הסתברות ושימושיה

הרצאות | ד"ר יוסי שמאי

כתיבה | נמרוד רק

תשפ"א סמסטר ב'

תוכן העניינים

I

<u>מאורע</u> הוא תוצאה של ניסוי או מדידה כלשהי. <u>הסתברות</u> היא ערך מספרי למאורעות שונים. אוסף כל המאורעות האפשריים בניסוי מסויים נקרא <u>מרחב המדגם</u> ומסומן ב-Ω.

דוגמאות

1. הטלת מטבע. $\Omega=\{T,H\}$ (Tail & Heads). אנו מניחים שאין עוד אפשרויות לניסוי. $\Pr\left(T\right)=\frac{1}{2}$ וגם $\Pr\left(H\right)=\frac{1}{2}$.
2. זורקים קוביה. $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. $\Pr\left(i\right)=\frac{1}{6}$, $\forall i\in[6]$.
3. זורקים שתי קוביות. $\Omega=\{(i,j):i,j\in[6]\}$.
4. גילו של אדם כלשהו (בשנים). $\Omega_1=\{x\in\mathbb{R}:x\geq0\}$. $\Omega_2=\mathbb{N}$.

$$A=\text{someone 60 y/o}\overset{\Omega_1}{=}\{x\in\mathbb{R}:60\leq x\leq61\}$$
$$\overset{\Omega_2}{=}\{60\}$$

לכן זה משנה מה מרחב המדגם שלנו!

פעולות על מאורעות

1. <u>חיתוך</u>: אם A,B מאורעות, גם $A\cap B$ מאורע.
2. <u>איחוד</u>: אם A,B מאורעות, גם $A\cup B$ מאורע.
3. <u>משלים</u>: אם A מאורע, $A^c=\{x\in\Omega:x\notin A\}$ מאורע.
4. <u>הפרש</u>: $A\backslash B=A\cap B^c$ מאורע.
5. <u>הפרט סימטרי</u>: $A\Delta B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A)$.

הגדרה תהי $\Omega\neq\varnothing$ ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קבוצות כך ש-$A_n\subseteq\Omega$, $\forall n$. נגדיר $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\in\Omega:x\in A_n,\forall n\in\mathbb{N}\}$ וגם $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\in\Omega:\exists n\in\mathbb{N},x\in A_n\}$.

דוגמה נגדיר $A_n=[0,\frac{1}{n})$. לכל $n\in\mathbb{N}$ אזי $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=A_1=[0,1)$ וגם $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0\}$.

הגדרה תהי $\Omega\neq\varnothing$ ותהי $\mathcal{F}\subseteq2^{\Omega}$ (כאשר $2^{\Omega}=P\left(\Omega\right)$ קבוצת כל תתי הקבוצות של Ω). נאמר כי $(\Omega,\mathcal{F})$ היא <u>σ-אלגברה</u> אם מתקיימות התכונות הבאות:

(i) $\mathcal{F}\neq\varnothing$.

(ii) $\forall A \in \mathcal{F}$, מתקיים $A^c = \Omega \backslash A \in \mathcal{F}$.

(iii) לכל $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n$ מתקיים $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

הערה תהי $(\Omega, \mathcal{F})$ σ-אלגברה ויהיו $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{F}$ אזי

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_N = A_1 \cup \cdots \cup A_N \cup A_N \cup \cdots = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

כאשר $\forall n \geq N$ נגדיר $A_n = A_N$. לכן $\bigcup_{n=1}^{N} A_n \in \mathcal{F}$ ולכן $\mathcal{F}$ סגורה לאיחודים סופיים.

משפט (דה מורגן) $\forall A, B \in \Omega$ מתקיים:

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

הוכחה: (ברור) ■

מסקנה תהי $(\Omega, \mathcal{F})$ σ-אלגברה. $\forall A, B \in \mathcal{F}$, גם $A \cap B \in \mathcal{F}$.

הוכחה: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \in \mathcal{F}$ ולכן מסגירות $\mathcal{F}$ למשלים, גם $A \cap B \in \mathcal{F}$. ■

משפט (דה מורגן המוכלל) יהיו $A_1, \cdots \subseteq \Omega$ אזי:

(i) $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

(ii) $\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c$.

הוכחה: (כמו דה מורגן הרגיל). ■

מסקנה תהי $(\Omega, \mathcal{F})$ σ-אלגברה. אם $A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n$ אזי גם $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

הוכחה: כמו המסקנה הקודמת. ■

הגדרה תהי $(\Omega, \mathcal{F})$ σ-אלגברה. פונקציה $\Pr : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ תקרא <u>פונקציית הסתברות</u> אם מתקיימות התכונות הבאות:

(i) $\forall A \in \mathcal{F}$, $0 \leq \Pr(A) \leq 1$.

(ii) $\Pr(\Omega) = 1$.

(iii) לכל סדרה $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$A_n \in \mathcal{F}$, $\forall n$ וגם $\forall n \neq m \in \mathbb{N}$ מתקיים $A_n \cap A_m = \varnothing$, מתקיים

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n)$$

הערה בפרט מתכונה (iii) נובע שהגבול חייב להיות קיים.

הערה אם $(\Omega,\mathcal{F})$ σ-אלגברה, אזי מהיות $\mathcal{F}\neq\varnothing$, הרי שקיימת $A\subseteq\Omega$ כך ש- $A\in\mathcal{F}$ לכן $A^c\subseteq\mathcal{F}$ ולכן $\Omega=A\cup A^c\in\mathcal{F}$ ולכן $\Pr(\Omega)$ מוגדרת.

מסקנות

1. נבחר $A_1=\Omega$, $A_n=\varnothing$, $\forall n\geq 2$. נשים לב כי $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\Omega$ וגם כי $A_n\cap A_m=\varnothing$, $\forall n\neq m\in\mathbb{N}$. לכן מ-$(iii)$,

$$\begin{aligned}1=\Pr(\Omega)=\Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(A_n)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Pr(A_n)=\lim_{n\to\infty}\Pr(A_1)+\sum_{n=2}^{N}\Pr(A_n)\\&=1+\lim_{n\to\infty}\sum_{n=2}^{N}\Pr(A_n)=1+\lim_{n\to\infty}(N-1)\Pr(\varnothing)\end{aligned}$$

ולכן $\lim_{n\to\infty}(N-1)\Pr(\varnothing)=0$ ולכן $\Pr(\varnothing)=0$.

2. בהינתן $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש- $A\cap B=\varnothing$, נגדיר $A_1=A$, $A_2=B$ ו- $A_n=\varnothing$, $\forall n\geq 3$ לכן

$$\Pr\left(A\biguplus B\right)=\Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(A_n)=\Pr(A)+0$$

ולכן $\Pr(A\biguplus B)=\Pr(A)+\Pr(B)$.

3. $\forall A\in\mathcal{F}$, $A\cap A^c=\varnothing$ ולכן

$$1=\Pr(\Omega)=\Pr\left(A\biguplus A^c\right)=\Pr(A)+\Pr(A^c)$$

ולכן $\Pr(A^c)=1-\Pr(A)$.

הערה אם Ω קבוצה, אזי:

(i) $\left(\Omega,2^{\Omega}\right)$ היא σ-אלגברה.

(ii) אם $\mathcal{F}=\{\varnothing,\Omega\}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F})$ σ-אלגברה.

(iii) תהי $\Omega,\varnothing\neq A\subseteq\Omega$ ותהי $\mathcal{F}=\{\varnothing,\Omega,A,A^c\}$ אזי $(\Omega,\mathcal{F})$.

דוגמאות

1. זורקים קוביה בעלת 6 פאות. נגדיר $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$. נגדיר $\Pr:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ ע"י $\Pr(i)=\frac{1}{6}$, $\forall i\in[6]$. נשים לב כי $\Pr$ פ' הסתברות.

א. מהו הסיכוי שיצאה תוצאה זוגית? $\Pr\left(\{2,4,6\}\right)=\Pr\left(2\right)+\Pr\left(4\right)+\Pr\left(6\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$.

ב. מה הסיכוי שהתוצאה לא 5? $\Pr\left(1,2,3,4,6\right)=1-\Pr\left(5\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$.

2. זורקים 2 קוביות. נגדיר $\Omega=\{(i,j):i,j\in[6]\}$ ונגדיר $\Pr\left(i,j\right)=\frac{1}{36}$, $\forall\left(i,j\right)\in\Omega$.

א. מהו $|\Omega|$? $|\Omega|=36$.

ב. מה הסיכוי שסכום התוצאות הוא 6? $A=\left\{(1,5),(2,5),(3,3),(4,2),(5,1)\right\}$. $\Pr\left(A\right)=\frac{5}{35}$.

ג. מה הסיכוי שהקוביה הראשונה יצאה 6? $A=\left\{(6,i):i\in[6]\right\}$, $\Pr\left(A\right)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$.

