אלגברה לינארית 2 | 80135

הרצאות | פרופ׳ צליל סלע פרופ׳ איתי קפלן, וד״ר אלכס גורביץ׳

כתיבה | נמרוד רק

תשפ״א סמסטר ב׳

שבוע $\mathbb{I}$ | פולינומים ואופרטורים המוצבים בהם

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה שדה הוא קבוצה, עליה מוגדרות פעולות $+,\cdot$ המקיימות רשימה של אקסיומות (סגירות, קומוטטיביות ואסוציאטיביות עבור חיבור וכפל, קיום נטרלי לכפל וחיבור, קיום נגדי והפכי וכו').

הגדרה פולינום $P\left(x\right)$ מעל השדה F הוא ביטוי מהצורה $P\left(x\right)=a_{n}x^{n}+\dots+a_{0}$ כך ש-$a_{i}\in F$, $a_{n}\neq0$. דרגת הפולינום $P\left(x\right)$ היא n, שעבורו $a_{n}\neq0$ הוא המקדם המוביל. אוסף כל הפולינומים מעל השדה F מסומן ב-$F\left[x\right]$. a_{0} יקרא האיבר החופשי של הפולינום.

דוגמה $P\left(x\right)=5x^{51}+\sqrt{2}x$ הוא פולינום מעל השדה $F=\mathbb{R}$ שעבורו $\deg P=51$.

על אוסף הפולינומים אפשר להגדיר מספר פעולות.

הגדרה יהיו $P,Q\in F$, $c\in F$ כאשר $P\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{i}x^{i},\ Q\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_{i}x^{i}$.

(i) חיבור פולינומים מוגדר ע"י $P\left(x\right)+Q\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{\max\{m,n\}}\left(a_{i}+b_{i}\right)x^{i}$.

(ii) כפל פולינום בסקלר מוגדר ע"י $cP\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}ca_{i}x^{i}$.

(iii) כפל פולינומים מוגדר ע"י $P\left(x\right)\cdot Q\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{m+n}\left(\sum\limits_{i+j=k}a_{i}b_{j}\right)x^{k}$.

מסקנה $F\left[x\right]$ מהווה מרחב וקטורי (וגם חוג!) מעל השדה F.

הערה $\deg P+Q\leq\max\left\{\deg P,\deg Q\right\}$ כי האיברים המובילים יכולים להצטמצם. $\deg P\cdot Q=\deg P+\deg Q$ שכן המקדם המוביל של $P\cdot Q$ הוא $a_{n}b_{m}\neq0$.

הערה עבור $P\left(x\right)=0$, נגדיר $\deg P=-\infty$ כדי שהטענות שנוכיח לא ידרשו מקרה פרטי עבורו. בנוסף, פולינום מהצורה $P\left(x\right)=a_{1}x+a_{2}$ (פולינום ממעלה 1) נקרא פולינום לינארי.

הערה עבור המספרים השלמים ($\mathbb{Z}$), $n\mid d$ אם קיים $q\in Z$ כך ש- $dq=n$. אחרת, נכליל זאת לחלוקה בשארית, שהיא מציאת $q,r\in\mathbb{Z}$ כך ש- $n=qd+r$ וה-$r<d$.

טענה יהיו $P,D\in F\left[x\right]$ אזי קיימים פולינומים יחידים $Q\left(x\right)$ (המנה) ו-$R\left(x\right)$ (השארית) שעבורם $P\left(x\right)=Q\left(x\right)\cdot D\left(x\right)+R\left(x\right)$ וגם $\deg R\left(x\right)<\deg D\left(x\right)$.

הוכחה: קיום: נסמן $P\left(x\right)=a_{n}x^{n}+\dots+a_{0},\ D\left(x\right)=d_{m}x^{m}+\dots+d_{0}$. אם $m>n$ אז סיימנו כי נוכל נבחר $R=P$, $Q=0$ ונקבל את הרצוי. אחרת, נגדיר $Q_{1}\left(x\right)=\frac{a_{n}}{d_{m}}x^{n-m}$ ונקבל $D\left(x\right)Q_{1}\left(x\right)=a_{n}x^{n}+\dots$. לכן

$$R_{1}\left(x\right)=P\left(x\right)-D\left(x\right)Q\left(x\right)=c_{n-1}x^{n-1}+\dots+c_{0}$$

נשים לב כי $\deg R_1 < \deg P$. נחזור על הפעולה הזו באופן אינדוקטיבי (איטרטיבי) ונקבל שכל הסכומים והמכפלות שצברנו לאורך כל האיטרציה מהווים את הביטוי הרצוי של חלוקה בשארית.

יחידות: נניח כי

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x) = D(x)\hat{Q}(x) + \hat{R}(x)$$

לכן

$$D(x)\left(Q(x) - \hat{Q}(x)\right) = \hat{R}(x) - R(x)$$

מהיות $R, \hat{R}$ "שאריות" בחלוקה, אזי $\deg\left(\hat{R}(x) - R(x)\right) < \deg D$. אם בשלילה $Q(x) - \hat{Q}(x) \neq 0$ אזי

$$\deg\left(D(x)\left(Q(x) - \hat{Q}(x)\right)\right) \geq \deg D$$

סתירה (דרגת הפולינום לא יכולה להיות גם גדולה וגם קטנה שווה ממספר). ■

הגדרה יהי $P \in F[x]$. נאמר שאיבר $a \in F$ הוא שורש של P אם $P(a) = 0$.

טענה יהי $P \in F[x]$ ונניח כי $P(x) = Q(x)D(x)$ אזי:

(i) כל שורש של Q ו-D הוא שורש של P.

(ii) כל שורש של P הוא שורש של Q או (לא בלעדי) שורש של D.

הוכחה: (i) אם $Q(a) = 0$ אזי $P(a) = 0 \cdot D(a) = 0$ ולכן a שורש של P (באותו האופן עבור D).

(ii) אם $P(a) = Q(a)D(a) = 0$ אזי מאין מחלקי אפס $Q(a) = 0 \vee D(a) = 0$ ולכן a הוא שורש של Q או של D. ■

טענה יהי $P \in F[x]$. אזי a הוא שורש של P אם"ם $x - a \mid P(x)$ (כלומר קיים $Q \in F[x]$ שעבורו $P(x) = (x-a)Q(x)$).

הוכחה: $\Leftarrow$: אם $P(x) = (x-a)Q(x)$, a הוא שורש של $x - a$ ולכן הוא שורש של $P(x)$.

$\Rightarrow$: קיימים $Q, R \in F[x]$ שעבורם $P(x) = (x-a)Q(x) + R(x)$ ולכן $\deg R < \deg(x-a) = 1$ כלומר $\deg R \leq 0$ לכן

$$0 = P(a) = (a-a)Q(a) + R(a) = 0$$

ולכן $R = 0$ ולכן $P(x) = (x-a)Q(x)$. ■

מסקנה לפולינום $P \neq 0$ יש לכל היותר n שורשים שונים.

הוכחה: אם a_1 שורש של P אזי $P\left(x\right) = \left(x-a_1\right)Q_1\left(x\right)$. אם $a_2 \neq a_1$ הוא שורש של P אזי $a_2 - a_1 \neq 0$ אבל $P\left(a_2\right) = 0$ ולכן בהכרח $Q_1\left(a_2\right) = 0$ כלומר $Q_1\left(x\right) = \left(x-a_2\right)Q_2\left(x\right)$ ונוכל לחזור על הפעולה הזו לכל היותר n פעמים ונקבל $P\left(x\right) = p\left(x-a_1\right)\cdot\dots\cdot\left(x-a_n\right)$ וניתקע שם שכן לפולינום קבוע (השונה מאפס) אין שורשים. ■

משפט (המשפט היסודי של האלגברה) מעל המספרים המרוכבים, לכל $P \in \mathbb{C}\left[x\right]$ קיים שורש מרוכב.

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה פולינום $P \in F\left[x\right]$ יקרא <u>אי-פריק</u> אם לכל $A, B \in F\left[x\right]$ כך ש-$P\left(x\right) = A\left(x\right)B\left(x\right)$ מתקיים כי A או B הוא קבוע (שייכים ל-F).

הערה אי פריקות תלויה מעל איזה שדה אנחנו מסתכלים.

דוגמאות

1. כל פולינום לינארי ($\deg P = 1$) הוא אי-פריק. אם $P\left(x\right) = A\left(x\right)B\left(x\right)$ אזי $\deg P = \deg A + \deg B$ ולכן $\deg B = 0$ או $\deg A = 0$ כלומר אחד מהם קבוע.
2. הפולינום $x^2+1 \in \mathbb{R}\left[x\right]$ אי פריק. אבל x^2+1 מעל $\mathbb{C}$ הוא פולינום פריק (כי $x^2+1 = \left(x-i\right)\left(x+i\right)$). אם $x^2+1 = A\left(x\right)B\left(x\right)$ (מעל $\mathbb{R}$) אזי אם אחד הפולינומים קבועים סיימנו. אחרת,

$$2 = \deg\left(x^2+1\right) = \underbrace{\deg A}_{1} + \underbrace{\deg B}_{1}$$

ולכן $A\left(x\right) = a_1x + a_2$ כאשר $a_1 \neq 0$ ולכן $x = -\frac{a_2}{a_1}$ הוא שורש של A ולכן הוא גם שורש של x^2+1 בסתירה לכך שאין לו שורשים.

3. $P\left(x\right) = 5x^7 + 3x^5 + 9x^3 + 12$ מעל $\mathbb{Q}$ הוא פולינום אי-פריק ממעלה 7.

טענה כל פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{C}$ הוא פולינום לינארי או קבוע.

הוכחה: אם $P \in \mathbb{C}\left[x\right]$, $\deg P \geq 2$ לפי המשפט היסודי של האלגברה קיים $a \in \mathbb{C}$ כך ש-$P\left(a\right) = 0$ ולכן $P\left(x\right) = \left(x-a\right)Q\left(x\right)$ (כאשר $\deg Q = \deg P - 1 \geq 1$). ■

טענה כל פולינום $P\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ מעל $\mathbb{R}$ עם $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ הוא אי-פריק.

הוכחה: בדומה להוכיחה של האי-פריקות של x^2+1, אם $P\left(x\right) = A\left(x\right)B\left(x\right)$ אזי A, B הם לינאריים ולכן יש להם שורש ולכן ל-P יש שורש בסתירה לכך שראינו בתיכון שיש פתרון אם"ם $\Delta \geq 0$. ■

משפט כל פולינום אי-פריק מעל הממשיים $P\in\mathbb{R}[x]$ הוא אי פריק אם"ם הוא לינארי או שהוא ריבועי עם דיסקרימיננט שלילי ($\Delta<0$) .

הוכחה: יהי $P\in\mathbb{R}[x]$ עם $\deg P\geq 3$. ראשית, נתבונן ב-P כפולינום מעל $\mathbb{C}$. לפי המשפט היסודי של האלגברה, קיים $c\in\mathbb{C}$ כך ש-$P(c)=0$. אם $c\in\mathbb{R}$ אזי $P(x)=\underbrace{(x-c)}_{\text{ממשי}}\cdot\underbrace{Q(x)}_{\text{ממשי}}$ כאשר $\deg Q=\deg P-1\geq 2$. אחרת, c מרוכב בעל רכיב מדומה ולכן $c=a+bi$ כאשר $b\neq 0$. נסמן $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$. לכן

$$0=\overline{0}=\overline{P(c)}=\underbrace{\overline{a_n}}_{=a_n(*)}(\overline{c})^n+\cdots+\overline{a_0}=a_n(\overline{c})^n+\cdots+a_0=P(\overline{c})$$

כלומר אם c שורש של P אזי $\overline{c}$ הוא שורש של P ולכן

$$P(x)=(x-c)Q_1(x)=\underbrace{(x-c)(x-\overline{c})}_{\text{פולינום ממשי}}Q_2(x)$$

כי

$$(x-c)(x-\overline{c})=x^2-\Big(\underbrace{c+\overline{c}}_{\text{ממשי}}\Big)x+\underbrace{c\overline{c}}_{\text{ממשי}}\in\mathbb{R}[x]$$

$(*)$ $a_n\in\mathbb{R}$ ולכן $a_n=\overline{a_n}$ כאשר $\overline{a+bi}=a-bi$. ■

הערה יהיו $P,Q\in F[x]$ ונניח כי $Q\mid P$ (כלומר $P=Q\cdot D$). נסמן

$$P(x)=p\underbrace{P_1(x)\cdot\cdots\cdot P_m(x)}_{\text{פולינומים אי-פריקים}},\ Q(x)=q\underbrace{Q_1(x)\cdot\cdots\cdot Q_l(x)}_{\text{פולינומים אי-פריקים}}$$

אזי

$$P(x)=Q(x)D(x)=qQ_1(x)\cdot\cdots\cdot Q_l(x)(x)=pP_1(x)\cdot\cdots\cdot P_m(x)$$

כלומר כל הגורמים האי-פריקים של Q מופיעים (עד כדי שינוי סדר) בגורמים האי-פריקים של P (ניתן להסיק מכך את היחידות של הפירוק של פולינום, שלא נוכיח כאן).

הגדרה <u>אופרטור</u> (לינארי) מעל (מ"ו) V הוא העתקה לינארית $f:V\to V$.

דוגמאות

1. סיבוב ב-$\mathbb{R}^2$.
2. על אוסף הפ' ב-$C^\infty(\mathbb{R})$ (גזירות אינסוף פעמים מעל $\mathbb{R}$) נגדיר $D:C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$ אופרטור הגזירה (ובאותו האופן ניתן להגדיר את האופרטור על אוסף הפולינומים).

3. $V=F^n$ וקטורי עמודה עם מקדמים בשדה F. תהי $A\in M_n(F)$. נגדיר $T_A(v)=Av$, עבור $v\in F^n$.

הערה אם V מ"ו ממימד n מעל F, ו- $B=(b_1,\dots,b_n)$ בסיס (סדור) של V. עבור $v\in V$, $[v]_B$ הוא וקטור עמודה ב-F^n (ידוע בשם וקטור קוורדינטות). עבור $f:V\to V$ אופרטור לינארי $[f]_B$ הוא המטריצה מייצגת של f מ-B ל-B (לפעמים מסומנת ב-$[f]_B^B$).
נזכור כי מתקיים $[fv]_B=[f]_B[v]_B$.

הגדרה יהיו $f,g:V\to V$ אפורטורים על V. נגדיר עליהם את הפעולות הבאות:

(i) חיבור: $(f+g)(v)=f(v)+g(v)$

(ii) כפל בסקלר: $(\lambda f)(v)=\lambda f(v)$ כאשר $\lambda\in F$.

(iii) הרכבה: $(g\circ f)(v)=g(f(v))$.

הערה כל ההעתקות המתקבלות מהפעולות הנ"ל גם הם אופרטורים לינאריים מעל V.

הערה נסמן, $f^1=f$, $f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{ פעמים}}$. נוכל גם לסמן $f^0=\mathrm{id}$.

הגדרה יהי $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0\in F$ פולינום מעל F ויהי f אופרטור לינארי מעל V (מ"ו מעל F). נגדיר

$$P(f)=a_nf^n+\cdots+a_0$$

כלומר $(P(f))(v)=a_nf^n(a)+\cdots+a_0v$.

הערה גם הצבה של אופרטור לינארי בפולינום הוא אופרטור לינארי.

מסקנה גם $\hom(V,V)$ הוא חוג (שדה מלבד אולי קיום הופכי) אם מגדירים כפל אופרטורים בתור הרכבה.

תרגול

התרגול הראשון היה תרגול חזרה בו יישרו קו בכל הנוגע לדטרמיננטות, מטריצות ייצוג ומטריצות מעבר. בסיכום הזה לא אוסיף את התוכן של התרגול, שכן מי שרוצה לרענן את זכרונה מוזמנת לקרוא את הסיכום של לינארית 1 הקרוב ביותר לביתה ולהתבוסס בהנאה הצרופה בקריאתו.

שבוע $\mathbb{III}$ | תתי מרחב אינווריאנטים

הרצאה

תזכורת

- עבור $f\in\hom(V,V)$ ובסיס B של V, נסמן $[f]_B=[f]_B^B$.

- עבור B,D בסיסים של V, נסמן $[\mathrm{id}]_D^B = M_D^B$ ונשים לב כי M_D^B הפיכה ומתקיים כי $M_B^D = \left(M_D^B\right)^{-1}$.
- $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ כאשר $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ ו-$B = (v_1, \ldots, v_n)$.
- $[f]_B [v]_B = [f(v)]_B$ וגם $[f]_D [v]_D = [f(v)]_D$.
- $[f(v)]_B = \underbrace{M_B^D [f]_D}_{[f]_B^D} \underbrace{M_D^B [v]_B}_{[v]_D}$ ולכן $[f]_B = \underbrace{M_B^D}_{\left(M_D^B\right)^{-1}} [f]_D M_D^B$.
- $[f^n]_B = [f]_B \left[f^{n-1}\right]_B = \cdots = [f]_B^n$ וגם $[f+g]_B = [f]_B + [g]_B$. לכן

$$[P(f)]_B = [a_n f^n + \cdots + a_0]_B = [a_n f^n]_B + \cdots + [a_0]_B = a_n ([f]_B)^n + \cdots + a_0 = P([f]_B)$$

- אם $f \in \hom(V,V)$ ו- $[f]_B = A$ אזי D דומה ל-A אם"ם קיים בסיס C של V כך ש- $D = [f]_C$.
- יחס הדמיון הוא יחס שקילות.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F ו-$f \in \hom(V,V)$. תת מרחב $U \subseteq V$ נקרא <u>f-אינוריאנטי</u> (או אינוריאנטי ל-f) אם $\forall v \in U, f(v) \in U$ (כלומר $f(U) \subseteq U$).

דוגמאות

1. תת המרחב הטרויואלי $V, \{0_V\}$ הם תתי מרחבים f-אינוריאנטיים.
2. עבור f הזזה של $\mathbb{R}^2$ ב-$30°$, אין תת מרחב f-אינוריאנטי (מלבד הטריויאליים).
3. תת המרחב הנפרש ע"י $(0,0,1)$ הוא אינווריאנטי לסיבוב סביב ציר ה-z ב-$\mathbb{R}^3$.
4. אוסף כל הפולינומים ממעלה לכל היותר 3 הוא תת מרחב אינוריאנטי לאופרטור הגזירה $D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1])$.

מה ניתן לומר על מטריצה מייצגת של אופרטור כאשר קיים תת מרחב אינווריאנטי? אם $f \in \hom(V,V)$, $f(U) \subseteq U$. נבחר בסיס ל-U ונרחיב אותו לבסיס של V, $B = (u_1, \ldots, u_m, v_{m+1}, \ldots, v_n)$. נשים לב כי לכל u_i, $[f(u_i)]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ולכן $[f]_B = \left(\begin{array}{c|c} [f|_U]_{(u_1,\ldots,u_m)} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$ כאשר בחצי הימני של $[f]_B$ (שהוא מסדר $n \times (n-m)$) נקבל את כל ה-$[f(v_i)]_B$-ים.

הערה אם U אינוריאנטי ביחס ל-f וגם ל-g אזי U נשמר גם ע"י $f+g, f \circ g, f^n$. מכאן נסיק כי אם $a_n x^n + \cdots + a_0 = P \in F[x]$ אזי $(P(f))(u) = a_n f^n(u) + \cdots + a_0 u \in U$.

מסקנה אם U תת מרחב אינוריאנטי ביחס לאופרטור $f \in \hom(V,V)$ אזי U אינוריאנטי ביחס ל-$P(f)$ לכל $P \in F[x]$.

תרגול

שאלות

1. חלקו בשארית את $2x^3-18x^2+48x-58$ ב-$x-5$.

$$\begin{array}{r|llll}
 & 2x^2 & -8x & +8 & \\ \hline
x-5 & 2x^3 & -18x^2 & +48x & -58 \\
 & 2x^3 & -10x^2 & & \\ \cline{2-3}
 & & -8x^2 & +48x & \\
 & & -8x^2 & +40x & \\ \cline{3-4}
 & & & 8x & -58 \\
 & & & 8x & -40 \\ \cline{4-5}
 & & & & -18
\end{array}$$

ולכן $2x^3-18x^2+48x-58=\left(2x^2-8x+6\right)(x-5)-18$.

2. פרקו את הפולינום $P(x)=x^4+3x^2+2$ לגורמים אי-פריקים מעל $\mathbb{R}$.

$P(x)\overset{y=x^2}{=}y^2+3y+2=(y+1)(y+2)=\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)$ וזהו פירוק לגורמים אי פריקים כי כל גורם הוא ממעלה שנייה עם דיסקרמיננטה שלילית.

3. פרקו את הפולינום $P(x)=x^4+1$ מעל $\mathbb{C}$.

נשים לב כי מהמשפט היסודי של האלגברה, P מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$. נשים לב כי כל השורשים יקיימו $\lambda_i^4=-1$ ובנוסף $-1=e^{i\pi+2\pi k}$ (כי אם נסתכל על המרוכבים בתור מישור שעבורו ציר x הוא הרכיב הממשי וציר y הוא הרכיב המדומה של המספר המרוכב, אז סיבוב של π מעלות נגד כיוון השעון החל מצד ימין של ציר ה-x בדיוק מגיע ל--1, כמו באיור היפיפה הנ"ל של המתרגל האהוב אורי רוזנשטיין).

ולכן $\lambda_i=\left(e^{i\pi+2\pi k}\right)^{\frac{1}{4}}=e^{i\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k}$ ולכן השורשים של P הם $e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{3\pi}{4}},e^{i\frac{5\pi}{4}},e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

4. פרקו את הפולינום $P(x)=x^3-2$ מעל $\mathbb{C}$.

$\lambda_i^3=2=2\cdot e^{2\pi ki}$ ולכן $\lambda_i=\sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi k}{3}i}$ ולכן השורשים של P הם $\sqrt[3]{2},\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i},\ \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

5. פרקו את הפולינום הנ"ל, הפעם מעל $\mathbb{R}$.

דרך ראשונה: נשים לב כי $\alpha=\sqrt[3]{2}$ הוא שורש ממשי של P, נחלק בו את P.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & & x^2 & +\alpha x & +\alpha^2 \\
\hline
x-\alpha & x^3 & +0x^2 & +0x & -2 \\
 & x^3 & -\alpha x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & \alpha x^2 & +0x & \\
 & & \alpha x^2 & -\alpha^2 x & \\
\cline{3-4}
 & & & \alpha^2 x & -2 \\
 & & & \alpha^2 x & -\alpha^3 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

כלומר $P\left(x\right) = \left(x - \sqrt[3]{2}\right)\left(x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}\right)$ שאלו גורמים אי פריקים (הדיסקרימיננטה של הטרינום שלילית).

דרך שנייה: נזכור כי כל שורש מרוכב, גם הצמוד שלו הוא שורש ולכן $\left(x - \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\left(x - \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi}{3}i}\right)$ הוא פולינום ממשי (השורש האחר שנשאר הוא ממשי, ולכן לא יכול להיות שהוא צמוד של שורש עם רכיב מדומה). נזכור כי $e^{\theta i} = \cos\theta + i\sin\theta$ ולכן $\lambda_1 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{2\pi}{3}i} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ וגם $\lambda_2 = \sqrt[3]{2}e^{\frac{4\pi}{3}i} = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ ולכן

$$
\begin{aligned}
\left(x-\lambda_1\right)\left(x-\lambda_2\right) &= x^2 - \left(\lambda_1+\lambda_2\right)x + \lambda_1\lambda_2 \\
&= x^2 - \sqrt[3]{2}\left(\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)x + \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\
&= x^2 + \sqrt[3]{2}x + \sqrt[3]{4}
\end{aligned}
$$

וקיבלנו את אותו הדבר.

6. פרקו את הפולינום הנ"ל מעל $\mathbb{F}_2$.

מעל שדה זה, $x^3 - 2 \equiv x^3$ ולכן 0 הוא השורש היחיד שלו.

7. פרקו את הפולינום הנ"ל מעל $\mathbb{F}_3$.

פשוט נרוץ על כל הקלטים.

$x=0$, $0^3 - 2 = -2 = 1 \neq 0$

$x=1$, $x^3 - 2 = 1 - 2 = -1 = 2 \neq 0$

$x=2$, $x^3 - 2 = 8 - 2 = 6 = 0$

לכן $x = 2 = -1$ הוא השורש היחיד של הפולינום. נחלק את P בו.

$$
\begin{array}{r|llll}
 & x^2 & -x & +1 & \\
\cline{2-5}
x+1 & x^3 & +0x^2 & +0x & -2 \\
 & x^3 & +x^2 & & \\
\cline{2-3}
 & & -x^2 & +0x & \\
 & & -x^2 & -x & \\
\cline{3-4}
 & & & x & +1 \\
 & & & x & +1 \\
\cline{4-5}
 & & & & 0
\end{array}
$$

אבל $(x-2)^2=(x+1)^2=x^2+2x+1=x^2-x+1$ ולכן $x^3-2=(x-2)^3$ מעל $\mathbb{F}^3$.

הגדרה יהי V מ"ו ותתי מרחבים $U,W\subseteq V$ שעבורם $\forall v\in V$, קיימים $u\in U, w\in W$ יחידים שעבורם $u+w=v$. נגדיר $P_{U,W}:V\to U$, <u>ההטלה על המרחב U במקביל למרחב W</u> ע"י $P_{U,W}\left(v\right)=u$ כאשר $u\in U$ הוא הוקטור היחיד שמקיים $u+w=v$ (יחד עם איזשהו $w\in W$).

הערה אם U,W הם ספאנים של בסיסים זרים (לא רק באיבריהם, אלא גם בקומבינאציות הלינאריות שלהם) אז ניתן להגדיר הטלה על U במקביל ל-W (הסטודנטית המשיקעה תוכיח).

משפט (תכונות $P_{U,W}$) בהינתן $P_{U,W}$ הטלה על המרחב U במקביל למרחב W. אזי:

(i) $P_{U,W}$ ה"ל.

(ii) $\mathrm{Im}P_{U,W}=U, \ker P_{U,W}=W$.

(iii) $P_{U,W}\circ P_{U,W}=P_{U,W}$.

הוכחה: (i)

$$
\begin{aligned}
P_{U,W}\left(v_1+v_2\right) &= P_{U,W}\left(\left(u_1+w_1\right)+\left(u_2+w_2\right)\right)\\
&= P_{U,W}\left(\underbrace{\left(u_1+u_2\right)}_{\in U}+\underbrace{\left(w_1+w_2\right)}_{\in W}\right)\\
&= u_1+u_2=P_{U,W}\left(v_1\right)+P_{U,W}\left(v_2\right)
\end{aligned}
$$

$$
P_{U,W}\left(\alpha v\right)=P_{U,W}\left(\alpha u+\alpha w\right)=\alpha u=\alpha P_{U,W}\left(v\right)
$$

מעתה נסמן $T=P_{U,W}$.

(ii) מההגדרה, $\mathrm{Im}T\subseteq U$. יהי $u\in U$, לכן $T\left(u\right)=T\left(u+\underbrace{0}_{w}\right)=u$ כלומר $u\in\mathrm{ImT}$. מכאן נסיק גם כי $T|_U=\mathrm{id}_U$.

יהי $w\in W$ לכן $T\left(w\right)=T\left(\underbrace{0}_{u}+w\right)=0$, כלומר $W\subseteq\ker T$. יהי $v\in\ker T$ אזי

$$
0=T\left(v\right)=T\left(u+w\right)=u
$$

ולכן $v=0+w\in W$ ולכן $\ker T\subseteq W$.

(iii) נובע ישירות מכך ש- $T|_U=\mathrm{id}_U$ כי אז $T\circ T\overset{\mathrm{Im}T\subseteq U}{=}T|_U\circ T=\mathrm{id}_U\circ T=T$. ■

הגדרה תהי $T\in\hom\left(V,V\right)$. אם T מקיימת $T\circ T=T$ אז היא נקראת <u>הטלה</u> (או הטלה במקביל).

הערה במקרה ש-T סתם העתקה שתמונתה מוכלת בתחום שלה נקראת העתקה אידמפוטנטית.

הערה בדוגמאות הבאות נראה איך ההטלה היא בערך להסתכל על ה"רכיב ה-U-י" של וקטור ב-V. בנוסף, גאומטרית, ההטלה היא ה"צל" שהוטל מ-v אל המרחב W (אם W הוא מישור אז זה יהיה באמת צל).

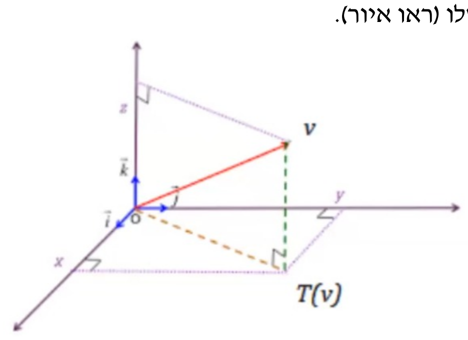
דוגמאות

1. נסמן $W=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\},U=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$. מצאו את $P_{U,W}$.
ראינו בגלגול הקודם כי $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{x-y}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)+\frac{x+y}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ולכן $P_{U,W}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{x-y}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$. נבדוק שהיא אכן מקיימת את התכונה של הטלות:

$$P_{U,W}\left(P_{U,W}\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)\right)=P_{U,W}\left(\frac{x-y}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right)=\frac{x-y}{2}P_{U,W}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)=\frac{x-y}{2}\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$$

2. נסמן $W=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right\},U=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$. מצאו את $P_{U,W}$.
במקרה הזה $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-y\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)+(x+y)\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$ ולכן $T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=-y\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)$ והסטודנטית המשקיעה תבדוק שתכונת ההטלה אכן מתקיימת.

3. עבור $W=\mathrm{sp}\left\{e_3\right\},U=\mathrm{sp}\left\{e_1,e_2\right\}$, $P_{U,W}$ היא בעצם הסתכלות דו מימדית מלמעלה על הוקטור - היא מתעלמת מרכיב ה-z שלו (ראו איור).



הגדרה יהי V מ"ו ו-$U,W\subseteq V$ תתי מרחבים. נגדיר את <u>סכום תתי המרחבים</u> כקבוצה

$$U+W=\left\{v\in V:v=u+w,u\in U,w\in W\right\}$$

טענה $U+W=\mathrm{sp}\{U\cup W\}$ ובפרט $U+W$ ת"מ.

הגדרה אם $U,W\subseteq V$ ת"מים של מ"ו וגם $\forall v\in U+W$ קיים יצוג יחיד $v=u+w$ כאשר $u\in W, w\in W$, נאמר שהסכום $U+W$ הוא סכום ישר ונסמן $U\oplus W$.

טענה $U+W$ הוא סכום ישר אם"ם $U\cap W=\{0\}$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

הערה הסטודנטית המשקיעה תחשוב, כיצד ניתן להכליל סכום ישר (ואת הטענה הנ"ל) ליותר משני תתי מרחבים?

הערה בניגוד לחיבור תתי מרחבים, סכום ישר הוא לא בנייה, אלא תכונה.

דוגמה $U=\mathrm{sp}\{e_1,e_2\}, W=\mathrm{sp}\{e_2,e_3\}$. $U+W=\mathbb{R}^3$ אינו ישר, שכן $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

טענה תהי $T\in\hom(V,V)$ הטלה אזי $V=\ker T\oplus \mathrm{Im}T$.

הוכחה: נשים לב כי

$$T(v-T(v))=T(v)-T(T(v))=T(v)-T(v)=0$$

ולכן $v=\underbrace{(v-T(v))}_{\in\ker T}+\underbrace{T(v)}_{\in\mathrm{Im}T}$ כלומר $V=\ker T+\mathrm{Im}T$. יהי $v\in\ker T\cap\mathrm{Im}T$ לכן $v=T(v)=0$ (כי $v\in\mathrm{Im}T$ ולכן $T(v)=v$). ■

הערה במקור אמרנו שאם נתון לנו מרחב שהוא סכום ישר אז אפשר להגדיר עליו הטלה. מהטענה הקודמת נסיק כי בהינתן הטלה (ה"ל שמקיימת את תכונת ההרכבה), אז נקבל הצגה של המרחב כסכום ישר (של התמונה והגרעין של ההטלה).

משפט $T\in\hom(V,V)$ היא הטלה אם"ם קיימים תתי מרחבים $U,W\subseteq V$ כך ש- $V=U\oplus W$ ולכל $u\in U, w\in W$ מתקיים $T(u+w)=u$.

דוגמאות

1. הזהות היא הטלה כי $\mathrm{id}\circ\mathrm{id}=\mathrm{id}$ ונקבל $V=V\oplus\{0\}$.
2. העתקת ה-0 היא הטלה, כי $0\circ 0=0$ ונקבל $V=\{0\}\oplus V$.
3. הטלות הן לא בהכרח רק במ"ו נ"ס. $V=\mathbb{R}[x]$. ההעתקה $\pi_k(a_0+\cdots+a_nx^n)=a_kx^k$ היא הטלה (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).
4. $V=\mathbb{R}[x]$, בדומה ללפני, $\pi_e(a_0+\cdots+a^n)=a_0+a_2x^2+\cdots+a_{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}x^{2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}$ (העתקה שלוקחת רק את המעלות הזוגיות) היא גם הטלה. במקרה הזה ההטלה מסתכלת על ה"רכיב של החזקות הזוגיות" בפולינום (אינטואיטיבית).

5. $T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\frac{2x-y}{3}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)$. ההעתקה היא בבירור ה"ל. נוכיח כי היא אידמפוטנטית.

$$T\left(T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=T\left(\frac{2x-y}{3}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)\right)=\frac{2x-y}{3}T\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{2x-y}{3}\left(\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right)=T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$$

לכן היא הטלה.

שבוע $\mathbb{III}$ | תתי מרחבים ציקליים, פולינום מינימלי של וקטור וערכים עצמיים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה יהי $f\in\hom(V,V)$ ו-$v\in V$. המסלול של v תחת פעולות האופרטור f הוא הקבוצה $\{v,f(v),f^2,\dots\}$.

טענה אם V נ"ס, $\forall m>0$, $f^{k+m}(v)$ הוא קומבינציה לינארית של הוקטורים $v,\dots,f^k(v)$.

הוכחה: קיים $k<\dim V$ שעבורו $v,f(v),\dots,f^k(v)\neq 0$ היא קבוצה ת"ל (ולכן גם הרישא של הקבוצה הזו לכל $i\geq k$ היא ת"ל). לכן $f^{k+1}(v)=a_{k-1}f^k(v)+\dots+a_0f(v)$ וגם $f^{k+m}(v)=a_{k-1}f^{k+m-1}(v)+\dots+a_0f^m(v)$, $\forall m>0$ ולכן $\forall m>0$, $f^{k+m}(v)$ תלוי לינארית בקודמיו. ■

הגדרה יהי $f\in\hom(V,V)$ ו-$v\in V$. תת המרחב הציקלי (-אינווריאנטי) הנפרש ע"י v ביחס ל-f הוא $Z(f,v)=\text{sp}\{v,f(v),\dots\}$.

הערה עבור קבוצה אינסופית,

$$\text{sp}\{v_1,v_2,\dots\}=\{\alpha_1v_{i_1}+\dots+\alpha_nv_{i_n}:\alpha_1,\dots,\alpha_n\in F,i_1,\dots,i_n\in\mathbb{N}\}$$

מסקנה אם V מ"ו נ"ס אזי קיים $k<\dim V$ שעבורו $Z(f,v)=\text{sp}\underbrace{\{v,f(v),\dots,f^k(v)\}}_{Z(f,v)\text{ בסיס של}}$ (זה קטן ממש כי אחרת נקבל $n+1$ וקטורים בת"ל במ"ו ממימד n).

הערה זה בסיס כי היא בת"ל מקסימלית - כל איבר אחר שנוסיף הוא ק"ל של קבוצה זו ולכן הקבוצה החדשה תהיה ת"ל.

טענה $Z\left(f,v\right)$ הוא תת מרחב f-אינווריאנטי.

הוכחה:

$$f\left(Z\left(f,v\right)\right)=f\left(\text{sp}\left\{ v,f\left(v\right),\dots\right\} \right)=\text{sp}\left\{ f\left(v\right),f^{2}\left(v\right),\dots\right\} \subseteq\text{sp}\left\{ v,f\left(v\right),\dots\right\} =Z\left(f,v\right)$$

■

אם V נ"ס ו-k הוא מספר כך ש- $v,\dots,f^{k}\left(v\right)$ הוא בסיס של $Z\left(f,v\right)$, אז ולכן

$$\left[f|_{Z\left(f,v\right)}\right]_{\left(v,\dots,f^{k}\left(v\right)\right)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & & 0 & a_{0}\\
1 & 0 & & 0 & a_{1}\\
0 & 1 & & 0 & a_{2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & & 1 & a_{k}
\end{pmatrix}$$

כאשר $f^{k+1}\left(v\right)=a_{k}f^{k}\left(v\right)+\dots+a_{0}v$ כי

$$\begin{gathered}v\mapsto f\left(v\right)\\
f\left(v\right)\mapsto f^{2}\left(v\right)\\
\vdots\\
f^{k}\left(v\right)\to f^{k+1}\left(v\right)
\end{gathered}$$

נשים לב כי $f^{k+1}\left(v\right)-a_{k}f^{k}\left(v\right)-\dots-a_{0}v=0$. נגדיר $P\left(x\right)=x^{k+1}-a_{k}x^{k}-\dots-a_{0}$ ונשים לב כי $\deg P=k+1$ וגם $P\left(f\right)\left(v\right)=0$.

יהי $Q\in F\left[x\right]$ שעבורו $Q\left(f\right)\left(v\right)=0$.

טענה אם $Q\neq0$ אזי $\deg Q\geq k+1$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $0\leq\deg Q\leq k$. ולכן $q_{k}f^{k}\left(v\right)+\dots+q_{0}v=0$ קומבינציה לינארית של $v,\dots,f^{k}\left(v\right)$ שמתאפסת ולכן $q_{0}=\dots=q_{k}=0$ בסתירה לכך ש-$Q\neq0$. ■

טענה $P\mid Q$ (P שהוגדר לעיל).

הוכחה: קיימים $D,R\in F\left[x\right]$ שעבורם $Q\left(x\right)=P\left(x\right)D\left(x\right)+R\left(x\right)$ וגם $\deg R<\deg P=k+1$. לכן $Q\left(f\right)=P\left(f\right)D\left(f\right)+R\left(f\right)$.

$$0=Q\left(f\right)\left(v\right)=\left(D\left(f\right)P\left(f\right)\right)\left(v\right)+R\left(f\right)=R\left(f\right)\left(v\right)$$

כלומר $R(f)(v)=0$ אבל $\deg R<k+1$ ולכן $R=0$ (אחרת נקבל סתירה לטענה הקודמת). ולכן $Q(x)=D(x)P(x)$ כלומר $P\mid Q$.

■

הגדרה יהי $v\in V$ מ"ו נ"ס ו- $f\in\hom(V,V)$. נניח כי $v,\ldots,f^{k}(v)$ הוא בסיס של $Z(f,v)$ וכי $f^{k+1}(v)=a_kf^k(v)+\cdots+a_0v$ אזי $\min_v^f(x)=x^{k+1}-a_kx^k-\cdots-a_0$ נקרא הפולינום המינימלי של v ביחס ל-f.

טענה אם $w\in Z(f,v)$ אזי $\min_V^f(f)(w)=0$.

הוכחה: נסמן $P=\min_v^f$. יהי $w\in Z(f,v)$ אזי $w=b_0v+\cdots+b_kf^k(v)$. לכן

$$\begin{aligned}P(f)(w)&=P(f)\left(b_0v+\cdots+b_kf^k(v)\right)\\&=b_0P(f)(v)+b_1f(P(f)(v))+\cdots+b_kf^k(P(f))(v)\\&=0\end{aligned}$$

■

טענה יהי $v\in V$ מ"ו נ"ס, $f\in\hom(V,V)$. אזי קיים $w\in Z(f,v)$ עם $\deg\min_w^f<\deg\min_v^f$ אם"ם $\min_v^f$ פולינום פריק.

הוכחה: נניח כי P פריק. לכן קיים $D\in F[x]$ כך ש-$\min_v^f(x)=\min_w^f(x)D(x)$. לכן $0=\min_v^f(f)(v)=\min_w^f(f)(D(f)(v))$. נשים לב כי $\deg D<\deg\min_v^f$ (כי אלו גורמים בפירוק לא טריוויאלי של $\min_v^f$) ולכן $w=D(f)(v)\neq0$ (אחרת הוא היה מתחלק ב-$\min_v^f$ ואז $\deg\min_v^f\leq\deg D$) ולכן $\min_w^f(f)(w)=0$ וגם $\deg\min_w^f<\deg\min_v^f$.

עתה נניח כי $\min_v^f$ אי פריק. נניח בשלילה כי קיים $w\in Z(f,v)$ בעל פולינום מינימלי מדרגה קטנה מדרגת $\min_v^f$. נשים לב כי $\min_w^f(f)(w)=0$ $\min_v^f(f)(w)=0$ ולכן מהטענה שהוכחנו לפניכן $\min_w^f\mid\min_v^f$, כלומר $\min_v^f(x)=D(x)\min_w^f(x)$ אבל זהו פירוק לא טריוויאלי של $\min_v^f$ סתירה!

■

הערה הסיבה ש-$\deg D,\deg\min_w^f\geq1$ היא שאחרת $\deg D$ או $\deg\min_w^f$ הם 0 (פולינומים מינימליים הם לא פולינום האפס) ולכן אם $\deg D=0$ אז נקבל $\deg\min_w^f=\deg\min_v^f$ בסתירה להנחה ואם $\deg\min_w^f=0$ אז $\min_w^f(x)=a\in F$ אז $\min_w^f(w)=a\cdot w\neq0$ בסתירה לכך שזהו הפולינום המינמלי של w.

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי $f\in\hom(V,V)$. סקלר $\lambda\in F$ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של f אם קיים $0\neq v\in V$ כך ש- $f(v)=\lambda v$. הוקטור הנ"ל נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של f בעל ערך עצמי λ.

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^2$. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=2\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$. כל וקטור $v\in\mathbb{R}^2$ הוא ו"ע עבור הע"ע 2.

2. לאופרטור הסיבוב בזווית $\theta\neq 0$ נגד כיוון השעון אין ו"ע ואין ע"ע.

3. $D:C^{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)\to C^{\infty}\left(\left[0,1\right]\right)$ במרחב הפולינומים. כל פולינום קבוע (כלומר $\deg D=0$) הוא ו"ע בעל ע"ע $\lambda=0$. בנוסף, מחוץ למרחב הפולינומים, $D\left(e^{\lambda x}\right)=\lambda e^{\lambda x}$ (וכך גם $ce^{\lambda x}$).

הערה אם v ו"ע בעל ע"ע λ, אז $c\cdot v$ גם הוא ו"ע בעל ע"ע λ.

הערה אם v ו"ע עם ע"ע λ ו-$B=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ בסיס של V אזי $\lambda\left[v\right]_B=\left[f\left(v\right)\right]_B=\underbrace{\left[f\right]_B}_{=A}\left[v\right]_B$ כלומר $A\left[v\right]_B=\lambda\left[v\right]_B$.

הגדרה תהי $A\in M_n\left(F\right)$. $0\neq v\in F^n$ יקרא ו"ע של A עם ע"ע $\lambda\in F$ אם $\lambda v=Av$.

טענה יהי $f\in\hom\left(V,V\right)$, V מ"ו נ"ס אזי $\lambda\in F$ ע"ע של f אם"ם לכל בסיס B של V, λ הוא ע"ע של $\left[f\right]_B$.

$\Leftarrow$: יהי B בסיס של V ו-λ ע"ע.

$$\lambda\left[v\right]_B=\left[\lambda v_B\right]=\left[f\left(v\right)\right]_B=\left[f\right]_B\left[v\right]_B$$

ולכן $\left[v\right]_B$ הוא ו"ע של המטריצה $\left[f\right]_B$ עם ע"ע λ.

$\Rightarrow$: נניח כי ל- $\left[f\right]_B$ קיים וקטור $0\neq u\in F^n$ כך ש- $\lambda u=\left[f\right]_B u$. נתייחס ל-$u$ כוקטור קואורדינטות של $v\in V$, כלומר $u=\left[v\right]_B$. לכן

$$\left[\lambda v\right]_B=\lambda\left[v\right]_B=\left[f\right]_B\left[v\right]_B=\left[f\left(v\right)\right]_B$$

כלומר v ו"ע עם ע"ע λ.

מסקנה יהי $f\in\hom\left(V,V\right)$ אזי לכל המטריצות המייצגות את f (ביחס לכל הבסיסים האפשריים של V) ישנם אותם ע"ע.

מסקנה אם A,B דומות אזי ל-A ו-B אותם ערכים עצמיים (היזכרו בתכונה זו).

טענה $\left(x-\lambda\right)\mid\min_v^f$ אם"ם קיים ו"ע $w\in Z\left(f,v\right)$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח שהפולינום מתפרק כך $\min_v^f\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)Q\left(x\right)$. לכן

$$0=\min_v^f\left(f\right)\left(v\right)=\left(f-\lambda\mathrm{id}\right)Q\left(f\right)\left(v\right)$$

אבל $w=Q\left(f\right)\left(v\right)\neq 0$ כי $\deg Q<\deg\min_v^f$ ולכן $\left(f-\lambda\mathrm{id}\right)\left(w\right)=0$, כלומר $f\left(w\right)=\lambda w$, כלומר w הוא ו"ע עם ע"ע λ. נשים לב בנוסף כי $w\in Z\left(f,v\right)$ כי הרי הוא מוגדר ע"י הצבה של v ב-f בפולינום, כלומר הוא ק"ל של חזקות שונות של האפורטור f על v, כלומר מוכל ב-$Z\left(f,v\right)$.

$\Rightarrow$: אם ל-f ו"ע $0 \neq w \in Z(f,v)$ עם ע"ע λ אזי $f(w) = \lambda w$, כלומר $(f - \lambda \mathrm{id})(w) = 0$ ולכן $x - \lambda$ הוא הפולינום המינימלי של w (כי הוא לא יכול להיות קבוע כי אז הוא לא יתאפס). נזכור בנוסף כי $P(f)(w) = 0$ (מתקיים לכל איבר ב-$Z(f,v)$) ולכן $(x - \lambda) \mid P$ כרצוי. $\blacksquare$

משפט יהי $f \in \hom(V,V)$, V מ"ו נ"ס ו-$\lambda \in F$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) λ הוא ע"ע של f.

(ii) $\ker(f - \lambda \mathrm{id}) \neq \{0\}$.

(iii) $V \neq \mathrm{Im}(f - \lambda \mathrm{id})$.

$(iiii)$ $(f - \lambda \mathrm{id})$ איננו הפיך.

משפט תהי $A \in M_n(F)$ ו-$\lambda \in F$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) λ הוא ע"ע של A.

(ii) קיים $u \in F^n$ שעבורו $(\lambda I - A)u = 0$, כלומר $\mathrm{rank} A < n$ (הדרגה לא מלאה).

(iii) $\lambda I - A$ איננה הפיכה.

(iv) $\det(\lambda I - A) = 0$.

הגדרה יהיו $U_1, \ldots, U_k \subseteq V$ תתי מרחבים של V מ"ו. אזי $U_1 + \cdots + U_k = \{u_1 + \cdots + u_k : u_i \in U_i\}$.

הגדרה הסכום $U_1 + \cdots + U_k$ נקרא <u>סכום ישר</u> של $U_1, \ldots, U_k$ ומסומן $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ אם $u_1 + \cdots + u_k = 0$ ($u_i \in U_i$) בהכרח גורר כי $u_1 = \cdots = u_k = 0$.

משפט יהיו $U_1, \ldots, U_k$ תתי מרחבים של מ"ו V נ"ס. $U_1 + \cdots + U_k = U \subseteq V$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k = U$.

(ii) אם B_i בסיס של U_i, אזי $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ בסיס ל-U.

(iii) $\dim U = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

יהי $f \in \hom(V,V)$ ויהי $U = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ ת"מ אינוריאנטי ל-f. יהי B_i בסיס ל-U_i, לכן $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$ הוא בסיס של U. לכן

$$[f|_U]_B = \begin{pmatrix} \boxed{[f|_{U1}]_{B_1}} & & & 0 \\ & \boxed{[f|_{U2}]_{B_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{[f|_{Uk}]_{B_k}} \end{pmatrix}.$$

(שזה מעולה כי זו הצגה מאוד יפה של האופרטור ביחס לבסיס מסוים).

הגדרה תהי $A \in M_n(F)$. נאמר כי A <u>אלכסונית</u> אם היא מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_i \in F$ (כלומר $[A]_{ij} \neq 0 \Rightarrow i = j$).

הגדרה יהי $f \in \hom(V,V)$ במ"ו נ"ס. נאמר ש-f <u>ניתן ללכסון</u> (לכסין) אם קיים בסיס B של V שעבורו $[f]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

משפט $f \in \hom(V,V)$ במ"ו נ"ס ניתן ללכסון אם"ם קיים בסיס של ו"ע ביחס ל-f ב-V.

