חשבון אינפיניטסימלי 1 לתכנית האודיסאה

80305 | 80137

הורצה על ידי דוקטור יוסי שמאי

נכתב על ידי נמרוד רק

תוכן עניינים

$25/02/2019$ | $\mathbb{I}$

אקסיומות השדה

תזכורת $|x+y| \le |x|+|y|$ וגם $|x-y| \ge |x|-|y|$.

הגדרה קבוצה F תקרא שדה אם קיימות על F פעולות שנקרא להן "חיבור" $(+)$ ו"כפל" $(\cdot)$ כך שמתקיימות התכונות הבאות:

סגירות לחיבור: $\forall x,y \in F$, $x+y$ מוגדר, וגם $x+y \in F$.

קומוטטיביות לחיבור: $\forall x,y \in F$, $x+y=y+x$.

אסוציאטיביות: $\forall x,y,z \in F$, $(x+y)+z=x+(y+z)$.

קיום נטרלי לחיבור: קיים איבר שנסמנו $0_F \in F$ שעבורו $\forall x \in F$, $x+0_F=x$.

קיום נגדי: $\forall x \in F$ קיים איבר שנסמנו $-x \in F$ שנקרא הנגדי של x שעבורו $x+(-x)=0_F$.

סגירות לכפל: $\forall x,y \in F$, $x \cdot y \in F$.

קומוטטיביות לכפל: $\forall x,y \in F$, $x \cdot y = y \cdot x$.

אסוציאטיביות לכפל: $\forall x,y,z \in F$, $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

קיום נטרלי לכפל: קיים איבר שנסמנו $1_F \in F$ שעבורו $\forall x \in F$, $x \cdot 1_F = x$.

קיום הופכי: $\forall x \in F$, $x \neq 0_F$ קיים איבר שנסמנו $x^{-1} \in F$ שנקרא ההופכי של x שעבורו $x \cdot x^{-1} = 1_F$.

$1_F \neq 0_F$.

דיסטריוטיביות: $\forall x,y,z \in F$, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$.

דוגמה $\mathbb{Q}$ שדה, $\mathbb{R}$ שדה, $\mathbb{C}$ שדה, $\mathbb{N}$ לא שדה (חסר איבר ניטרלי, הופכי), $\mathbb{Z}$ לא שדה (חסר הופכי).

דוגמה נגדיר את $\mathbb{Z}_2=\{\widehat{0},\widehat{1}\}$ ונגדיר פעולות $+$ ו־ $\cdot$ באופן הבא:

$\cdot$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$+$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$
$\widehat{1}$	$\widehat{0}$	$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{1}$	$\widehat{0}$

טענה $\mathbb{Z}_2$ עם הפעולות שספקנו מהווה שדה (שנקרא השדה הבינארי).

הוכחה בודקים את כל האפשרויות לאקסיומות שניתן להטיל בהן ספק. ■

משפט (יחידות האפס) אם $0_F, 0'_F \in F$ ומתקיים $x+0_F=x$ **(*)** וגם $x+0'_F=x$ **(**)** $\forall x \in F$ אזי $0_F=0'_F$.

הוכחה מ־(*), **(**)** $0_F \overset{(**)}{=} 0_F+0'_F$ ובגלל הקומוטטיביות $= 0'_F+0_F \overset{(*)}{=} 0'_F$. ■

משפט (חוק הצמצום) אם עבור $x,y,z \in F$ מתקיים $x+z=y+z$ אזי $x=y$.

הוכחה $x = x+0_F = x+(z+(-z))$ ובגלל האסוציאטיביות $= x+z+(-z) = (y+z)+(-z) = y+(z+(-z))$ ובגלל האסוצ' $= y+0_F = y$. ■

הגדרה עבור $x,y \in F$ נגדיר $x-y=x+(-y)$.

משפט לכל $x \in F$, $x \cdot 0_F = 0_F$.

הוכחה יהי $x \in F$, $x \cdot 0_F = x \cdot (0_F + 0_F)$ בגלל הנטרלי $= x \cdot 0_F + x \cdot 0_F$ בגלל דיסטרי' $x \cdot 0_F + 0_F = x \cdot 0_F + x \cdot 0_F$ ובגלל המשפט הקודם $x \cdot 0_F = 0_F$. ■

משפט (אין מחלקי אפס) אם עבור $x, y \in F$ מתקיים $x \cdot y = 0_F$ אזי $x = 0_F$ או $y = 0_F$.

הוכחה נניח כי $y \neq 0_F$ לכן קיים ל- y הופכי לכן $x = x \cdot 1_F = x(y \cdot y^{-1})$ ובגלל אסוצ' $= (x \cdot y) \cdot y^{-1} = 0_F \cdot y^{-1}$ ובגלל קוממו' $= y^{-1} \cdot 0_F$ ובגלל המשפט הקודם $= 0_F$. ■

דוגמה על $\mathbb{R}^2$ נגדיר פעולות $\overbrace{+}$, $\overbrace{\cdot}$ באופן הבא: $(x_1, y_1) \overbrace{+} (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ וגם $(x_1, y_1) \overbrace{\cdot} (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2, y_1 \cdot y_2)$, האם $\mathbb{R}^2$ שדה?

תשובה לא.

הוכחה נניח בשלילה שמתקיים $(0,0)$ ניטרלי לחיבור אבל $(0,1) \overbrace{\cdot} (1,0) = (0,0)$ בסתירה לכך שאין מחלקי אפס. ■

$\mathbb{III}$ | 04/03/2019

טענה (יחידות הנגדי) יהי F שדה ויהי $x \in F$. נניח שקיימים $y, z \in F$ שעבורם $x + y = 0_F$ וגם $x + z = 0_F$. אזי $y = z$.

הוכחה $y = y + 0_F = y + (x + z)$ ובגלל אסוצ' $= (y + x) + z$ ובגלל קוממו' $= (x + y) + z = 0_F + z$ ובגלל קומו' $= z + 0_F = z$.
■

טענה לכל $x \in F$, **I.** $-(-x) = x$ **II.** $-x = (-1_F) \cdot x$ **III.** $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$ **IV.** $(-1_F)^2 = 1_F$.

הוכחה יהי $x \in F$. **I.** $x + -x) = 0_F = -x + x$ לפי קומו'. $-x + (-(-x)) = 0_F$. מכאן שגם $-(-(x))$ וגם x הם הנגדיים ל- $-x$ ומיחידות הנגדיים $-(-x) = x$.

II. נכתוב $x + (-1_F) \cdot x = 1_F \cdot x + (-1_F) \cdot x$ ולפי קומו' $= x \cdot 1_F + x \cdot (-1_F)$ ולפי דיסטרי' $= x \cdot (1_F + (-1_F)) = x \cdot 0_F =$ ומיחידות הנגדי $-x = (-1_F) \cdot x$.

IV. $(-1_F)^2 = -1_F \cdot (-1_F) = -(-1_F) = 1_F$.

III. יהי $y \in F$. $(-x) \cdot (-y) = (-1_F \cdot x) \cdot (-1_F \cdot y)$ ולפי אסוצ' $= (-1_F \cdot x \cdot -1_F) \cdot y$ ולפי קומו' $= (-1_F \cdot -1_F \cdot x) \cdot y =$ ולפי אסוצ' $((-1_F \cdot (-1_F)) \cdot x) \cdot y)$ ומטענה 4 $(1_F \cdot x) \cdot = x \cdot y$. ■

הגדרה יהי F שדה, ותהי $F_1 \subseteq F$. נאמר ש- F_1 היא תת־שדה של F, אם F_1 היא שדה ביחס לאותן הפעולות ־ החיבור והכפל המוגדרות על F.

הערה $F_1 \subseteq F$ תת שדה אם מתקיימים התנאים הבאים **i.** F_1 סגור לחיבור וכפל. **ii.** $0_F, 1_F \in F_1$. **iii.** $\forall x \in F_1$ $0_F \neq$, $x^{-1} \in F_1$. **iv.** $x \in F_1$, $\forall - x \in F_1$.

תת־שדה

דוגמות $\mathbb{Q}\subseteq\mathbb{R}$ תת־שדה (ברור), $\mathbb{R}$ תת שדה של $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ תת שדה של $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2\nsubseteq\mathbb{R}$ לא תת שדה. $\mathbb{R}$ תת שדה של $\mathbb{R}$.

הערה אם $F_1\subseteq F$ והוא תת שדה וגם $F_2\subseteq F_1$ אז F_2 תת שדה של F, וגם כל שדה הוא תת שדה של עצמו.

הגדרה $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}|a,b\in\mathbb{Q}\}$.

טענה $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ תת שדה של $\mathbb{R}$.

הוכחה **i.** יהיו $x,y\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. לכן קיימים $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ כך ש־ $x=a+b\sqrt{2}$ וגם $y=c+d\sqrt{2}$. לכן $x+y=(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ וגם $x\cdot y=(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

ii. $0=0+0\sqrt{2}$ וגם $1=1+0\sqrt{2}$.

iv. יהי $x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ לכן $-x=-(a+b\sqrt{2})=-a+(-b)\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

iii. יהי $0\neq x=a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. נוכיח כי $x^{-1}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $x^{-1}=(a+b\sqrt{2})^{-1}=\frac{1}{a+b\sqrt{2}}=\frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2}=\frac{a}{a^2-2b^2}-\frac{b}{a^2-2b^2}\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt{2})$

הערה למה $a-b\sqrt{2}\neq 0$? נניח בשלילה: אם $a-b\sqrt{2}=0$ אזי $a=b\sqrt{2}$ ולכן אם $b=0$ אזי $a=0$ בסתירה לכך ש־ $x\neq 0$. אחרת $b\neq 0$, ולכן $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ בסתירה לכך ש־ $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$.

הגדרה יהי F שדה. נגדיר **i.** $(-y)$ $x-y=x+(-y)$, $\forall x,y\in F$. **ii.** $\frac{x}{y}=x\cdot y^{-1}$ לכל $x,y\in F$ כך ש־ $y\neq 0_F$.

שדה סדור

הגדרה יהי F שדה. נאמר כי F שדה סדור, אם קיים ב־ F יחס סדר "$<$" כך שמתקיימות האקסיומות הבאות:

i. טריכוטומיה: $\forall x,y\in F$ מתקיימת אחת ורק אחת מהאפשרויות הבאות: א. $x<y$ ב. $y<x$ ג. $x=y$.

ii. תאימות לחיבור: $\forall x,y,z\in F$, אם $x<y$ אזי $x+z<y+z$.

iii. תאימות לכפל: $\forall x,y,z\in F$ כך ש־ $z>0_F$, אם $y<z$ אזי $x\cdot z<y\cdot z$.

דוגמות $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ שדות סדורים. $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ שדה סדור.

הערה תת שדה של שדה סדור הוא שדה סדור.

07/03/2019 | IIII

הערה $<$ נקרא יחס סדר, והוא מקיים: אם $x<y$ ו־ $y<z$ אזי $x<z$ (טרנזיטיביות).

הערה $\forall x\in F$, $x\not>x$. (אחרת סתירה לטריכוטומיה).

טענה יהי F שדה סדור ויהיו $x,y\in F$. אזי **i.** אם $0_F<x$ וגם $0_F<y$ אזי $x+y,x\cdot y>0_F$.

ii. $0_F<x$ אם"ם $-x<0_F$.

iii. אם $x<0_F$ ו־ $y>0_F$ אזי $x\cdot y<0_F$.

iv. $x<0_F$ ו־ $y<0_F$, אזי $x\cdot y>0_F$.

הוכחה **i.** $0_F<x$ $[/+y]$ ואז מתאימות חיבור $0<y=0_F+y<x+y$ ומטרנזיטיביות $0_F<x+y$. באותו האופן $0_F<x$ $[/\cdot y]$ ומתאימות לכפל $0_F=0_F\cdot y<x\cdot y$

ii. $0_F<x$ ולכן מתאימות $-x=0_F+(-x)<x+(-x)=0_F$ ולכן $-x<0_F$. $-x<0_F$ ולכן מתאימות $0_F=(-x)+x<0_F+x=x$ ולכן $0_F<x$.

iii. מספיק להוכיח כי $-(x\cdot y)>0_F$ ואז מ־ (ii) נסיק כי $x\cdot y<0_F$. $-(x\cdot y)=-1_F\cdot(x\cdot y)=x\cdot(-1_F\cdot y)=x\cdot(-y)>0_F$.

iv. נניח כ $x,y<0_F$. מ־ (ii), $-x,-y>0_F$ ולכן מ־ (i), $x\cdot y=-x\cdot(-y)>0_F$. ■

הגדרה יהי F שדה סדור, $x\in F$ יקרא חיובי אם $0_F<x$ ושלילי אם $x<0_F$.

טענה יהי F שדה סדור ויהיו $a,x,y\in F$. נניח כי $x<y$ וגם כי a שלילי אזי $a\cdot y<a\cdot x$.

הוכחה מהטענה הקודמת $-a$ הוא חיובי. ולכן מתאימות לכפל $x<y\longrightarrow -a\cdot x<-a\cdot y$. ולכן מתאימות לחיבור $0_F=-ax+ax<-ay+ax$ $[/+ay]$ $ay<ax$. ■

טענה יהי F שדה סדור ויהי $x\in F$, אזי $0\leq x^2$.

הוכחה מטריכוטומיה, מתקיימת בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות: מקרה א' - $0_F<x$ במקרה זה $x^2>0_F$ מהטענה הראשונה. ולכן $x^2\geq 0_F$. מקרה ב' - $x=0$. במקרה זה $x^2=0_F^2=0_F$ ולכן $x^2\geq 0_F$. מקרה ג' - $x<0_F$. במקרה זה $x^2>0_F$ ולכן $x^2\geq 0_F$. ■

מסקנה $0_F<1_F$.

הוכחה מהטענה הקודמת $0_F\leq 1_F^2=1_F$. ומהיות $0_F\neq 1_F$, נובע כי $0_F<1_F$. ■

מסקנה $-1_F<0_F$ (ברור) מטענה קודמת.

טענה $1_F<1_F+1_F$.

הוכחה מהמסקנה $0_F<1_F$ $[/+1_F]$ מתאימות $1_F<1_F+1_F$. ■

מסקנה בשדה סדור, $1_F+1_F>0_F$ ובפרט $\mathbb{Z}_2$ לא שדה סדור.

מסקנה $\mathbb{C}$ אינו שדה סדור.

הוכחה נניח בשלילה שקיים יחס סדר על $\mathbb{C}$ כך ש־ $\mathbb{C}$ שדה סדור. נשים ♡ כי $i^2=-1<0$ בסתירה לטענה השלישית. ■

טענה יהי F שדה סדור. אזי F אינסופי.

הוכחה $... < 0_F < 1_F < 1_F + 1_F < 1_F + 1_F + 1_F$ נביט בקבוצה $\mathbb{N}_F = \{1_F, 1_F + 1_F, ...\} \subseteq F$ זו קבוצה אינסופית ולכן F אינסופי. מכאן בגלל סגירות F אז גם ההופכיים, וגם הנגדיים ולכן בכל מוכל $\mathbb{Q}$. ■

שדה מהצורה $\mathbb{Z}_n$

משפט (החילוק עם שארית) ($\square$) יהיו $a, n \in \mathbb{N}$. אזי קיימים $q, r \in \mathbb{N}$ יחידים שעבורם: **i.** $a = n \cdot q + r$ **ii.** $0 \le r < n$ $(*)$.

הגדרה יהיו $a, n \in \mathbb{N}$ נגדיר את $a(\mod n) = r$ כאשר $0 \le r < n$ נתון ע"י $(*)$.

הערה $a(\mod n)$ מוגדר היטב כי r יחיד.

דוגמה $7 \mod 3 = 1$, $8 \mod 3 = 2$, $9 \mod 3 = 0$.

דוגמה $16 \mod 3 = 1$, $18 \mod 5 = 3$, $27 \mod 6 = 3$.

הגדרה יהי $n \ge 2$ שלם. נגדיר $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{n-1}\}$ ונגדיר עבור $\overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{Z}_n$, $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{(a+b) \mod n}$ וגם $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{(a \cdot b) \mod n}$.

משפט ב־ $\mathbb{Z}_n$ מתקיימות כל תכונות השדה, פרט אולי לקיום הופכי.

משפט $\mathbb{Z}_n$ שדה אם"ם n מספר ראשוני.

דוגמה ב־ $\mathbb{Z}_6$, $\overline{2} \odot \overline{3} = \overline{0}$ (ובפרט $\mathbb{Z}_6$ לא שדה כי יש מחלקי אפס).

דוגמה ב־ $\mathbb{Z}_8$, האם ל־ $\overline{5}$ יש הופכי? כן! $\overline{5} \odot \overline{5} = \overline{1}$ ולכן $\overline{5}^{-1} = \overline{5}$.

$\mathbb{IV}$ | 11/03/2019

משפט (המשפט המכוער) ב־ $\mathbb{Z}_n$ מתקיימות כל תכונות השדה, פרט אולי לקיום הופכי.

משפט $\mathbb{Z}_n$ שדה אם"ם n מספר ראשוני.

הוכחה נניח כי $\mathbb{Z}_n$ שדה ונוכיח ש־ n ראשוני. נניח בשלילה ש־ n לא ראשוני. אזי קיימים $2 \le a, b \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a \cdot b = n$. נשים ♡ כי־ $\overline{a} \odot \overline{b} = \overline{(a \cdot b) \mod n} = \overline{n \mod n} = \overline{0}$. סתירה לכך שבשדה אין מחלקי אפס. (נשים ♡ כי $\overline{a}, \overline{b} \ne \overline{0}$).

נניח כי n ראשוני. מהמשפט המכוער מספיק להוכיח כי $\forall \overline{a} \in \mathbb{Z}_n \ne \overline{0}$. נביט בקבוצה $A = \{\overline{a} \odot \overline{x} | \overline{0} \ne \overline{x} \in \mathbb{Z}_n\}$.

נשים ♡ כי $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ (מסגירות $\mathbb{Z}_n$).

מספיק להוכיח כי $\overline{1} \in A$. לשם כך מספיק להוכיח כי ב־ A יש בדיוק $n-1$ איברים וש־ $\overline{0} \notin A$.

לשם כך מספיק להוכיח כי **i.** אין חזרות ב־ A כלומר $\forall x, y \in \mathbb{Z}_n$ כך ש־ $\overline{x}, \overline{y} \ne \overline{0}$ אם $\overline{a} \odot \overline{x} = \overline{a} \odot \overline{y}$ אזי $\overline{x} = \overline{y}$. **ii.** $\overline{0} \notin A$.

נתחיל מ־ **i.** יהיו $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{Z}_n$ כך ש־ $\overline{a} \odot \overline{x} = \overline{a} \odot \overline{y}$ אזי $\overline{a} \odot \overline{x} - \overline{a} \odot \overline{y} = \overline{0}$ ולפי דיסטרי $\overline{a} \odot (\overline{x} - \overline{y}) =$ ולכן $a(x-y)$

$\mod n = 0$.

לכן $n|a(x-y)$. מהיות n ראשוני. אזי $n|a$ או $n|x-y$. נשים ♡ כי $1 \le a \le n-1$ לכן בהכרח $n|x-y$.

נשים ♡ כי $-(n-2) \le x-y \le n-1-1 = n-2$. מהיות $n|x-y$ נובע כי $x-y=0$ לכן $x=y$ כלומר $\overline{x}=\overline{y}$.

ii. $\overline{0} \notin A$. נניח בשלילה כי $\overline{0} \in A$ אזי קיים $\overline{0} \ne \overline{x} \in \mathbb{Z}_n$ כך ש־ $\overline{a}\cdot\overline{x} = \overline{0}$. לכן $\overline{(a\cdot x) \mod n} = \overline{0}$ ולכן $n|a\cdot x$ ומהיות n ראשוני $n|a$ או $n|x$. סתירה כי $1 \le a \le n-1$ ולכן $n \nmid a$ ו־ $1 \le x \le n-1$ ולכן $n \nmid x$. ■

טענת־עזר $\forall a,b \in \mathbb{N}$, $(\overline{a}+\overline{b}) \mod n = (a \mod n + b \mod n) \mod n$ וגם $(a\cdot b) \mod n = (a \mod n \cdot b \mod n) \mod n$.

הוכחה (המשפט המכוער) נבדוק את כל האקסיומות:

(i) סגירות: יהיו $\overline{a},\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$. $\overline{a}\oplus\overline{b} = \overline{(a+b) \mod n} \in \mathbb{Z}_n$ מהגדרת ה־ $\mod$. $\overline{a}\odot\overline{b} = \overline{(a\cdot b) \mod n} \in \mathbb{Z}_n$.

(ii) קוממטטיביות: יהיו $\overline{a},\overline{b} \in \mathbb{Z}_n$. $\overline{a}\odot\overline{b} = \overline{(a\cdot b) \mod n} = \overline{(b\cdot a) \mod n} = \overline{b}\odot\overline{a}$. $\overline{a}\oplus\overline{b} = \overline{(a+b) \mod n} = \overline{(b+a \mod n} = \overline{b}\oplus\overline{a}$.

(iii) אסוציאטיביות: יהיו $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ $(\overline{a}\oplus\overline{b})\oplus\overline{c} = \overline{(a+b) \mod n}\oplus\overline{c} = \overline{((a+b) \mod n + c) \mod n} = \overline{((a+b)+c) \mod n} = \overline{(a+(b+c)) \mod n} = \overline{(a \mod n + (b+c) \mod n) \mod n} = \overline{(a+(\overline{b}+\overline{c})) \mod n} = \overline{a}\oplus(\overline{b}\oplus\overline{c})$ לפי טענת העזר. הכפל בדיוק אותו הדבר רק עם נקודה במקום פלוס.

(iv) קיום איברים נטרליים: $\overline{a}\oplus\overline{0} = \overline{(a+0) \mod n} = \overline{a \mod n} = \overline{a}$. $\overline{a}\odot\overline{1} = \overline{(a\cdot 1) \mod n} = \overline{a \mod n} = \overline{a}$.

(v) קיום נגדי: $\overline{a}\oplus\overline{n-a} = \overline{(a+n-a) \mod n} = \overline{n \mod n} = \overline{0}$ לכן $-\overline{a} = \overline{n-a} \in \mathbb{Z}_n$. אם $\overline{a}=\overline{0}$ אזי $\overline{a}\oplus\overline{a}=\overline{0}$.

(vi) דיסטריביוטיביות: יהיו $\overline{a},\overline{b},\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$. $\overline{a}\odot(\overline{b}\oplus\overline{c}) = \overline{[a\cdot(\overline{b}\oplus\overline{c})] \mod n} = \overline{[a\cdot(b+c) \mod n] \mod n} = \overline{[a\cdot(b+c)] \mod n} = \overline{(ab+ac) \mod n} = \overline{((ab) \mod n + (ac) \mod n) \mod n} = \overline{(\overline{a}\odot\overline{b}+\overline{a}\odot\overline{c}) \mod n} = \overline{a}\odot\overline{b}+\overline{a}\odot\overline{c}$.

(vii) $\overline{0} \ne \overline{1}$ ברור. ■

הוכחה (טענת העזר) (i) $a = q_1\cdot n + r_1$ ממשפט החילוק בשארית וגם $b = q_2\cdot n + r_2$ כאשר $q_1,q_2 \in \mathbb{N}$ ו־ $r_1,r_2 \in \mathbb{Z}$ כך ש־ $0 \le r_1 \le n-1$ ו־ $0 \le r_2 \le n-1$ כאשר r_1,q_1 ו־ r_2,q_2 נקבעים ביחידות על ידי a,b.

$(a \mod n + b \mod n) \mod n = (r_1+r_2) \mod n$

ולפי כוכב $= (q_1n+q_2n+r_1+r_2) \mod n$.

(ii) $(a \mod n \cdot b \mod n) \mod n = (r_1\cdot r_2) \mod n$

ולפי כוכב $(a\cdot b) \mod n = (q_1q_2n^2+r_1q_1n+r_2q_1n+r_1r_2) \mod n$. ■

טענת־כוכב נוכיח כי $\forall a$, $\forall q \in \mathbb{N}$, $(a+q\cdot n) \mod n = a \mod n$.

הוכחת־כוכב נרשום $a = q_1n+r_1$ כמו קודם אזי $a \mod n = r_1$ לכן $a+q\cdot n = q_1n+qn+r_1 = (q_1+q)n+r_1$ ומהיות $0 \le r_1 < n$, $r_1 = (a+q) \mod n$

ולכן $(a+qn) \mod n = a \mod n$. ■

$14/03/2019 \mid \mathbb{V}$

מציין

הגדרה יהי F שדה. המציין של F מסומן ב־ $charF$ ומוגדר באופן הבא: (i) אם קיים $n \geq 2$ שלם שעבורו $1_F + 1_F + 1_F + ... + 1_F = 0_F$ נגדיר $charF = \min\{n \geq 2 | 1_F + 1_F + 1_F + ... + 1_F = 0_F\}$ כך השרשרת חוזרת n פעמים. (ii) אחרת, נגדיר $charF = 0$ מוגדר היטב ממשפט המינימום שנוכיח בהמשך.

דוגמה $charQ = 0$,$char\mathbb{Z}_p = p$,$char\mathbb{Z}_3 = 3$,$char\mathbb{Z}_2 = 2$.

הערה אם F שדה סדור אזי $charF = 0$

משפט יהי F שדה ונניח כי $charF \neq 0$. אזי $charF$ הוא מספר ראשוני.

הוכחה נסמן $2 \leq charF = n$ ונניח בשלילה ש־ n לא ראשוני. לכן קיימים $2 \leq a, b \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n = a \cdot b$. לכן $1_F + 1_F + 1_F + ... + 1_F = 0_F = (1_F + 1_F + ... + 1_F)(1_F + ... 1_F) = 0_F$ כך שבפעם הראשונה מדובר ב־ n פעמים ובפעם השנייה מדובר ב־ a פעמים ואז b פעמים. מהיות F שדה אין בו מחלקי אפס ולכן $1_F + ... + 1_F = 0_F$ a פעמים או ש $1_F + ... + 1_F = 0_F$ b פעמים בסתירה למינמליות n. ■

מסקנה לא קיים שדה עם מציין 4. $charF_4 = 2$.

משפט (□) יהי F שדה בגודל $n \in \mathbb{N}$. יהי $p = charF$. אזי קיים $k \in \mathbb{N}$ שעבורו $n = p^k$.

חוג הפולינומים מעל F

הגדרה יהי F שדה. חוג הפולינומים מעל F מוגדר להיות $F[x] = \{a_0 + a_1x + ... + a_nx^n | 0 \leq n \in \mathbb{Z}, a_0 + a_1 + ... + a_n \in F\}$.

דוגמה ב־ $\mathbb{Z}_2[x]$, $1 + x$, x^2, $(1 + x) + (1 - x + x^2) = 0 + 0 + x^2 = x^2$.

דוגמה ב־ $\mathbb{Z}_3[x]$, האם קיים פתרון למשוואה הבאה $1 + x + x^2 = 0$? כן! $x = 1$.

דוגמה האם ל־ x^2 קיים הופכי ב־ $F[x]$? לא!

הערה $F[x]$ לא שדה כי לא קיים הופכי.

הגדרה פונקציה f תקרא רציונאלית לשדה כלשהו אם קיימים פולינומים $p, q \in F[x]$ כך ש־ $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, $\forall x \in F$ כך ש־ $q(x) \neq 0_F$.

אינדוקציה

הגדרה תהיה $A \subseteq \mathbb{R}$. A תקרא קבוצה אינדוקטיבית אם: (i) $1 \in A$ (ii) אם עבור $n \in \mathbb{N}$ מתקיים ש־ $n \in A$ אזי $n + 1 \in A$.

אקסיומת־האינדוקציה אם $A \subseteq \mathbb{R}$ אינדוקטיבית, אזי $\mathbb{N} \subseteq A$.

דוגמה $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ אינדיקטיביות.

מקסימום ומינימום

הגדרה תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. איבר $\overline{a} \in A$ יקרא מקסימלי אם $\forall a \in A$ מתקיים $a \leq \overline{a}$. איבר $\underline{a}$ יקרא מינימלי אם $\forall a \in A$, $a \geq \underline{a}$.

טענה (יחידות המקסימום) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$, יהיו $\overline{a}, \overline{\overline{a}} \in A$ איברים מקסימליים אזי $\overline{a} = \overline{\overline{a}}$.

