $0<t<1$,

$$F_X\left(t\right)=\int\limits_{-1}^{t}\frac{1}{4\sqrt{|s|}}\,\mathrm{ds}=\frac{1}{2}+\int\limits_{0}^{t}\frac{1}{4\sqrt{s}}\,\mathrm{ds}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left.\sqrt{s}\right|_{0}^{t}=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{t}\right)$$

ועבור $t\geq1$ מתקיים $F_X\left(t\right)=1$.

דוגמה $X\sim\text{Unif}\left(\left[0,1\right]\right)$, $n\in\mathbb{N}$. מה ההתפלגות של X^{n}?

נסמן $Y=X^{n}$.

$$F_{Y}\left(t\right)=P\left(Y\leq t\right)=P\left(X^{n}\leq t\right)\overset{X\geq0,a.s}{=}P\left(X\leq\sqrt[n]{t}\right)$$

ולכן סה"כ $F_{Y}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq0\\ \sqrt[n]{t} & 0<t<1\\ 1 & t\geq1\end{cases}$. מכאן ניתן להסיק בקלות את f_{Y}.

דוגמה יהי $X_{1}\sim\text{Unif}\left(\left[0,1\right]\right)$, $X_{2}\sim\text{Ber}\left(\frac{1}{3}\right)$ מ"מ ב"ת. נחשב את צפיפותו $Y=X_{1}+X_{2}$. אם $t\in\left[0,1\right)$ אז

$$F_{Y}\left(t\right)=P\left(Y\leq t\right)=P\left(X_{2}=0,X_{1}\leq t\right)=P\left(X_{1}\leq t\right)\frac{2}{3}=\frac{2}{3}F_{X_{1}}\left(t\right)=\frac{2}{3}t$$

אם $t\in\left(1,2\right]$ אז $P\left(1<Y\leq t\right)=P\left(X_{2}=1,X_{1}\leq t-1\right)=\frac{1}{3}\left(t-1\right)$. אם $t=1$ אז

$$F_{Y}\left(1\right)=P\left(X_{2}=0,X_{1}=1\vee X_{2}=1,X_{1}=0\right)=\frac{2}{3}\cdot1+0=\frac{2}{3}$$

(קיבלנו רציפות, שזה הגיוני כי Y רציף בהחלט). לכן סה"כ $F_{Y}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq0\\ \frac{2}{3}t & 0<t<1\\ \frac{t+1}{3} & 1\leq t<2\\ 1 & t\geq2\end{cases}$ ולכן $f_{Y}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq0\\ \frac{2}{3} & 0<t<1\\ \frac{1}{3} & 1\leq t<2\\ 0 & t\geq2\end{cases}$.

עבור $Z=Y^{3}$, נחשב את צפיפותו.

$$F_{Z}\left(t\right)=P\left(Z\leq t\right)=P\left(Y^{3}\leq t\right)=P\left(Y\leq t^{\frac{1}{3}}\right)=F_{Y}\left(t^{\frac{1}{3}}\right)$$

$F_{Y^{3}}\left(t\right)=\begin{cases}0 & t\leq0\\ \frac{2}{3}t^{\frac{1}{3}} & 0<t<1\\ \frac{t^{\frac{1}{3}}+1}{3} & 1\leq t<8\\ 1 & t\geq8\end{cases}$. לחלופין נוכל להשתמש במשפט מההרצאה ונקבל $f_{Z}\left(t\right)=\frac{f_{Y}\left(\sqrt[3]{t}\right)}{\left|3\left(\sqrt[3]{t}\right)^{2}\right|}$.

טענה אם X,Y רציפים בהחלט ובעלי צפיפות שולית אז $f_{X}\left(x\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,y\right)\ \text{dy}$ וגם $f_{Y}\left(y\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(x,y\right)\ \text{dx}$.

הגדרה תהי D קבוצה עם שטח Ψ. נאמר של-$\left(X,Y\right)$ צפיפות משותפת <u>אחידה</u> על D אם מתקיים $f_{XY}\left(x,y\right)=\begin{cases}\frac{1}{\Psi} & \left(x,y\right)\in D\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

דוגמה נניח של-(X,Y) צפיפות אחידה על עיגול היחידה, $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2<1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. נחשב את $P\left(X^2+Y^2\le\frac{1}{2}\right)$

נחשב את צפיפות X.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)\ \mathrm{dy}=\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{\pi}\ \mathrm{dy}=\frac{1}{\pi}2\sqrt{1-x^2}$$

$$P\left(X^2+Y^2\le\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\underbrace{\iint\limits_{\left\{X^2+Y^2\le\frac{1}{2}\right\}}}_{\text{מעגל היחידה עם רדיוס }\frac{1}{\sqrt{2}}}\mathrm{dx\ dy}=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\pi=\frac{1}{2}$$

משפט (פוביני טונלי) יהיו $D\subseteq\mathbb{R}^2$, $f,g,h,\sigma,\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ כך ש-

$$D=\{(x,y):x\in[a,b],g(x)\le y\le h(x)\}=\{(x,y):y\in[c,d],\varphi(y)\le x\le\sigma(y)\}$$

אזי

$$\iint\limits_D f(x,y)\ \mathrm{dx\ dy}=\int_a^b\int_{g(x)}^{h(x)}f(x,y)\ \mathrm{dy\ dx}=\int_c^d\int_{\varphi(y)}^{\sigma(y)}f(x,y)\ \mathrm{dx\ dy}$$

שבוע $\mathbb{XIII}$ | התפלגויות נורמליות ומעריכית והתכנסות בהתפלגות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה נאמר כי X מתפלג <u>מעריכית</u> עם פרמטר $\lambda>0$ ונסמן $X\sim\mathrm{Exp}(\lambda)$ אם צפיפותו היא $f_X(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\ge0\\ 0 & t<0\end{cases}$.

הערה ככל ש-λ גדול יותר, כך נתחיל גבוה יותר אבל גם הדעיכה תהיה גדולה יותר. התפלגות מעריכית מתארת את הזמן שחולף עד להצלחה בתנאי חוסר זיכרון.

תכונות של מ"מ מתפלג מעריכית

- פ' ההתפלגות המצטברת: אם $t<0$ אז $F_X(t)=0$. אם $t\geq 0$ אז

$$F_X(t)=\int_{-\infty}^{t} f_X(s)\ \mathrm{ds}=\int_{0}^{t}\lambda e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}=-e^{-\lambda s}\Big|_0^t=1-e^{-\lambda t}$$

ולכן $\overline{F}_X(t)=P(X>t)=e^{-\lambda t}$. אכן כאשר $t\longrightarrow\infty$ מתקיים $F_X(t)\longrightarrow 1$ כיאה לפ' התפלגות מצטברת.

- תוחלת:

$$\begin{aligned}E[X]&=\int_0^\infty \overline{F}_X(t)\ \mathrm{dt}-\underbrace{\int_{-\infty}^{0}F_X(t)\ \mathrm{dt}}_{0}\\&=\int_0^\infty e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}=\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}\end{aligned}$$

שזה כמו התוחלת של מ"מ גאומטרי שזה הגיוני (מההערה הנ"ל). נחשב מההגדרה:

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty}sf_X(s)\ \mathrm{ds}=\int_0^\infty s\lambda e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}\overset{(*)}{=}-se^{-\lambda s}\Big|_0^\infty+\int_0^\infty e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}=-0+0+\frac{e^{-\lambda s}}{-\lambda}\Big|_0^\infty=\frac{1}{\lambda}$$

$(*)$ אינטגרציה בחלקים, $f'=\lambda e^{-\lambda s}, g=s$.