הוכחה: $\Rightarrow$: יהי $B=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס של V של ו"ע ביחס ל-f עם ע"ע $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ בהתאמה. v_i הוא ו"ע ביחס ל-f ולכן $\text{sp}\left\{v_i\right\}$ הוא תת מרחב אינוריאנטי ל-f (שכן $f(cv_i)=(\lambda_i c)v_i$) ולכן $V=\text{sp}\left\{v_1\right\}\oplus\cdots\oplus\text{sp}\left\{v_n\right\}$ (כי איחוד הבסיסים הוא בסיס של V). לכן $[f]_B$ היא פשוט מטריצת בלוקים רק שכל בלוק הוא בגודל 1×1 מהצורה $\left[f|_{\text{sp}\left\{v_i\right\}}\right]_{(v_i)}=(\lambda_i)$ ולכן $[f]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$ ולכן f ניתן ללכסון.

$\Leftarrow$: יהי B בסיס של V כך ש-$[f]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$. נשים לב כי

$$[f]_B\left[v_i\right]_B=\left[f\left(v_i\right)\right]_B=[f]_B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_i\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_i\left[v_i\right]_B$$

ולכן כל וקטור בבסיס הוא ו"ע עם ע"ע $\lambda_i=[A]_{ii}$ כלומר קיבלנו בסיס של V של ו"ע. ■

תרגול

טענה נניח כי $U=\text{sp}\left\{u_1,\dots,u_n\right\}$. אזי U הוא f-אינווריאנטי אם"ם $f\left(u_i\right)\in U$, לכל $1\le i\le n$.

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$: יהי $u\in U=\alpha_1u_1+\dots\alpha_nu_n$ ולכן $f(u)=\alpha_1f\left(u_1\right)+\dots\alpha_nf\left(u_n\right)\in U$ (מסגירות U לחיבור וכפל לסקלר). ■

דוגמאות

ראינו כבר כמה כאן.

1. $\text{Im}f$ ו-$\ker f$ הם ת"מ f-אינווריאנטים (כי $f(\ker f)=\{0\}\subseteq\ker f$ וכן $f(\text{Im}f)\subseteq f(V)=\text{Im}f$).
2. אם $f\in\hom(V,V)$ (כאשר $\dim V=n$) ניתן ללסכון אזי יש ל-V n ת"מים f-אינווריאנטים. כי אם $[f]_B=\begin{pmatrix}a_{11} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}\end{pmatrix}$ ו-$B=(v_1,\dots,v_n)$ אזי $f\left(v_i\right)=a_{ii}f\left(v_i\right)\in\text{sp}\left\{v_i\right\}$.
3. $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $f\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\ x+2y+z\\ -x+y+2z\end{pmatrix}$. נגדיר $U_1=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\right\}$. U_1 הוא f-אינווריאנטי כי $f\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 0\\ -3\end{pmatrix}\in U_1$. $U_2=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ הוא f-איוריאנטי כי $f\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 6\\ 3\end{pmatrix}\in U_2$ ולכן גם $U_3=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right\}$ הוא f-אינוורינאטי (מהטענה שהוכחנו).
4. $V=\mathbb{R}[x]$. נסמן $\mathbb{R}_{\le n}[x]$ מרחב כל הפולינום ממעלה קטנה שווה n. $\mathbb{R}_{\le n}[x]$ הוא אינוריאנטי לאופרטור הגזירה (כי היא לכל היותר מורידה את המעלה ולא מעלה אותה והיא לינארית).

5. $V = \mathbb{R}[x]$. $S\left(x^{2k}\right) = x^{2k+1}$, $S\left(x^{2k+1}\right) = x^{2k}$ (זה לא כל כך מוגדר היטב אבל זה עובד עם השימוש בלינאריות). $S(x+2) = 2x+1$ וגם $S\left(x^3+5x\right) = x^3+5x$. נשים לב כי $S^2 = \mathrm{id}$ (נראה בהמשך שזה שיקוף).

$$F_e = U = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_{2k} = a_{2k+1}, 0 \le k \le \frac{n}{2}\right\}$$

הוא S-אינווריאנטי (וגם הזהות) כי $\forall u \in U$,

$$S(u) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_{2k} S\left(x^{2k}\right) + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_{2k+1} S\left(x^{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_{2k} x^{2k+1} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} a_{2k+1} x^{2k} = u \in U$$

באופן דומה $F_o = W = \left\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : a_{2k} = -a_{2k+1}, 0 \le k \le \frac{n}{2}\right\}$ הוא S-אינווריאנטי.

טענה $F[x] = U \oplus W$ עבור $\mathrm{char} F \neq 2$.

הוכחה: יהי $v \in F_e \cap F_o$ ולכן $a_{2k} = a_{2k+1} = -a_{2k}$ ולכן $a_{2k} = a_{2k+1} = 0$ לכל המקדמים של הפולינום ולכן זהו פולינום ה-0.

$x^{2k} = \frac{1}{2}\left(x^{2k}+x^{2k+1}\right) + \frac{1}{2}\left(x^{2k}-x^{2k+1}\right)$ וגם $x^{2k+1} = \frac{1}{2}\left(x^{2k+1}+x^{2k=}\right) + \frac{1}{2}\left(x^{2k+1}-x^{2k}\right)$ ולכן כל פולינום שמורכב מאלה גם הוא מויצג על ידי סכום של וקטורים מ-U, W). ■

דוגמה $V = C^\infty$ מספר הפ' הגזירות אינסוף פעמים עם אופרטור הגזירה D. $U = \mathrm{sp}\{\sin\}$. U לא D-אינוורינאטי כי $\sin' = \cos \notin \mathrm{sp}\{\sin\}$. עם זאת, $W = \mathrm{sp}\{\sin, \cos\}$ הוא כן ת"מ D-אינווריאנטי. אם נסמן $B = (\sin, \cos)$, אז

$$[D|_W]_B^B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

תרגילים

1. נגדיר $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$. אילו מהת"מים הבאים הם f-אינווריאנטיים? $U = \mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $W = \mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.
U הוא לא f-אינוורינאטי אבל W הוא כן (בדקו אם מספיק אכפת לכם).

2. יהי U, W כך ש- $V = U \oplus W$. תהי $P_{U,W} : V \to V$. מצאו את כל הת"מים ממימד 1 שהם אינווריאנטים להטלה.
יהי Y ת"מ ממימד 1 $P_{U,W}$-אינווריאנטי. לכן $Y = \mathrm{sp}\{v\}$ עבור $0 \neq v \in V$. לכן $P_{U,W}(v) = cv$. אם $c = 0$ אזי $W = \ker P_{U,W} \ni v$ ואם $c \neq 0$ אז נרשום $v = u + w$ כאשר $u \in U, w \in W$. לכן $cv = P_{U,W}(v) = u$ ולכן $v \in U$. לכן כל ת"מ ממימד 1 כזה הוא או מוכל ב-U או מוכל ב-W. בנוסף, כל ת"מ מוכל ב-U או W הוא אינווריאנטי להטלה (אם ב-U אז זה פשוט הזהות ואם זה W אז זה מתאפס על הכל). לכן התמ"ים הרצויים הם כל ת"מ ממימד 1 שמוכל ב-U או מוכל ב-W.

טענה יהיו $f, g : V \to V$, U ת"מ של V ו- $\lambda \in F$ ונניח כי U הוא f, g-אינווריאנטי. אזי U נשמר ע"י:

(i) $f + g$.

λf (ii).

$f\circ g$ (iii).

הוכחה: (i) $(f+g)(u)=f(u)+g(u)\in U$ כי $f(u),g(u)\in U$.

(ii) $(\lambda f)(u)=\lambda f(u)\in U$ כי $f(u)\in U$.

(iii) $(f\circ g)(u)=f(g(u))\overset{U\ni u'=g(u)}{=}f(u')\in U$. ■

מסקנה U נשמר ע"י f אזי אם $P\in F[x]$ אזי U הוא $P(f)$-אינווריאנטי.

הוכחה: נסמן $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ לכן באינדוקציה מזורזרת על המעלה של P:

בסיס $(n=0)$: $P(a)(v)=av\in U$ עבור $v\in U$.

צעד $(n\to n+1)$: $P(f)(v)=a_0+f\left(a_nf^{n-1}(v)+\cdots+a_0\right)\overset{\text{ה"א}}{\in}U$. ■

דוגמה נגדיר $A=\left(\begin{smallmatrix}3&-4&6\\0&1&7\\-5&2&2\end{smallmatrix}\right),B=\left(\begin{smallmatrix}-2&4&-6\\0&1&-7\\5&-2&1\end{smallmatrix}\right)$ האם יש להן ת"מ אינוורינאטי לא טריוויאלי משותף? נשים לב כי אם U נשמר ע"י f,g אזי U נשמר ע"י $f+g$. $A+B=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי ל-$A+B$ יש שלושה ת"מ אינוורינאטים אליה (הספאן של כל וקטור עמודה) והקומבינציות של שלושת אלה הם הת"מים היחידים שמקיימים זאת. עם זאת, נשים לב כי A לא שומרת על אף אחד מהספאנים של וקטורי העמודה ולכן אלו לא יכולים להיות ת"מים משותפים. ולכן אין ל-A ו-B ת"מ אינווריאנטים משותפים.

טענה יהיו $P,Q,R\in F[x]$ ויהי V מ"ו וגם $f:V\to V$ אופרטור לינארי אזי:

(i) $(P+Q)(f)=P(f)+Q(f)$.

(ii) $(P\cdot Q)(f)=P(f)\circ Q(f)$.

(iii) $P(f)\circ Q(f)=Q(f)\circ P(f)$.

(iv) אם $P=Q\cdot R$ אזי $\ker Q(f)\subseteq\ker P(f)$ וגם $\ker R(f)\subseteq R(f)$.

הוכחה: נסמן $P(x)=a_0+\cdots+a_nx^n$, $Q(x)=b_0+\cdots+b_mx^m$.

(i) $(P+Q)(f)=\sum\limits_{i=0}^{\max\{n,m\}}(a_i+b_i)f^i=\sum\limits_{i=0}^{\max\{n,m\}}a_if^i+\sum\limits_{i=0}^{\max\{n,m\}}b_if^i=P(f)+Q(f)$.

(ii) $P(f)\circ Q(f)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_if^i\circ\sum\limits_{i=0}^{m}b_if^i=\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_if^i\right)\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{m}b_if^i\right)=\sum\limits_{k=0}^{n+m}\sum\limits_{i+j=k}a_ib_if^{i+j}=(P\cdot Q)(f)$.

(iii) $Q(f)\circ P(f)=(Q\cdot P)(f)=(P\cdot Q)(f)=P(f)\circ Q(f)$.

(iv) יהי $v\in\ker R(f)$ אזי $P(f)(v)=(Q\cdot R)(f)(v)=(Q(f)\circ R(f))(v)=Q(f)(0)=0$ ובאותו האופן עבור Q. ■

דוגמה בדוגמת החלפת הזוגות בפולינומים, בה הגדרנו את האופרטור S ראינו כי $S^2=\mathrm{id}$ ולכן $S^2-\mathrm{id}=0$ ולכן $\left(x^2-1\right)(S)=0$ כלומר גם אופרטורים יכולים להיות שורשים. בהרצאה 3 נראה שלכל אופרטור על מימד סופי יש פולינום שמאפס אותו. עם זאת, עבור מ"ו אינסופיים זה לא בהכרח המצב. נגדיר $T(p)=x\cdot p$. יהי $0\neq Q\in F[x]$ נניח בשלילה כי $Q(T)=0$. נשים לב כי $\forall k\in\mathbb{N}$,

$T^k(p) = x^k p$ ולכן $T^k(1) = x^k$. נסמן $Q(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n$ ולכן $Q(T)(1) = a_0 + \cdots + a_n x^n \neq 0$. לכן לא קיים פולינום שמאפס את האופרטור הזה.

שבוע $\mathbb{IV}$ | מרחבים עצמיים והפולינום האופייני

הרצאה

תרגיל $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. מהם הע"ע של A? נזכור כי x ע"ע אם"ם $\det(xI - A) = 0$.

$$\det\left(\left(\begin{smallmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right) = (x-1)(x-4) - (-2)(-5) = x^2 - 5x - 6 = (x-6)(x+1) = 0$$

לכן הע"ע הם $x = 6, -1$.

הערה בהינתן מטריצה, כל פתרון לא טריוויאלי למשוואה $A\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ הוא ו"ע עם ע"ע λ.

טענה תהי $A \in M_n(F)$ ויהיו $v_1, \ldots, v_l \in V$ ו"ע עם ע"ע שונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ ($i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$) אזי $v_1, \ldots, v_l$ בת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה כי $v_1, \ldots, v_l$ ת"ל, ונתבונן בתלות לינארית לא טריוויאלית המכילה מספר מינימלי של וקטורים k, כך שלא כל a_i הם 0.

$$a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$$
$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_k f(v_k) = 0$$
$$a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_k \lambda_k v_k = 0$$

נחסר את המשוואה הראשונה כפול λ_i מהמשוואה השלישית ונקבל

$$a_2 \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} v_2 + \cdots + a_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_1)}_{\neq 0} v_k = 0$$

נשים לב כי לא כל האיברים שווים לאפס, כי אחרת זה אומר שבמשוואה המקורית רק a_1 היה שונה מאפס ואז היינו מקבלים $a_1 v_1 = 0$ ולכן $v_1 = 0$ בסתירה לכך שהוא ו"ע (ו"ע הם בהכרח שונים מאפס). עם זאת, קיבלנו תלות לינארית לא טריוויאלית בגודל קטן מהמינימלית שכבר בחרנו לפני, סתירה! ∎

מסקנה תהי $A \in M_n(F)$ אזי ל-A לכל היותר n ע"ע שונים.

הוכחה: יהיו $v_1, \ldots, v_s$ ו"ע עם ע"ע $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ בהתאמה אזי $v_1, \ldots, v_s$ בת"ל ולכן $s \leq n$. ∎

הגדרה יהי $f \in \hom(V,V)$ ויהי λ ע"ע של F. המרחב העצמי לע"ע λ הוא $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.

טענה V_λ הוא תת מרחב של V.

הוכחה: יהיו $v, v_1, v_2 \in V_\lambda$, $\alpha \in F$.

$$f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v)$$

וגם

$$f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = \lambda(v_1 + v_2)$$

■

מסקנה יהי $f \in \hom(V,V)$. ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ שונים אזי $V_{\lambda_1} + \ldots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus V_{\lambda_s}$.

הוכחה: מספיק שנוכיח כי אם $\underbrace{u_1}_{\in V_1} + \cdots + \underbrace{u_s}_{\in V_s} = 0$ אז $\forall i, u_i = 0$. בגלל שהו"ע שונים, לא נוכל נקבל תלות לינארית $u_1 + \cdots + u_s = 0$ שהיא לא טריוויאלית, ולכן $\forall i, u_i = 0$. ■

טענה יהי $f : V \to V$ אופרטור מעל מ"ו נ"ס. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f ניתן ללכסון.

(ii) ל-f קיים בסיס של ו"ע.

(iii) $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V$ כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ הע"ע של f.

(iv) $\dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} = \dim V$.

הוכחה: $(iv) \iff (iii)$ ידוע כי $V_{\lambda_1} + \cdots + V_{\lambda_s} = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}$. ולכן $\dim(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}) = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s}$ שזה שווה ל-$\dim V$ אם"ם $V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s} = V$ כרצוי.

$(ii) \iff (i)$ ראינו בעבר.

$(i) \Leftarrow (iv)$ קיים בסיס של V שמורכב מו"ע של f. נניח כי $v_1^1, \ldots, v_{k_1}^1 \in V_{\lambda_1}$ ו"ע עם ע"ע λ_1 עד $v_1^s, \ldots, v_{k_s}^s \in V_{\lambda_2}$ ו"ע עם ע"ע s. לכל V_{λ_i}, יש מימד של לפחות מספר הו"ע הנ"ל ולכן

$$\dim V \geq \dim(V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_s}) = \dim V_{\lambda_1} + \cdots + \dim V_{\lambda_s} \geq \dim V$$

$(iii) \Leftarrow (i)$ נניח כי $\underbrace{V_{\lambda_1}}_{v_1^1, \ldots, v_{k_1}^1} \oplus \cdots \oplus \underbrace{V_{\lambda_s}}_{v_1^s, \ldots, v_{k_s}^s} = V$. קיבלנו בסיס ל-$V$ המורכב מו"ע של f ולכן f ניתן ללכסון. ■

הגדרה תהי $A \in M_n(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. נגדיר את <u>הפולינום האופייני</u> A להיות

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det\begin{pmatrix} x-a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$

תכונות של הפולינום האופייני

1. χ_A הוא פולינום מתוקן ממעלה n, כלומר $\chi_A(x) = x^n + p_{n-1}x^{n-1} \cdots + p_0$ (כל פעם נכפיל לכל היותר n איברים עם המשתנה x, ובפעם היחידה שבה נסכום בדיוק n פעמים תהיה לאורך האלכסון ששם לא נכפיל בקבועים נוספים ולכן המקדם של x^n הוא 1 והסימן הוא חיובי כי תמורת הזהות היא חיובית).
2. $p_0 = \chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$.
3. $p_{n-1} = -a_{11} - \cdots - a_{nn} = -\text{tr}A = -(a_{11} + \cdots + a_{nn})$ (כי אם נגיע למצב שאנחנו מכפילים $n-1$ איברים עם המשתנה x אז זה אומר שבחרנו $n-1$ איברים באלכסון ובגלל שבכל עמודה ושורה צריכים להיבחר בדיוק איבר אחד, זה אומר שכל האיברים שבחרנו הם באלכסון. מכאן נקבל שבשביל חזקה $n-1$, נצטרך לקחת את כל החלקים של המשתנה x בכל איבר באלכסון מלבד באיבר אחד, שיהיה a_{ii}. נעבור כך על כל האיברים ה-ii, כלומר עבור $1 \le i \le n$ ונקבל את הרצוי).
4. λ הוא שורש של χ_A אם"ם הוא ע"ע של A.

דוגמה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\chi_A(x) = \det\left(\begin{smallmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{smallmatrix}\right) = (x-1)(x-4) - (-2)(-3) = x^2 - 5x - 2$$

נשים לב כי המקדם החופשי הוא $\det A = -2$ והמקדם של x הוא $-5 = -\text{tr}A = -(1+4)$.

טענה יהיו $A, D \in M_n(F)$ מטריצות דומות אזי $\chi_A = \chi_B$.

הוכחה: נניח כי $A = MDM^{-1}$.

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det(xI - A) = \det\left(xI - MDM^{-1}\right) \\ &= \det\left(M(xI - D)M^{-1}\right) \\ &= \det M \det(xI - D) \det M^{-1} \\ &= \det(xI - D) \\ &= \chi_D(x) \end{aligned}$$

■

מסקנה מטריצות שמייצגות את אותו אופרטור לינארית לפי בסיסים שונים דומות, ולכן פולינום אופייני של אופרטור מוגדר היטב.

הוכחה: יהי $f: V \to V$ אופרטור ו-$U \subseteq V$ תת מרחב אינווריאנטי ל-f כאשר V מ"ו נ"ס. ■

הגדרה יהי $f \in \hom(V,V)$ מעל מ"ו נ"ס. נגדיר את הפולינום האופייני של f להיות $\chi_f(x) = \chi_{[f]_B}(x)$ כאשר B בסיס של V.

מסקנה יהי $f: V \to V$ אופרטור ו-$U \subseteq V$ תת מרחב אינווריאנטי ל-f כאשר V מ"ו נ"ס אזי $\chi_{f|_U} \mid \chi_f$.

הוכחה: ראינו כי קיים בסיס $B_V = \left(\underbrace{u_1, \dots, u_k}_{B_U}, v_{k+1}, \dots, v_n\right)$ כך ש- $[f]_{B_V} = \left(\begin{array}{c|c} [f|_U]_{B_U} & A \\ \hline 0 & E \end{array}\right)$ כאשר $E \in M_{n-k}(F)$.

$$\begin{aligned}\chi_A(x) &= \det\left(xI - \left(\begin{array}{c|c} [f|_U]_{B_U} & A \\ \hline 0 & E \end{array}\right)\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} xI - [f|_U]_{B_U} & -A \\ \hline 0 & xI - E \end{array}\right) \\ &\overset{(*)}{=} \det\left(xI - [f|_U]_{B_U}\right)\det(xI - E) \\ &= \chi_{f|_U}(x)\det(xI - E)\end{aligned}$$

$(*)$ טענה שהוכחנו בלינארית 1 לכאורה. ■

תרגול

תרגילים

1. נסמן $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. נגדיר $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$ מעין אופרטור סיבוב. מצאו בסיס B של $Z(f,v)$ כך שהמטריצה $\left[f|_{Z(f,v_0)}\right]_B$ תראה כפי שהדגמנו בהרצאה הקודמת.
נבדוק איפה התלות הלינארית מתחילה. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overset{f}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ נשים לב כי היא k של הפולינום המינימלי הוא לכל היותר 3 (כי $f^3(v_0) = v_0$). נרשום

$$f^2(v_0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -v_0 - f(v_0)$$

כלומר $k=2$. $\left[f|_{Z(f,v_0)}\right]_B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ וגם $\min_v^f(x) = x^2 + \underbrace{x}_{-a_1} + \underbrace{1}_{-a_0}$.

2. יהי U ת"מ f-אינווריאנטי כך ש- $\dim U = 1$. האם בהכרח U f-ציקלי (כלומר שקיים $v \in U$ כך ש- $U = Z(f,v)$) כאשר: $\dim U = 1$?

כן! עבור $0 \neq v \in U$, $U = \mathrm{sp}\{v\}$ ו-$f(v) = cv \in U$ וכך $f^k(v) = f\left(f^{k-1}(v)\right) = cf^{k-1}(v) \in U$.

$\dim U = 2$?

לא! $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, $U = \mathbb{R}^2$. במקרה זה, $\dim Z(f,v) = \dim \mathrm{sp}\{v\} \leq 1$ אבל $\dim U = 2$ לכן הוא לא יכול להיות שווה ל-$Z(f,v)$ כלשהו.

3. יהי Z תת מרחב f-ציקלי כאשר f הטלה, הוכיחו כי $\dim Z \leq 2$.

   מספיק שנוכיח כי $f^2(v)$ ת"ל בקודמיו (ומשם נסיק כי $\dim Z = \dim Z(f,v) \leq 2$). $f^2(v) = f(v) \in \mathrm{sp}\{v, f(v)\}$.

4. נגדיר $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$. האם $\mathbb{R}^3$ הוא f-ציקלי?

   לא! נשים לב כי f הטלה שכן $f^2(v) = f(v)$ ולכן $\dim(f,v) = 2 \neq \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

טענה אם קיים פירוק $\min_v^f(x) = P(x)Q(x)$ כאשר P, Q הם מתוקנים, אז קיים $w \in Z(f,v)$ שעבורו $\min_w^f(x) = P(x)$.

הוכחה: נסמן $w = Q(f)(v)$ לכן

$$P(f)(w) = P(f)Q(f)(v) = (P \cdot Q)(v) = \min_v^f(f)(v) = 0$$

נשים לב כי זהו פולינום מתוקן, לכן נותר להוכיח כי הוא מינימלי. נניח בשלילה שקיים $\widetilde{P}$ כך ש-$\deg \widetilde{P} < \deg P$ וגם $\widetilde{P}(f)(w) = 0$ לכן

$$0 = \widetilde{P}(f)(w) = \left(\widetilde{P} \cdot Q\right)(f)(v)$$

אבל

$$\deg \widetilde{P}Q = \deg \widetilde{P} + \deg Q < \deg P + \deg Q = \deg(P \cdot Q)$$

בסתירה לכך ש-$P \cdot Q = \min_v^f$ הוא הפולינום שמאפס את v בעל הדרגה המינימלית. ■

דוגמאות

יהי V מ"ו.

1. $V \ni \forall v \neq 0$ הוא ו"ע של id_V השייך ל-$\lambda = 1$ וגם ו"ע של העתקפת האפס השייך לו"ע 0.

2. נגדיר $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$. לאופרטור יש את הע"ע 2, עם ו"ע $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. בנוסף, בגלל ש-$\dim \mathrm{Im} f = 1$ אזי $\dim \ker f = 1$ ולכן ל-f יש את הע"ע 0 עם הו"ע $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

טענה $\mathrm{sp}\{v\}$ הוא f-אינוורינאטי אם"ם v ו"ע.

שאלה אם $U \subseteq V$ ת"מ f-אינוורינאטי, האם בהכרח ש-$0 \neq u \in U$ הוא ע"ע?

פתרון לא! לדוגמה $U=V=\mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right)$, $v=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$. נניח בשלילה שזה היה ו"ע, לכן קיים $\lambda\in\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=f\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\lambda\\0\end{smallmatrix}\right)$$

שזה לא אפשרי.

טענה V_λ ת"מ של V.

הוכחה: (אלטרנטיבית לזו שראינו בהרצאה) $v\in V_\lambda$ אם"ם $f(v)=\lambda v$ אם"ם $f(v)-\lambda v=0$ אם"ם $(f-\lambda\mathrm{id}_V)(v)=0$ אם"ם $v\in\ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)$ לכן $V_\lambda=\ker(f-\lambda\mathrm{id}_V)$ וגרעין של אופרטור הוא תמיד ת"מ. $\blacksquare$

מציאת מרחבים עצמיים

1. $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x+y\\x+y\end{smallmatrix}\right)$. $\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq V_2$, $\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq V_2$. אם $\dim V_0=2$ אז היינו מקבלים $V_2=\mathbb{R}^2$, כלומר ש-f הוא העתקת האפס ובאותו האופן עבור V_2 ולכן לא רק שיש הכלה בביטויים הנ"ל אלא ממש שוויון.

2. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+2y+z\\-x+y+2z\end{pmatrix}$. נרצה כי
$$\begin{aligned}2x+y-z&=\lambda x\\x+2y+z&=\lambda y\\-x+y+2z&=\lambda z\end{aligned}$$
, כלומר $\begin{pmatrix}2-\lambda&1&-1\\1&2-\lambda&1\\-1&1&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix}2-\lambda&1&-1\\1&2-\lambda&1\\-1&1&2-\lambda\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{דירוג רנדומלי לא חשוב במיוחד}}\begin{pmatrix}1&2-\lambda&1\\0&3-\lambda&3-\lambda\\0&1-(2-\lambda)^2&-1-(2-\lambda)\end{pmatrix}$$

נזכור כי למערכת הזו יש פתרון לא טריוויאלי אם"ם השורות ת"ל. נשים לב כי $\lambda=3$ נותן לנו $\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ כלומר $V_3=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x+z=y\right\}$, כלומר יש לנו שתי "דרגות חופש", ולכן $\dim V_3=3$. בסיס של V_3 הוא לדוגמה $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. נבדוק האם להעתקה יש גרעין לא טריוויאלי (ואם כן, 0 הוא ע"ע של ההעתקה). כדי להראות זאת, נציב $\lambda=0$ ונקבל $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&3\\0&-3&-3\end{pmatrix}$, כלומר השורות שוב ת"ל ולכן $\lambda=0$ הוא אכן ע"ע. מהתנאים האלה נקבל $x=-y,y=-z$ ולכן $V_0=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x=-y,y=-z\right\}=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}$. קיבלנו שלושה וקטורים בת"ל, $B=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$ ולכן $[f]_B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. נשים לב כי קיבלנו הצגה הרבה יותר טובה מזו לפי הבסיס הסטנדרטי, $[f]_E=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{pmatrix}$ (רמז ללכסון בהרצאה 4).

שבוע $\mathbb{V}$ | קיילי המילטון, הפולינום המינימלי ולכסינות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

דוגמה סיבוב ב-$\frac{\pi}{2}$ נגד כיוון השעון, $A=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$. $\chi_A(x)=\det\left(\begin{smallmatrix}x&1\\-1&x\end{smallmatrix}\right)=x^2+1$. לכן מעל הממשיים אין לאופרטור הזה ו"ע אבל מעל המרוכבים כן יש לו.

הערה χ_A לא תלוי בשדה (כי זה מכפלה של איברים וסכומים שזה אותו חישוב מעל כל שדה), כלומר עבור $F\subseteq K$ שדות, χ_A מעל F הוא בדיוק χ_A מעל K.

בחלק זה סקרנו מחדש את התכונות והטענות שראינו כבר.

טענה יהי $f:V\to V$ ו-$0\neq v\in V$. נסמן $U=Z(f,u)$ ו-$g=f|_U:U\to U$ אזי $\min_v^f=\chi_g$.

הוכחה: נניח כי k הא המספר המקסימלי כך שהרישא $B=\left(v,\ldots,f^k(v)\right)$ בת"ל וכי $\min_v^f(x)=x^{k+1}-a_kx^k-\ldots-a_0$ (כלומר ש-$f^{k+1}(v)=a_kf^k(v)+\ldots+a_0v$). נשים לב שזאת בניגוד למה שנראה בהרצאה, שכן הסימנים של a_i הם הפוכים אצלי. ראינו כי $[g]_B=\begin{pmatrix}0&0&&0&a_0\\1&0&&0&a_1\\0&1&&0&a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&1&a_k\end{pmatrix}\in M_{k+1}(F)$. נרצה להוכיח כי

$$\det\begin{pmatrix}x&0&&0&-a_0\\-1&x&&0&-a_1\\0&-1&&0&-a_2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&-1&x-a_k\end{pmatrix}=\det\left(xI-[g]_B\right)=\min{}_v^f(x)=x^{k+1}-a_kx^k-\ldots-a_0$$

נגדיר סדרת מטריצות.

$$A_k=(x-a_k)\in M_1(F)$$
$$A_{k-1}=\left(\begin{smallmatrix}x&-a_{k-1}\\-1&x-a_k\end{smallmatrix}\right)\in M_2(F)$$
$$A_m=\begin{pmatrix}x&0&&0&-a_m\\-1&x&&0&-a_{m+1}\\0&-1&&0&-a_{m+2}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&&-1&x-a_k\end{pmatrix}\in M_{k+1-m}(F)$$

כלומר הבלוק בגודל $k+1-m$ של χ_g מהפינה הימנית תחתונה.

נוכיח באינדוקציה כי $\det A_m=x^{k+1-m}-a_kx^{k-m}-\ldots-a_{m+1}x-a_m$, ואז נציב $m=0$ ונקבל בדיוק את מה שביקשנו (שכן $\det A_0=\chi_g$ והפולינום באגף הימני יהיה בדיוק $\min_v^f$). נעשה זאת באינדוקציה יורדת (אפשר היה לסמן באינדקסים אחרים את המטריצות ואז זה היה אינדוקציה נורמלית ולא היינו מתבלבלים כל כך).

בסיס ($m=k$):

$$x-a_k=\det(x-a_k)=\det A_k=x^{k+1-k}-a_k=x-a_k$$

צעד ($m \to m-1$):

$$\det A_{m-1} = \det \begin{pmatrix} x & 0 & & 0 & -a_{m-1} \\ -1 & x & & 0 & -a_{(m-1)+1} \\ 0 & -1 & & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & x-a_k \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{פיתוח לפי שורה}}{=} (-1)^{1+1} x \det A_m + (-1)^{1+(k-(m-1)+1)} (-a_{m-1}) \underbrace{\det \begin{pmatrix} -1 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & x \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}}_{\text{משולשית עליונה}}$$

$$\overset{\text{ה"א}}{=} x \left(x^{k+1-m} - a_k x^{k-m} - \ldots - a_m \right) + (-1)^{k+3-m} (-a_{m-1}) (-1)^{k+1-m}$$

$$= x^{k+1-(m-1)} - a_k x^{k-(m-1)} - \ldots - a_m x + (-a_{m-1}) \cdot (-1)^{2k-2m+4}$$

$$= x^{k+1-(m-1)} - a_k x^{k-(m-1)} - \ldots - a_m x - a_{m-1}$$

■

משפט (קיילי המילטון) יהי $f : V \to V$ אופרטור לינארי במ"ו נ"ס. אזי $\chi_f(f) = 0_{\hom(V,V)}$.

הערה באופן שקול $\chi_A(A) = 0_n$ כי $P([f]_B) = [P(f)]_B$ ולכן $P(f) = 0$ אם"ם $[P(f)]_B = 0$ אם"ם $P([f]_B) = 0$ ולכן $\chi_f(f) = 0$ אם"ם $\chi_{[f]_B}([f]_B) = 0$ ובגלל שכל מטריצה היא בעצם יצוג של איזשהו אופרטור לפי איזשהו בסיס, נקבל את השקילות.

הוכחה: יהי $v \in V$, נוכיח כי $\chi_f(f)(v) = 0$. נניח כי $v \neq 0$ (אם הוא כן זה טריוויאלי). נגדיר $U = Z(f, v)$, ולכן U הוא אינווריאנטי ל-f. ראינו כי $\chi_{f|_U} \mid \chi_f$, לכן קיים $Q \in F[x]$ כך ש- $\chi_f(x) = Q(x) \cdot \chi_{f|_U}(x)$ ולכן

$$\chi_f(f)(v) = Q(f)\left(\chi_{f|_U}(f)(v)\right) = Q(f)\left(\min{}_v^f (f)(v)\right) = Q(f)(0) = 0$$

■

דוגמאות

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = x^2 + 1$. $\chi_A(A) = A^2 + I_2 = 0$.
2. $f : V \to V$ המוגדר ע"י $f(v) = \lambda v$, כאשר $\lambda \in F$. $\chi_f(x) = (x - \lambda)^n$. $\chi_f(f) = (f - \lambda \mathrm{id})^n$ אבל $f(v) = \lambda v$ ולכן $f = \lambda \mathrm{id}$, כלומר $f - \lambda \mathrm{id} = 0$ ולכן $\chi_f(f) = 0^n = 0$.

הערה נניח כי $f : V \to V$ ניתן ללכסון, כלומר שקיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ של ו"ע. כדי להראות ש- $\lambda_f(f) = 0$, מספיק להראות כי $\chi_f(f)(v) = 0$, $\forall v \in B$ ואז נקבל כי כל וקטורי הבסיס מתאפסים ולכן כל הוקטורים מתאפסים. יהי $v \in B$ המקיים

$f(v)=\lambda v$. λv ע"ע ולכן $\chi_f(\lambda)=0$, לכן $\chi_\lambda(x) \mid (x-\lambda)$ ולכן קיים $Q\in F[x]$ כך ש- $\chi_f(x)=Q(x)(x-\lambda)$, ולכן

$$\chi_f(f)(v)=Q(f)(f-\lambda\mathrm{id})(v)=Q(f)(f(v)-\lambda v)=Q(f)(0)=0$$

ניתן לראות זאת בנוסף ע"י סימון $[f]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$, ולכן $\chi_f(x)=(x-\lambda_1)\cdot\dots\cdot(x-\lambda_n)$ ולכן

$$\begin{aligned}\chi_{[f]_B}([f]_B)&=([f]_B-\lambda_1 I_n)\cdot\ldots([f]_B-\lambda_n I_n)\\&=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ & \lambda_2-\lambda_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_2 & & & 0\\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n-\lambda_2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_1-\lambda_n & & & 0\\ & \lambda_2-\lambda_n & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0\end{pmatrix}\\&\overset{\text{אריתמטיקה לא כל כך בסיסית}}{=}0\end{aligned}$$

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי $f:V\to V$ במ"ו נ"ס מעל F. <u>הפולינום המינימלי</u> של f הוא הפולינום המתוקן (כלומר פולינום שאינו פולינום האפס שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1_F) בעל הדרגה המינימלית $P\in F[x]$ שעבורו $P(f)=0$.

טענה הפולינום המינימלי מוגדר היטב.

הוכחה: <u>קיום</u>: ראשית, χ_f הוא פולינום מתוקן המקיים זאת, ולכן קיים לפחות פולינום אחד כזה. דרך אחרת להראות זאת היא הסתכלות על $\hom(V,V)$ שהוא מ"ו ממימד $\dim^2 V=n^2$. לכן $\left\{f^i:0\le i\le n^2\right\}$ היא תלוי לינארית (n^2+1 וקטורים במ"ו ממימד n^2), כלומר יש צירוף לינארי לא טריוויאלי $\sum\alpha_i f^i=0$ ולכן יש פולינום מתוקן מדרגה קטנה-שווה ל-n^2 שמאפס את f.

<u>יחידות</u>: נוכיח כי עבור $Q(x)$ פולינום מינימלי ו-$P\in F[x]$ המקיים $P(f)=0$ מתקיים כי $Q\mid P$. מחלוקת פולינומים עם שארית, קיימים $D,R\in F[x]$ כך ש- $\deg R<\deg Q$ כך ש- $P(x)=D(x)Q(x)+R(x)$. נציב f ונקבל

$$0=P(f)=\underbrace{Q(f)}_{0}D(f)+R(f)=R(f)$$

אבל ממינימליות נקבל כי $R=0$ ולכן $Q\mid P$.

עתה נניח כי P מדרגה מינימלית ומתוקן, לכן $\deg Q=\deg P$ ולכן $\deg D=0$, כלומר D פולינום קבוע השונה מפולינום האפס. אבל כיוון ש-P,Q מתוקנים, נובע כי $D=1$, לכן $P=Q$. לכן הפולינום המינימלי יחיד. ■

הערה הוכחת היחידות במקרה הזה מאוד דומה להוכחת היחידות של הפולינום המינימלי של וקטור ביחס לאופרטור.

הערה באופן שקול ניתן להוכיח כי הפולינום המינימלי מוגדר היטב גם עבור מטריצות.

סימון נסמן את הפולינום המינימלי של f ב- μ_f ושל A ב- μ_A.

הערה נשים לב כי $\mu_f\mid\chi_f$ מקיילי המילטון והוכחת היחידות הנ"ל.

ראינו שבמקרה של הפולינום האופייני, הוא שווה מעל כל שדה, אבל זה מפני שהוא התקבל על ידי חישוב גולמי. עם זאת, הפולינום המינימלי מוגדר ע"י תכונה מסויימת, אם כן, האם הפולינום המינימלי שווה מעל שדות שונים?

טענה יהיו $K \supseteq F$ שדות, $v_1, \ldots, v_k \in F^n$ בת"ל מעל F. אזי $v_1, \ldots, v_k$ בת"ל מעל K.

הוכחה: נשלים את $v_1, \ldots, v_k$ לבסיס בעזרת $v_{k+1}, \ldots, v_n \in F^n$. נגדיר $A = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ v_1 & \cdots & v_n \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} \in M_n(F)$. A הפיכה, ולכן קיימת $A^{-1} \in M_n(F)$ כך ש- $A^{-1}A = I_n$ אבל $A, A^{-1} \in M_n(K)$ ועדיין מתקיים $A^{-1}A = I_n$ ולכן A הפיכה כמטריצה מעל K ולכן השורות של A בת"ל ובפרט $v_1, \ldots, v_k$ בת"ל מעל K. ■

טענה יהיו $K \supseteq F$ שדות ו-$A \in M_n(F)$. נסמן μ_A^F את הפולינום המינימלי של A מעל F ו-μ_A^K את הפולינום האופייני של A מעל K אזי $\mu_A^F = \mu_A^K$.

הוכחה: ממינימליות μ_A^K ו-$\mu_A^F(A) = 0$ ו- $\mu_A^F \in K[x]$ אזי $\mu_A^K \mid \mu_A^F$ ולכן $\deg \mu_A^K \leq \deg \mu_A^F$. כדי לסיים, מספיק להראות כי $\deg \mu_A^F = \deg \mu_A^K$. נשים לב שלא נוכל לעשות את אותו הדבר רק הפעם בסדר הפוך, כי לא בהכרח ש- $\mu_A^K \in F[x]$. נסמן

$$m = \deg \mu_A^K, l = \deg \mu_A^F$$

נניח בשלילה כי $m < l$. מהגדרת הפולינום המינימלי, קיים צירוף לינארי לא טריוויאלי $\sum_{i=0}^{m} \alpha_i A^i = 0$ כך ש- $\alpha_i \in K$. בפרט, $\left\{A^i : 0 \leq i \leq m\right\}$ ת"ל מעל K. אבל אפשר לראות את A^i כוקטורים ב- F^{n^2} (כי איבריה ב-F) ולכן $\left\{A^i : 0 \leq i \leq m\right\}$ ת"ל מעל F. זה אומר שיש $\beta_i \in F$ כך ש- $\sum_{i=0}^{m} \beta_i A^i = 0$, כלומר מצאנו פולינום לא טריוויאלי מדרגה m מעל F שמאפס את A בסתירה לכך ש-μ_A^F הוא הפולינום המינימלי (אבל דרגת הפולינום החדש קטנה ממש ממנו). ■

משפט (אפיון של μ_f) μ_f הוא הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית $P \in F[x]$ כך ש- $P \mid \min_v^f$, לכל $0 \neq v \in V$.

הוכחה: $P(f) = 0$ אם"ם $P(f)(v) = 0$, $\forall v \in V$, אם"ם $P \mid \min_v^f$, $\forall v \in V$. לכן P מתוקן מדרגה מינימלית כך ש- $P(f) = 0$ אם"ם P מתוקן מדרגה מינימלית כך ש- $P \mid \min_v^f$, לכל $0 \neq v$. ■

מסקנה μ_f הוא המכפלה המשותפת המינימלית (lcm) של כל הפולינומים המינימליים של וקטורים ב-V.

משפט יהי $f : V \to V$, V מ"ו נ"ס מעל F.

(i) $\mu_f \mid \chi_f$.

(ii) כל ע"ע של f הוא שורש של μ_f.

(iii) כל שורש של μ_F הוא ע"ע של f.

(iv) אם $F = \mathbb{C}$ או $F = \mathbb{R}$ אזי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\chi_f \mid (\mu_f)^n$.

הערה כל הטענות הנ"ל חלות באותו האופן בדיוק עבור מטריצות במקום אופרטורים.

הוכחה: (i) ברור מקיילי המילטון.

(ii) יהי $0 \neq v \in V$ כך ש- $f(v) = \lambda v$. לכן $(x-\lambda) = \min_v^f (x)$ (שכן $(x-\lambda)(V) = 0$ וגם לא ייתכן פולינום קבוע יאפס את הוקטור שכן הוא שונה מאפס) ולכן מאפיון של μ_f, $\min_v^f \mid \mu_f$ ולכן $(x-\lambda) \mid \mu_f$ ולכן $\mu_f(\lambda) = 0$ (ראינו בעבר כי זה אם"ם).

(iii) מהיות $\chi_f \mid \mu_f$, קיים $Q \in F[x]$ כך ש- $\chi_f(x) = Q(x)\mu_f(x)$ ולכן

$$\chi_f(\lambda) = Q(\lambda)\underbrace{\mu_f(\lambda)}_{0} = 0$$

לכן λ שורש של χ_f ולכן λ ע"ע של f.

(iv) נניח כי $F = \mathbb{C}$. מ-$(iii), (ii)$, קבוצת השורשים של μ_f היא קבוצת הע"ע של f. לכן מהמשפט היסודי של האלגברה, $\mu_f(x) = \prod_{i=1}^{m}(x-\lambda_i)$ כאשר $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq m\}$ הם הע"ע של f.

זאת משום, שמעל שכל פולינום ניתן לפרק ביחידות למכפלת פולינומים אי פריקים. מעל $\mathbb{C}$, פולינום אי פריק הוא לינארי או קבוע (מסקנה מהמשפט היסודי של האלגברה), ולכן כל פולינום מעל $\mathbb{C}$ ניתן להצגה כמכפלת גורמים לינאריים כפול קבוע.

באותו האופן, $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{m'}(x-\lambda_i)$ כאשר $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq m'\}$ הם הע"ע של f. נמנה את הע"ע בלי חזרות $\{\lambda_j : 0 \leq j \leq t\}$, לכן $\mu_f(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{a_i}$ וכן $\chi_f(x) = \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda)^{b_i}$. אפשר להראות כי $a_i \leq b_i$ כי $\chi_f \mid \mu_f$. נבחר n כך ש- $n + a_i \geq b_i$, לכל $1 \leq i \leq t$ (קיים כזה כי $\{b_i : 1 \leq i \leq t\}$ היא קבוצה סופית המוכלת בטבעיים, ולכן קיים לה מקסימום). לכן

$$\begin{aligned}
(\mu_f)^n &= \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{na_i} \\
&= \prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{b_i}\underbrace{\prod_{i=1}^{t}(x-\lambda_i)^{na_i-b_i}}_{Q(x)} \\
&= \chi_f(x)\,Q(x)
\end{aligned}$$

כלומר $\chi_f \mid (\mu_f)^n$.

נשים לב כי (i) עד (iv) חלים גם כן עבור $A \in M_n(F)$. נניח כי $F = \mathbb{R}$. נגדיר $A = [f]_B$ כאשר B בסיס כלשהו של V. לפי (iv) עבור A ו-$F = \mathbb{C}$, קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\chi_A^{\mathbb{C}} \mid \left(\mu_A^{\mathbb{C}}\right)^n$ אבל ראינו כבר כי $\chi_A^{\mathbb{R}} = \chi_A^{\mathbb{C}}$ וכן $\mu_A^{\mathbb{R}} = \mu_A^{\mathbb{C}}$ ולכן $\chi_f = \chi_A$ מחלק את $(\mu_f)^n = (\mu_A)^n$. ■

מסקנה יהי $f : V \to V$ כך ש- $\dim V = n$ ונניח כי ל-f n ע"ע שונים. אזי $\mu_f = \chi_f$.

הוכחה: נראה כי $\deg \mu_f \geq n$. נניח כי $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ הם הע"ע של f. לפי (2) מהמשפט הנ"ל, $x - \lambda_i$ מחלק את μ_f. לפי משפט הפירוק ביחידות של פולינום מעל שדה והעובדה ש- $x - \lambda_i$ אי פריקים ושונים זה מזה, אזי μ_f מתחלק במכפלה $\prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i)$ ולכן

$$n = \deg \prod_{i=1}^{n}(x-\lambda_i) \leq \deg \mu_f$$

אבל $\mu_f \mid \chi_f$ וכן $\deg \chi_f = n$ ושניהם מתוקנים ולכן $\chi_f = \mu_f$. ■

דוגמאות

1. נגדיר $f(v) = \lambda v$. אזי $\chi_f(x) = (x-\lambda)^n$ כאשר $n = \dim V$. אבל $\mu_f(x) = (x-\lambda)$ כי $f - \lambda \mathrm{id} = 0$. אז אם $n > 1$ מתקיים כי $\chi_f \neq \mu_f$.
2. $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. $\chi_A = x^2$. בגלל ש- $\mu_A \mid \chi_A$ אזי μ_A הוא x או x^2. אבל הוא אינו x כיוון ש- $A \neq 0$, לכן $\mu_A = x^2 = \chi_A$ אבל ל-A ע"ע והוא 0.

מסקנה קיום n ע"ע שונים הוא לא אם"ם $\chi_f = \mu_f$.

חלק ג' של ההרצאה

הגדרה יהי $f : V \to V$ במ"ו נ"ס ו-$\lambda \in F$ ע"ע של f. נגדיר את הריבוי הגאומטרי של λ להיות $m_\lambda^{\text{geom}} = \dim V_\lambda$.

משפט $(x-\lambda)^{m_\lambda^{\text{geom}}} \mid \chi_f$ עבור כל λ ע"ע.

הוכחה: נזכור כי V_λ הוא מרחב f-אינווריאנטי ולכן $\chi_{f|_{V_\lambda}} \mid \chi_f$. אבל $f|_{V_\lambda}$ הוא פשוט כפל בסקלר λ ובנוסף ראינו כי

$$\chi_{f|_{V_\lambda}} = (x-\lambda)^{m_\lambda^{\text{geom}}}$$

■

הגדרה יהי $f : V \to V$ במ"ו נ"ס ו-$\lambda \in F$ ע"ע של f. נגדיר את הריבוי האלגברי של λ להיות

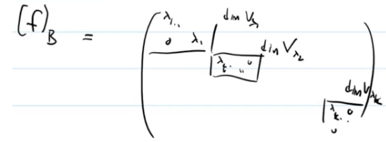
$$m_\lambda^{\text{alg}} = \max \left\{ m \in \mathbb{N} : (x-\lambda)^m \mid \chi_f \right\}$$

הערה m_λ^{alg} מוגדר היטב שכן לא ייתכן כי פולינום ממעלה הגדולה מ-$\deg \chi_f < \infty$ יחלק את χ_f.

מסקנה $m_\lambda^{\text{geom}} \leq m_\lambda^{\text{alg}}$.

טענה יהי $f : V \to V$ במ"ו נ"ס אזי f ניתן ללכסון אם"ם χ_f הוא מכפלה של פולינומים לינאריים וגם לכל λ ע"ע, $m_\lambda^{\text{alg}} = m_\lambda^{\text{geom}}$.

הוכחה: $\Leftarrow$: ראשית נוכיח כי χ_f הוא מכפלת גורמים לינאריים. ראינו בעבר כי f ניתן ללכסון אם"ם $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ הם הע"ע של F. נניח כי $B_i \subseteq V_{\lambda_i}$ בסיסים, לכל $1 \leq i \leq k$. אז $i \neq j \to B_i \cap B_j = \varnothing$ וכן $B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ בסיס של V. כלומר נקבל



לכן $\chi_f\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)^{\dim V_{\lambda_i}=m_\lambda^{\text{geom}}}$ $(*)$.

