אלגברה לינארית לפיזיקאים 1 לתכנית האודיסאה

80565/4

הרצאות | ד"ר יוסי שמאי

כתיבה | נמרוד רק

הסיכום נכתב בלשון נקבה בלי שום סיבה, אך מכוון לגברים ונשים כאחד

אלגברה לינארית הינה קורס סאטירה ואין לייחס לנאמר בה שום משמעות אחרת או ניסיון לפגוע

תוכן העניינים

חלק I

80565

$\mathbb{I}$

1 מערכות לינאריות

הגדרה 1.1 יהי $\mathbb{F}$ שדה. יהיו $m,n\in\mathbb{N}$. מערכת משוואות לינאריות במשתנים $x_1,x_2,...,x_n$ של m משוואות זו מערכת מהצורה:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

$(*)$ כאשר $b_i\in\mathbb{F}$, $1\le\forall i\le m$ וכאשר $a_{ij}\in\mathbb{F}$, $1\le\forall i\le m$ ו- $1\le\forall j\le n$.

הגדרה 1.2 פתרון פרטי למערכת $(*)$ הוא "וקטור" $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$ כך ש- $(*)$ מתקיימת עבור $x_1,x_2,...,x_n$ הנ"ל.

הערה $\mathbb{Z}_5^3=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\;\middle|\;x_1,\ x_2,\ x_3\in\mathbb{Z}_5\right\}$, $\mathbb{R}^2=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\;\middle|\;x_1,\ x_2\in\mathbb{R}\right\}$.

הגדרה 1.3 הפתרון הכללי למערכת $(*)$ מוגדר להיות קבוצות כל הפתרונות הפרטיים של $(*)$.

תרגילים

1. נגדיר מערכת במשתנים x,y (← הערה: אם לא צוין אחרת, נניח תמיד כי $\mathbb{F}=\mathbb{R}$) של שתי משוואות: $\begin{cases}x+2y=1\\x-3y=0\end{cases}(*)$.

   $\begin{cases}a_{11}=1,\ a_{12}=2,\ b_1=1\\a_{21}=1,\ a_{22}=-3,\ b_2=0\end{cases}$. האם $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ הוא פתרון פרטי של $(*)$?

   לא! (המשוואה השניה לא מתקיימת).

2. נגדיר מערכת במשתנים x,y מעל השדה $\mathbb{F}=\mathbb{Z}_5$: $\begin{cases}x+3y=1\\2x+y=1\end{cases}(*)$, $n=2$, $m=2$. ...$a_{22}=1,\ b_2=1$. האם $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}\in\mathbb{Z}_5^2$ הוא פתרון פרטי של $(*)$?

   $1+3\cdot4=1+2=3\neq1$ ← לא!

דוגמה נגדיר מערכת במשתנים x_1,x_2,x_3 מעל השדה $\mathbb{Q}$ ע"י $\begin{cases}x_1-x_3=0\\x_2=1\end{cases}(*)$. $\begin{cases}b_1=0,\ a_{11}=1,\ a_{12}=0,\ a_{13}=-1\\b_2=1,\ a_{21}=0,\ a_{22}=1,\ a_{23}=0\end{cases}$. נשים לב כי $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ הוא פתרון פרטי ל- $(*)$. נשים לב שהפתרון הכללי הוא הקבוצה

$$\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{Q}^3\;\middle|\;\begin{matrix}x_1-x_3=0\\x_2=1\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}t\\1\\t\end{pmatrix}\;\middle|\;t\in\mathbb{Q}\right\}.$$

הערה למצוא את הפתרון הכללי למערכת לינארית זה לא דבר מאתגר במיוחד.

הגדרה 1.4 שתי מערכות לינאריות מעל השדה $\mathbb{F}$ במשתנים $x_1,x_2,...,x_n$ יקראו שקולות זו לזו אם הפתרון הכללי שלהן זהה.

הגדרה 1.5 מטריצת המקדמים המורחבת של המערכת $\left\{\begin{smallmatrix} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{smallmatrix}\right.$ $(*)$ מוגדרת להיות המטריצה

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

הגדרה 1.6 מטריצת המקדמים המצומצמת של המערכת $(*)$ מוגדרת להיות המטריצה $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$.

דוגמות

1.

$$(*) \left\{\begin{smallmatrix} x_1-x_3=1 \\ x_2+x_4=3 \end{smallmatrix}\right. , \quad A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad A^+ = \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

הפתרון הכללי הוא הקבוצה

$$\left\{ \left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 - x_3 = 1 \\ x_2 + x_4 = 3 \end{matrix} \right\} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} t \\ s \\ t+1 \\ 3-s \end{smallmatrix}\right) \;\middle|\; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

2. $\left\{\begin{smallmatrix} x_1=3 \\ x_1=4 \\ x_2=0 \end{smallmatrix}\right.$ $(*)$, $n=2$, $m=3$. $A^+ = \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$, $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\varnothing$.

3. $\left\{\begin{smallmatrix} (i) & x_1-x_2+x_3=0 \\ (ii) & x_1-x_2+2x_3=1 \\ (iii) & x_1+x_2-x_3=0 \end{smallmatrix}\right.$ $(*)$. נמצא את הפתרון הכללי של $(*)$,

$$(ii)-(i) : x_3 = 1-0 = 1$$

נציב ב- (i) ו- (iii) נקבל: $\left\{\begin{smallmatrix} (i) & x_1-x_2+1=0 \\ (iii) & x_1+x_2-1=0 \end{smallmatrix}\right.$. נחבר

$$(i)+(iii) : 2x_1 = 0 \to x_1 = 0$$

נציב ב- (i) ונקבל $x_2 = 1$ לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$.

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

הערה נוכל לבצע פעולות על שורות A^+ במקום על המשוואות של $(*)$ ולבסוף לקבל מטריצת מקדמים מורחבת המתאימה למערכת לינארית פשוטה יותר.

הגדרה 1.7 תהי A מטריצה. פעולת שורה אלמנטרית על השורות של A מוגדרת להיות אחת מהפעולות הבאות:

(i) כפל של שורה בסקלר: $R_i \to c \cdot R_i$ כאשר $1 \leq i \leq m$, $0_F \neq c \in \mathbb{F}$.

(ii) החלפת שתי שורות שונות: $R_i \leftrightarrow R_j$ כאשר $1 \leq i, j \leq m$ וגם $i \neq j$.

(iii) הוספת כפולה של שורה אחת לשורה אחרת: $R_i \to R_i + cR_j$ כאשר $c \in \mathbb{F}$ ו- $1 \leq i, j \leq m$ וגם $i \neq j$.

טענה תהיינה $(*)$, $(**)$ שתי מערכות לינאריות מעל $\mathbb{F}$ במשתנים $x_1, ..., x_n$ ותהיינה A^+, A^{++} מטריצות המקדמים המורחבות שלהם. נניח כי A^{++} התקבלה מ- A^+ ע"י פעולת שורה אלמנטריות. אזי $(*)$, $(**)$ שקולות.

הוכחה: נניח כי $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ פתרון של $(*)$ אזי גם פתרון של $(**)$. בנוסף, אם $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ פתרון של $(**)$ אזי הוא פתרון של $(*)$ שכן כל פעולת שורה אלמנטרית היא הפיכה והפעולה הפוכה שלה היא:

$$\begin{array}{ccc|c} (i) & R_i \to cR_i, c \neq 0_F & & R_i \to c^{-1}R_j \\ (ii) & R_i \leftrightarrow R_j, i \neq j & & R_i \leftrightarrow R_j \\ (iii) & R_i \to R_i + cR_j, i \neq j & & R_i \to R_i - cR_j \end{array}$$

■

הערה נשים לב שכל פעולת שורה הפוכה לפעולת שורה אלמנטרית היא בעצמה פעולת שורה אלמנטרית.

הגדרה 1.8 קבוצת כל המטריצות עם מקדמים בשדה $\mathbb{F}$ בעלות m שורות ו- n עמודות מסומנת ב-

$$M_{m \times n}(\mathbb{F}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} a_{ij} \in \mathbb{F} \\ 1 \leq \forall i \leq m \\ 1 \leq \forall j \leq n \end{array} \right\}$$

נאמר כי $m \times n$ (m על n) הוא סדר המטריצה $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$.

הגדרה 1.9 שתי מטריצות $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ יקראו שקולות שורה, אם ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י מספר סופי של פעולות שורה אלמנטריות.

הערה המושג שקולות שורה מוגדר היטב שכן הוא סימטרי (הפוכה של פעולת שורה היא בעצמה פעולת שורה אלמנטרית).

הערה תהיינה $A^+, A^{++} \in M_{m \times (n+1)}(\mathbb{F})$ שתי מטריצות מקדמים של מערכות לינאריות $(*)$, $(**)$. נניח כי A^{++}, A^+ שקולות שורה אזי $(*)$, $(**)$ מערכות שקולות.

דוגמה נתונה מערכת ב- 3 משתנים מעל $\mathbb{Z}_5$,

$$(*) \begin{cases} x_1 - x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

לכן

$$-x_3 = 4 \to x_3 = 4$$

$$x_2 + x_3 = 0 \to x_2 = 1$$

$$x_1 - x_3 = 3 \to x_1 = 3 + x_3 = 3 + 4 = 2$$

לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}$.

III

דוגמות

1. $\begin{cases} x^2+y=3 \\ x\cdot y=5 \end{cases}$, זו איננה מערכת משוואות לינאריות (במשוואה הראשונה משתנה ממעלה שנייה, ובמערכת השנייה מכפלת משתנים).

2. נתונה מערכת במשתנים x_1, x_2, x_3

$$(*) \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_2-x_3=1 \\ x_3=2 \end{cases}, \quad A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

מהמשוואה האחרונה נובע כי $x_3 = 2$ ונציב במשוואה השנייה ונקבל

$$x_2 - 2 = 1 \to x_2 = 3$$

$$x_1 + 3 + 2 = 0 \to x_1 = -5$$

לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

3. נתונה מערכת ב- 3 נעלמים,

$$(*) \begin{cases} x_1-x_3=0 \\ x_1+2x_2=1 \\ x_1+x_2+x_3=3 \end{cases}$$

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{2} R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{2}{3} R_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_3]{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2} R_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{3} \end{array}\right)$$

לכן הפתרון הכללי ל- $(*)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix} \right\}$.

4. נתונה מערכת ב- 3 משתנים,

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3} R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $x_3 = t$, לכן $x_2 = -2t$, נציב ב- (i) ונקבל $x_1 - 4t + 3t = 0$ כלומר $x_1 = t$. לכן הפתרון הכללי של $(*)$ הוא $\left\{ \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ t \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$.

5. (נדלג על כתיבת המערכת)

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & -6 & -12 & -7 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -9 \end{array}\right)$$

נשים לב כי אין ל- $(*)$ (המערכת המתאימה ל- A^+) אף פתרון פרטי, לכן הפתרון הכללי הוא $\varnothing$.

2 מטריצות מדורגות

הגדרה 2.1 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהי $1 \le i \le m$ ו-$1 \le j \le n$. נסמן ב- $[A]_{ij} = a_{ij}$ את הרכיב המופיע ב- A במקום ה- ij, כלומר, נסמן $[A]_{ij} = a_{ij}$ כאשר $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. נסמן גם בקיצור $A = (a_{ij})_{i=1\ j=1}^{m\ \ n}$ או $A = (a_{ij})$ בקיצור נמרץ.

הגדרה 2.2 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהי $1 \le i \le m$ ו- $1 \le j \le n$. ונסמן $A = (a_{ij})$. נאמר כי a_{ij} הוא <u>איבר מוביל</u> של A ($Pivot$) אם:

(i) $a_{ij} \neq 0_F$.

(ii) a_{ij} הוא האיבר הראשון שלא מתאפס בשורה ה-i-ית, כלומר, אם $1 \le \forall k \le j$ מתקיים $a_{ik} = 0_F$.

דוגמה $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, כאן, המספרים המודגשים הם האיברים המובילים.

הגדרה 2.3 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נאמר ש- A היא מטריצה <u>מדורגת</u> (או בצורת מדרגות או באנגלית $Echlon\ Form$) אם:

(i) כל שורת האפסים ב- A (אם קיימות) נמצאות בתחתית המטריצה.

(ii) כל איבר מוביל ב- A נמצא מימין לאיברים המובילים בשורות שמעליו.

כלומר, אם:

(i) אם עבור $1 \le i \le m$ מתקיים $a_{ij} = 0$, $1 \le \forall j \le n$ אזי $i \le \forall k \le m$ מתקיים $a_{kj} = 0$, $1 \le \forall j \le n$.

(ii) אם עבור $1 \le i_1 < i_2 \le m$ ו- $1 \le j_1, j_2 \le n$, מתקיים $a_{i_1 j_1}$ ו- $a_{i_2 j_2}$ איברים מובילים, מתקיים $j_1 < j_2$.

תרגילים

האם המטריצות הבאות מדורגות?

1. Q: $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ A: $\checkmark$.
2. Q: $\begin{pmatrix}1&2\\1&3\\0&0\end{pmatrix}$ A: $\times$.
3. Q: $\begin{pmatrix}0&0&1&0&2\end{pmatrix}$ A: $\checkmark$.
4. Q: $\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&2&0&1\\0&0&1&2\end{pmatrix}$ A: $\times$.
5. Q: $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ A: $\times$.
6. Q: $\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$ A: $\checkmark$.

$\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}$

3 מטריצות קנוניות

הגדרה 3.1 מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תקרא <u>קנונית</u> (מדורגת קנונית, מדורגת סטנדרטית) אם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) A מדורגת.

(ii) כל איבר מוביל ב- A שווה ל- 1_F.

(iii) כל איבר מוביל נמצא ב<u>עמודה סטנדרטית</u>, כלומר, עבור כל איבר מוביל $a_{ij} = 1_F$, $\forall k \ne i$ כך ש- $1 \le k \le m$, מתקיים $a_{kj} = 0_F$.

דוגמות

האם המטריצות הבאות קנוניות?

1. Q : $A\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{pmatrix}$: $\checkmark$.

2. Q : $A\left(\begin{smallmatrix} 0&0&0\\0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$: $\times$.

3. Q : $A\left(\begin{smallmatrix} 0&0\\0&0 \end{smallmatrix}\right)$: $\checkmark$.

4. Q : $A\begin{pmatrix} 0&1&0&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix}$: $\checkmark$.

5. Q : $A\left(\begin{array}{ccc:c} 1&0&0&5\\0&1&0&6\\0&0&1&7 \end{array}\right)$: $\checkmark$.

הערה נשים לב שאם A^+ היא מטריצת מקדמים מורחבת של מערכת לינארית $(*)$, ואם בנוסף A^+ קנונית, אזי הפתרון ל- $(*)$ מתקבל באופן מידי. לכן היינו רוצים לבצע פעולות שורה אלמנטריות על מטריצת מקדמים מורחבת (שאיננה קנונית) על מנת לקבל מטריצה שקולת שורות שהיא קנונית.