ד. מה הסיכוי שסכום הקוביות הוא זוגי? $\frac{1}{2}$.

הערה אם $\forall\omega\in\Omega$, $\Pr\left(\omega\right)$ זהה ואם $|\Omega|$ סופית אזי $\Pr\left(\omega\right)=\frac{1}{|\Omega|}$, $\forall\omega\in\Omega$. ולכן $\Pr\left(A\right)=\frac{|A|}{|\Omega|}$, $\forall A\subseteq\Omega$.

III

טענה (מונוטוניות) תהי $(\Omega,\mathcal{F})$ σ-אלגברה ותהי $\Pr:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ פ' הסתברות. יהיו $A,B\in\mathcal{F}$ כך ש- $A\subseteq B$ אזי $\Pr\left(A\right)\leq\Pr\left(B\right)$.

הוכחה: $B=\left(B\backslash A\right)\biguplus A$. לכן $\Pr\left(B\right)=\Pr\left(B\backslash A\right)+\Pr\left(A\right)\geq\Pr\left(A\right)$. ∎

הערה אפילו שיכול להיות שההסתברות של מאורע מסוים היא אפס (אפילו כל מאורע), זה לא אומר שאין סיכוי שהמאורע יקרה. לדוגמה, הטלת מספר ממשי בין 0 ל-1. ההסתברות להטיל חצי היא 0, אבל ההסתברות להגריל מספר מ-0 עד $\frac{1}{3}$ היא $\frac{1}{3}$.

הערה השלשה $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ נקראת מרחב ההסתברות.

טענה (הכלה והדחה $n=2$) יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מרחב הסתברות ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$ אזי $\Pr\left(A\cup B\right)=\Pr\left(A\right)+\Pr\left(B\right)-\Pr\left(A\cap B\right)$.

הוכחה: $A\cup B=\left(A\backslash B\right)\biguplus\left(B\backslash A\right)\biguplus\left(A\cap B\right)$. נשים לב כי $B=\left(B\backslash A\right)\biguplus\left(B\cap A\right)$ ולכן מההוכחה של מונוטוניות, $\Pr\left(B\backslash A\right)=\Pr\left(B\right)-\Pr\left(A\cap B\right)$ ובאותו האופן עבור A.

$$\begin{aligned}\Pr\left(A\cup B\right) & =\Pr\left(A\backslash B\right)+\Pr\left(B\backslash A\right)+\Pr\left(A\cap B\right)\\ & =\Pr\left(A\right)-\Pr\left(A\cap B\right)+\Pr\left(B\right)-\Pr\left(A\cap B\right)+\Pr\left(A\cap B\right)\\ & =\Pr\left(A\right)+\Pr\left(B\right)-\Pr\left(A\cap B\right)\end{aligned}$$

∎

תרגיל זורקים שני מטבעות. מה הסיכוי שלפחות אחד מהם יצא פלי?

פתרון $\Omega=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$. $\Pr(A)=\frac{|A|}{4}$, $\forall A\in\mathcal{F}=2^{\Omega}$. נגדיר A להיות המאורע שלפחות אחת מהתוצאות היא פלי, $A=\{(H,H),(H,T),(T,H)\}$ ולכן $\Pr(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$.

לחלופין, $\Pr(A^{c})=\Pr(\{(T,T)\})=\frac{1}{4}$ ולכן $\Pr(A)=\frac{3}{4}$.

לחלופין, נגדיר A המאורע שהראשון יצא H ו-B המאורע שהשני יצא B. $\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)=$ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

מסקנה לכל שני מאורעות $A,B\in\mathcal{F}$, $\Pr(A\cup B)\le\Pr(A)+\Pr(B)$.

טענה (הכלה והדחה $n=3$) יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה אזי $\forall A,B,C\in\mathcal{F}$ מתקיים

$$\Pr(A\cup B\cup C)=\Pr(A)+\Pr(B)+\Pr(C)-\Pr(A\cap B)-\Pr(A\cap C)-\Pr(B\cap C)+\Pr(A\cap B\cap C)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\Pr(A\cup B\cup C)&=\Pr(A\cup B)+\Pr(C)-\Pr((A\cup B)\cap C)\\&=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)+\Pr(C)-\Pr((A\cap C)\cup(B\cap C))\\&=\Pr(A)+\Pr(B)+\Pr(C)-\Pr(A\cap B)-\Pr(A\cap C)-\Pr(B\cap C)+\Pr((A\cap C)\cap(B\cap C))\\&=\Pr(A)+\Pr(B)+\Pr(C)-\Pr(A\cap B)-\Pr(A\cap C)-\Pr(B\cap C)+\Pr(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

כשהמעברים נובעים פשוט משימוש בהכלה והדחה עבור $n=2$. ■

הגדרה $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ יקרא <u>מ"ה סופי</u> אם Ω סופי. $\Pr$ תקרא <u>הסתברות אחידה</u> אם $\forall\omega_1,\omega_2\in\Omega$, $\Pr(\{\omega_1\})=\Pr(\{\omega_2\})$.

הערה אם $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה סופי ו-$\Pr$ הסתברות אחידה וגם $\{\omega\}\in\mathcal{F}$, $\forall\omega\in\Omega$. אזי $\forall A\in\mathcal{F}$, $\Pr(A)=\sum_{\omega\in A}\Pr(\{\omega\})=\frac{|A|}{|\Omega|}$.

דוגמאות

1. בקופסה חמישה כדורים שחורים ושלושה לבנים. בוחרים באקראי כדור ומחזירים אותו לקופסה ושוב מגרילים עוד כדור אקראית מתוך הכדור.

א. מה הסיכוי שהכדור הראשון שחור? $\Omega=[8]$, $B=[5]$. $\Pr(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{5}{8}$.

ב. מה הסיכוי ששני הכודרים בצבעים שונים זה מזה? $\Omega=[8]\times[8]$, $|\Omega|=64$. A הוא המאורע שהראשון שחור והשני לבן ו-B הוא המאורע שהראשון לבן והשני שחור. $\Pr(A\uplus B)=\Pr(A)+\Pr(B)=\frac{5\cdot3}{64}+\frac{3\cdot5}{64}=\frac{15}{32}$.

ג. מה הסיכוי שלפחות אחד מהם שחור? זה ההסתברות של המקרה הקודם איחוד זה עם C שהוא המאורע ששניהם שחורים. $\Pr(C)=\frac{|C|}{|\Omega|}=\frac{25}{64}$. $\Pr((A\cup B)\uplus C)=\frac{30}{64}+\frac{25}{64}=\frac{55}{64}$.

2. מגרילים מספר שלם בין 1 ל-100. מה הסיכוי שהוא לא מתחלק ב-5 ולא ב-7.

$\Omega = [100]$. A המאורע שהמספר מתחלק ב-5 ו-B המאורע שהמספר מתחלק ב-7. נרצה את $\Pr\left((A\cup B)^c\right)$.

$$\Pr\left((A\cup B)^c\right) = 1 - \Pr\left(A\cup B\right) = 1 - \left(\Pr\left(A\right) + \Pr\left(B\right) - \Pr\left(A\cap B\right)\right) = 1 - \left(\frac{20}{100} + \frac{14}{100} - \frac{2}{100}\right) = 1 - \frac{32}{100} = \frac{17}{25}$$

3. מה הסיכוי שמתוך 57 משפטים באינפי, שניים מהם בדיוק היו המשפט הנורא ומונוטוניות הגבול?

$|\Omega| = \binom{57}{2}$, $|A| = 1$ ולכן $\Pr\left(A\right) = \frac{1}{\binom{57}{2}} = \frac{1}{57\cdot 28}$.

4. מה הסיכוי לשלוף אקראית 4 קלפים מתוך חפיסה עם 52 קלפים ולקבל 4 אסים.

$|\Omega| = \binom{52}{4}$, $|A| = 1$ ולכן $\Pr\left(A\right) = \frac{1}{\binom{52}{4}}$.

$\mathbb{III}$

תרגילים

1. מערבבים חפיסה של 52 קלפים. מה הסיכוי שלאחר הערבוב החפיסה חזרה לסידור המקורי?

$|\Omega| = 52!$, $|A| = 1$ ולכן $\Pr\left(A\right) = \frac{1}{52!}$.

2. מערבבים חפיסה של 52 קלפים ומחלקים אותה בין 4 שחקנים כך שכל שחקן יקבל 13 קלפים. מה הסיכוי שאחד השחקנים יקבל את כל הלבבות.

נסמן ב-A_i את המאורע שהשחקן ה-i קיבל את כל הלבבות.

$$\Pr\left(\biguplus_{i=1}^{4} A_i\right) = 4\Pr\left(A_1\right) = 4\cdot\frac{39!}{52!}$$

3. בכיתה יש 7 טורקים, 5 הודים ו-4 סינים. בוחרים שני תלמידים באקראי.