עתה נוכיח כי $m_\lambda^{\text{alg}}=m_\lambda^{\text{geom}}$. נניח כי λ ע"ע. נניח בשלילה כי $m_\lambda^{\text{geom}}<m=m_\lambda^{\text{alg}}$. לכן $\chi_f \mid \left(x-\lambda\right)^m$. לכן קיים $Q\in F\left[x\right]$ כך ש- $\chi_f\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^m Q\left(x\right)$ אבל מפירוק פולינום ביחידות לגורמים אי פריקים נקבל כי $Q\left(x\right)=\underset{\text{אי פריק}}{\underline{\left(\quad\right)}}\dots\underset{\text{אי פריק}}{\underline{\left(\quad\right)}}$ ולכן

$$\chi_f\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^m\underset{\text{אי פריק}}{\underline{\left(\quad\right)}}\dots\underset{\text{אי פריק}}{\underline{\left(\quad\right)}}$$

אבל $m>m_\lambda^{\text{geom}}$ ולכן בהצגה $(**)$ החזקה של $\left(x-\lambda\right)$ גדולה ממש מזו ב-$(*)$, כלומר קיבלנו שתי הצגות שונות של פירוק לגורמים אי פריקים בסתירה ליחידות.

$\Rightarrow$: נניח כי $\chi_f\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\alpha_i\right)^{l_i}$ (כאשר $i\neq j\to\alpha_i\neq\alpha_j$) וכן שלכל λ ע"ע $m_\lambda^{\text{alg}}=m_\lambda^{\text{geom}}$. נשים לב כי $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ הם בדיוק הע"ע של f. בנוסף, $l_i=m_{\alpha_i}^{\text{alg}}$. בגלל פירוק פולינומים יחיד לגורמים אי פריקים.

$$\dim V=n=\deg\chi_f=\sum_{i=1}^{k}l_i=\sum_{i=1}^{k}m_{\alpha_i}^{\text{alg}}=\sum_{i=1}^{k}m_{\alpha_i}^{\text{geom}}=\sum_{i=1}^{k}\dim V_{\alpha_i}$$

אבל לפי משפט מההרצאה הקודמת נובע ש-f ניתן ללכסון. ■

תרגול

תרגיל $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&2&1\\2&-2&1\end{pmatrix}$ מצאו את כל הע"ע והמרחבים העצמיים של A.

פתרון נמצא מתי הביטוי $\det\left(xI-A\right)=\det\begin{pmatrix}x-2&-2&-3\\-1&x-2&-1\\-2&2&x-1\end{pmatrix}$ מתאפס. נדרג את המטריצה

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}x-2&-2&-3\\-1&x-2&-1\\-2&2&x-1\end{pmatrix}&\xrightarrow{R_1\to R_1+R_3}\det\begin{pmatrix}x-4&0&t-4\\-1&x-2&-1\\-2&2&x-1\end{pmatrix}\\&=\left(x-4\right)\det\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&x-2&-1\\-2&2&x-1\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\left(t-4\right)\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&x-2&0\\-2&2&x-1\end{pmatrix}\\&=\left(x-4\right)\left(\left(x-2\right)\det\begin{pmatrix}1&1\\-2&x-1\end{pmatrix}\right)=\left(x-4\right)\left(x-2\right)\left(x+1\right)\end{aligned}$$

לכן הע"ע הם $-1,2,4$.

בגלל שלא משמעם לנו נעתיק את הפתרון למרחבים העצמיים מהתרגול, ונקבל

$$V_4=\text{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}8\\5\\2\end{pmatrix}}_{b_1}\right\},V_2=\text{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}}_{b_2}\right\},V_{-1}=\text{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}}_{b_3}\right\}$$

נגדיר $B=(b_1,b_2,b_3)$ ולכן $[T_A]_B=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$. אם כן, $A=[T_A]_E=[\mathrm{id}]_E^B[T_A]_B[\mathrm{id}]_B^E$, אבל $[\mathrm{id}]_E^B$ היא המטריצה שעמודותיה הן הבסיס B. נאמר בנוסף ש-A היא לכסינה.

טענה יהיו $f\in\hom(V,V)$ במ"ו נ"ס, והע"ע השונים של f, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$. אזי f לכסין אם"ם $\dim V=\dim V_{\lambda_1}+\dots+\dim V_{\lambda_k}$.

הוכחה: הסכום $\sum_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$ הוא ישר וכן $\dim\left(\sum_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}\right)=\sum_{i=1}^{k}\dim V_{\lambda_i}$ ולכן מתקיים $\oplus_{i=1}^{k}V_{\lambda_i}$ אם"ם $\dim V=\sum_{i=1}^{k}\dim V_{\lambda_i}$. ■

דוגמאות

1. נגדיר $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. האם A לכסינה?
$\chi_A(x)=\det\begin{pmatrix}x&-1&0\\0&x&0\\0&0&x-1\end{pmatrix}=x^2(x-1)$ לכן הע"ע הם $0,1$. $V_0=\ker\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$ וגם

$$V_1=\ker\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}:x-y=0,y=0\right\}=\mathrm{sp}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן $\dim V_0+\dim V_1=2\neq\dim V$ לכן A לא לכסינה.

2. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y-z\\x+2y+z\\-x+y+2z\end{pmatrix}$. בתרגול הקודם ראינו כי המרחבים העצמיים הם $V_0=\mathrm{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}}_{b_3}\right\}$, $V_3=\mathrm{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}}_{b_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}_{b_2}\right\}$.
מתקיים $\dim V_0+\dim V_3=\dim V$ ולכן f לכסין ואכן ראינו שעבור $B=(b_1,b_2,b_3)$ נקבל $[f]_B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

הגדרה יהי $f\in\hom(V,V)$. נגדיר $\varphi_f:\hom(V,V)\to\hom(V,V)$ המוגדר ע"י $\varphi_f(T)=f\circ T$.

הערה זהו אופרטור לינארי כי הרכבה של אופרטורים לינאריים גם היא אופרטור לינארי.

הערה מעתה נסתכל גם על אופרטורים לינאריים כוקטורים (ב-$\hom(V,V)$).

הגדרה יהי $f\in\hom(V,V)$. נגדיר את <u>הפולינום המינימלי</u> של f ע"י $\mu_f=\min_{\mathrm{id}_V}^{\varphi_f}$ (כאשר id_V הוא הזהות כוקטור ב-$\hom(V,V)$).

תכונות

נסמן $\mu_f=\sum_{i=1}^{n}a_ix^i$.

1. $\mu_f(f)=0$, שכן $\mu_f(f)=\sum_{i=1}^{n}a_if^i=\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_f(\mathrm{id}_V)=\min_{\mathrm{id}_V}^{\varphi_f}(\mathrm{id}_V)\equiv 0$.
2. $\mu_f(f)(v)=0$, $\forall v\in V$, ולכן $\min_v^f\mid\mu_f$, $\forall v\in V$.

תרגיל מצאו את הפולינום המינימלי של f. $f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\x\\y\end{pmatrix}$. מהו הפולינום המינימלי של f?

פתרון $A=[T]_E=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$. $\{A,I\}$ בת"ל, ובנוסף $A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$ ולכן גם $\{I,A,A^2\}$ בת"ל. אבל $A^3=I$ (בגלל ש-$f^3=\mathrm{id}$) לכן הפולינום המינימלי הוא $\mu_f=x^3-1$. ראינו בעבר כי עבור $v_0=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\min_{v_0}^f(x)=x^2+x+1$ וניתן לראות ש-$\min_{v_0}^f\mid\mu_f$ (גם בגלל התכונה וגם בגלל ש-$x^3-1=\left(x^2+x+1\right)(x-1)$).

הערה בהרצאה הגדרנו את הפולינום המינימלי קצת אחרת, אבל ההגדרות שקולות (בהמשך).

דוגמה תהי $A\in M_n(F)$ המוגדרת ע"י $[A]_{ij}=1$ (מטריצה מלאה ב-1-ים). האם A לכסינה?

פתרון נשים לב כי כל שורה היא כפולה של השורה הראשונה, ולכן $\text{rank}A=1$ ולכן $\dim\ker A=n-1$ ובנוסף אם נציב את $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ נקבל שהוא ו"ע עם ע"ע n. כבר קיבלנו $n-1$ וקטורים במרחב העצמי של 0 ועוד וקטור במרחב העצמי של n, כלומר קיבלנו בסיס של ו"ע, ולכן A לכסינה. נדגים זאת עם הפולינום האופייני.

$$\begin{aligned}\chi_A(x)&=\det\begin{pmatrix}1-x & 1 & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & 1\\ 1 & 1 & 1-x\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow[\forall i\in[n]]{C_i\to C_i-C_1}\det\begin{pmatrix}x-1 & -x & \cdots & -x\\ -1 & x & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & x\end{pmatrix}\\ &\xrightarrow[\forall i\in[n]]{R_1\to R_1+R_i}\det\begin{pmatrix}x-n & 0 & \cdots & 0\\ -1 & x & \cdots & 0\\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & x\end{pmatrix}\\ &\overset{\text{תחתונהמשולשית}}{=}(x-n)\,x^{n-1}\end{aligned}$$

הע"ע וכן השורשים של χ_A הם $0,n$.

$$V_0=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}:x_1+\cdots+x_n=0\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ -(x_1+\cdots+x_n)\end{pmatrix}\right\}=\text{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}}_{b_1},\underbrace{\begin{pmatrix}0\\1\\ \vdots\\0\\-1\end{pmatrix}}_{b_2},\ldots,\underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\1\\-1\end{pmatrix}}_{b_{n-1}}\right\}=V_0$$

נסמן $b_n=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$ ונשים לב כי מתקיים $Ab_n=nb_n$. נסמן $B=(b_1,\ldots,b_n)$. לכן $[T_A]_B=\begin{pmatrix}n & & 0\\ & 0 & \\ & & \ddots\\ 0 & & 0\end{pmatrix}$, כלומר הצלחנו לצמצם מטריצה עם n^2 ערכים למטריצה בעלת ערך אחד בלבד שאינו אפס!

שבוע $\mathbb{VI}$ | צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה אופרטור $f:V\to V$ נקרא <u>נילפטונטי</u> אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f^k=0$. $A\in M_n(F)$ היא נלפוטנית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $A^n=0$)

הערה f נילפוטנטי אם"ם $[f]_B$ נילפ' עבור בסיס B כלשהו.

דוגמה $A=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & 0\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$. $A^{n}=0$. יהיו $e_{1},\ldots,e_{n}\in F^{n}$ הבסיס הסנטדרטי. לכן $A^{l}e_{i}=\begin{cases}e_{l+i} & l+i\le n\\ 0 & l+i>n\end{cases}$. לכן לכל $1\le i\le n$ מתקיים $A^{n}e_{i}=0$ ולכן $A^{n}=0$.

טענה יהי $f\neq0$ אופרטור נילפ' אזי f לא ניתן ללכסון.

הוכחה: נניח כי λ ע"ע של f. כלומר שקיים $0\neq v\in V$ שעבורו $f\left(v\right)=\lambda v$. נניח כי $f^{n}=0$.

$$0=f^{n}\left(v\right)=\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(v\right)\right)\right)}_{\text{פעמים } n}=\lambda f\left(\underbrace{f\left(f\left(\ldots f\left(v\right)\right)\right)}_{\text{פעמים } n-1}\right)=\lambda^{n}v$$

ולכן הע"ע שייתכן ל-f הוא $\lambda=0$. אם f היה לכסין אז היה בסיס B של ו"ע, כלומר $\forall v\in V$, $f\left(v\right)=0$ בסתירה לכך ש- $f\neq0$.

בנוסף, בעזרת האפיון מההרצאה הקודמת יכולנו לטעון כי אם f היה לכסין אז $m_{0}^{\text{geom}}=m_{0}^{\text{alg}}$ וגם $\chi_{f}\left(x\right)=x^{\dim V}$ ולכן $m_{0}^{\text{alg}}=\dim V$ ולכן $m_{0}^{\text{geom}}=\dim V$ ולכן $V_{0}=\ker f=V$ ולכן $f=0$. ■

הגדרה יהי f אופרטור נילפוטנטית דרגת הנילפוטנטיות של f היא ה-$k\in\mathbb{N}$ המינימלי כך ש- $f^{k}=0$. עבור $0\neq v\in V$, הגובה של f הוא ה-l המינימלי שעבורו $f^{l}\left(v\right)=0$.

הערה הגובה של $v\le$ דרגת הנילפ' של f.

טענה נניח כי $v\in V$ מגובה l. אזי $\left\{ v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ בת"ל.

הוכחה: v מגובה l ולכן $f^{l}\left(v\right)=0$. לכן $p\left(x\right)=x^{l}$ מקיים $p\left(f\right)\left(v\right)=0$. לכן $p\mid\min_{v}^{f}$ ולכן הייצוג היחיד של $\min_{v}^{f}$ כמכפלת אי פריקים חייב להיות מהצורה $x^{l'}$ כאשר $l'\le l$. אבל אם $l'<l$ אז יוצא ש- $f^{l'}\left(v\right)=0$ בסתירה לכך ש- l הוא הגובה (ולכן המינימלי) של v. לכן $\min_{v}^{f}=x^{l}$.

אם $\left\{ v,\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ היו ת"ל אז היה פולינום מדרגה קטנה-שווה ל-$l-1$, $Q\left(x\right)=0$ כך ש- $Q\left(f\right)\left(v\right)=0$. כלומר אם קיימים $\alpha_{0},\ldots,\alpha_{l-1}\in F$ כך ש- $\sum\alpha_{i}f^{i}\left(v\right)=0$ וקיים j כך ש- $\alpha_{j}\neq0$ אז $Q\left(x\right)=\sum\alpha_{i}x^{i}$ בסתירה למינימליות $\min_{v}^{f}$.

לחלופין, אם נניח כי $\alpha_{0}v+\cdots+\alpha_{l-1}f^{l-1}\left(v\right)=0$ ונפעיל את f^{l-1} על שני האגפים נקבל

$$\alpha_{0}f^{l-1}+\underbrace{\alpha_{1}f^{l}\left(v\right)+\cdots+\alpha_{l-1}f^{2l-2}\left(v\right)}_{0}=\alpha_{0}f^{l-1}\left(v\right)=0$$

ולכן $\alpha_{0}=0$. נעשה זאת באותו האופן עבור $l-2$ עד 1 ולקבל שכל המקדמים מתאפסים ולכן הקבוצה בת"ל. ■

מסקנה $\left\{ v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ היא בת"ל מסקימלית (בדומה לבסיס במרחב ציקלי) עבור l הגובה של v ביחס לאופרטור הנילפ' f וגם

$$M_{l}\left(F\right)\ni\left[f|_{Z\left(f,v\right)}\right]_{\left(v,\ldots f^{l-1}\left(v\right)\right)}=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & 0\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

הגדרה מטריצה כנ"ל נקרא בלוק ז'ורדן נילפוטנטי אלמנטרי מגודל l ומסמנים אותה ב- $J_l\left(0\right)$.

הערה ראינו כי $J_l\left(0\right)$ היא נילפוטנטית מדרגה l.

הערה אם C בסיס סדור כך ש- $\left[f\right]_C=J_l\left(0\right)$ אז f נילפוטנטי ובנוסף $C=\left(v,\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right)$.

הגדרה יהי f אופרטור נילפ'. שרשרת עבור f היא סדרת וקטורים מהצורה $v,\ldots,f^{l-1}\left(v\right)$ כך ש- l הוא הגובה של v ביחס ל-f.

הערה אם $0\neq v\in V$ אז יש ל-$Z\left(f,v\right)$ בסיס שהוא שרשרת בגודל בגובה של v. אם נשלים את הבסיס הזה B לבסיס B' של V נקבל

$$\left[f\right]_{B'}=\left(\begin{array}{c|c}J_l\left(0\right) & *\\ \hline 0 & *\end{array}\right)$$

אנחנו נרצה להגיע לכך שכל הייצוג הוא בלוקי ז'ורדן כאלה.

חלק ב' של ההרצאה

טענה יהיו $v\neq0$ ו- $0\neq u\in Z\left(f,v\right)$ אז נסמן l_u,l_v הגבהים של u,v בהתאמה. אזי $l_u\leq l_v$ ובנוסף $f^{l_u-1}\left(u\right)=af^{l_v-1}\left(v\right)$ כאשר $a\in F$.

הוכחה: מהיות $u\in Z\left(f,v\right)=\mathrm{sp}\underbrace{\left\{v,f\left(v\right),\ldots,f^{l_v-1}\left(v\right)\right\}}_{\text{בסיס}}$ אזי קיימים $a_0,\ldots,a_{l_v-1}\in F$ שעבורם

$$u=a_0v+\cdots+a_{l_v-1}f^{l_v-1}\left(v\right)$$

יהי $0\leq r\leq l_v-1$ מינימלי שעבורו $a_r\neq0$. נוכיח כי $l_u=l_v-r$. לשם כך נוכיח כי $f^{l_v-r}\left(u\right)=0$ ו- $f^{l_v-r-1}\left(u\right)\neq0$.

$$\begin{aligned}f^{l_v-r}\left(u\right)&=f^{l_v-r}\left(a_rf^r\left(v\right)+\cdots+a_{l_v-1}f^{l_v-1}\left(v\right)\right)\\&=a_rf^{l_v-r+r}\left(v\right)+\cdots+a_{l_v-1}f^{l_v-r+l_v-1}\left(v\right)\end{aligned}$$

אבל l_v הוא הגובה של v ולכן כל הגורמים האלה מתאפסים ולכן קיבלנו את החלק הראשון שרצינו.

$$\begin{aligned}f^{l_v-r-1}\left(u\right)&=f^{l_v-r-1}\left(a_rf^r\left(v\right)+\cdots+a_{l_v-1}f^{l_v-1}\left(v\right)\right)\\&=a_rf^{l_v-r-1+r}\left(v\right)+\cdots+a_{l_v-1}f^{l_v-r-1+l_v-1}\left(v\right)\\&=a_rf^{l_v-1}\left(v\right)+0+\cdots+0\\&\overset{a=a_r}{=}af^{l_v-1}\left(v\right)\neq0\end{aligned}$$

■

טענה יהי $V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$ אזי זהו סכום ישר אם"ם $\left\{f^{l_{v_i}-1}\left(v_i\right):1\leq i\leq k\right\}$ בת"ל.

הערה $f^{l_{v_i}-1}(v_i)$ הוא האיבר האחרון בשרשרת של v_i.

הוכחה: $\Leftarrow$: יהיו $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$ כך ש- $\sum\alpha_i f^{l_{v_i}-1}(v_i)=0$ אבל מהיות הסכום הישר אזי $\alpha_i f^{l_{v_i}-1}(v_i)=0$ לכל $1\le i\le k$ אבל הוקטורים שונים מאפס ולכן $\alpha_i=0$ ולכן הוקטורים בת"ל.

$\Rightarrow$: נניח בשלילה שזהו לא סכום ישר, לכן קיימים $u_i\in Z(f,v_i)$ לכל $1\le i\le k$ כך ש- $\sum u_i=0$. אבל יש j שעבורו $u_j\neq 0$. בה"כ מתקיים $l_{u_1}\ge\dots\ge l_{u_k}$. נסמן $l=l_{u_1}$ וכן $t=\max\{1\le i\le k: l_{u_i}=l\}$.

$$l=l_{u_1}=l_{u_2}=\dots=l_{u_t}>l_{u_{t+1}}>\dots>l_{u_k}$$

מהטענה הקודמת נקבל כי $f^{l-1}(u_i)=a_i f^{l_{v_i}-1}(v_i)$ לכל $1\le i\le t$ כך ש- $0\neq a_i\in F$. נפעיל את f^{l-1} אל שני האגפים של $\sum u_i=0$ ונקבל

$$0=f^{l-1}\left(\sum u_i\right)=f^{l-1}\left(\sum_{i=1}^{t}u_i\right)=\sum a_i f^{l_{v_i}-1}(v_i)$$

ולכן קיבלנו צירוף לינארי לא טריוויאלי של הוקטורים $\left\{f^{l_{v_i}-1}(v):1\le i\le t\right\}$ ובפרט זו קבוצה ת"ל המוכלת בקבוצה בת"ל סתירה. ■

טענה יהיו $v_1,\dots,v_k\neq 0$ יהי $V=Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_k)$ אינו סכום ישר. אזי אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימת:

(i) קיים $1\le r\le k$ כך ש- $V=Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_{r-1})+Z(f,v_{r+1})+\dots+Z(f,v_k)$ כלומר שאפשר להסיר את $Z(f,v_r)$ מהסכום.

(ii) קיים $1\le r\le k$ וכן $v'\neq 0$ כך ש-

$$V=Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_{r-1})+Z(f,v')+Z(f,v_{r+1})+\dots+Z(f,v_k)$$

כלומר אפשר להחליף את v_r ב-v' ובנוסף $\dim Z(f,v_r)>\dim Z(f,v')$.

הוכחה: מהטענה הקודמת, ומכך שהסכום אינו ישר, אזי $\left\{f^{l_{v_i}-1}(v_i):1\le i\le k\right\}$ ת"ל. בה"כ $l_{v_1}\ge l_{v_2}\ge\dots\ge l_{v_k}$. נסמן $k_i=l_i-1$. לכן $\left\{f^{k_i}(v_i):1\le i\le k\right\}$ ת"ל ולכן קיימים $a_1,\dots,a_k\in F$ לא טריוויאליים כך ש- $\sum a_i f^{k_i}(v_i)=0$. יהי $1\le r\le k$ מקסימלי שעבורו $a_r\neq 0$. לכן

$$0=\sum_{i=1}^{r}a_i f^{k_i}(v_i)=f^{k_r}\left(\sum_{i=1}^{r}a_i f^{k_i-k_r}(v_i)\right)$$

נסמן $v'=\sum\limits_{i=1}^{r}a_i f^{k_i-k_r}(v_i)$.

אם $v'=0$ אזי $v'=a_1 f^{k_1-k_r}(v_1)+\dots+a_r v_r$ אבל מהיות $a_r\neq 0$ אזי $v_r\in Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_{r-1})$ ובגלל ש- $Z(f,v_r)$ הוא המרחב האינווריאנטי המינימלי שמכיל את v_r וכן שהסכום $Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_{r-1})$ אינווריאנטי ל-f אז

$$Z(f,v_r)\subseteq Z(f,v_1)+\dots+Z(f,v_{r-1})$$

ולכן

$$V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_r\right)=\underbrace{Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_{r-1}\right)}_{\substack{\cup| \\ Z\left(f,v_r\right)}}+Z\left(f,v_{r+1}\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$$

ולכן קיבלנו את אפשרות (1) בטענה.

אם $v'\neq 0$ אזי $v'=a_1f^{k_1-k_r}\left(v_1\right)+\cdots+a_rv_r$ ולכן $a_rv_r=v'-\left(a_1f^{k_1-k_r}\left(v_1\right)+\cdots+a_{r-1}v_{r-1}\right)$ אבל $a_r\neq 0$ ולכן

$$v_r=\frac{v'-\left(a_1f^{k_1-k_r}\left(v_1\right)+\cdots+a_{r-1}v_{r-1}\right)}{a_r}$$
$$\Downarrow$$
$$v_r\in Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_{r-1}\right)+\operatorname{sp}\left\{v'\right\}$$
$$\Downarrow$$
$$Z\left(f,v_r\right)\subseteq Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_{r-1}\right)+Z\left(f,v'\right)$$
$$\Downarrow$$
$$V=\underbrace{Z\left(f,v_1\right)+Z\left(f,v_{r-1}\right)+Z\left(f,v'\right)}_{\substack{\cup| \\ Z\left(f,v_r\right)}}+Z\left(f,v_{r+1}\right)+Z\left(f,v_r\right)$$

נוכיח כי $\dim Z\left(f,v'\right)<\dim Z\left(f,v_r\right)$. $\dim Z\left(f,v'\right)$ הוא הגובה של v' אבל $f^{k_r}\left(v'\right)=0$ (ראו למעלה) וכן $k_r=l_{v_r}-1$ ולכן הגובה של $v'\geq k_r>l_{v_r}=\dim Z\left(f,v_r\right)$ וזאת אפשרות (2). ■

הערה מההוכחה אפשר להגדיר אלגוריתם שמתחיל מסדרת שרשראות C_i, $1\leq i\leq k$ כך ש- $V=\operatorname{sp}\bigcup\limits_{i=1}^{k}C_i$ ולקבל סדרת שרשראות B_i, $1\leq i\leq k'$ כך ש- $V=\operatorname{sp}\bigcup\limits_{i=1}^{k'}B_i$ וכן B_i זרות בזוגות ($i\neq j\Rightarrow B_i\cap B_j=\varnothing$) וכן $\bigcup B_i$ בת"ל.

משפט (קיום צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי) יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי, V מ"ו נ"ס מעל F. אזי קיימים $0\neq v_1,\ldots,v_k\in V$ כך ש- $V=Z\left(f,v_1\right)\oplus\cdots\oplus Z\left(f,v_k\right)$.

הוכחה: ראשית, נשים לב כי $V=Z\left(f,e_1\right)+\cdots+Z\left(f,e_n\right)$ כאשר $e_1,\ldots,e_n\in V$ בסיס ל- V (כאשר $n=\dim V$). לכן ניתן להציג את V כסכום של מרחבים ציקליים. עתה, ניקח הצגה כזו שעבורה מספר המחוברים הוא מינימלי ומתוך ההצגות הללו ניקח את זאת שסכום המימדים של המחוברים שלה הוא מינימלי. כלומר זו הצגה מהצורה $V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$ כך ש- k מינימלי וכן $\sum\limits_{i=1}^{k}\dim Z\left(f,v_i\right)$ מינימלי (ביחס לשאר ההצגות עם מספר המחוברים הללו). זהו סכום ישר מטענה 3. שכן אם הוא לא היה אפשר היה להקטין את מספר המחוברים (שזה לא אפשרי) או להקטין את סכום המימדים. אבל זה לא אפשרי שכן אם היה ניתן לצמצם אותו, היינו מקבלים הצגה עם אותו מספר מרחבים מחוברים אבל סכום מימדים נמוך יותר שזו סתירה למינימליות מתוך קבוצת המנימלים במספר האיברים.

נשים לב שהמינימום שדרשנו פה הוא לא גלובלי אלא תלוי, כלומר קודם בחרנו מספר מחוברים מצומצם ורק אז בחרנו מתוך הקבוצה הזו סכום מימדים מצומצם וזה מספיק. לא נוכל לדרוש את שני התנאים באופן גלובלי כי לא מובטח לנו קיום עבור הצגה כזו. ■

מסקנה לכל $1 \leq i \leq k$, השרשרת $C_i\left(v_i, \dots f^{l_i-1}(v_i)\right)$ מהווה בסיס ל-$Z(f, v_1)$ ולכן $C = \bigcup\limits_{i=1}^{k} C_i$ בסיס של V וכן $i \neq j \Rightarrow C_i \cap C_j = \varnothing$ ומתקיים

$$[f|_U]_B = \begin{pmatrix} \boxed{J_{l_1}(0)} & & & 0 \\ & \boxed{J_{l_2}(0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{l_k}(0)} \end{pmatrix}$$

ובעזרת סידור אינדקסים מחדש ניתן להניח כי $l_1 \geq \dots \geq l_k$. למטריצה זו נקרא בלוק ז'ורדן נילפוטנטי.

מסקנה אם f נילפ' אזי $\chi_f = x^{\dim V}$.

הוכחה: נשים לב כי אם $[f]_B$ היא בלוק ז'ורדן נילפ' אזי $xI - [f]_B$ היא משולשית תחתונה ולכן $\chi_f(x) = \det(xI - [f]_B)$ הוא מכפלת האיברים באלכסון שזה פשוט $x^{\dim V}$ שכן כל בלוקי הז'ורדן הסטנדרטיים האלמנטריים הם מתחת לאלכסון ולכן לא משפיעים עליו או מה שמעליו.

בנוסף, אם $F = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ אז אפשר לראות זאת בלי צורת ז'ורדן. כי מהיות f נילפ' אזי $\mu_f \mid x^m$ כאשר m הוא דרגת הנילפ' ולכן $\mu_f = x^k$ עבור $k \leq m$. ובנוסף קיים $\chi_f \mid (\mu_f)^l = x^{kl}$ ולכן $\chi_f = x^{n'}$ עבור $n' \leq kl$ אבל $\deg \chi_f = \dim V$ ולכן $n' = \dim V$. ■

סימון תהיינה $C_1, \dots, C_k$ מטריצות כך ש-$C_i \in M_{l_i}(F)$, $\sum\limits_{i=1}^{k} l_i = n$. נסמן ב-$\text{Block}(C_1, \dots C_k)$ את מטריצה הבלוקים שהבלוקים בה הם $C_1, \dots C_k$.

משפט (יחידות צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי) יהי $f: V \to V$ אופרטור נילפ' כאשר V מ"ו נ"ס מעל F ונניח כי B, C בסיסים כך ש- $[f]_B, [f]_C$ הן בלוק ז'ורדן נילפ' אזי $[f]_B = [f]_C$, כלומר אם $A, B \in M_n(F)$ בלוקי ז'ורדן נילפ' דומות אזי $A = B$.

הוכחה: נסמן ב-N_l^A את מספר הבלוקים מגודל l שמופיעים ב-A (מספר המופעים של $J_l(0)$) (ובאותו האפון עבור B).

$$(J_l(0))^m e_i = \begin{cases} e_{i+m} & i+m \leq l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

כאשר $e_1, \dots, e_l$ הבסיס הסטנדרטי ל-F^l. לכן $\operatorname{Im}(J_l(0))^m = \operatorname{sp}\{e_{m+1}, \dots, e_l\}$ כאשר $m+1 \leq l$ ואחרת 0. לכן

$$\operatorname{rank}(J_l(0))^m = \dim \operatorname{Im}(J_l(0))^m = \begin{cases} l-m & m \leq l \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ובאופן כללי, אם $C=\text{Block}\left(C_1,\ldots,C_k\right)$ אזי $C^m=\text{Block}\left(C_1^m,\ldots,C_k^m\right)$ וגם $\text{rank}C=\sum\limits_{i=1}^{k}\text{rank}C_i$. לכן

$$\text{rank}A^m=\sum_{i=1}^{k}\text{rank}\left(J_{l_i}\left(0\right)\right)^m=\sum_{l\geq m}N_l^A\left(l-m\right)=\sum_{l>m}N_l^A\left(l-m\right)$$

בנוסף, אם $B\sim A$ אזי גם $B^m\sim A^m$ (והאמת היא שגם עבור חזקות שונות אבל זה לא קשור) ולכן $\text{rank}A^m=\text{rank}B^m$ לכל m (מטריצות דומות הן בעלות דרגה שווה). מספיק שנראה שעבור A,B מתקיים לכל $1\leq l\leq n$ כי מספר הבלוקים מהצורה $J_l\left(0\right)$ ב-A זהה לזה ב-B, כלומר $N_l^A=N_l^B$.

נוכיח באינדוקציה יורדת על $n\geq l\geq 1$.

בסיס ($l=n$):

$$N_n^B=\cdots=\text{rank}B^{n-1}\overset{\text{דומות}}{=}\text{rank}A^{n-1}=\sum_{l>n-1}N_l\left(l-(n-1)\right)=N_n^A\cdot 1$$

צעד ($l+1,\ldots,n\to l$):

$$\begin{aligned}N_l^B+\sum_{t>l}N_t^B\left(t-(l-1)\right)&=\cdots=\text{rank}B^{l-1}\\&=\text{rank}A^{l-1}\\&=\sum_{t\geq l}N_t^B\left(t-(l-1)\right)\\&=N_l^A+\sum_{t\geq l+1}N_t^A\left(t-(l-1)\right)\end{aligned}$$

אבל מה"א $N_t^A=N_t^B$, $\forall t\geq l+1$ ולכן מחוק הצמצום נקבל כי $N_l^A=N_l^B$. ∎

חלק ג של ההרצאה

טענה אם $R=Q-PD$ אז עבור $T\in F\left[x\right]$ מתקיים $T\mid P,Q\iff T\mid P,R$.

הוכחה: $\Leftarrow$: קיימים $S,S'\in F\left[x\right]$ כך ש- $Q=T\cdot S$ וכן $P=T\cdot S'$ לכן

$$R=Q-PD=TS-TS'D=T\left(S-S'D\right)$$

$\Rightarrow$: באופן דומה. ∎

משפט (הלמה של בזו, למת ה-gcd) נניח כי $P,Q\in F\left[x\right]$ כך ש- $P,Q\neq 0$ אז קיים $H\in F\left[x\right]$ שעבורו $H\mid P,Q$ (i).

(ii) אם $H' \in F[x]$ מקיים $H' \mid P, Q$ אז $H' \mid H$.

(iii) קיימים $A, B \in F[x]$ כך ש- $H = AP + BQ$.

הוכחה: נגדיר $n = \min\{\deg P, \deg Q\}$. נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס ($n = 0$). לכן P או Q הוא קבוע. בה"כ P קבוע. לכן $P \mid Q$ ואפשר לבחור $H = P$.

צעד ($1, \ldots, n-1 \to n$): בה"כ $\deg P \leq \deg Q$. נחלק את Q ב-P עם שארית, לכן קיימים $R, D \in F[x]$ כך ש-$Q = P \cdot D + R$ וגם $\deg R < \deg P$. אם $R = 0$ אז $Q = P \cdot D$ כלומר $P \mid Q$ לכן $H = P$ מקיים את תנאיי הלמה כי:

(i) $P \mid P, Q$.

(ii) אם $H' \mid P, Q$ אז $H' \mid P$.

(iii) נבחר $A = 1, B = 0$.

אחרת $R \neq 0$. נשים לב כי

$$\min\{\deg P, \deg Q\} = \deg P > \deg R \geq \min\{\deg R, \deg D\}$$

לכן מה"א קיים H שהמקיים את התנאים עבור P, R. נראה ש-H מקיים את תנאיי הלמה עבור P, Q.

(i) $H \mid P, R$ ולכן $H \mid P, Q$.

(ii) אם $H' \mid P, Q$ אז $H' \mid P, R$ ולכן מה"א $H' \mid H$.

(iii) קיימים $A, B \in F[x]$ כך ש- $H = AP + BR$ מה"א. לכן

$$\begin{aligned} H &= AP + BR \\ &= AP + B(Q - PD) \\ &= AP + BQ - BDP \\ &= \underbrace{(A - BD)}_{A'}P + \underbrace{B}_{B'}Q \end{aligned}$$

■

הערה אם $H_1, H_2 \in F[x]$ מתוקנים מקיימים את התנאים מהלמה אז $H_1 = H_2$. זאת משום ש-$H_2 \mid H_1$ וגם $H_1 \mid H_2$ ולכן $\deg H_1 = \deg H_2$ אבל אם $R \in F[x]$ מקיים $H_1 = RH_2$ בהכרח ש-$\deg R = 0$ אבל הפולינום מתוקנים ולכן $R = 1$, כלומר $H_1 = H_2$.

הגדרה יהיו $P, Q \in F[x]$. <u>המחלק המשותף המקסימלי</u> של P, Q הוא הפולינום המתוקן היחידי שמקיים את תנאי הלמה עבור P, Q שנסמנו $\gcd(P, Q)$.

הגדרה יהיו $P,Q\in F\left[x\right]$. נאמר כי P,Q זרים (Coprime) אם $\gcd\left(P,Q\right)=1$.

טענה P,Q זרים אם"ם קיימים $A,B\in F\left[x\right]$ כך ש- $AP+BQ=1$.

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור מהלמה של בז'ו.

$\Rightarrow$: אם $H\mid P,Q$ אז $H\mid AP+BQ$ ולכן $H\mid 1$ ולכן H קבוע. לכן הפולינום המתוקן המינימלי שמקיים את תנאי הלמה הוא 1, כלומר $\gcd\left(P,Q\right)=1$. ■

דוגמה נניח ש-$a\neq b\in F$. אזי $\left(x-a\right),\left(x-b\right)$ זרים. $\left(x-a\right)+\left(-1\right)\left(x-b\right)=b-a$ ולכן $\frac{\left(x-a\right)}{b-a}-\frac{\left(x-b\right)}{b-a}=1$ לכן

$$A=\frac{1}{b-a},B=\frac{-1}{b-a}$$

מסקנה נניח ש-P,Q זרים וכן P,Q' זרים. אז $P,Q\cdot Q'$ זרים.

הוכחה: מהלמה של בז'ו קיימים $A_{1},B_{1}\in F\left[x\right]$ כך ש- $A_{1}P+B_{1}Q=1$ וכן $A_{2},B_{2}\in F\left[x\right]$ כך ש- $A_{2}P+B_{2}Q'=1$. לכן $Q=1\cdot Q=\left(A_{2}P+B_{2}Q'\right)Q$ לכן

$$1=A_{1}P+B_{1}Q=A_{1}P+B_{1}\left(A_{2}P+B_{2}Q'\right)Q=\underbrace{\left(A_{1}+B_{1}A_{2}Q\right)}_{A'}P+\underbrace{B_{1}B_{2}}_{B'}Q'Q$$

ולכן $P,Q\cdot Q'$ זרים. ■

הערה ללמה של בז'ו מקבילה ב-$\mathbb{Z}$ (זהה לחלוטין פשוט $\mathbb{Z}$ במקום $F\left[x\right]$).

תרגול

טענה מטריצות דומות הן בעלות פולינום מינימלי שווה (ובפרט הפולינום המינימלי של אופרטור מוגדר היטב)

הוכחה:

$$Q\left(B\right)=Q\left(PAP^{-1}\right)=PQ\left(A\right)P^{-1}=PQ\left(B\right)P^{-1}$$

ולכן פולינום מאפס את A אם"ם הוא מאפס את B ולכן הפולינומים המינימליים שווים. ■

טענה מטריצות דומות הן בעלות פולינום אופייני שווה (כבר ראינו את זה).

דוגמה $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&2&2\\0&0&0&2\end{smallmatrix}\right)$. $\chi_A(x)=(x-1)^2(x-2)^2$. ישנם ארבעה מועמדים לפולינום המינימלי (כל קומבינציה של חזקות של $(x-2),(x-1)$ שהן בין 1 ל-2). נבדוק האם $(x-2)(x-1)$ מאפס את A. $0\neq\left(\begin{smallmatrix}0&-1&1&3\\0&0&0&2\\0&0&0&2\\0&0&0&0\end{smallmatrix}\right)=\cdots=(A-I)(A-2I)$. עבור $(x-2)(x-1)^2$ בהצבה של A, האיבר ה-$4,4$ במטריצה היא שונה מאפס (חישוב לא מעניין) ולכן זה גם לא אפס. באותו האופן גם $(x-2)^2(x-1)$ לא מאפס את A ולכן $\mu_A=\chi_A$.

שימושים ללכסון, הפולינום המינימלי וקיילי המילטון

1. עלינו לחשב את A^k, כאשר A לכסינה. נסמן D מטריצה אלכסונית אליה A דומה. אם $A\sim B$ אז

$$A=\left(PDP^{-1}\right)^n=\underbrace{\left(PDP^{-1}\right)\cdot\dots\cdot\left(PDP^{-1}\right)}_{\text{פעמים } n}=PD^nP^{-1}=PD^nP^{-1}$$

אבל עבור $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_k\end{pmatrix}$ מתקיים $D^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_k^n\end{pmatrix}$ ולכן זהו חישוב הרבה יותר קל.

2. נחשב נוסחה מפורשת לסדרות ריקורסיביות. $a_n=\gamma_0a_{n-1}+\gamma_1a_{n-2}$, $a_0=0,a_1=1$. נגדיר $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\\gamma_0&\gamma_1\end{smallmatrix}\right)$. לכן

$$A\left(\begin{smallmatrix}a_0\\a_1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a_1\\\gamma_0a_0+\gamma_1a_1\end{smallmatrix}\right)$$

ובאינדוקציה ניתן להוכיח כי $A^n\left(\begin{smallmatrix}a_0\\a_1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a_n\\a_{n+1}\end{smallmatrix}\right)$. הקוורדינטה היא זו שמעניינת אותנו ולכן $a_n=\left(\begin{smallmatrix}1&0\end{smallmatrix}\right)A^n\left(\begin{smallmatrix}a_0\\a_1\end{smallmatrix}\right)$.

נביט בסדרה $a_n=a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}$. לכן $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ וגם

$$\chi_A(x)=x(x-1)-2=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$$

לכן יש למטריצה שני ע"ע שונים ולכן היא לכסינה. $D=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$.

$$V_2=\ker\left(\begin{smallmatrix}2&-1\\-2&1\end{smallmatrix}\right)=\operatorname{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right)\right\}$$
$$V_1=\ker\left(\begin{smallmatrix}-1&-1\\-2&-2\end{smallmatrix}\right)=\operatorname{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

סמן $B=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right)$. לכן

$$\begin{aligned}[f]_E^k&=[\mathrm{id}]_E^B[f_A]_B^k[\mathrm{id}]_B^E\\&=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&-1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}2^k&0\\0&(-1)^k\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&-1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\\&\overset{\text{חישוב ההופכי}}{=}\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&-1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}2^k&0\\0&(-1)^k\end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&-1\end{smallmatrix}\right)\\&=\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}1&1\\2&-1\end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix}2^k&2^k\\2(-1)^k&(-1)^{k+1}\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^k+2(-1)^k&2^k+(-1)^{k+1}\\2^{k+1}+2(-1)^k&2^{k+1}(-1)^{k+1}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

ולכן

$$A^n\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}2^k+2(-1)^k & 2^k+(-1)^{k+1}\\ 2^{k+1}+2(-1)^k & 2^{k+1}(-1)^{k+1}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{3}\left(\begin{smallmatrix}2^k+(-1)^{k+1}\\ 2^{k+1}(-1)^{k+1}\end{smallmatrix}\right)$$

3. נסמן $\chi_A(x)=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$ לכן מקיילי המילטון $A^n=\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)A^i$. לכן

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=\sum_{i=0}^{n-1}(-a_i)A^{i+1}\\&=\sum_{i=0}^{n-2}(-a_i)A^{i+1}-a_{n-1}A^n\end{aligned}$$

וכך גם עבור כל A^{n+m}. כלומר בהינתן מאגר של $I,\dots,A^n$, נוכל לחשב את כל החזקות היותר גבוהות של A רק בחיבור וכפל בסקלר של המטריצות הנ"ל שזה הרבה יותר קל מאשר מכפלת מטריצות.

4. $A=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ המקיימת $\chi_A(x)=x^2-x-2$. לכן $A^2=A+2I=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\2&3\end{smallmatrix}\right)$,

$$A^3=A^2+2IA=A+2I+2A=3A+2I=\dots$$

5. $A=\left(\begin{smallmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&-1&2\end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned}\chi_A(x)&=\det\left(\begin{smallmatrix}x-1&-1&-2\\0&x-2&-2\\-1&1&x-2\end{smallmatrix}\right)\\&=(x-1)\det\left(\begin{smallmatrix}x-2&-2\\1&x-2\end{smallmatrix}\right)+(-1)\det\left(\begin{smallmatrix}-1&-2\\x-2&-2\end{smallmatrix}\right)\\&=(x-1)\left((x-2)^2+2\right)-(2+2(x-2))\\&=\dots\\&=(x-1)(x-2)^2\\&=x^3-5x^2+8x-4\end{aligned}$$

לכן

$$A^3=5A^2-8A+4I$$

וגם

$$\begin{aligned} A^4 &= 5A^3 - 8A^2 - 5I \\ &= 5\left(5A^2 - 8A + 4I\right) - 8A^2 + 4A \\ &= 17A^2 - 36A + 20I \end{aligned}$$

6. האם $\hom\left(V,V\right)$ הוא ציקלי ביחס לאופרטור f וטרנספורמציה T כלשהי?

כן, כמו כל מ"ו אחר, בהינתן בסיס נוכל להגדיר תמורה שעוברת בין כל הוקטורים בבסיס ואז המ"ו יהיה ציקלי ביחס לאחד מוקטורי הבסיס ההוא וההל התמורה הנ"ל. כלומר נגדיר $T\left(f_i\right) = f_{i+1}$ לכל $1 \le i < n^2$ וגם $T\left(f_{n^2}\right) = f_1$ כאשר $\left(f_1, \ldots, f_n\right)$ היא בסיס של $\hom\left(V,V\right)$ (כאשר $\dim V = n$).

7. בהינתן f אופרטור, האם $\hom\left(V,V\right)$ הוא ציקלי ביחס לאופרטור $\varphi_f\left(g\right) = f \circ g$ ו-g כלשהו כאשר $\dim V > 1$?

לא! יהי $f \in \hom\left(V,V\right)$ אופרטור. $\chi_f\left(f\right) = 0$ ולכן $\dim V = n = \deg \chi_f$. נסמן $\chi_f\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ויהי $g \in \hom\left(V,V\right)$ ולכן

$$\chi_f\left(\varphi_f\right)\left(g\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i \varphi_f^i\left(g\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i\left(f^i \circ g\right) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i f^i\right) \circ g = \chi_f\left(f\right) \circ g = 0 \circ g = 0$$

כלומר שקיבלנו תלות לינארית לא טריוויאלית של $g, \ldots, f^n\left(g\right)$ ולכן

$$\dim Z\left(\varphi_f, g\right) \le n < n^2 = \dim \hom\left(V,V\right)$$

ולכן בהכרח שזה לא יהיה $\hom\left(V,V\right)$ כולו.

בחלק זה סקרנו מחדש את התכונות והטענות שראינו כבר.

דוגמה $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. האם A לכסינה? $\chi_A\left(x\right) = x^2\left(x-1\right)$. $m_1^{\text{alg}} \ge m_1^{\text{alg}} = 1 \ge m_1^{\text{geom}}$. נבדוק האם $m_0^{\text{geom}} = m_0^{\text{alg}} = 2$.

$$m_0^{\text{geom}} = \dim V_0 = \dim\ker A = 3 - \text{rank}A = 3 - 2 = 1$$

ולכן A לא לכסינה.

שבוע $\mathbb{VIII}$ | צורת ז'ורדן לאופרטור כללי ומכפלה פנימית וסקלרית

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

משפט (משפט הפירוק הפולינומיאלי/פרימרי) יהיו $P,P_1,P_2\in F\left[x\right]$ כך ש- $P=P_1\cdot P_2$ וגם P_1,P_2 זרים (כלומר $\gcd\left(P_1,P_2\right)=1$) וכן $f:V\to V$ אופרטור. אזי $\ker P\left(f\right)=\ker P_1\left(f\right)\oplus\ker P_2\left(f\right)$.

הוכחה: ראשית נוכיח כי $\ker P_1\left(f\right)\subseteq\ker P\left(f\right)$. יהי $v\in\ker P_1\left(f\right)$. לכן

$$\begin{aligned}
P\left(f\right)\left(v\right) & =\left(P_1\cdot P_2\right)\left(f\right)\left(v\right)\\
 & =\left(P_2\cdot P_1\right)\left(f\right)\left(v\right)\\
 & =\left(P_2\left(f\right)\circ P_1\left(f\right)\right)\left(v\right)\\
 & =P_2\left(f\right)\left(P_1\left(f\right)\left(v\right)\right)\\
 & =P_2\left(f\right)\left(0\right)=0
\end{aligned}$$

ולכן $v\in\ker P\left(f\right)$. באותו האופן $\ker P_2\left(f\right)\subseteq\ker P\left(f\right)$. לכן גם $\ker P_1\left(f\right)+\ker P_2\left(f\right)\subseteq\ker P\left(f\right)$. נוכיח עתה כי $\ker P\left(f\right)\subseteq\ker P_1\left(f\right)+\ker P_2\left(f\right)$. מהלמה של בזו, קיימים $A,B\in F\left[x\right]$ כך ש- $AP_1+BP_2=\gcd\left(P_1,P_2\right)=1$. כלומר

$$\left(AP_1+BP_2\right)\left(f\right)=1\left(f\right)=\mathrm{id}$$

כלומר $\left(AP_1+BP_2\right)\left(f\right)\left(v\right)=v$, $\forall v\in V$.

יהי $v\in\ker P\left(f\right)$. נסמן $u_1=\left(AP_1\right)\left(f\right)\left(v\right)$ וגם $u_2=\left(BP_2\right)\left(f\right)\left(v\right)$. נראה כי $u_1\in\ker P_2\left(f\right)$ וכן $u_2\in\ker P_1\left(f\right)$.

$$\begin{aligned}
P_2\left(f\right)\left(u_1\right) & =P_2\left(f\right)\left(AP_1\left(f\right)\left(v\right)\right)\\
 & =\left(P_2\cdot A\cdot P_1\right)\left(f\right)\left(v\right)\\
 & =\left(A\cdot P_1P_2\right)\left(f\right)\left(v\right)\\
 & =\left(A\cdot P\right)\left(f\right)\left(v\right)\\
 & =A\left(f\right)\left(P\left(f\right)\left(v\right)\right)\\
 & =A\left(f\right)\left(0\right)=0
\end{aligned}$$

באותו האופן $u_2\in\ker P_1\left(f\right)$ ולכן $v=u_1+u_2\in\ker P_2\left(f\right)+\ker P_1\left(f\right)$. לכן סה"כ קיבלנו $\ker P\left(f\right)=\ker P_1\left(f\right)+\ker P_2\left(f\right)$.