משפט תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי A שקולת שורה למטריצה קנונית.

הערה יתר על כן, המטריצה הקנונית השקולת שורה ל- A היא יחידה, אך נוכיח את היחידות בהזדמנות אחרת כשייתחשק ליוסי, אם בכלל.

הוכחה: נבצע את פעולות השורה האלמנטריות הבאות על A לפי האלגוריתם הבא:

(i) אם העמודה הראשונה של A היא עמודת אפסים נדלג עליה ונחזור ל- (i) עם המטריצה שנשארה.

(ii) אחרת, קיים $1 \le i \le m$ שעבורו $a_{i1} \neq 0_F$. אם $i = 1$ נדלג ל- (iii). אחרת נבצע את הפעולה האלמנטרית $R_1 \leftrightarrow R_i$.

(iii) נבצע $R_1 \to a_{11}^{-1} \cdot R_1$.

(iv) $\forall i \neq 1$, נבצע את הפעולה $R_i \to R_i - a_{i1} \cdot R_1$.

(v) נדלג על השורה והעמודה הראשונה ונחזור ל- (i). $\blacksquare$

הגדרה 3.2 ה<u>דרגה</u> של מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מוגדרת להיות מספר האיברים המובילים בצורה הקנונית של A. נסמן את הדרגה של A ב- $rank(A)$.

הערה הצורה הקנונית של A קיימת ויחידה ולכן הדרגה מוגדרת היטב.

דוגמות

.1

$$\begin{pmatrix} 1&2&0\\0&3&4\\0&2&2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1&2&0\\0&1&\frac{4}{3}\\0&2&2\end{pmatrix} \xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_1\to R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1&0&-\frac{8}{3}\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&-\frac{2}{3}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to-\frac{3}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1&0&-\frac{8}{3}\\0&1&\frac{4}{3}\\0&0&1\end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\to R_2-\frac{4}{3}R_3]{R_1\to R_1+\frac{8}{3}R_3} \begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

הפעלנו את האלגוריתם, קוראת ספונטנית - נסי להבין בעצמך למה זה נכון, אני לא מתכוון לקריין כל מהלך אלגברי פה.

.2

$$A=\begin{pmatrix} 0&2&3\\2&1&4\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 2&1&4\\0&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1&\frac{1}{2}&2\\0&2&3\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1&\frac{1}{2}&2\\0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2} \begin{pmatrix} 1&0&\frac{5}{4}\\0&1&\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

שוב הפעלנו את האלגוריתם, הייתי נותן $5/5$ אם זה היה סרט בורקס קלאסי.

תרגיל יהי $k\in\mathbb{R}$, ונתבונן במערכת המשוואות הבאה:

$$(*)\begin{cases} -x-2y+z=0\\ 2x+5y+kz=1\\ 7x+(9-k)y-5z=-1\end{cases}$$

(א) קבעו לאילו ערכי k (אם קיימים) יש למערכת פתרון יחיד, ומצאו את הפתרון במקרה זה.

(ב) קבעו לאילו ערכי k (אם קיימים) אין למערכת פתרון.

פתרון נתבונן במטריצת המקדמים המורחבת,

$$A^+=\left(\begin{array}{ccc:c} -1&-2&1&0\\2&5&k&1\\7&9-k&-5&-1\end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to-R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1&2&-1&0\\2&5&k&1\\7&9-k&-5&-1\end{array}\right) \xrightarrow[R_3\to R_3-7R_1]{R_2\to R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1&2&-1&0\\0&1&k+2&1\\0&-5-k&2&-1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3+(5+k)R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1&2&-1&0\\0&1&k+2&1\\0&0&(k+3)(k+4)&k+4\end{array}\right)=A^{++}$$

נחלק לאפשרויות:

(i) $k=-3$. במקרה זה, $A^{++}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1&2&-1&0\\0&1&-1&1\\0&0&0&1\end{array}\right)$ אין פתרון.

(ii) $k=-4$. במקרה זה, $A^{++}=\left(\begin{array}{ccc:c} 1&2&-1&0\\0&1&-2&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$, נסמן $z=t$. לכן

$$y-2t=1\to y=1+2t$$

$$x+2y-t=0\to x=-3t-2$$

לכן $\begin{pmatrix} -3t-2 \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix}$ פתרון $\forall t\in\mathbb{R}$ (כלומר יש אינסוף פתרונות).

(iii) $k\neq -3,-4$. במקרה זה, $z=\frac{1}{k+3}$, נציב במשוואה השנייה

$$y+(k+2)z=1 \rightarrow y=1-\frac{k+2}{k+3}=\frac{1}{k+3}$$
$$x+2y-z=x+y=0 \rightarrow x=-\frac{1}{k+3}$$

לכן קיים פתרון יחיד והוא $\begin{pmatrix} -\frac{1}{k+3} \\ \frac{1}{k+3} \\ \frac{1}{k+3} \end{pmatrix}$.

4 מרחבים וקטוריים

הגדרה 4.1 יהי $\mathbb{F}$ שדה. קבוצה V עם פעולות חיבור " $+$ " וכפל בסקלר " $\cdot$ " תקרא מרחב וקטורי (מ"ו) מעל $\mathbb{F}$, אם מתקיימות האקסיומות הבאות:

א1: סגירות לחיבור: $\forall v_1,v_2\in V$, v_1+v_2 מוגדר ומתקיים $v_1+v_2\in V$.

א2: קומוטטיביות החיבור: $\forall v_1,v_2\in V$, $v_1+v_2=v_2+v_1$.

א3: אסוציאטיביות החיבור: $\forall v_1,v_2,v_3\in V$, $(v_1+v_2)+v_3=v_1+(v_2+v_3)$.

א4: קיום וקטור האפס: קיים וקטור $0_V\in V$ שעבורו $v+0_V=v$, $\forall v\in V$.

א5: קיום נגדי: $\forall v\in V$ קיים $-v\in V$ שעבורו $v+(-v)=0_V$.

ב1: סגירות לכפל בסקלר: $\forall v\in V$ ו- $\forall\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot v$ מוגדר ומתקיים $\alpha\cdot v\in V$.

ב2: אסויצאטיביות הכפל בסקלר: $\forall v\in V$ ו- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot(\beta\cdot v)=(\alpha\cdot\beta)\cdot v$.

ב3: דיסטריביוטיביות: (i) $\forall v\in V$ ו- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $(\alpha+\beta)\cdot v=\alpha\cdot v+\beta\cdot v$.

(ii) $\forall v_1,v_2\in V$ ו- $\forall\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot(v_1+v_2)=\alpha\cdot v_1+\alpha\cdot v_2$.

ב4: $\forall v\in V$, $1_F\cdot v=v$.

הערה לעולם לא נרשום $v\cdot\alpha$, הסקלרים הם תמיד משמאל!

$\mathbb{IV}$

הגדרה 4.2 תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $B\in M_{k\times l}(\mathbb{F})$. נאמר כי $A=B$ אם:

(i) $m=k$ וגם $n=l$.

(ii) $1\le\forall i\le m$ ו- $1\le\forall j\le n$, $[A]_{ij}=[B]_{ij}$.

דוגמות

1. <u>מרחב המטריצות</u>: $V = M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נגדיר $\forall A,B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, את $A+B$ להיות המטריצה מסדר $m\times n$ שרכיביה הם $[A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}$, $1 \le \forall i \le m$ ו- $1 \le \forall j \le n$. נגדיר $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, את $\alpha \cdot A$ להיות המטריצה מסדר $m\times n$ שרכיביה הם $[\alpha \cdot A]_{ij} = \alpha \cdot [A]_{ij}$, $1 \le \forall i \le m$ ו- $1 \le \forall j \le n$.
2. המרחב $\mathbb{F}^n = M_{n\times 1}(\mathbb{F})$, כלומר $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1,...,x_n \in \mathbb{F} \right\}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ (כי הוא מקרה פרטי של $M_{m\times n}$).
3. כל שדה הוא מרחב וקטורי מעל עצמו. $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1$.
4. יהי $\mathbb{F}$ שדה ויהי $\mathbb{F}_1 \subseteq \mathbb{F}$ תת שדה. אזי $\mathbb{F}$ מ"ו מעל $\mathbb{F}_1$ (כאשר הכפל בסקלר מוגדר להיות כפל רגיל).
5. בפרט $\mathbb{R}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ מ"ו מעל $\mathbb{Q}$.
6. תהי $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר $\mathbb{R}^A = \left\{ f : A \to \mathbb{R} \right\}$. $\forall f,g \in \mathbb{R}^A$ נגדיר $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in A$ ונגדיר $\forall f \in \mathbb{R}^A$ ו- $\forall a \in \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$, $\forall x \in A$.
7. $$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \left\{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \right\} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \end{pmatrix} \middle| \ a_n \in \mathbb{R}, \forall n \right\} = \mathbb{R}^{\infty}$$
8. $$\mathbb{R}^{\{1,2\}} = \left\{ f : \{1,2\} \to \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} f(1) \\ f(2) \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x,y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$$
9. $\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \ x,y \in \mathbb{R} \right\}$

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$$

משפט $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הוא מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לפעולות החיבור והכפל בסקלר שהגדרנו.

הוכחה: <u>א1</u>: (סגירות לחיבור) ברור.

<u>א2</u>: (קומוניזם החיבור) תהיינה $A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נוכיח כי $A+B=B+A$. ברור כי $A+B,B+A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. יהיו $1\le i\le m$, $1\le j\le n$.

$$[A+B]_{ij}=[A]_{ij}+[B]_{ij}\underset{\text{קומו'}\ \mathbb{F}}{=}[B]_{ij}+[A]_{ij}=[B+A]_{ij}$$

<u>א3</u>: (אסוצ' החיבור) כמו א2.

<u>א4</u>: (קיום 0_V) נגדיר $0_{m\times n}$ ע"י $[0_{m\times n}]_{ij}=0_F$, $\forall ij$. $\begin{pmatrix}0_F&\cdots&0_F\\ \vdots&&\vdots\\ 0_F&\cdots&0_F\end{pmatrix}$. נשים לב ש- $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $A+0_{m\times n}=A$.

<u>א5</u>: (קיום נגדי) תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נביט במטריצה $-A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ המוגדרת על ידי $[-A]_{ij}=-[A]_{ij}$, ברור כי $A+(-A)=0_{m\times n}$.

<u>ב1</u>: (סגירות לכפל בסקלר) ברור שכן $\alpha\cdot A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

<u>ב2</u>: (אסוצ' לכפל בסלקר) יהיו $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. נוכיח כי $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$. נשים לב כי

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A),(\alpha\cdot\beta)\cdot A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

נוכיח ש- $\forall ij$, $[(\alpha\cdot\beta)\cdot A]_{ij}=[\alpha\cdot(\beta\cdot A)]_{ij}$ ונסיים.

$$[(\alpha\cdot\beta)A]_{ij}=(\alpha\cdot\beta)[A]_{ij}\underset{\text{אסוצ'}\ \mathbb{F}}{=}\alpha(\beta[A]_{ij})=\alpha[\beta A]_{ij}=[\alpha\cdot(\beta A)]_{ij}$$

<u>ב3</u>: (דיסטרי') כמו ב2.

<u>ב4</u>: תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. $[1_F\cdot A]_{ij}=1_F[A]_{ij}=[A]_{ij}$ ולכן $1_F\cdot A=A$. ■

דוגמה $M_{3\times 3}(\mathbb{Z}_3)$, נחשב

$$2\cdot\begin{pmatrix}1&0&2\\0&0&1\\2&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&2&2\\0&1&1\\1&2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&0&2\\1&2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&1&1\\0&2&2\\2&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&2&0\end{pmatrix}$$

טענה $\mathbb{R}^A$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

הוכחה: כמו $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. ■

טענה (יחידות 0_V) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ונניח כי $0_V,\widetilde{0}_V\in V$ ניטרליים לחיבור אזי $0_V=\widetilde{0}_V$.

הוכחה: $0_V = 0_V + \widetilde{0}_V = \widetilde{0}_V + 0_V = \widetilde{0}_V$. ■

טענה (חוק הצמצום לחיבור) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ונניח שעבור $u_1, u_2 \in V$ מתקיים $v + u_1 = v + u_2$ אזי $u_1 = u_2$.

הוכחה: קיים נגדי ל- v ונסמנו ב- $u \in V$. מתקיים $u + v = v + u = 0_V$. לכן

$$u_1 = (u+v) + u_1 = u + (v + u_1) = u + (v + u_2) = (u+v) + u_2 = 0_V + u_2 = u_2$$

■

טענה (יחידות הנגדי) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $v \in V$ ונניח שעבור $u_1, u_2 \in V$ מתקיים $v + u_1 = v + u_2 = 0_V$ אזי $u_1 = u_2$.

הוכחה: ברור מחוק הצמצום לחיבור. ■

הערה נסמן את הנגדי של $u \in V$ ב- $-u$. מיחידות הנגדי, הסימון מוגדר היטב.

טענה $\forall v \in V$, $0_F \cdot v = 0_V$.

הוכחה: יהי $v \in V$. $0_V + \cancel{0_F \cdot v} = 0_F \cdot v = (0_F + 0_F) \cdot v = 0_F \cdot v + \cancel{0_F \cdot v}$. ■

הגדרה 4.3 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. נאמר כי W <u>תת-מרחב</u> של V, אם W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ביחס לאותן הפעולות של החיבור והכפל בסקלר שהוגדרו על V.

$\mathbb{V}$

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. אזי W ת"מ של V אם"ם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) W סגור לחיבור כלומר, $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 \in W$.

(ii) W סגור לכפל בסקלר, כלומר $\forall w \in W$ ו- $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $\alpha \cdot w \in W$.

(iii) $0_V \in W$.

הוכחה: <u>$\Leftarrow$</u> : נניח ש- W ת"מ של V. אזי (i) ו- (ii) מתקיימים ב- W כי W מ"ו. לכן מספיק להוכיח כי $0_V \in W$. מהיות W מ"ו מעל $\mathbb{F}$, קיים W וקטור ניטרלי לחיבור, ונסמנו 0_W. לכן מסגירות לכפל בסקלר $0_W = 0_F \cdot 0_W \in W$ אבל גם $0_F \cdot 0_W = 0_V$. לכן $0_W = 0_V$, ולכן $0_V \in W$.