הוכחה מהיות $\overline{a}$ מקסימלי ו־ $\overline{\overline{a}} \in A$ הרי ש־ $\overline{\overline{a}} \leq \overline{a}$ ומהיות $\overline{\overline{a}}$ מקסימלי ו־ $\overline{a} \in A$, הרי ש־ $\overline{a} \leq \overline{\overline{a}}$ לכן $\overline{a} = \overline{\overline{a}}$. ■

דוגמה $A = [0,1]$, $\max A = 1$, $\min A = 0$.

דוגמה $A = [0,1)$, לא קיים ב־ A מקסימלי. נניח בשלילה שקיים ב־ A איבר מקסימלי $\overline{a} \in A$. אזי $0 \leq \overline{a} \leq 1$. נביט ב־ $\overline{a} = \frac{\overline{a}+\overline{a}}{2} < a = \frac{1+\overline{a}}{2} < \frac{1+1}{2}$ ולכן $\overline{a} < a \in A$ סתירה למקסימליות $\overline{a}$. ■

משפט (משפט המינימום) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$. אזי קיים ב־ A איבר מינימלי.

הוכחה נוכיח ש־ $\forall n \in \mathbb{N}$, אם $n \in A$ אזי קיים ב־ A איבר מינמלי. נוכיח באינדוקציה על n. בסיס: נניח כי $1 \in A$, $\forall a \in A$, $a \in \mathbb{N}$ ולכן $a \geq 1$ לכן $1 \in A$ והוא איבר מינמלי. שלב: נניח כי $n+1 \in A$ ונוכיח כי קיים ב־ A איבר מינימלי. אם קיים $1 \leq k \leq n$ כך ש־ $k \in A$ משל מהנחת האינדוקציה השלמה (כי באינדוקציה שלמה אנחנו מניחים בצעד שמתקיים $\forall a \leq n$). אחרת, $\forall a \in A$, $a \geq n+1$ ולכן $n+1$ איבר מינימלי. ■

הוכחה־יותר־טובה נשים ♡ כי $\underline{s} = \inf A$ קיים כי 1 חסם מלרע והקבוצה לא ריקה. לכן מתכונת האפסילון קיים $a \in A$ כך ש־ $a < \underline{s} + 1$, נראה כי a איבר מינמלי. יהי $x \in A$ אזי $a - 1 < \underline{s} \leq x$ לכן $a - 1 < x$ ולכן $a \leq x$ כי $(a, x \in \mathbb{Z})$. לכן a מינימלי. (הוכחה זו מסתמכת על חומר שנלמד בשיעורים $\mathbb{VI}$ ו־ $\mathbb{VII}$) (הוכחה זו כמעט זהה למשפט עבור כל קבוצה המוכלת ב־ $\mathbb{Z}$ חסומה מלרע. ■

משפט (האינדוקציה השלמה) (□) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ אזי A קבוצה אינדוקטיבית אם"ם: (i) $1 \in A$ (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, אם $1 \leq \forall k \leq n$ מתקיים $k \in A$ אזי $n+1 \in A$.

מסקנה $charF$ מוגדר היטב: אם קיים $n \geq 2$ כך ש־ $1_F+1_F+...+1_F = 0_F$ n פעמים אזי $A = \{\mathbb{Z} \ni n \geq 2 | 1_F+1_F+...+1_F = 0_F\} \subseteq \mathbb{N}$ ולכן ממשפט המינימום, קיים לה מינימום (והוא יחיד מיחידות המינימום) ונסמן $charF = \min A$.

$18/03/2019$ | $\mathbb{VI}$

חסם מלעל ומלרע

הגדרה קבוצה $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא חסומה מלעל אם קיים $M \in \mathbb{R}$ $M > 0$ שעבורו $M \geq a$ $\forall a \in A$.

הגדרה קבוצה $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ תקרא חסומה מלרע אם קיים $m \in \mathbb{R}$ שעבורו $\forall a \in A\ a \geq m$.

הערה M נקרא חסם מלעל של A, m נקרא חסם מלרע של A.

הערה לא קיים חסם מלעל/מלרע יחיד כי נוכל לבחור מספר נוסף יותר מוקצן מהחסם הקודם.

דוגמה $A = (0,1]$ חסומה מלעל (1) ומלרע (0), לכן A קבוצה חסומה.

דוגמה $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 1\} = \{x \in \mathbb{Q} | -1 \leq x \leq 1\}$ חסומה.

דוגמה $A = [0, \infty)$ לא חסומה.

הוכחה נניח בשלילה ש־ A הייתה חסומה מלעל לכן קיים $M \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\forall a \in A$, $a \leq M$. נבחר $a = |M| + 1$ בסתירה לכך שקיים חסם מלעל. ■

הערה A לא חסומה מלעל אם $\forall M \in \mathbb{R}$, קיים $a \in A$ כך ש־ $a > M$.

הערה A לא חסומה מלרע אם $\forall m \in \mathbb{R}$, קיים $a \in A$ כך ש־ $a < m$.

הערה אם קיים ב־ A מקסימום אז A חסומה מלעל.

הערה כל $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{N}$ חסומה מלרע ע"י 1.

הגדרה תהיינה $\varnothing \neq A, B \in \mathbb{R}$. נאמר כי $A \leq B$ אם $\forall a \in A$ ו־ $\forall b \in B$ מתקיים $a \leq b$.

אקסיומת־השלמות תהיינה $\varnothing \neq A, B \in \mathbb{R}$ כך ש־ $A \leq B$. אזי קיים $c \in \mathbb{R}$ שעבורו $a \leq c \leq b$, $\forall b \in B, \forall a \in A$.

דוגמה $A = [0,1]$, $B = [1,2)$, $c = 1$.

דוגמה $A = \{x \in \mathbb{R} | x \leq \sqrt{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq \sqrt{2}\}$, $c = \sqrt{2}$, $A \leq B$.

דוגמה $A = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 < 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} | x^2 > 2, x > 0\}$, $A < B$ אבל לא קיים $c \in \mathbb{Q}$ כך שמתקיימת אקסיומת השלמות.

הגדרה תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ וחסומה מלעל. מספר ממשי $\overline{s} \in \mathbb{R}$ יקרא חסם עליון של A אם: (i) $\overline{s}$ חסם מלעל של A, כלומר $\forall a \in A$, $a \leq \overline{s}$. (ii) $\overline{s}$ חסם מלעל מינימלי, כלומר לכל חסם מלעל M של A מתקיים $\overline{s} \leq M$.

דוגמה $A = [0,1)$, $\overline{s} = 1$ הוא חסם עליון.

הוכחה (i) $\forall a \in A$, $0 \leq a \leq 1$, ולכן $a \leq 1 = \overline{s}$. (ii) יהי $M \in \mathbb{R}$ חסם מלעל של A, נוכיח כי $M \geq \overline{s} = 1$. נניח בשלילה כי $M < 1$. נשים ♡ כי $M > 0$ כי $0 \in A$ ו־ M חסם מלעל. נביט ב־ $1 = \frac{1+1}{2} > a = \frac{M+1}{2} > \frac{M+M}{2} = M \geq 0$, בסתירה לכך ש־ M חסם מלעל. ■

משפט (משפט הסופרימום) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ כך ש־ A חסומה מלעל אזי קיים ל־ A חסם עליון יחיד.

הערה במקרה זה נסמן את החסם העליון ב־ $\sup A$. אם $\varnothing \neq A$ לא חסומה מלעל נסמן $\sup A = \infty$.

הוכחה נביט בקבוצה $B=\{M\in\mathbb{R}|\forall a\in A,a\le M\}\subseteq\mathbb{R}$, נשים ♡ כי $B\neq\varnothing$ כי A חסומה מלעל. נשים ♡ כי $A\le B$ כי $\forall a\in A$ ו- $\forall M\in B$, $a\le M$. לכן מאקסיומת השלמות קיים $\overline{s}\in\mathbb{R}$ כך ש- $a\le\overline{s}\le M$, $\forall M\in B,\forall a\in A$. עתה נוכיח כי $\overline{s}$ חסם עליון: (i) $\overline{s}$ חסם מלעל כי $\forall a\in A$, $a\le\overline{s}$ (לפי הצורה בה הגדרנו אותו) (ii) יהי $M\in\mathbb{R}$ חסם מלעל של A אזי $M\in B$ ולכן $\overline{s}\le M$ (לפי הצורה בה הגדרנו אותו). נוכיח עתה את היחידות. נניח כי $\overline{s},\overline{\overline{s}}\in\mathbb{R}$ שני חסמים עליונים ונוכיח כי $\overline{s}=\overline{\overline{s}}$. $\overline{\overline{s}}$ חסם עליון לכן $\overline{s}$ חסם מלעל ולכן $\overline{\overline{s}}\le\overline{s}$ (כי $\overline{s}$ מינימלי) וגם $\overline{s}$ חסם עליון ולכן $\overline{\overline{s}}$ חסם מלעל ולכן $\overline{s}\le\overline{\overline{s}}$ (כי $\overline{\overline{s}}$ מינימלי). לכן $\overline{\overline{s}}\le\overline{s}\le\overline{\overline{s}}$ לכן $\overline{s}=\overline{\overline{s}}$. ■

משפט (ארכימדיות) $\mathbb{N}$ איננה חסומה מלעל, כלומר $\forall M\in\mathbb{R}$ קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>M$.

הוכחה נניח בשלילה כי קיים ל- $\mathbb{N}$ חסם מלעל. ממשפט החסם העליון קיים $\overline{s}=\sup\mathbb{N}\in\mathbb{R}$. נביט ב- $\overline{s}-1$, $\overline{s}-1$ לא חסם מלעל של $\mathbb{N}$ (ממינימליות $\overline{s}$) ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>\overline{s}-1$, לכן $\mathbb{N}\ni n+1>\overline{s}$ בסתירה להיות $\overline{s}$ חסם מלעל. ■

$\mathbb{VIII}$ | 25/03/2019

משפט (ארכימדיות הפוכה) $\forall\epsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $\frac{1}{n}<\epsilon$.

הוכחה נביט ב- $\frac{1}{\epsilon}$, מארכימדיות, $\frac{1}{\epsilon}$ לא חסם מלעל של $\mathbb{N}$ ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n>\frac{1}{\epsilon}$ ולכן $\frac{1}{n}<\epsilon$. ■

משפט (תכונת ה- ϵ של $\sup A$) תהי $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלעל. יהי $\overline{s}\in\mathbb{R}$ אז $\overline{s}=\sup A$ אמ"ם (i) $\overline{s}$ חסם מלעל של A $(ii*)$ $\forall\epsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a>\overline{s}-\epsilon$.

הוכחה $\Leftarrow$ נניח כי $\overline{s}$ חסם עליון. יהי $\epsilon>0$. נביט ב- $M=\overline{s}-\epsilon<\overline{s}$. מתכונת המינמליות של $\overline{s}$. M הוא לא חסם מלעל של A, ולכן קיים $a\in A$ כך ש- $a>M=\overline{s}-\epsilon$.

$\Rightarrow$ נניח כי (i), $(ii*)$ מתקיימים עבור $\overline{s}$ ונוכיח את תכונת המינמליות. יהי M חסם מלעל של A ונניח בשלילה ש- $M<\overline{s}$. נבחר $\epsilon=\overline{s}-M>0$, מתכונת ה- ϵ, קיים $a\in A$ שעבורו $a>\overline{s}-\epsilon=\overline{s}-(\overline{s}-M)=M$ בסתירה לכך ש- M חסם מלעל. ■

דוגמה $A=\{\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}|x,y\in\mathbb{R},(x,y)\neq(0,0)\}$, נשים ♡ כי $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy\ge 0$ ולכן $\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}\le\frac{1}{2}$ ולכן A חסומה מלעל על ידי חצי. נשים ♡ כי $\frac{1}{2}\in A$ $=\frac{1\cdot 1}{1^2+1^2}$ ולכן קיים ב- A מקסימום. לכן $\sup A=\frac{1}{2}$.

טענה תהי $\varnothing\neq A\in\mathbb{R}$, נניח שקיים ב- A איבר מקסימלי $\overline{a}=\max A$ אזי $\sup A=\overline{a}$.

הוכחה (i) $\forall a\in A$, $a\le\overline{a}$ לכן $\overline{a}$ חסם מלעל. $(ii*)$ יהי $\epsilon>0$. מתקיים $\overline{a}>\overline{a}-\epsilon$. ■

מסקנה sup הוא הכללה של max.

הגדרה תהי $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע. יהי $\underline{s}$ יקרא חסם תחתון של A אם: (i) $\underline{s}$ חסם מלרע כלומר $\forall a\in A$, $\underline{s}\le a$ (ii) לכל חסם מלרע m של A מתקיים $m\le\underline{s}$. נסמן במקרה זה $\inf A=\underline{s}$. אם A לא חסומה מלרע נגדיר $\inf A=-\infty$.

משפט (החסם התחתון) תהי $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע אזי קיים ל- A חסם תחתון יחיד.

משפט (תכונת ה־ ϵ של $\inf A$) תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. יהי $\underline{s} \in \mathbb{R}$. אזי $\underline{s}$ חסם תחתון אם"ם: (i) $\underline{s}$ חסם מלרע (ii) $\forall \epsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש־ $a < \underline{s} + \epsilon$.

צפיפות

הגדרה תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. A תקרא צפופה אם $\forall x, y \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x < y$ קיים $a \in A$ כך ש־ $x < a < y$.

דוגמה $\mathbb{R}$ צפופה.

הוכחה יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x < y$ אזי $x < \frac{x+y}{2} < y$. ■

משפט (צפיפות הרציונאלים) $\mathbb{Q}$ צפופה.

הוכחה יהיו $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x < y$. נוכיח כי שקיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $x < q < y$. מקרה א' $(1 < x < y)$ ־ מארכימדיות הפוכה קיים $m \in \mathbb{N}$ שעבורו $\frac{1}{m} < y - x = \epsilon$. נביט בקבוצה $A = \{n \in \mathbb{N} | \frac{n}{m} \geq y\} = \{n \in \mathbb{N} | n \geq m \cdot y\} \subseteq \mathbb{N}$, מארכימדיות, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n > m \cdot y$ ולכן A לא ריקה. ממשפט המינימום קיים איבר מינמלי ב־ A, שנסמנו $\hat{n} \in A$. נשים ♡ כי $\hat{n} > 1$, נניח בשלילה כי $\hat{n} = 1$ אזי $\min A = 1$ ולכן $1 < x < y \leq \frac{1}{m}$ כי $1 \in A$ ולכן $\frac{1}{m} > 1$ בסתירה לכך ש־ $m \in \mathbb{N}$. לכן $\hat{n} > 1$. נביט ב־ $q = \frac{\hat{n}-1}{m}$, נוכיח כי $x < q < y$ (ii) ונסיים. נרשום $x = y - (y - x) < y - \frac{1}{m} \leq \frac{\hat{n}}{m} - \frac{1}{m} = \frac{\hat{n}-1}{m} = q$ ולכן $x < q$. (ii) נניח בשלילה כי $y \leq \frac{\hat{n}-1}{m} = q$ לכן $\hat{n} - 1 \in A$ בסתירה למינימליות. נניח עתה כי $x, y \in \mathbb{R}$ כך ש־ $x < y$ (לאו דווקא ש־ $x > 1$) קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש־ $x + k > 1$ מארכימדיות. לכן מהמקרה הקודם קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $x + k < q < y + k$ ולכן $x < q - k < y$. ■

משפט (צפיפות האי־רציונאלים) $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ צפופה.

הוכחה יהיו $x < y$. לכן $x - \sqrt{2} < y - \sqrt{2}$ ולכן מצפיפות $\mathbb{Q}$, קיים $q \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $x - \sqrt{2} < q < y - \sqrt{2}$ ולכן $x < q + \sqrt{2} (\in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) < y$. ■

28/03/2019 | 𝕍𝕀𝕀𝕀

משפטים נוספים לחסמים

הגדרה תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר $A \pm B = \{a \pm b | a \in A, b \in B\}$, $A \cdot B = \{a \cdot b | a \in A, b \in B\}$.

טענה תהיינה $\varnothing \neq A, B \subseteq \mathbb{R}$ חסומות מלעל. אזי $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

הוכחה ראשית ממשפט החסם העליון $\sup A, \sup B$ קיימים. נסמן $\sup A = \bar{a}$, $\sup B = \bar{b}$. נוכיח כי $\sup(A + B) = \bar{a} + \bar{b}$ ונסיים. (i) יהי $x \in A + B$ ונוכיח כי $x \leq \bar{a} + \bar{b}$. מהיות $x \in A + B$ לכן קיימים $a \in A, b \in B$ כך ש־ $x = a + b$. מתקיים $a \leq \bar{a}$ כי הוא חסם מלעל, $b \leq \bar{b}$ כנ"ל. ולכן $x = a + b \leq \bar{a} + \bar{b}$. $(ii*)$ נוכיח ש־ $\forall \epsilon > 0$ קיים $x \in A + B$ כך

ש־ $x > \overline{a}+\overline{b}-\epsilon$. יהי $\epsilon > 0$ מהיות $\overline{a} = \sup A$, קיים $a \in A$ כך ש־ $a > \overline{a} - \square_1$ מהיות $\overline{b} = \sup B$, קיים $b \in B$ כך ש־ $b > \overline{b} - \square_2$. $x = a + b > \overline{a} + \overline{b} - \square_1 - \square_2$, נציב $\square_{1,2} = \frac{\epsilon}{2}$ ונקבל כי $a + b > \overline{a} + \overline{b} - \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2} = \overline{a} + \overline{b} - \epsilon$ ולכן $\sup A + B = \overline{a} + \overline{b}$. ■

טענה תהי A קבוצה חסומה מלרע אזי $\sup(-A) = -\inf A$.

הוכחה ראשית, ממשפט החסם התחתון $\inf A$ קיים ונסמן $\underline{s} = \inf A$. נוכיח כי $\sup(-A) = -\underline{s}$. (i) יהי $x \in -A$, ונוכיח ש־ $x \leq -\underline{s}$ מהיות $x \in -A$, קיים $a \in A$ כך ש־ $x = -a$. מתקיים $\underline{s} \leq a$ לכן $x = -a \leq -\underline{s}$. (ii) יהי M חסם מלעל של A, נראה כי $-\underline{s} \leq M$. מהיות M חסם מלעל לכל $a \in A$, $-a \leq M$ ולכן $a \geq -M$ ולכן $-M$ הוא חסם מלרע של A, ולכן $\underline{s} = \inf A \geq -M$ לכן $M \geq -\underline{s}$. ■

IX | 01/04/2019

סדרות

הגדרה סדרה של מספרים ממשיים היא פונקציה מ־ $\mathbb{N}$ ל־ $\mathbb{R}$. נסמן $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. $a(1) = a_1$, $a(2) = a_2$, $a(n) = a_n$. נסמן את הסדרה ב־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n$.

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = n^2$.

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n-1}$. $a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}$.

הגדרה יהי $k \in \mathbb{N}$, שתי סדרות $(a_n)_{n=k}^{\infty}, (b_n)_{n=k}^{\infty}$ יקראו שוות אם $\forall n \in \mathbb{N}$, כך ש־ $n \geq k$, $a_n = b_n$.

דוגמה נגדיר $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י p_n הוא המספר הראשוני ה־ n־י.

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי L הוא גבול של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם: $\forall \epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$, $|a_n - L| < \epsilon \iff L - \epsilon < a_n < L + \epsilon$.

טענה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{2n+1}{3n+2}$. $\frac{2}{3}$ הוא גבול הסדרה.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \frac{1}{9\epsilon}$ קיים מארכימדיות. יהי $n \geq N$. לכן $|a_n - L| = |\frac{2n+1}{3n+2} - \frac{2}{3}| = |\frac{6n+3-(6n+4)}{3(3n+2)}| = \frac{|-1|}{|3(3n+2)|} = \frac{1}{3(3n+2)} \leq \frac{1}{9n} \leq \frac{1}{9N} < \epsilon$. ■

טענה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\sin n + n^2}{n^3+n+3}$. 0 הוא גבול הסדרה.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \frac{20}{\epsilon}$ קיים מארכימדיות. יהי $n \geq N$ אזי $|a_n - L| = |\frac{\sin n + n^2}{n^3+n+3}| = \frac{|\sin n + n^2|}{n^3+n+3} \overset{\triangle}{\leq} \frac{|\sin n| + |n^2|}{n^3+n+3} \leq \frac{1+n^2}{n^3+n+3} \leq \frac{1+n^2}{n^3} \leq \frac{n^2+n^2}{n^3} \leq \frac{2n^2}{n^3} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{20}{n} \leq \frac{20}{N} < \epsilon$.

הערה N תלוי ב־ ϵ, וגם בסדרה וב־ L.

הערה N לא נקבע ביחידות ע"י ϵ. תמיד ניתן להגדיל את N עוד יותר.

הערה אם ϵ קטן N גדל.

$04/04/2019 \mid \mathbb{X}$

דוגמה הוכיחו מהגדרת הגבול כי $\frac{2}{5} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n-3}$. הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \max\{\frac{1}{\epsilon}, 3\}$ קיים מארכימדיות.
יהי $n \geq N$. אזי $|a_n - L| = |\frac{2n^2-n+1}{5n^2+2n-3} - \frac{2}{5}| = |\frac{10n^2-5n+5-10n^2-4n+6}{5(5n^2+2n-3)}| = \frac{|-9n+11|}{|5(5n^2+2n-5)|} \overset{\triangle}{\leq} \frac{|-9n|+|11|}{5|5n^2+2n-3|} =$
$\frac{9n+11}{5|5n^2+2n-3|} = \frac{9n+11}{5(5n^2+2n-3)}\cdots$

הגדרה סדרה מתבדרת היא סדרה שלא מתכנסת. סדרה שמתכנסת היא סדרה עם גבול. לכן סדרה מתבדרת היא סדרה ללא גבול

דוגמה הסדרה הנתונה על ידי $a_n = (-1)^{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ מתבדרת. הוכחה: נניח בשלילה שקיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$
לכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N$, $1 = \square < |a_n - L|$ $(*)$. נבחר $n = 2N$. אזי $(*)$ מתקיים ל־ n ולכן $|-1-L| =$
$|a_n - L| = |(-1)^{n+1} - L| < \square$. נבחר $n = 2N+1$ אזי $(*)$ מתקיים ולכן $|1-L| = |(-1)^{n+1} - L| > \square$. נבחר $\epsilon = \frac{1}{1}$
ונציב בריבועים ונקבל מהמשוואה הראשונה כי $-2 < L < 0$ ומהמשוואה השנייה כי $0 < L < 2$ לכן $0 < L < 0$ סתירה. $\blacksquare$

משפט (יחידות הגבול) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. יהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. נניח כי L_1, L_2 גבולות של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. אזי $L_1 = L_2$.

טענת־עזר יהי $0 \leq x \leq L$. נניח ש־ $\forall \epsilon > 0$ מתקיים $x < \epsilon$. אזי $x = 0$.

הוכחת־טענת־עזר נניח בשלילה כי $x > 0$. נבחר $\square = \epsilon$. $0 < x < \epsilon = \frac{x}{2}$, נבחר $\square = \frac{x}{2}$ ולכן $1 < \frac{1}{2}$ סתירה. $\blacksquare$

הוכחה נוכיח ש־ $\forall \epsilon > 0$, $|L_1 - L_2| < \epsilon$ ומכך נסיק ש־ $|L_1 - L_2| = 0$ כלומר $L_1 = L_2$. יהי $\epsilon > 0$ מהיות L_1 גבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, לכן קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n_1 \geq N_1$ מתקיים $|a_n - L_1| < \square_1$. מהיות L_2 גבול של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, לכן קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n_2 \geq N_2$ מתקיים $|a_n - L_2| < \square_2$. $N = \max\{N_1, N_2\}$. יהי $n \geq N$. לכן מתקיימות משוואות הריבוע מתקיימות עבור n הנ"ל.

$\epsilon = \square_1 + \square_2 > |a_n - L_1| + |a_n - L_2| = |L_1 - a_n| + |a_n - L_2| \geq |L_1 - a_n + a_n - L_2| = |L_1 - L_2|$, נבחר $\square_{1,2} = \frac{\epsilon}{2}$.
$\blacksquare$

הגדרה נאמר שהסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אם קיים לה גבול ממשי, כלומר קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\forall \epsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N$, $|a_n - L| < \epsilon$. במקרה זה נסמן: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

הערה $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ מוגדר היטב.

$08/04/2019$ | $\mathbb{XI}$

אש"ג לסדרות

משפט (i) **יהי** $c \in \mathbb{R}$**.** אזי $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

הוכחה (i) יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \Box$. יהי $n \geq N$. אזי $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$. לא משנה מה N ולכן נציב בצורה שרירותית $\Box = 1$.

(ii) יהי $\epsilon > 0$. נבחר $N > \frac{1}{\epsilon}$ קיים מארכימדיות. יהי $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $n \geq N$ לכן $|a_n - L| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon$. $\blacksquare$

משפט (אש"ג $\pm$) תהיינה (a_n), (b_n) סדרות מתכנסות לגבולות L_1, L_2 בהתאמה. אזי הסדרה $(a_n \pm b_n)$ מתכנסת וגבולה $L_1 \pm L_2$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $|a_n - L_1| < \Box_1$ $(*)$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $|b_n - L_2| < \Box_2$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$. יהי $n \geq N$ אזי $(*)$, $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $|(a_n \pm b_n) - (L_1 \pm L_2)| \overset{\triangle}{\leq} |a_n - L_1| + |\pm b_n \mp L_2| < \Box_1 + \Box_2 = \epsilon$. נציב $\Box_{1,2} = \frac{\epsilon}{2}$. $\blacksquare$

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} (3 - \frac{1}{n}) = 3 - 0 = 3$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}) = 0 + 0 + 0 = 0$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} (-\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (0 - \frac{1}{n}) = 0 - 0 = 0$.

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. (a_n) תקרא:

(i) חסומה מלעל אם קיים $M > 0$ שעבורו $M \geq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(ii) חסומה מלרע אם קיים $m < 0$ שעבורו $m \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

(iii) חסומה אם היא חסומה מלרע ומלעל.

$29/04/2019$ | $\mathbb{XII}$

הערה ניתן לכתוב את ההגדרה של הגבול כך: תהי סדרה בלה בלה בלה, $\lim\limits_{n\to\infty} = L$ יקרא הגבול אם $|a_n - L| < \epsilon$ כמעט תמיד.

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אזי הסדרה חסומה אם"ם קיים $M > 0$ שעבורו $|a_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$.

הוכחה $\to$: נניח שקיים $M > 0$ כך ש־ $|a_n| \leq M$, $\forall n \geq 1$. לכן $-M \leq a_n \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ולכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעל ומלרע.

$\leftarrow$: נניח ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה. אזי קיימים $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־ $m_2 \leq a_n \leq m_1$, $\forall n$. לכן עבור $n \in \mathbb{N}$ אם $a_n \geq 0$, אזי $|a_n| \leq m_1$. אם $a_n < 0$, $|a_n| = -a_n \leq -m_2$. לכן $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq \max\{m_1, -m_2\} + 1 = M > 0$. $\blacksquare$

טענה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה.

הוכחה מהיות הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת, אזי קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ולכן קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \ge N$, $|a_n - L| < \square$. לכן $|a_n| = |a_n - L + L| \overset{\triangle}{\le} |a_n - L| + |L| < 1 + |L|$ ולכן $|a_n| \le 1 + |L|$ $\forall n \ge N$. ולכן $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \le \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N-1}|, 1 + |L|\}$. (ניתן לראות את המשוואה בכך שנביט ב- $n \ge N$ שעבורה מתקיים האיבר האחרון גדול מ- $|a_n|$, אחרת $|a_n|$ שווה לאחד האיברים האחרים). ■

דוגמה $(n)_{n=1}^{\infty}$ לא מתכנסת כי לא חסומה (קונטרה־פוזיטיב).

דוגמה הסדרה $((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$ חסומה אבל לא מתכנסת.