- שונות:

$$E\left[X^2\right]=\int_0^\infty s^2\lambda e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}\overset{(**)}{=}\left(-s^2e^{-\lambda s}\right)\Big|_0^\infty+2\int_0^\infty se^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}=0+2\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty s\lambda e^{-\lambda s}\ \mathrm{ds}\overset{\text{כבר חישבנו}}{=}2\frac{1}{\lambda^2}$$

$(**)$ אינטגרציה בחלקים, $f'=\lambda e^{-\lambda s}, g=s^2$.

לכן

$$\mathrm{var}(X)=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

- פ' יוצרת מומנטים:

$$M_X(t)=E\left[e^{tX}\right]=\int_0^\infty e^{ts}\lambda e^{-\lambda}\ \mathrm{ds}=\lambda\int_0^\infty e^{s(t-\lambda)}\ \mathrm{ds}$$

אם $\lambda \geq t$ אז האינטגרל מתבדר. אחרת,

$$= \lambda \left. \frac{e^{s(t-\lambda)}}{t-\lambda} \right|_0^\infty = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

טענה (תכונת חוסר הזיכרון של המ"מ המעריכי) אם $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ אז עבור $Y = (X - X_0 \mid X > X_0)$ מתקיים $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ (כאשר $X_0 \geq 0$). כלומר, אם הצלחה לא התרחשה עד זמן X_0, אז הזמן שנותר עד הצלחה, $X - X_0$, מתפלג מעריכית.

הוכחה: נניח כי $t \geq 0$. לכן אם $X - X_0 > t$ אז $X > X_0$

$$\begin{aligned}\overline{F}_Y(t) = P(Y > t) = P(X - X_0 > t \mid X > X_0) &= \frac{P(X - X_0 > t, X > X_0)}{P(X > X_0)} \\ = \frac{P(X > X_0 + t)}{P(X > X_0)} = \frac{\overline{F}_X(X_0 + t)}{\overline{F}_X(X_0)} &= \frac{e^{-\lambda(X_0 + t)}}{e^{-\lambda X_0}} = e^{-\lambda t} = \overline{F}_X(t)\end{aligned}$$

ולכן $Y \overset{d}{=} X$ ולכן $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$. ■

הערה אם $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ אז המ"מ $Y = \lceil X \rceil$ מתפלג גאומטרית $Y \sim \text{Geo}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$.

דוגמה $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ ב"ת. מה ההתפלגות של $Z = \min(X, Y)$?

עבור $t \geq 0$, $f_X(s) = e^{-s}$ וכן $f_Y(t) = e^{-t}$ ולכן $f_{XY}(s,t) = \begin{cases} e^{-s-t} & s,t \geq 0 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$ (אפשר להכפיל כי הם ב"ת).

$$\begin{aligned}F_Z(t) &= P(Z \leq t) = P(\min\{X, Y\} \leq t) \\ &= 1 - P(\min\{X, Y\} > t) \\ &= 1 - P(X > t, Y > t) \\ &\overset{\text{ב"ת}}{=} 1 - P(X > t)\, P(Y > t) = 1 - e^{-t} e^{-t} \\ &= 1 - e^{-2t}\end{aligned}$$

ולכן

$$f_Z(t) = F_Z'(t) = \left(1 - e^{-2t}\right)' = 2e^{-2t}$$

כלומר $Z \sim \text{Exp}(2)$.

משפט (נוסחת הקונבולוציה) אם X,Y ב"ת עם צפיפויות f_X,f_Y אז

$$f_{XY}\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_X\left(s\right)f_Y\left(t-s\right)\ \text{ds}$$

ראינו כי $P\left(X=s\mid Y=t\right)=\frac{P(X=s,Y=t)}{P(Y=t)}$ אבל כאשר Y רציף הרי ש-$P\left(Y=t\right)=0$ וכאן יש לנו בעיה.

הגדרה יהיו X,Y מ"מ רציפים בהחלט בעלי התפלגות משותפת. הצפיפות של X בהינתן $Y=t$ (המקיים $f_Y\left(t\right)\neq 0$ וש-f_Y רציפה ב-t) נתונה ע"י

$$f_{X|Y=t}\left(s\right)=\frac{f_{XY}\left(s,t\right)}{f_Y\left(t\right)}=\frac{f_{XY}\left(s,t\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(u,t\right)\ \text{du}}$$

הערה נשים לב ש-$f_{X|Y=t}$ אכן פ' צפיפות שכן

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{X|Y=t}\left(s\right)\ \text{ds}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{f_{XY}\left(s,t\right)}{f_Y\left(t\right)}\ \text{ds}=\frac{1}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(s,t\right)\ \text{ds}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(s,t\right)\ \text{ds}=1$$

דוגמה $X\sim\text{U}\left(\left[0,1\right]\right)$, $Y\sim\text{U}\left(\left[0,s\right]\right)$ בהינתן $X=s$. מה ההתפלגות המשותפת? מה ההתפלגות של Y?

$f_{XY}\left(s,t\right)=f_Y\left(t\right)f_{X|Y=t}\left(s\right)$ כלומר עם שינוי שמות

$$f_{XY}\left(s,t\right)=f_X\left(s\right)f_{Y|X=s}\left(t\right)=\mathbb{1}_{\left[0,1\right]}\left(s\right)\cdot\frac{1}{s}\mathbb{1}_{\left[0,s\right]}\left(t\right)=\begin{cases}\frac{1}{s} & s\in(0,1],t\in[0,s]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

כלומר נקבל משולש ישר זווית מתחת לישר $y=x$ עד ל-$(1,1)$.

אם $s\notin[0,1]$, $f_Y\left(t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_{XY}\left(s,t\right)\ \text{ds}=0$. אם $s\in(0,1]$ אז $f_Y\left(t\right)=\int\limits_{t}^{1}\frac{1}{s}\ \text{ds}=\ln 1-\ln t=-\ln t$ (האינטגרל הוא כזה כי אנחנו נמצאים בגובה t במשולש ולכן האינטגרל הוא על "מיתר" בין הניצב ליתר שמתחיל ב-t (היתר) ונגמר ב-1 (הניצב).

חלק ב' של ההרצאה

טענה (נוסחת הסת' שלמה רציפה) לכל X,Y מ"מ בעלי צפיות משותפת מתקיים

$$f_X\left(s\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y\left(t\right)f_{X|Y=t}\left(s\right)\ \text{dt}$$

הוכחה: פשוט להציב עם נוסחת ההתפלגות המשותפת. ■

מסקנה (נוסחת הקובנולוציה) $f_{XY}(s)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f_Y(t)\,f_X(s-t)\ \mathrm{dt}$.

הוכחה: עבור $Z=X+Y$, נשתמש בנוסחת ההסת' השלמה עם התנייה ב-$Y=t$. ■

הגדרה נאמר כי X מ"מ מתפלג <u>נורמלית</u> אם $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ כאשר μ התוחלת ו-σ^2 ונסמן $X\sim\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$.

הגדרה נאמר כי X <u>נורמלי תקני/סטנדרטי</u> אם $X\sim\mathrm{N}(0,1)$ ובמקרה זה $f_X(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}$ ועקומתו נקראת עקומת הפעמון ונאמר כי X מתפלג גאוסיאנית.

הערה לא נוכיח שזו אכן פ' הסת' אבל היא כן.

הערה אין תיאור סגור לפ' הקדומה ולכן מותאם הסימון

$$F_X(t)=P(X\leq t)=\phi(t)=\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ \mathrm{ds}$$

ומתקיים $\lim\limits_{t\to\infty}\phi(t)=1$.