<u>$\Rightarrow$</u> : נניח כי (i), (ii), (iii) מתקיימים ב- W ונוכיח ש- W מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$.

א1. סגירות לחיבור: $\checkmark$.

א2. קומוטטיביות לחיבור: $\forall w_1, w_2 \in W$, $w_1 + w_2 = w_2 + w_1$ (ברור כי $w_1, w_2 \in V$).

א3. אסוציאטיביות לחיבור: $\forall w_1, w_2, w_3 \in W$, $w_1, w_2, w_3 \in V$ ולכן $w_1 + (w_2 + w_3) = (w_1 + w_2) + w_3$.

א4. קיום וקטור האפס: $\forall w \in W$, $w + 0_V = w$ ומהיות $0_V \in W$ הרי שב- W קיים נייטרלי לחיבור.

א5. קיום נגדי: $\forall w \in W$, $-1_F \cdot w \in W$ $\underset{\text{(נוכיח בהמשך)}}{=}$ $-w$ ולכן $w + (-w) = 0_V$.

ב1. סגירות כפל בסקלר: $\checkmark$.

ב2. אסוציאטיביות לכפל בסקלר: $\forall w \in W$ ו- $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\alpha(\beta \cdot w) = (\alpha \cdot \beta)w$ ברור כי מתקיים ב- V.

ב3. דיסטריביוטיביות: (ברור כי V מ"ו)

ב4. קיום ניטרלי לכפל בסקלר: $1_F \cdot w = w$ (ברור כי V מ"ו). ■

טענה יהי V מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$ ויהי $v \in V$. אזי $-v = -1_F \cdot v$.

הוכחה:

$$v + (-1_F) \cdot v = 1_F \cdot v - (1_F) \cdot v = (1_F + (-1_F)) \cdot v = 0_F \cdot v = 0_V$$

ולכן $v + (-1_F)v = 0_V$ ולכן מיחידות הנגדי $(-1_F) \cdot v = -v$. ■

דוגמות

1. נגדיר $W \subseteq \mathbb{R}^2$ ע"י $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$. אזי W ת"מ של $\mathbb{R}^2$:
   (i) סגור לחיבור יהיו $\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 3y \end{pmatrix} \in W$. אזי $\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 3(x+y) \end{pmatrix}$.
   (ii) סגור לכפל בסקלר יהי $\begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \begin{pmatrix} x \\ 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ 3\alpha x \end{pmatrix} \in W$.
   (iii) $0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$.
2. נגדיר $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$. W לא ת"מ של $\mathbb{R}^2$ כי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$ אבל $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \notin W$ ולכן ב- W אין נגדי.
3. נגדיר $W = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ רציפה} \right\}$. אזי W ת"מ של $\mathbb{R}^{[a.b]}$.
   (i) אם $f, g \in W$, $f + g \in W$ (אש"ר).
   (ii) אם $f \in W$ ו- $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \cdot f \in W$ (אש"ר).
   (iii) פונקצית האפס, כלומר $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, b]$ היא רציפה ולכן $0_{\mathbb{R}^{[a,b]}} \in W$.

הגדרה 4.4 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, v_2 \in V$, ויהי $v \in V$. נאמר כי v הוא צירוף לינארי (קומבינציה לינארית) של v_1, v_2, אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $W \subseteq V$. אזי W ת"מ של V אס"ם:

$(i)^{(*)}$ W סגור לצירופים לינאריים, כלומר אם $\forall w_1, w_2 \in W$ ו- $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 \in W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in W$.

הוכחה: $\Leftarrow$: W ת"מ ולכן $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ ו- $\forall w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1 \cdot w_1, \alpha_2 \cdot w_2 \in W$ ולכן $\alpha_1 \cdot w_1 + \alpha_2 \cdot w_2 \in W$.

$\Rightarrow$: יהי $w \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{F}$. $\alpha \cdot w = \alpha \cdot w + 0_W = \alpha \cdot w + 1_F \cdot 0_W \in W$ לכן W סגור לכפל בסקלר. יהיו $w_1, w_2 \in W$. $w_1 + w_2 = 1_F \cdot w_1 + 1_F \cdot w_2 \in W$ ולכן W סגור לחיבור. ■

דוגמות

1. <u>מרחב הפולינומים</u>: יהי $\mathbb{F}$ שדה ונגדיר $\mathbb{F}[x] = \left\{ a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \;\middle|\; a_0, ..., a_n \in \mathbb{F}, \mathbb{Z} \ni n \geq 0 \right\}$. אזי $\mathbb{F}[x]$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$. מספיק שנוכיח כי $\mathbb{F}[x]$ ת"מ של $\mathbb{F}^{\mathbb{F}}$ ונסיים.

$(i)^{(*)}$ יהיו $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ ויהיו $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. נוכיח כי $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 \in \mathbb{F}[x]$: מהיות $p_1, p_2 \in \mathbb{F}[x]$ קיימים $n, m \geq 0$ שלמים וכן $a_0, ..., a_n, b_0, ..., b_m \in \mathbb{F}$ כך ש- $p_1 = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, $p_2 = b_0 + b_1x + ... + b_mx^m$. בה"כ $n \geq m$ (אחרת נחליף שמות) ולכן

$$\begin{aligned}(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2)(x) &= \alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = \alpha_1(a_0 + ... + a_nx^n) + \alpha_2(b_0 + ... + b_mx^m + 0_F \cdot x^{m+1} + ... + 0_F x^n) \\ &= (\alpha_1 a_0 + \alpha_2 b_0) + (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 b_1)x + ... + (\alpha_1 a_m + \alpha_2 b_m)x^m + \alpha_1 a_{m+1}x^{m+1} + ... + \alpha_1 a_n x^n \in \mathbb{F}[x]\end{aligned}$$

$(ii)^{(*)}$ ברור כי פונקצית האפס היא פולינום (פולינום האפס). ■

2. נגדיר $\forall n \geq 0$ שלם, $\mathbb{F}_n[x] = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p \leq n \right\}$. $\mathbb{F}_n[x]$ מ"ו (תת-מרחב של $\mathbb{F}[x]$).

3. נגדיר עבור $n \geq 0$ שלם, $W = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p = n \right\}$. W לא מ"ו ($0_{\mathbb{F}[x]} \notin W$ כי $\deg 0_{\mathbb{F}[x]} = -\infty$).

4. $W = \left\{ p \in \mathbb{F}[x] \;\middle|\; \deg p = 3 \right\} \cup \left\{ 0_{\mathbb{F}[x]} \right\}$. W לא מ"ו כי $x^3 + 1 \in W$, $-x^3 \in W$ אבל $x^3 + 1 + (-x^3) = 1 \notin W$.

5. $W = \left\{ f : [0, a] \to \mathbb{R} \;\middle|\; f'(1) \text{ קיים ושווה ל- } 0 \right\}$.

(i) יהיו $f, g \in W$. $f + g \in W \Leftarrow (f+g)'(1) = f'(1) + g'(1) = 0 + 0 = 0$.

(ii) יהי $f \in W$ ויהי $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha \cdot f \in W \Leftarrow (\alpha \cdot f)'(1) = \alpha f'(1) = \alpha \cdot 0 = 0$.

(iii) $0 \in W$ ברור. ■

6. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ מתכנסת} \right\}$. W מ"ו (ת"מ של $\mathbb{R}^{\infty} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$)

7. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ מתכנסת במובן הרחב} \right\}$. נתבונן בסדרות $a_n = n$, $b_n = (-1)^n - n$. מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ אבל $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ לא קיים במובן הרחב לכן W לא סגור לחיבור.

8. $W = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; (a_n)_{n=1}^{\infty} \text{ חסומה מלעל} \right\}$. $\forall n$,$a_n = -n$ היא חסומה מלעל ע"י -1, אבל לא קיים לה נגדי $\Leftarrow W$ לא מ"ו.

9. $C^{(n)}[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \text{גזירה } n \text{ פעמים ברציפות } f \right\}$. ברור ש- $C^{(n)}[a,b]$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^{[a,b]}$)

10. $W = \left\{ p \in \mathbb{R}[x] \;\middle|\; \deg p \text{ זוגי או } -\infty \right\}$. $x^2 + x, -x^2 \in W$ אבל $x^2 + x + (-x^2) = x \notin W$ $\Leftarrow W$ לא סגור לחיבור.

$\mathbb{VII}$

דוגמות

1. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נשים לב ש- V ת"מ של V מעל $\mathbb{F}$.
2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נשים לב ש- $\left\{ 0_V \right\}$ ת"מ של V.
3. $\left\{ (0,0) \right\}$ מ"ו מעל $\mathbb{R}$ (תת מרחב של $\mathbb{R}^2$).

Span

הגדרה 4.5 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, ...v_k \in V$. ה-<u>Span</u> (הפרוש) של $v_1, \ldots, v_k$ (או של $\left\{ v_1, ..., v_k \right\}$) מוגדר להיות הקבוצה $W = \text{span}\left\{ v_1, ..., v_k \right\} = \left\{ \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k \;\middle|\; \alpha_1, ...\alpha_k \in \mathbb{F} \right\}$.

הגדרה 4.6 יהיו $v, v_1, ..., v_k \in V$. נאמר כי v הוא <u>צירוף לינארי</u> (קומבינציה לינארית) של $v_1, ..., v_k$ אם קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$.

הערה $\text{sp}\left\{ v_1, ..., v_k \right\}$ היא קבוצת כל הצרופים הלינאריים האפשריים של $v_1, .., v_k$.

הערה מהיות V מ"ו אז V סגור לחיבור ולכפל בסקלר, ולכן סגור לצירופים ליאנריים. לכן $\text{sp}\left\{ v_1, ..., v_k \right\} \subseteq V$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, ..., v_k \in V$. אזי $\text{sp}\left\{ v_1, ..., v_k \right\}$ תת מרחב של V.

הוכחה: ראשית, מההערה הקודמת, $W = \text{sp}\{v_1, ..., v_k\} \subseteq V$, ולכן מספיק להוכיח:

$(i)^{(*)}$ יהיו $w_1, w_2 \in W$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. מהיות $w_1, w_2 \in W$, קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ ו- $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F}$. שעבורם $w_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k$, $w_2 = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$ לכן

$$\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k) + \beta(\beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k) = (\alpha \cdot \alpha_1 + \beta \cdot \beta_1) v_1 + ... + (\alpha \cdot \alpha_k + \beta \cdot \beta_k) v_k \in W$$

ולכן W סגור לצירופים לינאריים.

$(*)^{(ii)}$ $0_V = 0_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k \in W$. ■

דוגמות

1.

$$W = \left\{ p \in \mathbb{R}_3[x] \;\middle|\; p(1) - 2p(0) = 0 \right\} = \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \;\middle|\; a_0 + a_1 + a_2 + a_3 - 2a_0 = 0 \right\}$$
$$= \left\{ a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \;\middle|\; a_0 = a_1 + a_2 + a_3 \right\} = \left\{ a_1 + a_2 + a_3 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \;\middle|\; a_{1,2,3} \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ a_1(1+x) + a_2(1+x^2) + a_3(1+x^3) \;\middle|\; a_{1,2,3} \in \mathbb{R} \right\} = \text{sp}\left\{1+x, 1+x^2, 1+x^3\right\}$$

לכן W תת מרחב של $\mathbb{R}_3[x]$.

2. ב- $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, האם $\cos x \in \text{sp}\{\sin 2x, \sin x, \cos 2x\}$? לא, נניח בשלילה שקיימים $\alpha_{1,2,3} \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\forall x,\;\; \cos x = \alpha_1 \sin 2x + \alpha_2 \sin x + \alpha_3 \cos 2x$$

נציב $x = 0$ ונקבל $1 = \alpha_3 \cdot 1 \to \alpha_3 = 1$. נציב $x = \frac{\pi}{2}$, ונקבל

$$0 = \alpha_1 \cdot \sin \pi + \alpha_2 \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \cos \pi = \alpha_2 - 1 \to \alpha_2 = 1$$

נציב $x = \frac{\pi}{4}$ ונקבל

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \alpha_1 \cdot \sin \frac{\pi}{2} + 1 \cdot \sin \frac{\pi}{4} + 1 \cdot \cos \frac{\pi}{2}$$

לכן $\frac{\sqrt{2}}{2} = \alpha_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftarrow \alpha_1 = 0$. לכן $\cos x = \sin x + \cos 2x$, $\forall x$. נציב $x = \pi$ ונקבל $-1 = 0 + 1$ סתירה!

3. מתקיים: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ לכן $\cos 2x \in \text{sp}\left\{1, \sin^2 x\right\}$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, ..., v_k, v \in V$. אזי $\text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\} \subseteq \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\}$.

הוכחה: נסמן $A = v_1, ..., v_k$, $B = v_1, ..., v_k, v$. נשים לב כי

$$v_1 = 1_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k \in \text{sp}B$$
$$v_2 = 0_F \cdot v_1 + 1_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k \in \text{sp}B$$
$$\vdots$$
$$v_k = 0_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 1_F \cdot v_k \in \text{sp}B$$

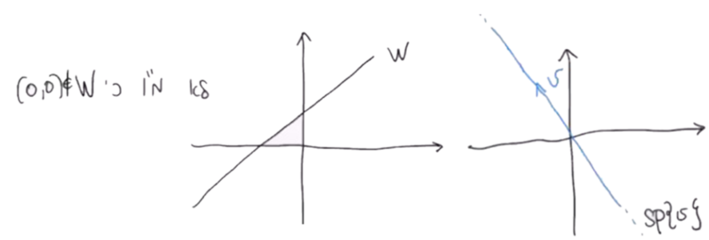
ולכן $v_1, ..., v_k \in \text{sp}B$ ולכן $\text{sp}A \subseteq \text{sp}B$ (תת מרחב של $\text{sp}B$). ■

מסקנה אם $A, B \subseteq V$ קבוצות סופיות כך ש- $A \subseteq B$ אזי $\text{sp}A \subseteq \text{sp}B$.

הוכחה: ברור באינדוקציה ומטענה 2. ■

דוגמות

1. יהי V מ"ו. $\text{sp}\left\{0_V\right\} = \left\{\ \alpha \cdot 0_V \ \middle|\ \alpha \in \mathbb{F}\ \right\} = \left\{0_V\right\}$.
2. יהי $0_V \neq v \in V$. $\text{sp}\left\{v\right\} = \left\{\ \alpha \cdot v \ \middle|\ \alpha \in \mathbb{F}\ \right\}$ במקרה הספציפי שבו $V = \mathbb{R}^2$, $\text{sp}\left\{v\right\}$ = קו ישר העובר דרך ראשית הצירים. לכן כל קו ישר העובר דרך הראשית הוא ת"מ של $\mathbb{R}^2$.