משפט (אש"ג $\cdot$) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות ויהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ ו- $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$. אזי הסדרה $(a_n \cdot b_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת וגבולה הוא $L_1 \cdot L_2$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - \frac{3}{n^3}) = 0$. הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. מהיות (a_n) מתכנסת, אזי (a_n) חסומה ולכן קיים $M > 0$, כך ש- $|a_n| \le M$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $(\star)$. בנוסף מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ ו- $\forall n \ge N$, $|a_n - L_1| < \square_1$ $(*)$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ ו- $\forall n \ge N_2$, $|b_n - L_2| < \square_1$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \ge N$ אזי $(*)$, $(**)$ מתקיימים עבור N הנ"ל. לכן $|a_n \cdot b_n - L_1 \cdot L_2| = |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2 + a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| \overset{\triangle}{\le} |a_n \cdot b_n - a_n \cdot L_2| + |a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| = |a_n| \cdot |b_n - L_2| + |L_2| \cdot |a_n - L_1| \overset{\star}{\le} M \cdot |b_n - L_2| + |L_2| \cdot |a_n - L_1| \overset{(*)(**)}{<} M\square_2 + |L_2| \cdot \square_1 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{|L_2|}{|L_2|+1} \cdot \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
נציב $\square_1 = \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}$, $\square_2 = \frac{\epsilon}{2M}$ ונחזור למשוואה.

טענת־עזר יהי $L \ne 0$ ותהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \ge N$, $|a_n| \ge \frac{|L|}{2}$.

הוכחת־טענת־עזר מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \ge N$, $|a_n - L| < \square$ $(*)$. יהי $n \ge N$. לכן $|a_n| = |-a_n| = |-L - a_n + L| = |-L - (a_n - L)| \overset{\triangledown}{\ge} ||-L| - |a_n - L|| \ge |-L| - |a_n - L| = |L| - |a_n - L| \overset{(*)}{>} |L| - \square = \frac{|L|}{2}$.
נציב $\square = \frac{|L|}{2}$ ולכן $|a_n| > \frac{|L|}{2}$. ■

02/05/2019 | XIII

משפט (אש"ג /) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות מתכנסות. ויהיו $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$ ונניח בנוסף כי $L_2 \ne 0$. אזי $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ קיים ושווה ל- $\frac{L_1}{L_2}$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_1$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N_1$, $|a_n - L_1| < \square_1$ $(**)$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n) = L_2$ אזי מטענת העזר מהשיעור הקודם קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \ge N_2$, $|b_n| \ge \frac{|L_2|}{2}$ $(***)$ מהיות $L_2 \ne 0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L_2$, קיים $N_3 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\forall n \ge N_3$, $|b_n - L_2| < \square_2$ $(\star)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ויהי $n \ge N$. אזי $(**)$ $(***)$ $(\star)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. נשים ♡ מ- $(***)$ ש- $|b_n| \ge \frac{|L_2|}{2} > 0$ ולכן $b_n \ne 0$. ולכן $\frac{a_n}{b_n}$ מוגדרת היטב. לכן $|\frac{a_n}{b_n} - \frac{L_1}{L_2}| = |\frac{L_2 \cdot a_n - L_1 \cdot b_n}{b_n \cdot L_2}| = \frac{|L_2 \cdot a_n - L_1 \cdot b_n|}{|b_n| \cdot |L_2|} \overset{(***)}{\le} \frac{|a_n \cdot L_2 - b_n \cdot L_1|}{(\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|)} = \frac{|a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2 - b_n \cdot L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \overset{\triangle}{\le} \frac{|a_n \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| + |L_1 \cdot L_2 - b_n \cdot L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} = \frac{|L_2| \cdot |a_n - L_1| + |L_1| \cdot |b_n - L_2|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \overset{(**)(\star)}{<} \frac{\square_1}{\frac{|L_2|}{2}} + \frac{|L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|}\square_2 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{|L_1|}{|L_1|+1}(\le 1) \cdot \frac{\epsilon}{2} \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. נציב $\square_1 = \frac{|L_2|}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2}$, $\square_2 = \frac{\frac{|L|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2}}{|L_1|+1} \cdot \frac{\epsilon}{2}$. ■

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}$. בהתחלה צמצמנו בגורם דומיננטי ואז באש"ג חיבור, חיסור, כפל וחילוק.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-n+3}{5n^2-4n-1}=\frac{2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{5-\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{5}$. מאש"ג וצמצום. נשים ♡ כי אף על פי כך שהמכנה מתאפס עבור $n=1$ נוכל להשתמש באש"ג חילוק כי לא נדרש כך במשפט 5.

משפט (אש"ג ||) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה המתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$ אזי $(|a_n|)$ מתכנסת וגבולה $|L|$.

הוכחה יהי $\epsilon>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=L$ קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_1$, $|a_n-L|<\square$ $(*)$. נבחר $N=N_1$. יהי $n\ge N$ אזי $\big||a_n|-|L|\big|\overset{\triangledown}{\le}|a_n-L|<\square$. נציב $\square=\epsilon$. ■

משפט (מונוטוניות הגבול) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות המתכנסות לגבולות $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ בהתאמה. נניח כי קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N$, $a_n\le b_n$ $(*)$. אזי $L_1\le L_2$.

הוכחה נניח בשלילה כי $L_2<L_1$. נביט ב־ $L=L_1-L_2>0$. נשים ♡ ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=L_1-L_2=L>0$ מאש"ג. לכן קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_1$ מתקיים ש־ $|a_n-b_n-L|<\square$ ולכן $L-\square<a_n-b_n<L+\square$ ולכן $a_n-b_n>L-\square$, $\forall n\ge N_1$ $(**)$. יהי $n\ge\max\{N,N_1\}$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. ולכן $0\overset{(*)}{\ge}a_n-b_n\overset{(**)}{\ge}L-\square=\frac{L}{2}$. נציב $\frac{L}{2}=\square$ ולכן $\frac{L}{2}\le 0$ בסתירה לכך ש־ $L>0$. ■

XIV | 06/05/2019

מונוטוניות הגבול

הוכח־הפרך אם $a_n<b_n$ כמעט תמיד ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=L_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=L_2$. אזי $L_1<L_2$.

דוגמה־נגדית נבחר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{2}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. נשים ♡ כי $a_n<b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=0$, אבל $L_1\not<L_2$.

מסקנה מונוטוניות הגבול לא נכונה לאי שוויון חזק.

משפט (מונוטוניות הגבול ההפוכה) תהיינה $(a_n),(b_n)$ שתי סדרות המתכנסות לגבולות $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ בהתאמה. נניח כי $L_1<L_2$ אזי $a_n\le b_n$ כמעט תמיד.

הוכחה נסמן $L=L_2-L_1>0$ נשים ♡ שמאש"ג חיסור כי $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=L$, ולכן $|b_n-a_n-L|<\square$ כמעט תמיד. כלומר $L-\square<b_n-a_n<L+\square$ כמעט תמיד. נציב $\square=L$ לכן $b_n-a_n>L-L=0$ ולכן $b_n>a_n$ וגם $b_n\ge a_n$ כמעט תמיד. ■

הוכח־הפרך אם $(a_n),(b_n)$ שתי סדרות המתכנסות לגבולות $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ בהתאמה. ואם $L_1\le L_2$ אזי $a_n\le b_n$ כמעט תמיד.

דוגמה־נגדית נבחר $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=-\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$. נשים ♡ כי $L_1=L_2=0$ אבל $a_n>b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

מסקנה מונטוניות הגבול ההפוכה לא נכונה לאי שוויון חלש.

משפט (אש"ג $\sqrt{}$) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $a_n \geq 0$ כמעט תמיד. נניח כי (a_n) מכנסת ויהי $L = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$ אזי $(\sqrt{a_n})_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $\sqrt{L}$.

הוכחה נשים ♡ כי $L \geq 0$ מהיות $a_n \geq 0$ כמעט תמיד אזי ממונוטוניות הגבול, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) \geq \lim\limits_{n\to\infty} 0$, כלומר $L \geq 0$. נניח קודם ש־ $L > 0$. יהי $\epsilon > 0$. מהיות $L = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n)$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $|a_n - L| < \square$ $(*)$. מהיות $a_n \geq 0$ כמעט תמיד, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $a_n \geq 0$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $\forall n \geq N$. אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $|\sqrt{a_n} - \sqrt{L}| = \frac{|a_n - L|}{|\sqrt{a_n} + \sqrt{L}|} = \frac{|a_n - L|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{L}} \leq \frac{|a_n - L|}{\sqrt{L}} < \frac{\square}{\sqrt{L}} < \epsilon$ נציב $\square = \epsilon \cdot \sqrt{L}$ ונחזור למשוואה. עתה, נניח כי $L = 0$. יהי $\epsilon > 0$ מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $|a_n - 0| < \square$ $(*)$. מהיות $a_n \geq 0$ כמעט תמיד קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $a_n \geq 0$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \geq N$. לכן $|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\square} = \epsilon$ נציב $\square = \epsilon^2$ ונחזור למשוואה. ■

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}+3} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{2+\frac{3}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{2}$.

כריך

משפט (משפט הסדנביץ'־כריך) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}, (c_n)_{n=1}^{\infty}$ שלוש סדרות ונניח כי (i) $c_n \leq a_n \leq b_n$ כמעט תמיד. (ii) קיים $L \in \mathbb{R}$ שעבורו $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n) = L$. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$.

הערה נשים ♡ כי אם נשתמש במונוטניות הגבול וטריכוטומיה משני צדי הגבול כדי להוכיח ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = L$ ושם נפסיק נקבל הוכחה שגויה, מפני שלא הוכחנו ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $L = \lim\limits_{n\to\infty}(b_n)$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$, כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $|b_n - L| < \square$ $(*)$. מהיות $L = \lim\limits_{n\to\infty}(c_n)$ קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $|c_n - L| < \square$ $(**)$. מהיות $c_n \leq a_n \leq b_n$ קיים $N_3 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_3$, $c_n \leq a_n \leq b_n$ $(***)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ ויהי $n \geq N$ אזי $(*)$ $(**)$ $(***)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $L - \square \overset{(**)}{<} c_n \leq a_n \leq b_n \overset{(*)}{<} L + \square$ ולכן $L - \square < a_n < L + \square$, נציב $\square = \epsilon$, ונסיק כי $|a_n - L| < \epsilon$. ■

XV | 13/05/2019

ח x מ

משפט (חסומה x מתאפסת) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות ונניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה ונניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) = 0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = 0$.

טענת־עזר תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = 0$ אם"ם $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = 0$.

הוכחה־עזר :$\Leftarrow$ נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=0$ לכן מאש"ג $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$.
:$\Rightarrow$ נניח ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=0$ אזי $-\underset{0}{\underset{\downarrow}{|a_n|}}\le a_n\le \underset{0}{\underset{\downarrow}{|a_n|}}$. ■

הוכחה מספיק להוכיח $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n\cdot b_n|=0$. מהיות (a_n) חסומה קיים $M>0$ שעבורו $|a_n|\le M$ $\forall n\ge N$ ולכן $\underset{0}{\underset{\downarrow}{0}}\le|a_n\cdot \underset{0}{\underset{\downarrow}{b_n}}|=|a_n|\cdot|b_n|\le M\cdot \underset{0}{\underset{\downarrow}{|b_n|}}$. ■

סדרות השואפות לאינסוף

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל־ ∞ (מתבדרת ל־ ∞) ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$, אם $\forall k>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N$, $a_n>k$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}n^2=\infty$. הוכחה: יהי $k>0$ נבחר $N>\sqrt{k}$ יהי $n\ge N$ אזי $a_n=n^2\ge N^2>k$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n+3}=\infty$. הוכחה: יהי $k>0$ נבחר $N>k$ יהי $n\ge N$ אזי $a_n=\sqrt{n^2+n+3}\ge\sqrt{n^2}=n\ge N>k$.

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שואפת ל־ $-\infty$ (מתבדרת ל־ $-\infty$) ונסמן $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=-\infty$, אם $\forall k<0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N$, $a_n<k$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2n^2)=-\infty$. הוכחה: יהי $k<0$ נבחר $N>\sqrt{-k}$ יהי $n\ge N$ אזי $a_n=n-2n^2\le n^2-2n^2=-n^2\le -N^2<k$.

16/05/2019 | XVI

אש"א

משפט ($\infty+\infty=\infty$, $\infty\cdot\infty=\infty$) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות ונניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=\infty$ אזי (i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$.

הוכחה יהי $k>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$ קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_1$, $a_n>\square_1$. $(**)$ מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=\infty$ קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_2$, $b_n>\square_2$. $(*)$ נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$ ויהי $n\ge N$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. $a_n+b_n>\square_1+\square_2\ge k$, $a_n\cdot b_n>\square_1\cdot\square_2\ge k$. נציב $\square_1=k$, $\square_2=1$. ■

משפט ($\infty+C=\infty$) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$, ונניח שקיים $C\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{n\to}(b_n)=C$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\infty$.

הוכחה יהי $k>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$ קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_1$, $a_n>\square_1$. $(*)$ מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=C$ קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\ge N_2$, $|b_n-C|<\square_2$. $(**)$ נבחר $N=\max\{N_1,N_2\}$ ויהי $n\ge N$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $a_n+b_n>\square_1+b_n>\square_1+C-\square_2=k+|C|+C>k$. נציב $\square_1=k+|C|+1$, $\square_2=1$. ■

משפט ($c \cdot \infty = \infty$) יהיו $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות ונניח כי קיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = c$ וגם $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \infty$.

הוכחה יהי $k > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty}(a_n) = c > 0$ קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $a_n > \frac{c}{2}$ $(*)$ (מונוטוניות הגבול ההפוכה). מהיות $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $b_n > \square$. $(**)$ נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \geq N$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $a_n \cdot b_n > \frac{c}{2} \cdot \square = k$. נציב $\square = \frac{2k}{c}$. ■

דוגמה $\lim_{n\to\infty} 2n^2 = \infty$ מאש"א.

דוגמה $\lim_{n\to\infty} 3n^2 - n + 1 = \lim_{n\to\infty} n^2(3 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} 3 \cdot n^2 = \lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

דוגמה $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3n-7}{7n-5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+3-\frac{7}{n}}{7-\frac{5}{n}} = \infty$.

XVIII | 20/05/2019

משפט ($\frac{1}{0^+} = \infty$) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$ וגם $a_n > 0$ כמעט תמיד אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$.

הוכחה יהי $k > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty}(a_n) = 0$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $|a_n - 0| < \square$ $(**)$. מהיות $a_n > 0$ כמעט תמיד אזי קיים $N_2 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq N$, $a_n > 0$ $(*)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \geq N$, אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $\frac{1}{a_n}$ מוגדר, $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{|a_n|} > \frac{1}{\square} = k$, נציב $\square = \frac{1}{k}$. ■

משפט ($\frac{1}{\infty} = 0$) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N$, $a_n > \square$ $(*)$. יהי $n \geq N$ לכן $|\frac{1}{a_n} - 0| \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{a_n} < \frac{1}{\square} = \epsilon$, נציב $\square = \frac{1}{\epsilon}$. ■

משפט (הטוסט/צנים) תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות נניח כי $a_n \leq b_n$ כמעט תמיד וגם $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty}(b_n) = \infty$.

הוכחה יהי $k > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_1$, $a_n > \square$ $(*)$. מהיות $a_n \leq b_n$ כמעט תמיד קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N_2$, $a_n \leq b_n$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \geq N$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן $b_n \geq a_n > \square$, נציב $\square = k$. ■

דוגמה $0 \stackrel{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ מאש"א.

משפט ($\sqrt{\infty} = \infty$) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$ אזי $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \infty$.

הוכחה יהי $k > 0$. מהיות $\lim_{n\to\infty}(a_n) = \infty$, כמעט תמיד $(*)$. לכן $\sqrt{a_n} > \sqrt{\square} = k$ כמעט תמיד, נציב $\square = k^2$. ■

דוגמה $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+7}{n^3+2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{3}{n}+\frac{7}{n^2}}{n+\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}} = 0$.

דוגמה $\lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+\cos n+5} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n+4} \geq \lim_{n\to\infty} \sqrt{2n} = \infty$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n \geq \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$.

טענה $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$, $q > 1$.

הוכחה יהי $k > 0$. נבחר $N > \log_q(k+1)$. יהי $n \geq N$ אזי $q^n \overset{(q>1)}{\geq} q^N > q^{\log_q k+1}$. $\blacksquare$

טענה $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, $0 < q < 1$.

הוכחה $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{q})^n} = \frac{1}{\infty} = 0$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} (1.1 + \frac{1}{n})^n \geq \lim\limits_{n\to\infty} (1.1)^n = \infty$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n\cdot \sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, $0 \leq \frac{1}{n\cdot \sqrt[n]{n}} \leq \frac{1}{n}$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n-4^{n+1}}{2^{n+1}-3^n+3\cdot 4^{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^n}+\frac{3^n}{4^n}-4}{2\frac{1}{2^n}-\frac{3^n}{4^n}+3\cdot 4^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{-4}{3\cdot 4^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{12} = \frac{1}{12}$.

סדרות מונוטוניות

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה נאמר כי הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$:

(i) עולה אם $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$.

(ii) עולה ממש אם $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n < a_{n+1}$.

(iii) יורדת אם $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq a_{n+1}$.

(iv) יורדת ממש אם $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > a_{n+1}$.

(v) מונוטונית אם (i) או (iii) מתקיימים. (vi) מונוטונית ממש אם (ii) או (iv).

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה וגם חסומה מלעל אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ היא מתכנסת ובנוסף $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה ראשית מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעל קיים $M > 0$ שעבורו $a_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. לכן $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלעל ולא ריקה. לכן קיים לה חסם עליון ונסמנו $\overline{s} = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, נוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \overline{s}$ ונסיים. יהי $\epsilon > 0$. מתכונת האפסילון של $\overline{s}$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a_N > \overline{s} - \epsilon$. יהי $n \geq N$ אזי $\overline{s} + \epsilon > \overline{s} \geq a_n \geq a_N > \overline{s} - \epsilon$ לכן $\overline{s} + \epsilon > a_n > \overline{s} - \epsilon$ כלומר $|a_n - \overline{s}| < \epsilon$. $\blacksquare$

$23/05/2019$ | $\mathbb{XVIII}$

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה יורדת וחסומה מלרע. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$.

הוכחה ראשית מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע קיים $m < 0$ שעבורו $a_n \geq m$, $\forall n \in \mathbb{N}$. לכן $\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ חסומה מלרע ולא ריקה. לכן קיים לה חסם תחתון ונסמנו $\underline{s} = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, נוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n) = \underline{s}$ ונסיים. יהי $\epsilon > 0$. מתכונת האפסילון של $\underline{s}$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a_N < \underline{s} + \epsilon$. יהי $n \geq N$ אזי $s - \epsilon < \underline{s} \leq a_n \leq a_N < \underline{s} + \epsilon$ לכן $\underline{s} + \epsilon > a_n > \underline{s} - \epsilon$ כלומר $|a_n - \underline{s}| < \epsilon$. $\blacksquare$

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_1=1$, $a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}$. נשים ♡ כי (a_n) מונוטונית עולה כי $a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}\geq\sqrt{a_{n-1}+1}=a_n$ ו־ $a_2=\sqrt{2}\geq 1=1$ לכן (a_n) עולה באינדוקציה. נראה כי (a_n) חסומה מלעל ע"י 3 באינדוקציה. עבור $n=1$ ברור, עתה נוכיח כי $n\to n+1$: $a_{n+1}=\sqrt{a_n+1}\leq\sqrt{1+3}=2\leq 3$ לכן (a_n) עולה וחסומה מלעל. מהיות (a_n) חסומה מלעל אזי $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{a_{n+1}}=\sqrt{L+1}$ אזי קיים גבול והוא מקיים $L^2=L+1$ אזי $L_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ ו־ $L>0$ כי חסם מלעל ל־ (a_n) לכן $L=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. ■

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_1=1$, $a_2=\sin 1$, $a_{n+1}=\sin(a_n)$. נשים ♡ שמהיות $\sin x\leq x$ (נוכיח בהמשך בגבול המפורסם) לכל $0\leq x\leq 1$ אזי $a_{n+1}=\sin a_n\leq a_n$ ולכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת וחסומה מלרע ע"י 0 לכן (a_n) מתכנסת לגבול $0\leq L\leq 1$.

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה ונניח כי (a_n) לא חסומה מלעל אזי $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$.

הוכחה יהי $k>0$. מהיות (a_n) לא חסומה מלעל, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $a_N>\square$. יהי $n\geq N$ מהיות (a_n) עולה $a_n\geq a_N>\square$, נציב $\square=k$. ■

הגדרה נאמר ש־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב אם אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימת: (i) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$. (iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=-\infty$.

מסקנה כל סדרה מונוטונית מתכנסת במובן הרחב.

דוגמה נגדיר $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_{n+1}=1+a_n^2$ $\forall n\geq 1$, $a_1=0.1$. נשים ♡ כי $\forall n\geq 2$, $a_n\geq 1$. $a_n=1+a_{n-1}^2\geq 1$ ולכן $a_{n+1}=a_n^2+1\geq a_n+1\geq a_n$ ולכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ עולה. נוכיח ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$. נניח בשלילה. מהיות (a_n) עולה היא מתכנסת במובן הרחב וברור $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)\neq-\infty$ כי $a_n\geq 1$, $\forall n\geq 2$ לכן קיים $L\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=L$. לכן $L=\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n^2+1=1+L^2$ ולכן $L^2+1=L$ אין פתרון. סתירה. ■

דוגמה נביט בסדרה $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\mathbb{XIX}$ | 27/05/2019

חישוב הגבול e

משפט (אי שוויון ברנולי) $\forall x>-1$, $\forall n\geq 0$ שלם, $(1+x)^n\geq 1+nx$.

הוכחה אם $n=0$, $(1+x)^0=1\geq 1+0\cdot x=1$. $n\to n+1$, $(1+x)^{n+1}=(1+x)(1+x)^n\geq(1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x$.

משפט נביט בסדרה המוגדרת ע"י $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה עולה.

הוכחה מספיק להוכיח כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$, $\forall n\in\mathbb{N}$.
$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{(\frac{n+1+1}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^n}=\frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}}(\frac{n+1}{n})=(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})=(\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})=(1-\frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}(1+\frac{1}{n})\geq(1-\frac{1}{n+1})(1+\frac{1}{n})=1$. ■

הגדרה $\binom{n}{k}$ הוא מספר האפשרויות לבחור k מתוך n ללא חשיבות לסדר. וגם נגדיר $\forall k,n\geq 0$ שלמים, $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

דוגמה $\binom{n}{0}=\frac{n!}{0!n!}=1$, $\binom{n}{n}=\frac{n!}{n!0!}=1$, $\binom{n}{1}=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$, $\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\binom{n}{k}$.

משפט $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

הוכחה $\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k}$, המונה הוא מספר האפשרויות לבחור k מתוך n עם חשיבות לסדר, המכנה הוא מספר האפשרויות לסדר k עצמים. ■

XX | 30/05/2019

טענה $\forall n\geq k\geq 0$, $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}$.

הוכחה $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=\frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n-k+1)!}=\frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n+1-k)!}=\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)}=\binom{n+1}{k}$.

משפט (נוסחת הבינום של ניוטון) $\forall a,b\in\mathbb{R}$, $\forall n\geq 0$ שלם $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}=\binom{n}{0}a^0b^n+\binom{n}{1}a^1a^{n-1}+...+\binom{n}{n}a^nb^0$.

הוכחה באינדוקציה על n. נניח כי $n=0$. $(a+b)^0=1$, $\binom{0}{0}a^0b^0=1=\sum\limits_{k=0}^{0}\binom{0}{k}a^0\cdot b^{0-0}$. ש♡ $n\to n+1$: $(a+b)^{n+1}=$

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b)^n&=(a+b)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{k+1}\cdot b^{n-k}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^k\cdot b^{n+1-(k-1)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}\\&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k-1}a^k\cdot b^{n+1-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)a^k\cdot b^{n+1-k}+\binom{n}{n}a^{n+1}b^0+\binom{n}{0}a^0b^{n+1}\\&=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}+\binom{n+1}{n+1}a^{n+1}b^0+\binom{n+1}{0}a^0b^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^k\cdot b^{n+1-k}.\end{aligned}$$ ■

הערה אם $n=2$ נקבל $(a+b)^2=\binom{2}{0}a^0b^2+\binom{2}{1}a^1b^1+\binom{2}{2}a^2b^0=b^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3=\binom{3}{0}a^0b^3+\binom{3}{1}a^1b^2+\binom{3}{2}a^2b^1+\binom{3}{3}a^3b^0=b^3+ab^2+a^2b+a^3$.

מסקנה $2^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^n1^{n-k}=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$. $(-1+1)^n=0=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$.

משפט הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$. חסומה מלעל ע"י 3.

הוכחה מנוסחת הבינום

$$(1+\tfrac{1}{n})^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\cdot 1^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}...\frac{n-k+1}{n}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+...+\frac{1}{n!}$$

$$\leq 1+1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2^2}+\tfrac{1}{2^3}+...+\tfrac{1}{2^{n-1}}\overset{q=\frac{1}{2}}{=}1+q+q^2+...+q^{n-1}=1+\frac{q^n-1}{q-1}=1+\frac{\frac{1}{2^n}-1}{\frac{1}{2}-1}=1+\frac{1-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{\frac{1}{2}}=3.$$

■

הגדרה $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

מסקנה e מוגדר היטב.

הוכחה ראינו כי הסדרה $(a_n)=(1+\frac{1}{n})^n$ עולה וחסומה מלעל לכן היא מתכנסת ולכן הגבול קיים. $\blacksquare$

מסקנה $\forall n\in\mathbb{N}$, $e\geq(1+\frac{1}{n})^n$.

תתי סדרות

הגדרה תהיינה $(a_n)_{n=1}^\infty$ ו־ $(b_k)_{k=1}^\infty$. נאמר כי $(b_k)_{k=1}^\infty$ תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^\infty$ אם קיימת סדרה עולה ממש של טבעיים $(n_k)_{k=1}^\infty$ כך ש־ $\forall k\in\mathbb{N}$, $b_k=a_{n_k}$.

דוגמה $n_k=k$, $\forall k$, $b_k=a_{n_k}=a_k$ ולכן $(a_n)_{n=1}^\infty$ תת סדרה של עצמה.

דוגמה $n_k=2k$, $(a_{2k})_{n=1}^\infty$ תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^\infty$.

דוגמה $(a_{n^2})_{n=1}^\infty$ תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^\infty$. במקרה זה $n_k=k^2$.

דוגמה $a_n=\frac{1}{n}$, $b_n=\frac{1}{2^n}$, $\forall n\geq 1$. $n_k=2^k$, $b_k=\frac{1}{2^k}=a_{n_k}$.

$\mathbb{XXI}$ | 03/06/2019

משפט (משפט הירושה) תהי $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה ותהי $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ תת־סדרה של $(a_n)_{n=1}^\infty$. נניח כי $(a_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת במובן הרחב אזי $(a_{n_k})_{k=1}^\infty$ גם מתכנסת במובן הרחב ו־ $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$.

הוכחה ראשית נניח כי $(a_n)_{n=1}^\infty$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$ ונוכיח כי $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$. יהי $\epsilon>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N$, $|a_n-L|<\square$ $(*)$. נבחר $K=N$. יהי $k\geq K$ אזי $\square\overset{(**)(*)}{<}|a_{n_k}-L|$. $(**)$ מהיות $(n_k)_{k=1}^\infty$ סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים אז $n_k\geq k$, $\forall k$. ($n_1\geq 1$, $n_k>n_{k-1}\geq k-1$ מהנחת האינדוקציה ולכן $n_k\geq k$) ולכן $N=K\leq k\leq n_k$ נציב $\epsilon=\square$. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$, יהי $M>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N$, $a_n>\square$ $(***)$. נבחר $K=N$. יהי $k\geq K$ אזי $\square\overset{(**)(***)}{>}a_{n_k}$, נציב $M=\square$. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$. יהי $M<0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$, קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N$, $a_n<\square$ $(\star)$. נבחר $K=N$ ויהי $k\geq K$ אזי $\square\overset{(\star)(**)}{<}a_{n_k}$, נציב $M=\square$. $\blacksquare$

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{2n}=e$, $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $n_k=2k$.

דוגמה $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n^2+n+1})^{2n^2+n+1}=e$, $n_k=2k^2+k+1$.