מה היסיכוי שהראשון הודי?

$\Pr\left(A\right) = \frac{5}{16}$.

מה הסיכוי שבחרנו שני הודים?

$\Pr\left(A\right) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{16}{2}} = \frac{10}{20}$.

מה הסיכוי שבחרנו שני תלמידים מאותו מוצא?

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A\right) &= \Pr\left(H,H\right)+\Pr\left(C,C\right)+\Pr\left(T,T\right)\\
&= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{16}{2}}+\frac{\binom{4}{2}}{\binom{16}{2}}+\frac{\binom{7}{2}}{\binom{16}{2}}\\
&= \frac{37}{120}
\end{aligned}$$

מה הסיכוי שלפחות אחד הילדים הוא הודי?

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A\right) &= \Pr\left(H,H\right)+\Pr\left(C,H\right)+\Pr\left(T,H\right)\\
&= \frac{\binom{5}{2}}{\binom{16}{2}}+\frac{\binom{4}{1}\binom{5}{1}}{\binom{16}{2}}+\frac{\binom{7}{1}\binom{5}{1}}{\binom{16}{2}}\\
&= \frac{10+20+35}{120}=\frac{13}{24}
\end{aligned}$$

מה הסיכוי ששני הילדים שבחרנו הם ממוצא שונה?

$$\begin{aligned}
\Pr\left(A\right) &= \Pr\left(T,H\right)+\Pr\left(C,H\right)+\Pr\left(T,C\right)\\
&= \frac{7\cdot 5}{\binom{16}{2}}+\frac{4\cdot 5}{\binom{16}{2}}+\frac{7\cdot 4}{\binom{16}{2}}=\frac{83}{120}\\
&= 1-\frac{37}{120}
\end{aligned}$$

בעיה (בעיית יום ההולדת) בבחירת k אנשים, מה הסיכוי שלפחות לשניים מהם יהיה יומולדת באותו היום?

פתרון יהי A המאורע הנ"ל. Ω הוא כל התאריכים האפשריים ל-k אנשים. $|\Omega|=365^k$. A^c הוא המאורע שאין שניים שנולדו באותו התאריך. $|A^c|=365\cdot 364\cdot\dots\cdot(365-k+1)$. $\Pr\left(A^c\right)=\frac{365\cdot\dots\cdot(365-k+1)}{365^k}$ ולכן $\Pr\left(A\right)=1-\Pr\left(A^c\right)$. עבור $k=25$, מקבלים $\Pr\left(A^c\right)<\frac{1}{2}$.

בעיה (בעיית הכובעים) יש n אנשים ולכל אחד מהם יש כובע יחודי לו. לוקחים להם את כל הכובעים ומחלקים באקראי את הכובעים בין האנשים. מה הסיכוי שאף אחד מהם לא קיבל בחזרה את הכובע שלו?

פתרון Ω הוא אוסף כל האפשרויות לסדר n כובעים. $|\Omega|=n!$. יהי A המאורע שאף אחד לא קיבל את הכובע של עצמו. לכן A^c המאורע שלפחות אחד קיבל את כובעו. נסמן B_i את המאורע שהאדם ה-i קיבל בחזרה את הכובע שלו ולכן $A^c=\bigcup_{i=1}^{n}B_i$ (אבל זה לא איחוד זר).

$$\Pr\left(A^c\right)=\Pr\left(\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pr\left(B_i\right)-\sum_{1\le i<j\le n}\Pr\left(B_i\cap B_j\right)+\dots+(-1)^{n+1}\Pr\left(B_1\cap\dots\cap B_n\right)$$

שים לב כי אין הבדל בין הנאישם ולכן $\Pr(B_i)=\Pr(B_1)$, $\Pr(B_i\cap B_j)=\Pr(B_1\cap B_i)$ וכו'. לכן $\Pr(A^c)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(-1)^{i+1}\Pr(B_1\cap\cdots\cap B_i)$.

$\Pr(B_1)=\frac{|B_1|}{|\Omega|}=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$, $\Pr(B_1\cap B_2)=\frac{|B_1\cap B_2|}{|\Omega|}=\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{1}{n(n-1)}$ ולכן $\Pr(A^c)=\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}$ ולכן $\Pr(A)=1-\Pr(A^c)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e}$.

דוגמה מטלים שתי קוביות. מה הסיכוי שהסכום יצא 5?

$\Omega=[6]^2$. $A=\{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$. $\Pr(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{1}{9}$.

נניח שקיבלנו בקוביה הראשונה 3. מה הסיכוי שהסכום יצא 5.

$F=\{3\}\times[6]$ הוא מרחב המדגם החדש. $B=\{(3,2)\}$. $\Pr(B)=\frac{|B|}{|F|}=\frac{1}{6}$.

נשים לב כי $B=A\cap F$ ולכן $\Pr(B)=\frac{|A\cap F|}{|F|}=\frac{\frac{|A\cap F|}{|\Omega|}}{\frac{|F|}{|\Omega|}}=\frac{\Pr(A\cap F)}{\Pr(F)}$.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו $A,F\in\mathcal{F}$ כך ש- $\Pr(F)\neq 0$. נגדיר את <u>ההסתברות המותנית</u> של A בהינתן המאורע F ע"י $\Pr(A\mid F)=\frac{\Pr(A\cap F)}{\Pr(F)}$.

דוגמה נתונים 5 כדורים צהובים, 10 שחורים ו-10 לבנים בתוך קופסה. בוחרים כדור באקראי. מה הסיכוי שיצא צהוב?

$\Pr(A)=\frac{5}{24}=\frac{1}{5}$.

מה הסיכוי שיצא צהוב בהינתן שלא יצא שחור?

A הוא המאורע שיצא צהוב. F הוא המאורע שלא יצא שחור. $\frac{1}{3}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{15}{25}}=\frac{\Pr(A\cap F)}{\Pr(F)}=\Pr(A\mid F)$.

ממוציאים שני כדורים (שונים) מהקופסה. מה הסיכוי שהשני צהוב, בהינתן שהראשון צהוב?

A הוא המאורע שהשני צהוב ו-F הוא המאורע שהראשון צהוב. $\Pr(A\mid F)=\frac{\frac{\binom{5}{2}}{\binom{25}{2}}}{\frac{5}{25}}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{6}$.

IV

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהי $F\in\mathcal{F}$, $\Pr(F)\neq 0$. נגדיר $\forall A\in\mathcal{F}$, $\mathrm{Qr}(A)=\frac{\Pr(A\cap F)}{\Pr(F)}\ (=\Pr(A\mid F))$ אזי Qr פ' הסתברות על Ω.

הוכחה: (i) $0\leq\mathrm{Qr}(A)=\frac{\Pr(A\cap F)}{\Pr(F)}\leq\frac{\Pr(F)}{\Pr(F)}=1$.

(ii) $\mathrm{Qr}(\Omega)=\frac{\Pr(\Omega\cap F)}{\Pr(F)}=\frac{\Pr(F)}{\Pr(F)}=1$.

(iii) תהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות זרים.

$$\begin{aligned}\text{Qr}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right) &= \frac{\Pr\left(\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap F\right)}{\Pr\left(F\right)}\\ &= \frac{\Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cap F\right)\right)}{\Pr\left(F\right)}\\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\Pr\left(A_n\cap F\right)}{\Pr\left(F\right)}\\ &\overset{(*)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Pr\left(A_n\cap F\right)}{\Pr\left(F\right)}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\text{Qr}\left(A_n\right)\end{aligned}$$

$(*)$ $x\in\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n\right)\cap F$ אם"ם $x\in F$ וגם $x\in\biguplus_{n=1}^{\infty}A_n$ כלומר אם"ם $x\in F$ וגם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$x\in A_n$ כלומר אם"ם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $x\in A_n\cap F$ אם"ם $x\in\biguplus_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cap F\right)$. בנוסף $\left(A_i\cap F\right)\cap\left(A_j\cap F\right)=A_i\cap A_j\cap F=\varnothing$. ■

הגדרה יהיו $A_1,\ldots,A_n\subseteq\Omega$. נאמר כי $A_1,\ldots,A_n$ הם <u>חלוקה</u> של Ω אם:

(i) $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$.

(ii) $i\neq j\Rightarrow A_i\cap A_j=\varnothing$.

הערה אם $A_1,\ldots,A_n$ הם חלוקה של Ω, אזי $\forall B\subseteq\Omega$, $\biguplus_{i=1}^{n}A_i\cap B=B\cap\left(\biguplus_{i=1}^{n}A_i\cap B\right)=B\cap\Omega=B$.

מסקנה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ חלוקה של Ω. אזי $\forall B\in\mathcal{F}$, $\Pr\left(B\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pr\left(A_i\cap B\right)$.