3. ב- $\mathbb{R}^3$,

$$\text{sp}\left\{\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)}\right\} = \left\{x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)\right\} = \left\{\ (x,y,z) \ \middle|\ x,y,z \in \mathbb{R}\ \right\} = \mathbb{R}^3$$

4. יהיו $u, v \in \mathbb{R}^3$. אזי: המישור עובר דרך $u, v = \left\{\ t \cdot u + s \cdot v \ \middle|\ t, s \in \mathbb{R}\ \right\} = \text{sp}\left\{u, v\right\}$.

5 פוספימו

משפט (פופסימו) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, ..., v_k, v \in V$. אזי $v \in \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$ אם"ם $\text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\} = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\}$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $v \in \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$, ראינו כבר בטענה קודמת כי $sp\left\{v_1, ..., v_k\right\} \subseteq sp\left\{v_1, ..., v_k, v\right\}$. בנוסף נשים לב כי

$$v_1 = 1_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k$$

$$v_2 = 0_F \cdot v_1 + 1_F \cdot v_2 + ... + 0_F \cdot v_k$$

$$v_k = 0_F \cdot v_1 + 0_F \cdot v_2 + ... + 1_F \cdot v_k$$

ולכן $v, v_1, ..., v_k \in \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$ ולכן $\text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\} \subseteq \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$ (כי זה ת"מ) ולכן

$$\text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\} = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$$

$\Rightarrow$: נניח כי $\text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\} = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\}$. לכן

$$v \in \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k, v\right\} \underset{\text{מההנחה}}{=} \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$$

ולכן $v \in \text{sp}\left\{v_1, ..., v_k\right\}$. $\blacksquare$

הגדרה 5.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1, ..., v_m \in V$. נאמר כי $v_1, \dots v_m$ הם <u>פורשים</u> את V (או הקבוצה $\left\{v_1, ..., v_m\right\}$ פורשת) אם $V = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_m\right\}$.

הגדרה 5.2 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי V <u>נוצר סופית</u> אם קיימת ב- V קבוצה פורשת סופית, כלומר אם קיימים $v_1, ..., v_m \in V$ כך ש- $V = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_m\right\}$.

דוגמות

1. $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$ ולכן הוא נוצר סופית.
2. $V = \mathbb{R}[x]$ לא נוצר סופית. נניח בשלילה שקיימים פולינומים $p_1, ..., p_m \in \mathbb{R}[x]$ שפורשים את $\mathbb{R}[x]$ נסמן $-\infty \neq n = \max\{\deg p_1, ..., \deg p_m\}$. נביט ב- $p(x) = x^{m+1}$. מהנחת השלילה, $p \in \text{sp}\left\{p_1, ..., p_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_1, ...\alpha_m \in \mathbb{R}$ כך ש- $p(x) = \alpha_1 p_1(x) + ... + \alpha_m p_m(x)$ ולכן $\deg p = \deg(\alpha_1 p_1 + ... + \alpha_m p_m) \leq n$, סתירה!
דרך נוספת: אם נגזור $n+1$ פעמים נקבל $(n+1)! = 0$.

$\mathbb{VIII}$

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U,W\subseteq V$ שני תתי מרחבים של V אזי $U\cap W$ ת"מ של V.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $v_1,v_2\in U\cap W$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. מהיות $v_1,v_2\in U$ ו- U ת"מ של V, הוא סגור לצירופים לינאריים ולכן $\alpha v_1+\beta v_2\in U$. באותו האופן $\alpha\cdot v_1+\beta\cdot v_2\in W$ ולכן $\alpha v_1+\beta v_2\in U\cap W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V\in U,W$ כי הם תתי מרחבים ולכן $0_V\in U\cap W$. ■

הערה באותו האופן אם $U_\alpha\subseteq V$ תתי מרחב של V, $\forall\alpha\in I$ (כאשר I קבוצת אינדקסים כלשהי), אזי $\bigcap\limits_{\alpha\in I}U_\alpha$ ת"מ של V.

מסקנה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,...,v_k\in V$ אזי $\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$ הוא תת המרחב המינימלי המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$, והוא גם שווה ל- $\bigcap\limits_\alpha W_\alpha$ כך ש- W_α תת מרחב המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$.

הוכחה: ראינו כבר כי $\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ של V. יהי $W\subseteq V$ כך ש- $v_1,...,v_k\in W$. ראינו כבר כי $\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ של W. לכן $\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$ מינימלי. בנוסף ראינו כי $W=\bigcap\limits_\alpha W_\alpha$ ת"מ המכיל את $\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ולכן ממינימליות, $W\subseteq\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$. מהיות $\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$ ת"מ, קיים α שעבורו $W_\alpha=\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$. לכן $W=\mathrm{sp}\left\{v_1,...,v_k\right\}$. ■

הגדרה 5.3 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A\subseteq V$. נגדיר את $\mathrm{sp}A$ להיות חיתוך כל תתי המרחבים W_α של V שעבורם $A\subseteq W_\alpha$ (ברור שקבוצה זו לא ריקה, שכן V נמצא בה ולכן $\mathrm{sp}A$ מוגדר היטב).

הערה $\mathrm{sp}A$ מ"ו (ת"מ של V ולפי ההערה, חיתוך של תתי מרחבים הוא תת מרחב).

הערה מתקיים $\mathrm{sp}\varnothing=\left\{0_V\right\}$.

הוכח/הפרך יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $W,U\subseteq V$ ת"מ של V. אזי $W\cup U$ ת"מ.

פתרון פריכה! דוגמה נגדית: נבחר $V=\mathbb{R}^2$,

$$W=\mathrm{sp}\left\{(1,0)\right\}=\left\{\ (x,0)\ \middle|\ x\in\mathbb{R}\ \right\}$$

$$U=\mathrm{sp}\left\{(0,1)\right\}=\left\{\ (0,y)\ \middle|\ y\in\mathbb{R}\ \right\}$$

U,W ת"מ של $\mathbb{R}^2$ (כי sp הוא תמיד ת"מ) אבל $U\cup W=\left\{\ (x,y)\ \middle|\ x=0\vee y=0\ \right\}$ לא ת"מ: $(1,0)+(0,1)=(1,1)$ ולכן $U\cup W$ לא סגור לחיבור.

דוגמה האם הוקטורים $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (4,5,6)$, $v_3 = (7,8,9)$ פורשים את $\mathbb{R}^3$? יהי $(b_1,b_2,b_3) \in \mathbb{R}^3$ ונחפש $x_{1-3} \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{aligned}(b_1,b_2,b_3) &= x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 \\ &= x_1 \cdot (1,2,3) + x_2 \cdot (4,5,6) + x_3 \cdot (7,8,9) \\ &= (x_1+4x_2+7x_3, 2x_1+5x_2+8x_3, 3x_1+6x_2+9x_3)\end{aligned}$$

$$(*)\begin{cases} x_1+4x_2+7x_3=b_1 \\ 2x_1+5x_2+8x_3=b_2 \\ 3x_1+6x_2+9x_3=b_3 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 2 & 5 & 8 & b_2 \\ 3 & 6 & 9 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -6 & -12 & b_3 - 3b_1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 7 & b_1 \\ 0 & -3 & -6 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 - 2b_1 + b_3 \end{array}\right)$$

נבחר $(b_1,b_2,b_3) = (0,0,1)$ ונקבל כי $0 = b_1 - 2b_2 + b_3 = 1$ מהמטריצה ואין פתרון. לכן $\left\{v_1, v_2, v_3\right\}$ לא פורשים את $\mathbb{R}^3$.

מסקנה יהי V מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ קבוצה פורשת (כלומר $\mathrm{sp}A = V$). תהי $A \subseteq B \subseteq V$ אזי B פורשת.

הוכחה: ראינו כי $V = \mathrm{sp}A \subseteq \mathrm{sp}B \subseteq V$ ולכן $\mathrm{sp}B = V$ ולכן B פורשת. ■

דוגמות

1. $\left\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\right\}$ פורשת את $\mathbb{R}^3$. (כי היא מכילה קבוצה פורשת)

הוכח/הפרך יהיו $p_1 = 1, p_2 = x^2 + x, p_3 = (x+1)^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. p_1,p_2,p_3 פורשים את $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון הוכחה! נשים לב כי

$$2p_2(x) + p_1(x) - p_3(x) = x^2$$

$$p_2(x) - 2p_2(x) + p_1(x) - p_3(x) = x$$

$$1 = p_1$$

לכן

$$x^2, x, 1 \in \mathrm{sp}\left\{p_1, p_2, p_3\right\}$$

ולכן

$$\mathbb{R}_2[x] = \text{sp}\left\{1, x, x^2\right\} \subseteq \text{sp}\left\{p_1, p_2, p_3\right\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$$

ולכן $\mathbb{R}_2[x] = \text{sp}\left\{p_1, p_2, p_3\right\}$, כלומר הקבוצה פורשת.

6 תלות לינארית

הגדרה 6.1 יהי V מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$. יהיו $v_1, ..., v_k \in V$. נאמר כי $\left\{v_1, ..., v_k\right\}$ <u>בלתי תלויה לינארית</u> (או $v_1, ..., v_k$ וקטורים בת"ל) אם $\forall \alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$ מתקיים $\alpha_i = 0_F$, $\forall 1 \leq i \leq k$.

הערה $v_1, ..., v_k$ הם ת"ל אם קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$ וכך שקיים $1 \leq j \leq k$ כך ש- $a_j \neq 0_F$.

תרגיל ב- $\mathbb{R}^2$, האם $v_1 = (2, 3)$ ו- $v_2 = (3, 2)$ ת"ל?

פתרון לא! נניח שעבור $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$(2\alpha_1 + 3\alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2) = \alpha_1(2, 3) + \alpha_2(3, 2) = (0, 0)$$

לכן $\begin{cases} 2\alpha_1+3\alpha_2=0 \\ 3\alpha_1+2\alpha_2=0 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2 \to 2R_2]{R_1 \to 3R_2} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$-5\alpha_2 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$$

$$6\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_1 = 0$$

ולכן v_1, v_2 בת"ל.

דוגמה $(1, 0, 3), (0, 3, 1), (1, 3, 4)$ תלויים לינארית כי $(1, 0, 3) + (0, 3, 1) = (1, 3, 4)$.

$\mathbb{VIII}$

תרגילים

1. האם $(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)$ בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$?

   לא! נשים לב כי $1\cdot(1,2,3)-2\cdot(4,5,6)+1\cdot(7,8,9)=(0,0,0)$.

2. האם $\binom{1}{i},\binom{-i}{1}$ ת"ל ב- $\mathbb{C}^2$?

   כן! נשים לב כי $1\cdot\binom{1}{i}-i\cdot\binom{-i}{1}=\binom{0}{0}$.

3. האם $\binom{1}{i},\binom{-i}{1}$ ת"ל ב- $\mathbb{C}^2$ כמ"ו מעל $\mathbb{R}$?

   נניח כי עבור $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha\binom{1}{i}+\beta\binom{-i}{1}=\binom{0}{0}$ $\Leftarrow$ $\begin{pmatrix}\alpha-\beta i=0\\ \alpha i+\beta=0\end{pmatrix}$ $\Leftarrow$ $\begin{cases}\alpha-\beta i=0\\ \alpha i+\beta=0\end{cases}(*)$ $\Leftarrow$ $\alpha=\beta=0$ (אם מספר מרוכב הוא אפס אז הרכיב הממשי והמדומה הם שניהם 0).

4. האם $1+x+x^2,1,x-1,(x-1)^2$ ת"ל ב- $\mathbb{R}[x]$?

   כן! $1\cdot(x-1)^2-1\cdot(1+x+x^2)+3\cdot(x-1)+3\cdot 1=0$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. אזי $\left\{0_V\right\}$ תלוי לינארית.

הוכחה: $1_F\cdot 0_V=0_V$. ■

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $v\neq 0_V$. אזי $\left\{v\right\}$ בת"ל.

הוכחה: נניח שעבור $\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot v=0_V$. נניח בשלילה ש- $\alpha\neq 0_F$ לכן

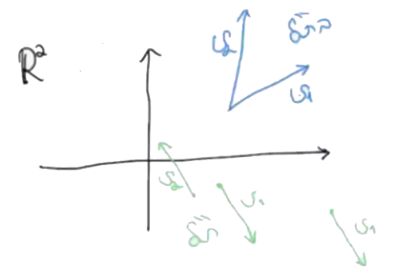
$$v=1\cdot v=(\alpha^{-1}\cdot\alpha)\cdot v=\alpha^{-1}\cdot(\alpha\cdot v)=\alpha^{-1}\cdot 0_V=0_V$$

■

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $v_1,v_2\in V$. אזי v_1,v_2 ת"ל אם"ם קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_1=\alpha\cdot v_2$ או אם קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_2=\alpha\cdot v_1$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: נניח כי v_1,v_2 ת"ל. אז קיימים $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ כך ש- $\binom{\alpha_1}{\alpha_2}\neq\binom{0_F}{0_F}$ וכך ש- $\alpha_1v_1+\alpha_2v_2=0_V$. אם $\alpha_1\neq 0_F$ אזי $v_1=-\alpha_2\cdot\alpha_1^{-1}v_2$. אחרת $\alpha_2\neq 0_F$ ולכן $v_2=-\alpha_1\cdot\alpha_2^{-1}v_1$.

$\underline{\Rightarrow}$: נניח שעבור $\alpha\in\mathbb{F}$, $v_1=\alpha v_2$ לכן $1\cdot v_1-\alpha\cdot v_2=0_V$ $\leftarrow$ v_1,v_2 ת"ל ($1_F\neq 0_F$). עתה נניח כי $v_2=\alpha\cdot v_1$. לכן $\alpha\cdot v_1-1_F\cdot v_2=0_V$ $\leftarrow$ v_1,v_2 ת"ל. ■



דוגמה $(1,2,3),(4,8,9)$ בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ (ברור).