דוגמה נגדיר $a_n=\begin{cases}\frac{1}{n} & n=2k\\ 1 & n=2k-1\end{cases}$, $\forall n$. נשים ♡ כי $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2k}=0$, $\lim\limits_{k\to\infty}a_{2k-1}=1$. לכן הסדרה (a_n) מתבדרת כי אחרת כל תתי הסדרות היו מתכנסות לאותו הגבול.

דוגמה נגדיר $a_n=\frac{1}{p_n}$, כאשר p_n הוא המספר הראשוני ה־n־י. אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ כי היא תת סדרה של $\frac{1}{n}$.

תרגיל תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות ונגדיר $c_n=\begin{cases}a_k & n=2k\\ b_k & n=2k-1\end{cases}$. הוכיח כי (c_n) מתכנסת אם ורק אם (a_n), (b_n) מתכנסות לאותו הגבול.

הוכחה :$\leftarrow$ נניח כי $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לגבול $L\in\mathbb{R}$. נשים ♡ כי $a_n=c_{2n}$, $\forall n$. ולכן (a_n) תת סדרה של (c_n). ולכן ממשפט הירושה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$. נשים ♡ כי גם $b_n=c_{2n-1}$, $\forall n$. ולכן באותו האופן, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$ (מירושה).
$\rightarrow$: נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}(b_n)=L$, נוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=L$ ונסיים. יהי $\epsilon>0$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$, קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N_1$, $|a_n-L|<\square_1$ $(*)$. מהיות $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=L$, קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N_2$, $|b_n-L|<\square_2$ $(**)$. נבחר $N=\max\{2N_1,2N_2-1\}$ ויהי $n\geq N$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל. לכן אם n זוגי, $|c_n-L|=|c_{2k}-L|=|a_k-L|\overset{2k=n\geq 2N_1\to k\geq N_1}{<}\square_1$. אחרת n אי־זוגי ולכן $|c_n-L|=|c_{2k-1}-L|=|b_k-L|<\square_2$. נציב $\square_{1,2}=\epsilon$. ■

משפט (הלמה של קנטור) תהיינה $(I_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של קטעים סגורים ונניח כי (i) $I_{n+1}\subseteq I_n$. (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}|I_n|=0$ כאשר עבור $I_n=[a_n,b_n]$, $|I_n|=b_n-a_n$. אזי קיימת $c\in\mathbb{R}$ יחידה כך ש־ $c\in I_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

הוכחה נסמן $I_n=[a_n,b_n]$. מהיות $[a_{n+1},b_{n+1}]\subseteq[a_n,b_n]$ אזי $a_n\leq a_{n+1}\leq b_{n+1}\leq b_n$ $(*)$, $\forall n$. לכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ עולה ו־ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת. ובנוסף $a_1\leq a_n\overset{(*)}{\leq}b_n\leq b_1$ ולכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעל על ידי b_1 ו־$(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלרע על ידי a_1. לכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרות מתכנסות לגבולות $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ בהתאמה. נשים ♡ כי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n-b_n=L_1-L_2=0$ לכן $L_1=L_2$. נסמן $c=L_1=L_2$. נוכיח כי $c\in I_n$, $\forall n$. מתקיים $c=\sup\{a_n|n\in\mathbb{N}\}=\inf\{b_n|n\in\mathbb{N}\}$. לכן $a_n\leq c\leq b_n$, $\forall n$. ולכן $c\in I_n=[a_n,b_n]$, $\forall n$. נניח כי $c,c^{'}\in I_n$, $\forall n$. נוכיח כי $c=c^{'}$. מהיות $c,c^{'}\in I_n$ אזי $\underset{\downarrow 0}{0}\leq|c-c^{'}|\leq\underset{\downarrow 0}{b_n-a_n}$ לכן $0=\lim\limits_{n\to\infty}|c-c^{'}|=|c-c^{'}|$ מסנדביץ' לכן $|c-c^{'}|=0$ ולכן $c=c^{'}$. ■

06/06/2019 | $\mathbb{XXII}$

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. יהי $s\in\mathbb{R}$. נאמר כי s גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, אם קיימת תת־סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ שעבורה $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=s$. קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תסומן ב־ $\mathbb{S}=\{s\in\mathbb{R}|(a_n)_{n=1}^{\infty}$ של ג"ח $s\}$.

הערה $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$ אזי $\mathbb{S}=\{L\}$. אם $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ אזי $\mathbb{S}=\varnothing$. אם קיימים $s_1,s_2\in\mathbb{R}$ כך ש־ $s_1\neq s_2$ ו־ s_1,s_2 גבולות חלקיים אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת.

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. ויהי $s\in\mathbb{R}$. אזי s גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אם ורק אם $\forall u,v\in\mathbb{R}$ כך ש־ $u<s<v$, מתקיים $u<a_n<v$ באופן שכיח.

הוכחה $\leftarrow$: יהיו $u,v\in\mathbb{R}$ כך ש־ $u<s<v$. נוכיח כי $u<a_n<v$ לאינסוף אינדקסים. מהיות s גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, קיימת תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=s$. מהיות $s=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$, $u<a_{n_k}<v$ כמעט תמיד, ולכן קיימים אינסוף k־ים שעבורם $u<a_{n_k}<v$ ולכן יש אינסוף n־ים שעבורם $u<a_n<v$.

$\rightarrow$: נוכיח באינדוקציה. נביט ב־ $u=s-1, v=s+1$ מההנחה $u<a_n<v$ באופן שכיח ולכן קיים $n_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $u<a_{n_1}<v$. בצעד ה־ $k+1$־י, מהיות $s-\frac{1}{k+1}<a_n<s+\frac{1}{k+1}$ באופן שכיח קיים $n_{k+1}\in\mathbb{N}$ כך ש־ $n_{k+1}>n_k$ וגם $s-\frac{1}{k+1}<a_{n_{k+1}}<s+\frac{1}{k+1}$. נביט ב־ $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ זו תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, כי n_k עולה ממש. בנוסף $\underset{\overset{\downarrow}{s}}{s-\frac{1}{k}}\le a_{n_k}\le\underset{\overset{\downarrow}{s}}{s+\frac{1}{k}}$. ■

בולצנו וירשטראס

משפט (בולצנו וירשטראס - BW) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. אזי קיימת ל־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת.

מסקנה אם $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה, אזי $\mathbb{S}\neq\varnothing$.

הוכחה (חלק א') מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה, קיימים $m_1,M_1\in\mathbb{R}$ שעבורם $m_1\le a_n\le M_1$ $\forall n\in\mathbb{N}$. נסמן $I_1=[m_1,M_1]$. נביט ב־ $[m_1,\frac{m_1+M_1}{2}]$. אם $a_n\in[m_1,\frac{m_1+M_1}{2}]$ באופן שכיח, נסמן $m_2=m_1$, ו־ $M_2=\frac{m_1+M_1}{2}$, $I_2=[m_2,M_2]$. אחרת, $a_n\in[\frac{m_1+M_1}{2},M_1]$ באופן שכיח ונסמן במקרה זה $m_2=\frac{m_1+M_1}{2}$, $M_2=M_1$, $I_2=[\frac{m_1+M_1}{2},M_1]$. נחזור על התהליך. נביט ב־ $I_k=[m_k,M_k]$. אם $a_n\in[m_k,\frac{m_k+M_k}{2}]$ באופן שכיח, ונסמן $m_{k+1}=m_k$, $M_{k+1}=\frac{m_k+M_k}{2}$. אחרת נסמן $m_{k+1}=\frac{m_k+M_k}{2}$, $M_{k+1}=M_k$. נסמן $I_{k+1}=[m_{k+1},M_{k+1}]$. נביט ב־ $(I_k)_{k=1}^{\infty}$ נשים ♡ כי: (i) $I_{k+1}\subseteq I_k$, $\forall k$. (ii) $|I_{k+1}|=\frac{1}{2}\cdot|I_k|$ כי $|I_k+1|=M_{k+1}-m_{k+1}=\begin{cases}\frac{m_k+M_k}{2}-m_k=\frac{M_k-m_k}{2}=\frac{1}{2}|I_k|\\ M_k-\frac{m_k+M_k}{2}=\frac{M_k-m_k}{2}=\frac{1}{2}|I_k|\end{cases}$. ולכן $|I_k|=\frac{1}{2}|I_{k-1}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}|I_{k-2}|=...=\frac{1}{2^{k-1}}|I_1|$. $\lim\limits_{k\to\infty}|I_k|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k-1}}|I_1|=0$. לכן מהלמה של קנטור, קיימת $s\in\mathbb{R}$ יחידה כך ש־ $s\in I_k$, $\forall k$.

10/06/2019 | XXIII

לא עשינו כלום

17/06/2019 | XXIV

הוכחה (חלק ב') ראינו כי קיימת $s\in\mathbb{R}$ כך ש־ $s\in I_k$, $\forall k\in\mathbb{N}$. נוכיח עתה כי s גבול חלקי של הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ונסיים. מספיק להוכיח ש־ $\forall u,v\in\mathbb{R}$, $u<s<v$, $u<a_n<v$ באופן שכיח. יהיו $u,v\in\mathbb{R}$ כך ש־ $u<s<v$. מספיק להוכיח שקיים $k\in\mathbb{N}$ שעבורו $I_k\in(u,v)$. נזכור כי $I_k=[m_k,M_k]$. מהיות $\lim\limits_{k\to\infty}|I_k|=0$, קיים k שעבורו $|I_k|<\square=\min\{s-u,v-s\}$ ולכן $m_k\le s\le M_k$. $M_k=M_k-s+s\le M_k-m_k+s<(v-s)+s=v$.

לכן, $\square = \min\{s-u, v-s\}$ נבחר $m_k = m_k - s + s = -(s-m_k) + s \ge -(M_k - m_k) + s > -(s-u) + s = u$.

$u < m_k \le s \le M_k < v$. ■

$\mathbb{XXV}$ | 20/06/2019

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא חסומה מלעל אם"ם קיימת לה תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$.

הוכחה $\Rightarrow$: נוכיח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ איננה חסומה מלעל. יהי $M > 0$. מהיות $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$ קיים $K \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall k \ge K$, $a_{n_k} > \square = M$.

$\Leftarrow$: נניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא חסומה מלעל. קיים $n_1 \in \mathbb{N}$ שעבורו $a_{n_1} > 1$. לכן קיים $n_2 \in \mathbb{N}$ שעבורו $a_{n_2} > \max\{a_1, a_2, ..., a_{n_1}, 2\}$ נשים ♡ כי $a_{n_2} > 2$ וגם $n_2 > n_1$ (אחרת $n_1 \ge n_2$ ולכן a_{n_2} נמצא מבין האיברים $a_1, a_2, .., a_{n_1}$ בסתירה להגדרת a_{n_2}). $\forall k \in \mathbb{N}$ קיים באותו האופן $n_k \in \mathbb{N}$ כך ש־ $a_{n_k} > \max\{a_1, a_2, ..., a_{n_{k-1}}, k\}$. נשים ♡ כי, $a_{n_k} > k$ וכן ש־ $n_k > n_{k-1}$ לכן $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. בנוסף, $a_{n_k} \ge k$ ולכן מטוסט $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \infty$. ■

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ לא חסומה מלרע אם"ם קיימת לה תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = -\infty$.

הוכחה באותו האופן. ■

מסקנה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה אזי קיים לה גבול חלקי במובן הרחב.

הוכחה ברור.

תרגיל תהיינה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות חסומות. הוכיחו כי קיימת סדרה עולה ממש של אינדקסים, $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, שעבורה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ מתכנסות.

הוכחה מ־ BW קיימת ל־ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת שנסמנה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. נביט בסדרה $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$. זו תת סדרה של $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ומהיות $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה גם $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ חסומה. ולכן מ־BW יש ל־ $(b_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת שנסמנה $(b_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$. נביט ב־ $(a_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$, זו תת סדרה של $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ולכן מירושה היא מתכנסת. ■

$\liminf$, $\limsup$

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. נגדיר את הגבול העליון של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ להיות $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \sup \mathbb{S}$ ואת $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \inf \mathbb{S}$ כאשר $\mathbb{S} = \{s \in \mathbb{R} |$ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ג"ח של $s\}$.

הערה $\mathbb{S}$ לא ריקה מ־ BW, $\mathbb{S}$ חסומה כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה: יהי $s \in \mathbb{S}$. אזי קיימת תת סדרה $(a_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש־ $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = s$. מהיות קיימים $M \in \mathbb{R}$, m כך ש־ $m \le a_n \le M$, $\forall n$. לכן $m \le a_{n_k} \le M$ לכן ממונוטוניות הגבול $m \le s \le M$ ולכן $\mathbb{S}$ חסומה. לכן $\limsup a_n$, $\liminf a_n$ מגדירים היטב.

דוגמה $a_n = 1, 0, 1, ...$, $\limsup a_n = 1$ וגם $\liminf a_n = 0$.

טענה $\mathbb{S}=\{0,1\}$.

הוכחה ראשית ברור כי $0,1\in\mathbb{S}$ כי $a_{2n}=0$, $a_{2n-1}=1$ $\forall n$. נניח בשלילה שקיים $0,1\neq s\in\mathbb{S}$. נביט ב־ $r=\min\{|s-0|,|s-1|\}$ ונגדיר $u=s-r$, $v=s+r$. נשים ♡ $(*)$ כי לכל $u<x<v$ מתקיים $x\neq 0,1$. לכן s לא ג"ח. $(*)$: נניח בשלילה כי $u<0<v$ לכן $s-\min\{|s-0|,|s-1|\}<0<s+\min\{|s-0|,|s-1|\}$ לכן $|0-s|<\min\{|s-0|,|s-1|\}$ סתירה! באותו האופן, גם $s\neq 1$. ■

דוגמה $a_n=\frac{1}{n}$, $\forall n$. $\mathbb{S}=\{0\}$.

משפט תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. תהי $\mathbb{S}$ קבוצת הגבולות החלקיים של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ אזי $\limsup a_n\in\mathbb{S}$.

הוכחה נסמן $\overline{s}=\limsup a_n$, נוכיח כי $\overline{s}$ גבול חלקי של $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. יהיו $u,v\in\mathbb{R}$ כך ש־ $u<\overline{s}<v$. מתכונת ה־ ϵ קיים $s\in\mathbb{S}$ כך ש־ $v>\overline{s}\geq s>\overline{s}-(\overline{s}-u)=u$ לכן קיים $s\in\mathbb{S}$ כך ש־ $u<s<v$ לכן $u<a_n<v$ באופן שכיח. ■

27/06/2019 | $\mathbb{XXVI}$

סדרות קושי

הגדרה תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר שהיא סדרת קושי אם $\forall\epsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n,m\in\mathbb{N}$ כך ש־ $n,m\geq N$, $|a_n-a_m|<\epsilon$.

משפט (משפט קושי) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אזי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי אם"ם היא מתכנסת.

הוכחה $\rightarrow$: נניח שהסדרה מתכנסת, ויהי $L\in\mathbb{R}$ הגבול שלה. יהי $\epsilon>0$. מהיות הסדרה מתכנסת, קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n\geq N$, $|a_n-L|<\square$ $(*)$. יהיו $n,m\geq N$. אזי $|a_n-a_m|\overset{\triangle}{\leq}|a_n-L|+|L-a_m|=|a_n-L|+|a_m-L|<\square+\square=\epsilon$, נבחר $\square=\frac{\epsilon}{2}$.

$\leftarrow$: נניח שהסדרה היא סדרת קושי. מהיות הסדרה סדרת קושי, אזי קיים $N_1\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n,m\geq N_1$, $|a_n-a_m|<1$ ולכן $\forall n\geq N_1$, $|a_n-a_{N_1}|<1$ ולכן $|a_n|=|a_n-a_{N_1}+a_{N_1}|\overset{\triangle}{\leq}|a_n-a_{N_1}|+|a_{N_1}|\leq 1+|a_{N_1}|$. נבחר $M=\max\{|a_1|,...,|a_{N_1-1}|,1+|a_{N_1}|\}$ לכן $|a_n|\leq M$, $\forall n\in\mathbb{N}$. לכן $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ חסומה. לכן מ־ BW יש לה תת סדרה מתכנסת שנסמנה $(a_{n_k})_{n=1}^{\infty}$ ונסמן $L=\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}$. נוכיח כי $\lim\limits_{k\to\infty}a_n=L$. יהי $\epsilon>0$. ראשית מהיות $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=L$, אזי קיים $K\in\mathbb{N}$ כך ־ $\forall k\geq K$, $|a_{n_k}-L|<\square_1$ $(*)$. מהיות $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי, קיים $N_2\in\mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n,m\geq N_2$, $|a_n-a_m|<\square_2$ $(**)$. נבחר $N=N_2$ ויהי $n\geq N$. נבחר $k\geq\max\{K,N_2\}$ אזי $n_k\geq k\geq N_2$ ולכן $(**)$ מתקיים עבור n,n_k. בנוסף מהיות $k\geq K$, אזי $(*)$ מתקיים עבור k. לכן $|a_n-L|\overset{\triangle}{\leq}|a_n-a_{n_k}|+|a_{n_k}-L|<\square_2+\square_1=\epsilon$, נבחר $\square_{1,2}=\frac{\epsilon}{2}$.

סביבה של x_0

הגדרה יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ויהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי L גבול של f כאשר $x \to \infty$ אם $\forall \epsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך ש־ $\forall x \geq M$, $|f(x) - L| < \epsilon$.

הערה זו אותה הגדרה כמו $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ פרט לכך ש־ M לא חייב להיות טבעי ו־ x לא חייב להיות טבעי גם הוא. נשים ♡ כי כל משפט שהוכחנו ללא שימוש בכך ש־ $n \in \mathbb{N}$, חל באותה המידה על גבולות של פונקציות, כי ההוכחה תהיה זהה.

הגדרה תהי $x_0 \in \mathbb{R}$, סביבה של x_0 היא (a,b) כך ש־ $x_0 \in (a,b)$ כלומר קבוצה מהצורה $\{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ כאשר $a < x_0 < b$.

דוגמה $(0,1)$ סביבה של חצי וגם של שליש אבל לא של 0.

דוגמה $[0,1]$ הוא לא סביבה של חצי (כי הוא לא קטע פתוח).

הגדרה תהי $x_0 \in \mathbb{R}$, סביבה מנוקבת של x_0 זו קבוצה מהצורה $(a,b)\backslash\{x_0\}$ כאשר (a,b) היא סביבה של x_0.

גבול של פונקציה

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 (לא בהכרח בצורה בלעדית). יהי $L \in \mathbb{R}$ נאמר כי L הוא גבול של f ב־ x_0 אם $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R}$ שעבורו $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \epsilon$, ונסמן $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$

הערה δ תלוי ב־ ϵ, δ לא יחיד וכן אם ϵ קטן, δ קטן גם כן (בדומה למסקנות מהגדרת הגבול לסדרה).

30/06/2019 | $\mathbb{XXVIII}$

דוגמה $\lim\limits_{x\to 1}(2x-3) = -1$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$, יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x-1| < \delta$. אזי $|f(x)-L| = |2x-3+1| = |2x-2| = 2|x-1| < 2\delta = \epsilon$. ■

דוגמה $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x) = 6$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \min\{1, \frac{\epsilon}{6}\}$, יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x-2| < \delta$. אזי $|f(x)-L| = |x^2+x-6| = |(x-2)(x+3)| = |x-2| \cdot |x+3| < \delta \cdot |x+3| \overset{\triangle}{\leq} \delta(|x-2|+5) < \delta(\delta+5) \overset{(\delta\leq 1)}{\leq} 6\delta \overset{(\delta\leq\frac{\epsilon}{6})}{\leq} \epsilon$. ■

דוגמה $\lim\limits_{x\to -2}\sqrt{x^2+5} = 3$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \min\{1.\frac{\epsilon}{2}\}$, יהי $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x+2| < \delta$. אזי $|f(x)-L| = |\sqrt{x^2+5}-3| = |\frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3}| < |\frac{\delta(x-2)}{\sqrt{x^2+5}+3}| \overset{(*)}{\leq} \frac{5\delta}{3} \leq 2\delta \leq \epsilon$. $(*)$ $|x-2| \leq |x+2| + |-4| < \delta + 4 \leq 5$ (אם $\delta \leq 1$). ■

דוגמה $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-1}{x-5} = -1$.

הוכחה יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\min\{1,\frac{\epsilon}{2}\}$, יהי $x\in\mathbb{R}$ כך ש־ $0<|x-3|<\delta$. אזי $|f(x)-L|=|\frac{x-1}{x-5}+1|=|\frac{x-1+x-5}{x-5}|=$ $\frac{|2x-6|}{|x-5|}=\frac{2|x-3|}{|x-5|}<\frac{2\delta}{|x-5|}\overset{(*)}{\leq}2\delta\leq\epsilon$. $(*)$ נשים ♡ כי $-2-\delta<x-5<-2+\delta$ לכן $1\leq 2-\delta<-(x-5)<2+\delta$ לכן אם $\delta\leq 1$, $|x-5|\geq-(x-5)\geq 1$. ■

משפט (יחידות הגבול) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נניח ש־ $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ הם גבולות של f ב־ x_0 אזי $L_1=L_2$.

הוכחה נוכיח כי $\forall\epsilon>0$, $|L_1-L_2|<\epsilon$ ונסיים. יהי $\epsilon>0$. מהיות L_1 גבול של f ב־ x_0, קיים $\delta_1>0$ כך ש־ $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-x_0|<\delta_1$, $|f(x)-L_1|<\square_1$ $(*)$. מהיות L_2 גבול של f ב־ x_0, קיים $\delta_2>0$ כך ש־ $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-x_0|<\delta_2$, $|f(x)-L_2|<\square_2$ $(**)$. נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ויהי $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור x הנ"ל. לכן $|L_1-L_2|=|L_1-f(x)+f(x)-L_2|\overset{\triangle}{\leq}|f(x)-L_1|+|f(x)-L_2|<\square_1+\square_2=\epsilon$, נבחר $\square_{1,2}-\frac{\epsilon}{2}$. ■

אשגש"פ

משפט (אש"ג בסיס) $\forall x_0\in\mathbb{R}$, (i) $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$. (ii) $\lim\limits_{x\to x_0}c=c$.

הוכחה (i) יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\epsilon$, יהי $0<|x-x_0|<\delta$. אזי $|f(x)-L|=|x-x_0|<\delta=\epsilon$.

(ii) יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=1$, יהי $0<|x-x_0|<\delta$. אזי $|f(x)-L|=|c-c|=0<\epsilon$. ■

משפט (אש"ג $\pm$) תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של x_0. נניח כי קיימים $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L_2$. אזי $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)$ קיים ושווה ל־ $L_1\pm L_2$.

הוכחה יהי $\epsilon>0$. מהיות L_1 גבול של f ב־ x_0, קיים $\delta_1>0$ כך ש־ $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-x_0|<\delta_1$, $|f(x)-L_1|<\square_1$ $(*)$. מהיות L_2 גבול של g ב־ x_0, קיים $\delta_2>0$ כך ש־ $\forall x\in\mathbb{R}$, $0<|x-x_0|<\delta_2$, $|g(x)-L_2|<\square_2$ $(**)$. נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ ויהי $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $(*)$ $(**)$ מתקיימים עבור x הנ"ל. לכן $|f(x)\pm g(x)-(L_1\pm L_2)|\overset{\triangle}{\leq}$ $|f(x)-L_1|+|\pm g(x)\mp L_2|<\square_1+\square_2=\epsilon$, נבחר $\square_{1,2}=\frac{\epsilon}{2}$. ■

01/07/2019 | XXVIII

טענת־עזר־1 תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0 ונניח כי $L=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ אזי קיים $\delta>0$ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)|\leq 1+|L|$.

הוכחה מהיות $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L$, קיים δ כך שלכל $0<|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-L|<1$ ולכן $|f(x)|\overset{\triangle}{\leq}|f(x)-L|+|L|\leq 1+|L|$.

משפט (אש"ג $\cdot$) תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של x_0. נניח כי קיימים $L_1,L_2\in\mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=L_2$. אזי $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))$ קיים ושווה ל־ $L_1\cdot L_2$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות L_1 גבול של f ב־ x_0, קיים $\delta_1 > 0$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|f(x) - L_1| < \Box_1$ $(*)$. מהיות L_2 גבול של g ב־ x_0, קיים $\delta_2 > 0$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - x_0| < \delta_2$, $|g(x) - L_2| < \Box_2$ $(**)$. מהיות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$ אזי קיים δ_3 כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_3$, $|f(x)| \leq 1 + |L_1|$ $(***)$. נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ אזי $(*)$ $(**)$ $(***)$ מתקיימים עבור x הנ"ל. לכן $|f(x) \cdot g(x) - L_1 \cdot L_2|$

$$= |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot L_2 + f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| = |f(x)(g(x) - L_2) - L_2(f(x) - L_1)|$$

$$\stackrel{\triangle}{\leq} |f(x)| \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| \leq (|L_1| + 1|) \cdot |g(x) - L_2| + |L_2| \cdot |f(x) - L_1| < (|L_1| + 1) \cdot \Box_2 + |L_2| \cdot \Box_1 =$$

$\frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{|L_2|}{|L_2|+1} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon$, נבחר $\Box_2 = \frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}$, $\Box_1 = \frac{\epsilon}{2(1+|L_2|)}$. $\blacksquare$

טענת־עזר־2 תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נניח כי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x)| \geq \frac{|L|}{2}$.

הוכחה מהיות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$ אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \Box$. לכן $|f(x)| = |-f(x)| = |-L - (f(x) - L)| \stackrel{\triangledown}{\geq} ||L| - |f(x) - L|| > |L| - \frac{|L|}{2} = \frac{|L|}{2}$. $\blacksquare$

משפט (אש"ג /) תהיינה f, g פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של x_0. נניח כי קיימים $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = L_2 \neq 0$. אזי $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ קיים ושווה ל־ $\frac{L_1}{L_2}$.

הוכחה ראשית מטענת עזר 2, קיים $\delta_1 > 0$, כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$, $|g(x)| \geq \frac{|L_2|}{2} > 0$ $(*)$ ולכן $\frac{f}{g}$ מוגדרת היטב לכל $0 < |x - x_0| < \delta_1$. יהי $\epsilon > 0$. מהיות L_1 גבול של f ב־ x_0, קיים $\delta_2 > 0$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - x_0| < \delta_2$, $|f(x) - L_1| < \Box_1$ $(**)$. מהיות L_2 גבול של g ב־ x_0, קיים $\delta_3 > 0$ כך ש־ $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < |x - x_0| < \delta_3$, $|g(x) - L_2| < \Box_2$ $(***)$. נבחר $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$. לכן $= |\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_1}{L_2}| = |\frac{L_2 \cdot f(x) - L_1 \cdot g(x)}{g(x) \cdot L_2}| = \frac{|L_2 \cdot f(x) - L_1 \cdot g(x)|}{|g(x)| \cdot |L_2|} \stackrel{(***)}{\leq} \frac{|f(x) \cdot L_2 - g(x) \cdot L_1|}{(\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|)}$

$$\frac{|f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2 + L_1 \cdot L_2 - g(x) \cdot L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \stackrel{\triangle}{\leq} \frac{|f(x) \cdot L_2 - L_1 \cdot L_2| + |L_1 \cdot L_2 - g(x) \cdot L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} = \frac{|L_2| \cdot |f(x) - L_1| + |L_1| \cdot |g(x) - L_2|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \stackrel{(**)(***)}{<} \frac{\Box_1}{\frac{|L_2|}{2}} +$$

$\frac{|L_1|}{\frac{|L_2|}{2} \cdot |L_2|} \Box_2 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{|L_1|}{|L_1|+1} \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. נציב $\Box_1 = \frac{|L_2|}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2}$, $\Box_2 = \frac{\frac{|L_2|^2}{2} \cdot \frac{\epsilon}{2}}{|L_1|+1} \cdot \frac{\epsilon}{2}$. $\blacksquare$

דוגמה $\lim_{x\to 2} (x^3 - 4x + 1) = 1$.

דוגמה $\lim_{x\to 3} \frac{x-1}{x-5} = -1$.

דוגמה $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} x + 1 = 2$.