מסקנה (חוק ההסתברות השלמה) יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ חלוקה של Ω. נניח כי $\Pr\left(A_i\right)\neq 0$, $\forall i\in[n]$. אזי $\forall B\in\mathcal{F}$, $\Pr\left(B\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pr\left(B\mid A_i\right)\Pr\left(A_i\right)$.

הוכחה:

$$\Pr\left(B\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pr\left(A_i\cap B\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Pr\left(A_i\cap B\right)}{\Pr\left(A_i\right)}\Pr\left(A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\Pr\left(B\mid A_i\right)\Pr\left(A_i\right)$$

■

מסקנה יהי $A\in\mathcal{F}$ כך ש- $0<\Pr\left(A\right)<1$. נשים לב כי A,A^c חלוקה של Ω וכי $\Pr\left(A^c\right)=1-\Pr\left(A\right)\neq 0$. לכן, $\forall B\in\mathcal{F}$, $\Pr\left(B\right)=\Pr\left(B\mid A\right)\Pr\left(A\right)+\Pr\left(B\mid A^c\right)\Pr\left(A^c\right)$.

מסקנה (חוק בייס) $\forall A,B\in\mathcal{F}$ כך ש- $\Pr\left(A\right),\Pr\left(B\right)\neq 0$ מתקיים $\Pr\left(B\mid A\right)=\Pr\left(A\mid B\right)\cdot\frac{\Pr\left(B\right)}{\Pr\left(A\right)}$.

הוכחה:

$$\Pr\left(B \mid A\right) = \frac{\Pr\left(A\cap B\right)}{\Pr\left(A\right)} = \frac{\Pr\left(A\cap B\right)}{\Pr\left(B\right)}\cdot\frac{\Pr\left(B\right)}{\Pr\left(A\right)} = \Pr\left(A \mid B\right)\frac{\Pr\left(B\right)}{\Pr\left(A\right)}$$

$\blacksquare$

דוגמאות

1. יוסי מתלבט אם ללמוד ספרות או הסתברות. אם הוא ילמד הסתברות, הוא יעבור את הקורס בהסתברות $\frac{1}{3}$. אם הוא ילמד ספרות, אז הוא יעבור את הקורס בהסתברות $\frac{1}{2}$. יוסי החליט לבחור את הקורס באמצעות הטלת מטבע. מה הסיכוי שיוסי עבור את הבחינה בהסתברות?

$\Omega = \left\{\left(\text{ה},P\right),\left(\text{ה},F\right),\left(\text{ס},P\right),\left(\text{ס},F\right)\right\}$. נסמן $A = \left\{\left(\text{ה},P\right),\left(\text{ס},P\right)\right\}$ המאורע שיוסי עבר את אחד הקורסים ו-$B = \left\{\left(\text{ה},P\right),\left(\text{ה},F\right)\right\}$ המאורע שיוסי למד ספרות. נרצה לחשב את $\Pr\left(A\cap B^c\right)$. $\Pr\left(A \mid B^c\right) = \frac{1}{3}, \Pr\left(A \mid B\right) = \frac{1}{2}$, $\Pr\left(B\right) = \frac{1}{2}$. לכן $\Pr\left(A\cap B^c\right) = \Pr\left(A \mid B^c\right)\Pr\left(B^c\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

מה הסיכוי שיעבור?

$$\Pr\left(A\right) = \Pr\left(A \mid B\right)\Pr\left(B\right) + \Pr\left(A \mid B^c\right)\Pr\left(B^c\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}+\frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

2. במעבדה לקורונה הסיכוי לחיובי כוזב הוא 5% והסיכוי לחיובי כוזב הוא 1%. מעריכים שבערך 0.5% מהאוכלוסיה הם נשאים של וירוס הקורונה. בהינתן שקיבלתי תוצאה חיובית, מה הסיכוי שאני נשא?

נסמן A הוא המאורע שיש לי קורונה. B הוא המאורע שהתוצאה חיובית. נרצה לחשב את $\Pr\left(A \mid B\right)$. נתון $\Pr\left(A\right) = 0.005$, $\Pr\left(B \mid A^c\right) \overset{\text{חיובי כוזב}}{=} 0.01$. $\Pr\left(B^c \mid A\right) \overset{\text{שלילי כוזב}}{=} 0.05$. נשים לב כי $\Pr\left(A \mid B\right) = \frac{\Pr\left(B \mid A\right)\cdot\Pr\left(A\right)}{\Pr\left(B\right)}$.

$$\Pr\left(B \mid A\right) = 1 - \Pr\left(B^c \mid A\right) = 1 - 0.05 = 0.95$$

$$\begin{aligned}\Pr\left(B\right) &= \Pr\left(B \mid A\right)\cdot\Pr\left(A\right) + \Pr\left(B \mid A^c\right)\Pr\left(A^c\right)\\ &= 0.95\cdot 0.005 + 0.01\cdot 0.995\\ &= 0.0147\end{aligned}$$

$$\Pr\left(A \mid B\right) = \frac{0.95\cdot 0.005}{0.0147} = 0.323$$

3. בהנתן שלאדם יש שני ילדים שלפחות אחד מהם הוא בן, מה הסיכוי שגם השני בן?

$\Omega = \{\cancel{(F,F)}, (F,M), (M,F), (M,M)\}$. לכן ההסתברות היא $\frac{1}{3}$.

פגשתי את הבן והוא גילה אם הוא הבכור או הצעיר. מה הסיכוי שהשני בן?

אם הוא אמר שהוא הצעיר אז $\Omega = \{\cancel{(F,F)}, \cancel{(F,M)}, (M,F), (M,M)\}$ ולכן ההסתברות היא $\frac{1}{2}$ ובאותו האופן אם הוא הבכור ולכן בכל מקרה ההסתברות היא $\frac{1}{2}$.

הגדרה יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה. יהיו $A, B \in \mathcal{F}$. נאמר כי A, B הם בלתי תלויים אם $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \cdot \Pr(B)$.

הערה אם $\Pr(A), \Pr(B) \neq 0$ ו-A, B ב"ת אזי $\Pr(A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)} = \Pr(A \mid B)$ וגם $\Pr(B \mid A) = \Pr(B)$.

הערה אי תלות הוא יחס סימטרי.

דוגמאות

1. בוחרים קלף מחפיסת קלפים. A הוא המאורע שיצא אס ו-B הוא המאורע שיצא לב. האם A, B ב"ת?

$\Pr(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$, $\Pr(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. ולכן $\Pr(A \cap B) = \frac{1}{52} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{13}$ ולכן A, B ב"ת.

2. זורקים קוביה. A הוא המאורע שבהטלה הראשונה יצא 4, B המאורע שהסכום יצא 6 ו-C הוא המאורע שהסכום יצא 7. האם A, B ב"ת?

$\Pr(A) = \frac{1}{6}$, $\Pr(B) = \Pr(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = \frac{5}{36}$. $\Pr(A \cap B) = \Pr(\{(4,2)\}) = \frac{1}{36}$ ולכן המאורעות תלויים.

האם A, C בת"ל?

$\Pr(A) = \frac{1}{6}$, $\Pr(C) = \Pr(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{1}{6}$. $\Pr(A \cap C) = \Pr(\{4,3\}) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$.

$\mathbb{V}$

תרגיל בשקית בלונים יש בלונים ב-4 צבעים: אדום, כחול, צהוב וירוק. נתון כי 15% מהבלונים אדומים, 25% כחולים, 40% צהובים ו-20% ירוקים. ההסתברות שבלון אדום יתפוצץ בזמן ניפוח היא $\frac{1}{6}$. הסיכוי שכחול יתפוצץ בזמן ניפוח הוא $\frac{1}{8}$, של צהוב $\frac{1}{2}$ וירוק $\frac{1}{5}$.

א. בוחרים בלון באקראי, מה הסיכוי שהוא יתפוצץ בזמן הניפוח?

ב. בהנחה שהבלון שבחרנו התפוצץ, מה הסיכוי שהוא היה אדום?

פתרון א. יהי A_1 המאורע שבחרנו בלון אדום, A_2 כחול, A_3 צהוב, A_4 ירוק. יהי B המאורע שהבלון יתפוצץ בזמן הניפוח.

$$P(A_1) = 0.15, P(A_2) = 0.25, P(A_3) = 0.4, P(A_4) = 0.2$$

$$P(B\mid A_1)=\frac{1}{6},P(B\mid A_2)=\frac{1}{8},P(B\mid A_3)=\frac{1}{2},P(B\mid A_4)=\frac{1}{5}$$

$A_1,\ldots,A_4$ היא חלוקה של Ω, ולכן

$$\begin{aligned}P(B)&=\sum_{i=1}^{4}P(B\mid A_i)P(A_i)\\&=\frac{1}{6}\cdot0.15+\frac{1}{8}\cdot0.25+\frac{1}{2}\cdot0.4+\frac{1}{5}0.2\\&=0.29625\end{aligned}$$

ב.