טענה יהי V מ"ו ויהיו $v_1,...,v_n \in V$ בת"ל. יהי $k \le n$. אזי $v_1,...,v_k$ בת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה כי $v_1,...,v_k$ ת"ל. לכן קיימים $\alpha_1,...,\alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}$ וכך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k = 0_V$. נגדיר $\alpha_{k+1} = ... = \alpha_n = 0_F$ אזי $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_k v_k + 0_F v_{k+1} + ... + 0_F v_n = 0_V$. קיבלנו צירוף לינארי לא טרוויאלי (שלא כל מקדמיו הם אפס) של $v_1,...,v_n$ הנותן את 0_V בסתירה להנחה ש- $v_1,...,v_n$ בת"ל. ■

מסקנה אם V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ו- $A,B \subseteq V$ סופיות כך ש- $A \subseteq B$, אזי אם B בת"ל אזי A בת"ל (ובאופן שקול, אם A ת"ל אזי B ת"ל).

דוגמה ב- $\mathbb{R}^3$, האם $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$ הם ת"ל? לא! נניח שעבור $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in \mathbb{R}$ מתקיים $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \alpha_1 \cdot e_1 + \alpha_2 \cdot e_2 + \alpha_3 \cdot e_3 = (0,0,0)$ ולכן $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

7 מימדים

הגדרה 7.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $n \in \mathbb{N}$ ויהיו $v_1,...,v_n \in V$. נאמר כי $A = \left\{ v_1,...,v_n \right\}$ בסיס של V אם A בת"ל ופורשת (כלומר $V = \text{sp}\left\{ v_1,...,v_n \right\}$).

הגדרה 7.2 יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי $\dim V = n$ (המימד של V הוא n) אם קיים ב- V בסיס בגודל n.

הערה נרצה להוכיח שהמימד מוגדר היטב, וכן קיים לכל מ"ו נוצר סופית.

הגדרה 7.3 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר כי $\dim V = \infty$ אם V לא נוצר סופית.

דוגמות

1. הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$: $V = \mathbb{F}^n$. $\dim V = n$ כי נביט ב-

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1_F \\ 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0_F \\ 1_F \\ 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0_F \\ 0_F \\ \vdots \\ 1_F \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $e_1, ..., e_n$ בסיס של V:

בת"ל: נניח שעבור $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$

פורשים: יהי $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$ $v =$. אזי $v = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n \in \text{sp}\left\{e_1, ..., e_n\right\}$ ולכן $V = \text{sp}\left\{e_1, ..., e_n\right\}$.

2. $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, $\dim \mathbb{R}^6 = 6$, $\dim \mathbb{R} = 1$.

3. $\dim \mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \infty$, $\dim \mathbb{R}[x] = \infty$.

4. $\dim \mathbb{C}^2 = 2$.

5. <u>הבסיס הסטנדרטי של $M_{m\times n}(\mathbb{F})$</u>: נגדיר $\forall i, j$, $E_{ij} = i \begin{pmatrix} 0_F & \cdots & 0_F \\ \vdots \cdots & 1_F & \cdots \\ 0_F & \cdots \underset{j}{\vdots} & 0_F \end{pmatrix}$ אזי $\left\{ E_{ij} \;\middle|\; \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix} \right\}$ היא בסיס של $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

   אותה הוכחה כמו של $\mathbb{F}^n$ לכן $\dim M_{m\times n}(\mathbb{F}) = m \times n$.

6. ב- $M_{2\times 3}(\mathbb{F})$,

$$E_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right), E_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right), E_{13} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \end{smallmatrix}\right), E_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{smallmatrix}\right), E_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \end{smallmatrix}\right), E_{23} = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&1 \end{smallmatrix}\right)$$

תרגילים

1. $V = \mathbb{R}^2$. האם $v_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), v_2 = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)$ בסיס ב- $\mathbb{R}^2$?

בת"ל: ברור כי v_1, v_2 אינם כפולה זה של זה בסקלר.

פורשת: יהיו $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$. נחפש $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{pmatrix} \alpha+3\beta \\ 2\alpha+3\beta \end{pmatrix} = \alpha \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) + \beta \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = \alpha v_1 + \beta v_2 = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$$

לכן $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha+3\beta=x \\ 2\alpha+3\beta=y \end{smallmatrix} \right.$ $(*)$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 2 & 3 & y \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & x \\ 0 & -3 & y-2x \end{array}\right)$$

$\Leftarrow$ $\beta = -\frac{y-2x}{3}$, $\alpha = x - 3\beta x + (y-2x) = y - x$ לכן v_1, v_2 פורשים ולכן הם בסיס.

2. $W=\left\{\ p\in\mathbb{R}_2[x]\ \middle|\ p(1)=p(0)\ \right\}$. קבעו האם W מ"ו ואם כן מצאו את $\dim W$.

$$W=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ a+b+c=a\ \right\}=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ b+c=0\ \right\}=\left\{\ a+bx-bx^2\ \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\ \right\}$$
$$=\left\{\ a\cdot 1+b(x-x^2)\ \middle|\ a,b\in\mathbb{R}\ \right\}=\text{sp}\left\{1,x-x^2\right\}$$

לכן W מ"ו ו- $\left\{1,x-x^2\right\}$ פורשת את W. נשים לב כי $1,x-x^2$ בת"ל (ברור) ולכן הם בסיס, ולכן $\dim W=2$.

$\mathbb{IX}$

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $V\supseteq\left\{v_1,...,v_k\right\}=A$. נניח כי $0_V\in A$ אזי A ת"ל.

הוכחה: נניח בשלילה ש- A בת"ל. בה"כ $0_V=v_1$ (אחרת נחליף את הסדר של $v_1,...,v_k$) לכן $\left\{0_V\right\}=\left\{v_1\right\}$ בת"ל סתירה. ■

הוכח/הפרך $(1,2,5,1)\in sp\left\{(0,1,0,0),(1,0,1,4),(1,0,0,2)\right\}$.

פתרון לא! נחפש $a,b,c\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$(1,2,5,1)=a(0,1,0,0)+b(1,0,1,4)+c(1,0,0,2)=(b+c,a,b,4b+2c)$$

ולכן $a=2,b=5,c=-4$ אבל $4b+2c=1$ ולכן $20-8=1$ ולכן אין פתרון.

למה (למת ההחלפה) יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהי $V\supseteq\left\{w_1,...,w_m\right\}$ קבוצה פורשת, ותהי $V\supseteq\left\{u_1,...,u_k\right\}$ קבוצה בת"ל. אזי $k\leq m$.
(כלומר גודלה של כל קבוצה בת"ל $\leq$ גודלה של כל קבוצה פורשת).

הוכחה: נניח בשלילה ש- $k>m$. ראשית, מהיות $w_1,...,w_m$ פורשת $u_1\in\text{sp}\left\{w_1,...,w_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_{11},...,\alpha_{1m}\in\mathbb{F}$ כך ש- $u_1=\alpha_{11}w_1+...+\alpha_{1m}w_m$. נשים לב שלפחות אחד מהמקדמים $\alpha_{11},...,\alpha_{1m}$ איננו 0_F, אחרת, $u_1=0_v$ בסתירה לכך ש- $u_1,...,u_k$ בת"ל. נוכל להניח בה"כ כי $\alpha_{11}\neq 0_F$ (אחרת נשנה את סדר האינדקסים ב- $w_1,...,w_m$). נעביר אגפים ונקבל

$$w_1=\alpha_{11}^{-1}u_1-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{12}w_2-...-\alpha_{11}^{-1}\alpha_{1m}w_m$$

ולכן $w_1\in\text{sp}\left\{u_1,w_2,...w_m\right\}$ ולכן ממשפט פופיסמו,

$$V=\text{sp}\left\{u_1,w_1,...,w_m\right\}=\text{sp}\left\{u_1,w_2,...,w_m\right\}$$

לכן $\left\{u_1, w_2, ..., w_m\right\}$ פורשת. לכן, $u_2 \in sp\left\{u_1, w_2, ..., w_m\right\}$ ולכן קיימים $\alpha_{21}, ..., \alpha_{2m} \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$u_2 = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}w_2 + ... + \alpha_{2m}w_m$$

נשים לב שלפחות אחד מ- $\alpha_{22}, ..., \alpha_{2m}$ שונה מ- 0_F, אחרת, $u_2 = \alpha_{21}u_1$ ולכן $u_2 \in \text{sp}\left\{u_1\right\}$ ולכן $\left\{u_1, u_2\right\}$ ת"ל ולכן $\left\{u_1, ..., u_k\right\}$ ת"ל (כי קבוצה המכילה ת"ל היא ת"ל) בסתירה לנתון. בה"כ נוכל להניח כי $\alpha_{22} \neq 0_F$ (אחרת נחליף את שמות האינדקסים מבלי לשנות את האינדקס של w_1) לכן

$$w_2 = \alpha_{22}^{-1}u_2 - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{21}u_1 - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{23}w_3 - ... - \alpha_{22}^{-1}\alpha_{2m}w_m$$

ולכן $w_2 \in \text{sp}\left\{u_1, u_2, w_3, ..., w_m\right\}$ ולכן

$$V = \text{sp}\left\{u_1, u_2, w_2, w_3, ...w_m\right\} = \text{sp}\left\{u_1, u_2, w_3, ..., w_m\right\}$$

מפופיסימו. נחזור על התהליך. בצד ה-m-י, $\left\{u_1, ..., u_m\right\}$ קבוצה פורשת ולכן $w_{m+1} \in \text{sp}\left\{u_1, ..., u_m\right\}$. לכן קיימים $\beta_1, ...\beta_m \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_{m+1} = \beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m$ ולכן $\beta_1 u_1 + ... + \beta_m u_m - u_{m+1} = 0_V$ ולכן $\left\{u_1, ..., u_{m+1}\right\}$ ת"ל סתירה (כי $\left\{u_1, ..., u_k\right\}$ בת"ל ולכן $\left\{u_1, ..., u_{m+1}\right\}$ בת"ל) . ■

מסקנה יהיו $\left\{w_1, ..., w_m\right\}$ ו- $\left\{u_1, ..., u_k\right\}$ בסיסים של V אזי $k = m$.

הוכחה: $\left\{w_1, ..., w_m\right\}$ פורשת ובת"ל, $\left\{u_1, ..., u_k\right\}$ פורשת ובת"ל ולכן $m \leq k$ וגם $m \geq k$ לכן $m = k$. ■

מסקנה יהי V מ"ו ונניח כי קיים ב- V בסיס. אזי $\dim V$ מוגדר היטב.

מסקנה $\dim \mathbb{F}^n = n$, $\forall n$ (כי ראינו ש- $\left\{e_1, ..., e_n\right\}$ בסיס של $\mathbb{F}^n$).

מסקנה יהי V מ"ו ממימד n. אזי כל $n + 1$ וקטורים ב- V הם ת"ל.

הוכחה: מכך ש- $\dim V = n$, קיים ב- V בסיס $A = \left\{v_1, ..., v_n\right\}$. נניח בשלילה שקיימים $w_1, ..., w_{n+1} \in V$ שהם בת"ל. קיבלנו קבוצה בת"ל גדולה ממש מקבוצה פורשת, בסתירה ללמת ההחלפה. ■

מסקנה יהי V מ"ו ממימד n. אזי כל $n - 1$ וקטורים ב- V הם לא פורשים.

מסקנה יהי V מ"ו ממימד n. תהי $A = \left\{v_1, ..., v_n\right\} \subseteq V$. אזי התנאים הבאים שקולים

(i) A בסיס של V.

(ii) A פורשת את V.

(iii) A בת"ל.

הוכחה: $(i) \Leftarrow (ii)$ (ברור).

$(ii) \Leftarrow (iii)$: נניח בשלילה ש- A ת"ל. אזי קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$ וכך ש- $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. בה"כ $\alpha_n \neq 0_F$ (אחרת נחליף את סדר האינדקסים) לכן

$$\alpha_n v_n = -\alpha_1 v_1 - ... - \alpha_{n-1} v_{n-1}$$

$$v_n = -\alpha_n^{-1} \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_n^{-1} \alpha_{n-1} v_{n-1}$$

ולכן $v_n \in \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ ולכן $V = \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_n\right\} = \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ מפופסימו לכן $\left\{v_1, ..., v_{n-1}\right\}$ פורשת, בסתירה למסקנה הקודמת.

$(iii) \Leftarrow (i)$ נניח ש- A בת"ל ונניח בשלילה ש- A לא פורשת. אזי קיים $v_{n+1} \in V$ כך ש- $v_{n+1} \notin \left\{v_1, ..., v_n\right\}$ נביט בקבוצה $\left\{v_1, ..., v_n, v_{n+1}\right\}$. נוכיח שהיא בת"ל ובכך נקבל סתירה למסקנה הקודמת $\times 2$. יהיו $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1} \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0_V$$

ונוכיח ש- $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n+1} \end{pmatrix}$. ראשית $\alpha_{n+1} = 0_F$, אחרת,

$$v_{n+1} = -\alpha_{n+1}^{-1} \alpha_1 v_1 - ... - \alpha_n^{-1} \alpha_n v_n$$

ולכן $v_{n+1} \in sp\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ בסתירה להנחה. לכן $\alpha_{n+1} = 0_F$ ולכן $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$ ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל, גם $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. ■

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ (4 וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ ת"ל)

2. כל 5 וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$ הם ת"ל.

3. $1, x^2 + 1, x^3 + x + 1$ בת"ל ב- $\mathbb{R}[x]$ (כי כל פולינום הוא במעלה גדולה מזו של קודמיו ולכן הוא לא יכול להיות ק"ל שלהם).

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ בסיס של $\mathbb{R}^4$. (כי כל וקטור לא מתאפס במקום שקודמיו כן ולכן הוא לא ק"ל שלהם ולכן הוא הם בת"ל ולכן מהמסקנות למעלה, הוא גם בסיס כי $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ | הוכחה בשיעור הבא).

$\mathbb{X}$

משפט יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $u_1, ..., u_k \in V$, ונניח כי $u_1 \neq 0_V$ אזי $u_1, ..., u_k$ הם ת"ל אם"ם קיים וקטור שהוא ק"ל של קודמיו, כלומר, אם"ם קיים $2 \leq j \leq k$ כך ש- $u_j \in \text{sp}\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$.

הוכחה: $\Rightarrow$: נניח שקיים $2 \leq j \leq n$ כך ש- $u_j \in \text{sp}\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$. נוכיח כי $u_1, ..., u_k$ ת"ל: מהיות $u_j \in \text{sp}\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}$ קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_{j-1} \in \mathbb{F}$ כך ש- $u_j = \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{j-1} u_{j-1}$ ולכן

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{j-1} u_{j-1} - u_j + 0_F u_{j+1} + ... + 0_F u_k = 0_V$$

ולכן $u_1, ..., u_k$ ת"ל ($\alpha_j = -1_F \neq 0_F$).