משפט (אש"ג ||) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקדת של x_0. נניח כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ קיים, אזי $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ אזי קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \Box$. לכן $||f(x)| - |L|| \stackrel{\triangledown}{\leq} |f(x) - L| < \Box$, נבחר $\Box = \epsilon$.

הערה $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים אם $\forall L \in \mathbb{R}$, קיים $\epsilon > 0$. כך ש־ $\forall \delta > 0$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| \geq \epsilon$.

דוגמה $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

טענה תהי $x_0 \in \mathbb{R}$. אזי $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ לא קיים.

הוכחה נניח בשלילה שקיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim\limits_{x\to x_0} D(x) = L$. לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, $|D(x) - L| < \square$ $(*)$. מצפיפות $\mathbb{Q}$, קיים רציונלי $x_1 \in \mathbb{Q}$ כך ש־ $0 < |x_1 - x_0| < \delta$, לכן מ־ $(*)$ ל־ x_1, $|D(x_1) - L| = |1 - L| < \square$. מצפיפות $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, קיים $x_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ כך ש־ $0 < |x_2 - x_0| < \delta$ ולכן מ־ $(*)$ ל־ x_2, $|0 - L| < \square$. נבחר $\square = \frac{1}{2}$ לכן $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} > |L - 0| + |1 - L| \geq |1 - 0|$ לכן $1 < 1$ סתירה. ∎

דוגמה $\lim\limits_{x\to 2}(2x - D(x))$ לא קיים.

02/07/2019 | $\mathbb{XXIX}$

הלמה של היינה

משפט (הלמה של היינה) תהי f המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. יהי $L \in \mathbb{R}$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אם"ם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת: (i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ (ii) $x_n \neq x_0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

הוכחה $\Leftarrow$: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה שמקיימת את (i), (ii). יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| < \square_1$ $(*)$. בנוסף מהיות (i), (ii), קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \geq N$, $0 < |x_n - x_0| < \square_2$. יהי $n \geq N$ אזי $|f(x_n) - L| < \square_1 = \epsilon$, נבחר $\square_1 = \epsilon$, $\square_2 = \delta$.

$\Rightarrow$: נניח בשלילה כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq L$. לכן קיים $\epsilon > 0$ כך ש־ $\forall \delta > 0$ קיים $x \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x - x_0| < \delta$, $|f(x) - L| \geq \epsilon$. נבחר $\delta = \frac{1}{n}$ לכן קיים $x_n \in \mathbb{R}$ כך ש־ $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$. נביט ב־ $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, מתקיים $\underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} \geq |x_n - x_0| \geq \underset{\substack{\downarrow\\0}}{0}$ לכן $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_0 + x_0) = x_0$ לכן $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את (i) ו־ (ii) ולכן $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = L$ בסתירה לכך ש־ $|f(x_n) - L| \geq \epsilon$, $\forall n$.

דוגמה $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ לא קיים. הוכחה: נביט בסדרה $x_n = \frac{1}{\pi\cdot n}$, $\forall n$. נשים ♡ כי $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi\cdot n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. נבחר $y_n = \frac{1}{2\pi\cdot n + \frac{\pi}{2}}$, $\forall n$. נשים ♡ כי $0 \neq 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(2\pi\cdot n + \frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n)$. ולכן $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים.

דוגמה $\lim\limits_{x\to x_0} D(x)$ לא קיים. הוכחה: מצפיפות $\mathbb{Q}$, $\forall n$ קיים רציונאלי $x_0 < q_n < x_0 + \frac{1}{n}$ וגם, מצפיפות $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, $\forall n$ קיים $r_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ כך ש־ $x_0 < r_n < x_0 + \frac{1}{n}$. נביט ב־ $(q_n)_{n=1}^{\infty}$, $(r_n)_{n=1}^{\infty}$, נשים ♡ מסנדביץ כי $\underset{\substack{\downarrow\\x_0}}{x_0 + \frac{1}{n}} \geq q_n \geq \underset{\substack{\downarrow\\x_0}}{x_0}$ ובאותו האופן גם $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x_0$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty} D(q_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} D(r_n) = 0$.

מסקנה תהיינה f, g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של x_0. נניח שקיימים הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$ נניח בנוסף כי $\forall x$ בסביבה זו מתקיים $f(x) \leq g(x)$ אזי $L_1 \leq L_2$. הוכחה: נבחר סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ כך ש־ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ו־ $x_n \neq x_0$, $\forall n$. מתקיים $f(x_n) \leq g(x_n)$, $\forall n$ וגם מהיינה $L_1 = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$, $L_2 = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)$ ולכן ממונוטוניות הגבול בסדרות $L_1 \leq L_2$.

מסקנה (משפט סנדביץ') תהיינה f,g,h פונקציות המוגדרות בסביבה המנוקבת של x_0. נניח כי $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x$ בסביבה מנוקבת זו וכן קיים הגבולות $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$ אזי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$. הוכחה: ברור (מהיינה).

הגדרה פונקציה $f: D \to \mathbb{R}$ תקרא:

(i) חסומה מלעל אם $\exists M \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) \leq M$, $\forall x \in D$.

(ii) חסומה מלרע אם $\exists m \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) \geq m$, $\forall x \in D$.

(ii) חסומה אם $\exists M > 0$ כך ש- $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in D$.

מסקנה (ח x מ) תהיינה f,g פונקציות המוגדרו בסביבה המנוקבת של x_0. נניח כי f חסומה בסביבה זו וכן כי $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\cdot g(x)) = 0$. הוכחה: ברור (מהיינה).

גבולות חד צדדים

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (x_0, b) עבור $b > x_0$. יהי $L \in \mathbb{R}$, נאמר כי L גבול של f כאשר $x \to x_0^+$ אם $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $\forall x_0 < x < x_0 + \delta$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (a, x_0) עבור $a < x_0$. יהי $L \in \mathbb{R}$, נאמר כי L גבול של f כאשר $x \to x_0^-$ אם $\forall \epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש- $\forall x_0 - \delta < x < x_0$ מתקיים $|f(x) - L| < \epsilon$.

הערה איו הן הגדרות הזהות להגדרת הגבול הדו־צדדי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$, למעט הדרישה ש- $x > x_0$ (או $x < x_0$).

מסקנה כל המשפטים שהוכחנו נותרים נכונים לגבולות חד־צדדים. ✓ יחידות הגבול - נסמן $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x) = L$. ✓ אשגש"פ. ✓ היינה. ✓ מונוטוניות. ✓ סנדביץ'. ✓ ח x מ.

הערה אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x) = L$.

דוגמה $\lim\limits_{x\to 2^+} (x^2+1) = 5$, $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-3}{x-2} = 1$.

דוגמה $sign(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. $\lim\limits_{x\to x_0^+} sign(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} sign(x) = -1$ לכן $\lim\limits_{x\to x_0} sign(x)$ לא קיים.

דוגמה $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ כי לכל סדרה (x_n) כך ש- $x_n \to 0$, $x_n > 0$, $\forall n$. מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

03/07/2019 | $\mathbb{XXX}$

טענה נניח שקיימים הגבולות החד"צ $\lim\limits_{x\to x_0^+} = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} = L_2$. אם $L_1 = L_2 = L$ אזי קיים $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ ושווה ל- L.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות $\lim_{x\to x_0^+} = L_1$ קיים $\delta_1 > 0$ כך ש־ $\forall x_0 < x < x_0+\delta_1$, $|f(x)-L| < \epsilon$ $(*)$. באותו האופן מהיות $\lim_{x\to x_0^-} = L_2$ קיים $\delta_2 > 0$ כך ש־ $\forall x_0-\delta_2 < x < x_0$, $|f(x)-L| < \epsilon$ $(**)$. נבחר $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$ ויהי $0 < |x-x_0| < \delta$, אם $x > x_0$, $(*)$ מתקיים עבור x, אחרת $x_0 > x$ ולכן $(**)$ מתקיים עבור x ולכן בכל מקרה $|f(x)-L| < \epsilon$. ■

דוגמה $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot\sin(\frac{1}{x})) = 0$ (ח x מ).

דוגמה $\lim_{x\to 0^+}(\lfloor\frac{2}{x}\rfloor\cdot\frac{x}{3})$, $\frac{2}{x}-1 \le \lfloor\frac{2}{x}\rfloor \le \frac{2}{x}$ ולכן $\underset{\frac{2}{3}}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{3}-\frac{x}{3}}} \le \lfloor\frac{2}{x}\rfloor\cdot\frac{x}{3} \le \underset{\frac{2}{3}}{\underset{\downarrow}{\frac{2}{3}}}$. וכנל ל־ 0^-.

דוגמה $f(x) = \begin{cases} x & x > 1 \\ 2x-a & x < 1 \end{cases}$ לאיזה ערך של $a \in \mathbb{R}$, קיים הגבול $\lim_{x\to 1} f(x)$? $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x = 1$. $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2-a$ לכן הגבול קיים אם"ם $a = 1$.

שאלה $f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 2x-1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. (i) הוכיחו כי $\lim_{x\to 1} f(x)$ קיים ושווה ל־ 1. (ii) הוכיחו ש־ $\lim_{x\to x_0} f(x)$ לא קיים $\forall x_0 \neq 1$.

פתרון (i) יהי $\epsilon > 0$. נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{2}$. יהי $0 < |x-1| < \delta$. אם $x \in \mathbb{Q}$, אזי $|f(x)-1| = |x-1| < \delta \le \epsilon$. אחרת $x \notin \mathbb{Q}$, ולכן $|f(x)-1| = |2x-2| < 2\delta \le \epsilon$.

(ii) נניח בשלילה כי קיים $x_0 \neq 1$ וקיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$. נביט ב־ $f(x)-(2x-1) = \begin{cases} 1-x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} = (1-x)\begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ ולכן $f(x) = 2x-1+(1-x)D(x)$, ולכן $\forall x \neq 1$, $D(x) = \frac{f(x)-(2x-1)}{1-x}$ לכן $\lim_{x\to x_0} D(x) = \frac{L-(2x_0-1)}{1-x_0}$ סתירה.

פונקציות השואפות לאינסוף

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה המנוקבת של x_0. נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ אם $\forall k > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $\forall 0 < |x-x_0| < \delta$, $f(x) > k$. נאמר כי $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$ אם $\forall k < 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש־ $\forall 0 < |x-x_0| < \delta$, $f(x) < k$.

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת ב־ $[a,\infty)$ לאיזושהי $a \in \mathbb{R}$. נאמר כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ אם $\forall k > 0$ קיים $M > 0$ כך־ $\forall x > M$, $f(x) > k$.

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת ב־ $(-\infty, b]$ לאיזושהי $b \in \mathbb{R}$ נאמר כי $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ אם $\forall k > 0$ קיים $M < 0$ כך ש־ $\forall x < M$, $f(x) > k$.

מסקנה שלמדנו שלמדנו לגבולות אינסופיים בסדרות נותרים נכונים באותו האופן. ✓ טוסט. ✓ אש"א. ✓ הלמה של היינה במובן הרחב. ✓ מונוטוניות עולה וחסומה מלעל $\Leftarrow$ מתכנסת.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}(2x-1)=\infty$.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

דוגמה $\lim_{x\to1^+}(\frac{1}{1-x})=\frac{1}{0^-}=-\infty$. $\lim_{x\to1^-}(\frac{1}{1-x})=\frac{1}{0^+}=\infty$. לכן $\lim_{x\to1}(\frac{1}{1-x})$ לא קיים במובן הרחב.

דוגמה $\lim_{x\to2^\pm}\frac{3+x-x^2}{x^2+x-6}=\lim_{x\to2^\pm}\frac{3+x-x^2}{(x-2)(x+3)}=\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty$ לכן הגבול לא קיים במובן הרחב.

דוגמה $\lim_{x\to4}\frac{1-x}{(x-4)^2}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$.

דוגמה $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x-1}{2x^2-x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{1}{2}$.

דוגמה $\lim_{x\to-1}\frac{2x^2+x-1}{3x^2+x-2}=\lim_{x\to-1}\frac{2(x+1)(x-\frac{1}{2})}{3(x+1)(x-\frac{2}{3})}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}$.

$\mathbb{XXXI}$ | 04/07/2019

טענה (i) $\lim_{x\to0}\sin x=0$ (ii) $\lim_{x\to0}\cos x=1$.

הוכחה (i) ראשית נשים ♡ כי $\forall 0\le x<\frac{\pi}{2}$, $0\le\sin x\le x$ לכן עבור $x\to0^+$ מתקיים $\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0}\le\sin x\le\underset{\substack{\downarrow\\0}}{x}$. לכן $\lim_{x\to0^-}\sin x=0$
נחשב: $\lim_{x\to0^-}\sin x\overset{t=-x}{=}\lim_{t\to0^+}\sin(-t)=\lim_{t\to0^+}-\sin t=0$.
(ii) נחשב $\lim_{x\to0}\cos x=\lim_{x\to0}\sqrt{1-\sin^2 x}=1$ ($\cos x\ge0$ בסביבה מנוקבת של 0). ■

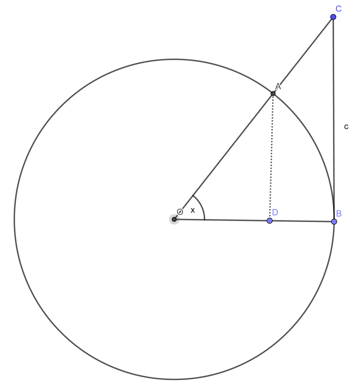
טענה $\lim_{x\to\pi}\sin x=0$.

הוכחה $\lim_{x\to\pi}\sin x\overset{t=x-\pi}{=}\lim_{t\to0}\sin(t+\pi)=\lim_{t\to0}-\sin t=0$. ■

הגבול המפורסם, המיוחד

משפט (הגבול המפורסם) $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

הוכחה ראשית נוכיח כי $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. נשים ♡ כי $\forall 0\le x<\frac{\pi}{2}$, $\square\le\sin x\le x$ ולכן $1\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{\square}{x}=\frac{x\cdot\cos x}{x}=\cos x$, נבחר $\square=x\cdot\cos x$ $(*)$ ולכן מסנדביץ $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$. נחשב: $\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}\overset{t=-x}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\sin(-t)}{-t}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\sin t}{-t}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$.
הסבר $(*)$: (ראה איור) נשים ♡ כי $\triangle OBC\sim\triangle OAD$ לכן $\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{c}{1}$ מדמיון. בנוסף, נשים ♡ כי $S_{OAB}\le S_{\triangle OBC}$, כאשר OAB הוא משולש הפיצה שקצהו האחד הוא O ושני קצוות הקשה של הפיצה ה A,B וגם ל- $\frac{\sin x}{2\cos x}=\frac{c}{2}=S_{\triangle OBC}=\mathbb{S}$.
נחשב את $\mathbb{S}$. נשים ♡ כי $\pi=\frac{2\pi}{x}\cdot\mathbb{S}$, לכן $\frac{x}{2}=\frac{\pi\cdot x}{2\cdot\pi}=\mathbb{S}$, לכן $\frac{\sin x}{2\cos x}\le\frac{x}{2}$ לכן $\sin x\le x\cdot\cos x$. ■



דוגמה $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x}=0$ מאש"ג.

דוגמה $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}=\lim_{t\to0}\frac{\sin(t+\pi)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{-\sin t}{t}=-1$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{\sin t}{t}=1$. אבל $\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x^2}{x^2}\cdot x=1\cdot0=0$.

דוגמה $\lim_{x\to0^\pm}\frac{\cos x}{x}=\frac{1}{0^\pm}=\pm\infty$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2x-1}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^2x}{x(\cos x+1)}=\lim_{x\to0}(-\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x+1})=0$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x+1}=-\frac12$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=1\cdot1=1$.

דוגמה $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sin x}{x\cdot\cos x}=\lim_{t\to0^-}\frac{\sin(t+\frac{\pi}{2})}{(t+\frac{\pi}{2})\cos(t+\frac{\pi}{2})}=\lim_{x\to0^-}\frac{\cos t}{(t+\frac{\pi}{2})(-\sin t)}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}\cdot0^-}=\frac{1}{0^+}=\infty$.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\sin x=\lim_{t\to0^+}\sin\frac1t$ לכן לא קיים.

דוגמה $\lim_{n\to\infty}n\cdot\sin\frac1n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac1n}{\frac1n}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ מהיינה.

משפט (הגבול המיוחד) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac1x)^x=e$.

הוכחה ראשית נשים ♡ כי $\underset{\overset{\downarrow(**)}{e}}{(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1})^{\lfloor x\rfloor}}\le(1+\frac1x)^{\lfloor x\rfloor}\le(1+\frac1x)^x\le(1+\frac1x)^{\lfloor x\rfloor+1}\le\underset{\overset{\downarrow(*)}{e}}{(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor})^{\lfloor x\rfloor+1}}$. הסבר $(*)$: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor})^{\lfloor x\rfloor+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n)^n(1+\frac1n)=e\cdot1=e$. הסבר $(**)$: $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{\lfloor x\rfloor+1})^{\lfloor x\rfloor}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac1n)^{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac1n)^n}{1+\frac1n}=\frac e1=e$. ■

$\mathbb{XXXII}$ | 07/07/2019

רציפות, אי־רציפות

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של x_0. נאמר ש־ f רציפה ב־ x_0, אם $\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ כלומר $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש־ $\forall|x-x_0|<\delta$, $|f(x)-f(x_0)|<\epsilon$.

דוגמה $\lim_{x\to 2}(2x+3)=7$ לכן $f(x)=2x+3$ רציפה ב־ $x_0=2$.

דוגמה $D(x)$ לא רציפה באף נקודה כי אין לה גבול.

דוגמה $f(x)=sign(x)$, לא רציפה ב־ $x_0=0$ אבל רציפה בכל נקודה $x_0\neq 0$ (ברור).

הגדרה x_0 תקרא נקודת אי רציפות של f אם f לא רציפה ב־ x_0.

הגדרה תהי x_0 נקודת אי רציפות של f. x_0 תקרא:

(i) סליקה אם $\lim_{x\to x_0} f(x)$ קיים.

(ii) קפיצה אם $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ קיימים ושונים זה מזה.

(iii) עיקרית אם לפחות אחד מהגבולות החד־צדדיים $\lim_{x\to x_0^{\pm}} f(x)$ לא קיים.

מסקנה אם f רציפה ב־ x_0 אז הגבול ב־ x_0 טריוויאלי.

אש"ר

משפט (אש"ר $\pm$, $\cdot$, $/$) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בסביבת x_0. נני כי f,g רציפות בסביבת x_0 אזי $f\pm g$, $f\cdot g$ רציפות ב־ x_0, אם $g(x_0)\neq 0$ אזי גם f/g רציפה ב־ x_0.

הוכחה ברור מאשגש"פ. $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x)=\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=f(x_0)+g(x_0)$ באותו האופן כל שאר הפעולות. $\blacksquare$

משפט (אש"ר $\circ$) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 ותהי g פונקציה המוגדרת בסביבת $y_0=f(x_0)$. נניח ש־ f רציפה ב־ x_0 וכן ש־ g רציפה ב־ y_0. אזי $g\circ f$ רציפה ב־ x_0.

הוכחה $(g\circ f)(x)=g(f(x_0))=g(y_0)=\lim_{y\to y_0} g(y)\overset{y=f(x)(*)}{=}\lim_{x\to x_0} g(f(x))=\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x)$. הסבר $(*)$: $\lim_{x\to x_0} y=\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0$. $\blacksquare$

משפט (i) $f(x)=|x|$ רציפה בכל $x_0\in\mathbb{R}$. (ii) $f(x)=\sqrt{x}$ רציפה בכל $x_0\geq 0$.

הוכחה (i) תהי $x_0\in\mathbb{R}$. תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ וגם $x_n\neq x_0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}|x_n|=|x_0|=f(x_0)$. (ii) תהי $x_0>0$. תהי (x_n) סדרה כך ש־ $\lim_{n\to\infty} x_n=x_0$ וגם $x_n\neq x_0$, $\forall n$. אזי $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{x_0}=f(x_0)$. עבור $x_0=0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ באותו האופן. $\blacksquare$

הגדרה תהי $f:D\to\mathbb{R}$. f תקרא רציפה אם f רציפה ב־ x_0, $\forall x_0\in D$.

דוגמה $f(x)=x^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ רציפה מאש"ר.

דוגמה $f(x)=\frac{1}{x}$, $\forall x\neq 0$ רציפה אבל לא רציפה ב־ $x_0=0$ (כי לא מוגדרת שם).

הגדרה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר ש־ f רציפה ב־ a, אם $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$. נאמר ש־ f רציפה ב־ b, אם $\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$.

משפט (אש"ר בסיס) הפונקציות הבאות רציפות: (i) $f(x)=x$, $\forall x$. (ii) $f(x)=c$, $\forall x$.

הוכחה ברור מאשגש"פ. ■

משפט $f(x)=\sin x$ רציפה.

הוכחה תהי $x_0\in\mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{t\to 0}\sin(t+x_0)=\lim_{t\to 0}\sin t\cos x_0+\sin x_0\cos t=0\cdot\cos x_0+\sin x_0\cdot 1=\sin x_0$. ■

משפט $f(x)=\cos x$ רציפה.

הוכחה ראינו כי $\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ ולכן רציפה (הרכבה של רציפות). ■

משפט $f(x)=\tan x$ רציפה.

הוכחה ברור (מנה של רציפות). ■

XXXIII | 08/07/2019

הגדרה $\ln x=\log x$, $\forall x>0$.

משפט $f(x)=\ln x$ רציפה.

הוכחה יהי $x_0>0$. ראשית נניח כי $x_0=1$, נוכיח כי $\lim_{x\to 1}\ln x=\ln 1=0$.
$\lim_{x\to 1}\ln x=\lim_{t\to 0}\ln(1+t)=\lim_{t\to 0}(t\cdot\frac{1}{t}\cdot\ln(1+t))=\lim_{t\to 0}t\cdot\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\overset{(*)}{=}0$. הסבר $(*)$: מספיק שנוכיח כי $\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}$ חסומה.
ראשית נוכיח כי $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$, נחשב: $\lim_{t\to 0^+}(1+t)^{\frac{1}{t}}=\lim_{y\to\infty}(1+\frac{1}{y})^y=e$, $\lim_{t\to 0^-}(1+t)^{\frac{1}{t}}\overset{u=-\frac{1}{t}}{=}\lim_{u\to\infty}(1-\frac{1}{u})^{-u}=\lim_{u\to\infty}(\frac{u}{u-1})^u=\lim_{u\to\infty}(\frac{u-1+1}{u-1})^u=\lim_{u\to\infty}(1+\frac{1}{u-1})^u=\lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^{z+1}=\lim_{z\to\infty}(1+\frac{1}{z})^z(1+\frac{1}{z})=e$. ולכן ממונוטוניות הגבול ההפוכה קיימת סביבה מנוקבת של 0 שבה $2<(1+t)^{\frac{1}{t}}<3$. ומהיות $\ln x$ מונוטונית עולה, $\ln 2\le\ln(1+t)^{\frac{1}{t}}\le\ln 3$.
עתה תהי x_0. נוכיח כי $\ln x$ רציפה ב־x_0.
$\lim_{x\to x_0}\ln x\overset{t=\frac{x}{x_0}}{=}\lim_{t\to 1}\ln(t\cdot x_0)=\lim_{t\to 1}(\ln t+\ln x_0)=0+\ln x_0=\ln x_0$. ■

ערכי הביניים

משפט (ערך הביניים) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. נניח כי $f(a)\cdot f(b)<0$ אזי קיימת $a<c<b$ שעבורה $f(c)=0$.

דוגמה הוכיחו שקיים פתרון למשוואה $\sin x+2x=17$. הוכחה: נביט בפונקציה $f(x)=\sin x+2x-17$, $\forall x\in\mathbb{R}$, נשים ♡ כי f רציפה (אש"ר). נשים ♡ כי $f(0)=-17<0$, $f(10)=\sin 10+3\ge 2>0$. לכן ממשפט ערך הביניים קיימת $0<x<10$ שעבורה $0=f(x)=\sin x+2x-17$ ולכן $\sin x+2x=17$.

דוגמה הוכיחו שקיימים שני פתרונות שונים $\ln x+2x-x^2+5=0$. הוכחה: נביט בפונקציה $f(x)=\ln x+2x-x^2+5$, $\forall x>0$, נשים ♡ כי f רציפה (אש"ר). נשים ♡ כי $f(1)=0+2-1+5=6>0$, $f(e^4)=4+2e^4-e^8+5=9+e^4(2-e^2)<9+e^4(2-16)<9-15<0$, $f(e^{-10})=-10+2e^{-10}-e^{-20}+5=-5+2e^{-10}=e^{-20}<-5+2-e^{-20}<-3<0$.
לכן ממשפט ערך הביניים, קיימת $e^{-10}<c_1<1$ וקיימת $1<c_2<e^4$ שעבורן $f(c_1)=f(c_2)=0$ וברור כי $c_1\neq c_2$.

הוכחה נניח כי $f(a) < 0$ וכי $f(b) > 0$. נביט ב־ $\frac{a+b}{2}$ אם $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, אז סיימנו. אחרת, נסמן $I_1 = [a,b]$ ונביט בקטעים $[a, \frac{a+b}{2}]$, $[\frac{a+b}{2}, b]$. נשים ♡ שבדיוק באחד הקטעים הנ"ל f מחליפה סימן (כלומר שהסימן של f בקצוות הקטע הוא הפוך). נבחר את הקטע הזה ונסמנו ב־ $I_2 = [a_2, b_2]$ (ונסמן $I_2 = [a_1, b_1]$). נחזור על התהליך. בצעד ה־ k, נביט ב־ $I_k = [a_k, b_k]$ וב־ $\frac{a_k+b_k}{2}$. אם $f(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$ סיימנו (ונשים ♡ כי $a_k < \frac{a_k+b_k}{2} < b_k$ ולכן $a < \frac{a_k+b_k}{2} < b$). אחרת, בדיוק באחד מהקטעים $[a_k, \frac{a_k+b_k}{2}]$, $[\frac{a_k+b_k}{2}, b_k]$ f מחליפה סימן. נבחר את הקטע הזה ונסמנו $I_{k+1} = [a_{k+1}, b_{k+1}]$. נתבונן ב־ $(I_k)_{k=1}^{\infty}$. נשים ♡ כי $I_{k+1} \subseteq I_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (ברור) וכן $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k|$ (בדומה להוכחה של BW) ולכן $|I_k| = (\frac{1}{2})^{k-1}|I_1| = (\frac{1}{2})^{k-1}(b-a)$ ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}|I_k| = \lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{2^{k-1}}(b-a) = 0$. נשים ♡ כי $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$, $\forall k$. מהלמה של קנטור קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ (יחידה) כך ש־ $c \in I_k$, $\forall k$. נוכיח כי $a < c < b$, $f(c) = 0$ ונסיים. ראשית, מהיות $c \in I_1 = [a,b]$, אזי $a \le c \le b$, ולכן f מוגדרת ורציפה ב־ c. נביט בסדרה $(a_k)_{k=1}^{\infty}$, נשים ♡ כי $0 \le c - a_k \le b_k - a_k = |I_k|$ ולכן מסנדביץ' $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} a_k - c + c = c$ מאש"ג. מהיות f רציפה ב־ c אזי מהלמה של היינה, $\lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$. ממונוטוניות הגבול, ומהיות $f(a_k) \le 0$, $\forall k$ אזי $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) \le 0$. נביט בסדרה $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, נשים ♡ כי $0 \le b_k - c \le b_k - a_k = |I_k|$ ולכן מסנדביץ $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k - c + c = c$ מאש"ג. מהיות f רציפה ב־ c אזי מהלמה של היינה, $\lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) = \lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$ וממנוטוניות הגבול $f(c) = \lim\limits_{k\to\infty} f(b_k) \ge 0$ ולכן $f(c) = 0$. נשים ♡ כי $c \ne a, b$ כי $f(a), f(b) \ne 0$. ולכן $a < c < b$. עתה אם $f(a) > 0$ וכי $f(b) < 0$, נביט בפונקציה $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. g רציפה מאש"ר, $g(b) > 0$, $g(a) < 0$. ולכן קיימת $a < c < b$ שעבורה $-f(c) = g(c) = 0$ ולכן $f(c) = 0$. ■

XXXIV | 09/07/2019

מסקנה־1 (משפט ערך הביניים המורחב) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח שקיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־ $f(a) < r < f(b)$ אזי קיימת $a < c < b$ שעבורה $f(c) = r$.