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(B\mid A_1)P(A_1)}{P(B)}=\frac{1}{6}\cdot0.15\cdot0.29625=0.084\ldots$$

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהי $A\in\mathcal{F}$ אזי:

(i) A,Ω ב"ת.

(ii) $A,\varnothing$ ב"ת.

הוכחה: (i) $\Pr(A\cap\Omega)=\Pr(A)=\Pr(A)\cdot\Pr(\Omega)$.

(ii) $\Pr(A\cap\varnothing)=\Pr(\varnothing)=0=\Pr(\varnothing)\Pr(A)$. ■

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו $A,B\in\mathcal{F}$. אם A,B ב"ת אזי גם A^c,B ב"ת.

הוכחה: נשים לב כי $B=(B\cap A)\uplus(B\cap A^c)$ ולכן $\Pr(B)=\Pr(A\cap B)+\Pr(A^c\cap B)$ ולכן

$$\begin{aligned}\Pr(A^c\cap B)&=\Pr(B)-\Pr(A\cap B)\\&=\Pr(B)-\Pr(A)\cdot\Pr(B)\\&=\Pr(B(1-\Pr(A)))\\&=\Pr(B)\Pr(A^c)\end{aligned}$$

■

דוגמה זורקים שתי קוביות. A הוא שהקוביה הראשונה יצא 4, B הקוביה השנייה יצא 2 ו-C שסכום הקוביות הוא 7. נשים לב כי A,B ב"ת וגם כי A,B ב"ת. בנוסף B,C ב"ת (מחישוב פשוט). עם זאת, A,B,C אינם בלתי תלויים (ברור).

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו $A,B,C\in\mathcal{F}$. נאמר כי A,B,C הם <u>בלתי תלויים אם</u>: A,B ב"ת, A,C ב"ת וגם B,C ב"ת וגם $\Pr(A\cap B\cap C)=\Pr(A)\cdot\Pr(B)\cdot\Pr(C)$.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו $A_1,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$. נאמר כי הם ב"ת אם $\forall k\in[n]$ ולכל $1\leq i_1<\cdots<i_k\leq n$ מתקיים $\Pr(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k})=\Pr(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot\Pr(A_{i_k})$.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות. נאמר שהמאורעות הם ב"ת אם כל תת קבוצה סופית של $\{A_1,A_2,\ldots\}$ היא ב"ת.

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו $A,B,C\in\mathcal{F}$ אזי

(i) A ו-$B\cup C$ הם ב"ת.

(ii) A ו-$B\backslash C$ הם ב"ת.

הוכחה: (i)

$$\begin{aligned}
\Pr(A\cap(B\cup C)) &= \Pr((A\cap B)\cup(A\cap C))\\
&=\Pr(A\cap B)+\Pr(A\cap C)-\Pr(A\cap B\cap C)\\
&=\Pr(A)\Pr(B)+\Pr(A)\Pr(C)-\Pr(A)\Pr(B)\Pr(C)\\
&=\Pr(A)(\Pr(B)+\Pr(C)-\Pr(B)\Pr(C))\\
&=\Pr(A)\Pr(B\cup C)
\end{aligned}$$

(ii) נשים לב כי $\Pr(A\cap B\cap C)=\Pr(A\cap B)\Pr(C)$ ולכן $A\cap B$, C הם ב"ת. לכן גם $A\cap B$, C^c ב"ת ולכן

$$\begin{aligned}
\Pr(A\cap(B\backslash C)) &= \Pr((A\cap B)\cap C^c)\\
&=\Pr(A\cap B)\Pr(C^c)\\
&=\Pr(A)\Pr(B)\Pr(C^c)\\
&=\Pr(A)\Pr(B\cap C^c)\\
&=\Pr(A)\Pr(B\backslash C)
\end{aligned}$$

■

הערה באותו האופן A,B,C ב"ת אז כל מאורע הנוצר ע"י A $(A,A^c,\varnothing,\Omega)$ הוא ב"ת בכל מאורע הנוצר ע"י B,C.

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות. נאמר כי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$

<u>עולה</u> אם $A_n\subseteq A_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

<u>יורדת</u> אם $A_n\supseteq A_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה של מאורעות. $\Pr\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim\limits_{N\to\infty}\Pr\left(A_N\right)$.

הוכחה: נביט בסדרה $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י $B_1=A_1$, $B_2=A_2\backslash A_1$, $B_n=A_n\backslash A_{n-1}$. נשים לב כי $B_1,B_2,\ldots$ הם מאורעות זרים, כלומר $\forall i\neq j$, $B_i\cap B_j=\varnothing$. לכן עבור $i<j$ מתקיים $A_{j-1}\subseteq A_i\subseteq B_i$ ומהיות $A_{j-1}\cap B_j=\varnothing$ אזי גם $B_i\cap B_j=\varnothing$.
בנוסף, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\biguplus\limits_{n=1}^{\infty}B_n$ וכן $\bigcup\limits_{n=1}^{N}A_n=\biguplus\limits_{n=1}^{N}B_n$. לכן

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty}B_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Pr\left(B_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\Pr\left(\biguplus_{n=1}^{N}B_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{N}A_n\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\Pr\left(A_N\right)\end{aligned}$$

■

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת של מאורעות. אזי $\Pr\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\lim\limits_{N\to\infty}\Pr\left(A_N\right)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}1-\Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)&=\Pr\left(\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)^c\right)\\&\overset{\text{דה מורגן}}{=}\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n^c\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\Pr\left(A_N^c\right)\\&=\lim_{N\to\infty}\left(1-\Pr\left(A_N\right)\right)\\&=1-\lim_{N\to\infty}\Pr\left(A_n\right)\end{aligned}$$

■

הערה בהינתן סדרת מאורעות, $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ (לאו דווקא מונוטונית), נגדיר $B_n=\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ ו-$C_n=\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ לכל $n\in\mathbb{N}$. נשים לב כי (B_n)

סדרה עולה ו-$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ ולכן

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Pr\left(B_N\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right)\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Pr\left(C_N\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right)\end{aligned}$$

הגדרה יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה ותהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת מאורעות. נגדיר $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ וכן $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

הערה $\limsup A_n = \{\omega \in \Omega : \text{באופן שכיח } \omega \in A_n\}$ וכן $\liminf A_n = \{\omega \in \Omega : \text{כמעט תמיד } \omega \in A_n\}$.

$\mathbb{VI}$

הערה $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$.

דוגמה $A_n = \begin{cases}\{2,4,\ldots & 2 \mid n \\ 1,3,\ldots & 2 \nmid n\end{cases}$. $\limsup A_n = \mathbb{N}$, $\liminf A_n = \varnothing$.

דוגמה $A_n = \begin{cases}\{1\} & 2 \mid n \\ \mathbb{N} & 2 \nmid n\end{cases}$, $\limsup A_n = \mathbb{N}$, $\liminf A_n = \{1\}$.

טענה (א"ש Boole) לכל סדרת מאורעות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ מתקיים $\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(A_n\right)$.

הוכחה: נגדיר $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$, $\forall n \geq 2$. נשים לב כי $\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ וגם $B_n \subseteq A_n$.

$$\Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(A_n\right)$$

$\blacksquare$

משפט (Borel-Cantelli 1) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה. תהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) < \infty$ אזי $\Pr(\limsup A_n) = 0$.

הוכחה: יהי $n_0 \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\Pr(\limsup A_n) &= \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \\
&\overset{\text{מונוטוניות}}{\leq} \Pr\left(\bigcup_{k=n_0}^{\infty} A_k\right) \\
&\overset{\text{א"ש Boole}}{\leq} \sum_{n=n_0}^{\infty} \Pr(A_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) - \sum_{n=1}^{n_0-1} \Pr(A_n)
\end{aligned}$$

ולכן ממונוטוניות הגבול,

$$\Pr(\limsup A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) - \lim_{n_0 \to \infty} \sum_{n=1}^{n_0-1} \Pr(A_n) = 0$$

ולכן $\Pr(\limsup A_n) = 0$. $\blacksquare$

משפט (Borel-Cantelli 2) יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה. תהי $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות ב"ת. נניח כי $\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) = \infty$ אזי $\Pr(\limsup A_n) = 1$.