נחשב את התוחלת של $X\sim\mathrm{N}(0,1)$.

$$\begin{aligned}
E[X]&=\int\limits_{-\infty}^{\infty}s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\ \mathrm{ds}\\
&=\int\limits_{0}^{\infty}s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\ \mathrm{ds}+\int\limits_{-\infty}^{0}s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\ \mathrm{ds}\\
&\overset{t=-s}{=}\int\limits_{0}^{\infty}s\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\ \mathrm{ds}-\int\limits_{0}^{\infty}t\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\ \mathrm{ds}\\
&=0
\end{aligned}$$

אנחנו מניחים כאן שהאינטגרל מתכנס בהחלט (ממבחן ההשוואה הוא אכן מתכנס כי הוא קטן מאקספוננט רגיל).

נחשב את הפ' יוצרת מומנטים.

$$\begin{aligned} M_X(t) = E\left[e^{tX}\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ts}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{s^2}{2}}\text{ ds} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(s^2-2ts\right)}\text{ ds} \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(u^2-t^2\right)}\text{ du} \\ &= e^{\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}\text{ du} \overset{\text{נרמול}}{=} e^{\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

$u^2-t^2=s^2-2st$, $\text{du}=\text{ ds}$,$u=s-t$ $(*)$

בהינתן X מ"מ תקני, נגדיר $Y=\sigma X+\mu$ ($\mu\in\mathbb{R}$,$\sigma>0$).

$$F_Y(t)=P(Y\le t)=P(\sigma X+\mu\le t)=P\left(X\le\frac{t-\mu}{\sigma}\right)=\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\begin{aligned} f_Y(t)=F_Y'(t)&=\left(\phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right)'=\phi'\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} \\ &=f_X\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} \end{aligned}$$

שזה בדיוק $\text{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$. אכן $E[Y]=E[\sigma X+\mu]=\mu$ וכן $\text{var}(Y)=\text{var}(\sigma X+\mu)=\sigma^2$.

טענה יהיו $X_1\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2\right)$ ו-$X_2\sim\left(\mu_2,\sigma_2^2\right)$ אזי:

1. $aX_1+b\sim\text{N}\left(a\mu_1+b,a^2\sigma_1^2\right)$.
2. $X_1+X_2\sim\text{N}\left(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)$.

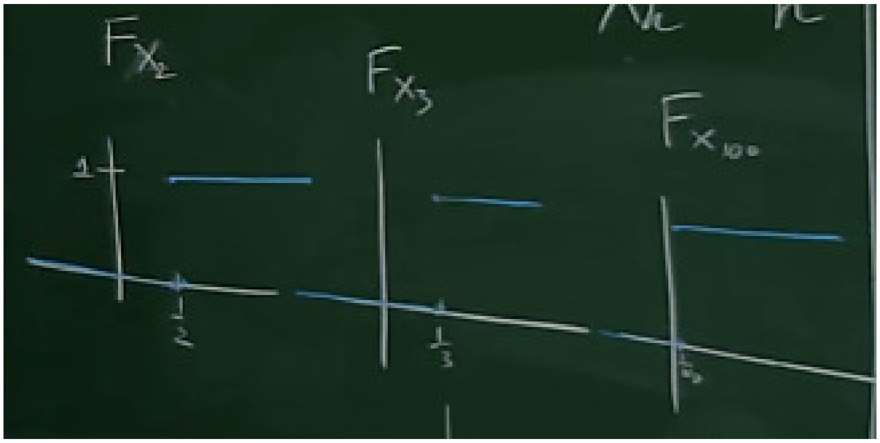
הערה אם $Y\sim\text{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$ נוכל לתקנן אותו, $X=\frac{Y-\mu}{\sigma}$ ואכן $X\sim\text{N}(0,1)$.

ראינו כי אם $X_n\sim\text{Bin}\left(n,\frac{1}{n}\right)$, $X\sim\text{Pois}(1)$ אז $P(X_n=k)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}P(X=k)$. נרצה להרחיב זאת גם למ"מ רציפים. נעזר בפ' ההתפלגות המצטברת.

הגדרה יהיו X_n סדרת מ"מ, X מ"מ. נאמר כי X_n <u>מתכנסת בהתפלגות</u> ל-X אם מתקיים $\lim_{n\to\infty}F_{X_n}(t)=F_X(t)$, לכל t שבה F_X רציפה.

הערה הדוגמה הבאה מוכיחה למה נדרש התנאי על t. תוספת התנאי רלוונטית רק כאשר X מ"מ בדיד. אם X רציף אז אין צורך לדרוש (כי F_X רציפה בכל נקודה). אם X בדיד על $\mathbb{N}$ אז אם $\forall a\in\mathbb{N}$ $\lim_{n\to\infty}P(X_n=a)=P(X=a)$ אז $X_n\xrightarrow{d}X$

דוגמה $X_n \overset{a.s}{=} \frac{1}{n}$



נשים לב כי הגבול של סדרת פ' ההתפלגויות המצטברות הוא $F_X(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$ אפע"פ שהמ"מ עצמם שואפים ל-0 $X \overset{a.s}{=}$ (ופ' ההתפלגות המצטברת הנ"ל לא מתאימה למ"מ הזה).

דוגמה $X_n \sim \mathrm{Unif}([n])$, $Y_n = \frac{X_n}{n}$. Y_n מתפלג אחיד על $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1\right\}$ ונוכיח כי עבור $Y \sim \mathrm{U}([0,1])$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$.

$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$. נמצא את $F_{Y_n}(t)$.

$$F_{Y_n}(t) = P\left(\frac{X_n}{n} \leq t\right) = P(X_n \leq nt) = P(X_n \leq \lfloor nt \rfloor) = \frac{\lfloor nt \rfloor}{n}$$

כלומר $F_{Y_n}(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & t > 1 \end{cases}$. אם $t < 0$ אז $F_{Y_n}(t) = 0 \longrightarrow F_Y(t)$ וכן עבור $t > 1$, $F_{Y_n}(t) = 1 \longrightarrow F_Y(t)$.

עבור $t \in [0,1]$,

$$t \longleftarrow \frac{nt-1}{n} \leq \frac{\lfloor nt \rfloor}{n} \leq \frac{nt}{n} \longrightarrow t$$

$$\lim_{n \to \infty} F_{Y_n}(t) = t = F_Y(t)$$

ואכן קיבלנו התכנסות בהתפלגות.

דוגמה $X_n \sim \mathrm{Geo}\left(\frac{1}{n}\right)$ (ככל שלא נצליח יקח יותר זמן כל פעם), $Y_n = \frac{X_n}{n}$. נראה כי Y_n מתכנסים בהתפלגות ל-$Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

$$F_{Y_n}(t)=P(X_n\le nt)=P(X_n\le\lfloor tn\rfloor)=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn\rfloor}$$

ולכן $F_{Y_n}(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn\rfloor} & t>0\end{cases}$ וכן $F_Y(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-e^{-t} & t>0\end{cases}$.

עבור $t\le 0$ אכן $F_{Y_n}(t)\longrightarrow F_Y(t)$. עבור $t>0$

$$e^{-t}\longleftarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)^{tn}\le\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn\rfloor}\le\left(1-\frac{1}{n}\right)^{tn-1}\longrightarrow e^{-t}$$

ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\lfloor tn\rfloor}=1-e^{-t}$. סה"כ מתקיים $Y_n\longrightarrow Y$.