הוכחה נגדיר $F(x) = f(x) - r$, $\forall x \in [a,b]$. נשים ♡ כי $F(a) = f(a) - r < 0$, $F(b) = f(b) - r > 0$. נשים ♡ כי F רציפה ב־ $[a.b]$ מאש"ר. לכן ממשפט ערך הביניים קיימת $a < c < b$ שעבורה $F(c) = 0$ וגם $F(c) = f(c) - r = 0$ כלומר $f(c) = r$ מש"ל.

מסקנה־2 תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, נניח שקיים $r \in \mathbb{R}$ כך ש־ $f(b) < r < f(a)$. אזי קיימת $a < c < b$ שעבורה $f(c) = r$.

הוכחה כמו מסקנה 1.

מסקנה־3 תהיינה $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפות. נניח כי $f(a) < g(a)$ וגם $f(b) > g(b)$ אזי קיימת $a < c < b$ שעבורה $f(c) = g(c)$.

הוכחה נגדיר $F(x) = f(x) - g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. נשים ♡ כי $F(a) = f(a) - g(a) > 0$, $F(b) = f(b) - g(b) < 0$. נשים ♡ כי F רציפה. ולכן מערך הביניים קיימת $a < c < b$ שעבורה $F(c) = f(c) - g(c) = 0$, $f(c) = g(c)$.

מסקנה־4 (משפט נקודת השבת) תהי $f : [a,b] \to [a,b]$ פונקציה רציפה. אזי קיימת $a \le c \le b$ שעבורה $f(c) = c$.

הוכחה נגדיר $F(x) = f(x) - x$, $\forall x \in [a,b]$. נשים ♡ כי F רציפה. נשים ♡ כי $F(a) = f(a) - a \geq a - a = 0$, $F(b) = f(b) - b \leq b - b = 0$. אם $F(a) = 0$ אזי $f(a) = a$ וסיימנו. באותו האופן לגבי b. אחרת $F(a) \cdot F(b) < 0$ ולכן ממשפט ערך הביניים קיימת $a < c < b$ שעבורה $F(c) = 0$ וגם $F(c) = f(c) - c = 0$ לכן $f(c) = c$.

■

הגדרה תהי $f : D \to \mathbb{R}$ ותהי $x_0 \in D$. x_0 תקרא:

(i) נקודת מקסימום של f ב- D אם $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in D$.

(ii) נקודת מינימום של f ב- D אם $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in D$.

(iii) נקודת מקסימום מקומית אם קיימת סביבה של x_0 שעבורה x_0 נקודת מקסימום של f.

(iv) נקודת מינימום מקומית אם קיימת סביבה של x_0 שעבורה x_0 נקודת מינימום של f.

וירשטראס

משפט (וירשטראס) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה. אזי קיימות נקודות $x_1, x_2 \in [a,b]$ כך ש- x_1 נקודת מקסימום ו- x_2 נקודת מינימום של f בהתאמה.

הוכחה ראשית, נוכיח כי קיים ל- f מקסימום. נביט בקבוצה $A = \{f(x) | a \leq x \leq b\}$ נשים ♡ ש- A לא ריקה. נוכיח שקיים $\sup A$. ממשפט החסם העליון מספיק להוכיח ש- A חסומה מלעל. נניח בשלילה כי A לא חסומה מלעל. אזי $\forall n \in \mathbb{N}$ קיימת $a \leq x_n \leq b$ שעבורה $f(x_n) > n$. נביט בסדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, מהיות $a \leq x_n \leq b$, אזי x_n חסומה ולכן מ- BW, קיימת ל- (x_n) תת סדרה מתכנסת, ונסמנה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ויהי $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. נשים ♡ כי $a \leq x_{n_k} \leq b$ ולכן ממונוטוניות הגבול, $a \leq x_0 \leq b$ ולכן f רציפה ב- x_0. מהיות $x_0 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ אזי מהלמה של היינה ומכך ש- f רציפה ב- x_0, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)$ אבל $f(x_{n_k}) \geq n_k \geq k$ ולכן מטוסט $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty$, סתירה. לכן $\sup A$ קיים, נסמנו $\bar{s} = \sup A$. עתה נוכיח שקיימת נקודה $a \leq c_1 \leq b$ שעבורה $f(c_1) = \bar{s}$ ומכך נסיק כי $f(x) \leq \bar{s} = f(c_1)$, $\forall a \leq x \leq b$ ולכן c_1 נקודת מקסימום של f. מתכונת האפסילון של $\bar{s}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ קיימת $a \leq x_n \leq b$ שעבורה $\bar{s} - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq \bar{s}$ $(*)$. נביט ב- $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, נשים ♡ כי היא חסומה ולכן מ- BW קיימת לה תת סדרה מתכנסת, ונסמנה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, נסמן $c_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$. נשים ♡ כי $a \leq x_{n_k} \leq b$ ולכן ממונוטוניות הגבול, $a \leq c_1 \leq b$ ולכן f רציפה ב- c_1. מהיות $c_1 = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ אזי מהלמה של היינה ומכך ש- f רציפה ב- x_0, $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(c_1)$. מ- $(*)$ $\underset{\bar{s}}{\underset{\downarrow}{\bar{s} - \frac{1}{n_k}}} \leq f(x_{n_k}) \leq \underset{\bar{s}}{\underset{\downarrow}{\bar{s}}}$ ולכן מיחידות הגבול, $f(c_1) = \bar{s}$. עתה נוכיח שקיימת ל- f מינימום בקטע $[a,b]$. נביט בפונקציה $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. נשים ♡ כי g רציפה ב- $[a,b]$ (אש"ר) ולכן קיימת ל- g נקודת מקסימום כלומר קיים $c_2 \in [a,b]$ כך ש- $g(c_2) \geq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$ ולכן $-f(c_2) \geq -f(x)$ ולכן $f(c_2) \leq f(x)$ ולכן c_2 נקודת מינימום של f. ■

10/07/2019 | $\mathbb{XXXV}$

מסקנות נוספות לרציפות

הגדרה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. התמונה של f מוגדרת להיות $Imf=\{f(x)|x\in D\}$.

מסקנה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי התמונה של f היא קטע סגור.

הוכחה מהיות f רציפה אז ממשפט W, f מקבלת מקסימום ומינימום M,m בהתאמה, מערך הביניים f מקבלת כל ערך בין M ל־ m. לכן $Imf=[m,M]$. ■

מסקנה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חח"ע ורציפה. אזי f מונוטונית ממש.

הוכחה נניח בשלילה כי f לא מונוטונית ממש. מכך ש־ f לא חח"ע ולא מונוטונית ממש קיימות נקודות $x_1<x_2<x_3$ ב־ $[a,b]$ כך ש־ $f(x_1)<f(x_2)$, $f(x_2)>f(x_3)$ (א') או שקיימות $x_1<x_2<x_3$ כך ש־ $f(x_1)>x_2$, $f(x_2)<f(x_3)$ (ב') (לא ייתכן שוויון כי f חח"ע). נניח כי **א'** מתקיים. אם $f(x_3)>f(x_1)$ אזי מ־**א'** $f(x_1)<f(x_3)<f(x_2)$ ולכן ממשפט ערך הביניים המורחב קיימת $x_1<c<x_2$ שעבורה $f(c)=f(x_3)$. נשים $\heartsuit$ כי $c\neq x_3$ סתירה לכך ש־ f חח"ע. אחרת $f(x_3)<f(x_1)$ ולכן מ־**א'**, $f(x_3)<f(x_1)<f(x_2)$ ולכן ממשפט ערך הביניים המורחב קיימת $x_2<c<x_3$ שעבורה $f(c)=f(x_1)$ סתירה. נניח כי **ב'** מתקיים. הוכחה באותו האופן כמו **א'**. ■

הערה אם f הפיכה ועולה ממש, f^{-1} עולה ממש. הוכחה: יהיו $y_1<y_2$. נניח בשלילה כי $f^{-1}(y_1)\geq f^{-1}(y_2)$. מהיות f^{-1} חח"ע אזי $x_1=f^{-1}(y_1)>f(y_2)=x_2$. לכן $x_1>x_2$ ומהיות f עולה ממש, $y_1=f(x_1)>f(x_2)=y_2$ סתירה.

משפט תהי f פונקציה עולה ממש ב־ $[a,b]$. נניח שעבור $x_0\in(a,b)$, x_0 אי רציפות של f. אזי x_0 אי רציפות מסוג קפיצה.

הוכחה מספיק להוכיח ש־ $\lim_{x\to x_0^+}=L_1$, $\lim_{x\to x_0^-}=L_2$, $L_1\neq L_2$. נביט בקבוצה $A=\{f(x)|a<x<x_0\}$ נשים $\heartsuit$ כי A לא ריקה ומהיות f עולה אזי $f(x)\leq f(x_0)$, $\forall x<x_0$ ולכן A חסומה מלעל. ממשפט החסם העליון קיים $L_1=\sup A$. נוכיח כי $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L_1$. יהי $\epsilon>0$. מתכונת ה־ ϵ, קיימת $y_1\in A$ כך ש־ $L_1+\square>L_1\geq y_1>L_1-\square$. תהי $a<x_1<x_0$ כך ש־ $f(x_1)=y_1$. נסמן $\delta=x_0-x_1>0$. ותהי $x_0-\delta<x<x_0$. אזי $L_1+\square\geq f(x)>f(x_1)>L_1-\square$, לכן $|f(x)-L_1|<\square$, נבחר $\square=\epsilon$ לכן $L_1=\lim_{x\to x_0^-}f(x)$. נביט בקבוצה $B=\{f(x)|x_0<x<b\}$ היא חסומה מלרע על ידי $f(x_0)$ ולא ריקה ולכן $L_2=\inf B$ קיים. נוכיח כי $\lim_{x\to x_0^+}=L_2$. יהי $\epsilon>0$. מתכונת ה־ ϵ קיימת $y_2\in B$ כך ש־ $y_2<L+\square$. תהי $x_0<x_2<b$ כך ש־ $f(x_2)=y_2$. נבחר $\delta=x_2-x_0>0$. תהי $x_0<x<x_0+\delta$ אזי $L_2-\square<L_2\leq f(x)<f(x_2)<L_2+\square$ ולכן $|f(x)-L_2|<\square$, נבחר $\square=\epsilon$ לכן $L_2=\lim_{x\to x_0^+}$. נניח בשלילה כי $L_2=L_1=L$ אזי $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$. נוכיח כי $L=f(x_0)$ ונקבל ש־ f רציפה בסתירה להנחה. מתקיים $L=L_1=\sup A\leq f(x_0)\leq\inf B=L_2=L$ ולכן $f(x_0)=L$. ■

מסקנה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ עולה ממש ונניח כי $x_0\in(a,b)$ אי רציפות אזי Imf לא קטע סגור.

הוכחה ראינו כי x_0 קפיצה. לכן קיימים הגבולות $L_1=\lim_{x\to x_0^-}f(x)<\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L_2$. נבחר $L_1<r<L_2$ כך ש־ $r\neq f(x_0)$. נשים $\heartsuit$ כי $f(a)\leq r\leq f(b)$ ו־ $r\notin Imf$ לכן Imf לא קטע.

מסקנה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ עולה ממש ונניח כי Imf קטע סגור אזי f רציפה ב־ $[a,b]$ (קונטרה־פוזיטיב).

מסקנה $\arcsin x$, $\arccos x$ רציפות.

מסקנה e^x, $\arctan x$ רציפות (לכל נקודה x_0 קיים קטע סגור שהיא רציפה בו).

מסקנה הפונקציה $f(x)=a^x$, $1\neq a>0$ רציפה.

הוכחה נרשום $a^x=e^{\ln a^x}=e^{x\cdot\ln a}$ ולכן מהרכבה של רציפות a^x רציפה.

מסקנה יהי $\alpha\in\mathbb{R}$ הפונקציה $f(x)=x^\alpha$ רציפה, $\forall x>0$.

הוכחה נרשום $x^\alpha=e^{\ln x^\alpha}=e^{\alpha\cdot\ln x}$ ולכן מהרכבה של רציפות x^α רציפה.

מסקנה (אש"ג α) תהי $(a_n)_{n=1}^\infty$ סדרה המתכנסת לגבול $L>0$. אזי $(a_n^\alpha)_{n=1}^\infty$ מתכנסת לגבול L^α.

הוכחה $\lim\limits_{x\to L}x^\alpha=L^\alpha$ ולכן מהלמה של היינה, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^\alpha=L^\alpha$.

XXXVI | 28/10/2019

הנגזרת

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של $x_0\in\mathbb{R}$. נאמר כי f גזירה ב־ x_0 אם קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. במקרה זה נסמן את הגבול ב־ $f'(x_0)$.

הערה במקרה זה $f'(x_0)$ הוא השיפוע של הישר המשיק לגרף של f ב־ x_0.

דוגמה $f(x)=x^2$, $x_0\in\mathbb{R}$. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}x+x_0=2x_0$.

דוגמה $f(x)=\frac{1}{x}$, $0\neq x_0\in\mathbb{R}$. אם $x_0=0$ אז f לא גזירה ב־ x_0, כי לא מוגדרת שם. נניח כי $x_0\neq 0$ לכן $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}}{x-x_0}=-\frac{1}{x\cdot x_0}=-\frac{1}{x_0^2}$.

דוגמה $f(x)=|x|$, $x_0=0$. $f'(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|x|-|x_0|}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ אין גבול ולכן f לא גזירה.

XXXVII | 31/10/2019

דוגמה $f(x)=\sqrt{x}$, $x_0\geq 0$. ראשית נניח כי $x_0>0$. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$. אם $x_0=0$, $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{0}}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{0^+}=\infty$ לכן לא גזירה ב־ 0.

הגדרה פונקציה $f:D\to\mathbb{R}$ תקרא גזירה אם f גזירה בכל נקודה $x_0\in D$.

אשג"ז

משפט (אשג"ז בסיס) (i) $f(x)=x$ גזירה ו־ $x'=1$, $\forall x$. (ii) $f(x)=c$ גזירה ו־ $c'=0$, $\forall x$.

הערה נשים ♡ כי $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ולכן $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

הוכחה (i) יהי $x\in\mathbb{R}$. $x'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=1$. (ii) יהי $x\in\mathbb{R}$. $c'=\lim\limits_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=0$. ■

משפט (גזירה $\Leftarrow$ רציפה) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0. אם f גזירה ב־ x_0 אזי f רציפה.

דוגמה $D(x)$ לא גזירה באף נקודה (כי לא רציפה), $sign(x)$ לא גזירה ב־ 0 (כי לא רציפה), $|x|$ רציפה אבל לא גזירה.

הוכחה $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)+f(x_0))=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)+f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)\cdot 0+f(x_0)=f(x_0)$.

משפט (אשג"ז $\pm$) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בסביבת x_0 נניח ש־ f,g גזירות ב־ x_0. אזי $f\pm g$ גזירה ב־ x_0. $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.

הוכחה $(f\pm g)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f\pm g)(x)-(f\pm g)(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)\pm g(x)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\pm\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$. ■

דוגמה $(x+5)'=1$

משפט (אשג"ז $\cdot$ ־ לייבניץ) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בסביבת x_0. נניח כי f,g גזירות ב־ x_0. אזי $f\cdot g$ גזירה ב־ x_0 ו־ $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.

הוכחה
$$(f\cdot g)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}g(x)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\overset{(*)}{=}g(x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$
. הסבר $(*)$: g גזירה ב־ x_0 ולכן רציפה ב־ x_0, אש"ג, נתון. ■

משפט (אשג"ז $/$) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בסביבת x_0. נניח כי f,g גזירות ב־ x_0, $g(x_0)\neq 0$. אזי f/g גזירה ב־ x_0 ו־ $(\frac{f}{g})'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

הוכחה ראשית מהיות $g(x_0)\neq 0$ ומהיות g רציפה ב־ x_0 (כי g גזירה ב־ x_0) אזי קיימת סביבה של x_0 שעבורה $g(x)\neq 0$ בכל נקודה בסביבה זו. קיים $\delta>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$, $|g(x)|\geq\frac{|g(x_0)|}{2}$ לכן $\frac{f}{g}$ מוגדרת היטב בסביבה זו.
$$(\frac{f}{g})'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{(\frac{f}{g})(x)-(\frac{f}{g})(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\frac{f(x)\cdot g(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)}}{x-x_0}=$$
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)\cdot g(x_0)-g(x_0)\cdot f(x_0)+g(x_0)\cdot f(x_0)-g(x)\cdot f(x_0)}{g(x)\cdot g(x_0)\cdot(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x_0)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\cdot\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)\cdot g(x_0)}$$
$$=\frac{g(x_0)\cdot f'(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$ ■

מסקנה תהי f פונקציה גזירה ב־ x_0 ויהי $c\in\mathbb{R}$. אזי $c\cdot f$ גזירה ב־ x_0 ו־ $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

הוכחה $(c\cdot f)'(x_0)=c'\cdot f(x_0)+c\cdot f'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.

דוגמה $(x^3)' = x' \cdot x^2 + x \cdot (x^2)' = 3x^2$.

דוגמה $(\frac{1}{x})' = \frac{1' \cdot x - 1 \cdot x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

דוגמה $x + D(x)$ לא גזירה באף נקודה.

דוגמה $x + |x|$ לא גזירה ב־ 0.

דוגמה $\frac{2x}{x^2-1}$ גזירה.

משפט $\sin x$ גזירה ו־ $(\sin x)' = \cos x$.

הוכחה $= \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \sin h \cdot \cos x - \sin x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = (\sin x)'$
$\lim\limits_{h \to 0} \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \overset{(*)}{=} \sin x \cdot \frac{0}{h} + \cos x \cdot 1 = \cos x$.
הסבר $(*)$: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \lim\limits_{h \to 0} -\frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0$. ■

04/11/2019 | $\mathbb{XXXVIII}$

משפט (כלל השרשרת) תהי f פונקציה הגזירה ב־ x_0. תהי g פונקציה הגזירה ב־ $y_0 = f(x_0)$. ונניח כי $(g \circ f)(x)$ מוגדרת בסביבת x_0. אזי $g \circ f$ גזירה ב־ x_0, ו־ $(g \circ f)(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

דוגמה $(\sin x^2)'$, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = \cos x$ לכן $g'(f(x)) = \cos x^2 \cdot 2x$.

דוגמה $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$.

דוגמה $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x \cos x$.

דוגמה $(\sin(\sin x))' = \cos(\sin x) \cdot \cos x$.

הוכחה נגדיר פונקצית עזר $\psi(x) = \begin{cases} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} & f(x) \neq f(x_0) \\ g'(y_0) & f(x) = f(x_0) \end{cases}$. נשים ♡ כי ψ מוגדרת בסביבת x_0. נשים ♡ כי **(i)** $\psi(x_0) = g'(y_0)$ **(ii)** $\lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = \psi(x_0)$ $(*)$ **(iii)** $\forall x \neq x_0$, $\psi(x) = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $(**)$.
$((g \circ f)(x_0))' = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} \overset{(**)}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \overset{(*)}{=} \psi(x_0) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$. **הסבר** $(**)$: יהי $x \neq x_0$. אם $f(x) \neq f(x_0)$ אז $\psi(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0}$. אחרת $f(x) = f(x_0)$ לכן $\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = 0$, $\psi(x) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot 0 = 0$ ולכן השויון מתקיים. **הסבר** $(*)$: יהי $\epsilon > 0$. מהיות g גזירה ב־ y_0, קיים $\delta_1 > 0$ כך ש־ $\forall 0 < |y - y_0| < \delta_1$, $|\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} - g'(y_0)| < \square_1$ $(\star)$. מהיות f גזירה ב־ x_0, f רציפה ב־ x_0 ולכן קיים $\delta_2 > 0$ כך ש־ $\forall |x - x_0| < \delta_2$, $|f(x) - f(x_0)| < \square_2$ $(\star\star)$. נבחר $\delta = \square_3$ יהי $0 < |x - x_0| < \delta$. אם $f(x) = f(x_0)$, אזי $|\psi(x) - \psi(x_0)| = |g'(y_0) - g'(y_0)| = 0 < \epsilon$. אחרת, $f(x) \neq f(x_0)$, לכן

$|\psi(x)-\psi(x_0)| = |\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} - g'(y_0)| \overset{y=f(x)}{=} |\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} - g'(y_0)| \overset{(\star)}{<} \square_1$, נבחר $\square_1 = \epsilon$, $\square_2 < \delta_1$, $\square_3 = \delta_2$

(לכן $(\star\star)$ מתקיים ולכן $(\star)$ מתקיים ולכן השוויון האחרון מתקיים). $\blacksquare$

07/11/2019 | XXXIX

טענה (i) $\cos x$ גזירה ו־ $(\cos x)' = -\sin x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (ii) $\tan x$ גזירה ו־ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k | \forall k \in \mathbb{Z}\}$.

הוכחה (i) $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ לכן $\cos x$ גזירה מהרכבה של גזירות. $(\sin x)' = \cos x = f'$ וכן $(x + \frac{\pi}{2})' = 1 = g'$ לכן מכלל השרשרת $(\cos x)' = \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 = -\sin x$. (ii) $(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

טענה $\ln x$ גזירה ו־ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

הוכחה יהי $x > 0$. $(\ln x)' = \lim_{h\to0} \frac{\ln(x+h)-\ln x}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\ln(\frac{x+h}{x})}{h} = \lim_{h\to0} \frac{1}{h} \cdot \ln(1+\frac{h}{x}) = \lim_{h\to0} \ln((1+\frac{h}{x})^{\frac{1}{h}}) \overset{t=\frac{1}{h}}{=} \lim_{t\to\pm\infty} \ln((1+\frac{1}{t\cdot x})^t) = \lim_{t\to\pm\infty} \ln((1+\frac{\frac{1}{x}}{t})^t) \overset{(*)}{=} \lim_{t\to\pm\infty} \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}$. הסבר $(*)$: ראינו כבר כי $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x = e$ עתה נניח כי $r > 0$ לכן $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{r}{x})^x \overset{x=t\cdot r}{=} \lim_{t\to\infty} (1+\frac{1}{t})^{t\cdot r} = \lim_{t\to\infty} ((1+\frac{1}{t})^t)^r = e^r$.
עתה נחשב $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{1}{x})^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} (1-\frac{1}{t})^{-t} = \lim_{t\to\infty} (\frac{t-1}{t})^{-t} = \lim_{t\to\infty} (\frac{t}{t-1})^t \overset{x=t-1}{=} \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^{x+1} = \lim_{x\to\infty} (1+\frac{1}{x})^x \cdot (1+\frac{1}{x}) = e \cdot 1 = e$ עתה נניח כי $r < 0$ לכן $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{r}{x})^x \overset{t=\frac{x}{r}}{=} \lim_{t\to-\infty} (1+\frac{1}{t})^{t\cdot r} = \lim_{t\to-\infty} ((1+\frac{1}{t})^t)^r = e^r$. עתה נניח כי $r = 0$ לכן $\lim_{x\to\infty} (1+\frac{r}{x})^x = \lim_{x\to\infty} 1^x = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 = e^0 = e^r$. נחשב $\lim_{x\to-\infty} (1+\frac{r}{x})^x \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to\infty} (1-\frac{r}{t})^{-t} = \lim_{t\to\infty} ((1+\frac{-r}{t})^t)^{-1} = (e^{-r})^{-1} = e^r$.

משפט (כלל ההיפוך) תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה x_0. נניח ש־ f הפיכה ונסמן $f(x_0) = y_0$. נניח בנוסף כי (i) f גזירה ב־ x_0. (ii) $f'(x_0) \neq 0$. (iii) f^{-1} רציפה ב־ y_0. אזי f^{-1} גזירה ב־ y_0 ו־ $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

הוכחה $(f^{-1}(y_0))' = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} \overset{(*)}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} \overset{(i)}{=} \frac{1}{f'(x_0)}$. הסבר $(*)$: $\lim_{y\to y_0} x = \lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$ מ־ (iii).

מסקנה e^x גזירה ו־ $(e^x)' = e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

הוכחה נסמן $f(x) = \ln x = y$, $\forall x > 0$. אזי $f^{-1}(y) = e^y = x$, $\forall y \in \mathbb{R}$. נשים ♡ כי f גזירה $\forall x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$, e^y הפיכה $\forall y \in \mathbb{R}$. יהי $y \in \mathbb{R}$. אזי $y = \ln x$ עבור איזושהי $x > 0$. לכן $(e^y)' = \frac{1}{(\ln x)'} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y$.

מסקנה $\arctan x$ גזירה ו־ $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

הוכחה נסמן $f(x) = \tan x = y$, $\forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. ראינו שבמקרה זה f הפיכה ו־ $f^{-1}(x) = \arctan x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. יהי $y \in \mathbb{R}$ אזי קיים $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ כך ש־ $f(x) = y$. נשים ♡ כי f גזירה ב־ x, $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$, $\arctan y$ הפיכה. לכן מכלל ההיפוך, $\arctan y$ גזירה ו־ $(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} \overset{(*)}{=} \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$. הסבר $(*)$: $\tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$.

טענה $\forall -1 < x < 1$, $\arcsin x$ גזירה ו־ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

הוכחה נסמן $f(x) = \sin x$, $\forall -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. ראינו ש־ f הפיכה וכי $f^{-1}(x) = \arcsin x$. ראינו גם כי f גזירה ו־ $f'(x) = \cos x$.
יהי $-1 < y < 1$ לכן קיים $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ שעבורו $f(x) = y$. מתקיים $f'(x) = \cos x \neq 0$. לכן לפי אשג"ז היפוך f^{-1} גזירה ב־ y ומתקיים $\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{f'(x)} = (f^{-1})'(y)$ ולכן $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

הערה בנקודה $y = 1$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\sin x - 1} \overset{\arcsin y = x}{=} \lim_{y \to 1^-} \frac{\arcsin y - \frac{\pi}{2}}{y-1} = \lim_{y \to 1^-} \frac{\arcsin y - \arcsin 1}{y-1} = (\arcsin y)'$
$\frac{1}{0^+} = \lim_{t \to 0^-} \frac{1}{\frac{\cos t - 1}{t}} = \lim_{t \to 0^-} \frac{t}{\cos t - 1} = \lim_{t \to 0^-} \frac{t}{\sin(t + \frac{\pi}{2}) - 1} \overset{t = x - \frac{\pi}{2}}{=}$ לכן הנגזרת לא קיימת.

הערה באותו האופן, $\arcsin y$ לא גזירה ב־ $y = -1$.

מסקנה $\arcsin x$ לא גזירה.

הערה באותו האופן, $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$, $\forall -1 < x < 1$. ולא גזירה בנקודות הקצה.

טענה יהי $1 \neq a > 0$. אזי a^x גזירה ו־ $(a^x)' = \ln a \cdot a^x$.

הוכחה נרשום $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a}$. לכן $(a^x)' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x$ מכלל השרשרת.

טענה יהי $1 \neq a > 0$. $\log_a x$ גזירה ו־ $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{(\ln a) \cdot x}$.

הוכחה נסמן $f(x) = a^x = y$, $\forall x \in \mathbb{R}$. אזי f הפיכה ו־ $f^{-1}(y) = \log_a y = x$, $\forall y > 0$. מנוסחת ההיפוך $(f'(x) \neq 0)$ f^{-1} גזירה ב־ $y > 0$ ו־ $\frac{1}{\ln a \cdot y} = \frac{1}{\ln a \cdot a^x} = \frac{1}{f'(x)} = (f^{-1})'(y)$ ולכן $(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a \cdot y}$.

טענה יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. אזי x^α גזירה בכל $x > 0$ ו־ $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$.

הוכחה $(x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

תרגיל חשבו את $(x^x)'$, עבור $x > 0$.

פתרון $(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x}(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1)$ מכלל השרשרת ולייבניץ.

פרמה, רול ולגרנז'

משפט (פרמה) תהי f פונקציה המוגדרת ב־ (a,b) עבור $a < b$. תהי $x_0 \in (a,b)$ נקודת קיצון (מקסימום/מינימום) של f ב־ (a,b).
נניח ש־ f גזירה ב־ x_0. אזי $f'(x_0) = 0$.