הוכחה: מספיק להוכיח כי $\Pr((\limsup A_n)^c) = 0$. נשים לב כי

$$(\limsup A_n)^c = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$

ולכן

$$\Pr((\limsup A_n)^c) = \Pr\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k^c\right) \overset{\text{א"ש Boole}}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_k^c\right)$$

לכן מספיק להוכיח ש-$\forall n\in\mathbb{N}$, $\Pr\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c\right)=0$. נשים לב כי

$$
\begin{aligned}
\Pr\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k^c\right) &= \lim_{N\to\infty}\Pr\left(\bigcap_{k=n}^{N}A_k^c\right)\\
&\overset{\text{ב"ת}}{=} \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}\left(\Pr\left(\left(A_k^c\right)\right)\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}\left(1-\Pr\left(A_k\right)\right)\\
&\overset{(*)}{\le} \lim_{N\to\infty}\prod_{k=n}^{N}e^{-\Pr\left(A_k\right)}\\
&= \lim_{N\to\infty}e^{-\sum_{k=n}^{N}\Pr\left(A_k\right)}\\
&= e^{-\sum_{k=n}^{\infty}\Pr\left(A_k\right)}\\
&= e^{-\infty}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$(*)$ $\forall x\ge 0$, $1-x\le e^{-x}$ אם"ם $f\left(x\right)=e^{-x}+x-1\ge 0$, $f'\left(x\right)=-e^{-x}+1\ge 0$ ובנוסף $f\left(0\right)=0$.

$(**)$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{\infty}\Pr\left(A_k\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\Pr\left(A_k\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\Pr\left(A_k\right)\\
&= \infty-c=\infty
\end{aligned}
$$

■

דוגמה מטילים מטבע לא מאוזן עם $\Pr\left(H\right)=p$, $\Pr\left(T\right)=1-p$, ∞ פעמים.

א. מה הסיכוי שיצא H אינסוף פעמים?

נסמן A_n את המאורע שבהטלה ה-n יצא H. נשים לב כי $\Pr\left(A_n\right)=p$, $\forall n\in\mathbb{N}$ וברור כי המאורעות הם ב"ת. נשים לב כי

$$
\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\left(A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}p=\infty
$$

ולכן מבורל קנטלי 2, $\Pr\left(\limsup A_n\right)=1$.

ב. מה הסיכוי שיצא HTH רצוף אינסוף פעמים?

נסמן ב-A_n את המאורע שבהטלה ה-n-ית H, ב-$n+1$-ית T וב-$n+2$-ית H. נשים לב כי $\Pr\left(A_n\right)=p^2\left(1-p\right)$. $A_1,A_4,A_7,\ldots$

ב"ת וכי

$$\sum_{k=1}^{\infty}\text{Pr }(A_{3k-2})=\text{Pr }(A_1)+\text{Pr }(A_4)+\ldots$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}p^2(1-p)=\infty$$

ולכן $\text{Pr }(\limsup A_{3k-2})=1$ ולכן $\text{Pr }(\limsup A_n)=1$.

$\mathbb{VIII}$

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\text{Pr})$ מ"ה. <u>משתנה מקרי</u> הוא פ' $x:\Omega\to S$ כאשר $S\subseteq\mathbb{R}$.

דוגמה הטלת שתי קוביות. ראינו כי $\Omega=[6]\times[6]$. נגדיר $x:\Omega\to\{2,\ldots 12\}$ ע"י $x(i,j)=i+j$.

הערה S לא נקבע ביחידות.

הערה ההגדרה המדויקת למ"מ הוא פ' מדידה (כלומר, שלכל (a,b), $x^{-1}(a,b)$ הוא מאורע).

הגדרה תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ ויהי $x:\Omega\to S$ מ"מ. נגדיר $x^{-1}(A)=\{\omega\in\Omega:x(\omega)\in A\}$.

דוגמה עבור $x(i,j)=i+j$, $x^{-1}\{2,3\}=\{(1,1),(1,2),(2,1)\}$.

הערה x לא חייב להיות חח"ע ועדיין $x^{-1}(A)$ מוגדר.

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\text{Pr})$ מ"ה ויהי $x:\Omega\to S$ מ"מ. אזי:

(i) $x^{-1}(S)=\Omega$ ו-$x^{-1}(\varnothing)=\varnothing$.

(ii) $\forall A\subseteq S$, $x^{-1}(A^c)=\left(x^{-1}(A)\right)^c$.

(iii) לכל $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש-$A_n\subseteq S$, $\forall n\in\mathbb{N}$, מתקיים $x^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty}x^{-1}(A_n)$.

(iv) $x^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}x^{-1}(A_n)$.

הערה ניתן גם להגדיר $x(A)$, אבל התמונה של A כבר לא מקיימת את תכונות המשפט. לדוגמה $(x(A))^c\neq x(A^c)$ במקרה של פ' קבועה.

הוכחה: (i) ברור.

(ii) $\omega\in x^{-1}(A^c)$ אם"ם $x(\omega)\in A^c$ אם"ם $x(\omega)\notin A$ אם"ם $\omega\notin x^{-1}(A)$ אם"ם $\omega\in\left(x^{-1}(A)\right)^c$.

(iii) $\omega\in x^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\right)$ אם"ם $x(\omega)\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$ אם"ם $x(\omega\in A_n)$, $\forall n$ אם"ם $\omega\in x^{-1}(A_n)$, $\forall n$ אם"ם $\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}x^{-1}(A_n)$ אם"ם $\omega\in\bigcap_{n=1}^{\infty}x^{-1}(A_n)$.

(iv) אותו הדבר רק עם קיים במקום לכל. ■

הגדרה יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה ויהי $x : \Omega \to S$ מ"מ. נגדיר $\forall A \subseteq S$, $\mathrm{Px}\left(A\right) = \Pr\left(x^{-1}\left(A\right)\right)$ (בשפת העם, $\mathrm{Px}\left(A\right) = \Pr\left(x \in A\right)$).

הערה ע"מ ש-Px תהיה מוגדרת היטב אנו מניחים כי $x^{-1}\left(A\right)$ אכן מאורע.

משפט Px מגדירה פ' הסתברות על S.

הוכחה: (i) $\mathrm{Px}\left(S\right) = \Pr\left(x^{-1}\left(S\right)\right) = \Pr\left(\Omega\right) = 1$.

(ii) $\forall A \subseteq S$, $\mathrm{Px}\left(A\right) = \Pr\left(x^{-1}\left(A\right)\right) \in [0,1]$.

(iii)

$$\begin{aligned}\mathrm{Px}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \Pr\left(x^{-1}\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right) \\ &= \Pr\left(\biguplus_{n=1}^{\infty} A_n x^{-1}\left(A_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\left(x^{-1}\left(A_n\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Px}\left(A_n\right)\end{aligned}$$

■

הערה $\forall A, B \subseteq S$ כך ש-$A \cap B = \varnothing$ מתקיים

$$x^{-1}\left(A\right) \cap x^{-1}\left(B\right) = x^{-1}\left(A \cap B\right) = x^{-1}\left(B\right) = \varnothing$$

דוגמה $x\left(i,j\right) = i + j$.

$$\mathrm{Px}\left\{2,3\right\} = \Pr\left(x^{-1}\left\{2,3\right\}\right) = \Pr\left(\left\{\left(1,1\right),\left(1,2\right),\left(2,1\right)\right\}\right) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

הערה נסמן $\Pr\left(x = k\right) = \Pr\left(\left\{\omega \in \Omega : x\left(\omega\right) = k\right\}\right)$ וכו'.

הגדרה יהי $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ מ"ה ויהי $x : \Omega \to S$ מ"מ. <u>פונקציית ההתפלגות</u> של x מוגדרת ע"י $\mathrm{Fx}\left(t\right) = \Pr\left(x \le t\right)$.

דוגמאות

1. $x\left(i,j\right)=i+j$.

$$\mathrm{Fx}\left(0\right)=\Pr\left(\varnothing\right)=0$$
$$\mathrm{Fx}\ \left(2\right)=\Pr\ \left(x\leq2\right)=\tfrac{1}{36}$$
$$\mathrm{Fx}\ \left(3\right)=\tfrac{1}{12}$$

וכו', כלומר במקרה זה Fx היא פ' מדרגות.

2. מגרילים מס' x בין 0 ל-1. מהי $\mathrm{Fx}\ \left(t\right)$? במקהר זה זו תהיה פ' קבועה למעט בין 0 ל-1, שבה היא תהיה לינארית מ-0 ל-1.

הערה פ' ההתפלגות היא רציפה מימין.

הערה בהינתן Fx, ניתן לשחזר את Px לקבוצות אחרות. לדוגמה,

$$\Pr\ \left(x>b\right)=1-\Pr\ \left(x\leq b\right)=1-\mathrm{Fx}\ \left(b\right)$$

$$\Pr\ \left(x\leq b\right)=\Pr\ \left(x\leq a\right)+\Pr\ \left(a<x\leq b\right)$$

ולכן

$$\Pr\ \left(a<x\leq b\right)=\Pr\ \left(x\leq b\right)-\Pr\ \left(x\leq a\right)=\mathrm{Fx}\ \left(b\right)-\mathrm{Fx}\ \left(a\right)$$

$$\begin{aligned}\Pr\ \left(x<b\right)&=\Pr\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\omega\in\Omega\right\}:x\left(\omega\right)\leq b-\frac{1}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\Pr\ \left(\left\{\omega\in\Omega:x\left(\omega\right)\leq\frac{1}{n}\right\}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Fx}\ \left(b-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

הגדרה יהי $\left(\Omega,\mathcal{F},\Pr\right)$ מ"ה ויהיו $x,y:\Omega\to S$ מ"מ. נאמר כי x,y <u>שווי התפלגות</u> (או ש-x מתפלג כמו y) ונסמן $x\sim y$ אם $\mathrm{Fx}\ \left(t\right)=\mathrm{Fy}\left(t\right)$, $\forall t\in\mathbb{R}$.