משפט (משפט הגבול המרכזי) יהיו $X_1,X_2,\ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה עם $\mathrm{var}(X_i)=1$ ו-$E[X_i]=0$ אזי $\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{\sqrt{n}}\xrightarrow{d}Z$ כאשר $Z\sim\mathrm{N}(0,1)$.

הערה השורש נמצא שם כי ככה אנחנו שומרים על שונות 1 (היא יוצאת בריבוע).

משפט (שקול לגבול המרכזי) יהיו X_n מ"מ ב"ת ש"ה עם תוחלת μ ושונות σ^2 אז עבור $Y_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\mu}{\sigma}}{\sqrt{n}}$ מתקיים $Y_n\xrightarrow{d}Z$ כאשר $Z\sim\mathrm{N}(0,1)$.

תרגול

נחשב את השונות של $X\sim\mathrm{N}\left(\mu,\sigma^2\right)$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(X)&=E\left[(X-\mu)^2\right]\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{dx}\\
&\overset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma y)^2e^{-\frac{y^2}{2}}\sigma\,\mathrm{dy}\\
&=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{dy}\\
&\overset{(*)}{=}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(ye^{-\frac{1}{2}y}\Big|_{-\infty}^{\infty}+2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}y^2}\,\mathrm{dy}\right)\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\,\mathrm{dy}=\sigma^2F_X(\infty)=\sigma^2
\end{aligned}$$

$(*)$ אינטגרציה בחלקים, $u=y,v'=ye^{-\frac{1}{2}y^2}$.

דוגמה משקולת שוקלת 10 גרם. שוקלים אותה פעמיים באופן ב"ת. הניחו כי תוצאת כל שקילה מתפלגת $\mathrm{N}\left(10, 0.2^2\right)$. מה ההסת' שהתוצאה השנייה תהיה נמוכה מהראשונה בעד סטיית תקן אחת?

$X_2 - X_1 \sim \mathrm{N}\left(10-10, 0.2^2+0.2^2\right) = \mathrm{N}\left(0, 2\cdot 0.2^2\right)$. נגדיר $\frac{5}{\sqrt{2}}\left(X_1 - X_2\right) \sim \mathrm{N}\left(0,1\right)$.

$$\begin{aligned}
P\left(X_1 - 0.2 < X_2 < X_1\right) &= P\left(-0.2 < X_2 - X_1 < 0\right)\\
&= P\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} < \frac{5}{\sqrt{2}}\left(X_1 - X_2\right) < 0\right)\\
&= \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} f_Z\left(t\right)\ \mathrm{dt}\\
&= \int_{-\infty}^{0} f_Z\left(t\right)\ \mathrm{dt} - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} f_Z\left(t\right)\ \mathrm{dt}\\
&= \phi\left(0\right) - \phi\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx \frac{1}{2} - 0.24
\end{aligned}$$

כאשר $\phi\left(0\right) = \frac{1}{2}$ נובע מכך שהפ' סימטרית והאינטגרל על כל $\mathbb{R}$ הוא 1.

טענה יהיו $X_1, \ldots, X_n$ מ"מ ב"ת כך ש-$X_i \sim \mathrm{Exp}\left(\lambda_i\right)$ אז $\min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\} \sim \mathrm{Exp}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

הוכחה: נסמן $Y = \min\left\{X_1, \ldots, X_n\right\}$.

$$\begin{aligned}
P\left(Y > x\right) &= 1 - F_Y\left(x\right)\\
&= P\left(X_1 > x, \ldots, X_n > x\right)\\
&= \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j > x\right)\\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(1 - F_{X_j}\left(x\right)\right)\\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda_j x}\\
&= e^{\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\right) x}
\end{aligned}$$

כלומר $F_Y\left(x\right) = 1 - e^{-\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_J\right) x}$ ולכן $Y \sim \mathrm{Exp}\left(\sum \lambda_j\right)$. ■

תרגיל הזמן שלוקח לערוך קניות של נורות צבעוניות באיקאה בשעות מתפלג מעריכית עם פרמטר 1. מרק ואיתמר הלכו לעשות קניות באופן ב"ת. יהיו X ו-Y הזמנים שלקחו להם לבצע את הרכישות בהתאמה.

- חשבו את $E\left[\max\left\{X, Y\right\}\right]$.

ולכן $\max\{X,Y\} = X+Y-\min\{X,Y\}$

$$\begin{aligned} E[\max\{X,Y\}] &= E[X]+E[Y]-E[\min\{X,Y\}] \\ &= \frac{1}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

- איתמר ומרק קבעו ללכת לדיסקו שמתחיל ב-$21:00$. בהנחה שהם נכנסו לחנות ב-$12:00$ בצהריים, חסמו בעזרת א"ש מרקוב את ההסת' שהם יאחרו למסיבה, כלומר $P(\max\{X,Y\}\geq 9)$.

$$P(\max\{X,Y\}\geq 9)\leq \frac{E[\max\{X,Y\}]}{9}=\frac{1}{6}$$

תרגיל הזמן עד נפילת טיפת גשם ראשונה על אריח במדרכה מתפלג $\text{Exp}(\lambda)$ כאשר λ שטח האריח. אריח נבחר באקראי ושטחו X מתפלג אחיד על $[0,1]$. חשבו את צפיפותו של Y המתאר את זמן נפילת הטיפה על האריח שנבחר.

$Y\sim\text{Exp}(X)\,, X\sim \text{U}([0,1])$. $f_{Y|X=x}=\begin{cases} xe^{-xy} & y\geq 0\\ 0 & y<0\end{cases}$. עבור $y>0$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y)\,f_X(x)\ \text{dx} \\ &= \int\limits_{0}^{1} xe^{-xy}\cdot 1\ \text{dx} \\ &= \ldots = \frac{e^{-y}}{y}+\frac{1-e^{-y}}{y^2} \end{aligned}$$

עבור $y\leq 0$, $f_Y(y)$.

תרגיל (X,Y) מתפלג אחיד במשולש התחום ע"י ציר X והישרים $y=1+x$ ו-$y=1-x$. חשבו את הצפיפות המותנת של Y ב-X.

שטח המשולש הוא 1 ולכן

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases} 1 & 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1-x \\ 1 & -1\leq x\leq 0, 0\leq y\leq x-1 \\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\ \mathrm{dy}=\begin{cases}\int_0^{1-x} 1\ \mathrm{dy} & 0\le x\le 1\\ \int_0^{x-1} 1\ \mathrm{dy} & -1\le x\le 0\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

$$f_{Y|X=x}(y)=\frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{1-x} & 0\le x<1, 0\le y\le 1-x\\ \frac{1}{1+x} & -1\le x<0, 0\le y\le x-1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הערה אם X,Y ב"ת,

$$F_{XY}(x,y)=P(X\le x, y\le y)=P(X\le x)P(Y\le y)=F_X(x)F_Y(y)$$

ולכן $f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$ (נגזרת לפי משתנה אחד כל פעם). למעשה הטענה הזו היא אם"ם.

דוגמה X,Y בעלי צפיפות משותפת $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}4xy & (x,y)\in[0,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ ולכן $f_X(x)=\begin{cases}2x & x\in[0,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$ וגם $f_Y(y)=\begin{cases}2y & y\in[0,1]\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

דוגמה $f_X(x)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} & |x|<1\\ 0 & |x|>1\end{cases}$ וגם $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{2\sqrt{1-y^2}}{\pi} & |y|<1\\ 0 & |y|>1\end{cases}$. אלו מ"מ לא ב"ת משום ש-$X$ הוא מ"מ שמייצג סיבים אופקיים במעגל היחידה ואילו y מייצג סיבים אנכיים ולכן עבור נקודות מחוץ למעגל לדוגמה לא נקבל את שוויון הב"ת הרצוי על הצפיפות המשותפת, ובאופן מפורש $f_{XY}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi} & x^2+y^2\le 1\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$.