הוכחה נניח כי x_0 מקסימום. מהגדרת הנגזרת, קיים הגבול $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ולכן $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-}{+} \leq 0$ ממונוטוניות הגבול. באותו האופן, $0 \geq \frac{-}{-} = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ ממונוטוניות הגבול. לכן $f'(x_0) \geq 0$ וכן

$f'(x_0) \leq 0$ לכן $f'(x_0) = 0$. אם x_0 מינימום נחזור על התהליך ונקבל $0 \geq \frac{\pm}{+} = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$,
$0 \leq \frac{\pm}{-} = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ לכן $f'(x_0) = 0$. ■

הערה אם $f'(x_0) = 0$, אזי x_0 לא בהכרח נקודת קיצון (דוגמה נגדית: $f(x) = x^3$).

משפט (רול) תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח כי (i) f רציפה ב־ $[a,b]$. (ii) f גזירה ב־ (a,b). (iii) $f(a) = f(b)$. אזי קיימת $a < c < b$ שעבורה $f'(c) = 0$.

הוכחה מהיות f רציפה ב־ $[a,b]$ אזי ממשפט ווירשטראס, קיימות $x_{1,2} \in [a,b]$ כך ש־ $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$, $\forall x \in [a,b]$. אם x_1 או x_2 שייכות ל־ (a,b), אזי ממשפט פרמה סיימנו. אחרת, $\{x_1, x_2\} \subseteq \{a,b\}$ ומתנאי (iii) $f(x_1) = f(x_2)$ ולכן f קבועה לכן $f'(c) = 0$ $\forall c \in (a,b)$. ■

XLI | 14/11/2019

דוגמה הוכיחו שקיים פתרון יחיד למשוואה $e^x + 3x = 17$.

הוכחה נגדיר $f(x) = e^x + 3x$ רציפה מאש"ר. $f(0) = 1 < 17$, $f(6) = e^6 + 3 \cdot 6 > 17$. לכן ממשפט ערך הביניים המורחב, קיימת $0 < x < 6$ שעבורה $f(x) = 17$. עתה נניח בשלילה כי שקיימות $x_1 < x_2$ שעבורן $f(x_1) = f(x_2) = 17$. נביט ב־ $[x_1, x_2]$. נשים ♡ כי (i) f רציפה ב־ $[x_1, x_2]$ (אש"ר) (ii) f גזירה ב־ (x_1, x_2) (אשג"ז) (iii) $f(x_1) = f(x_2)$ לכן ממשפט רול קיימת $x_1 < c < x_2$ שעבורה $f'(c) = 0$. אבל $f'(x) = e^x + 3 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ סתירה.

הערה אם f גזירה ב־ $\mathbb{R}$ ומתאפסת ב־ n נקודות שונות אזי f' מתאפסת לפחות ב־ $n-1$ נקודות.

משפט (לגרנז') תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ונניח כי (i) f רציפה ב־ $[a,b]$ (ii) f גזירה ב־ (a,b). אזי קיימת $a < c < b$ שעבורה $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

הוכחה נגדיר פונקציה $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ על ידי $F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, $\alpha = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. נשים ♡ כי F מוגדרת ב־ $[a,b]$, (i) F רציפה ב־ $[a,b]$ (אש"ר) (ii) F גזירה ב־ (a,b) (אשג"ז) (iii) $F(a) = f(a) - \alpha \cdot 0 = f(a)$, $F(b) = f(b) - f(b) + f(a) = f(a)$ לכן מרול קיימת $a < c < b$ כך ש־ $F'(c) = 0$, אבל $F'(x) = f'(x) - \alpha \cdot 1$. נציב $x = c$ לכן $F'(c) = f'(c) - \alpha = 0$ לכן $f'(c) = \alpha$. ■

מסקנה תהי $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ונניח ש־ $f'(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$ אזי f קבועה.

הוכחה יהיו $x, y \in [a,b]$ וניח כי $f(x) = f(y)$, אם $x = y$ אזי $f(x) = f(y)$ ברור. אחרת, נביט ב־ $[x,y]$. לכן קיימת מלגרנז' $c \in (a,b)$ כך ש־ $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) = 0$ לכן $f(x) = f(y)$. ■

דוגמה נביט ב־ $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$. נשים ♡ כי f גזירה, $f'(x) = 0$, $\forall x \neq 0$ אבל f לא קבועה.

מסקנה תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ונניח כי $f'(x)=g'(x)$, $\forall x\in[a,b]$ אזי קיים $C\in\mathbb{R}$ שעבורו $f(x)=g(x)+C$, $\forall x\in[a,b]$.

הוכחה נגדיר $h(x)=f(x)-g(x)$, $\forall x\in[a,b]$. נשים ♡ כי h גזירה ב־ $[a,b]$ ו־ $h'(x)=f'(x)-g'(x)=0$ ולכן ממסקנה אחת קיים $C\in\mathbb{R}$ שעבורו $h(x)=C$, $\forall x\in[a,b]$ לכן $h(x)=f(x)-g(x)=c$ לכן $f(x)=g(x)+C$. ■

מסקנה תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ גזירה ב־ $[a,b]$. אזי f עולה ב־ $[a,b]$ $\iff$ $f'(x)\ge 0$, $\forall x\in[a,b]$.

הוכחה $\Rightarrow$: יהיו $x_{1,2}\in[a,b]$, $x_1<x_2$. נוכיח כי $f(x_1)\le f(x_2)$. נביט ב־ $[x_1,x_2]$, ממשפט לגרנז' קיימת $x_1<c<x_2$ כך ש־ $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)\ge 0$ לכן $f(x_2)-f(x_1)\ge 0$ לכן $f(x_2)\ge f(x_1)$.

$\Leftarrow$: תהי $x_0\in[a,b]$. נוכיח כי $f'(x_0)\ge 0$. אם $x_0\ne b$, $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{+}{+}\ge 0$ ממונוטוניות הגבול. עבור $x_0=b$, $f'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\frac{-}{-}\ge 0$ ממונוטוניות הגבול. ■

הערה באותו האופן נוכל להוכיח כי f יורדת ב־ $[a,b]$ $\iff$ $f'(x)\le 0$, $\forall x\in[a,b]$.

הערה אם $f'(x)>0$, $\forall x\in[a,b]$ אזי f עולה ממש (אותה הוכחה כמו $\Rightarrow$) יתכן ו־ f עולה ממש אבל $f'(x)$ מתאפסת. למשל $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$.

18/11/2019 | $\mathbb{XLIII}$

מסקנה $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$.

הוכחה אם $x=y$ אז $0\le 0$. אחרת, ממשפט לגרנז' קיימת c בין x ל־ y שעבורה $\frac{\sin x-\sin y}{x-y}=\cos c$ ($f(x)=\sin x$) ולכן $\frac{|\sin x-\sin y|}{|x-y|}=|\cos c|\le 1$ ולכן $|\sin x-\sin y|\le|x-y|$. ■

מסקנה $\forall x>-1$, $\frac{x}{1+x}\le\ln(1+x)\le x$.

הוכחה אם $x=0$, $0\le\ln 1\le 0$. אחרת, נביט ב־ $f(x)=\ln(1+x)$, $\forall x>-1$. אם $x>0$, נביט ב־ $[0,x]$, לכן ממשפט לגרנז', קיימת $c\in(0,x)$ שעבורה $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}$ ולכן $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)}{x}$. $1<c+1<1+x$ לכן $\frac{1}{x+1}<\frac{1}{1+c}<1$ לכן $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$. עתה נניח כי $-1<x<0$. נביט בקטע $[x,0]$ לכן ממשפט לגרנז' קיימת $c\in(x,0)$ שעבורה $\frac{1}{1+c}=\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0}=\frac{\ln(1+x)}{x}$. $x<c<0$ לכן $1+x<c+1<1$ ולכן $1<\frac{1}{1+c}<\frac{1}{1+x}$ ולכן $1<\frac{\ln(1+x)}{x}<\frac{1}{x+1}$ לכן $\frac{x}{x+1}<\ln(1+x)<x$ (אי השוויון מתהפך). ■

מסקנה $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$.

הוכחה ראינו כבר כי $\frac{x}{x+1}\le\ln(1+x)\le x$ לכן עבור $x>0$, $\frac{1}{x+1}\le\frac{\ln(1+x)}{x}\le 1$ לכן מסנדביץ, סיימנו. עבור $x<0$, $1\le\frac{\ln(1+x)}{x}\le\frac{1}{1+x}$ לכן מסנדביץ, סיימנו. ■

משפט (ערך הביניים של קושי) תהיינה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$. נניח כי (i) f,g רציפות ב־ $[a,b]$ (ii) f,g גזירות ב־ (a,b) (iii) $g'(x)\ne 0$, $\forall x\in(a,b)$. אזי קיימת $a<c<b$ שעבורה $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

הערה אם $g(x)=x$, $\forall x\in[a,b]$ אז קושי $\leftarrow$ לגרנז'$\leftarrow$רול.

הוכחה ראשית נשים ♡ כי $g(b)\neq g(a)$. (נניח בשלילה, אזי ממשפט רול קיימת $a<c<b$ שעבורה $g'(c)=0$ סתירה ל־ (iii).) נביט ב־ $H(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(x)-g(a))$, $\forall x\in[a,b]$, נסמן $\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. נשים ♡ כי H רציפה ב־ $[a,b]$ (אש"ר) וגזירה ב־ (a,b) (אשג"ז). נחשב $H(a)=f(a)-\alpha(g(a)-g(a))=f(a)$, $H(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot(g(b)-g(a))=f(b)-f(b)+f(a)=f(a)$, לכן $H(a)=H(b)=f(a)$. לכן ממשפט רול קיימת $a<c<b$, שעבורה $H'(c)=0$. אבל $H'(x)=f'(x)-\alpha\cdot g'(x)$, $\forall x\in(a,b)$, נציב $x=c$ ונקבל $0=H'(c)=f'(c)-\alpha\cdot g'(c)$, ולכן $\alpha=\frac{f'(c)}{g'(c)}$. ■

XLIII | 21/11/2019

משיכת זמן (לופיטל)

משפט (לופיטל $\frac{0}{0}$, $x\to x_0^+$) [ראה שיעור הבא].

הערה המשפט תקף גם במצבים הבאים: **א'** $x\to x_0^-$ **ב'** $x\to x_0$ **ג'** $L=\pm\infty$ **ד'** $x_0=\pm\infty$ **ה'** תנאי (i) מוחלף ב־ $\lim_{x\to x_0^+}g(x)=\infty$
ו' כל קומבינציה של **א'־ה'**

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\delta}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{1}=1$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\delta}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1$.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1}=\infty$.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{2}=\infty$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$ באותו האופן.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1}=1$. בנוסף, $\lim_{x\to\infty}x\cdot(\arctan x-\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to\infty}\frac{\arctan x-\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}}=\lim_{\substack{x\to\infty\\ \delta}}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-1$.

דוגמה $\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0^+}-x=0$.

דוגמה $\lim_{x\to0^+}x^x=\lim_{x\to0^+}e^{x\ln x}=e^0=1$ מאש"ר.

דוגמה $\lim_{x\to0}(1-\cos x)^{\sin x}=\lim_{x\to0}e^{\sin x\ln(1-\cos x)}=e^{(*)}=1$. **הסבר** $(*)$: $\lim_{x\to0}(\sin x\ln(1-\cos x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-\cos x)}{\frac{1}{\sin x}}\underset{\delta}{=}$
$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{1-\cos x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin^3 x}{(1-\cos x)\cos x}=\lim_{x\to0}(**)\cdot\frac{1}{\cos x}=0$. **הסבר** $(**)$: $\lim_{x\to0}\frac{-\sin^3 x}{1-\cos x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to0}\frac{-3\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x}=0$.

דוגמה $\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x\cdot\sin x(e^x-1)\cdot x\cdot\ln(1+x)\cdot x^x}{\arctan x\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot(\cos x-1)\cdot\tan x}=-2$. $(*)=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\arctan x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to0^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+x^2}}=1$, $(**)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x-1}{\tan x}\underset{\delta}{=}\frac{e^x}{\frac{1}{\cos^2 x}}=1$,
$(***)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln(1+x)}{\cos x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot x}{\cos x-1}=1\cdot(****)$, $(****)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\cos x-1}=\lim_{x\to0^+}\frac{2x}{-\sin x}=-2$.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\underset{\delta}{=}\lim_{x\to\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}=1$, לופיטל היה משאיר אותנו בלולאה.

דוגמה $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$, לופיטל לא מתקיים כי הגבול של הנגזרת לא קיים.

דוגמה $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\cos x\cdot x}{(e^x-1)\sin x^2}$ לא קיים כי אחרי חישוב הגבולות $\cos x$, $\frac{x}{e^x-1}$, נגלה כי אין גבול ל־ $\frac{\sin x}{\sin x^2}$.

$\mathbb{XLIV}$ | 25/11/2019

$L'H\hat{o}spital$????

משפט (לופיטל $\frac{0}{0}$, $x\to x_0^+$) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בקטע (x_0,b), עבור $b>x_0$. נניח כי (i) קיימים הגבולות $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}g(x)=0$ (ii) f,g גזירות ב־ (x_0,b) (iii) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(x_0,b)$ (iv) קיים הגבול $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$.
אזי קיים הגבול $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ ושווה ל־ L.

הוכחה נגדיר $\forall x\in(x_0,b)$, $F(x)=\begin{cases}f(x) & x_0<x<b\\ 0 & x=x_0\end{cases}$ וגם $G(x)=\begin{cases}g(x) & x_0<x<b\\ 0 & x=x_0\end{cases}$. נשים ♡ כי F,G מוגדרות ב־ $[x_0,b)$. נשים ♡ גם כי מתקיים $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}F(x)\overset{(i)}{=}F(x_0)$ ולכן F רציפה ב־ x_0 **(א')**. באותו האופן, גם G רציפה ב־ x_0. $\forall x_0<x<b$, F,G גזירות ב־ x ו־ $F'(x)=f'(x)$, $G'(x)=g'(x)$. לכן $\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}=(*)$ $L\overset{(***)}{=}\lim_{t\to x_0^+}\frac{f'(t)}{g'(t)}\overset{t=c_x}{=}\lim_{x\to x_0^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}\overset{(**)}{=}\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)}{G(x)}$. $(**)$ תהי $x_0<x<b$ ונביט ב־ $[x_0,x]$. נשים ♡ כי **(1)** F,G רציפות ב־ $[x_0,x]$ כי הן רציפות ב־ x_0 **מא'** וגזירות ב־ $(x_0,x]$ ולכן רציפות ב־ $(x_0,x]$ **(2)** F,G גזירות ב־ (x_0,x) **(3)** $G'(t)=g'(t)\neq 0$, $\forall t\in(x_0,x)$ (מ־ (iii)) לכן ממשפט ערך הביניים של קושי קיימת $c\in(x_0,x)$ כך ש־ $\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}=\frac{F'(c_x)}{G'(c_x)}=\frac{F(x)-F(x_0)}{G(x)-G(x_0)}$. $(***)$ $\underset{x_0}{\underset{x\to x_0^+}{x}}\geq t=c_x\geq\underset{x_0}{\underset{x\to x_0^+}{x_0}}$ ולכן $\lim_{x\to x_0^+}c_x=t=x_0$. $(*)$ נסביר מדוע $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת היטב. נניח בשלילה כי קיימת $x_0<x<b$ שעבורה $g(x)=0$ לכן $G(x_0)=G(x_0)$ ולכן ממשפט רול קיימת $x_0<d<x$ שעבורה $g'(d)=G'(d)=0$ בסתירה לנתון. ■

הערה באותו האופן, ניתן להוכיח את משפט לופיטל ($\frac{0}{0}$, $x\to x_0^-$), מכאן גם ש־ ($\frac{0}{0},x\to x_0$)

משפט (לופיטל $\frac{0}{0}$, $x\to\infty$) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות בקטע (a,∞), עבור $a\in\mathbb{R}$. נניח כי (i) קיימים הגבולות $\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ (ii) f,g גזירות ב־ (a,∞) (iii) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,\infty)$ (iv) קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$.
אזי קיים הגבול $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ ושווה ל־ L.

הוכחה $L=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot-\frac{1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t})\cdot-\frac{1}{t^2}}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{\delta}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}\overset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}(*)$. $(*)$ אם בשלילה קיים $x>a$ שעבורו $g(x)=0$, אזי הפונקציה $G'(t)=\begin{cases}g(\frac{1}{t}) & t>0\\ 0 & t=0\end{cases}$ מוגדרת בסביבה ימנית של 0, ומקיימת $\begin{cases}G(0)=0\\ G(\frac{1}{x})=0\end{cases}$ ולכן ממשפט רול קיימת נקודה $0<c<\frac{1}{x}$ שעבורה $G'(c)=0$, אבל $-\frac{1}{t^2}\neq 0$. $G'(t)=g'(\frac{1}{t})$ מהנתון. ■

מסקנה משפט לופיטל $\frac{0}{0}$, $x\to-\infty$.

הערה אם $L=\infty$ או $L=-\infty$ אז המשפט $\frac{0}{0}$, $x\to x_0^+$ נותר עם אותה ההוכחה כי לא הנחנו ש־ L הוא ממשי.

Der Schrekliche Satz

משפט (לופיטל $\frac{?}{\infty}$, $x\to x_0^+$, $L\in\mathbb{R}$ | המשפט הנורא) תהיינה f,g שתי פונקציות המוגדרות ב־ (x_0,b) לאיזושהי $b>x_0$ ונינח כי (i) $\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$ (ii) f,g גזירות ב־ (x_0,b) (iii) $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(x_0,b)$ (iv) קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$. אזי קיים הגבול $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ ושווה ל־ L.

טענת־עזר־1 קיים $\delta>0$ כך ש־ $\frac{f(x)}{g(x)}$ חסומה בקטע $(x_0,x_0+\delta)$.

הוכחת־טענת־עזר־1 מהיות $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ קיים $\delta_1>0$ כך ש־ $\forall x_0<x<x_0+\delta_1$, $|\frac{f'(x)}{g'(x)}-L|<1$ ולכן $|\frac{f'(x)}{g'(x)}|\leq|L|+1$
$(*)$. יהי $x_0<x<x_0+\delta_1$. נבחר y כך ש־ $x_0<x<y<x_0+\delta_1$ עתה נרשום $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}+\frac{f(y)}{g(x)}$, נסמן $A=\frac{f(y)}{g(x)}$, $B=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}$, $\frac{f(x)}{g(x)}$.

A: $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(y)}{g(x)}=0$ לכן קיים $\delta_2>0$ כך ש־ $\forall x_0<x<x_0+\delta_2$, $|\frac{f(y)}{g(x)}-0|\leq 1$ $(**)$.

B: $\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}\cdot\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\overset{(\star)}{=}\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}$ כאשר $x_0<x<y<x_0+\delta$, נסמן $C=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$, $D=\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$.

C: ממשפט קושי, קיימת $x<c<y$ שעבורה $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$ לכן $|\frac{f'(c)}{g'(c)}|=|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}|$. נשים ♡ כי $(*)$ מתקיימת עבור c ולכן $|L|+1\geq|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}|$.

D: $\lim\limits_{x\to x_0^+}1-\frac{g(y)}{g(x)}=1=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$ לכן קיים $\delta_3>0$ כך ש־ $\forall x_0<x<x_0+\delta_3$, $2\geq|\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}|$. נבחר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. יהי $x_0<x<x_0+\delta$ ונבחר $x_0<x<y<x_0+\delta$.

לכן $2\cdot(1+|L|)+1\geq|\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}|\cdot|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}|+1=|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}|+1\geq|\frac{f(y)}{g(x)}|+|\frac{f(x)-f(y)}{g(x)}|\overset{\triangle}{\geq}|\frac{f(x)}{g(x)}|$. $(\star)$
$g(x)-g(y)\neq 0$ אחרת, מרול הייתה $x<d<y$ שעבורה $g'(d)=0$ בסתירה לנתון. ■

$28/11/2019$ | $\mathbb{XLV}$

טענת־עזר־2 יהי $y\in(x_0,b)$. אזי $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}=0$.

הוכחת־טענת־עזר־2 נחשב $\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{g(x)f(y)-f(x)g(y)}{g(x)(g(x)-g(y))}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)(g(x)-g(y))-g(x)((f(x)-f(y))}{g(x)(g(x)-g(y))}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$
מח x מ ואש"ג $0=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{0-\frac{f(x)}{g(x)}\cdot 0}{1-0}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{\frac{f(y)}{g(x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{g(y)}{g(x)}}{1-\frac{g(y)}{g(x)}}=$. ■

הוכחה יהי $\epsilon>0$. נוכיח שקיים $\delta>0$ כך ש־ $\forall x_0<x<x_0+\delta$, $L-\epsilon<\frac{f(x)}{g(x)}<L+\epsilon$. מהיות $L=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ אזי קיים $\delta_1>0$ שעבורו $\forall x_0<x<x_0+\delta_1$, מתקיים $L-\square_1<\frac{f'(x)}{g'(x)}<L+\square_1$ $(*)$. עתה, נבחר x,y כך ש־ $x_0<x<y<x_0+\delta_1$. נביט בקטע $[x,y]$. נשים ♡ כי **א'** f,g רציפות ב־ $[x,y]$ (כי גזירות שם) **ב'** f,g גזירות ב־ (x,y) **ג'** $g'(t)\neq 0$, $\forall t\in(x,y)$ לכן ממשפט ערך הביניים של קושי קיימת $c\in(x,y)$ כך ש־ $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}$.
נשים ♡ כי $(*)$ מתקיים עבור c ולכן $L-\square_1<\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}<L+\square_1$ $(\star)$. מטענת עזר 2, קיים $\delta_2>0$ כך ש־

$\forall x_0 < x < x_0+\delta_2$, $-\square_2 < \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} < \square_2$ $(**)$. נגדיר $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$. יהי $x_0 < x < x_0+\delta$.
נבחר $y\in\mathbb{R}$ שעבורו $x_0 < x < y < x_0+\delta$. אזי $(*)$, $(\star)$ מתקיימים עבור x,y ו־ $(**)$ מתקיימים עבור x,y. לכן $\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}-\square_2 < \frac{f(x)}{g(x)} \overset{(**)}{<} \frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}+\square_2$. ולכן מ־ $(\star)$, $L-\square_1-\square_2 < \frac{f(x)}{g(x)} < L+\square_1+\square_2$, נציב $\square_{1,2}=\frac{\epsilon}{2}$. ■

הערה $\frac{f(x)}{g(x)}$ מוגדרת היטב בסביבת x_0 כי $\lim_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$.

דרבו

משפט (דרבו) תהי f פונקציה גזירה ב־ $[a,b]$. נניח שעבור $r\in\mathbb{R}$ מתקיים $f'(a)<r<f'(b)$ אזי קיימת $c\in(a,b)$ שעבורה $f'(c)=r$.

דוגמה $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ לא מקיימת.

טענה מהדוגמה f גזירה אבל f' לא רציפה.

הוכחת־הטענה $\forall x\neq 0$, ברור ש־ f גזירה מאשג"ז, ו־ $f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}+x^2\cos\frac{1}{x}\cdot(-\frac{1}{x^2})=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$. עבור $x=0$ נחשב $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$ מח x מ. לכן $f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ לכן f גזירה. עתה נשים ♡ כי $\lim_{x\to 0^+}f'(x)$ לא קיים ולכן f לא רציפה ב־ 0. נניח בשלילה שקיים $\lim_{x\to 0^+}f'(x)=L$ אזי $\lim_{x\to 0^+}\cos\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^+}2x\sin\frac{1}{x}-f(x)=0-L=-L$ מח x מ ואש"ג סתירה. ■

הוכחה נגדיר $\forall x\in[a,b]$, $g(x)=f(x)-r\cdot x$. נשים ♡ ש־ g גזירה ב־ $[a,b]$. נשים ♡ גם כי $g'(a)=f'(a)-r<0$ וגם $g'(b)=f'(b)-r>0$. מהיות $g'(a)<0$ קיימת נקודה $a<\widetilde{a}<b$ כך ש־ $g(\widetilde{a})<g(a)$ $(*)$ מהיות $g'(b)>0$, קיימת $a<\widetilde{b}<b$ שעבורה $g(\widetilde{b})<g(b)$ $(**)$. מהיות g גזירה ב־ $[a,b]$ אזי g רציפה ב־ $[a,b]$ לכן ממשפט ווירשטראס יש ל־ g נקודת מינימום $a\le c\le b$. אבל מ־ $(*)$ $(**)$, $a<c<b$. לכן ממשפט פרמה, $g'(c)=f'(c)-r=0$ ולכן $f'(c)=r$.
$(*)$ נניח בשלילה ש־ $\forall x\in(a,b)$, $g(x)\ge g(a)$ לכן $g'(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\ge 0$ ממונוטוניות הגבול סתירה. $(**)$ נניח בשלילה ש־ $\forall x\in(a,b)$, $g(x)\ge g(b)$. לכן $g'(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{g(x)-g(b)}{x-b}\le 0$ ממונוטוניות הגבול סתירה. ■

$02/12/2019$ | $\mathbb{XLVI}$

מסקנה לא קיימת פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה שעבורה $f'(x)=D(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

הוכחה נניח בשלילה. אזי $f(0)=1$, $f'(-\sqrt{2})=0$ לכן ממשפט דרבו קיימת $-\sqrt{2}<c<0$ כך ש־ $D(c)=f'(c)=\frac{1}{2}$ סתירה.

■

גזירות n פעמים

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה של $x_0 \in \mathbb{R}$. נגדיר:

(i) $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$.

(ii) $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$, אם f גזירה ב־ x_0.

(iii) $\forall n \in \mathbb{N}$, נאמר כי f גזירה $n+1$ פעמים ב־ x_0, אם f גזירה n פעמים בסביבה של x_0, ובנוסף $f^{(n)}$ גזירה ב־ x_0.

נסמן במקרה זה $f^{(n+1)}(x_0) = (f^{(n)})'(x_0)$.

הערה f גזירה פעמיים ב־ x_0 אם f גזירה בסביבה של x_0, ובנוסף $f'(x)$ גזירה ב־ x_0. $f^{(2)}(x_0) = (f')'(x_0) = f''(x_0)$.

דוגמה $f(x) = \ln x$, $x > 0$. $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f^{(3)}(x) = (-1)(-2)x^{-3}$, $f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4}$, $f^{(n)} = (-1)^{n+1} \cdot (n-1)! x^n$.

דוגמה $f(x) = x^3 - x^2 + 2x + 3$. $f'(x) = 3x^2 - 2x + 2$, $f''(x) = 6x - 2$, $f^{(3)} = 6$, $f^{(n)} = 0$, $\forall n \geq 4$.

דוגמה $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & x \geq 0 \\ -\frac{x^2}{2} & x < 0 \end{cases}$. **א'** f רציפה כי $f(0) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ובכל נקודה אחרת, f רציפה מאש"ר. **ב'** בכל $x \neq 0$ f גזירה מאשג"ז, עבור $x = 0$, $0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, $0 = \lim\limits_{x\to 0^-} -\frac{x}{2} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-\frac{x^2}{2} - 0}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, לכן $f'(0) = 0$ ולכן f גזירה. **ג'** האם f גזירה פעמיים? נחשב $|x| = \begin{cases} x & x > 0 \\ -x & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} = f'(x)$ ולכן f לא גזירה פעמיים.

דוגמה $f(x) = \begin{cases} \frac{x^n}{n!} & x \geq 0 \\ -\frac{x^n}{n!} & x < 0 \end{cases}$, $f'(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & x > 0 \\ -\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, נשים ♡ כי באינדוקציה כי $f^{(n-1)} = |x|$. לכן f גזירה $n-1$ פעמים אבל לא n פעמים.

הגדרה תהי f פונקציה הגזירה פעמיים בקטע $[a, b]$. f תקרא **קמורה** ב־ $[a, b]$ אם $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$ **וקעורה** ב־ $[a, b]$ אם $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in [a, b]$.

א־סימפטיות

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת ב־ $[a, \infty)$ לאיזושהי $a \in \mathbb{R}$. נאמר כי $y = L$ אסימפטוטה **אופקית** של f ב־ ∞ אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$, באותו האופן עבור אסימפטוטרה **אופקית** של f ב־ $-\infty$.

הגדרה תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של $x_0 \in \mathbb{R}$. נאמר כי $x = x_0$ אסימפטוטה **אנכית** אם לפחות אחד מ־ $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$ אינסופי (או $-\infty$).