$\Leftarrow$: נניח ש- $u_1, ..., u_k$ ת"ל. לכן קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_k \in \mathbb{F}$ שעבורם $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_k u_k = 0_V$ ובנוסף $\begin{pmatrix} 0_F \\ \vdots \\ 0_F \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$. נבחר $1 \leq j \leq k$ האינדקס המקסימלי שעבורו $\alpha_j \neq 0_F$ (קיים כזה כי קבוצת האינדקסים סופית) לכן $\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_j u_j = 0_V$ (נשים לב כי $1 < j$, אחרת נקבל ש- $\alpha_1 u_1 = 0_V$ ולכן $u_1 = 0_V$ בסתירה להנחה). לכן $u_j = -\alpha_j^{-1} \alpha_1 u_1 + ... + \alpha_j^{-1} \alpha_{j-1} u_{j-1}$. ■

דוגמה $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ת"ל (כי כל $\dim V + 1$ וקטורים הם ת"ל). לכן קיים וקטור שהוא ק"ל של קודמיו. ברור ש- v_2, v_3 לא תלויים בקדמיהם ולכן $v_4 \in \text{sp}\left\{v_1, v_2, v_3\right\}$. $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + -8 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. עבור הסדר v_1, v_2, v_4, v_3, אזי v_4 ק"ל של קדמיו.

8 בת"ל מקסימלית פורשת מינמלית

הגדרה 8.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$ קבוצה סופית. A תקרא:

(i) <u>בת"ל מקסימלית</u> אם A בת"ל ובנוסף $\forall B \subseteq V$ סופית שעבורה $A \subseteq B$, כך ש- B בת"ל, מתקיים $A = B$.

(ii) <u>פורשת מינימלית</u> אם A פורשת ובנוסף $\forall B \subseteq A$ כך ש- B פורשת מתקיים $A = B$.

משפט יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $V \supseteq \left\{v_1, ..., v_n\right\} = A$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) A בסיס של V.

(ii) A בת"ל מקסימלית.

(iii) A פורשת מינימלית.

הוכחה: $(i) \Leftarrow (ii)$ מהיות A בסיס, A בת"ל. נניח בשלילה ש- A לא בת"ל מקסימלית. לכן קיימת $B \subseteq V$ סופית כך ש- $A \subseteq B$ וכך ש- $A \neq B$. לכן קיים $v \in B$ כך ש- $v \notin A$. לכן $B \supseteq \left\{v_1, ..., v_n, v\right\}$ ומהיות B בת"ל, $\left\{v_1, ..., v_n, v\right\}$ בת"ל ולכן v בת"ל בקודמיו ולכן $V = \text{sp}\left\{v_1, ..., v_n\right\} \notin v$ סתירה!

$(ii) \Leftarrow (iii)$ נניח ש- A בת"ל מקסימלית. ראשית, נוכיח כי A פורשת. נניח בשלילה ש- A לא פורשת. לכן קיים $v \in V$ כך ש- $v \notin \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_n\right\}$. לכן הקבוצה $B = \left\{v_1, ..., v_n, v\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור ב- V לא ק"ל של קודמיו ו- $v_1 \neq 0_V$ כי A בת"ל) בסתירה לכך ש- A בת"ל מקסימלית. עתה נוכיח ש- A פורשת מינימלית: נניח בשלילה ש- A לא מינימלית. אזי קיימת $B \subseteq A$ כך ש- B פורשת וכך ש- $A \neq B$. קיבלנו קבוצה פורשת (B) שגודלה קטן מקבוצה בת"ל A סתירה.

$(iii) \Leftarrow (i)$ נניח ש- A פורשת מינימלית ונוכיח ש- A בסיס. נניח בשלילה ש- A ת"ל. ראשית, $v_1 \neq 0_V$, אחרת, $\mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_n\right\} = \mathrm{sp}\left\{v_2, ..., v_n\right\}$ בסתירה למינימליות A. לכן קיים $2 \leq j \leq n$ כך ש- $v_j \in \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_{j-1}\right\}$ ולכן $v_j \in \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\right\}$ ולכן ממשפט פופיסימו $\mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_n\right\} = \mathrm{sp}\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ סתירה למינימליות A. ∎

דוגמות

1. $A = \left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^2$ (כי הם שני וקטורים בת"ל ב- $\mathbb{R}^2$) $\left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$ ת"ל כי A בת"ל מקסימלית. $\left\{\binom{1}{2}\right\}$ לא פורשת כי A פורשת מינימלית.
2. $A = \left\{\binom{1}{2}, \binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$. $\mathrm{sp}A \supseteq \mathrm{sp}\left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\} = \mathbb{R}^2$. לכן A פורשת. A מכילה פורשת מינימלית $B = \left\{\binom{0}{1}, \binom{1}{1}\right\}$ לכן A מכילה בסיס.

מסקנה יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. אזי קיים בסיס ב- V.

הוכחה: מהיות V נוצר סופית, קיימת קבוצה $V \supseteq A = \left\{v_1, ..., v_m\right\}$ כך ש- A פורשת. מהיות A פורשת, קיימת $B \subseteq A$ שהיא פורשת וגם מינימלית ולכן קיים בסיס ל- V. ∎

מסקנה יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. תהי $A = \left\{v_1, ..., v_m\right\}$ פורשת. אזי A מכילה בסיס.

מסקנה יהי V מ"ו נוצר סופית. תהי $V \supseteq A = \left\{u_1, ..., u_k\right\}$ בת"ל. אזי A ניתנת להרחבה לבסיס של V, כלומר, קיימת קבוצה סופית $B \subseteq V$ סופית כך ש- $A \subseteq B$ וכך ש- B בסיס של V.

הוכחה: ראשית, מהיות V מ"ו נוצר סופית, קיים בסיס $\left\{v_1, ..., v_n\right\}$ של V ולכן $\dim V = n$. לכן $k \leq n$. אם $k = n$ אזי A בסיס (כי ראינו שכל n וקטורים שהם בת"ל ב- V הם בסיס). אחרת, $k < n$ ולכן $A = \left\{u_1, ..., u_k\right\}$ לא בסיס (כי ראינו שכל שני בסיסים הם בעלי אותו מספר של איברים). לכן A לא בת"ל מקסימלית, ולכן קיימת $V \supseteq B$ סופית כך ש- $A \subseteq B$ ובנוסף B בת"ל. נסמן $B = \left\{u_1, ..., u_k, u_{k+1}, ..., u_m\right\}$. נשים לב כי $m \leq n$. (כי גודל כל קבוצה בת"ל $n = \dim V \leq$). נוכל להניח כי m הוא המספר המקסימלי שעבורו B בת"ל. לכן B בת"ל מקסימלית ולכן B בסיס. ∎

ראו הדגמה של מסקנה 3

תרגיל תהי $A=\left\{1+x^2,1-x^3\right\}$, השלימו את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

פתרון ראשית, נשים לב ש- A בת"ל ולכן ניתן להשלים את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. ראינו כבר ש- $\dim R_3[x]=4$ ו- $\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ בסיס (סטנדרטי) של $\mathbb{R}_3[x]$. ברור ש- $1\notin \operatorname{sp}A$ (אחרת, קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$1=a(1+x^2)+b(1-x^3)=(1+b)+ax^2-bx^3$$

$\begin{cases} a+b=1\\ a=0\\ b=0\end{cases}$ כלומר אין פתרון). לכן $\left\{1+x^2,1-x^3,1\right\}$ בת"ל (כל וקטור בת"ל בקודמיו) נשים לב גם כי $x\notin\left\{1+x^2,1-x^3,1\right\}$ (ברור) ולכן $\left\{1+x^2,1-x^3,1,x\right\}$ בת"ל בגודל 4 ולכן בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

דוגמות

1. תהי $A=\left\{1+x,2-x,x^2+x^3\right\}$, נשלים את A לבסיס של $\mathbb{R}_3[x]$. $1,x\in spA$ כי $\left\{1+x,2-x\right\}$ הוא בסיס של $\mathbb{R}_1[x]$. $x^2\notin spA$, (כי בשלילה $x^2=a(1+x)+b(2-x)+c(x^2+x^3)$ ולזה אין פתרון). לכן $\left\{1+x,2-x,x^2+x^3,x^2\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}_3[x]$.

2.

$$W=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;\begin{array}{c}a+b=c\\ d-e=f\\ a=2f\end{array}\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}a&b&a+b\\d&e&d-e\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;a=2(d-e)\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}2(d-e)&b&2(d-e)+b\\d&e&d-e\end{smallmatrix}\right)\;\middle|\;b,d,e\in\mathbb{R}\right\}$$

$$=\left\{b\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)+e\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right)+d\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}=\operatorname{sp}\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

$A=\left\{\left(\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&0&0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}-2&0&-2\\1&1&-1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}2&0&2\\1&0&1\end{smallmatrix}\right)\right\}$ בת"ל (כי כל מטריצה בת"ל בקודמיה) ופורשת, לכן A בסיס ו- $\dim W=3$.

$\mathbb{XI}$

דוגמה ב- $\mathbb{R}^4$, $A=\left\{\underset{v_1}{(1,5,3,0)},\underset{v_2}{(2,9,1,1)}\right\}$.

$$E=\left\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\}$$

לא ייתכן כי $E\subseteq spA$ (אחרת $\mathbb{R}^4=\mathrm{sp}E\subseteq\mathrm{sp}A$ שזה בבירור לא נכון). נבדוק האם $e_1\in spA$. נחפש $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$(1,0,0,0)=e_1=\alpha v_1+\beta v_2=(\alpha+2\beta,5\alpha+9\beta,3\alpha+\beta,\beta)$$

ולכך אין פתרון. לכן $e_1\notin\mathrm{sp}A$ ולכן $B=\left\{v_1,v_2,e_1\right\}$ בת"ל. נבדוק האם $e_2\in spB$. נחפש α,β,γ כך ש-

$$(0,1,0,0)=e_2=\alpha v_1+\beta v_2+\gamma e_1=(\alpha+2\beta+\gamma,5\alpha+9\beta,3\alpha+\beta,\beta)$$

אין פתרון. לכן $C=\left\{v_1,v_2,e_1,e_2\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור בת"ל בקודמיו). C בסיס של $\mathbb{R}^4$ (כי כל קבוצה בת"ל בגודל 4 היא בסיס של $\mathbb{R}^4$)

משפט (מימד של ת"מ) יהי V מ"ו נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$ ונסמן $\dim V=n$. יהי $W\subseteq V$ ת"מ של V. אזי W נ"ס ו- $\dim V\le n$. יותר על כך, $\dim W=n$ אם"ם $W=V$.

הוכחה: ראשית נוכיח כי W נ"ס. נניח בשלילה כי W לא נ"ס. ראשית $W\neq\left\{0_V\right\}$ כי $\left\{0_V\right\}$ נ"ס ולכן קיים $0_V\neq w_1\in W$. לכן $\left\{w_1\right\}$ בת"ל. מהיות W לא נ"ס, אזי $\left\{w_1\right\}$ לא פורשת את W ולכן קיים $w_2\in W$ כך ש- $w_2\notin\mathrm{sp}\left\{w_1\right\}$. לכן $\left\{w_1,w_2\right\}$ בת"ל (כי $w_1\neq 0_V$ ו- $w_2\notin sp\left\{w_1\right\}$). נחזור על התהליך. בשלב ה-n-י נביט ב- $\left\{w_1,...,,w_n\right\}$. מהיות w לא נ"ס $\left\{w_1,...,,w_n\right\}$ לא פורשת את w ולכן קיים וקטור $w_{n+1}\in W$ כך ש- $w_{n+1}\notin\mathrm{sp}\left\{w_1,...,w_n\right\}$. לכן $\left\{w_1,...,w_{n+1}\right\}$ בת"ל (כי כל וקטור בת"ל בקודמיו). מצאנו קבוצה של $n+1$ וקטורים הנמצאים ב- V שהם בת"ל בסתירה להנחה ש- $\dim V=n$. לכן W נ"ס. נסמן $m=\dim V$. עתה נוכיח כי $m\le n$. נניח בשלילה כי $m>n$. לכן קיים בסיס $\left\{w_1,...,w_m\right\}$ של W. לכן $\left\{w_1,...,w_n\right\}$ בת"ל. מצאנו קבוצה של $m>n$ וקטורים הנמצאים ב- V שהם בת"ל, בסתירה להנחה ש- $\dim V=n$.

$\Rightarrow$: אם $W=V$ אז ברור ש- $\dim V=\dim W$.

$\Leftarrow$: נניח ש- $m=\dim W=\dim V=n$ ונוכיח כי $V=W$. יהי $\left\{w_1,...,w_n\right\}$ בסיס של W. אזי $\left\{w_1,...,w_n\right\}$ ב- V ולכן $\left\{w_1,...,w_n\right\}$ בסיס של V ולכן $V=\mathrm{sp}\left\{w_1,...,w_n\right\}=W$. ■

דוגמה $V=\mathbb{R}^2$, $W\subseteq V$ ת"מ כך ש-$0\le\dim W\le 2$.

(i) $\dim V=2$ אזי $W=\mathbb{R}^2$.

(ii) $\dim W=0$ אזי $W=\left\{(0,0)\right\}$.