עתה נוכיח כי זהו סכום ישר, כלומר כי $\ker P_1(f) \cap \ker P_2(f) = \{0\}$. יהי $v \in \ker P_1(f) \cap \ker P_2(f)$. נסמן $u_1 = (AP_1)(f)(v)$ וגם $u_2 = (BP_2)(f)(v)$ לכן $v = u_1 + u_2$. נוכיח כי $u_1 = u_2 = 0$.

$$u_1 = (AP_1)(f)(v) = A(f)(P_1(f)(v)) \overset{v \in \ker P_1(f)}{=} A(f)(0) = 0$$

ובאותו האופן בגלל ש-$v \in \ker P_2(f)$ נקבל כי $u_2 = 0$ ובסה"כ $v = 0$. ■

מסקנה נניח כי $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_k \in F[x]$ כך ש- $P_1, \ldots, P_k \in F[x]$ מקיימים $\gcd(P_i, P_j) \; i \neq j \Rightarrow$. אזי אם $f : V \to V$ אופרטור אז $\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \cdots \oplus \ker P_k(f)$.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על k.

בסיס ($k = 1$): ברור.

בסיס ($k = 2$) דה פאקטו: בדיוק משפט הפירוק הפולינומיאלי.

צעד ($k \to k + 1$): ראינו כי אם $Q, R, R' \in F[x]$ ומתקיים

$$\gcd(Q, R) = \gcd(Q, R') = 1$$

אז $\gcd(Q, R \cdot R') = 1$. נפעיל זאת באופן איטרטיבי ונקבל $\gcd(P_{k+1}, P_1 \cdot \ldots \cdot P_k) = 1$ לכן ממשפט הפירוק הפולינומיאלי

$$\begin{aligned}
\ker(P_1 \cdot \cdots \cdot P_{k+1})(f) &= \ker(P_1 \cdot \cdots \cdot P_k)(f) \oplus \ker P_{k+1}(f) \\
&\overset{\text{ה"א}}{=} (\ker P_1(f) \oplus \cdots \oplus \ker P_k(f)) \oplus \ker P_{k+1}(f) \\
&= \ker P_1(f) \oplus \cdots \oplus \ker P_{k+1}(f)
\end{aligned}$$

■

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה <u>בלוק ז'ורדן אלמנטרי</u> עבור $\lambda \in F$ הוא מטריצה $J_l(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix} = J_l(0) + \lambda I_l \in M_l(F)$.

הגדרה <u>בלוק ז'ורדן</u> עבור $\lambda \in F$ הוא מטריצת בלוקים $J^\lambda = \text{Block}(J_{l_1}(\lambda), \ldots, J_{l_k}(\lambda))$ עבור $l_1 \geq \cdots \geq l_k$.

הערה בלוק ז'ורדן נילפוטנטי הוא בלוק ז'ורדן עבור 0.

הגדרה <u>מטריצת ז'ורדן</u> היא מטריצה מהצורה $\text{Block}\left(J^{\lambda_1}, \ldots, J^{\lambda_r}\right)$ כאשר $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$.

דוגמה

$$\operatorname{Block}\left(J^2,J^3,J^4\right)=\begin{pmatrix} \begin{smallmatrix}2&0&0&0\\1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&0&2\end{smallmatrix} & & 0\\ & \begin{smallmatrix}3&0\\1&3\end{smallmatrix} & \\ 0 & & 4\end{pmatrix}$$

כאשר $J^2=\operatorname{Block}\left(J_3\left(2\right),J_1\left(2\right)\right),J^3=\operatorname{Block}\left(J_2\left(3\right)\right),J^4=\operatorname{Block}\left(J_1\left(4\right)\right)$.

משפט (קיום צורת ז'ורדן קנונית) יהי V מ"ו נ"ס ו-$f:V\to V$ אופרטור. נניח כי χ_f הוא מכפלה של פולינומים לינאריים. אזי קיים בסיס B של v כך ש- $[f]_B$ היא מטריצת ז'ורדן.

הוכחה: נסמן $\chi_f\left(x\right)=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)^{m_i}$ כאשר λ_i הם הע"ע של f ו-$m_i=m_{\lambda_i}^{\text{alg}}$. נגדיר $P_i=\left(x-\lambda\right)^{m_i}$. לכן

$$i\neq j\Rightarrow\gcd\left(P_i,P_j\right)=1$$

(כי $i\neq j\Rightarrow\gcd\left(x-\lambda_i,x-\lambda_j\right)=1$ ואם Q,R זרים וגם Q,R' זרים אז $Q,R\cdot R'$ זרים).

ממשפט הפירוק הפולינומיאלי, $\ker\chi_f\left(f\right)=\ker P_1\left(f\right)\oplus\cdots\oplus\ker P_k\left(f\right)$ אבל $\chi_f\left(f\right)=0$ מקיילי המילטון ולכן

$$\ker P_1\left(f\right)\oplus\cdots\oplus\ker P_k\left(f\right)=V$$

נסמן $U_i=\ker P_i\left(f\right)$ לכל $1\leq i\leq k$. לכן U_i ת"מ f-אינווירנאטי ל-V. זאת משום שעבור P כללי כלשהו, $\ker P\left(f\right)$ הוא f-אינווריאנטי כי עבור $v\in\ker P\left(f\right)$,

$$P\left(f\right)\left(f\left(v\right)\right)=\left(P\left(f\right)\circ f\right)\left(v\right)=\left(f\circ P\left(f\right)\right)\left(v\right)=f\left(P\left(f\right)\left(v\right)\right)=f\left(0\right)=0$$

נשים לב כי $V_{\lambda_i}\subseteq U_i$ משום שעבור $v\in V_{\lambda_i}$ מתקיים $\left(f-\lambda_i\text{id}\right)\left(v\right)=0$ ולכן $\left(f-\lambda_i\text{id}\right)^m\left(v\right)=0$ לכל $m\geq 1$ ובפרט $\left(f-\lambda_i\text{id}\right)^{m_i}\left(v\right)=0$ ולכן $v\in\ker\left(f-\lambda_i\text{id}\right)^{m_i}=\ker P_i\left(f\right)$. כלומר U_i לא טריוויאלי (כי V_{λ_i} לא טריוויאלי). נסמן

$$g_i=\left(f-\lambda_i\text{id}\right)|_{U_i}:U_i\to U_i$$

g אופרטור של U_i שכן U_i הוא f-אינווריאנטי.

נוכיח כי $g_i^{m_i}=0$. $U_i=\ker\left(f-\lambda_i\text{id}\right)^{m_i}$ ולכן אם $u\in U_i$ אזי

$$g_i\left(u\right)=\left(f-\lambda_i\text{id}\right)^{m_i}\left(u\right)=0$$

ולכן g_i אופרטור נילפ'. לכן ממשפט הקיום עבור אופרטורים נילפ', קיים בסיס B_i של U_i שעבורו $[g_i]_{B_i}$ הוא בלוק ז'ורדן נילפ', כלומר,

$$[g_i]_{B_i} = \text{Block}\left(J_{l_1^i}(0), \ldots, J_{l_{k_i}^i}(0)\right)$$

נשים לב כי $f|_{U_i} = g_i + \lambda_i \text{id}|_{U_i}$. לכן

$$[f|_{U_i}]_B = [g_i]_{B_i} + \lambda_i I_{\dim U_i} = \text{Block}\left(J_{l_1^i}(0) + \lambda_i I_{l_1^i}, \ldots, J_{l_{k_i}^i}(0) + \lambda_i I_{l_{k_i}^i}\right) = \text{Block}\left(J_{l_1^i}(\lambda_i), \ldots, J_{l_{k_i}^i}(\lambda_i)\right)$$

כלומר $[f|_{U_i}]_{B_i}$ הוא בלוק ז'ורדן עבור λ_i. נסמנו ב- J^{λ_i}.

נסמן $B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ ולכן B בסיס של V (איחוד בסיסים של סכום ישר הוא בסיס של הסכום הישר). בנוסף, U_i הוא f אינווריאנטי ולכן

$$[f]_B = \text{Block}\left([f|_{U_1}]_{B_1}, \ldots, [f|_{U_k}]_k\right) = \text{Block}\left(J^{\lambda_1}, \ldots, J^{\lambda_k}\right)$$

■

הערה המשפט הוא למעשה אם"ם, שכן אם יש בסיס B כך ש- $[f]_B$ הוא מטריצת ז'ורדן אז χ_f הוא מכפלה של גורמים לינאריים שכן $\chi_f(x) = \det(xI - [f]_B)$ אבל $xI - [f]_B$ היא משולשית תחתונה ולכן זה פשוט מכפלת הגורמים על האלכסון (שהם לינאריים).

מסקנה אם $F = \mathbb{C}$ אז לכל אופרטור יש הצגה בצורת ז'ורדן (נובע מהמשפט היסודי של האלגברה).

מסקנה אם $A \in M_n(F)$ כך ש- χ_A הוא מכפלה של גורמים לינאריים אז A דומה למטריצה B כך ש- B היא מטריצת ז'ורדן.

הערות

נניח כי $f : V \to V$ ו- $[f]_B = \text{Block}\left(J^{\lambda_1}, \ldots, J^{\lambda_k}\right)$ מטריצת ז'ורדן.

1. הגודל של הבלוק J^{λ_i} (שנסמנו ב- N^{λ_i}) הוא $m_{\lambda_i}^{\text{alg}}$. זאת משום ש-

$$\chi_f(x) = \det(XI - [f]_B) = \prod_{i=1}^{k} \det\left(xI_{N^{\lambda_i}} - J^{\lambda_i}\right)$$

אבל J^{λ_i} היא משולשית תחתונה ולכן גם $xI_{N^{\lambda_i}} - J^{\lambda_i}$ ולכן

$$\det\left(xI_{N^{\lambda_i}} - J^{\lambda_i}\right) = (x - \lambda_i)^{N^{\lambda_i}}$$

ולכן $\chi_f = \prod_{i=1}^{k} (x - \lambda_i)^{N^{\lambda_i}}$ ולכן $m_{\lambda_i}^{\text{alg}} = N^{\lambda_i}$.

2. מספר הבלוקים האלמנטריים בבלוק J^{λ_i} הוא $m_{\lambda_i}^{\text{geom}}$, כלומר $\dim V_{\lambda_i}$.

3. נניח כי k_i הוא הגודל של הבלוק האלמנטרי הגדול ביותר המופיע ב-J^{λ_i} אזי $\mu_f=\prod_{i=1}^{k}\left(x-\lambda_i\right)^{k_i}$.

משפט (יחידות צורת ז'ורדן) יהיו $A,B\in M_n(F)$ ונניח כי $A=\text{Block}\left(J_A^{\lambda_1},\ldots,J_A^{\lambda_k}\right)$ וגם $B=\text{Block}\left(J_B^{\lambda_1'},\ldots,J_B^{\lambda_l'}\right)$ כך ש-A,B מטריצות ז'ורדן ונניח כי $A\sim B$. אזי $k=l$ וגם $\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}=\{\lambda_1'\ldots,\lambda_l'\}$ וכן $\forall\lambda\in\{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$ מתקיים $J_A^{\lambda}=J^{\lambda_B}$. כלומר עד כדי שינוי סדר הבלוקים, המטריצות שוות.

מסקנה ישנה הצגת ז'ורדן יחידה של אופרטור $f:V\to V$ עד כדי שינוי סדרת הבלוקים בתוך מטריצת הז'ורדן.

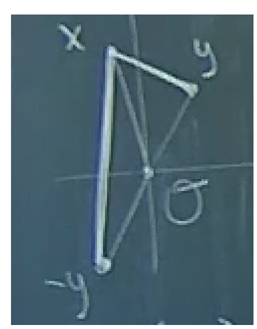
חלק ג' של ההרצאה

הגדרה <u>מכפלה סקלרית</u> ב-$\mathbb{R}^2$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)=x_1y_1+x_2y_2$.

שימושים של מכפלה סקלרית

1. המרחק מ-x ל-0 הוא $\sqrt{x\cdot x}=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$.
2. המרחק מ-x ל-y הוא $\sqrt{(x-y)\cdot(x-y)}=\sqrt{\left(x_1-y_1\right)^2+\left(x_2-y_2\right)^2}$.
3. הזווית בין שני וקטורים x,y היא ישרה אם"ם המרחק מ-x ל-y שווה למרחק מ-x ל-$-y$ (ראו איור והשתכנעו מגאומטריה מהתיכון), כלומר

$$(x-y)\cdot(x-(-y))\cdot(x-(-y))$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-y)\cdot(x-y)=(x+y)\,(x+y)$$
$$\Updownarrow$$
$$x\cdot x-2x\cdot y+y\cdot y=x\cdot x+2x\cdot y+y\cdot y$$
$$\Updownarrow$$
$$0=4x\cdot y$$
$$\Updownarrow$$
$$x\cdot y=0$$



הגדרה <u>מכפלה סקלרית</u> ב-$\mathbb{R}^n$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=x_1y_1+\dots+x_ny_n$.

הערה אם ננסה להרחיב את המכפלה הסקלרית ל-$\mathbb{C}^2$ בדיוק כמו עבור $\mathbb{R}^2$, נקבל כמה דברים מוזרים. בין היתר, $\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}i\\0\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}i\\0\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{-1}$ שזה לא מוגדר, $\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}1+i\\0\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1+i\\0\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{2i}$ שזה אפילו פחות מוגדר והכי גרוע זה $\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{0}=0$, כלומר שהמרחק של הוקטור $\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)$ מהראשית הוא 0, אפילו שברור שזה לא נכון.

הגדרה <u>מכפלה סקלרית</u> ב-$\mathbb{C}^2$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{C}^2\times\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)=\overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2$.

הערה תחת ההגדרה הזו הבעיות הקודמות יפתרו שכן

$$\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}i\\0\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}i\\0\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{(-i)(i)+0\cdot0}=\sqrt{1}=1$$
$$\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{(-i)\,i+1\cdot1}=\sqrt{2}$$

בנוסף, המרחק מ-$\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)$ ל-0 הוא $\sqrt{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)}=\sqrt{\overline{x_1}\cdot x_1+\overline{x_2}\cdot x_2}=\sqrt{|x_1|^2+|x_2|^2}\in\mathbb{R}_{\geq0}$.

תכונות של מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{R}^n$

1. (אדיטיביות) עבור $x,y,y'\in\mathbb{R}^n$, $x\cdot(y+y')=x\cdot y+x\cdot y'$.
   (הומוגניות) עבור $x,y\in\mathbb{R}^n$, $c\in\mathbb{R}$ $x\cdot(cy)=c(x\cdot y)$.
2. (סימטריה) עבור $x,y\in\mathbb{R}^n$, $x\cdot y=y\cdot x$.
3. (חיוביות) עבור $x\in\mathbb{R}^n$, $x\cdot x\geq0$.
   (אי-ניוון) עבור $x\in\mathbb{R}^n$, אם $x\cdot x=0$ אזי $x=0$.

תכונות של מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{C}^2$

1. אדיטיביות והומוגניות.
2. (המקבילה של סימטריה) עבור $x,y\in\mathbb{C}^2$, $x\cdot y=\overline{y\cdot x}$.

$$\overline{y\cdot x}=\overline{\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)}=\overline{\overline{y_1}x_1+\overline{y_2}x_2}=\overline{\overline{y_1}}\cdot\overline{x_1}+\overline{\overline{y_2}}\cdot\overline{x_2}=\overline{x_1}y_1+\overline{x_2}y_2=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)=x\cdot y$$

3. (חיוביות) עבור $x\in\mathbb{C}^2$ מתקיים $x\cdot x\in\mathbb{R}_{\geq0}$.
   $x\cdot x=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right)=\overline{x_1}x_1+\overline{x_2}x_2=|x_1|^2+|x_2|^2\in\mathbb{R}_{\geq0}$.
   (אי-ניוון) עבור $x\in\mathbb{C}^2$, אם $x\cdot x=0$ אזי $x=0$.
   נסמן $x=\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right)$. אם $x\cdot x=0$ אז $|x_1|^2+|x_2|^2=0$ ולכן $|x_1|=|x_2|=0$ ולכן $x_1=x_2=0$ ולכן $x=0$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). מכפלה פנימית ב-V היא פעולה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle : V\times V\to F$ המקיימת:

(i) (לינאריות באיבר השני) $\langle u \mid v+v'\rangle = \langle u\mid v\rangle + \langle u\mid v'\rangle$ עבור $u,v,v'\in V$ וכן $\langle u\mid cv\rangle = c\langle u\mid v\rangle$ עבור $u,v\in V$, $c\in F$.

(ii) (סימטריה) $\langle u\mid v\rangle = \overline{\langle v\mid u\rangle}$, $\forall v,u\in V$.

(iii) (חיוביות ואי-ניוון) $\langle u\mid u\rangle\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ וכן אם $u\in V$ מקיים $\langle u\mid u\rangle = 0$ אזי $u=0_V$.

תכונות של מכפלה פנימית

1. $\langle u\mid 0_V\rangle = 0$, $\forall u\in V$.

   $\langle u\mid 0_V\rangle = \langle u\mid 0\cdot 0_V\rangle = 0\langle u\mid 0\rangle = 0$.

2. (אדיטיבות באיבר הראשון) $\langle u+u'\mid v\rangle = \langle u\mid v\rangle + \langle u'\mid v\rangle$, $\forall v\in V$

$$\langle u+u'\mid v\rangle = \overline{\langle v\mid u+u'\rangle} = \overline{\langle v\mid u\rangle + \langle v\mid u'\rangle} = \overline{\langle v\mid u\rangle} + \overline{\langle v\mid u'\rangle} = \langle u\mid v\rangle + \langle u'\mid v\rangle$$

(הומוגניות באיבר הראשון) $\langle cu\mid v\rangle = \overline{c}\langle u\mid v\rangle$, $\forall v,u\in V$, $c\in F$.

$$\langle cu\mid v\rangle = \overline{\langle v\mid cu\rangle} = \overline{c\langle v\mid u\rangle} = \overline{c}\overline{\langle v\mid u\rangle} = \overline{c}\langle u\mid v\rangle$$

דוגמאות למכפלה פנימית

1. עבור $V=F^n$, $\left\langle \begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right\rangle = \overline{x_1}y_1+\cdots+\overline{x_n}y_n$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח שהאקסיומות אכן מתקיימות).

2. $V=\mathbb{R}^2$.

$$\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix} y_1\\ y_2\end{smallmatrix}\right)\rangle = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + x_2y_2 = x_1y_1+x_2y_1+x_1y_2+2x_2y_2$$

הסטודנטית המשקיעה תוכיח כי (i) מתקיימת ותראה גם כי (ii) טריוויאלית.

(iii) $\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right)\rangle = (x_1+x_2)^2 + x_2^2\geq 0$ וגם אם $\langle \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix} x_1\\ x_2\end{smallmatrix}\right)\rangle = 0$ אזי $(x_1+x_2)^2+x_2^2=0$ אזי $x_1+x_2=x_2=0$ ולכן גם $x_1=0$.

3. $\left\{ f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : \text{רציפה } f \right\}$ ‏$V = C\left([0,1]\right) =$. ‏$\langle f \mid g\rangle = \int\limits_0^1 f\left(t\right) g\left(t\right) \mathrm{dt}$.

(i)

$$\begin{aligned}\langle f \mid g+g'\rangle &= \int\limits_0^1 f\left(t\right)\cdot\left(g+g'\right)\left(t\right)\mathrm{dt}\\ &= \int\limits_0^1 f\left(t\right)g\left(t\right)+f\left(g'\right)\left(t\right)\mathrm{dt}\\ &= \int\limits_0^1 f\left(t\right)g\left(t\right)\mathrm{dt}+\int\limits_0^1 f\left(t\right)g'\left(t\right)\mathrm{dt}\\ &= \langle f \mid g\rangle+\langle f \mid g'\rangle\end{aligned}$$

וההומגניות מתקיימת באותו האופן. (ii) טריוויאלי.

(iii) $\langle f \mid f\rangle = \int\limits_0^1 f^2\mathrm{dt} \geq 0$ וגם אם $\langle f \mid f\rangle = 0$ אזי $\int\limits_0^1 f^2\mathrm{dt} = 0$ ומאינפי 2 זה גורר כי $f \equiv 0$.

4. יהי V מ"ו מעל F ותהי $\langle \cdot \mid \cdot\rangle$ מכפלה פנימית ב-V ויהי $f : V \to V$ אופרטור הפיך. נגדיר $\{\cdot \mid \cdot\} : V \times V \to F$ ע"י $\{u \mid v\} = \langle f\left(u\right) \mid f\left(v\right)\rangle$.

(i)

$$\begin{aligned}\{u \mid v+v'\} &= \langle f\left(u\right) \mid f\left(v+v'\right)\rangle\\ &= \langle f\left(u\right) \mid f\left(v\right)+f\left(v'\right)\rangle\\ &= \langle f\left(u\right) \mid f\left(v\right)\rangle+\langle f\left(u\right) \mid f\left(v'\right)\rangle\\ &= \{u \mid v\}+\{u \mid v'\}\end{aligned}$$

וההומגניות מתקיימת באותו האופן.

(ii)

$$\{u \mid v\} = \langle f\left(u\right) \mid f\left(v\right)\rangle = \overline{\langle f\left(v\right) \mid f\left(u\right)\rangle} = \overline{\{v \mid u\}}$$

(iii) $\{u \mid u\} = \langle f\left(u\right) \mid f\left(u\right)\rangle \geq 0$ וגם אם $\{u \mid u\} = 0$ אזי $\langle f\left(u\right) \mid f\left(u\right)\rangle = 0$ לכן $f\left(u\right) = 0$ אבל מהיות f הפיך אזי $u = 0$.

הערה דוגמה 4 היא הכללה של דוגמה 2. זאת משום שעבור $\langle x \mid y\rangle = x \cdot y$ ו-$f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x_1+x_2\\x_2\end{smallmatrix}\right)$ נקבל כי

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right\} = \left\langle f\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mid f\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right\rangle = \left(\begin{smallmatrix}x_1+x_2\\x_2\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_1+y_2\\y_2\end{smallmatrix}\right) = \left(x_1+x_2\right)\left(y_1+y_2\right)+x_2y_2$$

תרגול

תרגילים

1. נמצא אילו a,b מקיימים $a\cdot 6+b\cdot 34=\gcd(6,34)=2$.

$$\begin{aligned}34&=5\cdot 6+4\\6&=1\cdot 4+2\\4&=2\cdot 2+0\end{aligned}$$

$$2=6-4=6-1\cdot(34-5\cdot 6)=6\cdot 6+(-1)\cdot 34$$

2. נעשה זאת עתה עם פולינומים. $P=x^3+3x^2+3x+1$, $Q=x^2+3x+2$. מתקיים

$$x^3+3x^2+3x+1=x\left(x^2+3x+2\right)+(x+1)$$

וכן $x^2+3x+2=(x+2)(x+1)+0$ ולכן $\gcd(P,Q)=x+1$ וגם

$$x+1=(-x)\left(x^2+3x+2\right)+1\cdot\left(x^3+3x^2+3x+1\right)$$

האלגוריתם הכללי הוא כדילקמן: נחלק את הפולינום הגדול (ממעלה גבוהה יותר) בפולינום הקטן, ניקח את השארית, נחלקת את הפולינום הקטן בשארית ונמשיך כך עד שנקבל שארית 0, השארית האחרונה השונה מאפס היא ה-gcd. משם חוזרים אחורה בחישוב, מציבים ומקבלים את ה-$A,B\in F[x]$ הרצויים.

דוגמאות

1. אופרטור ה-0 נילפ' מדרגה 1.
2. המטריצה $A=\left(\begin{smallmatrix}0&a\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ נילפ' לכל $0\neq a\in F$ מדרגה 2 שכן $A^1\neq 0$ אבל $A^2=0$.
3. לא כל אופרטור עם גרעין לא טריוויאלי הוא נילפ'! לדוגמה $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. $\left[A^k\right]_{11}=1$ ולכן $\forall k\in\mathbb{N}\ A^k\neq 0$.

טענה כל מטריצה משולשית עם אפסים על האלכסון היא נילפוטנטית.

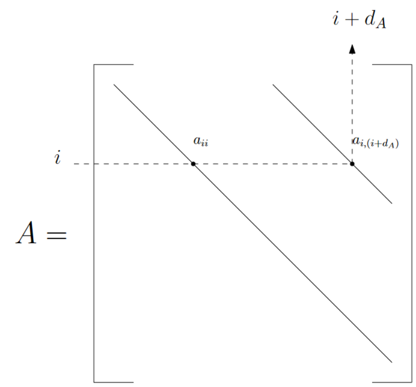
הוכחה: בה"כ המטריצה משולשית עליונה (אחרת נביט ב-A^t). נסמן $A=(a_{ij})$. לכן $i \leq j \Rightarrow a_{ij}=0$. נגדיר

$$D_k^A=\left\{a_{i(i+k)}:1\leq i\leq n-k\right\}$$

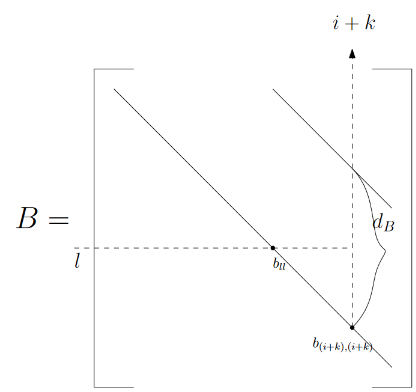
שזה גאומטרית האלכסון ה-k מעל האלכסון הראשי. בנוסף, נגדיר

$$d_A=\max\left\{0\leq k\leq n-1:1\leq\forall i\leq n-k,a_{i(i+k)}=0\right\}$$

כלומר האלכסון במרחק מקסימלי מהאלכסון הראשי שכולו מתאפס (לדוגמה עבור $A=\left(\begin{smallmatrix}0&0&\pi\\0&0&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$, $d_A=1$). נוכיח כי אם A,B משולשיות עליונות עם אפסים על האלכסון אזי $d_{AB}\geq d_A+d_B+1$. נסמן $AB=(c_{ij})$. נוכיח כי לכל $0\leq k\leq d_A+d_B+1$ ו-$1\leq i\leq n-k$ מתקיים $c_{i(i+k)}=0$. $c_{i(i+k)}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{j(i+k)}$ אבל עבור $j\leq i+d_A$ נקבל $a_{ij}=0$ כי זה אומר שלקחנו איבר מתחת לאלכסון המקסימלי שמתאפס ב-A (ראו איור).



עבור $j>d_A+1$ אזי $j\geq i+d_A+1$ אבל $k-d_B\leq d_A+1$ ולכן $j\geq i+(d_A+1)\geq i+(k-d_B)$ אבל במקרה זה $b_{j(i+k)}=0$ שכן אנו נמצאים מתחת לאלכסון המקסימלי שמתאפס ב-B (ראו איור).



לכן סה"כ קיבלנו $c_{i(i+k)}=0$ ולכן גם $d_{AB}\geq d_A+d_B+1$.

מכאן נסיק כי $d_{A^n}\geq n(d_A+1)\geq n$ ולכן $A^n=0_n$ ולכן A נילפ'. ■

טענה יהי V מ"ו ממימד n מעל $F=\mathbb{C},\mathbb{R},\mathbb{Q}$ ו-$f:V\to V$ אופרטור. אזי f נילפ' אם"ם $\chi_f(x)=x^n$.

הוכחה: $\Leftarrow$: $x^k(f)=0$, לכן $\mu_f\mid x^k$, לכן $\mu_f=x^t$, אבל $\chi_f\mid\mu_f^l=x^{tl}$ ולכן $\chi_f=x^s$ אבל $\deg\chi_f=n$ ולכן $\chi_f=x^n$.

$\Rightarrow$: אם $\chi_f(x)=x^n$ אזי מקיילי המילטון $\chi_f(f)=f^n=0$ ולכן f נילפ'. ■

טענה לאופרטור נילפ' קיים ע"ע יחיד והוא 0 (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

טענה אופרטור נילפ' f הוא לכסין אם"ם הוא אופרטור ה-0 (מסקנה ישירה מכאן).

דוגמה נגדיר $A=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\1&3&2\\2&4&2\end{pmatrix}$. נבדוק האם A נילפ' ע"י חישוב הפולינום האופייני

$$\begin{aligned}\chi_A(x)&=\det\begin{pmatrix}x+1&3&-2\\-1&x-3&-2\\-2&-4&x-2\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\det\begin{pmatrix}x&x&0\\-1&x-3&-2\\-2&-4&x-2\end{pmatrix}\\&=x\det\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&x-3&-2\\-2&-4&x-2\end{pmatrix}\\&\xrightarrow[R_2\to R_2+R_1]{R_3\to R_3+2R_1}x\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&x-2&2\\0&-2&x+2\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{R_2\to R_2-R_3}x\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&x&-x\\0&-2&x+2\end{pmatrix}\\&=x^2\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&-2&x+2\end{pmatrix}\\&\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_2}x^2\det\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&0&x\end{pmatrix}=x^3\end{aligned}$$

האם קיים $v\in\mathbb{R}^3$ עבורו $\mathbb{R}^3=Z(A,v)$ (כלומר האם קיים $v\in\mathbb{R}^3$ עם $l_v=3$)?

זה שקול לכך ש-$\mu_A=x^3$ שכן אז קיים v כך ש- $\min_v^f=x^3$ ואחרת $f^2(v)=0$ תמיד. נשים לב כי $A\neq 0$ וגם $A^2\neq 0$ (בגלל שהקוואורדינטה הראשונה לא מתאפסת) ולכן $\mu_A=x^3$ ולכן אכן קיים v כזה. בעיקרון, אם היו מבקשים למצוא אחד כזה, נוכל להצביע ל-e_1 שכן $A^2e_1\neq 0$ בגלל שהקוואורדינטה הראשונה של A^2 לא מתאפסת ו-A^2e_1 זו פשוט העמודה הראשונה ב-A^2.

הערה $J_{l_v}(0)=\left[f|_{Z(f,v)}\right]_{(v,\ldots,f^{l_v-1}(v))}$.

רעיון ההוכחה של קיום ייצוג אופרטור כבלוק ז'ורדן

1. לוקטור $u\in Z(f,v)$ מתקיים $l_u\leq l_v$ וגם $f^{l_{u-1}}(u)=af^{l_v-1}(v)$.
2. מתקיים $\bigoplus_{i=1}^{k}Z(f,v_i)$ V אם"ם $\left\{f^{l_{v_1}-1}(v_1),\ldots,f^{l_{v_k}-1}(v_k)\right\}$ בת"ל.
3. אם $V=\sum_{i=1}^{k}Z(f,v_i)$ והסכום אינו ישר אז קיים $1\leq r\leq k$ כך ש- $Z(f,v_r)$ אינו נחוץ בפרישת V או שקיים $v'\in Z(f,v_r)$ שאפשר להחליף בעזרתו בסכום את $Z(f,v_r)$ ב-$Z(f,r')$ בלי שהפרוש ישתנה ובנוסף $\dim Z(f,v')>\dim Z(f,v_r)$.

דוגמה מצאו בסיס שרשראות ל-$\mathbb{R}^3$ ביחס לאופרטור $f\left(v\right)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}v$.

$$\begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ e_1-e_2 & e_1-e_2 & e_1-e_2\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

קיבלנו שלוש שרשראות הפורשות אבל אלו 6 וקטורים ואנחנו צריכים שהסכום יהיה ישר. נשים לב כי נוכל להיפטר מהשרשת השנייה שכן $e_1-e_2,e_2\in\operatorname{sp}\left\{e_1,e_1-e_2\right\}$.

$$\begin{array}{cc} w_1=e_1 & w_3=e_3\\ \downarrow & \downarrow\\ w_2=e_1-e_2 & w_4=e_1-e_2\\ \downarrow & \downarrow\\ 0 & 0 \end{array}$$

לא נוכל למחוק את אחת השרשראות כי אז נקבל שזה לא פורש. נשים לב כי

$$f\left(w_1-w_3\right)=f\left(w_1\right)-f\left(w_3\right)=w_2-w_4=0$$

ולכן w_1-w_3 הוא בדיוק הוקטור שאיתו נחליף את השרשרת השנייה, שכן $\left\{w_1-w_3\right\}$ מהווה שרשרת (בהצבה ב-f נקבל 0) והוא מוכל ב-$Z\left(f,w_3\right)$ ולכן בסיס השרשראות הוא $B=\left(e_1,e_1-e_2,e_1-e_3\right)$. $\left[f\right]_B=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$.

מסקנה מספר האופרטורים הנילפוטנטים (עד כדי שינוי סדר האינדקסים) בגודל n הוא מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספרים טבעיים (שזה קצת מאוד).

דוגמה מצאו את כל המטריצות הנילפוטנטיות בגודל 4.

$$\begin{array}{cc} 4=4 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ 4=3+1 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\\ 4=2+2 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}\\ 4=2+1+1 & \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}\\ 4=1+1+1+1 & 0 \end{array}$$

תרגיל נתון אופרטור $f:\mathbb{R}^{27}\to\mathbb{R}^{27}$ כך ש- $f^4=0$, $\dim\ker f^3=24$, $\dim\ker f^2=19$, $\dim\ker f=10$. מצאו כמה שרשראות יש בבסיס שרשראות של f ומה אורכן.

פתרון מהיות $\dim\ker f=10$ אזי יש בדיוק 10 וקטורים בת"ל מגובה 1. נשים לב כי בכל שרשרת יש בדיוק וקטור אחד בגובה 1 (האחרון) ולכן יש בדיוק 10 שרשראות.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

בנוסף, כל וקטור הוא בגובה לכל היותר 4 (כי אחרת נקבל ש-$\dim\ker f^3<24$ שכן יש 4 וקטורים שלא מתאפסים תחת הפעלתו). יש לכל היותר 3 שרשראות באורך 4, שכן אם יש לנו בסיס ל-$\ker f^3$ ונשלים אותו לבסיס של $\mathbb{R}^{27}$ באמצעות (u_1,u_2,u_3) אז השרשראות של u_1,u_2,u_3 הן באורך 4 בדיוק. לא ייתכנו עוד וקטורים כאלה כי אז נקבל שהם נמצאים ב-$\operatorname{sp}\{u_1,u_2,u_3\}$ ואז הסכום לא יהיה ישר.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

יש לנו 9 וקטורים בת"ל בגובה לפחות 2 וההסבר לכך הוא באותו האופן כמו עבור גובה 4, רק שעתה נביט בהשלמה של $\ker f$ ל-$\ker f^2$.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

יש בדיוק וקטור אחד מגובה 1 שכן יש 10 שרשראות ורק 9 מהן בגובה לפחות 2. נשים לב כי עד כה יש לנו 25 וקטורים ולכן נצטרך עוד

שניים בשביל בסיס, ולכן יש בהכרח בדיוק 2 שרשראות בגובה 3

$$\begin{array}{ccc|cc|cccc|c}
\checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & & & & & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

כלומר סה"כ יש 3 שרשראות באורך 4, 2 שרשראות באורך 3, 4 שרשראות באורך 2 ושרשרת אחת באורך 1.

שבוע $\mathbb{VIII}$ | מרחבי מכפלה פנימית, נורמות ואורתוגונליות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. נאמר כי V הוא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ) אם ב-V מוגדרת מכפלה פנימית. ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב אוקלידי וממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ נקרא מרחב הרמטי.

הגדרה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. נגדיר את הנורמה של $u \in V$ ע"י $\|u\| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$.

הגדרה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. נאמר כי $u \in V$ הוא וקטור יחידה אם $\|u\| = 1$.

תכונות

1. $\forall u \in V$, $\|u\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.
2. $\|u\| = 0$ אם"ם $u = 0_V$.
3. $\|cu\| = |c| \|u\|$, לכל $c \in F, u \in V$. שכן

$$\|cu\|^2 = \langle cu \mid cu \rangle = c\bar{c} \langle u \mid u \rangle = |c|^2 \|u\|^2$$

4. לכל $0 \neq u \in V$, $\frac{1}{\|u\|}u$ הוא וקטור יחידה.

$$\left\| \frac{1}{\|u\|} u \right\| = \left| \frac{1}{\|u\|} \right| \|u\| \overset{\|u\| \in \mathbb{R}_{\geq 0}}{=} \frac{1}{\|u\|} \|u\| = 1$$

דוגמה $V=\mathbb{R}^2$. אם נגדיר מ"פ להיות מכפלה סקלרית אז $\|e_2\|=1$. אם נגדיר מ"פ ע"י $\left\langle \left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right) \mid \left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right\rangle=(x_1+x_2)(y_1+y_2)+x_2y_2$ אז $\|e_2\|=\sqrt{1\cdot 1+1\cdot 1}=\sqrt{2}$.

טענה יהי ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u,v\in V$. אזי $\langle u\mid v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2-\|u-v\|^2&=\langle u+v\mid u+v\rangle-\langle u-v\mid u-v\rangle\\&=\langle u\mid u\rangle+\langle v\mid u\rangle+\langle u\mid v\rangle+\langle v\mid v\rangle-(\langle u\mid u\rangle-\langle v\mid u\rangle-\langle u\mid v\rangle+\langle v\mid v\rangle)\\&=4\langle u\mid v\rangle\end{aligned}$$

■

טענה יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $u,v\in V$. אזי

$$\langle u\mid v\rangle=\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2-i\|u+iv\|^2+i\|u-iv\|^2\right)$$

הוכחה: הסטודנטית המשקיעה תוכיח זאת כמו הטענה הקודמת. ■

הגדרה יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u,v\in V$. u,v נקראים <u>ניצבים</u> אם $\langle u\mid v\rangle=0$ ובמקרה זה נסמן $u\perp v$.

משפט (פיתגורס) יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ כך ש- $u\perp v$. אזי $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2&=\langle u+v\mid u+v\rangle\\&=\langle u\mid u\rangle+\underbrace{\langle v\mid u\rangle}_{=0}+\underbrace{\langle u\mid v\rangle}_{=0}+\langle v\mid v\rangle\\&=\langle u\mid u\rangle+\langle v\mid v\rangle\\&=\|u\|^2+\|v\|^2\end{aligned}$$

■

טענה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v \in V$ כך ש-$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. אזי $u \perp v$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle u \mid u \rangle + \langle v \mid v \rangle &= \|u\|^2 + \|v\|^2 \\ &= \|u+v\|^2 \\ &= \langle u+v \mid u+v \rangle \\ &= \langle u \mid u \rangle + 2\langle u \mid v \rangle + \langle v \mid v \rangle\end{aligned}$$

ולכן $2\langle u \mid v \rangle = 0$ ולכן $u \perp v$. ■

הערה הטענה הנ"ל לא נכונה עבור ממ"פ מעל $\mathbb{C}$. $V = \mathbb{C}^2$, המ"פ היא מכפלה סקלרית, $u = e_1, v = ie_1$. לכן $\|u\| = 1, \|v\| = 1$, $\|u+v\| = \left\|\binom{1+i}{0}\right\| = \sqrt{2}$ ולכן $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ אבל $\langle u \mid v \rangle = i$.

טענה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v \in V$. אזי קיים $c \in F$ כך ש- $u \perp v - cu$.

הוכחה:

$$\begin{gathered}\langle u \mid v - cu \rangle = 0 \\ \Updownarrow \\ \langle u \mid v \rangle - c\langle u \mid u \rangle = 0 \\ \Updownarrow \\ \langle u \mid v \rangle = c\langle u \mid u \rangle \\ \Updownarrow \\ c = \frac{\langle u|v \rangle}{\langle u|u \rangle}\end{gathered}$$

■

משפט (אי-שוויון קושי שוורץ, אשק"ש) יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. אזי $|\langle u \mid v \rangle| \le \|u\| \cdot \|v\|$. בנוסף, ישנו שוויון אם"ם u, v ת"ל.

הוכחה: אם $u = 0$ או $v = 0$ אז $\|u\| \cdot \|v\| = 0$ וגם $\langle u \mid v \rangle = 0$. בנוסף במקרה זה u, v ת"ל.

נניח כי $u,v\neq 0$. עבור $c=\frac{\langle u|v\rangle}{\langle u|u\rangle}$ מתקיים $\langle u\mid v-cu\rangle=0$ ולכן $\langle cu\mid v-cu\rangle=\bar{c}\langle u\mid v-cu\rangle=0$ אז ממשפט פיתגורס מתקיים

$$\begin{aligned}\|v\|^2&=\left\|cu+(v-cu)^2\right\|\\&=\|cu\|^2+\|v-cu\|^2\\&\geq\|cu\|^2\\&=|c|^2\|u\|^2\\&=\frac{|\langle u\mid v\rangle|^2}{|\langle u\mid u\rangle|^2}\|u\|^2\\&=\frac{|\langle u\mid v\rangle|^2}{\|u\|^4}\|u\|^2\\&=\frac{|\langle u\mid v\rangle|^2}{\|u\|^2}\end{aligned}$$

ולכן $|\langle u\mid v\rangle|\leq\|u\|\cdot\|v\|$. אם $|\langle u\mid v\rangle|=\|u\|\cdot\|v\|$ אז $\|v-cu\|^2=0$ ולכן $v-cu=0$ ולכן u,v ת"ל. אם u,v ת"ל אזי קיים $d\in F$ כך ש- $v=du$.

$$|\langle v\mid u\rangle|=|\langle u\mid du\rangle|=|d|\,|\langle u\mid u\rangle|=|d|\,\|u\|^2$$

$$\|u\|\,\|v\|=\|u\|\cdot\|du\|=|d|\cdot\|u\|^2$$

ולכן $|\langle u\mid v\rangle|=\|u\|\cdot\|v\|$. ■

דוגמה $V=C([0,1])$, $f,g:\mathbb{R}^{[0,1]}$ רציפות. אזי

$$\left|\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{dt}\right|\leq\sqrt{\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{dt}}\cdot\sqrt{\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{dt}}$$

ולכן

$$\left(\int_0^1 f(t)\,g(t)\,\mathrm{dt}\right)^2\leq\int_0^1 f^2(t)\,\mathrm{dt}\cdot\int_0^1 g^2(t)\,\mathrm{dt}$$

חלק ב' של ההרצאה

הערה בתיכון ראינו כי $|AC|\leq|AB|+|BC|$, כאשר A,B,C הן נקודות במישור והשוויון מתקיים אם"ם A,B,C נמצאות על אותו הישר.

משפט (אי-שוויון המשולש) יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. אזי $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$. בנוסף, השוויון מתקיים אם"ם $u=0_V$ או $v=0_V$ או שקיים $0<c \in \mathbb{R}$ כך ש- $v=cu$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v \mid u+v\rangle \\
&= \langle u \mid u\rangle+\langle v \mid u\rangle+\underbrace{\langle u \mid v\rangle}_{=\overline{\langle v \mid u\rangle}}+\langle v \mid v\rangle \\
&\overset{(*)}{=} \langle u \mid u\rangle+2 \operatorname{Re}\langle u \mid v\rangle+\langle v \mid v\rangle \\
&\overset{(**)}{\leq} \langle u \mid u\rangle+2|\langle u \mid v\rangle|+\langle v \mid v\rangle \\
&\overset{\text{אשק"ש}}{\leq} \|u\|^2+2\|u\| \cdot\|v\|+\|v\|^2 \\
&= (\|u\|+\|v\|)^2
\end{aligned}$$

ולכן $\|u+v\| \leq \|u\|+\|v\|$.

$(*)$ $(a+bi)+\overline{(a+bi)}=a+bi+a-bi=2a$.

$(**)$ $\operatorname{Re}(a+bi)=a \leq |a|=\sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2+b^2}=|a+bi|$.

אם השוויון מתקיים אזי $\langle u \mid v\rangle$ הוא ממשי (כי $\langle u \mid v\rangle = \operatorname{Re}\langle u \mid v\rangle = |\langle u \mid v\rangle|$) וגם u, v ת"ל (מאשק"ש). לכן או ש- $u=0_V$ או ש- $v=0_V$ או שקיים $c \in F$ כך ש- $v=cu$ ולכן $\langle u \mid v\rangle=\langle u \mid cu\rangle=c\langle u \mid u\rangle=c\|u\|^2$ ולכן $c=\frac{\langle u \mid v\rangle}{\|u\|^2}$ הוא ממשי חיובי.

אם $v=cu$ עבור $0<c \in \mathbb{R}$ אזי

$$\|u+v\|=\|u+cu\|=\|(c+1) u\|=(c+1)\|u\|=\|u\|+c\|u\|=\|u\|+\|v\|$$

■

הגדרה יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ. נגדיר את פונקציית המרחק $d: V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ ע"י $d(u, v)=\|v-u\|$.

תכונות

1. $d(u, v)=0$ אם"ם $v=u$.
2. $d(u, v)=d(v, u)$. כי

$$d(u, v)=\|v-u\|=\|(-1)(u-v)\|=|-1| \cdot\|u-v\|=d(v, u)$$

3. $d(u,v)\le d(u,w)+d(w,v)$. כי

$$d(u,v)=\|v-u\|=\|(v-w)+(w-u)\|\overset{\Delta}{\le}\|v-w\|+\|w-u\|=d(u,w)+d(w,v)$$

הגדרה יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ויהי $u\in V$ וגם $S\subseteq V$.נאמר כי u ניצב ל-S (ונסמן $u\perp S$) אם $\forall v\in S$, $u\perp v$.

טענה $u\perp S$ אם"ם $u\perp \mathrm{sp}S$, כלומר $\mathrm{sp}(S)^T=S^T$

הוכחה: $\Rightarrow$: מהיות $S\subseteq \mathrm{sp}S$ ולכן $u\perp S$.

$\Leftarrow$: יהי $v\in\mathrm{sp}S$. לכן קיימים $v_1,\dots,v_n$ וכן $c_1,\dots,c_n\in F$ כ ך ש- $v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n$ ולכן

$$\langle u\mid v\rangle=\langle u\mid c_1v_1+\cdots+c_nv_n\rangle=c_1\langle u\mid v_1\rangle+\cdots+c_n\langle u\mid v_n\rangle=0$$

ולכן $u\perp v$. ■

הגדרה יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ויהי $S\subseteq V$. המרחב הניצב של (האורתוגונלי) של S מוגדר להיות $S^\perp=\{u\in V: u\perp S\}$.

טענה $S^\perp$ הוא ת"מ של V.

הוכחה: $\langle 0_V\mid v\rangle=0$, $\forall v\in S$ ולכן $0_V\in S^\perp$.

יהיו $u,u'\in S^\perp$ ויהי $v\in S$. לכן

$$\langle u+u'\mid v\rangle=\langle u\mid v\rangle+\langle u'\mid v\rangle=0+0=0$$

יהי $u\in S^\perp$, $c\in F$. אזי $\forall v\in S$ מתקיים $\langle cu\mid v\rangle=\bar{c}\langle u\mid v\rangle=0$. ■

הגדרה יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו-$v,v_W\in V$. נאמר כי v_W הוא הטלה אורתוגונלית של v על W אם $v_W\in W$ וגם $v-v_W\in W^\perp$.

דוגמה ב-$\mathbb{R}^2$ (ראו איור)

טענה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו-$v, v_W \in V$ ו-$w \in W$. אם v_W הטלה אורתוג' של v על W אזי $d(v, w) \geq d(v, v_W)$ והשוויון מתקיים אם"ם $w = v_W$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} d(v,w)^2 &= \|w-v\|^2 \\ &= \|(w-v_W)+(v_W-v)\|^2 \\ &\overset{\text{פיתגורס}}{=} \|w-v_W\|^2 + \|v_W-v\|^2 \\ &= d(v,v_W)^2 + d(v_W,w)^2 \\ &\geq d(v,v_W)^2 \end{aligned}$$

השוויון מתקיים אם"ם $d(v_{W,}w)^2 = 0$ אם"ם $w = v_W$. ■

מסקנה (יחידות ההטלה האורתוג') יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו-$v, v_W, v'_W \in V$ כך ש- v_W, v'_W הן הטלות אורתוג' של v על W. אזי $v_W = v'_W$.

הוכחה: $d(v, v_W) \geq d(v, v'_W)$ גם $d(v, v'_W) \geq d(v, v_W)$ ולכן $d(v, v'_W) = d(v, v_W)$ ומהטענה נובע כי $v'_W = v_W$. ■

הגדרה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, $v_1, \ldots, v_k \in V$. הסדרה $(v_1, \ldots, v_k)$ נקראת <u>אורתוגנלית</u> אם $i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j$. נאמר כי $(v_1, \ldots, v_k)$ היא <u>אורתונורמלית</u> אם היא אורתוגנלית וגם $\|v_i\| = 1 \, , \forall i \in [k]$.

דוגמה $V = F^n$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ היא המפכלה הסקלרית. אזי $(e_1, \ldots, e_n)$ היא אורתונורמלית.