דוגמה e^x קמורה לכל קטע, $\ln x$ קעורה בכל קטע כי $\ln'' x = -\frac{1}{x^2} \leq 0$. $f(x) = 7x + 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$ קמורה וגם קעורה. $f(x) = \sin x$ לא קמורה ולא קעורה ב־ $\mathbb{R}$ כי $f''(x) = -\sin x$. $D(x)$ לא קמורה ולא קעורה כי לא גזירה פעמיים.

הגדרה תהי f פונקצה המוגדרת בסביבה של x_0. נאמר כי x_0 נקודת **פיתול** של f, אם קיימת סביבה (a, b) של x_0 כך ש־ f קמורה ב־ (a, x_0) וקעורה ב־ (x_0, b) או קעורה ב־ (a, x_0) וקמורה ב־ (x_0, b).

דוגמה $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$. לכן f קמורה ל־ $x > 0$ וקעורה ל־ $x < 0$.

דוגמה $f(x) = 7x + 3$, כל נקודה היא פיתול.

דוגמה $f(x) = \frac{x}{\ln x}$, $\forall 1 \neq x > 0$. **א'** מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים **ב'** תחומים עלייה וירידה ונקודות וקיצון מקומיות **ג'** תחומי קמירות וקעירות ונקודות פיתול **ד'** אסימפטוטות אנכיות ואופקיות **ה'** שרטטו את גרף הפונקציה.

פתרון **א'** אין (ברור)

ב' $0 = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = f'(x)$ לכן $x = e$. לכן e מינימום מקומי ועולה $\forall x \geq e$ ויורדת $\forall 1 \neq x < e$.

ג' $0 = \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x \ln^4 x} = \frac{\ln^2 x - 2\ln^2 x + 2\ln x}{x \ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\ln^2 x - (\ln x - 1) 2 \ln x \frac{1}{x}}{\ln^4 x} = f''(x)$ לכן $x = e^2$. לכן e^2 פיתול וקעורה $\forall x > e^2, x < 1$, קמורה $\forall 1 < x < e^2$.

ד' $\infty = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\ln x}$ לכן אין אסימפטוטה אופקית ב־ ∞. $\lim_{x \to 1^{\pm}} \frac{x}{\ln x} = \frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0$ לכן יש אסימפטוטה אנכית ב־ $x = 1$.

ה' ראו $desmos.com/calculator$.

05/12/2019 | $\mathbb{XLVII}$

שלום כיתה א' (חדו"א)

תרגיל (טכני מדי, לא יופיע במבחן) נגדיר $f(x) = \frac{1}{|x^3 + x^2 - 3x + 1|}$. $\forall x \in \mathbb{R}$ שעבורו $x^3 + x^2 - 3x + 1 \neq 0$. **א'** שרטטו את הגרף של f כולל אסימפטוטות, נקודות קיצון.

ב' מצאו את $\min A, \max A$, כך ש־ $A = \{f(x) | x \in [-1, 0)\}$, $\min\{f(x) | x \in (-2, 0]\}$ או הכיחו שאינם קיימים.

משפט (חילוק עם שארית, $\square$) יהיו $n(x), m(x)$ שני פולינומים כך ש־ $m(x)$ לא פולינום האפס. אזי קיימים $q(x), r(x)$ כך ש־ (i) $n(x) = q(x) \cdot m(x) + r(x)$ (ii) $0 \leq \deg r < \deg m$ (iii) q, r נקבעים ביחידות על ידי n, m.

מסקנה אם $p(1) = 0$ אזי קיים $q(x)$ כך ש־ $p(x) = q(x)(x - 1)$ (הכנס חילוק ארוך בציור כאן, או שלא).

פתרון א' נסמן $g(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$, $g'(x) = 3x^2 + 2x - 3$. $f(x) = \frac{1}{|x^3+x^2-3x+1|} = \frac{1}{|(x-1)(x-x_1)(x-x_2)|}$, כאשר $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. ולכן $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} & x > 1, x_2 < x < x_1 \\ -\frac{1}{(x-1)(x-x_1)(x-x_2)} & x < x_2, x_1 < x < 1 \end{cases}$,

$f'(x) = \begin{cases} -\frac{g'(x)}{(x-1)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2} & x > 1, x_2 < x < x_1 \\ \frac{g'(x)}{(x-1)^2(x-x_1)^2(x-x_2)^2} & x < x_2, x_1 < x < 1 \end{cases}$. לכן $f'(x) = 0 \iff g'(x) = 0$ כלומר $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{10}}{3}$.

לכן האסימפטוטות הן $\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1}{|x-1|\cdot|x-x_1|\cdot|x-x_2|} = \infty$. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

ב' $\min A = f(-1)$, $\max A$ לא קיים, $\min\{f(x)|x \in (-2,0]\} = f(x_4)$.

פולינום טיילור

הגדרה תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ב־ x_0, כאשר $0 \leq N \in \mathbb{Z}$. פולינום הטיילור של f מסדר N סביב x_0 מוגדר להיות $P_N(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + ... + \frac{f^{(N)}}{N!}(x-x_0)^N = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

הערה פולינום הטיילור $P_N(x)$ מוגדר היטב. יתר על כן הוא פולינום ממעלה $\leq N$.

הערה $P_N(x_0) = f(x_0)$,

$$P_N'(x_0) = f'(x_0) \qquad P_N'(x) = f'(x_0) + f''(x_0)\cdot(x-x_0) + ... + \frac{f^{(N)}(x_0)}{(N-1)!}(x-x_0)^{N-1}$$

$$P_N''(x_0) = f''(x_0) \qquad P_N''(x) = f''(x_0) + f^{(3)}(x_0)\cdot(x-x_0) + ... + \frac{f^{(N)}(x_0)}{(N-2)!}(x-x_0)^{N-2}$$

לכן באותו האופן $P_N^{(N)}(x_0) = f^{(N)}(x_0)$, $P_N^{(N+1)}(x_0) = 0$.

דוגמה $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$. $P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2} + ... + \frac{x^N}{N!}$.

דוגמה $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$.

$$P_0(x) = f(0) = 0$$
$$P_1(x) = f(0) + f'(0)\cdot x = x$$
$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = x$$
$$P_3(x) = f(0) + f'(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$
$$P_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$$
$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

תובנה $P_0(x) = f(x_0)$, $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$, $P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$.

שארית הטיילור

הגדרה תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ב־ x_0. שארית הטיילור מסדר N של f סביב x_0 מוגדרת להיות: $R_N(x) = f(x) - P_N(x)$.

תובנה $R_0(x) = f(x) - f(x_0)$ לכן $\frac{R_0(x)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ (מלגרנז'), $R_0(x) = f'(c)\cdot(x-x_0)$.

הערה אם $N=0$, $R_0(x)=f(x)-f(x_0)$.

09/12/2019 | $\mathbb{XLVIII}$

רול 2

משפט (רול 2) תהי f פונקציה הגזירה $N+1$ פעמים ב־ (x_0,x) וגזירה ברציפות N פעמים ב־ $[x_0,x]$. נניח כי (i) $f(x)=0$ (ii) $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$,..., $f^{(N)}(x_0)=0$ אזי קיימת $c\in(x_0,x)$ שעבורה $f^{(N+1)}(c)=0$.

הערה אם $N=0$ נקבל את משפט רול. לכן רול 2 $\leftarrow$ רול$\to$לגרנז'$\to$ערך הביניים של קושי.

הוכחה נביט ב־ $[x_0,x]$. f גזירה בו, וגזירה בפתוח. בנוסף, $f(x_0)=f(x)$ ולכן ממשפט רול, קיימת $c_1\in(x_0,x)$ שעבורה $f'(c_1)=0$. נביט בקטע $[x_0,c_1]$, f' רציפה בו, וגזירה בפתוח ובנוסף, $f'(x_0)=f'(c_1)$ לכן ממשפט רול, קיימת $c_2\in(x_0,c_1)$ שעבורה $f''(c_2)=0$. נחזור על התהליך. בצעד ה־N־י, נביט ב־ $[x_0,c_N]$. $f^{(N)}$ רציפה בו וגזירה בפתוח. בנוסף, $f^{(N)}(x_0)=f^{(N)}(c_N)=0$ ולכן מרול קיימת $x_0<c<c_N$ שעבורה $f^{(N+1)}(c)=0$. ■

משפט ערך הביניים השארית של טיילור בצורת לגרנז'

משפט (משפט ערך הביניים השארית של טיילור בצורת לגרנז') תהי f פונקציה הנגזירה $N+1$ פעמים ב־ (x_0,x) וגזירה ברציפות N פעמים ב־ $[x_0,x]$. אזי קיימת $c\in(x_0,x)$ כך ש־ $R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$.

הוכחה נגדיר $\forall t\in[x_0,x]$, $\psi(t)=f(t)-P_N(t)-\overbrace{\frac{f(x)-P_N(x)}{(x-x_0)^{N+1}}}^{\alpha}(t-x_0)^{N+1}$. נשים ♡ כי ψ מוגדרת היטב ב־ $[x_0,x]$.
בנוסף: $(\mathbf{i})$ ψ גזירה N פעמים ברציפות ב־ $[x_0,x]$ ברור מאש"ר ואשג"ז $(\mathbf{ii})$ ψ גזירה $N+1$ פעמים ב־ (x_0,x) מאשג"ז.
$(\mathbf{iii})$ $\psi(x)=f(x)-P_N(x)-\frac{f(x)-P_N(x)}{(x-x_0)^{N+1}}(x-x_0)^{N+1}=0$, נשים ♡ גם כי $\psi(x_0)=f(x)-P_N(x_0)=0$.
נחשב: $\psi'(t)=f'(t)-P_N'(t)-\alpha(N+1)(t-x_0)^N$, נציב $t=x_0$ ונקבל $\psi'(x_0)=f'(x_0)-P_N'(x_0)=0$.

$$\psi^{(N)}(t)=f^{(N)}(t)-P_N^{(N)}(t)-\alpha(N+1)\cdot N\cdot\ldots\cdot 2(t-x_0)$$

ונקבל $\psi^{(N)}(x_0)=f^{(N)}(x_0)-P_N^{(N)}(x_0)-\alpha(N+1)!\cdot 0=0$. לכן מרול 2, קיימת $c\in(x_0,x)$ שעבורה $\psi^{(N+1)}(c)=0$. $\psi^{(N+1)}(t)=f^{(N+1)}(t)-0-\alpha(N+1)!$, נציב $t=c$ ונקבל

$$\psi^{(N+1)}(c)=0=f^{(N+1)}(c)-\alpha(N+1)!=f^{(N+1)}(c)-\frac{f(x)-P_N(x)}{(x-x_0)^{N+1}}(N+1)!$$

לכן $\frac{R_N(x)}{(x-x_0)^{N+1}}(N+1)!=f^{(N+1)}(c)$ לכן $R_N(x)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1}$. ■

הערה אם $N=0$, נקבל כי $R_0(x)=\frac{f'(c)}{1!}(x-x_0)=f(x)-f(x_0)$ ולכן $f'(c)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. לכן טיילור $\leftarrow$ לגרנז'.

חישובי ערכי פונקציות אלמנטריות בשגיאה מסדרי גודל שונים

דוגמה מצאו מספר ממשי α כך ש־ $|\alpha-\sin 1|<\frac{1}{10{,}000}$.

פתרון נגדיר $f(x)=\sin x$, $x_0=0$, נרצה לחשב את $f(1)$. ממשפט טיילור קיימת $c\in(0,1)$ כך ש־ $R_N(1)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(1-0)^{N+1}$ לכן $|P_N(1)-\sin 1|=|R_N(1)|=\frac{|f^{(N+1)}(c)|}{(N+1)!}\le\frac{1}{(N+1)!}$, לכן נרצה ש־ $\frac{1}{(N+1)!}$ יהיה קטן מ־ $\frac{1}{10{,}000}$ לכן $N=7$. נגדיר $\alpha=P_7(1)$ אזי $|\alpha-\sin 1|\le\frac{1}{8!}<\frac{1}{10{,}000}$. לכן $P_7(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}$ $\alpha=1-\frac{1}{6}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}$, $\begin{matrix}\alpha=0.84146825...\\ \sin 1=0.8414709...\end{matrix}$.

דוגמה מצאו מספר ממשי α כך ש־ $|\alpha-e|<\frac{1}{1000}$.

פתרון נגדיר $f(x)=e^x$, $x_0=0$, נרצה לחשב את $f(1)$. ממשפט טיילור קיימת $c\in(0,1)$ כך ש־ $R_N(1)=\frac{f^{(N+1)}}{(N+1)!}=\frac{e^c}{(N+1)!}\le\frac{e}{(N+1)!}\le\frac{3}{(N+1)!}$, לכן $N=6$. נגדיר $\alpha=P_6(1)$ אזי $|\alpha-f(1)|=|R_6(1)|<\frac{1}{1000}$. $P_6(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+...+\frac{x^6}{6}$ לכן $\alpha=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}$, $\begin{matrix}\alpha=2.718055556\\ e=2.71828...\end{matrix}$.

12/12/2019 | XLIX

מסקנה תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ברציפות ב־ $[x_0,x]$ וגזירה $N+1$ פעמים ב־ (x_0,x). נניח ש־ $\forall t\in(x_0,x)$, $f^{(N+1)}(t)=0$. אזי $f(t)=P_N(t)$, $\forall t\in[x_0,x]$ ובפרט, f פולינום ממעלה $\le N$.

הוכחה יהי $t\in[x_0,x]$. אם $t=x_0$ אז ברור ש־ $f(x_0)=f(t)=P_N(t)=P_N(x_0)$. אחרת, ממשפט טיילור קיימת $x_0<c<t$ שעבורה $f(t)-P_N(t)=\frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(t-x_0)^{N+1}=0$ לכן $f(t)=P_N(t)$. ■

דוגמה $f(x)=x^2+x-3$, $x_0=0$. $P_0(x)=f(0)=-3$, $P_1(x)=f(0)+f'(0)\cdot x=-3+x$, $P_2(x)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(0)}{2}x^2=-3+x+x^2$, $P_3(x)=-3+x+x^2$.

דוגמה $f(x)=2x^2-3x+4$. רשמו את f כפולינום במשתנה $x+1$. פתרון: נבחר $x_0=-1$. מהמסקנה $f(x)=f(-1)+f'(-1)(x+1)+\frac{f''(-1)}{2}(x+1)^2=9-7(x+1)+2(x+1)^2$.

הגדרה תהיינה f,g פונקציות המוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0. נאמר כי $f=\circ(g)$ אם $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. נאמר ש־ $f=\bigcirc(g)$ אם קיים $c>0$ כך ש־ $\forall x$ בסביבה המנוקבת, $|f(x)|\le c\cdot|g(x)|$.

משפט תהי f פונקציה הגזירה N פעמים ברציפות ב־ x_0. אזי $R_N(x)=\circ(x-x_0)^N$.

טענת־עזר תהי f פונקציה הגזירה ברציפות N פעמים ב־ x_0. נניח כי $f(x_0)=0$, $f'(x_0)=0$,..., $f^{(N)}(x_0)=0$. אזי $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^N}=0$.

הוכחת־טענת־העזר אם $N=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^N}=f(x_0)=0$ מרציפות. נניח שהטענה נכונה ל־ $N-1$. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{(x-x_0)^N}\underset{\delta}{=}\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{N(x-x_0)^{N-1}}=\frac{0}{N}=0$ מהנחת האינדוקציה. ■

הוכחה ברור מטענת העזר. ראינו כי $R_N(x_0)=0$,..., $R_N^{(N)}(x_0)=0$. ■

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{x^2}{2}}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{\underbrace{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+R_4(x)}_{\cos x}-(1-\frac{x^2}{2})}{x^4} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{x^4}{24}+R_4(x)}{x^4} = \frac{1}{24}$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^3}\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{x^3}{3!}+\circ(x^3)-x}{x^3} = -\frac{1}{6}$.

דוגמה $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}}{7.5x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\overbrace{e^x-P_3(x)}^{R_3(x)}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^3}{6}}{7.5x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{3}}{7.5} = \frac{1}{15}$.

16/12/2019 | $\mathbb{L}$

הרב־מ"ש זצוק"ל

הגדרה תהי $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $\varnothing\neq D\subseteq\mathbb{R}$. נאמר ש־ f רציפה במידה שווה ב־ D אם $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש־ $\forall x,y\in D$ שעבורה $|x-y|<\delta$, מתקיים $|f(x)-f(y)|<\epsilon$.

טענה תהי $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $\varnothing\neq D\subseteq\mathbb{R}$. נניח ש־ f רציפה במידה שווה ב־ D. אזי f רציפה ב־ D.

הוכחה תהי $x_0\in D$, נוכיח כי f רציפה ב־ x_0. יהי $\epsilon>0$. מהיות f רציפה במ"ש (במידה שווה), קיים $\delta>0$ כך ש־ $\forall|x-y|<\delta$, $|f(x)-f(y)|<\epsilon$ $(*)$. נבחר $y=x_0$ ויהי $|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-f(x_0)|\overset{(*)}{<}\epsilon$. ■

הערה אם f רציפה במ"ש ב־ D אזי δ תלוי ב־ f,ϵ אבל לא ב־ x,y. אם f רציפה ב־ D, אזי δ תלוי ב־ f,ϵ,x_0 אבל לא ב־ x.

דוגמה $f(x)=x$, $\forall x\in\mathbb{R}$ רציפה במ"ש ב־ $\mathbb{R}$. הוכחה: יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\square$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש־ $|x-y|<\delta$. אזי $|f(x)-f(y)|=|x-y|<\delta=\epsilon$, נבחר $\epsilon=1$.

דוגמה $f(x)=\sin x$ רציפה במ"ש ב־ $\mathbb{R}$. הוכחה: נבחר $\delta=\square$. יהיו $|x-y|<\delta$ אזי $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|<\delta=\epsilon$. $\delta=\square$.

דוגמה $f(x)=\frac{1}{x}$, $x\in(0,1)$. אזי f לא רציפה במ"ש ב־ $(0,1)$. הוכחה: נניח בשלילה כי f רציפה במ"ש. נבחר $\square=\epsilon$. לכן קיים $\delta>0$ כך ש־ $\forall 0<x,y<1$ שעבורם $|x-y|<\delta$, מתקיים ש־ $|f(x)-f(y)|<\square$ $(*)$, נבחר $\square=1$. מארכימדיות הפוכה, קיים $n\in\mathbb{N}$ שעבורו $\frac{1}{2n}<\delta$. נבחר $x=\frac{1}{n}$ ו־ $y=\frac{1}{2n}$ אזי $|x-y|=\frac{1}{2n}<\delta$ ולכן $(*)$ מתקיים עבור x,y הנ"ל. נציב ב־ $(*)$ ונקבל $|f(x)-f(y)|=|\frac{1}{x}-\frac{1}{y}|=|n-2n|=n<1$ סתירה.

דוגמה $f(x)=|x|$ רציפה במ"ש ב־ $\mathbb{R}$. הוכחה: יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\square$. יהיו $x,y\in\mathbb{R}$ כך ש־ $|x-y|<\delta$. אזי $|f(x)-f(y)|=||x|-|y||\overset{\triangledown}{\leq}|x-y|<\delta=\epsilon$.

דוגמה $D(x)$ לא רציפה במ"ש באף תחום (כי לא רציפה באף נקודה).

דוגמה $f(x)=x^2$, רציפה במ"ש $x\in[-10,10]$. הוכחה: יהי $\epsilon>0$. נבחר $\delta=\square$. יהיו $x,y\in[-10,10]$ כך ש־ $|x-y|<\delta$. אזי $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|x-y|\cdot|x+y|\overset{\triangle}{\leq}|x-y|\cdot(|x|+|y|)\leq20|x-y|<20\delta=\epsilon$.

דוגמה $f(x)=x^2$ לא רציפה במ"ש ב־ $\mathbb{R}$. הוכחה: נניח בשלילה ונבחר $\epsilon=\square$. אזי קיים $\delta>0$. נבחר $x=n$, $y=n+\frac{1}{n}$ כך ש־ $\frac{1}{n}<\delta$. אזי $|x-y|<\delta$ אבל $|f(x)-f(y)|=|x^2-y^2|=|x-y|\cdot|x+y|=\frac{1}{n}\cdot(n+n+\frac{1}{n})=\frac{1}{n}(2n+\frac{1}{n})\geq 2$, נבחר $\epsilon=2$ סתירה.

קנטאור

משפט (קנטור) תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, אם f רציפה ב־ $[a,b]$, אזי f רציפה במ"ש ב־ $[a,b]$.

הוכחה נניח בשלילה ש־ f לא רציפה במ"ש. אזי קיים $\epsilon>0$ כך ש־ $\forall\delta>0$ קיימים $x,y\in[a,b]$ כך ש־ $|x-y|<\delta$ אבל $|f(x)-f(y)|\geq\epsilon$. נבחר $\delta=\frac{1}{n}$ עבור $n\in\mathbb{N}$ אזי קיימים $x_n,y_n\in[a,b]$ כך ש־ $|x_n-y_n|<\frac{1}{n}$ אבל $|f(x_n)-f(y_n)|\geq\epsilon$. נביט ב־ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. מ־ BW, קיימת ל־ $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ תת סדרה מתכנסת $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ ונסמן $y_0=\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}$. נשים ♡ כי $a\leq y_0\leq b$ ממונוטוניות הגבול ולכן f רציפה ב־ y_0 לכן קיים $\delta_1>0$ כך ש־ $\forall|x-y_0|<\delta_1$, $|f(x)-f(y_0)|<\square$ $(*)$. נביט ב־ $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$, מתקיים $0\leq|x_{n_k}-y_{n_k}|<\frac{1}{n_k}\underset{k\to\infty}{\to}0$ ולכן מסנדביץ', $\lim\limits_{k\to\infty}|x_{n_k}-y_{n_k}|$ לכן $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}-y_{n_k}=0$ ולכן $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}-y_{n_k}+y_{n_k}=y_0$ מאש"ג. לכן $|x_{n_k}-y_0|<\delta_1$ כמעט תמיד וגם $|y_{n_k}-y_0|<\delta_1$. לכן קיים $k\in\mathbb{N}$ שעבורו $|x_{n_k}-y_0|<\delta_1$ מתקיים וכן $|y_{n_k}-y_0|<\delta_1$ מתקיים ולכן $(*)$ מתקיים עבור x_{n_k} וגם עבור y_{n_k}. לכן $\epsilon\leq|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\overset{\triangle}{\leq}|f(x_{n_k})-f(y_0)|+|f(y_0)-f(y_{n_k})|\overset{(*)}{<}\square+\square$, נבחר $\square=\frac{\epsilon}{2}$. לכן $\epsilon<\epsilon$ סתירה. ■

דוגמה $\sqrt{x}$ רציפה במ"ש ב־ $[0,1]$, $\sqrt{x}$ רציפה ב־ $(0,1)$.

הערה אם f רציפה במ"ש ב־ A ו־ $B\subseteq A$, אזי f רציפה במ"ש ב־ B.

דוגמה $\frac{1}{x}$ לא רציפה במ"ש ב־ $(0,2)$ וכן רציפה במ"ש ב־ $(1,2)$. כי היא רציפה במ"ש ב־ $[1,2]$.

ליפשיציזם

הגדרה תהי $f:D\to\mathbb{R}$ כאשר $\varnothing\neq D\subseteq\mathbb{R}$. נאמר ש־ f **ליפשיצית** ב־ D אם קיים $0<K\in\mathbb{R}$ שעבורו $|f(x)-f(y)|\leq k\cdot|x-y|$, $\forall x,y\in D$.

$\mathbb{LI}$ | 06/01/2020

הדבקה

משפט (ההדבקה) תהי f פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) ותהי $c\in(a,b)$, נניח כי (i) f רציפה במ"ש ב־ (a,c) (ii) f רציפה במ"ש ב־ (c,b) (iii) f רציפה ב־ c. אזי f רציפה במ"ש ב־ (a,b).

הוכחה יהי $\epsilon>0$. מהיות f רציפה במ"ש ב־ (a,c), קיים $\delta_1>0$ כך ש־ $\forall x,y\in(a,c)$ שעבורם $|x-y|<\delta_1$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\square_1=\epsilon$ $(*)$. מהיות f רבמ"ש ב־ (c,b), קיים $\delta_2>0$ כך ש־ $\forall x,y\in(c,b)$ שעבורם $|x-y|<\delta_2$

מתקיים $|f(x)-f(y)| < \Box_2 = \epsilon$ $(**)$. מהיות f רציפה ב־ c קיים $\delta_3 > 0$ כך ש־ $\forall x \in (a,b)$ $|x-c| < \delta_3$ מתקיים $|f(x)-f(c)| < \Box_3 = \frac{\epsilon}{2}$ $\widehat{\boxed{\star}}$. נבחר $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$. יהיו $x,y \in (a,b)$ כך ש־ $|x-y| < \delta$. אם $x,y \in (a,c)$ אז $(*)$ מתקיים ולכן $|f(x)-f(y)| < \Box_1 = \epsilon$ וסיימנו. אחרת, אם $x,y \in (c,b)$, אזי $(**)$ מתקיים ולכן $|f(x)-f(y)| < \Box_2 = \epsilon$ וסיימנו. אחרת, $y \le c \le x$ או $x \le c \le y$ ולכן $|x-c| \le |x-y|$ וגם $|y-c| \le |x-y|$ ולכן $\widehat{\boxed{\star}}$ מתקיים ל־ x,y ולכן $|f(x)-f(y)| \overset{\triangle}{\le} |f(x)-f(c)| + |f(c)-f(y)| < \Box_3 + \Box_3 = \epsilon$. ■

טענה תהי f ליפשיצית ב־ D אזי f רציפה במ"ש ב־ D.

הוכחת־טענה יהי $\epsilon > 0$. מהיות f ליפשיצית קיים $k > 0$ כך ש־ $\forall x,y \in D$ שעבורם $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$ נבחר $\delta = \frac{\epsilon}{k}$. יהיו $x,y \in D$ כך ש־ $|x-y| < \delta$. אזי $|f(x)-f(y)| \le k|x-y| < k \cdot \delta = \epsilon$. ■

משפט תהי f פונקציה גזירה ב־ (a,b). נניח כי f' חסומה ב־ (a,b) אזי f רבמ"ש ב־ (a,b).

הוכחה מספיק להוכיח ש־ f ליפשיצית. כלומר שקיים $k > 0$ כך ש־ $\forall x,y \in (a,b)$, $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$ $(*)$. מהיות f' חסומה, קיים $k_1 > 0$ כך ש־ $|f'(x)| \le k_1$, $\forall x \in (a,b)$. נבחר $k = k_1$. אם $x = y$ אז ברור ש־ $(*)$ מתקיים. אחרת, ממשפט לגרנז', קיימת c ממש בין x ל־ y שעבורה $f'(c) = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, ולכן $|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}| \le k$ לכן $|f(x)-f(y)| \le k|x-y|$. ■

צורם־זר־אוווו

משפט (צזארו) תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. אזי אם (a_n) מתכנסת, גם (b_n) מתכנסת ו־ $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

הוכחה יהי $\epsilon > 0$. מהיות (a_n) סדרה מתכנסת, קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש־ $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. לכן, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \ge N_1$, מתקיים $|a_n - L| < \Box_1$ $(*)$. מהיות $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-L|}{n} = 0$, קיים $N_2 \in \mathbb{N}$ כך ש־ $\forall n \ge N_2$, $\frac{\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-L|}{n} < \Box_2$ $(**)$. נבחר $N = \max\{N_1, N_2\}$ ויהי $n \ge N$, אזי $(*)$, $(**)$ מתקיימים עבור n הנ"ל, לכן $|b_n - L| = |\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} - L| = |\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k - Ln}{n}| = \frac{|\sum_{k=1}^{n}(a_k-L)|}{n} \overset{\triangle}{\le} \frac{\sum_{k=1}^{N_1}|a_k-L|}{n} + \frac{\sum_{k=N_1}^{n}|a_k-L|}{n} < \Box_2 + \frac{\sum_{k=N_1}^{n}|a_k-L|}{n} < \Box_2 + \frac{\sum_{k=N_1}^{n}\Box_1}{n} = \Box_2 + \frac{\Box_1}{n}(n-N_1) \le \frac{\Box_2+\Box_1 n}{n} = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.

סוף.

פניות: *nimrod.rak@mail.huji.ac.il*