(iii) $\dim W = 1$ ולכן קיים $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ כך ש- $v \neq (0,0)$ ו- $W = \text{sp}\left\{v\right\}$ ולכן

$$W = \left\{ \ t(a,b) \ \middle| \ t \in \mathbb{R} \ \right\} = \left\{(ta,tb)\right\}$$

הגדרה 8.2 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. נגדיר את <u>הסכום</u> של U, W להיות הקבוצה

$$W + U = \left\{ \ w + u \ \middle| \ w \in W, u \in U \ \right\}$$

נאמר שהסכום הוא <u>סכום ישר</u> אם $W \cap U = \left\{0_V\right\}$ ונסמן $W \oplus U = W + U$ במקרה זה.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. אזי $W + U$ ת"מ של V.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $v_1, v_2 \in W + U$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. מהיות $u_1, u_2 \in W + U$ קיימים $w_1, w_2 \in W$ ו- $u_1, u_2 \in U$ כך ש- $v_1 = u_1 + w_1$, $v_2 = u_2 + w_2$ ולכן

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha(u_1 + w_1) + \beta(u_2 + w_2) = (\alpha u_1 + \beta u_2) + (\alpha w_1 + \beta w_2) \in U + W$$

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in W, U$ ולכן $0_V = 0_V + 0_V \in W + U$. ■

דוגמה ב- $\mathbb{R}^2$, $W = \text{sp}\left\{(1,0)\right\}$, $U = \text{sp}\left\{(0,1)\right\}$,

$$U + W = \left\{ \ (t,0) + (0,s) \ \middle| \ t,s \in \mathbb{R} \ \right\} = \left\{ \ (t,s) \ \middle| \ t,s \in \mathbb{R} \ \right\} = \mathbb{R}^2$$

משפט (משפט המימדים ה- I) יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $U, W \subseteq V$ ת"מ של V. אזי

$$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

הוכחה: ראשית ראינו כי $U + W$ ו- $U \cap W$ ת"מ של V והם נ"ס (כי V נ"ס). נסמן $r = \dim(U \cap W)$, $l = \dim U$ ו- $k = \dim W$. נרצה להוכיח כי $\dim(U + W) = l + k - r$. יהי $A = \left\{u_1, ..., u_r\right\}$ בסיס של $U \cap W$ (ראינו שלכל מ"ו נ"ס קיים בסיס אם $U \cap W = \left\{0_V\right\}$ אזי $A = \varnothing$. מהיות A בת"ל (כי A בסיס) ניתן להשלים את A לבסיסים של U, W בהתאמה, כלומר, קיימים

$W \ni w_{r+1}, ..., w_k$ ו- $U \ni u_{r+1}, ..., u_l$ כך ש- $\left\{v_1, ..., v_r, w_{r+1}, ..., w_k\right\} = B$ ו- $\left\{v_1, ..., v_r, u_{r+1}, ..., u_k\right\} = C$ הם בסיסים של U, W בהתאמה. נביט ב- $\left\{v_1, ..., v_r, w_{r+1}, ..., w_k, u_{r+1}, ..., u_l\right\} = B \cup C$. נוכיח כי $B \cup C$ בסיס של $U + W$ ומכך ינבע כי $\dim(U + W) = r + (k - r) + (l - r) = k + l - r$ ובכך נסיים.

(i) $B \cup C$ פורשת: יהי $v \in U + W$. אזי קיימים $v = u + w$. מהיות C בסיס של U, קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_l \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + ... + \alpha_l u_l$$

מהיות B בסיס של W, קיימים $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$w = \beta_1 v_1 + ... + \beta_r v_r + \beta_{r+1} w_{r+1} + ... + \beta_k w_k$$

$$v = u + w = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_r + \beta_r)v_r + \alpha_{r+1} u_{r+1} + ... + \alpha_l u_l + \beta_{r+1} w_{r+1} + ... + \beta_k w_k$$

ולכן $U + W \subseteq \mathrm{sp} B \cup C) \subseteq U + W$ ולכן $\mathrm{sp}(B \cup C) = U + W$, כלומר $B \cup C$ פורשת.

(ii) $B \cup C$ בת"ל: יהיו $\alpha_1, ..., \alpha_r, \beta_{r+1}, ..., \beta_l, \gamma_{r+1}, ..., \gamma_k$ ב- $\mathbb{F}$ ונניח כי

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + ... + \beta_l u_l + \gamma_{r+1} w_{r+1} + ... + \alpha_k w_k = 0_V$$

ונוכיח שכל המקדמים שווים ל- 0_F. נשים לב כי

$$U = \mathrm{sp} C \ni \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + ... + \beta_l u_l = -\gamma_{r+1} w_{r+1} - ... - \gamma_k w_k \in \mathrm{sp} B = W$$

שני האגפים נמצאים ב- U, W ולכן הם ב- $U \cap W$. בפרט, אגף שמאל נמצא ב- $U \cap W$ ולכן קיימים $\delta_1, ..., \delta_l \in \mathbb{F}$ שעבורם

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + ... + \beta_l u_l = \delta v_1 + ... + \delta_r v_r$$

$$(\alpha_1 - \delta_1)v_1 + ... + (\alpha_r - \delta_r)v_r + \beta_{r+1} u_{r+1} + ... + \beta_l u_l = 0_V$$

מהיות $v_1, ..., v_r, u_{r+1}, ..., u_l$ בת"ל (כי הם בסיס), אזי $\beta_{r+1} = \cdots = \beta_l = 0_F$ (ובנוסף $\begin{smallmatrix} \alpha_1 = \delta_1 \\ \vdots \\ \alpha_r = \delta_r \end{smallmatrix}$) לכן

$$\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_r v_r + \gamma_{r+1} w_{r+1} + ... + \gamma_k w_k = 0_V$$

מהיות $v_1, ..., v_r, w_{r+1}, ..., w_k$ בת"ל אזי $\alpha_1 = ... = \alpha_r = 0_F$, $\gamma_{r+1} = ... = \gamma_k = 0_F$. ■

מסקנה אם B, C קבוצות פורשות את U, W בהתאמה, אזי $B \cup C$ פורשת את $W + U$.

הוכחה: ראו הוכחה של משפט המימדים ה- I. $\blacksquare$

$\mathbb{XII}$

תרגיל נגדיר שני תתי מרחבים של $\mathbb{R}^4$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{c} 3w + x = 0 \\ w + x + y + z = 0 \end{array} \right\}, U = \left\{ \underset{u_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}}, \underset{u_3}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$.

א. הוכיחו כי W, U ת"מ של $\mathbb{R}^4$ ומצאו להם בסיסים.

ב. מצאו את $\dim(W \cap U)$ וגם בסיס ל- $W + U$.

ג. קבעו האם $U \subseteq W$.

ד. קבעו האם $W \subseteq U$.

ה. מצאו בסיס ל- $U \cap W$.

פתרון א. ראשית ברור ש- $U \subseteq \mathbb{R}^4$ ת"מ (כי $span$ הוא תמיד מ"ו).

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ -3w \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| w - 3w + y + z = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} w \\ -3w \\ y \\ 2w-y \end{pmatrix} \middle| w, y \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ w \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| w, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{sp} \left\{ \underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}, \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}} \right\}$$

ולכן W מ"ו (ת"מ כי הוא $span$).

בסיס ל- W: $\left\{ w_1, w_2 \right\}$ פורשים את W (ברור) ובת"ל (כי אף אחד מהם אינו כפולה של השני בסקלר). לכן $\left\{ w_1, w_2 \right\}$ בסיס של W.

בסיס ל- U: נשים לב ש- u_2 לא כפולה בסקלר של u_1 (ברור). נבדוק האם $u_3 \in sp \left\{ u_1, u_2 \right\}$. נחפש $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ -2\beta \\ \alpha-2\beta \\ -2\beta \end{pmatrix}$$

$\beta = -\frac{1}{2}$ וגם $\beta = 1$ אין פתרון. לכן $u_3 \notin \mathrm{sp} \left\{ u_1, u_2 \right\}$ ולכן $\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$ בת"ל (כי כל וקטור אינו תלוי בקודמיו ו- $u_1 \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

ולכן $\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$ הוא בסיס של U.

ב. ראינו כי $\left\{ w_1, w_2 \right\}$ בסיס של W ו- $\left\{ u_1, u_2, u_3 \right\}$ לכן, מהמסקנה, הקבוצה $\left\{ w_1, w_2, u_1, u_2, u_3 \right\}$ פורשת את $W + U$ (נשים לב שהקבוצה הזו אינה בסיס כי יש בה חמישה איברים ומדובר בסופו של דבר בת"מ של $\mathbb{R}^4$). נחפש α, β שעבורם

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 = \alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -3\alpha \\ \beta \\ 2\alpha-\beta \end{pmatrix}$$

$\alpha=0$, $\beta=0$, $0-1=0$ אין פתרון לכן שלושת הוקטורים בת"ל. נבדוק האם $u_2\in \operatorname{sp}\left\{w_1,w_2,u_1\right\}$. נחפש $a,b,c\in\mathbb{R}$ שעבורם

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}=u_2=aw_1+bw_2+cu_1=a\begin{pmatrix}1\\-3\\0\\2\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

אין פתרון כי יוצא ש- $a=1$ וגם $-3a=-2$. לכן $\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}$ בת"ל ב- $\mathbb{R}^4$ ולכן הם בסיס של $\mathbb{R}^4$ לכן

$$\mathbb{R}^4\supseteq sp\left\{w_1,w_2,u_1,u_2,u_3\right\}=W+U\supseteq sp\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}=\mathbb{R}^4$$

ולכן $W+U=\mathbb{R}^4$ וגם $\left\{w_1,w_2,u_1,u_2\right\}$ בסיס של $W+U$ (אבל גם $\left\{e_1,e_2,e_3,e_4\right\}$) לכן ממשפט המימדים ה- I,

$$4=\dim(W+U)=\underset{2}{\dim}W+\underset{3}{\dim}U-\dim(W\cap U)$$

ולכן $\dim(U\cap W)=1$.

ג. ראינו כי $u_1\notin \operatorname{sp}\left\{w_1,w_2\right\}$ ולכן $U\not\subseteq W$.

ד. נניח בשלילה כי $U\subseteq W$ לכן $W\cap U=W$ אבל $\dim W\neq\dim(W\cap U)$.

ה. נחפש $v\in W$ כך ש- $v\in U$. נחפש $\alpha,\beta,\gamma,w,y\in\mathbb{R}$ כך ש-

$$v=\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\2w-y\end{pmatrix}=\alpha u_1+\beta u_2+\gamma u_3=\alpha\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\\-2\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta+\gamma\\-2\beta+\gamma\\\alpha-2\beta+\gamma\\-2\beta+\gamma\end{pmatrix}$$

לכן $\begin{cases}\beta+\gamma=w\\-2\beta+\gamma=-3w\\\alpha-2\beta+\gamma=y\\-2\beta+\gamma=2w-y\end{cases}(*)$. נוכל להסיק מכך כי $-3=2w-y$, $y=5w$. נציב ונקבל $\begin{cases}\beta+\gamma=w\\-2\beta+\gamma=-3w\\\alpha-2\beta+\gamma=5w\\-2\beta+\gamma=-3w\end{cases}(*)$ ונקצר את המערכת $\begin{cases}\beta+\gamma-w=0\\-2\beta+\gamma+3w=0\\\alpha-2\beta+\gamma-5w=0\end{cases}(*)$,

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1&-1\\0&-2&1&3\\1&-2&1&-5\end{pmatrix}\xrightarrow[R_2\to-\frac{1}{2}R_2]{R_1\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&-2&1&-5\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\begin{pmatrix}1&-2&1&-5\\0&1&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

נבחר $w=1$ (נוכל למצוא את α,β,γ בהתאם) ונקבל $v=\begin{pmatrix}w\\-3w\\y\\2w-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\\-3\end{pmatrix}$ לכן $v\in U\cap W$ ולכן $U\cap W\supseteq sp\left\{v\right\}$ ומשוויון מימדים $U\cap W=sp\left\{v\right\}$ ולכן $\left\{v\right\}$ בסיס של $U\cap W$ (כי היא פורשת במימד המ"ו).

9 שובן של המטריצות

הגדרה 9.1 תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ותהי $B\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. נגדיר את $A\cdot B$ להיות מטריצה מסדר $m\times r$ שרכיביה מוגדרים ע"י $[A\cdot B]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}\cdot[B]_{kj}$.

דוגמות

1. $\begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1&2\\3&-1&4\\0&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2&7\\9&3&36\end{pmatrix}$ או בהדגמה ויזואלית $\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}0&1&2\\3&-1&4\\0&1&5\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&1\\2&3&4\end{pmatrix} & \left[\begin{pmatrix}0&2&7\\9&3&36\end{pmatrix}\right]\end{array}$.
2. $\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5\\20&13\end{pmatrix}$.
4. לא מוגדר $=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$.
5. $\begin{pmatrix}2&0\\1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&6\\1&2&2\\0&2&-1\end{pmatrix}$.
6. $\begin{pmatrix}4&3\\2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13&20\\5&8\end{pmatrix}$.

הערה כפל מטריצות אינו קומוטטיבי.

דוגמה $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3\end{pmatrix}$.

מסקנה מערכת משוואות $\left\{\begin{array}{c}a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right.$ $(*)$ נתנת לכתיבה כ- $A\cdot\overrightarrow{x}=\overrightarrow{b}$ כאשר $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ ו- $\overrightarrow{b}=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{m1}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$.

הגדרה 9.2 מטריצה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ תקרא <u>ריבועית</u> אם $m=n$.

הערה נסמן $M_n(\mathbb{F})=M_{n\times n}(\mathbb{F})$.

$\mathbb{XIII}$

הגדרה 9.3 <u>מטריצת היחידה</u> ב- $M_n(\mathbb{F})$ מוגדרת להיות $I_n=\begin{pmatrix}1_F&&0_F\\&\ddots&\\0_F&&1_F\end{pmatrix}$, כלומר I_n היא המטריצה מסדר $n\times n$ המוגדרת ע"י $[I]_{ij}=\delta_{ij}=\begin{cases}1&i=j\\0&i\neq j\end{cases}$.

דוגמה $I_1=\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$, $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

טענה תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי:

(i) $A\cdot I_n=A$.

(ii) $I_m\cdot A=A$.

(iii) $A\cdot 0_{n\times r}=0_{m\times r}$.

(iv) $0_{r\times m}\cdot A=0_{r\times n}$.

הוכחה: (i) $A\cdot I_n$ מטריצה מסדר $m\times n$ לפי הגדרת הכפל, ו- $\forall ij$, $[A\cdot I_n]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[I_n]_{kj}=[A]_{ij}$ כי כל שאר האיברים מתאפסים.

(ii) $I_m\cdot A$ מטריצה מסדר $m\times n$ לפי הגדרת הכפל, וכן $\forall ij$, $[I_m\cdot A]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[I_m]_{ik}[A]_{kj}=[A]_{ij}$ כי כל שאר האיברים מתאפסים.

(iii) באופן דומה $A\cdot 0_{n\times r}$ מטריצה מסדר $m\times r$ ו- $\forall ij$, $\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[0_{n\times r}]_{kj}=0_F=[0_{n\times r}]_{ij}$.

(iv) באותו האופן, $[0_{r\times m}\cdot A]_{ij}=\sum_{k=1}^{m}[0]_{ik}[A]_{kj}=0_F=[0_{r\times n}]_{ij}$. ■

הגדרה 9.4 תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. A תקרא <u>הפיכה</u> אם קיימת $B\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $A\cdot B=B\cdot A=I_n$. במקרה זה נסמן $A^{-1}=B$.

$(*)$ מוגדר היטב מיחידות ההופכי.