שבוע $\mathbb{XIV}$ | סטטיסטיקה היסקית

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הערה מהחוק החלש, $S_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i}{n}$ מצטופפים סביב התוחלת. הופדינג הראה שזה קורה מהר מאוד (אקספ'). עתה נתעניין בהתפלגות סביב התוחלת. לשם כך אנחנו מגדילים (רק שורש ולא לינארי) לסקלה המתאימה.

הערה עלו על משפט הגבול המרכזי כי ראו שככל שסוכמים יותר ברנוליים (מגדילים את n בבינומי) מתקרבים לפעמון של גאוס. בנוסף עבור מ"מ אקראי לחלוטין, אם סוכמים אותו עם עצמו מספיק פעמים מקבלים גם כן את הפעמון של גאוס.

משפט (הרחבה של הגבול המרכזי) עבור $X_1,X_2,\ldots$ מ"מ ב"ת ש"ה כך ש-$E\left[X_i\right]=\mu$, $\mathrm{var}\left(X_i\right)=\sigma^2$, $\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{d}Z'$ כאשר $Z'\sim\mathrm{N}\left(n\mu,n\sigma^2\right)$.

דוגמה $X_n\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$. עבור $X\sim\mathrm{Bin}\left(n,p\right)$ נקבל $X=\sum_{i=1}^{n}Y_i$, $Y_i\sim\mathrm{Ber}\left(p\right)$ ב"ת. $E\left[Y_i\right]=p,\mathrm{var}\left(Y_i\right)=p\left(1-p\right)$ ולכן ממשפט הגבול המרכזי $\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i-p}{\sqrt{p(1-p)n}}\xrightarrow{d}Z\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$ כלומר $\frac{X-np}{\sqrt{p(1-p)n}}\xrightarrow{d}Z$.
יישום של הנוסחה הנ"ל. נניח כי $X\sim\left(1000,\frac{1}{2}\right)$. נחפש את $P\left(450<X<550\right)$.

$$
\begin{aligned}
P\left(450<X<550\right)&=P\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}<\frac{X-500}{\sqrt{250}}<\frac{50}{\sqrt{250}}\right)\\
&\overset{\text{הגבול המרכזי}}{\approx}P\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}\leq Z\leq\frac{50}{\sqrt{250}}\right)\\
&=F_Z\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right)-F_Z\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}\right)\\
&=\phi\left(\frac{50}{\sqrt{250}}\right)-\phi\left(\frac{-50}{\sqrt{250}}\right)\\
&=0.99843
\end{aligned}
$$

ואילו מצ'בישב

$$
P\left(450<X<550\right)=1-P\left(\left|X-E\left[X\right]\right|\geq50\right)\geq1-\frac{\mathrm{var}\left(X\right)}{\left(50\right)^2}=1-\frac{250}{2500}=0.9
$$

והחישוב האמיתי נותן 0.99827 כלומר הגבול המרכזי עזר לנו בחישובים.

בדיקת השערות (פשוטות)

ניזכר בהפרדת ההשערות שעשינו עם הסת' מותנת בתחילת הקורס. שם היו לנו שתי השערות ונתונים ראשוניים על המצב שבאמצעותם היינו אמורים לקבוע איזו השערה יותר סבירה. בהסקה סטטיסטית נרצה לקבוע איזו השערה היא המציאות, אבל הפעם בלי התפלגות המ"מ, אלא רק אפשרות דגימה מהמ"מ. אז היה לנו $P\left(H_1\mid S\right)=\frac{P(S|H_1)P(H_1)}{P(S)}$ וכל הנתונים היו ידועים לנו, ועתה לא ידוע לנו מה הוא $P\left(H_1\right)$.

במילים של נעה: יש מ"מ שאנחנו לא יודעים את התפלגותו אבל מקבלים דגימה שלו X. יש שתי השערות חלופיות לגבי האופן בו X מתפלג: H_0, H_1. הכרעה סטטיסטית היא פ' $\text{Test}:\{x\}\to\{H_0,H_1\}$ (דגימה עשויה להיות מס' כלשהו של דגימות ב"ת ש"ה).

לחלופין ניתן לעבוד עם קביעה של קבוצה $\mathcal{S}$ כך ש-$x\in\mathcal{S}$ גורר ש-H_0 שגויה (כלומר שנחזיר ש-H_1 היא הנכונה) ו-$x\notin\mathcal{S}$ גורר ש-H_0 נכונה.

כלומר $\mathbb{1}_{\mathcal{S}}(x)=\begin{cases}H_1 & x\in\mathcal{S}\\ H_0 & x\notin\mathcal{S}\end{cases}=\text{Test}(x)$.

בכל אופן H_0 היא ברירת המחדל שלנו, ונצטרך שישכנעו אותנו שהיא לא נכונה וש-H_1 כן (כלומר נקבל או נדחה את H_0).

יש שני סוגי טעויות:

מציאות/הכרעה	H_0	H_1
H_0	✓	טעות מסוג I
H_1	טעות מסוג II	✓

הערה טעות מסוג I היא למעשה false-negative כי אמרנו שזה **לא** H_0 וטעינו.

הערה טעות מסוג II היא באותו האופן false-positive כי אמרנו שזה **כן** H_0 וזה לא היה.

הגדרה ההסת' לטעות מסוג I נקראת רמת המובהקות ומוגדרת ע"י

$$\alpha=P_{H_0}(X\in\mathcal{S})=P_{H_0}(\text{Test}(x)=H_1)$$

$1-\alpha$ נקרא רמת הסמך.

הגדרה ההסת' לטעות מסוג II ומוגדרת ע"י

$$\beta=P_{H_1}(X\notin\mathcal{S})=P_{H_1}(\text{Test}(x)=H_0)$$

$1-\beta$ נקראת העוצמה של $\mathcal{S}$.

המטרה שלנו היא להקטין את α ו-β. אבל יש טרייד-אוף, הקטנה של α תגדיל (לא בהכרח ממש) את β ולהפך. כדי להקטין את α, נרצה להגדיל את $\mathcal{S}^C$, כלומר להקטין את $\mathcal{S}$, ולכן מההגדרה להגדיל את הסיכוי לטעות מסוג II (סיכוי יותר גבוה שדגימה לא תהיה ב-$\mathcal{S}$ כי היא קטנה יותר עכשיו).

דוגמה נתונים מטבע הוגן H_0 ומטבע 0.9-הוגן H_1. מטילים את המטבע 4 פעמים וסופרים כמה עצמים התקבלו.

הצעה להכרעה: $\mathcal{S}=\{s:s\geq 3\}$ (כלומר אם יש יותר מחצי עצים נשער שזה המטבע המוטה).