הערה אם $(v_1, \ldots, v_k)$ אורתוגונלית וגם $\forall i \in [k] \, , v_i \neq 0_V$, אזי $\left(\frac{1}{\|v_1\|} v_1, \ldots, \frac{1}{\|v_k\|} v_k\right)$ אורתונורמלית.

טענה תהי $(v_1, \ldots, v_k)$ אורתוגונלית וגם $\forall i \in [k] \, , v_i \neq 0_V$. אזי $(v_1, \ldots, v_k)$ בת"ל.

הוכחה: יהיו $c_1, \ldots, c_k \in F$ כך ש- $c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k = 0_V$. $\forall i \in [k]$ מתקיים

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_i \mid 0_V \rangle \\ &= \langle v_i \mid c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \rangle \\ &= c_1 \langle v_i \mid v_1 \rangle + \cdots + c_k \langle v_i \mid v_k \rangle \\ &= c_i \langle v_i \mid v_i \rangle \\ &= c_i \|v_i\|^2 \end{aligned}$$

אבל $v_i \neq 0_V$ ולכן $\|v_i\|^2 \neq 0$ ולכן $c_i = 0$. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V, $(w_1, \ldots, w_k)$ סדרה אורתונורמלית הפורשת את W (כלומר $W = \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\}$) אזי $\forall v \in V$ הוקטור $v_W = \langle w_1 \mid v \rangle w_1 + \cdots + \langle w_k \mid v \rangle w_k$ הוא הטלה אורתוג' של v על W.

הוכחה: ברור ש-$v_W \in \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\} = W$. נוכיח כי $v - v_W \perp \{w_1, \ldots, w_k\}$. $\forall i \in [k]$,

$$\begin{aligned}
\langle w_i \mid v - v_W \rangle &= \langle w_i \mid v - \langle w_1 \mid v \rangle w_1 - \cdots - \langle w_k \mid v \rangle w_k \rangle \\
&= \langle w_i \mid v \rangle - \langle w_1 \mid v \rangle \langle w_i \mid w_1 \rangle - \cdots - \langle w_k \mid v \rangle \langle w_i \mid w_k \rangle \\
&= \langle w_i \mid v \rangle - \langle w_i \mid v \rangle \langle w_i \mid w_i \rangle \\
&= \langle w_i \mid v \rangle - \langle w_i \mid v \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

ולכן $v - v_W \perp \operatorname{sp}\{w_1, \ldots, w_k\} = W$. ■

תרגול

תרגיל נתון אופרטור $f : \mathbb{R}^{27} \to \mathbb{R}^{27}$ כך ש- $f^4 = 0$, $\dim\ker f^3 = 24$, $\dim\ker f^2 = 19$, $\dim\ker f = 10$. מצאו כמה שרשראות יש בבסיס שרשראות של f ומה אורכן.

הערה כבר ראינו אותו אבל עכשיו נפתור בדרך אחרת.

פתרון ראינו בתרגיל 7 כי מספר השרשראות באורך k בבסיס השרשראות של f הוא $2\dim\ker f^k - \dim\ker f^{k-1} - \dim\ker f^{k+1}$. לכן

אורך השרשרת	מספר השרשראות
1	$2 \cdot 10 - 19 - 0 = 1$
2	$2 \cdot 19 - 24 - 10 = 4$
3	$2 \cdot 24 - 19 - 27 = 2$
4	$2 \cdot 27 - 24 - 27 = 3$

בצורת הז'ורדן, שרשרת מאורך k מתאימה לבלוק ז'ורדן אלמנטרי $J_k(0)$ ולכן

$$[f]_B = \operatorname{Block}\left(J_4(0), J_4(0), J_4(0), J_3(0), J_3(0), J_2(0), J_2(0), J_2(0), J_2(0), J_1(0)\right)$$

טענה יהיו V מ"ו מעל F ו-$g : V \to V$ אופרטור אזי $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \ldots$ הם ת"מ g-אינ'.

הוכחה: נראה שלכל k, $\ker g^k \subseteq \ker g^{k+1}$. יהי $v \in \ker g^k$. לכן $g^{k+1}(v) = g\left(g^k(v)\right) = g(0) = 0$ ולכן $v \in \ker g^{k+1}$.

נוכיח כי $g\left(\ker g^{k}\right)\subseteq\ker g^{k-1}$. יהי $v\in\ker g^{k}$.

$$g^{k-1}\left(g\left(v\right)\right)=g^{k}\left(v\right)=0$$

ולכן $g\left(v\right)\in\ker g^{k-1}$. אבל ראינו כי $\ker g^{k-1}\subseteq\ker g^{k}$ ולכן $g\left(\ker g^{k}\right)\subseteq\ker g^{k-1}\subseteq\ker g^{k}$. ■

טענה יהיו V מ"ו נ"ס מעל F ו-$g:V\to V$ אופרטור אזי קיים $k\leq\dim V$ כך ש- $\ker g^{k}=\ker g^{k+1}$ וגם $\forall l\geq k$ מתקיים $\ker g^{l}=\ker g^{k}$.

הוכחה: נניח בשלילה כי לכל $0\leq k\leq\dim V$ מתקיים $\ker g^{k}\subsetneq\ker g^{k+1}$. נקבל כי

$$\begin{aligned}\dim\ker g & \geq1\\ \dim\ker g^{2} & \geq\dim\ker g-1\geq2\\ & \vdots\\ \dim\ker g^{\dim V+1} & \geq\dim V+1\end{aligned}$$

סתירה

נוכיח בתרגיל את החלק השני. ■

הגדרה יהיו V מ"ו נ"ס, $f:V\to V$ אופרטור ו-λ ע"ע של f. נגדיר $g=f-\lambda\mathrm{id}_{V}$. יהי k המינימלי כך ש- $\ker g^{k}=\ker g^{k+1}$. נגדיר את <u>המרחב העצמי המוכלל</u> להיות $\hat{V_{\lambda}}=\ker g^{k}$.

טענה (i) $\hat{V_{\lambda}}$ הוא f-אינ'.

(ii) $\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)|_{\hat{V_{\lambda}}}$ הוא נילפ' מדרגה k לכל היותר כאשר k הוא המינימלי כך שהגרעינים מתייצבים.

הוכחה: (i) $\hat{V_{\lambda}}=\ker\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)^{k}$ הוא $\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)$-אינ' מהטענה שראינו למעלה והואגם $\lambda\mathrm{id}_{V}$-אינ' ולכן מסגירות האינ' לצירופים לינאריים, $f=f-\lambda\mathrm{id}_{V}+\lambda\mathrm{id}_{V}$ הוא אופרטור הנשמר ע"י $\hat{V_{\lambda}}$.

(ii)

$$\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)^{k}\left(\hat{V_{\lambda}}\right)=\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)^{k}\left(\ker\left(f-\lambda\mathrm{id}_{V}\right)^{k}\right)=\left\{ 0\right\}$$

■

משפט יהיו V מ"ו נ"ס, $f:V\to V$ אופרטור כך ש- χ_{f} מתפרק לגורמים לינאריים $\chi_{f}\left(x\right)=\left(x-\lambda\right)^{m_{1}}\cdot\ldots\cdot\left(x-\lambda_{k}\right)^{m_{k}}$ כאשר $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{k}$. אזי מתקיים $V=\hat{V_{\lambda_{1}}}\oplus\cdots\oplus\hat{V_{\lambda_{k}}}$ ובנוסף $\dim\hat{V_{\lambda_{i}}}=m_{i}$, $\forall i\in[k]$.

הוכחה: מקיילי המילטון, $\chi_{f}\left(f\right)=0$ וגם $\gcd\left(\left(x-\lambda_{i}\right)^{m_{i}},\left(x-\lambda_{j}\right)^{m_{j}}\right)=1$ $i\neq j\to$ ולכן ממשפט הפירוק הפולינומיאלי

$$V=\ker0=\ker\chi_{f}\left(f\right)=\ker\left(f-\lambda_{k}\mathrm{id}\right)^{m_{1}}\oplus\ldots\oplus\ker\left(f-\lambda_{k}\mathrm{id}\right)^{m_{k}}$$

$\forall i\in[k]$ מתקיים $\ker(f-\lambda_i\mathrm{id})^{m_i}\subseteq\hat{V_{\lambda_i}}$ בגלל שקיים l כך ש- $\hat{V_{\lambda_i}}=\ker(f-\lambda_i\mathrm{id})^{l}$ ולכן לכל $l\geq m$, מתקיים $\hat{V_{\lambda_i}}=\ker(f-\lambda_i\mathrm{id})^{m}$. נבחר $m\geq\max\{l,m_i\}$ ונקבל $\ker(f-\lambda_i\mathrm{id})^{m_i}\subseteq\ker(f-\lambda_i\mathrm{id})^{m}=\hat{V_{\lambda_i}}$.

ממשפט ז'ורדן, הגודל של הבלוק ז'ורדן J^{λ_i} הוא m_i. בתיאור מאוד מצומצם, מוצאים שהת"מ האינ' המתאים לבלוק J^{λ_i} הוא אכן $\hat{V_{\lambda_i}}$ ולכן $\dim\hat{V_{\lambda_i}}=m_i$. ■

הערה להלן מילון מושגים המקשר בין הנושא של ערכים עצמיים לבין מטריצו ז'ורדן.

מושג	מתאים ל
ע"ע ומ"ע	מ"ע מוכלל, בלוק ז'ורדן
ר"א	מימד מ"ע מוכלל, גודל בלוק ז'ורדן
ר"ג	מס בלוקי ז'ורדן אלמנטריים

תרגיל תהי $A=\begin{pmatrix}-3&1\\-1&-1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{C})$ מצאו את צורת הז'ורדן של A ובסיס מז'רדן.

פתרון $\chi_A(x)=(x+2)^2$ לכן הע"ע היחיד הוא -2. נסמן $V=\mathbb{C}^2$. לכן $V=\hat{V_2}$. $B=A-(-2)I=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&1\end{pmatrix}$ היא נילפ'. נמצא לה בסיס שרשראות. $B^2=0$ ולכן B נילפ' מדרגה 2. לכן בבסיס שרשראות יש שרשרת אחת מאורך 2 (צריכים שני וקטורים לבסיס, ויש לפחות וקטור אחד מגובה 2 ולכן יש בדיוק שרשרת אחת באורך 2). נבחר $v=e_1$, לכן

$$\begin{matrix}e_1\\\downarrow\\\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\end{matrix}$$

הוא בסיס שרשראות של V ביחס ל-B. נסמן $\epsilon=\left(e_1,\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$. לכן $[f_B]_\epsilon=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ ולכן $[f_A]_\epsilon=[f_B]_\epsilon+(-2)I=\begin{pmatrix}-2&0\\1&-2\end{pmatrix}$.

תרגיל תהי $A=\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\0&2&2&0\\0&-1&-1&0\\-1&0&0&1\end{pmatrix}$. $\chi_A(x)=x^3(x-1)$ ולכן שני הע"ע הם $0,1$. $\dim\hat{V_1}=1$ ולכן $\hat{V_1}=V_1$.

$$A-I=\begin{pmatrix}-2&0&0&1\\0&1&2&0\\0&-1&-2&0\\-1&0&0&-1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_1=\ker(A-I)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}:x=w=0,y+2z=0\right\}=\mathrm{sp}\left\{\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-2\\1\\0\end{pmatrix}}_{v_1}\right\}$$

$A^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&2&2&0\\0&-1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A^2$ ולכן $\hat{V_0}=\ker A^2$. A נילפ' מדרגה 2 לכל היותר על $\hat{V_0}$ אבל $\mathrm{rank}A=2,\mathrm{rank}A^2=1$ ולכן $\ker A\neq\hat{V_0}$ לכן $f_A|_{\hat{V_0}}$ נילפ' בדיוק מדרגה 2. לכן יש שרשרת באורך 2 ושרשרת באורך 1. $\hat{V_0}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}:y-z=0\right\}$ נבחר e_1,Ae_1, נחפש $v\in\ker A$ שאינו ב- $\mathrm{sp}(Ae_1)=\mathrm{sp}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ (ראינו כי שרשראות הן בת"ל על בסיס הוקטור האחרון בהן) והוא יהווה לנו שרשרת באורך 1. $\ker A=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\w\end{pmatrix}:-x+w=0,y-z=0\right\}$, לכן $v=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}$ מתאים. לכן צורת הז'ורדן היא

$$\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

עם הבסיס $B=(v_1,e_1,Ae_1,v)$.

שבוע $\mathbb{IX}$ | תהליך גרם-שמידט, אורתונורמליות

הרצאה

דוגמה $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית. $W=\operatorname{sp}\{e_1\}$, $w_1=e_1$, $v=\left(\begin{smallmatrix}a\\b\end{smallmatrix}\right)$. במקרה זה, $v_W=(w_1\cdot v)\,w_1=a\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a\\0\end{smallmatrix}\right)$.

משפט (תהליך גרם-שמידט) יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ, $(b_1,\ldots,b_m)$ סדרה בת"ל של וקטורים מ-V. אזי קיימת סדרה אורתונורמלית $(u_1,\ldots,u_m)$ של וקטורים מ-V כך ש- $\forall k\in[m]$ מתקיים $\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_k\}=\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_k\}$.

הוכחה: נבנה את $u_1,\ldots,u_m$ באופן ריקורסיבי.

נגדיר $u_1=\frac{1}{\|b_1\|}b_1$, ולכן $\|u_1\|=1$ ולכן (u_1) היא סדרה אורתונ' וגם $\operatorname{sp}\{b_1\}=\operatorname{sp}\{u_1\}$.

בצעד ה-$i+1$-י, נניח כי $(u_1,\ldots,u_i)$ היא סדרה אורתונ' המקיימת $\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_i\}=\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_i\}$. נגדיר את u_{i+1} באופן הבא.

נגדיר

$$b'_{i+1}=\langle u_1\mid b_{i+1}\rangle\,u_1+\cdots+\langle u_i\mid b_{i+1}\rangle\,u_i$$

שזו ההטלה של האורתוג' של b_{i+1} על $\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_i\}$, לכן $b_{i+1}-b'_{i+1}\perp\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_i\}$.

$b'_{i+1}\in\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_i\}=\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_i\}$ ובגלל ש- $\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$ בת"ל אזי $b_{i+1}\notin\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_i\}$ ולכן $b_{i+1}\neq b_i$. נגדיר

$$b''_{i+1}=b_{i+1}-b'_{i+1}$$

ולכן $b''_{i+1}\neq 0_V$. נגדיר

$$u_{i+1}=\frac{1}{\left\|b''_{i+1}\right\|}b''_{i+1}$$

אזי $\|u_{i+1}\|=1$ וגם $u_{i+1}\perp\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_i\}$ ולכן $(u_1,\ldots,u_{i+1})$ היא סדרה אורתונ'.

נוכיח כי $\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_{i+1}\}=\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$. $\forall j\in[i]$ מתקיים $u_j\in\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_i\}\subseteq\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$. בנוסף,

$$b'_{i+1}\in\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_i\}\subseteq\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$$
$$b_{i+1}\in\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$$

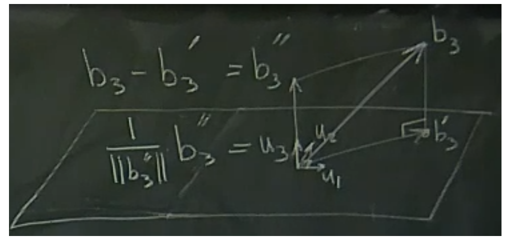
ולכן $b''_{i+1}\in\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$ ולכן $u_i\in\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$ ולכן $\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_{i+1}\}\subseteq\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}$.

מהיות $(u_1,\ldots,u_{i+1})$ אורתונ' היא גם בת"ל וגם $(b_1,\ldots,b_{i+1})$ בת"ל ולכן

$$\dim\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\}=i+1=\dim\operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_{i+1}\}$$

ולכן $\operatorname{sp}\{b_1,\ldots,b_{i+1}\} = \operatorname{sp}\{u_1,\ldots,u_{i+1}\}$.

ראו איור לאינטואיציה לבניית u_{i+1}.



כאן, אנו מדגימים את האלגוריתם עבור $\mathbb{R}^3$ כאשר $u_1 = e_1, u_2 = e_2$ ואנו בונים את u_3. ■

מסקנה בכל ממ"פ ממימד סופי קיים בסיס אורתונ'.

מסקנה אם W ת"מ נ"ס של ממ"פ $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$, $v \in V$ אזי קיימת הטלה אורתוג' של v על W.

הוכחה: ניקח בסיס אורתונ' W, ומטענה מההרצאה הקודמת נוכל לבנות מהסדרה הזו הטלה אורתוג'. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס ויהי $B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונ' של V, $v, w \in V$. אזי

$$\langle v \mid w \rangle = [v]_B \cdot [w]_B$$
$$\|v\| = \|[v]_B\|_{F^n}$$

כאשר $\cdot$ היא המכפלה הסקלרית ו-$\|\cdot\|_{F^n}$ מוגדרת ע"י המכפלה הסקלרית כמ"פ.

הוכחה: נסמן $[w]_B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $[v]_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\langle v \mid w \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n a_i u_i \mid \sum_{j=1}^n b_j u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \overline{a_i} \left\langle u_i \mid \sum_{j=1}^n b_j u_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} b_j \langle u_i \mid u_j \rangle \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i = [v]_B \cdot [w]_B
\end{aligned}$$

וברור כי $\|v\| = \langle v \mid v \rangle = [v]_B \cdot [v]_B = \|[v]_B\|_{F^n}$.

$(*)$ $\langle u_i \mid u_j \rangle$ מתאפס עבור $i \neq j$ ושווה ל-1 עבור $i = j$ (כלומר הוא δ_{ij}) ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונ' של V, $v, w \in V$. אזי:

(i) $[v]_B = \begin{pmatrix} \langle u_1|v\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n|v\rangle \end{pmatrix}$.

(ii) $\langle v \mid w\rangle = \overline{\langle u_1 \mid v\rangle} \langle u_1 \mid w\rangle + \cdots + \overline{\langle u_n \mid v\rangle} \langle u_n \mid w\rangle$.

(iii) $\|v\|^2 = |\langle u_1 \mid v\rangle|^2 + \cdots + |\langle u_n \mid v\rangle|^2$.

הוכחה: (i) הטלה אורתוג' של v על V היא v, כי $v \in V$ וגם $v - v = 0 \perp V$. מיחידות ההטלה האורתוג' מתקיים

$$v = \langle u_1 \mid v\rangle u_1 + \cdots + \langle u_n \mid v\rangle u_n$$

ולכן (i) מתקיים.

(ii)

$$\langle v \mid w\rangle = [v]_B \cdot [w]_B = \begin{pmatrix} \langle u_1|v\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n|v\rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \langle u_1|w\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n|w\rangle \end{pmatrix} = \overline{\langle u_1 \mid v\rangle} \langle u_1 \mid w\rangle + \cdots + \overline{\langle u_n \mid v\rangle} \langle u_n \mid w\rangle$$

(iii)

$$\|v\|^2 = \|[v]_B\|_{F^n}^2 = \left\| \begin{pmatrix} \langle u_1|v\rangle \\ \vdots \\ \langle u_n|v\rangle \end{pmatrix} \right\|_{F^n}^2 = |\langle u_1 \mid v\rangle|^2 + \cdots + |\langle u_n \mid v\rangle|^2$$

■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $(u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונ' של V. נגדיר $W = \mathrm{sp}\{u_1, \ldots, u_k\}$ כאשר $1 \le k \le n-1$ אזי $W^\perp = \mathrm{sp}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$.

הוכחה: לכל $k+1 \le i \le n$ מתקיים $u_i \perp \{u_1, \ldots, u_k\}$ ולכן $u_i \perp \mathrm{sp}\{u_1, \ldots, u_k\} = W$, ולכן $u_{k+1}, \ldots, u_n \in W^\perp$ ולכן $\mathrm{sp}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\} \subseteq W^\perp$.

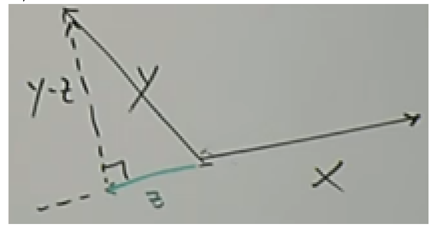
יהי $v \in W^\perp$. אזי מהטענה הקודמת

$$v = \underbrace{\langle u_1 \mid v\rangle}_{=0} u_1 + \cdots + \underbrace{\langle u_k \mid v\rangle}_{=0} u_k + \langle u_{k+1} \mid v\rangle u_{k+1} + \cdots + \langle u_n \mid v\rangle u_n = \langle u_{k+1} \mid v\rangle u_{k+1} + \cdots + \langle u_n \mid v\rangle u_n$$

ולכן $\mathrm{sp}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\} \supseteq W^\perp$. ■

תרגול

הערה ראו באיור אינטואיציה להטלה בניצב (שנקראה הטלה אורתוג' בהרצאה) ראו איור.



טענה קיים $z \in V$ יחיד שהוא הטלה בניצב של y על x.

הוכחה: <u>קיום</u>: נבחר $z = \frac{\langle x|y \rangle}{\|x\|^2}x$. $z \in \text{sp}\left\{x\right\}$ וגם

$$\langle x \mid y - z \rangle = \left\langle x \mid y - \frac{\langle x \mid y \rangle}{\|x\|^2}x \right\rangle = \langle x \mid y \rangle - \frac{\langle x \mid y \rangle}{\langle x \mid x \rangle} \langle x \mid x \rangle = 0$$

ולכן z הוא אכן הטלה בניצב של y על x.

<u>יחידות</u>: ראינו כבר בהרצאה. ■

דוגמה $V = \mathbb{C}^2$ עם המכפלה הסקלרית. $y = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$. נחשב את ההטלה בניצב ל-$y$ על x כאשר:

$x = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) | \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rangle}{\|\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\|^2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$x = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) | \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rangle}{\|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\|^2} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$.

$x = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$, $\frac{\langle \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) | \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) \rangle}{\|\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)\|^2} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right) = \frac{38}{64} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \end{smallmatrix}\right)$.

תרגיל $V = \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x+y \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ המכפלה הסקלרית. f הפיך ולכן נוכל להגדיר $\langle x \mid y \rangle_f = \langle f\left(x\right) \mid f\left(y\right) \rangle$. חשבו את ההטלה בניצב של $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ על $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ביחס ל-$\langle \cdot \mid \cdot \rangle$.

פתרון $\frac{\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) | \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle_f}{\|\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\|^2} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

תרגיל $V = M_n(F)$, $\langle A \mid B \rangle = \text{Tr}\left(\overline{A}^T B\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \left[\overline{A}^T B\right]_{ii}$. הוכיחו כי זו מ"פ.

פתרון

$$\langle A \mid B \rangle = \sum_{j=1}^{n} \left[\overline{A}^T B\right]_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \left[\overline{A}^T\right]_{ji} \left[B\right]_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{\left[A\right]_{ij}} \left[B\right]_{ij}$$

זו המכפלה הסקלרית על $M_n(F)$ (כלומר המכפלה הסקלרית אם נפרוש כל מטריצה לוקטור עמודה באורך n^2) ולכן היא מ"פ.

דוגמה $V = C\left(\left[0,1\right]\right)$ (הפ' הרציפות) $\langle f \mid g \rangle = \int\limits_0^1 f\left(x\right) g\left(x\right) \text{dx}$ היא מכ"פ על V.

טענה אם $S_2 \subseteq S_1$ אזי $S_2^\perp \supseteq S_1^\perp$.

הוכחה: יהי $v\in S_2^{\perp}$. $\forall u\in S_2$ מתקיים $u\perp v$ ובפרט זה נכון $\forall v\in S_1$ ולכן $v\in S_1^{\perp}$. ■

דוגמאות

1. $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסקלרית.

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}^{\perp}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):\left\langle\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)\mid\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right\rangle=0\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):x+y=0\right\}=\operatorname{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

2. $V=\mathbb{C}^3$ עם המכפלה הסלקרית.

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\i\\0\end{smallmatrix}\right)\right\}^{\perp}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{C}^3:\begin{matrix}i\overline{x}=0\\ \overline{x}+i\overline{y}=0\end{matrix}\right\}=\operatorname{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

3. $V=\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסלקרית.

$$\left\{\left(\begin{smallmatrix}s+t\\t\\-t\end{smallmatrix}\right):s,t\in\mathbb{R}\right\}^{T}\overset{\text{מהטענה}}{=}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right)\right\}^{\perp}=\ldots$$

טענה יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $U\subseteq V$ ת"מ אזי $V=U\oplus U^{\perp}$.

הוכחה: נראה כי הסכום $U+U^{\perp}$ הוא ישר. יהי $v\in U\cap U^{\perp}$ לכן $\langle v\mid v\rangle=0$ כי הוא ניצב לעצמו ולכן $v=0$.

נוכיח כי $V=U+U^{\perp}$. נסמן $n=\dim V,k=\dim U$ ומהיותו סכום ישר, מספיק להוכיח כי $k+\dim U^{\perp}\geq n$. יהי $B=(u_{\cdot},\ldots,u_k)$ בסיס ל-U. נגדיר $T:V\to F^k$ ע"י $T\left(v\right)=\begin{pmatrix}\langle u_1|v\rangle\\ \vdots\\ \langle u_k|v\rangle\end{pmatrix}$. $U^{\perp}=\ker T$ וממשפט המימדים,

$$\dim U^{\perp}+k\geq\dim U^{\perp}+\dim\operatorname{Im}T=\dim V=n$$

■

שבוע $\mathbb{X}$ | אופרטורים אורתוגונלים, אוניטארים וצמודים

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ מעל F, $f:V\to V$ אופרטור לינארי. אם $\forall v,w\in V$ מתקיים $\langle f\left(v\right)\mid f\left(w\right)\rangle=\langle v\mid w\rangle$ אז נאמר כי f הוא <u>אותרוגונלי</u> אם $F=\mathbb{R}$ <u>ואוניטרי</u> אם $F=\mathbb{C}$.

תכונות

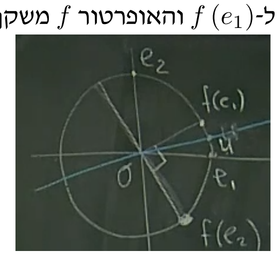
יהי $f:V\to V$ אורתוג'/אונ'.

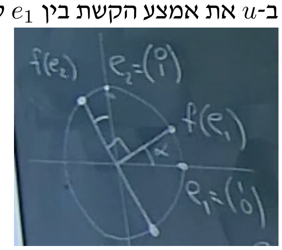
1. $\|f\left(v\right)\|=\|v\|$, $\forall v\in V$ כי

$$\|f\left(v\right)\|^{2}=\langle f\left(v\right)\mid f\left(v\right)\rangle=\langle v\mid v\rangle=\|v\|^{2}$$

2. $\forall v,w\in V$ מתקיים $v\perp w$ אם"ם $f\left(w\right)\perp f\left(v\right)$ כי $\langle f\left(v\right)\mid f\left(w\right)\rangle=\langle v\mid w\rangle$.

דוגמה $V=\mathbb{R}^{2}$ עם המכפלה הסקלרית. יהי $f:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}^{2}$ אופרטור אורתוג'. לכן $\|f\left(e_{1}\right)\|=\|e_{1}\|=1$ וכן $\|f\left(e_{2}\right)\|=\|e_{2}\|=1$. אם $f\left(e_{2}\right)$ הוא כבשרטוט הימני, אזי האופרטור f מסובב כל וקטור במישוא בזווית α. אם $f\left(e_{2}\right)$ הוא כבשרטוט השמאלי, אז נסמן ב-u את אמצע הקשת בין e_{1} ל-$f\left(e_{1}\right)$ והאופרטור f משקף כל וקטור במישור ביחס לישר העובר דרך u ו-σ.





טענה (קריטריון אורתוג'/אונ') יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ, $f:V\to V$ אופרטור אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוג'/אוינטרי.

(ii) $\|f\left(v\right)\|=\|v\|$, $\forall v\in V$.

(iii) אם $v\in V$ הוא וקטור יחידה אזי גם $f\left(v\right)$ הוא וקטור יחידה.

הוכחה: $(i)\Leftarrow(ii)$ ברור מתכונה 1.

$(ii) \Leftarrow (i)$ עבור $F=\mathbb{R}$ מתקיים

$$\begin{aligned}\langle f(v) \mid f(w)\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|f(v)+f(w)\|^2-\|f(v)-f(w)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|f(v+w)\|^2-\|f(v-w)\|^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\right)\\ &= \langle v \mid w\rangle\end{aligned}$$

באותו האופן ניתן להוכיח זאת עבור $F=\mathbb{C}$.

$(ii) \Leftarrow (iii)$ ברור.

$(iii) \Leftarrow (ii)$ יהי $v\in V$. אם $v=0$ אזי $\|f(v)\|=0=\|v\|$.

אחרת $v\neq 0$ ולכן $v'=\frac{1}{\|v\|}v$ הוא וקטור יחידה ולכן $\|f(v')\|=1$ ולכן $\frac{1}{\|v\|}\|f(v)\|=\|f(v')\|=1$ ולכן $\|f(v)\|=\|v\|$. ■

טענה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$f:V\to V$ אורתוג'/און' אזי f הפיך.

הוכחה: אם $v\in\ker f$ אזי $\|v\|=\|f(v)\|=\|0\|=0$ ולכן $v=0$ ולכן $\ker f=\{0\}$ ולכן f הפיך. ■

הערה אם V אינו נ"ס, אז אופרטור אורתוג' הוא עדיין חח"ע אבל לא בהכרח הפיך.

טענה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f:V\to V$ אורתוג'/און', $g:V\to V$ הפוך ל-f, אזי g אורתוג'/און'.

הוכחה: יהי $v\in V$. לכן $\|g(v)\|=\|f(g(v))\|=\|v\|$ ולכן g אורתוג'/און'. ■

טענה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f:V\to V$ אורתוג'/און', W ת"מ f-אינ' של V. אזי $W^\perp$ הוא f-אינ'.

הוכחה: $f|_W:W\to W$ הוא אורתוג'/און' ולכן $f|_W$ הפיך ובפרט $\forall w\in W$ קיים $w'\in W$ כך ש-$w=f(w')$. יהי $u\in W^\perp$. יהי $w\in W$ לכן קיים $w'\in W$ כך ש-$w=f(w')$ ולכן

$$\langle f(u) \mid w\rangle=\langle f(u)\mid f(w')\rangle=\langle u\mid w'\rangle=0$$

כלומר $f(u)\perp w$, $\forall w\in W$ ולכן $f(u)\in W^\perp$. ■

טענה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ו-$f:V\to V$ אופרטור אורתוג'/און' ו-λ ע"ע של f. אזי $|\lambda|=1$.

הוכחה: יהי v הו"ע המתאים ל-λ. אזי $\|v\|=\|f(v)\|=\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|$ אבל $\|v\|\neq 0$ ולכן $|\lambda|=1$. ■

הערה אם v הו"ע השייך לע"ע λ של f, אזי $\operatorname{sp}\{v\}$ הוא f-אינ' ולכן גם $\operatorname{sp}\{v\}^{\perp}$ הוא f-אינ'.

משפט (קריטריון אורתוג' לממ"פ נ"ס) יהיו $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$f: V \rightarrow V$ אופרטור אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוגונלי/אוניטרי.

(ii) לכל בסיס אורתונרמלי $(u_1, \ldots, u_n)$ של V, $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ מהווה בסיס אורתונורמלי של V.

(iii) קיים בסיס אורתונורמלי $(u_1, \ldots, u_n)$ של V כך ש- $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ בסיס אורתונורמלי של V.

הוכחה: $(i) \Leftarrow (ii)$ $\langle f(u_i) \mid f(u_j)\rangle=\langle u_i \mid u_j\rangle=\delta_{ij}$ ולכן $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ בסיס אורתונורמלי.

$(ii) \Leftarrow (iii)$ יהי בסיס של V, נפיק ממנו בסיס אורתונורמלי באמצעות תהליך גראם שמידט וזהו בסיס המקיים את הדרוש (כי כל בסיס אורתונו' מקיים את הדרוש).

$(iii) \Leftarrow (i)$ יהיו $v, w \in V$. נסמן $v=a_1 u_1+\cdots+a_n u_n$ וכן $w=b_1 u_1+\cdots+b_n u_n$.

$$
\begin{aligned}
\langle f(v) \mid f(w)\rangle & =\left\langle f\left(\sum_{i=1}^n a_i u_i\right) \mid f\left(\sum_{i=1}^n b_j u_j\right)\right\rangle \\
& =\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{a_i} b_j\left\langle f(u_i) \mid f(u_j)\right\rangle \\
& =\sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i \\
& =[v]_{(u_1, \ldots, u_n)} \cdot[w]_{(u_1, \ldots, u_n)} \\
& \stackrel{(*)}{=}\langle v \mid w\rangle
\end{aligned}
$$

$(*)$ בדומה לכאן. ■

חלק ב' של ההרצאה

טענה יהיו $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, B בסיס אורתונ' של V ו-$f: V \rightarrow V$ אופרטור לינארי ונסמן $A=[f]_B$. אזי f אורתוג'/אונ' אם"ם $\overline{A}^T A=I_n$.

הוכחה: נסמן $B=(u_1, \ldots, u_n)$ אזי מתקיים

$$
\begin{aligned}
\langle f(u_i) \mid f(u_j)\rangle & =[f(u_i)]_B \cdot[f(u_j)]_B \\
& =([f]_B[u_i]_B) \cdot([f]_B[u_j]_B) \\
& =(A e_i) \cdot(A e_j) \\
& \stackrel{(*)}{=}(\overline{A e_i})^T A e_j \\
& =e_i^T \overline{A}^T A e_j=\left[\overline{A}^T A\right]_{ij}
\end{aligned}
$$

מטענה שראינו בחלק הקודם, f אורתוג'/אונ' אם"ם $\langle f(u_i) \mid f(u_J)\rangle=\delta_{ij}$ אם"ם $\left[\overline{A}^T A\right]_{ij}=\delta_{ij}$ אם"ם $\overline{A}^T A=I_n$.

$(*)$ מהגדרת המכפלה הסקלרית כ-$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i} y_i = \overline{x}^T y$. ■

הגדרה תהיינה $A \in M_n(\mathbb{R})$ ו-$B \in M_n(\mathbb{C})$. נאמר כי A אורתוגנלית אם $A^T A = I_n$ ונאמר כי B אוניטארית אם $\overline{B}^T B = I_n$.

הגדרה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ו-$w \in V$. נגדיר $\langle w| : V \to F$ ע"י $\langle w| (v) = \langle w \mid v \rangle$, $\forall v \in V$.

הערה $\langle w|$ היא ה"ל בשל הלינאריות באיבר השני של מכפלות פנימיות, לדוגמה עבור $V = F^n$ עם המכפלה הסקלרית, $w = e_1$, $\langle e_1| : F^n \to F$ זה פשוט $x_1 = e_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \langle e_1| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F. פונקציונאל לינארי על V הוא ה"ל $l : V \to F$.

משפט (משפט ההצגה, Reisz) יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $l : V \to F$ פ' לינארי אזי קיים $w \in V$ יחיד כך ש- $l = \langle w|$, כלומר $\forall v \in V$, $l(v) = \langle w \mid v \rangle$.

הוכחה: קיום: יהי $(u_1, \dots, u_n)$ בסיס אורתונ' (קיים מתהליך גרם שמידט) של V. נגדיר $w = \overline{l(u_1)} u_1 + \dots + \overline{l(u_n)} u_n$ אזי $\forall i \in [n]$ מתקיים

$$\begin{aligned} \langle w \mid u_i \rangle &= \left\langle \overline{l(u_1)} u_1 + \dots + \overline{l(u_n)} u_n \mid u_i \right\rangle \\ &= l(u_i) \langle u_1 \mid u_i \rangle + \dots l(u_n) \langle u_n \mid u_i \rangle \\ &\overset{\text{השאר מתאפסים}}{=} l(u_i) \end{aligned}$$

ולכן $\forall v \in V$ מתקיים $\langle w \mid v \rangle = l(v)$ (כי גם כל ק"ל של הבסיס יקיים את השוויון).

יחידות: נניח כי $w, w' \in V$ מקיימים $\langle w'| = l = \langle w|$, לכן $\forall v \in V$ מתקיים $\langle w \mid v \rangle = \langle w' \mid v \rangle$ ולכן $\langle w - w' \mid v \rangle = 0$ ובפרט $\langle w - w' \mid w - w' \rangle = 0$ ולכן מאי-ניוון $w - w' = 0$ ולכן $w = w'$. ■

הערה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור לינארי ו-$w \in V$. $\langle w| \circ f : V \to F$ הוא פ' לינארי על V. לכן ממשפט ההצגה, קיים $w' \in V$ יחיד כך ש- $\langle w| \circ f = \langle w'|$, כלומר $\langle w \mid f(v) \rangle = \langle w' \mid v \rangle$, $\forall v \in V$. נוכיח כי ההתאמה שמתאימה את w ל-w' היא אופרטור לינארי.

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור לינארי אזי קיים $f^* : V \to V$ יחיד כך ש- $\langle w \mid f(v) \rangle = \langle f^*(w) \mid v \rangle$, $\forall v, w \in V$. בנוסף, אם B בסיס אורתונ' של V, $A = [f]_B$ אזי $[f^*]_B = \overline{A}^T$.

הוכחה: קיום: נסמן $A = [f]_B$. נגדיר $f^* : V \to V$ כך ש- $[f^*]_B = \overline{A}^T$ (מוגדר היטב בשל הייצוג היחיד של אופרטור לפי בסיס). לכן $\forall v, w \in V$ מתקיים

$$\begin{aligned} \langle w \mid f(v) \rangle &= [w]_B \cdot [f(v)]_B \\ &= [w]_B \cdot ([f]_B [v]_B) \\ &= \overline{[w]_B}^T A [v]_B \end{aligned}$$

אבל

$$\begin{aligned}\langle f^*(w) \mid v\rangle &= [f^*(w)]_B \cdot [v]_B \\ &= ([f^*]_B [w]_B)\cdot [v]_B \\ &= \overline{\left(\overline{A}^T [w]_B\right)}^T [v]_B \\ &= \overline{[w]_B}^T \overline{\overline{A}^T}^T [v]_B \\ &= \overline{[w]_B}^T A [v]_B\end{aligned}$$

<u>יחידות</u>: נניח כי $f_1^*, f_2^* : V \to V$ אופרטור לינאריים כך ש- $\langle f_2^*(w) \mid v\rangle = \langle w \mid f(v)\rangle = \langle f_1^*(w) \mid v\rangle$, $\forall v, w \in V$. לכן $\langle f_1^*(w) - f_2^*(w) \mid v\rangle = 0$ ובפרט $\langle f_1^*(w) - f_2^*(w) \mid f_1^*(w) - f_2^*(w)\rangle = 0$ ולכן $f_1^*(w) - f_2^*(w) = 0$ ולכן $f_1^* = f_2^*$. ■

הגדרה האופרטור f^* מהטענה נקרא <u>האופרטור הצמוד</u> לאופרטור f, בנוסף, המטריצה $\overline{A}^T$ נקראת <u>המטריצה הצמודה</u> למטריצה A ומסומנת ב-A^*.

הערה אם $F = \mathbb{R}$, אזי $A^* = A^T$.

הערה אם $\dim V = 1$ ו-$A = (a)$ אז $A^* = (\overline{a})$.

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור אורתוג'/אונ' ו-$g : V \to V$ אופרטור הפוך ל-f. אזי $f^* = g$.

הוכחה: $\forall v, w \in V$ מתקיים $\langle g(w) \mid v\rangle = \langle f(g(w)) \mid f(v)\rangle = \langle w \mid f(v)\rangle$ ומיחידות האופרטור הצמוד נובע כי $f^* = g$. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור לינארי, W ת"מ f-אינ' של V, אזי $W^\perp$ הוא ת"מ f^*-אינ'.

הוכחה: יהי $u \in W^\perp$, נוכיח כי $f^*(u) \in W^\perp$. יהי $w \in W$. מהיות W ת"מ f-אינ', מתקיים $f(w) \in W$, לכן

$$\langle f^*(u) \mid w\rangle = \left\langle \underbrace{u}_{\in W^\perp} \mid \underbrace{f(w)}_{\in W} \right\rangle = 0$$

ולכן $f^*(u) \in W^\perp$. ■

תרגול

הערה אינטואציה לאשק"ש. אם אורך ההטלה של u על v היא $\langle u \mid v\rangle$, אז אשק"ש אומר שההטלה היא בדיוק הוקטור אם"ם הוקטור מוטל על עצמו.

הגדרה יהי $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ מכ"פ מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את קוסינוס הזווית בין $u,v\in V$ להיות $\cos\theta=\frac{\langle u|v\rangle}{\|u\|\|v\|}$.

תרגיל נוכיח כי הממוצע החשבוני הגדול קטן-שווה מהממוצע הריבועי של מספרים חיוביים, כלומר $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\leq\sqrt{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2}$.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\square\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

$$\Updownarrow \qquad \uparrow^2$$

$$\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\square\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

$$\Updownarrow \qquad \cdot n^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}1\cdot x_i\right)^2=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2\square n\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\left((1)_{i=1}^n\cdot(x_i)_{i=1}^n\right)\square\|(1)_{i=1}^n\|^2\,\|(x_i)_{i=1}^n\|^2$$

$$\Updownarrow \qquad \sqrt{\ }$$

$$|(1)_{i=1}^n\cdot(x_i)_{i=1}^n|\square\|1\|\cdot\|x_n\|$$

$$\Updownarrow \qquad \text{אשק"ש}$$

$$|(1)_{i=1}^n\cdot(x_i)_{i=1}^n|\leq\|1\|\cdot\|x_n\|$$

הגדרה יהי V מ"ו מעל F (הוא $\mathbb{R},\mathbb{C}$). נורמה על V הי פונקציה $\|\cdot\|:V\to\mathbb{R}$ המקיימת:

(i) (חיוביות ואי-ניוון) $\forall v\in V$, $\|v\|\geq 0$ ו-$\|v\|=0$ אם"ם $v=0$.

(ii) (הומוגניות) $\forall v\in V$, $c\in F$ מתקיים $\|cv\|=|c|\cdot|v|$.

(iii) (א"ש המשולש) $\forall u,v\in V$, $\|u+v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

במקרה זה, $(V,\|\cdot\|)$ נקרא מרחב נורמי.

הערה האם כל נורמה נובעת ממכפלה פנימית? לא!

דוגמה $\mathcal{I}\subset[0,1]^{\mathbb{R}}$ הפ' הרציפות למקוטעין (כלומר שקיימת חלוקה של $[0,1]$ כך שבכל קטע חלוקה הפ' רציפה). נגדיר

$$\|f\|=\sup_{0\leq x\leq 1}|f(x)|$$

(הסטודנטית המשקיעה תוכיח כי זו אכן נורמה). נניח בשלילה שקיימת מכ"פ $\langle\cdot\mid\cdot\rangle$ כך ש- $\|f\|=\sqrt{\langle f\mid f\rangle}$, $\forall f\in\mathcal{I}$.

$$\|f+g\|^2=\langle f+g\mid f+g\rangle=\langle f\mid f\rangle+\langle g\mid g\rangle+2\langle f\mid g\rangle$$

לכן

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2}\left(\|f+g\|^2 - \|f\|^2 - \|g\|^2\right)$$

נבחר $f \equiv 1$, $g\left(x\right) = \begin{cases} 1 & x=\frac{1}{2} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. $\|g\| = 1$, $\|f\| = 1$, $\|f+g\| = 2$ ולכן לפי הנוסחה הנ"ל

$$\langle f \mid g\rangle = \frac{1}{2}\left(2^2 - 1^2 - 1^2\right) = 1 = 1\cdot 1 = \|f\|\cdot\|g\|$$

ולכן מאשק"ש יש תלות לינארית בין f, g (כי יש שוויון, כלומר שק"ש). אבל ברור ש-g היא לא כפל בסקלר של f (וגם לא להפך) סתירה.

אלגוריתם לחישוב תהליך גראם-שמידט

1. נתחיל באינדקס $j=1$.
2. נחשב את ההטלה האורתוג' של u_j על כל הוקטורים שחישבנו עד כה, ונסמנה $w_j = \sum\limits_{i=1}^{j-1}\langle b_i \mid u_j\rangle b_i$.
3. נגדיר $b_j = \frac{u_j - w_j}{\|u_j - w_j\|}$.
4. אם $j<n$ נעלה את j ב-1 ונחזור לשלב 2.

דוגמה מצאו בסיס אורתונ' ל-$\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הסקלרית בעזרת תהליך גראם-שמידט על $u_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$b_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{3^3 + 0^2 + (-4)^3}}u_1 = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \left(b_1\cdot u_2\right)b_1 = \frac{1}{5}\left(6+0+4\right)b_1 = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$u_2 - w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{\|u_2 - w_2\|}\left(u_2 - w_2\right) = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} w_3 &= \langle b_1 \mid u_3\rangle b_1 + \langle b_2 \mid u_3\rangle b_2 \\ &= \frac{1}{5}\left(\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\-4\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) b_1 + \frac{1}{5}\left(\left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}1\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right) b_2 \\ &= \frac{3}{25}\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\-4\end{smallmatrix}\right) + \frac{4}{25}\left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

ולכן $u_3 - w_3 = \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)$. לכן הבסיס האותונ' הוא $\left(\frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix}3\\0\\-4\end{smallmatrix}\right), \frac{1}{5}\left(\begin{smallmatrix}4\\0\\3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\-1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$.

טענה יהי $W \subseteq V$ ת"מ של ממ"פ נ"ס, אזי קיים בסיס אורתונ' $\{u_1, \ldots, u_n\}$ כך ש- $W = \operatorname{sp}\{u_1, \ldots, u_k\}$.

הוכחה: ניקח בסיס $u_1, \ldots, u_k$ ל-W. נשלים אותו לבסיס של V, $v_1, \ldots, v_n$ ל-V. נעשה גראם-שמידט ונקבל בסיס אורתונ' $u_1, \ldots, u_n$ ל-V ומהמשפט $W = \operatorname{sp}\{v_1, \ldots, v_k\} = \operatorname{sp}\{u_1, \ldots, u_k\}$. ■

טענה (ראינו בהרצאה) יהי V ממ"פ. יהיו $\{u_1, \ldots, u_n\}$ בסיס אורתונ' ל-V ו-. אזי $W^\perp = \operatorname{sp}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$.

מסקנה יהי V ממ"פ נ"ס. אם W הוא ת"מ של V אזי $\dim V = \dim W + \dim W$ וגם $V = W \oplus W^\perp$.

הוכחה: מהטענה הקודמת $\dim W = k$ ו-$\dim W^\perp = n - k$ וכבר הוכנחו כי $W \cap W^\perp = \{0\}$ ולכן $W \oplus W^\perp = V$. ■

הגדרה המרחב $W^\perp$ נקרא המשלים הניצב של V.

טענה יהי $W \subseteq V$ ת"מ של ממ"פ נ"ס. אזי $\left(W^\perp\right)^\perp$.

הוכחה: יהי $w \in W$. לכן $w \perp W^\perp$ ולכן $w \in \left(W^\perp\right)^\perp$ ולכן $W \subseteq \left(W^\perp\right)^\perp$. בנוסף

$$\dim\left(W^\perp\right)^\perp = \dim V - \dim W^\perp = \dim V - (\dim V - \dim W) = \dim W$$

ולכן $W = \left(W^\perp\right)^\perp$. ■

הגדרה $p_{W,W^\perp} : V \to V$ היא ההטלה האורתוג' על W.

הערה זוהי ה"ל והגרעין שלה הוא $W^\perp$. בגלל ש-$W^\perp$ הוא מוגדר היטב ויחיד, נסמן $p_{W,W^\perp} = p_W$. ומתקיים $p_W + p_{W^\perp} = \mathrm{id}$.

מסקנה אם w היא ההטלה האורתוג' של v על W ו-z היא ההטלה של v על $W^\perp$ אזי $w + z = v$ (נובע מתכונות ההטלה).

תרגיל יהיו $u_2 = \left(\begin{smallmatrix}0\\2\\4\\6\end{smallmatrix}\right), u_1 = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ו-$U = \operatorname{sp}\{u_1, u_2\}$.

א. מצאו בסיס אורתונ' ל-U.

ב. מצאו את המטריצת המייצגת של p_U ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

ג. מצאו את המטריצה המייצגת של $p_{U^\perp}$ ביחס לבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^4$.

ד. חשבו את $p_U\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\\0\end{smallmatrix}\right)$ ו-$p_{U^\perp}\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\3\\0\end{smallmatrix}\right)$.

פתרון א. $\|u_1\| = 2$ ולכן $b_1 = \frac{1}{2}u_1$.

$$w_2 = (b_1 \cdot u_2)\, b_1 = \frac{1}{2}(0+2+4+6)\, b_1 = 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix}0\\2\\4\\6\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$$

ובנוסף $\|v_2\| = \sqrt{20}$ ולכן $b_2 = \frac{1}{\sqrt{20}}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix}$.