תרגיל מוציאים באאקראי 3 כדורים מוך קופסה של 10 כדורים המסומנים מ-1 עד 10. מה הסיכוי שלפחות אחד מהכדורים הוא ≥ 4?

פתרון נגדיר $\Omega=[10]^3$. נשים לב כי $|\Omega|=\binom{10}{3}$. נגדיר $x:\Omega\to[10]$ ע"י $x=i$ (i,j,k). נרצה לחשב את $\Pr\ (x\leq 4)$.

$$\Pr\ (x=a)=\frac{\binom{10-a}{2}}{|\Omega|}$$

$$\begin{aligned}\Pr\ (x\leq 4)&=\Pr\ (x=1)+\Pr\ (x=2)+\Pr\ (x=3)+\Pr\ (x=4)\\&=\frac{1}{|\Omega|}\left(\binom{9}{2}+\binom{8}{2}+\binom{7}{2}+\binom{6}{2}\right)\end{aligned}$$

הערה אם S סופית אזי $\mathrm{Fx}\ (t)$ היא פ' מדרגות ובמקרה זה היא גם לא ממש שימושית, כי $\Pr\ (x\leq t)=\sum_{k\leq t}\Pr\ (k)$.

הגדרה מ"מ $x:\Omega\to S$ יקרא מ"מ ברנולי אם $S=\{0,1\}$. במקרה זה, קיים $p\in[0,1]$ שעבורו $\Pr\ (x=1)=p$ ו-$\Pr\ (x=0)=1-p$.

הערה מ"מ ברנולי מתאים לתוצאה של הטלת מטבע מזויף וההסתברות היא על הטלת עץ או פלי.

הגדרה מ"מ x נקרא בינומי עם פרמטרים n,p אם $S=\{0,\ldots,n\}$ ואם לכל $0\leq k\leq n$, $\Pr\ (x=k)=\binom{n}{k}p^k\left(1-p\right)^{n-k}$.

הערה מ"מ בינומי מתאים להסתברות שיצא k פעמים פאלי ו-$n-k$ פעמים עץ בהטלה חוזרת n פעמים של מטבע מזוייף.

תרגיל במפעל לייצור חיתולים ההתסברות שחיתול יצא פגום הוא 0.01. מה הסיכוי שבחבילה של 10 חיתולים יהיו 2 חיתולים פגומים לפחות?

פתרון יהי x מס' החיתולים הפגומים באריזה, $x:\Omega\to\{0,\ldots,10\}$. נרצה לחשב את $\Pr\ (x\geq 2)$.

$$\Pr\ (x\geq 2)=1-\Pr\ (x=1)-\Pr\ (x=0)$$

אבל $x\sim B\left(10,0.01\right)$ ולכן

$$\Pr\ (x=1)=\binom{10}{1}\left(0.01\right)^1\left(0,99\right)^{10-1}$$

$$\Pr\ (x=0)=\binom{10}{0}\left(0.01\right)^0\left(0.99\right)^{10}$$

לכן $\Pr\ (x\geq 2)=1-10\cdot 0.01\left(0,99\right)^{10-1}-\left(0.99\right)^{10}$

תרגיל במטוס, ההסתברות שמנוע יתקלקל במהלך טיסה הוא $1-p$ (כאשר ההסתברות שהמנוע לא יתקלקל היא p). המטוס נוחת בשלום כל עוד לפחות חצי מהמנועים שלו עובדים. האם עדיף מטוס עם 4 מנועים או מטוס עם שני מנועים? או שמא התשובה תלויה ב-p?

פתרון נסמן ב-x_1 את מס' המנועים שלא התקלקלו במטוס עם שני מנועים וב-x_2 את מס' המנועים שלו התקלקלו במטוס עם 4 מנועים. נשים לב כי $x_1:\Omega\to\{0,1,2\}$ ו-$x_1\sim B(2,p)$ ובאותו האופן $x_2\sim B(4,p)$. נבדוק מה יותר גדול, $\Pr(x_1\ge 1)$ או $\Pr(x_2\ge 2)$.

$$\begin{aligned}\Pr(x_1\ge 1)&=\Pr(x_1=1)+\Pr(x_1=2)\\&=\binom{2}{1}p^1(1-p)^1+\binom{2}{2}p^2(1-p)^0\\&=2p(1-p)+p^2=2p-p^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Pr(x_2\ge 2)&=\Pr(x_2=2)+\Pr(x_2=3)+\Pr(x_2=4)\\&=\binom{4}{2}p^2(1-p)^2+\binom{4}{3}p^3(1-p)+\binom{4}{4}p^4(1-p)^0\\&=3p^4-8p^3+6p^2\end{aligned}$$

אם כן נבדוק מתי

$$\begin{aligned}3p^4-8p^3+6p^2&>2p-p^2\\3p^4-8p^3+7p^2-2p&>0\\p\left(3p^3-8p^2+7p-2\right)&>0\\p(p-1)^2(3p-2)&>0\end{aligned}$$

כלומר עבור $p>\frac{2}{3}$ עדיף מטוס עם 4 מנועים ואחרת עדיף מטוס עם שני מנועים.

$\mathbb{VIII}$

הגדרה יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהי S ו-$x:\Omega\to S$ מ"מ. x יקרא <u>פואסוני</u> עם פרמטר $\lambda>0$ אם $S=\mathbb{N}_0$ וגם

$$\Pr(x=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$$

הערה התפלגות פואסון מופיעה בטבע במקומות שונים:

במודל להתפרקות רדיו-אקטיבית;

מס' המכוניות שעוברות דרך נקודה מסוימת בכביש בפרק זמן מסוים;

מס' המוטציות ב-DNA לאחר חשיפה לקרינה.

מס' המבקרים בחדר מיון המגיעים לאשפוז ביום.

דוגמה מודל להתפרקות רדיו-אקטיבית: נניח שבפרק זמן $\epsilon > 0$ ($\epsilon << 1$), ההסתברות להתפרקות רדיו-אקטיבית של אטום מסוים היא $\lambda \cdot \epsilon$. מה הסיכוי שיהיו k התפרקויות בשניה אחת? (כאשר ההפרקויות הן ב"ת זו בזו).

נסמן את מספר ההתפרקויות בשנייה ב-x. x הוא מ"מ. נרצה לחשב את $\Pr\left(x=k\right)$. נשים לב כי $x \sim B\left(\frac{1}{\frac{\epsilon}{n}}, \lambda\epsilon\right)$. לכן

$$\begin{aligned}
\Pr\left(x=k\right) &= \binom{n}{k}\left(\lambda\epsilon\right)^{k}\left(1-\lambda\epsilon\right)^{n-k} \\
&= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}\cdot\frac{\lambda^{k}}{n^{k}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \\
&= \underbrace{\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{\left(n-k+1\right)}{n}}_{\downarrow\atop 1}\frac{\lambda^{k}}{k!}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}_{\downarrow\atop e^{-\lambda}}\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow\atop 1} \\
&= \frac{\lambda^{k}}{k!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

הערה במקרה זה נסמן $x \sim \mathrm{poi}\left(\lambda\right)$.

תרגיל במעבדה נמצא מקור רדיואקטיבי שידוע שמס' החלקיקים שהוא פולט בשנייה מתפלג פואסוני עם פרמטר $\lambda = 4$. סטודנט מפעיל מונה הסופר את מס' החלקיקים למשך שניה אחת. מה הסיכוי שהוא גילה לא יותר מ-4 חלקיקים?

פתרון $x \sim \mathrm{poi}\left(4\right)$. נרצה לבדוק מהו $\Pr\left(x \le 4\right)$.

$$\Pr\left(x\le 4\right) = \sum_{k=0}^{4}\Pr\left(x=k\right) = \sum_{k=0}^{4}\frac{e^{-4}4^{k}}{k!}$$

תרגיל מס' שגיאות הכתיב בעמ' מתפלג פואסוני עם פרמטר $\lambda = \frac{1}{3}$. מה הסיכוי שבעמוד יש לפחות שגיאת כתיב אחת?

פתרון

$$\Pr\left(x\ge 1\right) = 1-\Pr\left(x=0\right) = 1-\frac{e^{-\frac{1}{3}}\lambda^{0}}{0!} = 1-e^{-\frac{1}{3}}$$

הגדרה מ"ה $\left(\Omega, \mathcal{F}, \Pr\right)$ יקרא דיסקרטי אם Ω סופית או בת מניה.