נאמוד את α,β.

$$\begin{aligned}\alpha&=P_{H_0}(X\geq 3)=P_{H_0}(X=3)+P_{H_0}(X=4)\\&=\binom{4}{3}\frac{1}{2^4}+\binom{4}{4}\frac{1}{2^4}=\frac{5}{16}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= P_{H_1}\left(X \notin S\right) = P_{H_1}\left(X < 3\right) \\
&= P_{H_1}\left(X = 0\right) + P_{H_1}\left(X = 1\right) + P_{H_1}\left(X = 2\right) \\
&= \binom{4}{0} 0.1^4 + \binom{4}{1} 0.1^3 \cdot 0.9 + \binom{4}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^2 \\
&= \dots
\end{aligned}
$$

דוגמה מס' השנים שנורה מחזיקה מעמד. ההשערות שלנו הן
$$
\begin{aligned}
H_0 &: X \sim \text{Exp}\left(1\right) \\
H_1 &: X \sim \text{Exp}\left(\tfrac{1}{3}\right)
\end{aligned}
$$
ולכן נגדיר את המבחן $S = \{X \geq 2\}$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P_{H_0}\left(X \geq 2\right) = \int\limits_2^\infty e^{-s}\ \text{ds} = -e^{-s}\Big|_2^\infty = e^{-2} \\
\beta &= P_{H_1}\left(X < 2\right) = \int_0^2 \frac{1}{3} e^{-\frac{1}{3}s}\ \text{ds} = -e^{-\frac{s}{3}}\Big|_0^2 = 1 - e^{-\frac{2}{3}}
\end{aligned}
$$

השוואות בין מבחנים

הגדרה מבחן C טוב לפחות כמו מבחן D אם $\alpha_D \geq \alpha_C$ וגם $\beta_D \geq \beta_C$.

הגדרה מבחן C טוב ממש ממבחן D אם C טוב לפחות כמו D ולפחות אחד מהא"ש מתקיים כאי שוויון חזק.

הערה כל מבחן מיוצג ע"י $\mathcal{S}$.

הגדרה מבחן הוא מיטבי אם אין מבחן שטוב ממש ממנו.

הערה קבוצת המבחנים עונה להגדרה הסדר החלקי, כאשר מבחן מיטבי הוא איבר מקסימלי בה.

דוגמה
$$
\begin{aligned}
H_0 &: X \sim \text{Bin}\left(2, \tfrac{1}{2}\right) \\
H_1 &: X \sim \text{Bin}\left(2, \tfrac{2}{3}\right)
\end{aligned}
.
$$
מבחן I - $S_1 = \{2\}$:

$$
\begin{aligned}
\alpha &= P_{H_0}\left(X = 2\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \\
\beta &= P_{H_1}\left(X < 2\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \binom{2}{1} \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

מבחן II - $S_2=\{1,2\}$:

$$\alpha=P_{H_0}\left(X\in\{1,2\}\right)=1-P_{H_0}\left(X=0\right)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$
$$\beta=P_{H_1}\left(X=0\right)=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

נשים לב כי כאן α גדל כי הגדלנו את S.

לא נוכל לקבוע האם אחד טוב מהאחר משום שהתקבל הטריידוף שהוזכר לעיל - α גדל אבל β קטן.

מבחן III - $S_3=\{X=1\}$:

$$\alpha=P_{H_0}\left(X=1\right)=\binom{2}{1}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{1}{2}$$
$$\beta=P_{H_1}\left(X\neq1\right)=\ldots=\frac{5}{9}$$

נשים לב שזו בחירה לכאורה לא חכמה כי אם 1 בקבוצה של המוטה לכיוון עץ אז קל וחומר ש-2 יהיה גם. לעומת זאת, היא מדגימה נקודה: יחד עם המבחן הראשון, β נשאר זהה אבל α קטן ממש במבחן השלישי, ולכן המבחן הראשון טוב ממש מהמבחן השלישי.

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה עבור מבחן $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ נקרא אזור הדחייה ואילו $\mathcal{S}^C$ נקרא אזור הקבלה.

נרצה לקבוע יעד עבור α ואז מבין המבחנים המתאימים ליעד נחשב את האחד עם β מזערי.

הגדרה סטטיסטי הוא פ' של הדגימות $f\left(x\right)$. מבחן רף ע"פ הסטטיסטי $f\left(x\right)$ הוא $\mathcal{S}=\{f\left(x\right)<\alpha_0\}$.

דוגמה

	H_0	H_1
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$

עבור $\alpha=0$, נדרוש כי $\mathcal{S}^C=\{a,b,c\}$ (רק כך אין טעויות מסוג ראשון). במקרה זה $\beta=P_{H_1}\left(\{a,b,c\}\right)=1$ שזה מאוד רע.

עבור $\alpha=\frac{1}{3}$ נדרוש כי $\mathcal{S}^C=\{a,b\}$ (ולכן $\mathcal{S}=\{c\}$) ולכן $\beta=P_{H_1}\left(\text{Test}\left(x\right)=H_0\right)=P_{H_1}\left(\{a,b\}\right)=\frac{1}{2}$.

עבור $\alpha=\frac{2}{3}$ נדרוש כי $\mathcal{S}^C=\{a\}$ (ולכן $\mathcal{S}=\{a,b\}$) ולכן $\beta=\frac{1}{6}$.

הערה שיקול הדעת שלנו יהיה כזה אם כן: נרצה להשאיר מחוץ לאזור הקבלה ערכים ש-H_1 נותנת להם הסת' גבוהה (כי במקרה זה $P_{H_1}\left(\mathcal{S}^C\right)$ קטן).

הגדרה נראות לפי H של דגימה $X=s$ היא $P_H\left(X=s\right)$. יחס הנראות בנקודה $X=s$ הוא $\frac{P_{H_0}(X=s)}{P_{H_1}(X=s)}$.

הערה ככל שיחס הנראות יותר קטן, זה אומר ש-P_{H_0} קטן ו-P_{H_1} ולכן לפי שיקול הדעת נשים את s באזור הדחייה (כי הוא יותר סביר ב-H_1) ולהפך.

משפט (הלמה של ניימן-פירסון) המבחן המיטבי לכל α נתון הוא מבחן רף ליחס הנראות, כלומר קיים $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ כך שהמבחן המיטבי מהצורה

$$\text{Test}\left(x\right)=\begin{cases} H_0 & \frac{P_{H_0}(x)}{P_{H_1}(x)}>\lambda_0\\ H_1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הערה כשמדברים על התפלגויות רציפות נחליף את ההסת' הנקודתית בפ' הצפיפות.

הערה כלומר אם אנחנו ממיינים את הדגימות האפשריות לפי יחס נראות, מחיצה שנציב בין הערכים הקטנים מ-λ_0 מסוים לבין אילו שגדולים ממנו מגדירה לנו מבחן מיטבי.

הערה אם $\lambda\left(a_1\right)<\lambda\left(a_2\right)$ אז אין שום הגיון לקבוע $a_2\to H_1$ ו-$a_1\to H_0$.

דוגמה נתונות דגימות $x_1,\ldots,x_n$, $H_0:X_i\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$, $H_1:X_i\sim\mathrm{N}\left(1,1\right)$. נסמן $Z\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)$, $Z'\sim\mathrm{N}\left(1,1\right)$.

- נאפיין את המבחנים האופטימליים.

  לכל a נחשב את יחס הנראות עבור $X=a$ מ"מ אחד בסדרה.

$$\lambda\left(a\right)=\frac{P_{H_0}\left(X=a\right)}{P_{H_1}\left(X=a\right)}=\frac{f_Z\left(a\right)}{f_{Z'}\left(a\right)}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{a^2}{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(a-1)^2}{2}}}=e^{\frac{1}{2}-a}$$

  נקבל שמבחנים אופטימליים מוגדרים ע"י קבוצות $\mathcal{S}$ מהצורה $\mathcal{S}_{\lambda_0}=\left\{a:e^{\frac{1}{2}-a}<\lambda_0\right\}$. נשים לב כי $e^{\frac{1}{2}-a}<\lambda_0$ אם"ם $\frac{1}{2}-a<\log\lambda_0$ אם"ם $a>\frac{1}{2}-\log\lambda_0$. לכן מבחן אופטימלי יהיה מהצורה $\mathcal{S}=\left\{x>c\right\}$ כאשר $c\in\mathbb{R}$ ($\log$ מחזירה ערכים על כל הישר הממשי).