ב.

$$p_U(e_1) = (b_1 \cdot e_1)\, b_1 + (b_2 \cdot e_1)\, b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{3}{20}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}7\\4\\1\\-2\end{pmatrix}$$

$$p_U(e_2) = (b_1 \cdot e_2)\, b_1 + (b_2 \cdot e_2)\, b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{20}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}4\\3\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$p_U(e_3) = (b_1 \cdot e_3)\, b_1 + (b_2 \cdot e_3)\, b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{20}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$$

$$p_U(e_4) = (b_1 \cdot e_4)\, b_1 + (b_2 \cdot e_4)\, b_2 = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{3}{20}\begin{pmatrix}-3\\-1\\1\\3\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}-2\\1\\4\\7\end{pmatrix}$$

ולכן $[p_U]_E = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&3&1&-2\\4&3&2&1\\1&2&3&4\\-2&1&4&7\end{pmatrix}$.

ג. $p_U + p_{U^\perp} = \mathrm{id}$ ולכן

$$[P_{U^\perp}]_E = I - [P_U]_E = \begin{pmatrix}1&&&0\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix} - \frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&3&1&-2\\4&3&2&1\\1&2&3&4\\-2&1&4&7\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}3&-4&-1&2\\-4&7&-2&-1\\-1&-2&7&-4\\2&-1&-4&3\end{pmatrix}$$

ד.

$$p_U\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix}7&3&1&-2\\4&3&2&1\\1&2&3&4\\-2&1&4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

ובנוסף $p_{U^\perp} = \mathrm{id} - p_U$ ולכן

$$p_{U^\perp}\begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\3\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\-1\end{pmatrix}$$

שבוע $\mathbb{XI}$ | אופרטורים צמודים לעצמם והמשפט הספקטרלי במקרה הממשי

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"' נ"ס. נאמר כי אופרטור לינארי $f : V \to V$ הוא צמוד לעצמו אם $f^* = f$.

הערה f צמוד לעצמו אם"ם קיים (ובעצם גם לכל) בסיס אורתונ' B של V, $[f]_B = [f]_B^*$, כאשר $A^* = \overline{A}^T$.

הגדרה תהי מטריצה $A \in M_n(F)$. נאמר כי A צמודה לעצמה אם $A = A^*$. עבור $F = \mathbb{R}$, A נקראת סימטרית (במקרה זה ההגדרה שקולה ל-$A = A^T$), ועבור $F = \mathbb{C}$, A נקראת הרמטית.

דוגמאות

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$ ולכן A הרמטית.
2. $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ולכן A לא הרמטית.

הערה אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ הרמטית, אז כל איברי האלכסון של A הם ממשיים.

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\lambda \in \mathbb{C}$ ע"ע של f, אזי $\lambda \in \mathbb{R}$.

הוכחה: יהי $v \in V$ ו"ע ששייך ל-λ. אזי

$$\lambda \langle v \mid v \rangle = \langle v \mid \lambda v \rangle = \langle v \mid f(v) \rangle = \langle f^*(v) \mid v \rangle = \langle f(v) \mid v \rangle = \langle \lambda v \mid v \rangle = \overline{\lambda} \langle v \mid v \rangle$$

ומהיות $v \neq 0$ מתקיים $\langle v \mid v \rangle \neq 0$ ולכן $\lambda = \overline{\lambda}$ ולכן $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

מסקנה אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ צמודה לעצמה אז $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא ע"ע אז $\lambda \in \mathbb{R}$.

הוכחה: נתבונן ב-$\mathbb{C}^n$ עם המכפלה הסקלרית. $f_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ אזי $[f]_E = A$, לכן f צמוד לעצמו וגם λ הוא ע"ע של f, לכן $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

טענה תהי $A \in M_n(F)$ צמודה לעצמה. אזי קיים $\lambda \in F$ כך ש-λ ע"ע של A.

הוכחה: עבור $F = \mathbb{C}$, הפולינום האופייני של A הוא פולינום מעל $\mathbb{C}$ ולכן יש לו שורש שמהווה ע"ע של A.

עבור $F = \mathbb{R}$, נתבונן ב-A כאיבר ב-$M_n(\mathbb{C})$, אזי לפי המקרה הקודם קיים $\lambda \in \mathbb{C}$ כך ש- λ הוא ע"ע של A. אבל מהמסקנה $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

מסקנה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, אזי קיים $\lambda \in F$ כך ש- λ הוא ע"ע של f.

הוכחה: יהי B בסיס אורתונ' של V. אז $[f]_B$ צמודה לעצמה ולכן קיים $\lambda \in F$ כך ש- λ הוא ע"ע של $[f]_B$. אזי λ הוא ע"ע של f. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\mu \neq \lambda \in F$ ע"ע של f, $v, w \in V$ ו"ע ששיכים ל-λ, μ בהתאמה אזי $v \perp w$.

הוכחה: כמוש ראינו מקודם, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ולכן

$$\lambda \langle w \mid v \rangle = \langle w \mid \lambda v \rangle = \langle w \mid f(v) \rangle = \langle f^*(w) \mid v \rangle = \langle f(w) \mid v \rangle = \langle \mu w \mid v \rangle = \overline{\mu} \langle w \mid v \rangle = \mu \langle w \mid v \rangle$$

מכאן $(\lambda - \mu) \langle w \mid v \rangle = 0$ אבל $\mu \neq \lambda$ ולכן $\langle w \mid v \rangle = 0$, ולכן $v \perp w$. ■

מסקנה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, $\dim V = n$, $f : V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in F$ ע"ע של f כך ש- $i \neq j \to \lambda_i \neq \lambda_j$, אזי קיים בסיס אורתונ' $B = (u_1, \ldots, u_n)$ כך ש- u_i הוא ו"ע של f המתאים לע"ע λ_i, $\forall i \in [n]$.

הוכחה: יהי $v_i \in V$ ע"ע של f השייך ל-λ_i אזי $(v_1, \ldots, v_n)$ סדרה אורתוג'. נגדיר $u_i = \frac{1}{\|v_i\|} v_i$. אזי $\|u_i\| = 1$, $\forall i \in [n]$ ולכן $(u_1, \ldots, u_n)$ סדרה אותרונ' ומהיות $\dim V = n$, $(u_1, \ldots, u_n)$ מהווה בסיס של V ובנוסף u_i הוא וקטור עצמי של f, $\forall i \in [n]$. ■

הגדרה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור, f נקרא <u>לכסין בבסיס אורתונורמלי</u> אם קיים בסיס אורתונ' B של V כך ש- $[f]_B$ אלכסונית.

משפט יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, B בסיס אותרונ' של V ו-C בסיס של V. אזי C הוא אורתונ' אם"ם $[\mathrm{id}]_B^C$ היא מטריצה אורתוג'.

הוכחה: נסמן $M = [\mathrm{id}]_B^C$, $C = (v_1, \ldots, v_m)$, $B = (u_1, \ldots, u_n)$ אז העמודה ה-j של M היא $[v_j]_B$. העמודה ה-i של $\overline{M}$ היא $\overline{[v_i]_B}$ ולכן השורה ה-i של $\overline{M}^T$ היא $\overline{[v_i]_B}^T$.

$$\langle v_i \mid v_j \rangle = [v_i]_B \cdot [v_j]_B = \overline{[v_i]_B}^T [v_j]_B = \left[\overline{M}^T M \right]_{ij}$$

לכן C הוא אורתונ' אם"ם $\langle v_i \mid v_j \rangle = \delta_{ij}$ אם"ם $\left[\overline{M}^T M \right]_{ij} = \delta_{ij}$ אם"ם $\overline{M}^T M = I_n$ אם"ם M היא אורתוג'. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, B בסיס אורתונ' של V, $f : V \to V$ אופרטור לינארי, $A = [f]_B$, אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם קיימת מטריצה אורתוג'/אונ' M כך ש- $M^{-1}AM$ אלכסונית.

הוכחה: $\Leftarrow$: קיים בסיס אורתונ' C כך ש- $[f]_C$ היא אלכסונית. $[f]_C = [\mathrm{id}]_C^B [f]_B [\mathrm{id}]_B^C$. נסמן $M = [\mathrm{id}]_B^C$ ולכן מהמשפט הקודם M היא אורתוג'/אונ' ובנוסף $[f]_C = M^{-1}AM$ אלכסונית.

$\Rightarrow$: תהי M מטריצה אורתוג'/אונ' כך ש- $M^{-1}AM$ היא אלכסונית. מהיות M הפיכה, קיים בסיס C של V כך ש- $M = [\mathrm{id}]_B^C$. ולכן מהמשפט C הוא בסיס אורתוג' ובנוסף $M^{-1}AM = [\mathrm{id}]_C^B [f]_B [\mathrm{id}]_B^C$ אלכסונית ולכן f לכסין בבסיס אורתונ'. ■

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A לכסינה אורתוג' אם קיימת מטריצה אורתוג' O כך ש- $O^{-1}AO$ היא אלכסונית.

משפט (המשפט הספקטרלי במקרה הממשי) יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$, $f : V \to V$ אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם צמוד לעצמו.

הוכחה: $\Leftarrow$: קיים בסיס אורתונ' C של V כך ש- $[f]_C$ אלכסונית. לכן $[f]_C^T = [f]_C$ ולכן $[f]_C$ סימטרית ולכן f צמוד לעצמו.

$\Rightarrow$ נוכיח באינדוקציה על $n = \dim V$:

בסיס $(n = 1)$: f לכסין בבסיס אורתונ' כי כל מטריצה מסדר 1×1 היא אלכסונית.

צעד $(n \to n+1)$: ל-f קיים ע"ע וו"ע שנסמנו ב-$u \in V$. $U = \mathrm{sp}\{u\}$ ת"מ f-אינ' של V ולכן $U^\perp$ ת"מ f^*-אינ' אבל מהיות $f^* = f$ אזי $U^\perp$ ת"מ f-אינ'. $\forall v, w \in U^\perp$ מתקיים

$$\langle w \mid f|_{U^\perp}(v) \rangle = \langle w \mid f(v) \rangle = \langle f(w) \mid v \rangle = \langle f|_{U^\perp}(w) \mid v \rangle$$

ולכן $f|_{U^\perp}$ צמוד לעצמו ובנוסף ראינו כי $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = (n+1) - 1 = n$ ולכן מה"א $f|_{U^\perp}$ הוא לכסין בבסיס אורתונ'. לכן קיים בסיס אורתונ' $(u_1, \ldots, u_n)$ של $U^\perp$ כך ש- $[f|_{U^\perp}]_{(u_1,\ldots,u_n)}$ אלכסונית. נגדיר $u_{n+1} = \frac{1}{\|u\|}u$ ולכן $(u_1, \ldots, u_{n+1})$ הוא בסיס אורתונ' של V ובנוסף $u_1, \ldots, u_{n+1}$ הם ו"ע של f ולכן $[f]_{(u_1,\ldots,u_{n+1})}$ אלכסונית, כלומר f לכסין בבסיס אורתונ'. ■

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. אזי A לכסינה אורתוג' אם"ם A סימטרית.

הגדרה תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אונ' U כך ש- $U^{-1}AU$ היא אלכסונית.

הגדרה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ נקרא נורמלי אם $f \circ f^* = f^* \circ f$. $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת נורמלית אם $AA^* = A^*A$.

הערה f נורמלי אם"ם $[f]_B$ נורמלית עבור B בסיס אורתונ' של V.

תרגול

דוגמה נציג דוגמה נגדית ל-$\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$ במימד אינסופי. $V=C\left[0,1\right]$ (הפ' הרציפות על הקטע $[0,1]$), $\langle f\mid g\rangle=\int\limits_0^1 f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{dx}$, $U=\{f\in V: f\left(0\right)=0\}$. נוכיח כי $U^{\perp}=\{0\}$, כלומר שלכל $g\in V$ קיימת $f_g\in U$ כך ש- $\langle f\mid g\rangle\neq 0$.

תהי $0\neq g\in V$ ונגדיר את $f_g=x\cdot g$. נשים לב כי מתקיים $f_g\left(0\right)=0\cdot g\left(0\right)=0$ ולכן $f_g\in U$.

$$\begin{aligned}\langle f_g\mid g\rangle &=\int\limits_0^1 xg^2\left(x\right)\mathrm{dx}\\ &=\int_0^1\left(\sqrt{x}g\left(x\right)\right)^2\mathrm{dx}\\ &\left\|\sqrt{x}g\left(x\right)\right\|^2\end{aligned}$$

$\left\|\sqrt{x}g\left(x\right)\right\|=0$ אם"ם $\sqrt{x}g\left(x\right)\equiv 0$ אם"ם $g\left(x\right)\equiv 0$ (כי בכל נקודה שאינה אפס, $\sqrt{x}\neq 0$ ובנוסף g רציפה ולכן גם $g\left(0\right)=0$) סתירה (כי $\sqrt{x}g\left(x\right)\not\equiv 0$).

לכן $U^{\perp}=\{0\}$ ולכן $U\subsetneq V=\{0\}^{\perp}=\left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ סתירה.

הערה אופרטור אורתוג' נקרא כך כי הוא שומר על ניצבות, ואופרטור אוניטארי נקרא כך כי הוא שומר על וקטורי יחידה (אינטואיטיבית).

בחלק זה סקרנו מחדש את הטענות שראינו כבר על אופרטורים אורתוג'/אונ'.

טענה יהיו $\left(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ ממ"פ ו-$f:V\to V$ אופרטורים אורתוג'/אונ' ויהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ע"ע שונים של f. אזי $V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$.

הוכחה: יהיו $v_1\in V_{\lambda_1},v_2\in V_{\lambda_2}$.

$$\langle v_1\mid v_2\rangle=\langle f\left(v_1\right)\mid f\left(v_2\right)\rangle=\langle\lambda_1v_1\mid\lambda_2v_2\rangle=\overline{\lambda_1}\lambda_2\langle v_1\mid v_2\rangle$$

ולכן $\left(1-\overline{\lambda_1}\lambda_2\right)\langle v_1\mid v_2\rangle=0$ נניח בשלילה כי $1-\overline{\lambda_1}\lambda_2=0$ אם"ם $\overline{\lambda_1}=\lambda_2^{-1}$ אבל $\lambda_1\overline{\lambda_1}=\left|\lambda_1\right|^2=1$ ולכן $\overline{\lambda_1}=\lambda_1^{-1}$ ולכן $\lambda_1^{-1}=\lambda_2^{-1}$ אבל מיחידות ההופכי $\lambda_1=\lambda_2$ סתירה.

לכן בהכרח $\langle v_1\mid v_2\rangle=0$ ולכן $v_1\perp v_2$. ■

דוגמאות

1. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ממימד 2, B בסיס אורתונ' של V ו-$f:V\to V$ כך ש- $[f]_B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+2i & -4-2i\\ 2-4i & -2-i\end{pmatrix}$. האם f אוניטרי?

בתרגול הפעיל נוכיח כי מטריצה היא אוניטרית אם"ם עמודות המטריצה מהוות בסיס אורתונ' למרחב העמודות עם המכפלה הסלקרית.

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+2i\\ 2-4i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+2i\\ 2-4i\end{pmatrix}=\ldots=1$$

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1+2i\\2-4i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-4-2i\\-2-i\end{pmatrix}=\ldots=0$$

וכך גם על הנורמה של העמודה השנייה זה עובד ולכן f אכן אוניטרי.

2. עבור הפונקציונאל ב-$\mathbb{C}^n$, $x_i \sum_{i=1}^{n} \mapsto (x_i)_{i=1}^n$ מתקבל מהמכפלה סלקרית עם $(1)_{i=1}^n$ משמאל.
3. עבור הפונקציונאל ב-$\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto 4x+7y$ מתקבל מהמכפלה הפנימית

$$\left\langle\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\mid\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}\right\rangle=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$$

עם $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

4. מרחב הסדרות הממשיות $\mathbb{R}^\infty$ שהטור שלהן מתכנס, כאשר הפ' הוא $(a_n)_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. זו לא מכפלה סקלרית עם הסדרה של 1-ים, כי הטור שלה לא מתכנס.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F. נגדיר את <u>המרחב הדואלי</u> להיות $V^*=\hom(V,F)$ (וקטורים ב-V^* נקראים <u>פונקציונאלים</u>).

משפט יהי $B=(u_1,\ldots,u_n)$ בסיס ל-V. נגדיר $\varphi_j:V\to F$ ע"י $\varphi_j(u_i)=\delta_{ij}$. אזי $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ בסיס ל-V^*.

הוכחה: נוכיח כי הסדרה בת"ל. יהי $\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j=0$ פתרון למשוואה ההומוגנית.

$$0=\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(u_i)=\sum_{j=1}^{n}a_j\delta_{ij}=a_i$$

$\forall i\in[n]$ ולכן קיבלנו שזהו הפתרון הטריוויאלי.

נוכיח כי היא פורשת. יהי $v\in V^*$ ונגדיר $\varphi=\sum_{j=1}^{n}\psi(u_j)\varphi_j$. נראה כי $\varphi(u_j)=\psi(u_j)$, $\forall i\in[n]$ ונסיים.

$$\varphi(u_i)=\sum_{j=1}^{n}\varphi(u_j)\varphi_j(u_i)=\sum_{j=1}^{n}\psi(u_j)\delta_{ij}=\psi(u_i)$$

ולכן $\varphi\equiv\psi$. ■

הגדרה הבסיס $(\varphi_j)_{j=1}^n$ נקרא <u>הבסיס הדואלי</u>.

טענה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס אורתונ' אזי $(\langle v_1|,\ldots,\langle v_n|)$ הוא הבסיס הדואלי של V^*.

הוכחה: $\forall i,j\in[n]$, $\varphi_j(v_i)=\delta_{ij}=\langle v_i\mid v_j\rangle=\langle v_i|(v_j)$. ■

מסקנה יהיו $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $\varphi\in V^*$, אזי קיים $w\in V$ כך ש- $\langle w|=\varphi$.

הוכחה: $\varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \langle v_j|$.

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_j \langle v_j| (u) = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle v_j \mid u\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \overline{a_i} v_j \mid u \right\rangle$$

$\forall v \in V$. ראינו בהרצאה כי אם $\langle w \mid u\rangle = \langle w' \mid u\rangle$, $\forall u \in V$ אזי $w = w'$. ■

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ו-$f : V \to V$ אופרטור לינארי. אזי האופרטור הצמוד מקיים $\forall v, u \in V$

$$\langle f(v) \mid u\rangle = \langle v \mid f^*(u)\rangle$$

הוכחה:

$$\langle f(u) \mid v\rangle = \overline{\langle v \mid f(u)\rangle} = \overline{\langle f^*(v) \mid u\rangle} = \langle u \mid f^*(v)\rangle$$

■

דוגמאות

1. נגדיר $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix}$ עם המכפלה הסקלרית מעל $\mathbb{R}^2$. נמצא את f^*.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+2b \\ 3a+4b \end{pmatrix} \\ &= x(a+2b) + y(3a+4b) \\ &= ax + 2bx + 3ay + 4by \\ &= a(x+3y) + b(2x+4y) \\ &= \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן $f^*\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$.

2.

$$V = C[0,1], \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\,\mathrm{dx}, \varphi(f)(x) = \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}$$

חשבו את φ^*.

$$\begin{aligned}\langle f \mid \varphi(g)\rangle &= \int\limits_0^1 f(x)\left(\int\limits_0^1 g(t)\,\mathrm{dt}\right)\mathrm{dx}\\ &= \int\limits_0^1 g(t)\,\mathrm{dt}\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}\end{aligned}$$

אבל גם

$$\begin{aligned}\langle \varphi(f) \mid g\rangle &= \int\limits_0^1 g(t)\left(\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dt}\right)\mathrm{dx}\\ &= \int\limits_0^1 f(t)\,\mathrm{dt}\int\limits_0^1 g(x)\,\mathrm{dx}\end{aligned}$$

ולכן $\langle f \mid \varphi(g)\rangle = \langle \varphi(f) \mid g\rangle$ ולכן φ צמוד לעצמו.

3. לא תמיד יש אופרטור צמוד במרחב לא נ"ס.

$$V = C[0,1], \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{dx}, \psi(f)(x) = f(0)$$

נוכיח כי לא קיים ψ^*. נניח בשלילה שקיים אופרטור צמוד.

$$\langle \psi^*(f) \mid g\rangle = \langle f \mid \psi(g)\rangle = \int\limits_0^1 f(x)\,g(0)\,\mathrm{dx} = g(0)\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{dx}$$

אם $g(0) = 0$ אזי $g \perp \psi^*(f)$, $\forall f \in V$ אבל ראינו בתחילת התרגול שהפ' היחידה שמקיימת זאת היא $\psi^* \equiv 0$. אבל $\langle \psi^*(1) \mid 1\rangle = \langle 1 \mid \psi(1)\rangle = \langle 1 \mid 1\rangle = 1$ ולכן זה לא ייתכן.

4. גם משפט ריס נכשל במימד אינסופי.

$$V = C[0,1], \langle f \mid g\rangle = \int_0^1 f(x)\,g(x)\,\mathrm{dx}, \varphi(f)(x) = f(0)$$

נניח בשלילה שקיים $h \in V$ כך ש- $\langle h \mid f\rangle = f(0) = \varphi(f)$. נבחר $f = x^2 h(x)$.

$$0 = 0^2 h(0) = \left\langle h \mid x^2 h\right\rangle = \int\limits_0^1 h(x)\,x^2 h(x) = \int\limits_0^1 x^2 h^2(x)\,\mathrm{dx} = \int\limits_0^1 (xh(x))^2\,\mathrm{dx} = \|xh(x)\|^2$$

ולכן $xh(x) = 0$ ולכן $h(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ אבל $\langle h \mid f\rangle = 0$, $\forall f$ כולל למשל $f \equiv 1$ אבל

$$1 = 1(0) = \langle h \mid 1\rangle = \langle 0 \mid 1\rangle = 0$$

סתירה.

5. עבור f המקיים $[f]_E = \left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)$. ולכן האופרטור הצמוד הוא אחד שמקיים $[f^*]_E = [f]_E^T = \left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right)$ (כלומר $f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}x+3y\\2x+4y\end{smallmatrix}\right)$).

שבוע $\mathbb{XIII}$ | המשפט הספקטרלי במקרה המורכב ותבניות בילינאריות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

טענה יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל F, $f : V \to V$ אופרטור לינארי, W ת"מ f-וגם f^*-אינ' של V. אזי $(f|_W)^* = f^*|_W$.

הוכחה: נסמן $g = f|_W$, לכן $\forall v, w \in W$,

$$\langle w \mid g(v) \rangle = \langle w \mid f(v) \rangle = \langle f^*(w) \mid v \rangle$$

ולכן $f^*|_W$ הוא האופרטור הצמוד של $f|_W = g$. ■

משפט (המשפט הספקטרלי במקרה המרוכב) יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$. אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם f נורמלי.

הוכחה: $\Leftarrow$: קיים בסיס אורתונ' B של V כך ש- $[f]_B$ אלכסונית. ולכן גם $[f]_B^T$ אלכסונית ולכן $[f]_B^* = \overline{[f]_B}^T$ גם אלכסונית ולכן $[f]_B^* [f]_B = [f]_B [f]_B^*$, כלומר $[f]_B$ נורמלית.

$\Rightarrow$: באינדוקציה שלמה על $n = \dim V$.

בסיס ($n = 1$): כל אופרטור הוא לכסין במטריצה אורתונ' כי כל מטריצה מסדר 1×1 היא אלכסונית (ולכן גם לכסינה).

צעד ($1, \ldots, n \to n+1$): ל-f קיים ע"ע $\lambda \in \mathbb{C}$ (מהמשפט היסודי של האלגברה).

נוכיח כי V_λ הוא f^*-אינ'. יהי $v \in V_\lambda$.

$$f(f^*(v)) = (f \circ f^*)(v) = (f^* \circ f)(v) = f^*(f(v)) = f^*(\lambda v) = \lambda f^*(v)$$

ולכן $f^*(v)$ הוא 0 או ו"ע עם ע"ע λ, כלומר הוא ב-V_λ.

מטענה שראינו בעבר, $V_\lambda^\perp$ הוא $(f^*)^*$-אינ', כלומר f-איג', ומהטענה הקודמת $f^*|_{V_\lambda^\perp}=\left(f|_{V_\lambda^\perp}\right)^*$.

$$f|_{V_\lambda^\perp}\circ\left(f|_{V_\lambda^\perp}\right)^*=f|_{V_\lambda^\perp}\circ f^*|_{V_\lambda^\perp}=\left(f\circ f^*\right)|_{V_\lambda^\perp}=\left(f^*\circ f\right)|_{V_\lambda^\perp}=f^*|_{V_\lambda^\perp}\circ f|_{V_\lambda^\perp}=\left(f|_{V_\lambda^\perp}\right)^*\circ f|_{V_\lambda^\perp}$$

ולכן $f|_{V_\lambda^\perp}$ הוא אופרטור נורמלי. מהיות $\dim V_\lambda\geq 1$, מתקיים

$$\dim V_\lambda^\perp=\dim V-\dim V_\lambda\leq\dim V-1\leq n+1-1=n$$

ולכן מה"א על $f|_{V_\lambda^\perp}$, קיים בסיס אורתונ' $(u_1,\ldots,u_k)$ של $V_\lambda^\perp$ המורכב מוקטורים עצמיים של f. נבחר בסיס אורתונ' ב-V_λ ונסמן אותו ב-$(u_{k+1},\ldots,u_{n+1})$, ונשים לב כי כל הוקטורים שבו הם ו"ע של f. לכן $B=(u_1,\ldots,u_{n+1})$ הוא בסיס אורתונ' (כי זה איחוד בסיסים של ת"מ והמשלים הניצב שלו) של V מורכב מוקטורים עצמיים של f. לכן $[f]_B$ אלכסונית, כלומר f לכסין בבסיס אורתונ'. ■

מסקנה תהי $A\in M_n(F)$. אז A לכסינה אוניטרית אם"ם A נורמלית.

הערה יהי ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$. אם f אופרטור צמוד לעצמו, אז הוא נורמלי כי $f^*\circ f=f\circ f=f\circ f^*$.

אם f אופרטור אוניטרי, אז הוא נורמלי כי $f\circ f^*=f\circ f^{-1}=\mathrm{id}=f^{-1}\circ f=f^*\circ f$.

באותו האופן גם אופרטורים אורתוג' הם נורמלים.

דוגמה עבור $V=\mathbb{R}^2$ עם המכפלה הסלקרית, $f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\binom{x}{y}$, f אורתוג' (כי המטריצה המייצגת שלו לפי הבסיס הסטנדרטי היא כזו) אבל אינו לכסין ולכן גם לא לכסין בבסיס אורתונ'.

הערה אם f אופרטור לינארי בין ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$ אורתוגונלי אז f לא חייב להיות לכסין בבסיס אורתונ' - וזה הבדלי משמעותי בין המקרה הממשי למקרה המרוכב (שבו אם אופרטור הוא אוניטרי הוא נורמלי ולכן לכסין בבסיס אורתונ').

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי V מ"ו מעל F. תבנית בילינארית ב-V היא העתקה $g:V\times V\to F$ המקיימת:

(i) (אדיטביות באיבר השני) $g(v,w_1+w_2)=g(v,w_1)+g(v,w_2)$, $\forall w_1,w_2,v\in V$.

(הומוגניות באיבר השני) $g(v,cw)=c(g,w)$, $\forall v,w\in V,c\in F$.

(ii) (אדיטיביות באיבר הראשון) $g(v_1+v_2,w)=g(v_1,w)+g(v_2,w)$, $\forall v_1,v_2,w\in V$.

(הומוגניות באיבר הראשון) $g(cv,w)=cg(v,w)$, $\forall v,w\in V,c\in F$.

דוגמאות

1. $F=\mathbb{R}$, $(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $g(v,w)=\langle v\mid w\rangle$.

2. V מ"ו מעל F, $g(v,w)=0$, $\forall v,w\in V$.

3. $V=F^2$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right)=x_1y_2-x_2y_1$. באופן מעניין, זוהי הדטרמיננטה של מטריצה העמודות של שני הוקטורים ש-g מקבלת, וזה עובד בגלל שהדטרמיננטה היא לינארית בכל שורה, ולכן בפרט כשיש שתי שורות, היא בילינארית.

4. $V=F^2$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right)=x_1y_1-x_2y_2$.

5. תהי $A\in M_n\left(F\right)$. $V=F^n$. נגדיר תבנית בילינארית ע"י $g\left(x,y\right)=x^TAy$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח שהאקסיומות אכן מתקיימות).

הערה נשים לב כי דוגמה 3 היא מקרה פרטי של 5, שכן $g\left(x,y\right)=x^t\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)y$, וגם דוגמה 4 היא מקרה פרטי של 5, $g\left(x,y\right)=x^t\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)y$.

הערה מכ"פ מעל $\mathbb{C}$ היא לא תבנית בילנארית (לא מקיימת הומוגניות באיבר הראשון).

כמו בלינארית 1, גם פה נייצר התאמה בין כל תבנית בילינארית במ"ו נ"ס לבין מטריצה ולהפך.

הגדרה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g:V\times V\to F$ תבנית בילינארית, $B=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ בסיס סדור של V. <u>מטריצת הגראם</u> (המטריצה המייצגת) של g ביחס ל-B מוגדרת ע"י $\left[G\right]_{ij}=g\left(b_i,b_j\right)$, לכל $1\leq i\leq n$.

דוגמאות

1. $F=\mathbb{R}$, $\left(V,\langle\cdot\mid\cdot\rangle\right)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$, $g\left(v,w\right)=\langle v\mid w\rangle$, $B=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ בסיס אורתונ' של V, אזי $G=I_n$.

2. V מ"ו נ"ס מעל F, $g\left(v,w\right)=0$, B בסיס של V, אזי $G=0_n$.

3. $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$, $V=F^n$, $g\left(x,y\right)=x^TAy$, E הבסיס הסטנדרטי של F^n, אזי $G=A$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח זאת באופן טריוויאלי).

טענה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g:V\to V$ ת"ב, B בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B, אזי $g\left(v,w\right)=\left[v\right]_B^TG\left[w\right]_B$, $\forall v,w\in V$.

הוכחה: נסמן $B=(b_1,\dots,b_n)$, $[w]_B=\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}$, $[v]_B=\begin{pmatrix} c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
g(v,w) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i, \sum_{j=1}^{n} d_j b_J\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n} d_j g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i b_i, b_j\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_j c_i g(b_i,b_j)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} c_i d_j [G]_{ij}\\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \sum_{j=1}^{n} [G]_{ij} d_j\\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}[G]_{1j}d_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}[G]_{nj}d_j\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} g(b_1,b_1) & \cdots & g(b_1,b_n)\\ \vdots & & \vdots\\ g(b_n,b_1) & \cdots & g(b_n,b_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\\
&= [v]_B^T G [w]_B
\end{aligned}$$

■

מסקנה אם $g:F^n\times F^n\to F$ ת"ב, G הטריצה של g ביחס ל-E, $g':F^n\times F^n\to F$ המוגדרת ע"י $g'(x,y)=x^TGy$, אזי $g\equiv g'$.

כי

$$g(x,y)=[x]_B^T G [y]_B = x^TGy = g'(x,y)$$

חלק ג' של ההרצאה

משפט יהיו V מ"ו נ"ס מעל F, $g:V\times V\to F$ ת"ב, B,B' בסיסים סדורים של V, $M=[\mathrm{id}]_B^{B'}$ מטריצת המעבר מ-B' ל-B, G,G' המטריצות של g ביחס ל-B,B' בהתאמה, אזי $G'=M^TGM$.

הוכחה: נסמן $B'=(b'_1,\dots,b'_n)$, $B=(b_1,\dots,b_n)$ וניזכר כי $[b'_i]_B$ היא העמודה ה-i של M, כלומר Me_i..

$$[G']_{ij}=g\left(b'_i,b'_j\right)=[b'_i]_B^T G\left[b'_j\right]_B=(Me_i)^T G(Me_j)=e_i^T\left(M^TGM\right)e_j=\left[M^TGM\right]_{ij}$$

ולכן $G' = M^T G M$. ■

הגדרה יהיו $A, B \in M_n(F)$. נאמר כי A חופפת ל-B אם קיימת $M \in M_n(F)$ הפיכה כך ש- $B = M^T A M$.

משפט יחס חפיפה הוא יחס שקילות (כלומר הוא רפלקסיבי, טרנזטיבי וסימטרי).

הוכחה: רפלקסיביות: $M = I_n$ מקיים את הנדרש.

טרנזיטיביות: הסטודנטית המשקיעה תוכיח.

סימטריה: אם $B = M^T A M$, נסמן $N = M^{-1}$ ולכן

$$N^T B N = N^T M^T A M N = (MN)^T A M N = I_n^T A I_n = A$$

■

טענה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ ת"ב, B בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B, G' מטריצה שחופפת ל-G, אזי קיים בסיס סדור B' של V כך שהמטריצה של g ביחס ל-B' היא G'.

הוכחה: קיימת M הפיכה כך ש- $G' = M^T G M$. מלינארית 1, קיים בסיס סדור B' של V כך ש- $M = [\mathrm{id}]_B^{B'}$ ומטענה שראינו, זה אומר שהמטריצה של g ביחס ל-B' היא $G' = M^T G M$. ■

תרגול

טענה יהי V ממ"ו נ"ס. אופרטור לינארי $f : V \to V$ הוא צמוד לעצמו אם"ם $\langle f(u) \mid v \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle$, $\forall u, v \in V$.

הוכחה: $\Leftarrow$:

$$\langle f(u) \mid v \rangle = \langle u \mid f^*(v) \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle$$

$\Rightarrow$: $\langle f(u) \mid v \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle = \langle u \mid f^*(v) \rangle$ אבל ראינו בהרצאה כי אם $\langle u \mid w \rangle = \langle u \mid w' \rangle$, $\forall u \in V$ אזי $w = w'$ ולכן $f \equiv f^*$. ■

טענה יהי $V \subseteq U$ ת"מ של מ"ו נ"ס. אזי p_U צמוד לעצמו.

הוכחה: יהי בסיס אורתונ' $B' = (u_1, \dots, u_k)$ של U ובסיס אורתונ' $B'' = (v_1, \dots, v_l)$ של $U^\perp$. לכן $B = B' \cup B''$ הוא בסיס אורתונ' של V. $p_U(u_i) = u_i$, $\forall i \in [k]$, $p_U(v_i) = 0$, $\forall i \in [l]$ ולכן $[p_U]_B = \mathrm{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{\text{פעמים } k}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{פעמים } l}\right)$ וזו מטריצה אלכסונית וממשית ולכן צמודה לעצמה ולכן p_U צמודה לעצמה. ■

טענה יהי V ממ"פ. יהי $f:V\to V$ אופרטור לינארי. אזי f נורמלי אם"ם $\langle f^*(u) \mid f^*(v)\rangle = \langle f(u) \mid f(v)\rangle$, $\forall u,v\in V$.

הוכחה: f נורמלי אם"ם $f\circ f^* = f^*\circ f$ אם"ם $\forall u,v\in V$,

$$\langle f(v) \mid f(u)\rangle = \overline{\langle f^*(f(v)) \mid u\rangle} = \langle u \mid f^*(f(v))\rangle = \langle u \mid f(f^*(v))\rangle = \langle f^*(u) \mid f^*(v)\rangle$$

■

הערה A לכסין אורתוג'/אונ' לא גורר אורתוג'/אונ'.

0_n לכסינה אורתונ' עם הבסיס הסטנדרטי אבל יש לו גרעין ולכן הוא לא אורתוג'/אונ'.

$2I_N$ לכסינה אורתונ' עם הבסיס הסטנדרטי אבל עבור $v\neq 0$, $\|2I_nv\| = \|2v\| > \|v\|$ ולכן אינו אונ'.

הערה לכסינות אורתוג' גוררת לכינסות אונ' אבל לא להפך.

דוגמה $V=C^\infty$ הפ' הגזירות ∞ פעמים, $d:V\to V$ אופרטור הגזירה. $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\left(e^{\lambda x}\right)' \mapsto \lambda e^{\lambda x}$ ולכן ל-d יש ספקטרום (לא בדיד, אלא רציף) של ע"ע, שהוא כל $\mathbb{R}$ (כלומר אפילו יותר מעוצמה $\aleph_0$). זה מצדיק את השם "ספקטרלי" במשפט הספקטרלי, למרות שזה לא יותר מדי קשור.

מסקנה יהי V ממ"פ נ"ס, $f:V\to V$ אופרטור ויהיו $\lambda_1\neq\lambda_2$ ע"ע של f. אזי:

אם $F=\mathbb{R}$, ו-f צמוד לעצמו אזי $V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$;

אם $F=\mathbb{C}$ ו-f נורמלי אזי $V_{\lambda_1}\perp V_{\lambda_2}$.

הוכחה: מהמשפט הספקטרלי יש ל-V בסיס אורתונ' של ו"ע של f ובפרט כל ו"ע של λ_1 ניצב לכל ו"ע של λ_2.

■

הוכחה: (אלטרנטיבית נטולת המשפט הספקטרלי, רק למקרה המרוכב) נוכיח כי אם f נורמלי אז גם $f-c\mathrm{id}$ נורמלי.

$$\begin{aligned}(f-c\mathrm{id})^*(f-c\mathrm{id}) &= (f^*-\bar{c}\mathrm{id})(f-c\mathrm{id})\\ &= f^*\circ f - cf^* - \bar{c}f + \bar{c}c\mathrm{id}\\ &= f\circ f^* - cf - cf^* + c\bar{c}\mathrm{id}\\ &= (f-c\mathrm{id})(f^*-\bar{c}\mathrm{id})\\ &= (f-c\mathrm{id})(f-c\mathrm{id})^*\end{aligned}$$

בתרגול הפעיל נוכיח כי אם f נורמלי ו-v ו"ע עם ע"ע λ, אז v הוא ו"ע של f עם ע"ע $\bar{\lambda}$.

נניח כי $f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 \langle v_1 \mid v_2 \rangle &= \left\langle \overline{\lambda_1} v_1 \mid v_2 \right\rangle \\ &= \langle f^*(v_1) \mid v_2 \rangle \\ &= \langle v_1 \mid f(v_2) \rangle \\ &= \langle v_1 \mid \lambda_2 v_2 \rangle \\ &= \lambda_2 \langle v_1 \mid v_2 \rangle \end{aligned}$$

אבל מהיות $\lambda_1 \neq \lambda_2$ אזי $\langle v_1 \mid v_2 \rangle = 0$ ולכן $v_1 \perp v_2$. ■

אלגוריתם לכסון אורתוג'/אונ'

נניח כי נתון לנו אופרטור שמקיים את התנאים של המשפט הספקטרלי (צמוד לעצמו במקרה הממשי ונורמלי במקרה המרוכב).

1. נמצא את כל הע"ע השונים $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ של f.
2. נחשב את $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$ בעזרת פתרון מערכת משוואות.
3. נמצא בסיסים אורתונ' של $B_1, \ldots, B_k$ של $V_1, \ldots, V_k$ בהתאמה בעזרת תהליך גראם שמידט.
4. שרשור הבסיסים $B = (B_1, \ldots, B_k)$ הוא בסיס אורתונ' של V.

דוגמה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} \left|\begin{smallmatrix} x-1 & -1 & -1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{smallmatrix}\right| &\overset{R_1 \to R_1 + R_2 + R_3}{=} \left|\begin{smallmatrix} x-3 & x-3 & x-3 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{smallmatrix}\right| \\ &= (x-3) \left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & x-1 & -1 \\ -1 & -1 & x-1 \end{smallmatrix}\right| \\ &\underset{R_3 \to R_3 + R_1}{\overset{R_2 \to R_2 + R_1}{=}} (x-3) \left|\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right| = (x-3)\, x^2 \end{aligned}$$

ולכן A דומה ל- $D = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, נמצא O אורתוג' כך ש- $O^{-1}AO = D$. $V_0 = \mathrm{sp}\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ וגם $V_3 = \mathrm{sp}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

$$\begin{aligned} \left\| \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\| = \sqrt{3} \quad &\Rightarrow \quad b_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \\ \left\| \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\| = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad b_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \end{aligned}$$

$$w_2 = \frac{1}{2} \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$$

$$v_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) - \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2} \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$$

$$\|v_3\| = \left\| \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2}\sqrt{6}$$

$$b_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

דוגמאות

1. כל מטריצה ממשית שניתנת ללכסון אורתוג' היא לכסינה אבל הכיוון ההפוך לא נכון. $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ היא לכסינה כי יש לה שני ע"ע שונים אבל היא לא סימטרית ולכן לא צמודה לעצמה ולכן לא לכסינה אורתוג'.
2. האם $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ לכסינה אורתוג'? לא כי היא לא צמודה לעצמה ואין לה ע"ע ב-$\mathbb{R}$.
   האם היא לכסינה אונ'? כן כי היא נורמלית (הסטודנטית המשקיעה תבדוק).
3. האם $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ לכסינה אונ'? לא כי זה $J_2(1)$ ומטריצת הז'ורדן של מטריצה לכסינה היא מטריצה אלכסונית ולכן היא לא לכסינה ולכן גם לא לכסינה אונ'.
4. האם $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ לכסינה אונ'? לא כי $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$ אבל $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) \cdot \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & * \\ * & * \end{smallmatrix}\right)$ ולכן היא לא נורמלית.

משפט (משפט הפירוק האוניטרי) יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ ו-$f : V \to V$ אופרטור. אזי f נורמלי אם"ם קיימים אופרטורים $u, h : V \to V$ המקיימים:

(i) u אונ' ו-h הרמיטי ($h = h^*$).

(ii) u, h מתחלפות, כלומר $u \circ h = h \circ u$.

(iii) $u \circ h = f = h \circ u$.

הוכחה: $\Leftarrow$: יהי B בסיס אורתונ' של ו"ע, כלומר ש-$D = [f]_B = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. נכתוב את ההצגה הפולרית של הע"ע $\lambda_i = \gamma_i v_i$ כאשר $|v_i| = 1$, $v_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. אם $\lambda_i = 0$ אז נבחר $\gamma_i = 0, v_i = 1$. נגדיר $U = \operatorname{diag}(v_1, \ldots, v_n)$, $H = \operatorname{diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. לכן $H = H^T$ ולכן היא הרמטית.

$$\begin{aligned} U\overline{U}^T &= \operatorname{diag}(v_1\overline{v_1} \ldots, v_n\overline{v_n}) \\ &= \operatorname{diag}\left(|v_1|^2, \ldots, |v_n|^2\right) \\ &= \operatorname{diag}(1, \ldots, 1) = I_n \end{aligned}$$

ולכן U אונ'. בנוסף, $[f]_B = HU = UH$. נגדיר $[u]_B = U, [h]_B = H$ ולכן u, h מקיימים את כל התנאים.

$\Rightarrow$: נוכיח בתרגול הפעיל. ∎

שבוע $\mathbb{XIII}$ | תבניות בילינאריות סימטריות, תבניות ריבועיות, ניצבות וארותוגונליות

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

הגדרה יהי V מ"ו מעל F כך ש-$\mathrm{char}F \neq 2$, $g : V \times V \to F$ תבנית בילינארית. נאמר כי g היא סימטרית אם $g(v,w) = g(w,v)$, $\forall v, w \in V$ ואנטי-סימטרית אם $g(v,w) = -g(w,v)$, $\forall v, w \in V$.

דוגמאות

1. עבור $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ מעל $\mathbb{R}$, $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ היא ת"ב סימטרית (תב"ס).
2. $g(x,y) = 0$ בכל מ"ו היא תב"ס וגם תבא"ס (ת"ב אנטי-סימטרית).
3. $g\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1$ אזי g אנטי סימטרית.
4. $g\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ היא סימטרית.

טענה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ ת"ב אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) g תבנית בילינארית (אנטי) סימטרית..

(ii) קיים בסיס B, המטריצה של g ביחס ל-B (אנטי) סימטרית.

(iii) לכל בסיס B, המטריצה של g ביחס ל-B (אנטי) סימטרית.

הוכחה: $(i) \Leftarrow (iii)$ יהי $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס של V. תהי G המטריצה של g ביחס ל-B. אזי

$$[G]_{ij} = g(b_i, b_j) = g(b_j, b_i) = [G]_{ji}$$

ולכן G סימטרית.

$(iii) \Leftarrow (ii)$ ברור.

$(ii) \Leftarrow (i)$ הסטודנטית המשקיעה תוכיח. ■

הערה מעתה כל הת"ב יהיו סימטריות.

הערה לא נוכל להגדיר נורמה כפי שהגדרנו על מכפלה פנימית כי לא בהכרח ש-$0 \geq g(v,v)$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F. הפונקציה $q : V \to F$ נקראת תבנית ריבועית אם קיימת תבנ"ס $g : V \times V \to F$ כך ש-$q(v) = g(v,v)$, $\forall v \in V$.

דוגמאות

1. עבור $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $q(v) = \|v\|^2$, $\forall v \in V$ היא ת"ר.
2. עבור V מ"ו מעל F, $q(v) = 0$ היא ת"ר.
3. $q : F^2 \to F$ המוגדרת ע"י $q\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = x_1^2 - x_2^2$ היא ת"ר בגלל התב"ס (הזו).

משפט יהי V מ"ו מעל F, $q : V \to F$ ת"ר, $g : V \times V \to F$ תב"ס, כך ש-$q(v) = g(v,v)$. אזי

$$g(v,w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2}$$

$\forall v, w \in V$.

הוכחה: $\forall v, w \in V$ מתקיים

$$\begin{aligned} q(v+w) - q(v) - q(w) &= g(v+w, v+w) - g(v,v) - g(w,w) \\ &= g(v,v) + g(v,w) + g(w,v) + g(w,w) - g(v,v) - g(w,w) \\ &= g(v,w) + g(w,v) = 2g(v,w) \end{aligned}$$

ואם נחלק ב-2 נקבל את הנוסחה. ■

מסקנה אם g, g' תב"ס על V מ"ו שונות זו מזו, אזי הת"ר שמתאימות להן שונות זו מזו.

טענה באותם התנאים כמו במשפט הקודם, מתקיים בנוסף

$$g(v,w) = \frac{q(v+w) - q(v-w)}{4}$$

הוכחה: לסטודנטית המשקיעה. ■

חלק ב' של ההרצאה

הגדרה יהי V מ"ו מעל F, $g:V\times V\to F$ תב"ס. נאמר כי $v,w\in V$ הם ניצבים אם $g\left(v,w\right)=0$.

דוגמה עבור $g\left(v,w\right)=0$, כל וקטור ניצב לכל וקטור אחר ובפרט כל וקטור ניצב לעצמו.

טענה יהי Vמ"ו מעל F, $g:V\times V\to F$ $g\not\equiv0$ תב"ס, אזי קיים $v\in V$ שאינו ניצב לעצמו.

הוכחה: נניח בשלילה כי כל וקטור ב-V ניצב לעצמו. נסמן ב-$q:V\to F$ את הת"ר שמתאימה ל-g. אזי לפי הטענה הקודמת $\forall v,w\in V$ מתקיים $g\left(v,w\right)=\frac{q(v+w)-q(v)-q(w)}{2}=\frac{0+0-0}{2}=0$ סתירה. ■

הערה גם אם $g\not\equiv0$ תב"ס עדיין ייתכן שוקטור השונה מאפס ניצב לעצמו (לא כמו במכ"פ).

דוגמה $V=F^{2}$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x_{1}\\x_{2}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_{1}\\y_{2}\end{smallmatrix}\right)\right)=x_{1}y_{1}-x_{2}y_{2}$ אזי $\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)$ ניצב לעצמו.

הערה גם אם $g\not\equiv0$ תב"ס עדיין יתכן שוקטור השונה מאפס יהיה ניצב לכל וקטור אחר.

דוגמה $V=F^{2}$,

$$g\left(\left(\begin{smallmatrix}x_{1}\\x_{2}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_{1}\\y_{2}\end{smallmatrix}\right)\right)=x_{1}y_{1}=\left(\begin{smallmatrix}x_{1} & x_{2}\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}y_{1}\\y_{2}\end{smallmatrix}\right)$$

כאן, $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$ ניצב לכל וקטור אחר כי $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)=0$, $\forall\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in F^{2}$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F, $g:V\times V\to F$ תב"ס, $S\subseteq V$. נגדיר את המרחב הניצב של S להיות

$$S^{\perp}=\left\{ w\in V:g\left(v,w\right)=0,\forall v\in S\right\}$$

טענה $S^{\perp}$ הוא ת"מ של V.

הוכחה: הסטודנטית המשקיעה תוכיח זאת. ■

הגדרה יהי V מ"ו מעל F, $g:V\times V\to F$ תב"ס. הגרעין של g הוא $\ker g=V^{\perp}$.

הגדרה יהי V מ"ו מעל F, $g:V\times V\to F$ תב"ס. נאמר כי g לא מנוונת אם $\ker g=\left\{ 0\right\}$.

דוגמאות

1. עבור $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$, $g(v,w) = \langle v \mid w \rangle$ היא תב"ס לא מנוונת.
2. $g(v,w) = 0$ מקיימת $\ker g = V$.
3. עבור $V = F^2$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, אזי g לא מנוונת כי אם $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \ker g$ אזי $g\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = x = 0$ וגם $g\left(\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right) = y = 0$ ולכן $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0$.