הערה במקרה זה, $\Pr\left(\Omega\right) = \sum_{\omega\in\Omega}\Pr\left(\omega\right)$ ו-$\forall A\in\mathcal{F}$, $\Pr\left(A\right) = \sum_{\omega\in A}\Pr\left(\omega\right)$.

הגדרה מ"מ S $x:\Omega\to S$ יקרא דיסקרטית אם $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה דיסקרטי.

הגדרה יהי S $x:\Omega\to S$ מ"מ דיסקרטי. התוחלת של x (Expectation) מוגדרת ע"י

$$\mathbb{E}[x]=\sum_{\omega\in\Omega}x(\omega)\Pr(\omega)$$

הערה $\mathbb{E}[x]$ היא מס' ממשי, אלא אם $\sum_{\omega\in\Omega}x(\omega)\Pr(\omega)$ הוא טור מתבדר. במקרה זה, נאמר כי ל-x אין תוחלת.

הערה מהיות $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה דיסקרטי, אזי $\Pr(\Omega)=\sum_{\omega\in\Omega}\Pr(\omega)=1$ ולכן $\mathbb{E}[x]$ היא ממוצע הערכים של x, עם משקולות בהאתם להסתברות של כל $\omega\in\Omega$.

דוגמה הטלת קוביה. $S=\Omega=[6]$, $x:\Omega\to S$ ע"י $x(i)=i$. $\Pr(i)=\frac{1}{6}$. מהי התוחלת של x?

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x]&=\sum_{i=1}^{6}i\Pr(i)\\&=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}=\frac{1}{6}\frac{(6+1)6}{2}=\frac{7}{2}=3.5\end{aligned}$$

דוגמה יהי $\Omega=\{0,1,2\}$ ונגדיר

ω	0	1	2
$\Pr(\omega)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

ו-$x(k)=k^2$. מהי התוחלת של x?

$$\mathbb{E}[x]=0\cdot\frac{1}{2}+1\cdot\frac{1}{3}+4\cdot\frac{1}{6}=1$$

משפט יהי $(\Omega,\mathcal{F},\Pr)$ מ"ה ויהיו S $x,y:\Omega\to S$ מ"מ בעלי תוחלת, $a,b\in\mathbb{R}$, $\mathbb{E}[ax+by]=a\mathbb{E}[x]+b\mathbb{E}[y]$.

הוכחה: ברור. ■

משפט יהי S $x:\Omega\to S$ מ"מ דיסקרטי. אזי $\mathbb{E}[x]=\sum_{k\in S}k\cdot\Pr(x=k)$.

הוכחה: $\Omega \supseteq x^{-1}(k)$, $\forall k\in S$, וגם $\biguplus_{k\in S} x^{-1}(k)=\Omega$. לכן

$$\begin{aligned}\sum_{k\in S} k\cdot \Pr(x=k) &= \sum_{k\in S}\sum_{\omega\in x^{-1}(k)} x(\omega)\Pr(\omega)\\ &= \sum_{k\in S} k \sum_{\omega\in x^{-1}(k)} \Pr(\omega)\\ &= \sum_{k\in S} k\Pr\left(x^{-1}(k)\right)\\ &= \sum_{k\in S} k\Pr(x=k)\end{aligned}$$

■

משפט יהי S $x:\Omega\to S$ $c\equiv$ עבור $c\in S$. אזי $\mathbb{E}[x]=c$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[x] &= \sum_{\omega\in\Omega} x(\omega)\Pr(\omega)\\ &= c\cdot 1 = c\end{aligned}$$

■

דוגמה $x \sim B\left(n,p\right)$. מהי $\mathbb{E}\left[x\right]$?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[x\right] &= \sum_{k=0}^{n} k\Pr\left(x=k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{n!}{k!\left(n-k\right)!}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{\left(k-1\right)!\left(n-1-\left(k-1\right)\right)!}p^{k}\left(1-p\right)^{n-k} \\
&= np\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(n-1\right)!}{\left(k-1\right)!\left(n-1-\left(k-1\right)\right)!}p^{k-1}\left(1-p\right)^{n-1-\left(k-1\right)} \\
&= np\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left(n-1\right)!}{k!\left(n-1-k\right)!}p^{k}\left(1-p\right)^{n-1-k} \\
&= np\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}p^{k}\left(1-p\right)^{n-1-k}}_{1} \\
&= np
\end{aligned}
$$

דוגמה $x \sim \text{poi}\left(\lambda\right)$. מהי $\mathbb{E}\left[x\right]$?

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[x\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\Pr\left(x=k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^{k}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{\left(k-1\right)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k}}{k!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} \\
&= \lambda
\end{aligned}
$$

תרגיל מהמר בוחר מספר בין 1 ל-6 ואז לזרוק 3 קוביות. הוא מקבל i דולרים אם i מהקוביות שלו יצאו המס' שבחר, עבור $1 \le i < 3$. אם $i=0$, הוא צריך לשלם דולר. מהי תוחלת הרווח?

פתרון נסמן ב-x את מס' הדולרים שמהמר הרוויח. נרצה לחשב את $\mathbb{E}\left[x\right]$. נשים לב כי $x:\Omega\to\left\{-1,1,2,3\right\}$ ונשים לב כי מספר הקוביות

שיצאו המס' שהוא בחר מתפלג בינומי $B\left(3,\frac{1}{6}\right)$. לכן,

$$\begin{aligned}\Pr\left(x=-1\right)&=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}=\frac{125}{216}\\ \Pr\left(x=1\right)&=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}=\frac{75}{216}\\ \Pr\left(x=2\right)&=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{1}=\frac{15}{216}\\ \Pr\left(x=3\right)&=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{0}=\frac{1}{216}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[x\right]&=\frac{1}{216}\left(-1\cdot125+1\cdot75+2\cdot15+3\cdot1\right)\\ &=\frac{1}{216}\cdot\left(-17\right)<0\end{aligned}$$

לכן לא משתלם לשחק!

הערה בהנתן מ"מ $x:\Omega\to S$ ופ' $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, נוכל להגדיר $y:\Omega\to S$ ע"י $y\left(\omega\right)=g\left(x\left(\omega\right)\right)$ ונסמן $y=g\left(x\right)$.

משפט

$$\mathbb{E}\left[g\left(x\right)\right]=\sum_{k\in S}g\left(x\right)\Pr\left(x=k\right)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g\left(x\right)\right]&=\sum_{\omega\in\Omega}g\left(x\right)\left(\omega\right)\Pr\left(\omega\right)\\ &=\sum_{\omega\in\Omega}g\left(x\left(\omega\right)\right)\Pr\left(\omega\right)\\ &=\sum_{k\in S}\sum_{\omega\in x^{-1}\left(k\right)}g\left(x\left(\omega\right)\right)\Pr\left(\omega\right)\\ &=\sum_{k\in S}g\left(k\right)\sum_{\omega\in x^{-1}\left(k\right)}\Pr\left(\omega\right)\\ &=\sum_{k\in S}g\left(k\right)\Pr\left(x=k\right)\end{aligned}$$

$\blacksquare$

דוגמה יהי $x:\Omega\to\left\{0,1,2\right\}$ המ"מ שעבורו $\Pr\left(x=0\right)=\frac{1}{2}$, $\Pr\left(x=1\right)=\frac{1}{3}$, $\Pr\left(x=2\right)=\frac{1}{6}$. מהי $\mathbb{E}\left[x^{2}\right]$?

$$\mathbb{E}\left[x^{2}\right]=0^{2}\frac{1}{2}+1^{2}\frac{1}{3}+2^{3}\frac{1}{6}=\frac{1}{3}+\frac{4}{6}=1$$

הגדרה המומנט ה-k של מ"מ $x:\Omega\to S$ מוגדר ע"י $M_k\left[x\right]=\mathbb{E}\left[x^k\right]$, $\forall k\geq 0$.

הגדרה השונות (variance) של מ"מ $x:\Omega\to S$ מוגדרת ע"י $V\left[x\right]=\mathbb{E}\left[\left(x-\mu\right)^2\right]$ כאשר $\mu=\mathbb{E}\left[x\right]$.

הערה השונות היא כמה התוחלת של x שונה מ-x עצמו בתוחלת.

הערה נשים לב כי $\mathbb{E}\left[x\cdot y\right]$ היא מכ"פ. כך גם $\mathbb{E}\left[\left(x-\mathbb{E}\left[x\right]\right)\left(y-\mathbb{E}\left[y\right]\right)\right]$.

הגדרה סטיית התקן (standard deviation) של מ"מ $x:\Omega\to S$ מגודרת ע"י $\sigma\left[x\right]=\sqrt{V\left[x\right]}$.

הערה סטיית התקן היא הנורמה הנובעת מהמכ"פ $\mathbb{E}\left[\left(x-\mathbb{E}\left[x\right]\right)\left(y-\mathbb{E}\left[y\right]\right)\right]$.