- נחפש מבחן המייצר $\alpha=0.05$.

  נמצא c שיניב $\alpha=0.05$.

$$\alpha=P_{H_0}\left(X>c\right)=1-P\left(z<c\right)=1-\phi\left(c\right)$$

  כלומר נחפש c כך ש-$\phi\left(c\right)=0.95$, מטבלאות גדולות של ערכי ϕ, $c=1.65$ עונה על הנדרש. לכן המבחן המבוקש הוא

$$\text{Test}\left(x\right)=\begin{cases} H_0 & X<1.65\\ H_1 & X>1.65\end{cases}$$

- נחשב את β.

$$\begin{aligned}\beta &= P_{H_1}\left(\text{Test}\left(x\right)=H_0\right)\\ &= P_{H_1}\left(X<1.65\right)\\ &= P\left(Z'<1.65\right)\\ &\overset{\text{המרה למתוקן}}{=} P\left(Z+1<1.65\right)\\ &= P\left(Z<0.65\right)=0.62\end{aligned}$$

ולכן העוצמה היא $1-0.62=0.38$.

- כמה דגימות נדרשות כדי לקבל מבחן אופט' עם $\alpha=0.05$ וגם $\beta=0.05$?

נסמן את מספר הדגימות ב-N.

  – איך נראים מבחנים אופ' כאשר יש לנו N דגימות?

הנראות של H_0 היא $P_{H_0}\left(X_1=a_1,\ldots,X_n=a_n\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(a_1^2+\ldots+a_N^2\right)}$.
הנראות של H_1 היא $P_{H_1}\left(X_1=a_1,\ldots,X_n=a_n\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\left(\left(a_1-1\right)^2+\ldots+\left(a_N-1\right)^2\right)}$.

סה"כ יחס הנראות הוא $\lambda\left(a\right)=e^{-\frac{N}{2}-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$. לכן מבחן הנראות הוא פ' מונ' יורדת בביטוי $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ ולכן $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ הוא סטטיסטי מספיק לייצג מבחני רף אופטימליים, כאשר כל מבחן מהצורה

$$\text{Test}\left(a_1,\ldots,a_n\right)=\begin{cases}H_0 & \sum\limits_{i=1}^{n}a_i<c\\ H_1 & \text{אחרת}\end{cases}$$

  – נמצא מבחן עם $\alpha=0.05$.

X_i ב"ת (הם מדגימה) ולכן $H_0:\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim\mathrm{N}\left(0,N\right)$ וכן $H_1:\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\sim\mathrm{N}\left(N,N\right)$ (כאן הנורמלי הוא לפי סטיית התקן ולא לפי השונות, סתם עניין של נוחות). נתקנן את המ"מ בהשערות,

$$\begin{aligned}H_0:\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{N}X_i\sim\mathrm{N}\left(0,1\right)\\ H_1:\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{i=1}^{n}X_i\sim N\left(\sqrt{N},1\right)\end{aligned}$$

נסמן $Y=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ לכן המבחן שלנו הוא עכשיו עם הסטטיסטי $\frac{1}{\sqrt{N}}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ (ולא $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$).

נחפש c כך ש-$\alpha = P_{H_0}(Y > c) = 0.05$, כלומר

$$P_{H_0}(Y > c) = P(Z > c) = 1 - P(Z < c) = 0.05$$

וכמו לפניכן $c = 1.65$.

לכן קיבלנו את המבחן $\text{Test}(a_1, \ldots, a_n) = \begin{cases} H_0 & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{n} a_i < 1.65 \\ H_1 & \text{אחרת} \end{cases}$.

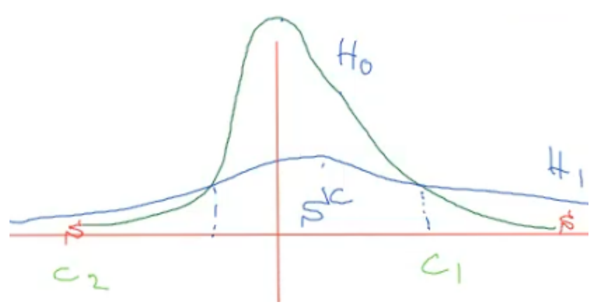
– נחשב את β למבחן הזה לכל N.

$$\begin{aligned} \beta &= P_{H_1}(H_0) \\ &< P_{H_1}(Y < 1.65) \\ &\overset{\text{המרה למתוקן}}{=} P\left(Z + \sqrt{N} < 1.65\right) \\ &= P\left(Z < 1.65 - \sqrt{N}\right) \\ &\overset{\text{דרישה שלנו}}{\leq} 0.05 \end{aligned}$$

ידוע כי $\phi(-1.65) = 0.05$ ולכן נחפש N כך ש-$1.65 - \sqrt{N} \leq -1.65$, כלומר $3.3 \leq \sqrt{N}$ ולכן $N \geq 10$.

לסיכום, אם יש לנו לפחות 10 בדיקות, נקבל $\alpha = 0.05$, $\beta \leq 0.05$.

דוגמה (הערשה) האם זה תמיד נכון שמבחנים אופט' נובעים ע"י $x < c$? לא, עבור שני מ"מ נורמליים כבאיור, יותר הגיוני להגדיר מבחן בשני הקצוות (ה-$\mathcal{S}$ באיור מייצג את המבחן הזה), ולא מבחן גס עם ערך יחיד.



תרגול

הראנו מחדש כי מ"מ גאומטריים מתכנסים בהתפלגות למעריכי (כלומר שמעריכי הוא כאילו ההכללה הרציפה של גאומטרי).

טענה $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{U}([0,1])$ ב"ת. נגדיר $Y_n = n\left(1 - \max\{X_1, \ldots, X_n\}\right)$. אזי $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim \mathrm{Exp}(1)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}F_{Y_n}(t) &= P(X_n \le t)\\ &= P\left(\max\{X_1,\dots,X_n\} \ge 1-\frac{t}{n}\right)\\ &= 1-P\left(\max\{X_1,\dots,X_n\} \le 1-\frac{t}{n}\right)\\ &= 1-P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{X_j \le 1-\frac{t}{n}\right\}\right)\\ &= 1-\prod_{j=1}^{n} P\left(X_j < 1-\frac{t}{n}\right)\\ &= 1-\prod_{j=1}^{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)\\ &= 1-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-e^{-t} = F_Y(t)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

טענה נגדיר סדרה $\{X_n\}$ ע"י $f_{X_n}(x) = (1-\cos(2\pi nx))\,\mathbb{1}_{[0,1]}$ (כלומר קוסינוסים שנדחסים עוד ועוד על $[0,1]$) אזי $X_n \xrightarrow{d} \mathrm{U}([0,1])$.

הוכחה: עבור $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}F_{X_n}(t) = P(X_n \le t) &= \int_0^t f_{X_n}(x)\ \mathrm{dx}\\ &= \int_0^t (1-\cos 2\pi nx)\ \mathrm{dx}\\ &= \left(x-\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n}\right)\Bigg|_0^t\\ &= t-\frac{\sin 2\pi nx}{2\pi n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} t = F_X(t)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

משפט תהי $\{X_n\}$ סדרת מ"מ ו-X מ"מ.