משפט יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ תב"ס, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B. אזי g לא מנוונת אם"ם G הפיכה.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח בשלילה כי G לא הפיכה. לכן קיים $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in F^n$ $0 \neq$ כך ש-$G \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = 0$. נסמן $w = c_1 b_1 + \cdots + c_n b_n$. מהיות B בת"ל מתקיים $w \neq 0$. בנוסף, $\forall v \in V$ מתקיים

$$g(v,w) = [v]_B^T G [w]_B = [v]_B^T 0 = 0$$

ולכן $0 \neq w \in \ker g$ סתירה.

$\Rightarrow$: נניח בשלילה שקיים $0 \neq w \in \ker g$. אזי $\forall i \in [n]$ מתקיים

$$0 = g(b_i, w) = [b_i]_B^T G [w]_B = e_i^T G [w]_B$$

שזו הקוורדינטה ה-i ב-$G[w]_B$ ולכן $G[w]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. בנוסף $[w]_B \neq 0$ כי $w \neq 0$ ולכן G לא הפיכה סתירה. ■

חלק ג' של ההרצאה

הגדרה יהי V מ"ו מעל F, $g : V \times V \to F$ תב"ס, $v_1, \ldots, v_n \in V$. נאמר כי הסדרה $(v_1, \ldots, v_n)$ היא <u>אורתוגונלית</u> אם $i \neq j \Rightarrow g(v_i, v_j) = 0$.

משפט יהי V מ"ו נ"ס מעל F כך ש-$\mathrm{char} F \neq 2$, $g : V \times V \to F$ תב"ס. אזי קיים בסיס אורתוג' B של V.

הוכחה: באינדוקציה על $n = \dim V$.

בסיס ($n = 1$): כל בסיס של V הוא אורתוג'.

צעד ($1, \ldots, n \to n+1$): אם $g(v,w) = 0$, $\forall v, w \in V$ אזי כל בסיס של V הוא אורתוג'. אחרת, כפי שהוכחנו, קיים $v \in V$ שאינו ניצב לעצמו, כלומר $g(v,v) \neq 0$. ברור כי $v \neq 0$. נסמן $U = \mathrm{sp}\{v\}$. נוכיח כי $V = U \oplus U^\perp$.

יהי $u \in U \cap U^\perp$. לכן קיים $c \in F$ כך ש- $u = cv$. בנוסף $u \in U^\perp$ ולכן $g(v,v) = 0$. לכן $cg(v,v) = g(cv,v) = 0$ ומהיות $g(v,v) \neq 0$ אזי $c = 0$ ולכן $u = 0$.

יהי $w \in V$. נגדיר $w_1 = \frac{g(w,v)}{g(v,v)} v$. אזי $w_1 \in U$ ובנוסף מתקיים

$$\begin{aligned} g(w-w_1,v) &= g(w,v) - g(w_1,v) \\ &= g(w,v) - g\left(\frac{g(w,v)}{g(v,v)} v, v\right) \\ &= g(w,v) - \frac{1}{g(v,v)} \cdot g(w,v)\, g(v,v) \\ &= 0 \end{aligned}$$

עבור $\forall u \in U$ מתקיים כי קיים $d \in F$ כך ש-$u = dv$ ולכן

$$g(w-w_1,u) = g(w-w_1,dv) = dg(w-w_1,v) = d \cdot 0 = 0$$

לכן $w - w_1 \in U^{\perp}$. לכן מתקיים $w = w_1 - (w-w_1) \in V$ ולכן $U + U^{\perp}$ ולסיכום $V = U \oplus U^{\perp}$ ולכן

$$\dim V^{\perp} = \dim V - \dim U = n+1-1 = n$$

ולכן $g|_{U^{\perp}}$ הוא תב"ס על $U^{\perp}$ ולכן מה"א קיים בסיס אורתוג' $(v_1,\dots,v_n)$ של $U^{\perp}$ וגם $V = U \oplus U^{\perp}$ ולכן $(v_1,\dots,v_n,v)$ הוא אורתוג' כי $g(v_i,v) = 0$, $\forall i \in [n]$ כי $v_i \in U^{\perp}$. ■

הערה עבור V מ"ו נ"ס מעל F, $g: V \times V \to F$ תב"ס, B בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B. אזי G אורתוג' אם"ם G אלכסונית (הסטודנטית המשקיעה תשקיע מחשבה ותבין למה זה נכון).

מסקנה תהי $A \in M_n(F)$ סימטרית אזי קיימת $D \in M_n(F)$ אלכסונית החופפת ל-A.

הוכחה: נגדיר $g: F^n \times F^n \to F$ ע"י $g(x,y) = x^T A y$. אזי המטריצה של g ביחס לבסיס הסטנדרטי היא A. מהיות A סימטרית, גם g סימטרית ולכן מהמשפט קיים בסיס אורתוג' B של F^n. אז מההערה המטריצה D של g ביחס ל-B היא אלכסונית ומטענה מההרצאה הקודמת, A, D חופפות. ■

מסקנה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $q: V \to F$ ת"ר, אזי קיים בסיס $(v_1,\dots,v_n)$ של V ו-$a_1,\dots,a_n \in F$ כך ש-$\forall v \in V$ מתקיים $q(v) = a_1 c_1^2 + \dots + a_n c_n^2$, כאשר $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

הוכחה: תהי $g: V \times V \to F$ תב"ס כך ש-$q(v) = g(v,v)$, $\forall v \in V$. מהמשפט קיים בסיס אורתוג' B של V. נגדיר $a_i = g(v_i,v_i)$.

יהי $v \in V$. נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$. לכן

$$\begin{aligned} q(v) = g(v,v) &= g\left(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \sum_{i=1}^{n} c_i v_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_i c_J g(v_i, v_J) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i c_i g(v_i, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_I c_i^2 \end{aligned}$$

■

תרגול

הערה להלן סידור לראש בנושאים האחרונים.

T	שדה	הגדרה	יחס למכ"פ	מטריצות	ע"ע
אורתוגונלי	$\mathbb{R}$	$\langle u \mid v \rangle = \langle T(u) \mid T(v) \rangle$	שומר	$AA^T = I_n$	$\lambda = \pm 1$
אוניטרי	$\mathbb{C}$			$A\overline{A}^T = I_n$	$\lvert\lambda\rvert = 1$
צמוד ל-T	שניהם	$\langle T^*(u) \mid v \rangle = \langle u \mid T(v) \rangle$	$\langle T(u) \mid v \rangle = \langle u \mid T^*(v) \rangle$	$A^* = \overline{A}^T$	$\overline{\lambda}$
צמוד לעצמו	$\mathbb{R}$	$T = T^*$	$\langle T(u) \mid v \rangle = \langle u \mid T(v) \rangle$	$A = A^T$	$\lambda \in \mathbb{R}$
הרמיטי	$\mathbb{C}$			$A = \overline{A}^T$	
נורמלי	שניהם	$TT^* = T^*T$	$\langle T(u) \mid T(v) \rangle = \langle T^*(u) \mid T^*(v) \rangle$	$AA^* = A^*A$	$\overline{\lambda}$ לאותם ו"ע

מסקנה (מהמשפט הספקטרלי, נקרא משפט הפירוק האוניטרי) לאופרטור נורמלי f בממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ קיימים אופרטורים מתחלפים u, h כך ש-u אוניטרי ו-h הרמיטי המקיימים $u \circ h = f$.

דוגמה יהי $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הפיך

$$0 = \langle e_1 \mid e_2 \rangle = \left\langle f \circ f^{-1}(e_1) \mid e_2 \right\rangle = \left\langle f^{-1}(e_1) \mid f^*(e_2) \right\rangle$$

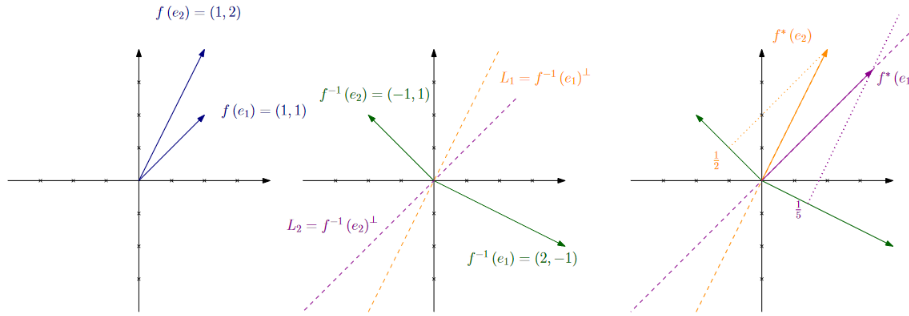
לכן $f^{-1}(e_1)$ ניצב ל-$f^*(e_2)$. בנוסף, לכל $i \in [2]$,

$$\frac{\left\langle f^{-1}(e_i) \mid f^*(e_i) \right\rangle}{\|f^{-1}(e_i)\|^2} = \frac{\left\langle f \circ f^{-1}(e_i) \mid e_i \right\rangle}{\|f^{-1}(e_i)\|^2} = \frac{\|e_i\|^2}{\|f^{-1}(e_i)\|^2} = \left\|f^{-1}(e_i)\right\|^{-2}$$

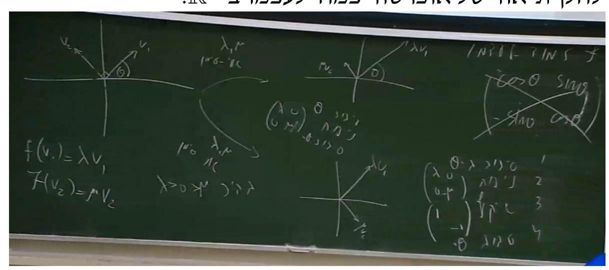
כך, באמצעות האופרטור ההפוך (שהוא קל לחישוב) הצלחנו להסיק גם את הכיוון של הוקטורים אחרי הפעלה של f^* (ב-$\mathbb{R}^2$, להיות

ניצב לוקטור אחד מקבע אותנו לקו אחד) וגם את גודל ההטלה של $f^*(e_i)$ על $f^{-1}(e_i)$ (חיובי תמיד).

נעבוד על $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y\\x+2y\end{pmatrix}$. $[f]_E=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$, $[f]_E^{-1}=\left[f^{-1}\right]_E=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ ולכן לפי האיורים, נוכל לחשב את f^* באמצעות הטלות וכו' (הסטודנטית המשקיעה תבין את התהליך הגאומטרי שתרם לנו ההופכי לחישוב הצמוד).



הערה להלן תיאור של אופרטור צמוד לעצמו ב-$\mathbb{R}^2$.



דוגמה עתה נביט באופרטור נורמלי ב-$\mathbb{R}^2$. נניח כי $[f]_E=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2&ab+cd\\ab+cd&b^2+d^2\end{pmatrix}$$

לכן $b^2=c^2$ ולכן $b=\pm c$. אם $b=c$ אז f צמוד לעצמו. אם $b=-c$, נציב בקוורדינטה $1,2$ ונקבל $c(2a-2d)=0$ ולכן או ש-$c=0$, ואז f זה פשוט ניפוח, או ש-$a=d$, ואז $[f]_E=\begin{pmatrix}a&-c\\c&a\end{pmatrix}$ שזה פשוט סיבוב ואז ניפוח. כלומר יש "קצת מאוד" אופרטורים נורמלים ב-$\mathbb{R}^2$ (רק ניפוחים וסיבובים).

טענה $g:V\times V\to\mathbb{R}$ היא ת"ב אם"ם $\forall u\in V$, $l_u(v)=g(u,v)$ ו-$r_u(v)=g(v,u)$ הם פ' לינארים.

הוכחה: $\Leftarrow$: ברור.

$\Rightarrow$:

$$g(u,av+bv')=l_u(av+bv')=al_u(v)+bl_u(v')=ag(u,v)+bg(u,v')$$

ובאותו האופן ללינאריות משמאל. ■

דוגמה עבור $\varphi,\psi\in V^*$, $g(u,v)=\varphi(u)\cdot\psi(v)$ היא ת"ב (הסטודנטית המשקיעה תבדוק זאת).

בחלק זה סקרנו מחדש את הדוגמאות שראינו כבר.

דוגמה עבור $g(u,v)=\langle u\mid v\rangle$, B אורתונ', $[g]_B=I_n$ (הסטודנטית המשקיעה תסיק זאת).

דוגמה עבור $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=xw-yz$, $[g]_E=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$.

תרגיל $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=xw+yz$.

א. מצאו את $[g]_E$.

$[g]_E=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ (מבדיקה פשוטה).

ב. מצאו את $[\mathrm{id}]_E^C$ עבור $C=\left(\left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix}\right)\right)$.

$[\mathrm{id}]_E^C=\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right)$.

ג. מצאו את $[g]_C$.

$$\begin{aligned}[g]_C&=\left([\mathrm{id}]_E^C\right)^T[g]_E\,[\mathrm{id}]_E^C\\&=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\3&4\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&3\\2&4\end{smallmatrix}\right)\\&\left(\begin{smallmatrix}4&10\\10&24\end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

דוגמה הוכחנו בהרצאה שעבור B,C בסיסים, $[g]_B$ ו-$[g]_C$ חופפות. לכן, עבור g מכ"פ, $[g]_B$ חופפת ל-I_n (כי קיים ב-V בסיס אורתונ' שעבורו $[g]_C=I_n$).

מסקנה למטריצות A,B חופפות, דרגותיהן שוות (כי אנחנו מכפילים אותן במטריצות הפיכות ששומרות דרגה).

תרגיל האם $A_1=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $A_2=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ חופפות? לא, כי הדרגות שונות.

האם $A_1=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $A_2=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)$ חופפות? לא. ניתן להוכיח כי A_1 מייצגת מכ"פ ב-$\mathbb{R}^2$ ביחס לבסיס הסטנדרטי ולכן חופפת ל-I_n. בניגוד לכך, $g_{A_2}(e_2,e_2)=-1$ ולכן לא ייתכן כי A_2 מייצגת מכ"פ (כי אז היינו מקבלים נורמה שלילית). ולכן היא לא חופפת ל-I_n ולכן מטרנזיטיביות (וקונטרה-פוזיטיב) לא ייתכן כי A_1,A_2 חופפות.

האם $A_1=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$, $A_2=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&3\end{smallmatrix}\right)$ חופפות? כן, ניתן להוכיח כי שתיהן מייצגות מכ"פ ב-$\mathbb{R}^2$ ואז חופפות ל-I_n ואז חופפות מטרנזיטיביות.

שבוע $\mathbb{XIV}$ | צורה קנונית למטריצה של תב"ס במקרה המרוכב והממשי

הרצאה

חלק א' של ההרצאה

משפט יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{C}$, $g : V \times V \to \mathbb{C}$ תב"ס. אזי קיים $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ובסיס B של V כך ש- $[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

הוכחה: יהי C בסיס אורתוג' של V. לכן $[g]_C$ אלכסונית. ע"י שינוי סדר הוקטורים ב-C, ניתן ליצור בסיס אורתוג' $D = (v_1, \dots, v_n)$ של V כך ש-$g(v_i, v_i) \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq k$ ו-$g(v_i, v_i) = 0$ לכל $k+1 \leq i \leq n$.

לכל $1 \leq i \leq k$, נבחר $0 \neq c_i \in \mathbb{C}$ כך ש- $c_i^2 = g(v_i, v_i)$ (קיים כזה כי לפולינום $x^2 - g(v_i, v_i)$ יש שורש מהמשפט היסודי של האלגברה) ונגדיר $u_i = \frac{v_i}{c_i}$. נסמן $B = (u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. ברור כי B בסיס אורתוג' של V. בנוסף, לכל $1 \leq i \leq k$ מתקיים

$$g(u_i, u_i) = g\left(\frac{v_i}{c_i}, \frac{v_i}{c_i}\right) = \frac{1}{c_i^2} g(v_i, v_i) = 1$$

ולכן $[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$. ■

טענה יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ תב"ס, B בסיס סדור של V, $G = [g]_B$. אזי $\mathrm{rk} G = \dim V - \dim \ker g$.

הוכחה: נסמן $n = \dim V$. נביט ב-$f_G : F^n \to F^n$ המוגדרת ע"י $f_g(x) = Gx$.

יהי $w \in V$. נוכיח כי $w \in \ker g$ אם"ם $[w]_B \in \ker f_G$. נסמן $B = (v_1, \dots, v_n)$ ולכן

$$\begin{aligned} & w \in \ker g \\ & \Updownarrow \\ & g(v, w) = 0 \qquad \forall v \in V \\ & \Updownarrow \\ & g(v_i, w) = 0 \qquad 1 \leq \forall i \leq n \\ & \Updownarrow \\ & [v_i]^T G [w]_B = 0 \quad 1 \leq \forall i \leq n \\ & \Updownarrow \\ & e_i^T f_G([w]_B) = 0 \quad 1 \leq \forall i \leq n \\ & \Updownarrow \\ & f_G([w]_B) = 0 \\ & \Updownarrow \\ & [w]_B \in \ker f_G \end{aligned}$$

ולכן

$$\dim \ker g = \dim \ker f_G = \dim F^n - \dim \mathrm{Im} f_G = n - \mathrm{rk} G$$

$\blacksquare$

טענה יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{C}$, $g : V \times V \to \mathbb{C}$ תב"ס, $k, k' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ובסיסים סדורים B, B' של V כך ש-

$$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) . [g]_{B'} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

אזי $k = k'$.

הוכחה: נסמן $n = \dim V$. מהטענה הנ"ל מתקיים

$$k = \mathrm{rk} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = n - \dim \ker g = \mathrm{rk} \left(\begin{array}{c|c} I_{k'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = k'$$

$\blacksquare$

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית. אזי קיים $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ יחיד כך ש-A חופפת ל-$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

הוכחה: נגדיר תב"ס $g : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ ע"י $g(x, y) = x^T A y$, $\forall x, y \in \mathbb{C}^n$. אזי $A = [g]_E$. מהמשפט, קיים בסיס B של $\mathbb{C}^n$ ו-$k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ כך ש-$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = [g]_B$. מהטענה הנ"ל, k גם יחיד. $\blacksquare$

חלק ב' של ההרצאה

הערה עבור V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{R}$, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ תב"ס, $B = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס של V כך ש-$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) = [g]_B$. $\forall v \in V$ נסמן $[v]_B = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ ולכן

$$g(v, v) = [v]_B^T \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) [v]_B = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & \cdots & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = c_1^2 + \cdots + c_k^2 \geq 0$$

אם $V = \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} y_1 \\ y_2 \end{smallmatrix}\right)\right) = x_1 y_1 - x_2 y_2$, $v = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, אזי $g(v, v) = -1 < 0$ ולכן בשום בסיס של $\mathbb{R}^2$ לא נקבל שהמטריצה של g לפיו תהיה $\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

כלומר, מצאנו דוגמה נגדית למשפט המקביל במקרה ממשי לזה שהוכחנו בחלק הקודם של ההרצאה. אם כן, נצטרך למצוא גרסה קצת שונה מהמשפט ההוא.

הגדרה יהיו $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. נגדיר $\left(\begin{array}{c|c|c} I_k & 0 & 0\\ \hline 0 & -I_m & 0\\ \hline 0 & 0 & 0_z \end{array}\right)\in M_{k+m+z}\left(\mathbb{R}\right)$ $G\left(p,m,z\right)=$.

משפט (סילבסטר, קיום) יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תב"ס. אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ובסיס B של V כך ש-$p+m+z=n$ וכן ש-$\left[g\right]_B=G\left(p,m,z\right)$.

הוכחה: יהי C בסיס אורתוג' של V. $\left[g\right]_C$ היא אלכסונית, כאשר חלק מהמספרים על האלכסון חיוביים, חלקם שליליים, וחלקם אפסים. ע"י שינוי סדר הוקטורים ב-C נוכל לייצר בסיס אורתוג' $D=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$ של V כך ש-

$$\begin{aligned} &g\left(v_i,v_i\right)>0, && 1\le\forall i\le p\\ &g\left(v_i,v_i\right)<0, && p+1\le\forall i\le p+m\\ &g\left(v_i,v_i\right)=0, && p+m+1\le\forall i\le n \end{aligned}$$

לכל $1\le i\le p$, נגדיר $u_i=\frac{v_i}{\sqrt{g\left(v_i,v_i\right)}}$ ולכל $p+1\le i\le p+m$, נגדיר $u_i=\frac{v_i}{\sqrt{-g\left(v_i,v_i\right)}}$. נגדיר

$$B=\left(u_1,\ldots,u_{p+m},v_{p+m+1},\ldots,v_n\right)$$

ברור כי B הוא בסיס אורתוג' של V. בנוסף,

$$\left[\left[g\right]_B\right]_{ii}=\begin{cases}1 & 1\le i\le p\\ -1 & p+1\le i\le p+m\\ 0 & p+m+1\le i\le n\end{cases}$$

כלומר, $\left[g\right]_B=G\left(p,m,z\right)$ עבור $z=n-\left(p+m\right)$. ■

משפט (סילבסטר, יחידות) יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$, $g:V\times V\to\mathbb{R}$ תב"ס, B,B' בסיסים סדורים של V כך ש-$\left[g\right]_B=G\left(p,m,z\right)$, $\left[g\right]_{B'}=G\left(p',m',z'\right)$ אזי $p=p',m=m',z=z'$.

הוכחה: מהטענה שראינו בהרצאה הקודמת,

$$\mathrm{rk}G\left(p,m,z\right)=n-\dim\ker g=\mathrm{rk}G\left(p',m',z'\right)$$

ולכן מתקיים $p+m=p'+m'$ ולכן

$$z=n-\left(p+m\right)=n-\left(p'+m'\right)=z'$$

נוכיח כי $p=p'$. נניח בשלילה כי $p\neq p'$ ולכן בה"כ $p>p'$. נסמן

$$B=\left(v_1,\ldots,v_n\right),B'=\left(v'_1,\ldots,v'_n\right)$$

נגדיר

$$U=\operatorname{sp}\left\{v_1,\ldots,v_p\right\},W=\operatorname{sp}\left\{v'_{p'+1},\ldots,v'_n\right\}$$

ולכן ממשפט המימדים הראשון,

$$\begin{aligned}\dim\left(U\cap W\right)&=\dim U+\dim W-\dim\left(U+W\right)\\&\geq\dim U+\dim W-\dim V\\&=p+\left(n-p'\right)-n\\&=p-p'>0\end{aligned}$$

לכן קיים $0\neq v\in U\cap W$. מהיות $0\neq v\in U$, קיימים $c_1,\ldots,c_p\in\mathbb{R}$ לא כולם אפסים כך ש- $v=c_1v_1+\cdots+c_pv_p$. לכן

$$\begin{aligned}g\left(v,v\right)&=g\left(\sum_{i=1}^{p}c_iv_i,\sum_{j=1}^{p}c_jv_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}c_ic_jg\left(v_i,v_j\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}c_i^2g\left(v_i,v_i\right)\\&=\sum_{i=1}^{p}c_i^2\cdot1>0\end{aligned}$$

מהיות $0\neq v\in W$, קיימים $d_{p'+1},\ldots,d_n\in\mathbb{R}$ לא כולם אפסים כך ש- $v=d_{p'+1}v'_{p'+1}+\cdots+d_nv'_n$. לכן

$$\begin{aligned}g\left(v,v\right)&=g\left(\sum_{i=p'+1}^{n}d_iv_i,\sum_{j=p'+1}^{n}d_jv_j\right)\\&=\sum_{i=p'+1}^{n}d_i^2g\left(v_i,v_i\right)\\&=\sum_{i=p'+1}^{p'+m'}d_i^2\cdot\left(-1\right)\leq0\end{aligned}$$

סתירה. לכן $p=p'$ ו-$m=\left(p+m\right)-p=\left(p'+m'\right)-p'=m'$. ■

מסקנה תהי $A\in M_n\left(\mathbb{R}\right)$ סימטרית. אזי קיימים $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ יחידים כך ש-A חופפת ל-$G\left(p,m,z\right)$.

הוכחה: באותו האופן כמו ההוכחה הזו. ■

תרגול

הערה נשים לב שלינאריות מימין ומשמאל לא קשורות אחת לשנייה, ולכן נוכל להגדיר גם ת"ב ע"י $g:V\times U\to F$ שהיא לינארית בשני איבריה, זוהי ההכללה של ת"ב שהיא הכללה של מכ"פ שהיא הכללה של כפל.

טענה $g:V\times V\to F$ תב"ס אם"ם g ת"ב ו-$\forall v\in V$, $l_u=r_u$.

דוגמאות

1. תבנית ה-0: $g\left(v,u\right)=0$.
2. עבור מכ"פ מעל $\mathbb{R}$, $l_u=r_u=\left\langle u\right|$.
3. עבור $\varphi,\psi\in V^*$, ראינו כי $g\left(v,u\right)=\varphi\left(v\right)\psi\left(u\right)$ היא ת"ב. עבור $\varphi\equiv\psi$ מתקיים כי g היא תב"ס.
4. תבנית הדטרמיננטה 2×2 אינה תב"ס, כי $l_{\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}=-r_{\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right)}$.
5. מעל חוג הפולינומים, $g\left(P,Q\right)=P\left(0\right)Q\left(0\right)$. הבילנאריות נובעת מהגהדרת הכפל בסקלר וחיבור של פולינומים. מחוק החילוף, זוהי גם תב"ס.
6. שוב מעל חוג הפולינומים, $g\left(P,Q\right)=P^2\left(0\right)Q^2\left(0\right)$ אינה תב"ס כי היא אינה ת"ב, לדוגמה
$$g\left(x+2,1\right)=4\cdot1=4\neq2=1\cdot1+1\cdot1=g\left(x+1,1\right)+g\left(1,1\right)$$
כלומר זוהי ת"ס שאינה בילינארית (תבנית היא פשוט העתקה מ-V^2 ל-F).
7. עבור $V=C\left[0,1\right]$, $k\in V$, נגדיר $g:V\times V\to F$ ע"י $g\left(f_1,f_2\right)=\int\limits_0^1 f_1\left(x\right)f_2\left(x\right)k\left(x\right)\mathrm{dx}$. זוהי ת"ב (מלינאריות האינטגרל) וגם תב"ס (ברור). אם $k\equiv1$ אז g היא גם מכ"פ, אבל לא בהכרח אחרת.
8. עבור $A\in M_n(F)$ סימטרית, אזי $g_A\left(x,y\right)=x^TAy$ היא תב"ס.
9. תבנית הדטרמיננטה 2×2 היא תבא"ס (תבנית בילינארית אנטי סימטרית).
10. עבור g המתאימה למכ"פ מעל $\mathbb{R}$, וקטורים ניצבים לפי המכ"פ אם"ם הם ניצבים לת"ב.
11. אע"פ שהדטרמיננטה היא תבא"ס, עדיין נסתכל על ניצבות בה (שלכאורה מוגדרת רק על ניצבות). $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=0$ אם"ם $\det\left(\begin{smallmatrix}x&y\\z&w\end{smallmatrix}\right)=0$ אם"ם $\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$, כלומר $\left\{v\right\}^{\perp}=\mathrm{sp}\left\{v\right\}$.

12. נגדיר ת"ב מעל $\mathbb{C}^n$ באופן הבא $g\left(\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\right)=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$.

א. הראו כי g סימרטית.

ברור.

ב. בדקו האם יש ב-$\mathbb{C}^n$ וקטרים שניצבים לעצמם ביחד ל-g.

עבור $n=2$, $v=\left(\begin{smallmatrix}i\\1\end{smallmatrix}\right)$ מקיים $g(v,v)=0$. עבור n כללי, כל וקטור שיש בו (רק) $\pm1,\pm i$ בכמות שווה יהיה ניצב לעצמו.

ג. עבור $W=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}$, חשבו את $W\cap W^{\perp}$.

מב', $\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}\subseteq W\cap W^{\perp}$. נבדוק האם יש וקטור בת"ל נוסף שניצב ל-W. נגדיר $A=\left(\begin{smallmatrix}1&i\end{smallmatrix}\right)$. וקטור הניצב ל-$W$ מקיים $A\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$ אבל $\dim\ker A=\dim\mathbb{C}^2-\dim\mathrm{Im}A=2-1=1$ ולכן יש וקטור לא טריוויאלי בת"ל אחד ב-$\ker A$, וראינו כי $\left(\begin{smallmatrix}1\\i\end{smallmatrix}\right)\in\ker A$ ולכן $W^{\perp}=\ker A=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}$ ולכן $W=W^{\perp}$ ובפרט $W\cap W^{\perp}=\mathrm{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}1\\i\end{smallmatrix}\right)\right\}$.

דוגמה למה דרשנו במשפט המקשר בין תב"ס ללכסון ש-$\mathrm{char}F\neq2$?

עבור $F=F_2=\{0,1\}$ עם חיבור וכפל מודלו 2, נביט ב-$V=F_2^2$, $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=xw+yz$.

$\forall v\in V$, מתקיים $g(v,v)=0$ (הסטודנטית המשקיעה תבדוק זאת). נניח בשלילה של-V יש בסיס אורתוג' ביחס ל-g, $B=(v_1,v_2)$. לכן

$$[g]_B=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$$

(כי נרצה שבהצבת כל וקטור עם עצמו נאפס את g). אבל $[g]_E=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ וזו בעלת דרגה שונה מ-$[g]_B$ סתירה.

דוגמה עבור $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=xw+yz$, נמצא בסיס מלכסן (אורתוג'). כדי לעשות זאת, בדומה לאלג' ההיפוך מלינארית 2 בו פעולות השורה האלמנטריות הותאמו לכפל במטריצה אלמנטרית משמאל, כל פעולה שנעשה על השורות נעשה גם על העמודות (רק של המטריצה השמאלית, כי נסתכל על המטריצה בתור $2n\times n$) כדי לשמור על הסימטריה. הסטודנטית המשקיעה תבין כמו שצריך למה משהו פה עובד בכלל. $[g]_E=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1&1&1&1\\1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_1\to C_1+C_2}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&1\\1&0&0&1\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2\to R_2-\frac{1}{2}R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&1&1&1\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{C_2\to C_2-\frac{1}{2}C_1}\left(\begin{array}{cc|cc}2&0&1&1\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

לכן

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{M^T}\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\underbrace{\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}}_{M}=\begin{pmatrix}2&0\\0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

ועבור $B=\left(\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right)$, $M=[\mathrm{id}]_E^B$.

הערה לכסון תב"ס אינו יחיד (גם לא עד כדי סדר איברי האלכסון). לדוגמה, בדוגמה הנ"ל, נוכל להכפיל את השורה והעמודה השנייה בקבוע שונה מאפס ולקבל מטריצה אלכסונית עם ערכים אחרים.

דוגמה נסתכל על דוגמה גדולה יותר.

$$g\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right)\right)=x_1y_1+2x_3y_1+x_1y_2+x_2y_2+3x_1y_3-x_3y_3$$

$$[g]_E=\left(\begin{smallmatrix}0&1&2\\1&1&0\\2&0&-1\end{smallmatrix}\right)$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&0&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)&\xrightarrow{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&-1&0\\1&1&0&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\\&\xrightarrow{C_1\to C_1-C_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&-1&0\\0&1&0&0&1&0\\2&0&-1&0&0&1\end{array}\right)\\&\xrightarrow{R_3\to R_3+2R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&2&1&-1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&3&2&-2&1\end{array}\right)\\&\xrightarrow{C_3\to C_3+2C_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1&0&0&1&-1&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&3&2&-2&1\end{array}\right)\end{aligned}$$

ולכן עבור $M=[\mathrm{id}]_B^E$ מתקיים $M^T\,[g]_B\,M=[g]_E$.

דוגמאות

1. ת"ב המתאימה למכ"פ מעל $\mathbb{R}$ היא תמיד לא מנוונת.

2. $g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\z\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}y\\w\end{smallmatrix}\right)\right)=xw+yz$ אינה מנוונת. אם $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in V^\perp$, אזי

$$g\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right)\right)=x^2=0\iff x=0$$

ובאותו האופן $y=0$ ולכן $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=0$.

3. g_A המתאימה ל-$A=\left(\begin{smallmatrix}5&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ היא לא מנוונת כי $g_A\left(\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\right)=\left(\begin{smallmatrix}x&y\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=0$.

4. $g(P,Q)=P(0)\,Q(0)$ היא לא מנוונת כי $V^\perp=\{P\in\mathbb{R}[x]:P(0)=0\}$ ולדוגמה עבור $P=x$ מתקיים $g(x,Q)=0$ לכל Q. הסטודנטית המשקיעה תראה כי

$$V^\perp=x\cdot\mathbb{R}[x]=\{x\cdot P:P\in\mathbb{R}[x]\}$$

שבוע $\mathbb{XV}$ | הסוף המר

תרגול

טענה תהי $q: V \to F$ העתקה. אזי q היא התבנית הריבועית המשויכת ל-g אם"ם קיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ אורתוג' ל-V ביחס לתב"ס g לכל $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ מתקיים

$$q\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_i^2 q(v_j)$$

דוגמאות

1. $q\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 2xy$. נגדיר $x = x' + y'$, $y = x' - y'$ ולכן

$$2xy = 2(x' - y')(x' + y') = 2x^2 - 2y'^2$$

ולכן עבור $\begin{matrix} \alpha_1 = x', \alpha_2 = y' \\ q(v_1) = 2, q(v_2) = -2 \end{matrix}$ נקבל את הטענה הנ"ל.

$$\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x'+y' \\ x'-y' \end{pmatrix} = x'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + y'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$$

ולכן $B = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right)$.

2.

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + 2x_3y_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1y_3 - x_3y_3$$

$$q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2xy + 4xz + y^2 - z^2$$

$$
\begin{aligned}
2xy+4xz+y^2-z^2 &= x^2+2xy+y^2+4xy-z^2-x^2\\
&=(x+y)^2+4xz-z^2-x^2\\
&\overset{y'=x+y}{=}(y')^2+4x'z'-z'^2-x'^2\\
&=y'^2-\left(x'^2-4x'z'+4z'^2\right)+3z'^2\\
&=y'^2-(x'-2y)^2+3z'^2\\
&\overset{x''=x'-2y'}{=}y''^2-x''^2+3z'^2
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= x'', q(v_1)=-1\\
\alpha_2 &= y'', q(v_2)=1\\
\alpha_3 &= z'', q(v_3)=3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} x''\\ y''\\ z''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'-2z'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x-2z\\ x+y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1&0&-2\\ 1&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=[\mathrm{id}]_B^E\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-2&1&0&0\\ 1&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right) &\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-2&1&0&0\\ 0&1&2&-1&1&0\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\\
&\xrightarrow[R_2\to R_2-2R_3]{R_1\to R_1+2R_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&0&2\\ 0&1&0&-1&1&-2\\ 0&0&1&0&0&1\end{array}\right)
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
B=\left(\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}\right)
$$

(שזה אותו הדבר שמצאנו כאן) ונקבל כי $[g]_B=\operatorname{diag}(-1,1,3)$.

הערה האלג' ללכסון תבניות ריבועיות הוא כזה: נמצא את $\alpha_1,\ldots,\alpha_n,q(v_1),\ldots,q(v_n)$ ונקבל $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=[\mathrm{id}]_B^E\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ומשם נוכל להסיק את B ע"י אלג' ההיפוך.

הגדרה הסיגנטורה של $A\in M_n(\mathbb{R})$ היא (p,m) שאנו מקבלים ממשפט סילבסטר.

אזהרה שוויון סיגנטורות לא מעיד על שוויון.

תרגיל כמה תב"ס לא חופפות יש על $\mathbb{R}^3$.

פתרון

$$\begin{array}{cc} (0,0) & 0_3 \\ (1,0) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ (2,0) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ (3,0) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \\ (0,1) & \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ (1,1) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ (2,1) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \\ (0,2) & \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \\ (1,2) & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \\ (0,3) & \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

כלומר 10.

טענה תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוג' וצמודה לעצמה. אזי הסיגנטורה של A היא (p, m) כאשר $p = m_1^{\text{alg}}$, $m = m_{-1}^{\text{alg}}$.

הוכחה: מהמשפט הספקטרלי, A לכסינה אורתוג' (כי היא צמדוה לעצמה), כלומר, קיימת $O \in M_n(\mathbb{R})$ כך ש-

$$O^{-1}AO = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

A אורתוג' ולכן הע"ע שלה הם רק ± 1 ולכן $O^{-1}AO = \text{diag}(\pm 1, \dots, \pm 1)$ כאשר מספר ה-1-ים הוא m_1^{alg} ומספר ה--1-ים הוא m_{-1}^{alg} (במטריצות לכסינות הר"ג שווה לר"א ולכן מספר ה-λ-ים במטריצה האלכסונית הוא המימד של המ"ע של λ שהוא הר"א). O אורתוג' ולכן $O^{-1} = O^T$ ולכן A חופפת ל-$\text{diag}\left(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{m}\right)$ וממשפט סילבסטר יש רק מטריצה אחת כזו. ■

סוף.

רשימת הגדרות

שימו לב: בגלל שקוד פייתון ינק את כל ההגדרות (וגם המשפטים) מתוך הסיכום שלי, בו מופיעים קישורים לחלקים שונים של הסיכום שלא בהכרח נמצאים ברשימת ההגדרות, ייתכנו הגדרות בהם כתוב משהו בסגנון "כמו שראינו כאן" בלי שיהיה קישור ל"כאן", עמכם הסליחה.

1. שדה הוא קבוצה, עליה מוגדרות פעולות $+,\cdot$ המקיימות רשימה של אקסיומות (סגירות, קומוטטיביות ואסוציאטיביות עבור חיבור וכפל, קיום נטרלי לכפל וחיבור, קיום נגדי והפכי וכו').

2. פולינום $P\left(x\right)$ מעל השדה F הוא ביטוי מהצורה $P\left(x\right)=a_{n}x^{n}+\cdots+a_{0}$ כך ש-$a_{i}\in F$, $a_{n}\neq0$. דרגת הפולינום $P\left(x\right)$ היא n, שעבורו $a_{n}\neq0$ הוא המקדם המוביל. אוסף כל הפולינומים מעל השדה F מסומן ב-$F\left[x\right]$. a_{0} יקרא האיבר החופשי של הפולינום.

3. יהיו $P,Q\in F$, $c\in F$ כאשר $P\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_{i}x^{i},\ Q\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{m}b_{i}x^{i}$.
   (i) חיבור פולינומים מוגדר ע"י $P\left(x\right)+Q\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{\max\{m,n\}}\left(a_{i}+b_{i}\right)x^{i}$.
   (ii) כפל פולינום בסקלר מוגדר ע"י $cP\left(x\right)=\sum\limits_{i=0}^{n}ca_{i}x^{i}$.
   (iii) כפל פולינומים מוגדר ע"י $P\left(x\right)\cdot Q\left(x\right)=\sum\limits_{k=0}^{m+n}\left(\sum\limits_{i+j=k}a_{i}b_{j}\right)x^{k}$.

4. יהי $P\in F\left[x\right]$. נאמר שאיבר $a\in F$ הוא שורש של P אם $P\left(a\right)=0$.

5. פולינום $P\in F\left[x\right]$ יקרא אי-פריק אם לכל $A,B\in F\left[x\right]$ כך ש-$P\left(x\right)=A\left(x\right)B\left(x\right)$ מתקיים כי A או B הוא קבוע (שייכים ל-F).

6. אופרטור (לינארי) מעל (מ"ו) V הוא העתקה לינארית $f:V\to V$.

7. יהיו $f,g:V\to V$ אפורטורים על V. נגדיר עליהם את הפעולות הבאות:
   (i) חיבור: $\left(f+g\right)\left(v\right)=f\left(v\right)+g\left(v\right)$
   (ii) כפל בסקלר: $\left(\lambda f\right)\left(v\right)=\lambda f\left(v\right)$ כאשר $\lambda\in F$.
   (iii) הרכבה: $\left(g\circ f\right)\left(v\right)=g\left(f\left(v\right)\right)$.

8. יהי $P\left(x\right)=a_{n}x^{n}+\cdots+a_{0}\in F$ פולינום מעל F ויהי f אופרטור לינארי מעל V (מ"ו מעל F). נגדיר

$$P\left(f\right)=a_{n}f^{n}+\cdots+a_{0}$$

   כלומר $\left(P\left(f\right)\right)\left(v\right)=a_{n}f^{n}\left(a\right)+\cdots+a_{0}v$.

9. יהי V מ"ו מעל F ו-$f\in\hom\left(V,V\right)$. תת מרחב $U\subseteq V$ נקרא f-אינוריאנטי (או אינוריאנטי ל-f) אם $\forall v\in U,f\left(v\right)\in U$ (כלומר $f\left(U\right)\subseteq U$).

10. יהי V מ"ו ותתי מרחבים $U,W\subseteq V$ שעבורם $\forall v\in V$, קיימים $u\in U,w\in W$ יחידים שעבורם $v=u+w$. נגדיר: $P_{U,W}:U\to V$, ההטלה על המרחב U במקביל למרחב W ע"י $P_{U,W}\left(v\right)=u$ כאשר $u\in U$ הוא הוקטור היחיד שמקיים $v=u+w$ (יחד עם איזשהו $w\in W$).

11. תהי $T \in \hom(V,V)$. אם T מקיימת $T \circ T = T$ אז היא נקראת הטלה (או הטלה במקביל).

12. יהי V מ"ו ו-$U,W \subseteq V$ תתי מרחבים. נגדיר את סכום תתי המרחבים כקבוצה

$$U + W = \{v \in V : v = u + w, u \in U, w \in W\}$$

13. אם $U,W \subseteq V$ ת"מים של מ"ו וגם $\forall v \in U+W$ קיים יצוג יחיד $v = u + w$ כאשר $u \in W, w \in W$, נאמר שהסכום $U + W$ הוא סכום ישר ונסמן $U \oplus W$.

14. יהי $f \in \hom(V,V)$ ו-$v \in V$. המסלול של v תחת פעולות האופרטור f הוא הקבוצה $\{v, f(v), f^2, \dots\}$.

15. יהי V מ"ו נ"ס ו- $v \in V$ ו- $f \in \hom(V,V)$. נניח כי $v, \dots, f^k(v)$ הוא בסיס של $Z(f,v)$ וכי $f^{k+1}(v) = a_k f^k(v) + \cdots + a_0 v$ אזי $\min_v^f(x) = x^{k+1} - a_k x^k - \cdots - a_0$ נקרא הפולינום המינימלי של v ביחס ל-f.

16. יהי $f \in \hom(V,V)$. סקלר $\lambda \in F$ נקרא ערך עצמי (ע"ע) של f אם קיים $0 \neq v \in V$ כך ש- $f(v) = \lambda v$. הוקטור הנ"ל נקרא וקטור עצמי (ו"ע) של f בעל ערך עצמי λ.

17. תהי $A \in M_n(F)$. $0 \neq v \in F^n$ יקרא ו"ע של A עם ע"ע $\lambda \in F$ אם $Av = \lambda v$.

18. יהיו $U_1, \dots, U_k \subseteq V$ תתי מרחבים של V מ"ו. אזי $U_1 + \cdots + U_k = \{u_1 + \cdots + u_k : u_i \in U_i\}$.

19. הסכום $U_1 + \cdots + U_k$ נקרא סכום ישר של $U_1, \dots, U_k$ ומסומן $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k$ אם $u_1 + \cdots + u_k = 0$ ($u_i \in U_i$) בהכרח גורר כי $u_1 = \cdots = u_k = 0$.

20. תהי $A \in M_n(F)$. נאמר כי A אלכסונית אם היא מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ כאשר $\lambda_i \in F$ (כלומר $[A]_{ij} \neq 0 \Rightarrow i = j$).

21. יהי $f \in \hom(V,V)$ במ"ו נ"ס. נאמר ש-f ניתן ללכסון (לכסין) אם קיים בסיס B של V שעבורו $[f]_B$ היא מטריצה אלכסונית.

22. יהי $f \in \hom(V,V)$ ויהי λ ע"ע של F. המרחב העצמי לע"ע λ הוא $V_\lambda = \{v \in V : f(v) = \lambda v\}$.

23. תהי $A \in M_n(F) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. נגדיר את הפולינום האופייני A להיות

$$\chi_A(x) = \det(xI - A) = \det \begin{pmatrix} x - a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ -a_{n1} & \cdots & x - a_{nn} \end{pmatrix}$$

24. יהי $f \in \hom(V,V)$ מעל מ"ו נ"ס. נגדיר את הפולינום האופייני של f להיות $\chi_f(x) = \chi_{[f]_B}(x)$ כאשר B בסיס של V.

25. יהי $f : V \to V$ במ"ו נ"ס מעל F. הפולינום המינימלי של f הוא הפולינום המתוקן (כלומר פולינום שאינו פולינום האפס שהמקדם של החזקה הגבוהה ביותר הוא 1_F) בעל הדרגה המינימלית $P \in F[x]$ שעבורו $P(f) = 0$.

26. יהי $f:V\to V$ במ"ו נ"ס ו-$\lambda\in F$ ע"ע של f. נגדיר את הריבוי הגאומטרי של λ להיות $m_{\lambda}^{\text{geom}}=\dim V_{\lambda}$.

27. יהי $f:V\to V$ במ"ו נ"ס ו-$\lambda\in F$ ע"ע של f. נגדיר את הריבוי האלגברי של λ להיות

$$m_{\lambda}^{\text{alg}}=\max\left\{m\in\mathbb{N}:(x-\lambda)^{m}\mid\chi_{f}\right\}$$

28. יהי $f\in\hom\left(V,V\right)$. נגדיר $\varphi_{f}:\hom\left(V,V\right)\to\hom\left(V,V\right)$ המוגדר ע"י $\varphi_{f}\left(T\right)=f\circ T$.

29. יהי $f\in\hom\left(V,V\right)$. נגדיר את הפולינום המינימלי של f ע"י $\mu_{f}=\min_{\text{id}_{V}}^{\varphi_{f}}$ (כאשר id_{V} הוא הזהות כוקטור ב-$\hom\left(V,V\right)$).

30. אופרטור $f:V\to V$ נקרא נילפוטנטי אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $f^{k}=0$. $A\in M_{n}(F)$ היא נלפוטנית אם קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $A^{n}=0$)

31. יהי f אופרטור נילפוטנטית דרגת הנילפוטנטיות של f היא ה-$k\in\mathbb{N}$ המינימלי כך ש- $f^{k}=0$. עבור $0\neq v\in V$, הגובה של f הוא ה-l המינימלי שעבורו $f^{l}\left(v\right)=0$.

32. מטריצה כנ"ל נקרא בלוק ז'ורדן נילפוטנטי אלמנטרי מגודל l ומסמנים אותה ב- $J_{l}\left(0\right)$.

33. יהי f אופרטור נילפ'. שרשרת עבור f היא סדרת וקטורים מהצורה $v,\dots,f^{l-1}\left(v\right)$ כך ש- l הוא הגובה של v ביחס ל-f.

34. יהיו $P,Q\in F\left[x\right]$. המחלק המשותף המקסימלי של P,Q הוא הפולינום המתוקן היחידי שמקיים את תנאי הלמה עבור P,Q שנסמנו $\gcd\left(P,Q\right)$.

35. יהיו $P,Q\in F\left[x\right]$. נאמר כי P,Q זרים (Coprime) אם $\gcd\left(P,Q\right)=1$.

36. בלוק ז'ורדן אלמנטרי עבור $\lambda\in F$ הוא מטריצה $J_{l}\left(0\right)+\lambda I_{l}\in M_{l}\left(F\right)$ $=\begin{pmatrix}\lambda & & & 0\\ 1 & \lambda\\ & \ddots & \ddots\\ 0 & & 1 & \lambda\end{pmatrix}=J_{l}\left(\lambda\right)$.

37. בלוק ז'ורדן עבור $\lambda\in F$ הוא מטריצת בלוקים $J^{\lambda}=\text{Block}\left(J_{l_{1}}\left(\lambda\right),\dots,J_{l_{k}}\left(\lambda\right)\right)$ עבור $l_{1}\geq\dots\geq l_{k}$.

38. מטריצת ז'ורדן היא מטריצה מהצורה $\text{Block}\left(J^{\lambda_{1}},\dots,J^{\lambda_{r}}\right)$ כאשר $i\neq j\Rightarrow\lambda_{i}\neq\lambda_{j}$.

39. מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{R}^{2}$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{R}^{2}\times\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\left(\begin{smallmatrix}x_{1}\\ x_{2}\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_{1}\\ y_{2}\end{smallmatrix}\right)=x_{1}y_{1}+x_{2}y_{2}$.

40. מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{R}^{n}$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{R}^{n}\times\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\begin{pmatrix}x_{1}\\ \vdots\\ x_{n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_{1}\\ \vdots\\ y_{n}\end{pmatrix}=x_{1}y_{1}+\dots+x_{n}y_{n}$.

41. מכפלה סקלרית ב-$\mathbb{C}^{2}$ היא הפעולה $\cdot:\mathbb{C}^{2}\times\mathbb{C}^{2}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $\left(\begin{smallmatrix}x_{1}\\ x_{2}\end{smallmatrix}\right)\cdot\left(\begin{smallmatrix}y_{1}\\ y_{2}\end{smallmatrix}\right)=\overline{x_{1}}y_{1}+\overline{x_{2}}y_{2}$.

42. יהי V מ"ו מעל F (שהוא $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$). מכפלה פנימית ב-V היא פעולה $\langle\cdot\mid\cdot\rangle:V\times V\to F$ המקיימת:

(i) (לינאריות באיבר השני) $\langle u\mid v+v'\rangle=\langle u\mid v\rangle+\langle u\mid v'\rangle$ עבור $u,v,v'\in V$ וכן $\langle u\mid cv\rangle=c\left\langle u\mid v\right\rangle$ עבור $u,v\in V$, $c\in F$.

(ii) (סימטריה) $\langle u\mid v\rangle=\overline{\langle v\mid u\rangle}$, $\forall v,u\in V$.

(iii) (חיוביות ואי-ניוון) $\langle u\mid u\rangle\in\mathbb{R}_{\geq0}$ וכן אם $u\in V$ מקיים $\langle u\mid u\rangle=0$ אזי $u=0_{V}$.

43. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$. נאמר כי V הוא מרחב מכפלה פנימית (ממ"פ) אם ב-V מוגדרת מכפלה פנימית. ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$ נקרא מרחב אוקלידי וממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ נקרא מרחב הרמטי.

44. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. נגדיר את הנורמה של $u \in V$ ע"י $\|u\| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle}$.

45. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. נאמר כי $u \in V$ הוא וקטור יחידה אם $\|u\| = 1$.

46. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. u, v נקראים ניצבים אם $\langle u \mid v \rangle = 0$ ובמקרה זה נסמן $u \perp v$.

47. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ. נגדיר את פונקציית המרחק $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ע"י $d(u, v) = \|v - u\|$.

48. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ויהי $u \in V$ וגם $S \subseteq V$. נאמר כי u ניצב ל-S (ונסמן $u \perp S$) אם $\forall v \in S$, $u \perp v$.

49. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ויהי $S \subseteq V$. המרחב הניצב (האורתוגונלי) של S מוגדר להיות $S^{\perp} = \{u \in V : u \perp S\}$.

50. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו-$v, v_W \in V$. נאמר כי v_W הוא הטלה אורתוגונלית של v על W אם $v_W \in W$ וגם $v - v_W \in W^{\perp}$.

51. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, $v_1, \ldots, v_k \in V$. הסדרה $(v_1, \ldots, v_k)$ נקראת אורתוגנלית אם $i \neq j \Rightarrow v_i \perp v_j$. נאמר כי $(v_1, \ldots, v_k)$ היא אורתונורמלית אם היא אורתוגנלית וגם $\|v_i\| = 1$, $\forall i \in [k]$.

52. יהי V מ"ו נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור ו-λ ע"ע של f. נגדיר $g = f - \lambda \mathrm{id}_V$. יהי k המינימלי כך ש- $\ker g^k = \ker g^{k+1}$. נגדיר את המרחב העצמי המוכלל להיות $\hat{V}_\lambda = \ker g^k$.

53. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל F, $f : V \to V$ אופרטור לינארי. אם $\forall v, w \in V$ מתקיים $\langle f(v) \mid f(w) \rangle = \langle v \mid w \rangle$ אז נאמר כי f הוא אותרוגונלי אם $F = \mathbb{R}$ ואוניטרי אם $F = \mathbb{C}$.

54. תהיינה $A \in M_n(\mathbb{R})$ ו-$B \in M_n(\mathbb{C})$. נאמר כי A אורתוגנלית אם $A^T A = I_n$ ונאמר כי B אוניטארית אם $\overline{B}^T B = I_n$.

55. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ו-$w \in V$. נגדיר $\langle w | : V \to F$ ע"י $\langle w | (v) = \langle w \mid v \rangle$, $\forall v \in V$.

56. יהי V מ"ו מעל F. פונקציונאל לינארי על V הוא ה"ל $l : V \to F$.

57. האופרטור f^* מהטענה נקרא האופרטור הצמוד לאופרטור f, בנוסף, המטריצה $\overline{A}^T$ נקראת המטריצה הצמודה למטריצה A ומסומנת ב-A^*.

58. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ מכ"פ מעל $\mathbb{R}$. נגדיר את קוסינוס הזווית בין $u, v \in V$ להיות $\cos\theta = \frac{\langle u|v \rangle}{\|u\|\|v\|}$.

59. יהי V מ"ו מעל F (הוא $\mathbb{R}, \mathbb{C}$). נורמה על V הי פונקציה $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ המקיימת:
   (i) (חיוביות ואי-ניוון) $\forall v \in V$, $\|v\| \geq 0$ ו-$\|v\| = 0$ אם"ם $v = 0$.
   (ii) (הומוגניות) $\forall v \in V$, $c \in F$ מתקיים $\|cv\| = |c| \cdot |v|$.
   (iii) (א"ש המשולש) $\forall u, v \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   במקרה זה, $(V, \|\cdot\|)$ נקרא מרחב נורמי.

60. המרחב $W^\perp$ נקרא המשלים הניצב של V.

61. $p_{W,W^\perp} : V \to V$ היא ההטלה האורתוג' על W.

62. יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"נ"ס. נאמר כי אופרטור לינארי $f : V \to V$ הוא צמוד לעצמו אם $f^* = f$.

63. תהי מטריצה $A \in M_n(F)$. נאמר כי A צמודה לעצמה אם $A = A^*$. עבור $F = \mathbb{R}$, A נקראת סימטרית (במקרה זה ההגדרה שקולה ל-$A = A^T$), ועבור $F = \mathbb{C}$, A נקראת הרמטית.

64. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור, f נקרא לכסין בבסיס אורתונורמלי אם קיים בסיס אורתונ' B של V כך ש- $[f]_B$ אלכסונית.

65. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A לכסינה אורתוג' אם קיימת מטריצה אורתוג' O כך ש- $O^{-1}AO$ היא אלכסונית.

66. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. נאמר כי A לכסינה אוניטרית אם קיימת מטריצה אונ' U כך ש- $U^{-1}AU$ היא אלכסונית.

67. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$ נקרא נורמלי אם $f \circ f^* = f^* \circ f$. $A \in M_n(\mathbb{C})$ נקראת נורמלית אם $AA^* = A^*A$.

68. יהי V מ"ו מעל F. נגדיר את המרחב הדואלי להיות $V^* = \hom(V, F)$ (וקטורים ב-V^* נקראים פונקציונאלים).

69. הבסיס $(\varphi_j)_{j=1}^n$ נקרא הבסיס הדואלי.

70. יהי V מ"ו מעל F. תבנית בילינארית ב-V היא העתקה $g : V \times V \to F$ המקיימת:

(i) (אדיטביות באיבר השני) $g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$, $\forall w_1, w_2, v \in V$.

(הומוגניות באיבר השני) $g(v, cw) = c(g, w)$, $\forall v, w \in V, c \in F$.

(ii) (אדיטיביות באיבר הראשון) $g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$, $\forall v_1, v_2, w \in V$.

(הומוגניות באיבר הראשון) $g(cv, w) = cg(v, w)$, $\forall v, w \in V, c \in F$.

71. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ תבנית בילינארית, $B = (b_1, \ldots, b_n)$ בסיס סדור של V. מטריצת הגראם (המטריצה המייצגת) של g ביחס ל-B מוגדרת ע"י $[G]_{ij} = g(b_i, b_j)$, לכל $1 \le i \le n$.

72. יהיו $A, B \in M_n(F)$. נאמר כי A חופפת ל-B אם קיימת $M \in M_n(F)$ הפיכה כך ש- $B = M^TAM$.

73. יהי V מ"ו מעל F כך ש-$\mathrm{char}F \neq 2$, $g : V \times V \to F$ תבנית בילינארית. נאמר כי g היא סימטרית אם $g(v, w) = g(w, v)$, $\forall v, w \in V$ ואנטי-סימטרית אם $g(v, w) = -g(w, v)$, $\forall v, w \in V$.

74. יהי V מ"ו מעל F. הפונקציה $q : V \to F$ נקראת תבנית ריבועית אם קיימת תב"ס $g : V \times V \to F$ כך ש-$q(v) = g(v, v)$, $\forall v \in V$.

75. יהי V מ"ו מעל F, $g : V \times V \to F$ תב"ס. נאמר כי $v, w \in V$ הם ניצבים אם $g(v, w) = 0$.

76. יהי V מ"ו מעל F, $g: V\times V\to F$ תב"ס, $S\subseteq V$. נגדיר את המרחב הניצב של S להיות

$$S^{\perp}=\{w\in V: g(v,w)=0,\forall v\in S\}$$

77. יהי V מ"ו מעל F, $g: V\times V\to F$ תב"ס. הגרעין של g הוא $\ker g=V^{\perp}$.

78. יהי V מ"ו מעל F, $g: V\times V\to F$ תב"ס. נאמר כי g לא מנוונת אם $\ker g=\{0\}$.

79. יהי V מ"ו מעל F, $g: V\times V\to F$ תב"ס, $v_1,\ldots,v_n\in V$. נאמר כי הסדרה $(v_1,\ldots,v_n)$ היא אורתוגונלית אם $i\neq j\Rightarrow g(v_i,v_j)=0$.

80. יהיו $p,m,z\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. נגדיר $G(p,m,z)=\left(\begin{array}{c|c|c} I_k & 0 & 0\\ \hline 0 & -I_m & 0\\ \hline 0 & 0 & 0_z\end{array}\right)\in M_{k+m+z}(\mathbb{R})$.

81. הסיגנטורה של $A\in M_n(\mathbb{R})$ היא (p,m) שאנו מקבלים ממשפט סילבסטר.

רשימת משפטים

1. $F[x]$ מהווה מרחב וקטורי (וגם חוג!) מעל השדה F.

2. יהיו $P, D \in F[x]$ אזי קיימים פולינומים יחידים $Q(x)$ (המנה) ו-$R(x)$ (השארית) שעבורם $P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x)$ וגם $\deg R(x) < \deg D(x)$.

3. יהי $P \in F[x]$ ונניח כי $P(x) = Q(x) D(x)$ אזי:
   (i) כל שורש של Q ו-D הוא שורש של P.
   (ii) כל שורש של P הוא שורש של Q או (לא בלעדי) שורש של D.

4. יהי $P \in F[x]$. אזי a הוא שורש של P אם"ם $x - a \mid P(x)$ (כלומר קיים $Q \in F[x]$ שעבורו $P(x) = (x-a) Q(x)$).

5. לפולינום $P \neq 0$ יש לכל היותר n שורשים שונים.

6. (המשפט היסודי של האלגברה) מעל המספרים המרוכבים, לכל $P \in \mathbb{C}[x]$ קיים שורש מרוכב.

7. כל פולינום אי-פריק מעל $\mathbb{C}$ הוא פולינום לינארי או קבוע.

8. כל פולינום $P(x) = ax^2 + bx + c$ מעל $\mathbb{R}$ עם $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ הוא אי-פריק.

9. כל פולינום אי-פריק מעל הממשיים $P \in \mathbb{R}[x]$ הוא אי פריק אם"ם הוא לינארי או שהוא ריבועי עם דיסקרימיננט שלילי ($\Delta < 0$) .

10. גם $\hom(V, V)$ הוא חוג (שדה מלבד אולי קיום הופכי) אם מגדירים כפל אופרטורים בתור הרכבה.

11. אם U תת מרחב אינוריאנטי ביחס לאופרטור $f \in \hom(V, V)$ אזי U אינוריאנטי ביחס ל-$P(f)$ לכל $P \in F[x]$.

12. (תכונות $P_{U,W}$) בהינתן $P_{U,W}$ הטלה על המרחב U במקביל למרחב W. אזי:
    (i) $P_{U,W}$ ה"ל.
    (ii) $\mathrm{Im} P_{U,W} = U, \ker P_{U,W} = W$.
    (iii) $P_{U,W} \circ P_{U,W} = P_{U,W}$.

13. $U + W = \mathrm{sp}\{U \cup W\}$ ובפרט $U + W$ ת"מ.

14. $U + W$ הוא סכום ישר אם"ם $U \cap W = \{0\}$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

15. תהי $T \in \hom(V, V)$ הטלה אזי $V = \ker T \oplus \mathrm{Im} T$.

16. $T \in \hom(V, V)$ היא הטלה אם"ם קיימים תתי מרחבים $U, W \subseteq V$ כך ש- $V = U \oplus W$ ולכל $u \in U, w \in W$ מתקיים $T(u + w) = u$.

17. אם V מ"ו נ"ס אזי קיים $k < \dim V$ שעבורו $Z(f, v) = \mathrm{sp}\underbrace{\{v, f(v), \ldots, f^k(v)\}}_{Z(f,v) \text{ בסיס של}}$ (זה קטן ממש כי אחרת נקבל $n+1$ וקטורים בת"ל במ"ו ממימד n).

18. $Z(f,v)$ הוא תת מרחב f-אינווריאנטי.

19. אם $Q \neq 0$ אזי $\deg Q \geq k+1$.

20. $P \mid Q$ (P שהוגדר לעיל).

21. אם $w \in Z(f,v)$ אזי $\min_V^f(f)(w) = 0$.

22. יהי $v \in V$ מ"ו נ"ס, $f \in \hom(V,V)$. אזי קיים $w \in Z(f,v)$ עם $\deg\min_w^f < \deg\min_v^f$ אם"ם $\min_v^f$ פולינום פריק.

23. יהי $f \in \hom(V,V)$, V מ"ו נ"ס אזי $\lambda \in F$ ע"ע של f אם"ם לכל בסיס B של V, λ הוא ע"ע של $[f]_B$.

24. יהי $f \in \hom(V,V)$ אזי לכל המטריצות המייצגות את f (ביחס לכל הבסיסים האפשריים של V) ישנם אותם ע"ע.

25. אם A, B דומות אזי ל-A ו-B אותם ערכים עצמיים (היזכרו בתכונה זו).

26. $(x-\lambda) \mid \min_v^f$ אם"ם קיים ו"ע $w \in Z(f,v)$.

27. יהי $f \in \hom(V,V)$, V מ"ו נ"ס ו-$\lambda \in F$. אזי התנאים הבאים שקולים:
    (i) λ הוא ע"ע של f.
    (ii) $\ker(f-\lambda\mathrm{id}) \neq \{0\}$.
    (iii) $V \neq \mathrm{Im}(f-\lambda\mathrm{id})$.
    $(iiii)$ $(f-\lambda\mathrm{id})$ איננו הפיך.

28. תהי $A \in M_n(F)$ ו-$\lambda \in F$. אזי התנאים הבאים שקולים:
    (i) λ הוא ע"ע של A.
    (ii) קיים $u \in F^n$ שעבורו $(\lambda I - A)u = 0$, כלומר $\mathrm{rank}A < n$ (הדרגה לא מלאה).
    (iii) $\lambda I - A$ איננה הפיכה.
    (iv) $\det(\lambda I - A) = 0$.

29. יהיו $U_1, \ldots, U_k$ תתי מרחבים של מ"ו V נ"ס. $V \supseteq U = U_1 + \cdots + U_k$ אזי התנאים הבאים שקולים:
    (i) $U_1 \oplus \cdots \oplus U_k = U$.
    (ii) אם B_i בסיס של U_i, אזי $B_1 \cup \cdots \cup B_k$ בסיס ל-U.
    (iii) $\dim U = \dim U_1 + \cdots + \dim U_k$.

30. $f \in \hom(V,V)$ במ"ו נ"ס ניתן ללכסון אם"ם קיים בסיס של ו"ע ביחס ל-f ב-V.

31. נניח כי $U = \mathrm{sp}\{u_1, \ldots, u_n\}$. אזי U הוא f-אינווריאנטי אם"ם $f(u_i) \in U$, לכל $1 \leq i \leq n$.

32. $F[x] = U \oplus W$ עבור $\mathrm{char}F \neq 2$.

33. יהיו $f, g : V \to V$, U ת"מ של V ו- $\lambda \in F$ ונניח כי U הוא f,g-אינווריאנטי. אזי U נשמר ע"י:
    (i) $f+g$.

(ii) λf.

(iii) $f\circ g$.

34. U נשמר ע"י f אזי אם $P\in F\left[x\right]$ אזי U הוא $P\left(f\right)$-אינוורינאטי.

35. יהיו $P,Q,R\in F\left[x\right]$ ויהי V מ"ו וגם $f:V\to V$ אופרטור לינארי אזי:

(i) $\left(P+Q\right)\left(f\right)=P\left(f\right)+Q\left(f\right)$.

(ii) $\left(P\cdot Q\right)\left(f\right)=P\left(f\right)\circ Q\left(f\right)$.

(iii) $P\left(f\right)\circ Q\left(f\right)=Q\left(f\right)\circ P\left(f\right)$.

(iv) אם $P=Q\cdot R$ אזי $\ker P\left(f\right)\subseteq\ker Q\left(f\right)$ וגם $\ker R\left(f\right)\subseteq R\left(f\right)$.

36. תהי $A\in M_n(F)$ ויהיו $v_1,\ldots,v_l\in V$ ו"ע עם ע"ע שונים $\lambda_1,\ldots,\lambda_l$ ($i\neq j\Rightarrow\lambda_i\neq\lambda_j$) אזי $v_1,\ldots,v_l$ בת"ל.

37. תהי $A\in M_n(F)$ אזי ל-A לכל היותר n ע"ע שונים.

38. V_λ הוא תת מרחב של V.

39. יהי $f\in\hom\left(V,V\right)$. ויהיו $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ שונים אזי $V_{\lambda_1}+\ldots+V_{\lambda_s}=V_{\lambda_1}\oplus\ldots\oplus V_{\lambda_s}$.

40. יהי $f:V\to V$ אופרטור מעל מ"ו נ"ס. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f ניתן ללכסון.

(ii) ל-f קיים בסיס של ו"ע.

(iii) $V=V_{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V_{\lambda_s}$ כאשר $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ הע"ע של f.

(iv) $\dim V=\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_s}$.

41. יהיו $A,D\in M_n(F)$ מטריצות דומות אזי $\chi_A=\chi_B$.

42. מטריצות שמייצגות את אותו אופרטור לינארית לפי בסיסים שונים דומות, ולכן פולינום אופייני של אופרטור מוגדר היטב.

43. יהי $f:V\to V$ אופרטור ו-$U\subseteq V$ תת מרחב אינווריאנטי ל-f כאשר V מ"ו נ"ס אזי $\chi_f\mid\chi_{f|_U}$.

44. אם קיים פירוק $\min_v^f\left(x\right)=P\left(x\right)Q\left(x\right)$ כאשר P,Q הם מתוקנים, אז קיים $w\in Z\left(f,v\right)$ שעבורו $\min_w^f\left(x\right)=P\left(x\right)$.

45. $\operatorname{sp}\left\{v\right\}$ הוא f-אינוורינאטי אם"ם v ו"ע.

46. V_λ ת"מ של V.

47. יהי $f:V\to V$ ו-$0\neq v\in V$. נסמן $U=Z\left(f,u\right)$ ו-$g=f|_U:U\to U$ אזי $\min_v^f=\chi_g$.

48. (קיילי המילטון) יהי $f:V\to V$ אופרטור לינארי במ"ו נ"ס. אזי $\chi_f\left(f\right)=0_{\hom(V,V)}$.

49. הפולינום המינימלי מוגדר היטב.

50. יהיו $F\subseteq K$ שדות, $v_1,\ldots,v_k\in F^n$ בת"ל מעל F. אזי $v_1,\ldots,v_k$ בת"ל מעל K.

51. יהיו $F\subseteq K$ שדות ו-$A\in M_n(F)$. נסמן μ_A^F את הפולינום המינימלי של A מעל F ו-μ_A^K את הפולינום האופייני של A מעל K אזי $\mu_A^F=\mu_A^K$.

52. (אפיון של μ_f) μ_f הוא הפולינום המתוקן מדרגה מינימלית $P\in F\left[x\right]$ כך ש- $P \mid \min_v^f$, לכל $0\neq v\in V$.

53. μ_f הוא המכפלה המשותפת המינימלית (lcm) של כל הפולינומים המינימליים של וקטורים ב-V.

54. יהיו $f:V\to V$, V מ"ו נ"ס מעל F.

(i) $\mu_f\mid\chi_f$.

(ii) כל ע"ע של f הוא שורש של μ_f.

(iii) כל שורש של μ_F הוא ע"ע של f.

(iv) אם $F=\mathbb{C}$ או $F=\mathbb{R}$ אזי קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\chi_f\mid\left(\mu_f\right)^n$.

55. יהיו $f:V\to V$ כך ש- $\dim V=n$ ונניח כי ל-f n ע"ע שונים. אזי $\mu_f=\chi_f$.

56. קיום n ע"ע שונים הוא לא אם"ם $\chi_f=\mu_f$.

57. $\chi_f \mid (x-\lambda)^{m_\lambda^{\text{geom}}}$ עבור כל λ ע"ע.

58. $m_\lambda^{\text{geom}}\leq m_\lambda^{\text{alg}}$.

59. יהיו $f:V\to V$ במ"ו נ"ס אזי f ניתן ללכסון אם"ם χ_f הוא מכפלה של פולינומים לינאריים וגם לכל λ ע"ע, $m_\lambda^{\text{alg}}=m_\lambda^{\text{geom}}$.

60. יהיו $f\in\hom\left(V,V\right)$ במ"ו נ"ס, והע"ע השונים של f, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$. אזי f לכסין אם"ם $\dim V=\dim V_{\lambda_1}+\cdots+\dim V_{\lambda_k}$.

61. יהי $f\neq 0$ אופרטור נילפ' אזי f לא ניתן ללכסון.

62. נניח כי $v\in V$ מגובה l. אזי $\left\{v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ בת"ל.

63. $\left\{v,f\left(v\right),\ldots,f^{l-1}\left(v\right)\right\}$ היא בת"ל מסקימלית (בדומה לבסיס במרחב ציקלי) עבור l הגובה של v ביחס לאופרטור הנילפ' f וגם

$$M_l\left(F\right)\ni\left[f|_{Z(f,v)}\right]_{(v,\ldots f^{l-1}(v))}=\begin{pmatrix}0 & & & 0\\ 1 & 0 & & \\ & & \ddots & 0\\ 0 & & 1 & 0\end{pmatrix}$$

64. יהיו $v\neq 0$ ו- $0\neq u\in Z\left(f,v\right)$ אז נסמן l_u,l_v הגבהים של u,v בהתאמה. אזי $l_u\leq l_v$ ובנוסף $f^{l_u-1}\left(u\right)=af^{l_v-1}\left(v\right)$ כאשר $a\in F$.

65. יהי $V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$ אזי זהו סכום ישר אם"ם $\left\{f^{l_{v_i}-1}\left(v_i\right):1\leq i\leq k\right\}$ בת"ל.

66. יהיו $v_1,\ldots,v_k\neq 0$ יהי $V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$ אינו סכום ישר. אזי אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימת:

(i) קיים $1\leq r\leq k$ כך ש- $V=Z\left(f,v_1\right)+\cdots+Z\left(f,v_{r-1}\right)+Z\left(f,v_{r+1}\right)+\cdots+Z\left(f,v_k\right)$ כלומר שאפשר להסיר את

$Z\left(f,v_r\right)$ מהסכום.

(ii) קיים $1\le r\le k$ וכן $v'\neq 0$ כך ש-

$$V=Z\left(f,v_1\right)+\dots+Z\left(f,v_{r-1}\right)+Z\left(f,v'\right)+Z\left(f,v_{r+1}\right)+\dots+Z\left(f,v_k\right)$$

כלומר אפשר להחליף את v_r ב-v' ובנוסף $\dim Z\left(f,v_r\right)>\dim Z\left(f,v'\right)$.

67. (קיום צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי) יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפוטנטי, V מ"ו נ"ס מעל F. אזי קיימים $0\neq v_1,\dots,v_k\in V$ כך ש- $V=Z\left(f,v_1\right)\oplus\dots\oplus Z\left(f,v_k\right)$.

68. לכל $1\le i\le k$, השרשרת $C_i\left(v_i,\dots f^{l_i-1}\left(v_i\right)\right)$ מהווה בסיס ל-$Z\left(f,v_1\right)$ ולכן $C=\bigcup_{i=1}^{k}C_i$ בסיס של V וכן $i\neq j\Rightarrow C_i\cap C_j=\varnothing$ ומתקיים

$$[f|_U]_B=\begin{pmatrix}\boxed{J_{l_1}(0)} & & & 0\\ & \boxed{J_{l_2}(0)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_{l_k}(0)}\end{pmatrix}$$

ובעזרת סידור אינדקסים מחדש ניתן להניח כי $l_1\ge\dots\ge l_k$. למטריצה זו נקרא בלוק ז'ורדן נילפוטנטי.

69. אם f נילפ' אזי $\chi_f=x^{\dim V}$.

70. (יחידות צורת ז'ורדן עבור אופרטור נילפוטנטי) יהי $f:V\to V$ אופרטור נילפ' כאשר V מ"ו נ"ס מעל F ונניח כי B,C בסיסים כך ש- $[f]_B,[f]_C$ הן בלוק ז'ורדן נילפ' אזי $[f]_B=[f]_C$, כלומר אם $A,B\in M_n(F)$ בלוקי ז'ורדן נילפ' דומות אזי $A=B$.

71. אם $R=Q-PD$ אז עבור $T\in F\left[x\right]$ מתקיים $T\mid P,Q\iff T\mid P,R$.

72. (הלמה של בזו, למת ה-gcd) נניח כי $P,Q\in F\left[x\right]$ כך ש- $P,Q\neq 0$ אז קיים $H\in F\left[x\right]$ שעבורו

(i) $H\mid P,Q$.

(ii) אם $H'\in F\left[x\right]$ מקיים $H'\mid P,Q$ אז $H'\mid H$.

(iii) קיימים $A,B\in F\left[x\right]$ כך ש- $H=AP+BQ$.

73. P,Q זרים אם"ם קיימים $A,B\in F\left[x\right]$ כך ש- $AP+BQ=1$.

74. נניח ש-P,Q זרים וכן P,Q' זרים. אז $P,Q\cdot Q'$ זרים.

75. מטריצות דומות הן בעלות פולינום מינימלי שווה (ובפרט הפולינום המינימלי של אופרטור מוגדר היטב)

76. מטריצות דומות הן בעלות פולינום אופייני שווה (כבר ראינו את זה).

77. (משפט הפירוק הפולינומיאלי/פרימרי) יהיו $P, P_1, P_2 \in F[x]$ כך ש- $P = P_1 \cdot P_2$ וגם P_1, P_2 זרים (כלומר $\gcd(P_1, P_2) = 1$) וכן $f : V \to V$ אופרטור. אזי $\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \ker P_2(f)$.

78. נניח כי $P = P_1 \cdot \dots \cdot P_k \in F[x]$ כך ש- $P_1, \dots, P_k \in F[x]$ מקיימים $\gcd(P_i, P_j)$ $i \neq j \Rightarrow$. אזי אם $f : V \to V$ אופרטור אז $\ker P(f) = \ker P_1(f) \oplus \dots \oplus \ker P_k(f)$.

79. (קיום צורת ז'ורדן קנונית) יהי V מ"ו נ"ס ו- $f : V \to V$ אופרטור. נניח כי χ_f הוא מכפלה של פולינומים לינאריים. אזי קיים בסיס B של v כך ש- $[f]_B$ היא מטריצת ז'ורדן.

80. אם $F = \mathbb{C}$ אז לכל אופרטור יש הצגה בצורת ז'ורדן (נובע מהמשפט היסודי של האלגברה).

81. אם $A \in M_n(F)$ כך ש- χ_A הוא מכפלה של גורמים לינאריים אז A דומה למטריצה B כך ש- B היא מטריצת ז'ורדן.

82. (יחידות צורת ז'ורדן) יהיו $A, B \in M_n(F)$ ונניח כי $A = \text{Block}\left(J_A^{\lambda_1}, \dots, J_A^{\lambda_k}\right)$ וגם $B = \text{Block}\left(J_B^{\lambda_1'}, \dots, J_B^{\lambda_l'}\right)$ כך ש- A, B מטריצות ז'ורדן ונניח כי $A \sim B$. אזי $k = l$ וגם $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} = \{\lambda_1' \dots, \lambda_l'\}$ וכן $\forall \lambda \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$ מתקיים $J_A^\lambda = J^{\lambda_B}$. כלומר עד כדי שינוי סדר הבלוקים, המטריצות שוות.

83. ישנה הצגת ז'ורדן יחידה של אופרטור $f : V \to V$ עד כדי שינוי סדרת הבלוקים בתוך מטריצת הז'ורדן.

84. כל מטריצה משולשית עם אפסים על האלכסון היא נילפטונטית.

85. יהי V מ"ו ממימד n מעל $F = \mathbb{C}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ ו- $f : V \to V$ אופרטור. אזי f נילפ' אם"ם $\chi_f(x) = x^n$.

86. לאופרטור נילפ' קיים ע"ע יחיד והוא 0 (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

87. אופרטור נילפ' f הוא לכסין אם"ם הוא אופרטור ה-0 (מסקנה ישירה מכאן).

88. מספר האופרטורים הנילפוטנטים (עד כדי שינוי סדר האינדקסים) בגודל n הוא מספר הדרכים לכתוב את n כסכום של מספרים טבעיים (שזה קצת מאוד).

89. יהי ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v \in V$. אזי $\langle u \mid v \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2\right)$.

90. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $u, v \in V$. אזי

$$\langle u \mid v \rangle = \frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 - i\|u+iv\|^2 + i\|u-iv\|^2\right)$$

91. (פיתגורס) יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$ כך ש- $u \perp v$. אזי $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

92. יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v \in V$ כך ש-$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. אזי $u \perp v$.

93. יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ מעל $\mathbb{R}$ ויהיו $u, v \in V$. אזי קיים $c \in F$ כך ש- $u \perp v - cu$.

94. (אי-שוויון קושי שוורץ, אשק"ש) יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. אזי $|\langle u \mid v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$. בנוסף, ישנו שוויון אם"ם u, v ת"ל.

95. (אי-שוויון המשולש) יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ ויהיו $u, v \in V$. אזי $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$. בנוסף, השוויון מתקיים אם"ם $u = 0_V$ או $v = 0_V$ או שקיים $0 < c \in \mathbb{R}$ כך ש- $v = cu$.

96. $u \perp S$ אם"ם $u \perp \text{sp}S$, כלומר $\text{sp}\left(S\right)^T = S^T$

97. $S^\perp$ הוא ת"מ של V.

98. יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו- $v, v_W \in V$ ו- $w \in W$. אם v_W הטלה אורתוג' של v על W אזי $d\left(v, w\right) \geq d\left(v, v_W\right)$ והשוויון מתקיים אם"ם $w = v_W$.

99. (יחידות ההטלה האורתוג') יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V ו- $v, v_W, v'_W \in V$ כך ש- v_W, v'_W הן הטלות אורתוג' של v על W. אזי $v_W = v'_W$.

100. תהי $\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ אורתוגונלית וגם $\forall i \in [k]\,, v_i \neq 0_V$. אזי $\left(v_1, \ldots, v_k\right)$ בת"ל.

101. יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ, W ת"מ של V, $\left(w_1, \ldots, w_k\right)$ סדרה אורתונורמלית הפורשת את W (כלומר $\text{sp}\left\{w_1, \ldots, w_k\right\} = W$) אזי $\forall v \in V$ הוקטור $v_W = \langle w_1 \mid v\rangle w_1 + \cdots + \langle w_k \mid v\rangle w_k$ הוא הטלה אורתוג' של v על W.

102. יהיו V מ"ו מעל F ו- $g : V \to V$ אופרטור אזי $\ker g \subseteq \ker g^2 \subseteq \ldots$ הם ת"מ g-אינ'.

103. יהיו V מ"ו נ"ס מעל F ו- $g : V \to V$ אופרטור אזי קיים $k \leq \dim V$ כך ש- $\ker g^k = \ker g^{k+1}$ וגם $\forall l \geq k$ מתקיים $\ker g^l = \ker g^k$.

104. (i) $\hat{V_\lambda}$ הוא f-אינ'.

(ii) $\left(f - \lambda \text{id}_V\right)|_{\hat{V_\lambda}}$ הוא נילפ' מדרגה k לכל היותר כאשר k הוא המינימלי כך שהגרעינים מתייצבים.

105. יהיו V מ"ו נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור כך ש- χ_f מתפרק לגורמים לינאריים $\chi_f\left(x\right) = \left(x - \lambda\right)^{m_1} \cdot \ldots \cdot \left(x - \lambda_k\right)^{m_k}$ כאשר $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. אזי מתקיים $V = \hat{V_{\lambda_1}} \oplus \cdots \oplus \hat{V_{\lambda_k}}$ ובנוסף $\dim \hat{V_{\lambda_i}} = m_i$, $\forall i \in [k]$.

106. (תהליך גרם-שמידט) יהי $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ, $\left(b_1, \ldots, b_m\right)$ סדרה בת"ל של וקטורים מ- V. אזי קיימת סדרה אורתונורמלית $\left(u_1, \ldots, u_m\right)$ של וקטורים מ- V כך ש- $\forall k \in [m]$ מתקיים $\text{sp}\left\{u_1, \ldots, u_k\right\} = \text{sp}\left\{b_1, \ldots, b_k\right\}$.

107. בכל ממ"פ ממימד סופי קיים בסיס אורתונ'.

108. אם W ת"מ נ"ס של ממ"פ $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$, $v \in V$ אזי קיימת הטלה אורתוג' של v על W.

109. יהיו $(V, \langle\cdot \mid \cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס ויהי $B = \left(u_1, \ldots, u_n\right)$ בסיס אורתונ' של V, $v, w \in V$. אזי

$$\langle v \mid w\rangle = [v]_B \cdot [w]_B$$
$$\|v\| = \|[v]_B\|_{F^n}$$

כאשר $\cdot$ היא המכפלה הסקלרית ו- $\|\cdot\|_{F^n}$ מוגדרת ע"י המכפלה הסקלרית כמ"פ.

110. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$B = (u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונ' של V, $v, w \in V$. אזי:

(i) $[v]_B = \begin{pmatrix} \langle u_1 | v \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n | v \rangle \end{pmatrix}$.

(ii) $\langle v \mid w \rangle = \overline{\langle u_1 \mid v \rangle} \langle u_1 \mid w \rangle + \cdots + \overline{\langle u_n \mid v \rangle} \langle u_n \mid w \rangle$.

(iii) $\|v\|^2 = |\langle u_1 \mid v \rangle|^2 + \cdots + |\langle u_n \mid v \rangle|^2$.

111. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $(u_1, \ldots, u_n)$ בסיס אורתונ' של V. נגדיר $W = \mathrm{sp}\{u_1, \ldots, u_k\}$ כאשר $1 \leq k \leq n-1$ אזי $W^\perp = \mathrm{sp}\{u_{k+1}, \ldots, u_n\}$.

112. קיים $z \in V$ יחיד שהוא הטלה בניצב של y על x.

113. אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_1^\perp \supseteq S_2^\perp$.

114. יהי V ממ"פ נ"ס ויהי $U \subseteq V$ ת"מ אזי $V = U \oplus U^\perp$.

115. (קריטריון אורתוג'/און') יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ, $f : V \to V$ אופרטור אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוג'/אוינטרי.

(ii) $\|f(v)\| = \|v\|$, $\forall v \in V$.

(iii) אם $v \in V$ הוא וקטור יחידה אזי גם $f(v)$ הוא וקטור יחידה.

116. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$f : V \to V$ אורתוג'/און' אזי f הפיך.

117. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אורתוג'/און', $g : V \to V$ הפוך ל-f, אזי g אורתוג'/און'.

118. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אורתוג'/און', W ת"מ f-איני' של V. אזי $W^\perp$ הוא f-איני'.

119. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ו-$f : V \to V$ אופרטור אורתוג'/און' ו-λ ע"ע של f. אזי $|\lambda| = 1$.

120. (קריטריון אורתוג' לממ"פ נ"ס) יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$f : V \to V$ אופרטור אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) f אורתוגונלי/אוניטרי.

(ii) לכל בסיס אורתונרמלי $(u_1, \ldots, u_n)$ של V, $(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ מהווה בסיס אורתונורמלי של V.

(iii) קיים בסיס אורתונורמלי $(u_1, \ldots, u_n)$ של V כך ש-$(f(u_1), \ldots, f(u_n))$ בסיס אורתונורמלי של V.

121. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, B בסיס אורתונ' של V ו-$f : V \to V$ אופרטור לינארי ונסמן $A = [f]_B$. אזי f אורתוג'/און' אם"ם $\overline{A}^T A = I_n$.

122. (משפט ההצגה, Reisz) יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $l : V \to F$ פ' לינארי אזי קיים $w \in V$ יחיד כך ש-$l = \langle w |$, כלומר $l(v) = \langle w \mid v \rangle$, $\forall v \in V$.

123. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור לינארי אזי קיים $f^* : V \to V$ יחיד כך ש-$\langle f^*(w) \mid v \rangle = \langle w \mid f(v) \rangle$, $\forall v, w \in V$. בנוסף, אם B בסיס אורתונ' של V, $A = [f]_B$ אזי $[f^*]_B = \overline{A}^T$.

124. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור אורתוג'/און' ו-$g : V \to V$ אופרטור הפוך ל-f. אזי $g = f^*$.

125. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f: V \to V$ אופרטור לינארי, W ת"מ f-אינ' של V, אזי $W^\perp$ הוא ת"מ f^*-אינ'.

126. יהי $W \subseteq V$ ת"מ של ממ"פ נ"ס, אזי קיים בסיס אורתונ' $\{u_1, \dots, u_n\}$ כך ש- $W = \text{sp}\{u_1, \dots, u_k\}$.

127. (ראינו בהרצאה) יהי V ממ"פ. יהיו $\{u_1, \dots, u_n\}$ בסיס אורתונ' ל-V ו-. אזי $W^\perp = \text{sp}\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$.

128. יהי V ממ"פ נ"ס. אם W הוא ת"מ של V אזי $\dim V = \dim W + \dim W$ וגם $V = W \oplus W^\perp$.

129. יהי $W \subseteq V$ ת"מ של ממ"פ נ"ס. אזי $\left(W^\perp\right)^\perp$.

130. אם w היא ההטלה האורתוג' של v על W ו-z היא ההטלה של v על $W^\perp$ אזי $v = w + z$ (נובע מתכונות ההטלה).

131. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\lambda \in \mathbb{C}$ ע"ע של f, אזי $\lambda \in \mathbb{R}$.

132. אם $A \in M_n(\mathbb{C})$ צמודה לעצמה אז $\lambda \in \mathbb{C}$ הוא ע"ע אז $\lambda \in \mathbb{R}$.

133. תהי $A \in M_n(F)$ צמודה לעצמה. אזי קיים $\lambda \in F$ כך ש-λ-ע"ע של A.

134. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, אזי קיים $\lambda \in F$ כך ש- λ הוא ע"ע של f.

135. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $f: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\lambda \neq \mu \in F$ ע"ע של f, $v, w \in V$ ו"ע ששיכים ל-λ, μ בהתאמה אזי $v \perp w$.

136. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ, $\dim V = n$, $f: V \to V$ אופרטור צמוד לעצמו, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ ע"ע של f כך ש- $i \neq j \to \lambda_i \neq \lambda_j$, אזי קיים בסיס אורתונ' $B = (u_1, \dots, u_n)$ כך ש- u_i הוא ו"ע של f המתאים לע"ע λ_i, $\forall i \in [n]$.

137. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ממימד סופי, B בסיס אותרונ' של V ו-C בסיס של V. אזי C הוא אורתונ' אם"ם $[\text{id}]_B^C$ היא מטריצה אורתוג'.

138. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, B בסיס אורתונ' של V, $f: V \to V$ אופרטור לינארי, $A = [f]_B$, אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם קיימת מטריצה אורתוג'/אונ' M כך ש- $M^{-1}AM$ אלכסונית.

139. (המשפט הספקטרלי במקרה הממשי) יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{R}$, $f: V \to V$ אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם צמוד לעצמו.

140. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. אזי A לכסינה אורתוג' אם"ם A סימטרית.

141. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ ו-$f: V \to V$ אופרטורים אורתוג'/אונ' ויהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע"ע שונים של f. אזי $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.

142. יהי $B = (u_1, \dots, u_n)$ בסיס ל-V. נגדיר $\varphi_j: V \to F$ ע"י $\varphi_j(u_i) = \delta_{ij}$. אזי $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ בסיס ל-V^*.

143. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס ו-$(v_1, \dots, v_n)$ בסיס אורתונ' אזי $(\langle v_1|, \dots, \langle v_n|)$ הוא הבסיס הדואלי של V^*.

144. יהיו $(V, \langle\cdot\mid\cdot\rangle)$ ממ"פ נ"ס, $\varphi \in V^*$, אזי קיים $w \in V$ כך ש- $\langle w| = \varphi$.

145. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ ו-$f : V \to V$ אופרטור לינארי. אזי האופרטור הצמוד מקיים $\forall v, u \in V$

$$\langle f(v) \mid u \rangle = \langle v \mid f^*(u) \rangle$$

146. יהיו $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ מעל F, $f : V \to V$ אופרטור לינארי, W ת"מ f- וגם f^*-אינ' של V. אזי $(f|_W)^* = f^*|_W$.

147. (המשפט הספקטרלי במקרה המרוכב) יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$, $f : V \to V$. אזי f לכסין בבסיס אורתונ' אם"ם f נורמלי.

148. תהי $A \in M_n(F)$. אז A לכסינה אוניטרית אם"ם A נורמלית.

149. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \to V$ ת"ב, B בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B, אזי $g(v, w) = [v]_B^T G [w]_B$, $\forall v, w \in V$.

150. אם $g : F^n \times F^n \to F$ ת"ב, G הטריצה של g ביחס ל-E, $g' : F^n \times F^n \to F$ המוגדרת ע"י $g'(x, y) = x^T G y$, אזי $g \equiv g'$. כי

$$g(x, y) = [x]_B^T G [y]_B = x^T G y = g'(x, y)$$

151. יהיו V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ ת"ב, B, B' בסיסים סדורים של V, $M = [\mathrm{id}]_B^{B'}$ מטריצת המעבר מ-B' ל-B, G, G' המטריצות של g ביחס ל-B, B' בהתאמה, אזי $G' = M^T G M$.

152. יחס חפיפה הוא יחס שקילות (כלומר הוא רפלקסיבי, טרנזטיבי וסימטרי).

153. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ ת"ב, B בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B, G' מטריצה שחופפת ל-G, אזי קיים בסיס סדור B' של V כך שהמטריצה של g ביחס ל-B' היא G'.

154. יהי V ממ"ו נ"ס. אופרטור לינארי $f : V \to V$ הוא צמוד לעצמו אם"ם $\langle f(u) \mid v \rangle = \langle u \mid f(v) \rangle$, $\forall u, v \in V$.

155. יהי $U \subseteq V$ ת"מ של מ"ו נ"ס. אזי p_U צמוד לעצמו.

156. יהי V ממ"פ. יהי $f : V \to V$ אופרטור לינארי. אזי f נורמלי אם"ם $\langle f(u) \mid f(v) \rangle = \langle f^*(u) \mid f^*(v) \rangle$, $\forall u, v \in V$.

157. יהי V ממ"פ נ"ס, $f : V \to V$ אופרטור ויהיו $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע"ע של f. אזי:

אם $F = \mathbb{R}$, ו-f צמוד לעצמו אזי $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$;

אם $F = \mathbb{C}$ ו-f נורמלי אזי $V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$.

158. (משפט הפירוק האוניטרי) יהי $(V, \langle \cdot \mid \cdot \rangle)$ ממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ ו-$f : V \to V$ אופרטור. אזי f נורמלי אם"ם קיימים אופרטורים $u, h : V \to V$ המקיימים:

u (i) אונ' ו-h הרמיטי ($h = h^*$).

(ii) u,h מתחלפות, כלומר $u\circ h=h\circ u$.

(iii) $u\circ h=f=h\circ u$.

159. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g:V\times V\to F$ ת"ב אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) g תבנית בילינארית (אנטי) סימטרית..

(ii) קיים בסיס B, המטריצה של g ביחס ל-B (אנטי) סימטרית.

(iii) לכל בסיס B, המטריצה של g ביחס ל-B (אנטי) סימטרית.

160. יהי V מ"ו מעל F, $q:V\to F$ ת"ר, $g:V\times V\to F$ תב"ס, כך ש-$q\left(v\right)=g\left(v,v\right)$. אזי

$$g\left(v,w\right)=\frac{q\left(v+w\right)-q\left(v\right)-q\left(w\right)}{2}$$

$\forall v,w\in V$.

161. אם g,g' תב"ס על V מ"ו שונות זו מזו, אזי הת"ר שמתאימות להן שונות זו מזו.

162. באותם התנאים כמו במשפט הקודם, מתקיים בנוסף

$$g\left(v,w\right)=\frac{q\left(v+w\right)-q\left(v-w\right)}{4}$$

163. יהי Vמ"ו מעל F, $0\not\equiv g:V\times V\to F$ תב"ס, אזי קיים $v\in V$ שאינו ניצב לעצמו.

164. $S^{\perp}$ הוא ת"מ של V.

165. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g:V\times V\to F$ תב"ס, $B=\left(b_{1},\ldots,b_{n}\right)$ בסיס סדור של V, G המטריצה של g ביחס ל-B. אזי g לא מנוונת אם"ם G הפיכה.

166. יהי V מ"ו נ"ס מעל F כך ש-$\mathrm{char}F\neq2$, $g:V\times V\to F$ תב"ס. אזי קיים בסיס אורתוג' B של V.

167. תהי $A\in M_{n}(F)$ סימטרית אזי קיימת $D\in M_{n}(F)$ אלכסונית החופפת ל-A.

168. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $q:V\to F$ ת"ר, אזי קיים בסיס $\left(v_{1},\ldots,v_{n}\right)$ של V ו-$a_{1},\ldots,a_{n}\in F$ כך ש-$\forall v\in V$ מתקיים $q\left(v\right)=a_{1}c_{1}^{2}+\cdots+a_{n}c_{n}^{2}$, כאשר $[v]_{B}=\begin{pmatrix}c_{1}\\ \vdots\\ c_{n}\end{pmatrix}$.

169. (מהמשפט הספקטרלי, נקרא משפט הפירוק האוניטרי) לאופרטור נורמלי f בממ"פ נ"ס מעל $\mathbb{C}$ קיימים אופרטורים מתחלפים u,h כך ש-u אוניטרי ו-h הרמיטי המקיימים $u\circ h=f$.

170. $g:V\times V\to\mathbb{R}$ היא ת"ב אם"ם $\forall u\in V$, $l_{u}\left(v\right)=g\left(u,v\right)$ ו- $r_{u}\left(v\right)=g\left(v,u\right)$ הם פ' לינארים.

171. למטריצות A,B חופפות, דרגותיהן שוות (כי אנחנו מכפילים אותן במטריצות הפיכות ששומרות דרגה).

172. יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{C}$, $g : V \times V \to \mathbb{C}$ תב"ס. אזי קיים $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ובסיס B של V כך ש-$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

173. יהי V מ"ו נ"ס מעל F, $g : V \times V \to F$ תב"ס, B בסיס סדור של V, $G = [g]_B$. אזי $\text{rk}G = \dim V - \dim\ker g$.

174. יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{C}$, $g : V \times V \to \mathbb{C}$ תב"ס, $k, k' \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ובסיסים סדורים B, B' של V כך ש-

$$[g]_B = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) . [g]_{B'} = \left(\begin{array}{c|c} I_{k'} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

אזי $k = k'$.

175. תהי $A \in M_n(\mathbb{C})$ סימטרית. אזי קיים $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ יחיד כך ש-A חופפת ל-$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

176. (סילבסטר, קיום) יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ תב"ס. אזי קיימים $p, m, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ובסיס B של V כך ש-$n = p + m + z$ וכן ש-$[g]_B = G(p, m, z)$.

177. (סילבסטר, יחידות) יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{R}$, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ תב"ס, B, B' בסיסים סדורים של V כך ש- $[g]_B = G(p, m, z)$, $[g]_{B'} = G(p', m', z')$ אזי $p = p', m = m', z = z'$.

178. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. אזי קיימים $p, m, z \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ יחידים כך ש-A חופפת ל-$G(p, m, z)$.

179. $g : V \times V \to F$ תב"ס אם"ם g ת"ב ו-$\forall v \in V$, $l_u = r_u$.

180. תהי $q : V \to F$ העתקה. אזי q היא התבנית הריבועית המשויכת ל-g אם"ם קיים בסיס $B = (v_1, \ldots, v_n)$ אורתוג' ל-V ביחס לתב"ס g לכל $\forall \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ מתקיים

$$q\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n} a_i^2 q(v_j)$$

181. תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוג' וצמודה לעצמה. אזי הסיגנטורה של A היא (p, m) כאשר $p = m_1^{\text{alg}}$, $m = m_{-1}^{\text{alg}}$.