1. אם X ו-$\{X_n\}$ נתמכים על $\mathbb{Z}$ אז $X_n \xrightarrow{d} X$ אם"ם $P(X=k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P(X_n=k)$, $\forall k\in\mathbb{Z}$.
2. אם X ו-$\{X_n\}$ רציפים בהחלט אז אם $f_{X_n} \longrightarrow f_X$ אז $X_n \xrightarrow{d} X$.

דוגמה מטילים n קוביות הוגנות ב"ת. העריכו את ההסת' שסכום ההטלות בטווח $\left[3\frac{1}{2}n-\sqrt{n}, 3\frac{1}{2}n+\sqrt{n}\right]$?

$X_n \sim \text{Unif}([6])$, $E[X_n]=3\frac{1}{2}$, $\text{var}(X_n)=\frac{35}{12}$. מההרחבה של הגבול המרכזי,

$$\begin{aligned}
P\left(3\frac{1}{2}n-\sqrt{n}\le\sum_{j=1}^{n}X_i\le 3\frac{1}{2}n+\sqrt{n}\right) &= P\left(-1\le\frac{X_1+\ldots+X_n-3\frac{1}{2}n}{\sqrt{n}}\le 1\right)\\
&= P\left(-\frac{1}{\sigma}\le\frac{X_1+\ldots+X_n-3\frac{1}{2}n}{\sqrt{n}\sigma}\le\frac{1}{\sigma}\right)\\
&\approx \phi\left(\sqrt{\frac{12}{35}}\right)-\phi\left(-\sqrt{\frac{12}{35}}\right)
\end{aligned}$$

הגדרה תהי D התפלגות לא ידועה. דגימות ב"ת מההתפלגות D זו סדרת ערכים $(x_1,\ldots,x_n)$ המתקבלת מ-$(X_1,\ldots,X_n)$ כך ש-$X_j\sim D$ ב"ת.

הגדרה תהי D התפלגות שהיא אחת מבין D_0,D_1. נסמן ב-H_0 את ההשערה ש-$D=D_0$ וב-H_1 את ההשערה ש-$D=D_1$.

הגדרה מבחן הוא קבוצה $S\subseteq\mathbb{R}^n$ כך שלכל דגימה $(x_1,\ldots,x_n)$, אם $(x_1,\ldots,x_n)\in S$ נדחה את H_0 ואחרת נקבל את H_0.

דוגמה נתון שאדם מאושפז עקב מחלה בהסת' 0.01 באופן ב"ת באחרים. חברה טוענת שלאחר מתן חיסון ההסת' יורדת ל-0.004.

נתונים $n=1000$ דגימות, ונרצה לקבוע האם החברה דוברת אמת, כלומר

$$\begin{aligned}
H_0: D&\sim \text{Bin}(n,0.01)\approx\text{Pois}(1000\cdot 0.01)=\text{Pois}(10)\\
H_1: D&\sim \text{Bin}(n,0.004)\approx\text{Pois}(4)
\end{aligned}$$

$(X_1,\ldots,X_{1000})$ ונגדיר $X=\sum_{j=1}^{1000}X_j$ מספר המאושפזים.

נגדיר מבחן $S=\left\{(x_1,\ldots,x_{1000}):\sum_{j=1}^{1000}x_j\le 5\right\}$ (כלומר אם יש מעט מאוד מאושפזים כנראה שהחברה צודקת אינטואיטיבית).

$$\alpha=P_{H_0}\left((X_1,\ldots,X_{1000})\in S\right)=P_{H_0}\left(\sum_{j=1}^{1000}X_j\le 5\right)\overset{\text{פואסוני}}{=}e^{-1}\left(1+10+\ldots+\frac{10^5}{5!}\right)\approx 0.067$$

$$\beta=P_{H_1}\left(\sum_{j=1}^{1000}X_j\ge 6\right)=1-P_{H_1}\left(\sum_{j=1}^{1000}X_j\le 5\right)=1-e^{-4}\left(1+4+\ldots+\frac{4^5}{5!}\right)\approx 0.21$$

הגדרה תהי D התפלגות בדידה או רציפה בהחלט, $(x_1,\ldots,x_n)$ דגימה. פונקציית הנראות מוגדרת ע"י

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_D(x_1,\ldots,x_n) &= P_D(X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n)\\ &= \prod_{j=1}^{n} P_D(X_j=x_j)\\ &= \prod_{j=1}^{n} f_{X_n}(x_j)\end{aligned}$$

עבור $H_0:D=D_0$, $H_1:D=D_1$, פונקציית יחס הנראות מוגדרת ע"י $r(x_1,\ldots,x_n)=\frac{\mathcal{L}_{D_0}(x_1,\ldots,x_n)}{\mathcal{L}_{D_1}(x_1,\ldots,x_n)}$.

הערה פ' הצפיפות במקרה הדיסקרטי היא פשוט פ' ההסת' הבדידה.

הערה ככל שפ' יחס הנראות יותר גדולה, הרי שהדגימה קורת בסבירות יותר גדולה אצל D_0 מאשר אצל D_1, ולהפך.

הגדרה נאמר ש-$C=\{X\in S\}$ הוא מבחן יחס נראות עם רף η אם לכל $(x_1,\ldots,x_n)$ כך ש-$r(x_1,\ldots,x_n)<\eta$ מתקיים $(x_1,\ldots,x_n)\in S$ ואם $r(x_1,\ldots,x_n)>\eta$ אז $(x_1,\ldots,x_n)\notin S$.

משפט (הלמה שלניימן-פירסון) יהי C מבחן יחס נראות. אזי C מיטבי.

הערה האינטואיציה מאחורי זה היא שכל מבחן שבוחר בחוכמה (לפי האינטואיטציה מההערה הקודמת) את ההשערה שלדעתו נכונה הוא מיטבי.

דוגמה ההסת' לזכות בלוטו היא 0.01. המוכר אומר לנו שההסת' לזכות אצלו בדוכן היא 0.1. ממלאים טפסים עד שזוכים לראשונה (רעיון ממש, אבל ממש גרוע). נמצא מבחן מיטבי עם $\alpha\le 0.05$ ונחשב את β.

$H_0:D=\mathrm{Geo}(0.01)$ (השמרנית, לפיה אנחנו לא מאמינים לשומר) ו-$H_1:D=\mathrm{Geo}(0.1)$. יש לנו דגימה אחת, שהיא מספר הפעמים שמילאנו עד שהצלחנו.

$$r(n)=\frac{\mathcal{L}_{D_0}(n)}{\mathcal{L}_{D_1}(n)}=\frac{(1-0.01)^{n-1}0.01}{(1-0.1)^{n-1}0.1}=\frac{1.1^{n-1}}{10}<\eta$$

$$\iff 1.1^{n-1}<10\eta$$

$$\iff n-1<\log_{1.1}10\eta$$

$$\iff n<1+\log_{1.1}10\eta$$

נגדיר $S=\{n:n<1+\log_{1.1}10\eta\}=[N]$ (כאשר $N=\lfloor 1+\log_{1.1}10\eta\rfloor$).

$$\begin{aligned}\alpha&=P_{H_0}\left(n\in S\right)=P_{H_0}\left(n\leq N\right)=1-P_{H_0}\left(n>N\right)\\&=1-0.99^N\end{aligned}$$

ולכן $\alpha\leq 0.05$ אם"ם $N\leq\log_{0.99}0.95\approx 5.1$ לכן $N=5$. כלומר המבחן שלנו הוא מילוי 5 מבחנים, אם ניצחנו מאמינים למוכר ואחרת לא מאמינים לו.

$$\beta=P_{H_1}\left(n\notin S\right)=P_{H_1}\left(n>5\right)=\left(1-0.1\right)^5\approx 0.59$$

סוף.