משפט (תכונות הכפל ה- I) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $B\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. יהי $\alpha\in\mathbb{F}$ אזי $(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)=\alpha(A\cdot B)$.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $(\alpha\cdot A)\cdot B, A\cdot(\alpha\cdot B), \alpha(A\cdot B)$ מוגדרות והן מטריצות מסדר $m\times r$. בנוסף $\forall ij$

$$[(\alpha\cdot A)\cdot B]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}[(\alpha\cdot A)]_{ik}[B]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}\alpha\cdot[A]_{ik}[B]_{kj}\overset{(*)}{=}\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[\alpha\cdot B]_{kj}=[A\cdot(\alpha\cdot B)]_{ij}$$

ולכן $(\alpha\cdot A)\cdot B=A\cdot(\alpha\cdot B)$. בנוסף

$$(*)=\alpha\cdot\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}=\alpha\cdot[AB]_{ij}=[\alpha\cdot(A\cdot B)]_{ij}$$

ולכן $(\alpha\cdot A)\cdot B=\alpha\cdot(A\cdot B)$. ■

משפט (תכונות הכפל ה- II) (i) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B,C\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$ אזי $A(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

(ii) תהיינה $A\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$, $B,C\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $(B+C)A=B\cdot A+C\cdot A$.

הוכחה: (i) $\forall ij$,

$$\begin{aligned}[A(B+C)]_{ij}=&\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B+C]_{kj}=\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}([B]_{kj}+[C]_{kj})\\ =&\sum_{k=1}^{n}[A]_{ik}[B]_{kj}+[A]_{ik}[C]_{kj}=[AB]_{ij}+[AC]_{ij}=[AB+AC]_{ij}\end{aligned}$$

מכיוון שסדר המטריצות $A(B+C)$ ו- $AB+AC$ הוא זהה (והוא $m\times r$) הרי ש- $A(B+C)=AB+AC$.

(ii) באותו האופן! ■

משפט (תכונות הכפל ה- III) תהיינה $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B\in M_{n\times r}(\mathbb{F})$, $C\in M_{r\times s}(\mathbb{F})$. אזי $(AB)C=A(BC)$.

הוכחה: נשים לב כי $A(BC)$ ו- $(AB)C$ הן שתי מטריצות מסדר $m \times s$. יהי $1 \le i \le m$, $1 \le j \le s$. אזי

$$\begin{aligned}[(A\cdot B)\cdot C]_{ij} =&\sum_{k=1}^{r}[AB]_{ik}[C]_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{l=1}^{n}[A]_{il}[B]_{lk}\right)[C]_{kj}\\ =&\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{n}[A]_{il}\left([B]_{lk}[C]_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}[A]_{il}\left([B]_{lk}[C]_{kj}\right)\\ =&\sum_{l=1}^{n}[A]_{il}\left(\sum_{k=1}^{r}[B]_{lk}[C]_{kj}\right) = \sum_{l=1}^{n}[A]_{il}\cdot[BC]_{lj} = [A\cdot(BC)]_{ij}\end{aligned}$$

לכן $(AB)C = A(BC)$. ■

מסקנה $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$, מתקיים:

(i) $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

(ii) $(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

הגדרה 9.5 תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. A, B יקרא <u>מתחלפות</u> אם $A\cdot B = B\cdot A$.

הערה אם $AB = BA$ אזי $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ ובאותו האופן $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$.

מסקנה הוכחנו כי ב- $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ מתקיימת כל תכונות השדה פרט לקומוטטיביות (ואולי קיום הופכי).

דוגמות

1. $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$, A, I_n מתחלפות וגם $A, 0_n$ מתחלפות כי $A\cdot I_n = A$, $I_n \cdot A = A$ וגם $A\cdot 0_n$, $0_n \cdot A$.
2. $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$, $(A\pm I_n)^2 = A^2 \pm 2A + I_n$, $(A+I_n)(A-I_n) = A^2 - I_n$.
3. $A^3 - I_n = (A-I_n)(A^2+A+I_n)$.
4. $A^2 - 5A + 6I_n = (A-3I_n)(A-2I_n)$, $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$.

תרגילים

1. ב- $M_{2\times 2}$, האם $A = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)$ הפיכה?

   כן! נחפש $B = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ כך ש- $AB = BA = I_2$.

$$A\cdot B = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}a&b\\2a+c&2b+d\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

$\left\{\begin{smallmatrix}a=1\\b=0\end{smallmatrix}\right.$, $\left\{\begin{smallmatrix}2a+c=0\\2b+d=1\end{smallmatrix}\right.$. $B = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\-2&1\end{smallmatrix}\right)$. נבדוק:

$$BA = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\-2&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\2&1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right) = I_2$$

2. ב- $M_{2\times 2}$, האם $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)$ הפיכה?

לא!

$$\left(\begin{smallmatrix}1&2\\1&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a+2c&b+2d\\a+2c&b+2d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

$\left\{\begin{smallmatrix}a+2c=1\\a+2c=0\\b+2d=0\\b+2d=1\end{smallmatrix}\right.$ אין פתרון! לכן A לא הפיכה!

3. האם $A=\left(\begin{smallmatrix}2&4\\-6&-12\end{smallmatrix}\right)$ הפיכה?

לא! כמו קודם, נרשום

$$\left(\begin{smallmatrix}2&4\\-6&-12\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2b+4d&2b+4d\\-6a-12c&-6b-12d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$$

$\left\{\begin{smallmatrix}2a+4c=1&\Rightarrow -6a-12c=-3\\2b+4d=0&\\-6a-12c=0&\\-6b-12d=0&\Rightarrow \text{אין פתרון}\end{smallmatrix}\right.$ לכן A לא הפיכה!

4. האם $A=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{smallmatrix}\right)$ הפיכה?

לא! $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&5\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}a&b&c\\0&0&0\\5g&5h&5i\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ אין פתרון.

דוגמה נשים לב כי $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\-1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ ולכן ב- $M_2(\mathbb{R})$ יש מחלקי אפס, ובפרט $\left(\begin{smallmatrix}1&1\\1&1\end{smallmatrix}\right)$ לא הפיכה.

$\mathbb{XIV}$

משפט (יחידות ההופכי) תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ ונניח כי קיימות $B,C\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $AB=BA=I_n$ וגם $AC=CA=I_n$ אזי $B=C$.

הוכחה: $B=B\cdot I_n=B\cdot(A\cdot C)=(B\cdot A)\cdot C=I_n\cdot C=C$. ■

הגדרה 9.6 תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה. נסמן ב- A^{-1} את המטריצה ההפוכה של A. נגדיר גם:

(i) $A^{n+1}=A\cdot A^n$, $\forall n\geq 1$ ונגדיר $A^0=I_n$.

(ii) $A^{-n}=(A^{-1})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

משפט (תכונות ההופכי) (i) I_n הפיכה ומתקיים $I_n^{-1}=I_n$.

(ii) אם $A\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה. אזי גם A^{-1} הפיכה ו- $(A^{-1})^{-1}=A$.

(iii) אם $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות, אזי $A\cdot B$ הפיכה ו- $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

הוכחה: (i) $I_n \cdot I_n = I_n$ ולכן I_n הפיכה ו- $I_n^{-1} = I_n$.

(ii) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I_n$ ולכן A^{-1} הפיכה ומיחידות ההופכי $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii)

$$(AB) \cdot (B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1}) \cdot (AB) = B^{-1} \cdot I_n \cdot B = B^{-1} \cdot B = I_n$$

ולכן AB הפיכה ומיחידות ההפכי, $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. ■

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה ויהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$. אזי למערכת הלינארית $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ קיים פתרון יחיד והוא $\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$.

הוכחה: מהיות A הפיכה קיימת מטריצה הפוכה יחידה $A^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ ולכן $A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b} \iff (A^{-1} \cdot A)\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$. ■

מסקנה תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, ונסמן $W = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \right\}$ אזי W ת"מ של $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: $(i)^{(*)}$ יהיו $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in W$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$.

$$A \cdot (\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y}) = A(\alpha \overrightarrow{x}) + A(\beta \overrightarrow{y}) = \alpha(A\overrightarrow{x}) + \beta(A\overrightarrow{y}) = \alpha \cdot \overrightarrow{0} + \beta \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$$

ולכן $\alpha \overrightarrow{x} + \beta \overrightarrow{y} \in W$.

$(ii)^{(*)}$ $A \cdot \overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$ ולכן $\overrightarrow{0} \in W$. ■

משפט יהי $\mathbb{F}$ שדה אינסופי, ונביט במערכת ההומגנית $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ עבור $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. אזי בדיוק אחת מהאפשרויות הבאות מתקיימות:

(i) קיים פתרון יחיד למערכת, והוא $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$.

(ii) יש למערכת אינסוף פתרונות.

הוכחה: נביט ב- $\left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{F}^n \mid A \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0} \right\} = W$. ראינו ש- $W \subseteq \mathbb{F}^n$ ת"מ. אם $\dim W = 0$ אזי $W = \left\{ \overrightarrow{0} \right\}$ וקיבלנו את (i). אחרת, $\dim W \geq 1$ ומכיוון ש- $\mathbb{F}$ אינסופי, אזי W מכיל אינסוף וקטורים מהצורה $\alpha \cdot \overrightarrow{x}$ כאשר $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{x} \in W$ ו- $\alpha \in \mathbb{F}$, ולכן (ii) מתקיים. ■

$\mathbb{XV}$

דוגמה $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

$$AB = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} a+2c & b+2d \\ 3a & 3b \end{smallmatrix}\right)$$

לכן $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$. $BA = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, ולכן היא הפיכה.

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נניח שיש ב- A שורת אפסים. אזי A לא הפיכה.

הוכחה: נניח בשלילה ש- A הייתה הפיכה. אזי מהמסקנה הקודמת, $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$, קיים פתרון יחיד למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$. נסמן $1 \leq i \leq n$ את אינדקס השורה שמתאפסת ב- A ונביט במערכת: $\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=1 \\ \vdots \\ 0x_{i1}+\ldots+0x_{in}=1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=1 \end{cases}$ ברור שלמערכת זו אין פתרון. סתירה להנחה ש- A הפיכה. ■

הערה תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ותהי $B \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$. ראינו כי $A \cdot B$ מוגדרת והיא מטריצה מסדר $m \times r$. נסמן $B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \ldots & \vec{c_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ כאשר $\vec{c_1}, \ldots, \vec{c_r} \in \mathbb{F}^n$ וקטורי העמודה של B. נשים לב שמהגדרת הכפל, $A \cdot B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\vec{c_1} & A\vec{c_2} & \ldots & A\vec{c_r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

דוגמה $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 19 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 19 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז A הפיכה אס"ם $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$, קיים פתרון למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

הוכחה: $\underline{\Leftarrow}$: ראינו כבר ($\overrightarrow{x} = A^{-1} \cdot \overrightarrow{b}$ הפתרון)

$\underline{\Rightarrow}$: קיים $\vec{c_1} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $A\vec{c_1} = \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. $\forall 1 \leq i \leq n$ קיים $\vec{c_i} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו $A\vec{c_i} = \vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. נביט במטריצה $B = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \ldots & \vec{c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$. לפי ההערה הקודמת, $I_n = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ A\vec{c_1} & A\vec{c_2} & \ldots & A\vec{c_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = A \cdot B$ ולכן A הפיכה מימין (לפי משפט אוהד, A הפיכה ו- $B = A^{-1}$). ■

משפט (אוהד, □) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח כי $A \cdot B = I_n$ אזי $B \cdot A = I_n$ (ובפרט, A הפיכה ו- $B = A^{-1}$).

הגדרה 9.7 מטריצה $E \in M_n(\mathbb{F})$ תקרא <u>אלמנטרית</u> אם E מתקבלת מ- I_n ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת.

משפט (EA, הוכחה בשיעור הבא) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- B התקבלה מ- A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת. אזי קיימת מטריצה אלמנטרית $E \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $B = E \cdot A$. יתר על כן, E היא המטריצה שהתקבלה מ- I_n ע"י אותה הפעולה שביצענו על A ע"מ לקבל את B.

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אלמנטרית כי אפשר לעשות $\xrightarrow{R_1 \to 2R_1} I_n$.
2. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ אלמנטרית כי אפשר לעשות $\xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} I_n$.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ אלמנטרית כי אפשר לעשות $\xrightarrow{R_3 \to R_3 + 3R_1} I_n$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ לא אלמנטרית.

מסקנה תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח ש- A, B שקולות שורה. אזי קיימות מטריצות אלמנטריות $E_k, ..., E_2, E_1 \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $B = E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$.

הוכחה: מהיות A, B ש"ש, ניתן להגיע מ- A ל- B ע"י k פעולות שורה אלמנטריות. לפי המשפט הקודם, סיימנו. ■

מסקנה תהי $E \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה אלמנטרית. אזי E הפיכה, ויתר על כן, $E^{-1} \in M_n(\mathbb{F})$ היא מטריצה אלמנטרית המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית ההפוכה לזו של E.

הוכחה: ראינו כבר שכל פעולת שורה אלמנטרית היא הפיכה ושהפעולה ההפוכה גם היא אלמנטרית. לכן, $\widetilde{E} \in M_n(\mathbb{F})$ המטריצה האלמנטרית המתאימה לפעולת השורה האלמנטרית ההפוכה לזו של E, לכן, מהמשפט, $\widetilde{E} \cdot E = I_n$, $E \cdot \widetilde{E} = I_n$ ולכן E הפיכה ו- $E^{-1} = \widetilde{E}$. ■

דוגמות

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

מסקנה תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- A, B ש"ש. אזי A הפיכה אם"ם B הפיכה.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח ש- A הפיכה. B ש"ש ולכן ממסקנה 1, קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, ..., E_k \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $B = E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A$ לכן ממסקנה 2, B היא מכפלה של הפיכות ולכן B הפיכה (מתכונות ההופכית). ו-

$$B^{-1} = A^{-1} \cdot E_1^{-1} \cdot .... \cdot E_k^{-1}$$

$\Rightarrow$: ברור מסמטריה. ■

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ותהי $C \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה קנונית השקולת שורה ל- A. אם A הפיכה אזי $C = I_n$, ואם A לא הפיכה, אזי קיימת ב- C שורת אפסים.

הוכחה: נניח ש- A הפיכה. מהיות A, C ש"ש, אזי C הפיכה ולכן אין ב- C שורות אפסים. לכן, בכל שורה קיים איבר מוביל, ששווה ל- 1_F. כל איבר מוביל נמצא מימין לאיברים המובילים בשורות שמעליו, ויש n איברים מובילים (מספר השורות ב- C) ולכן בכל עמודה חייב להיות איבר מוביל. ולכן כל עמודה ב- C שייכת לבסיס הסטנדרטי, ומכך ש- C מדורגת, $C = \begin{pmatrix} 1_F & & 0_F \\ & \ddots & \\ 0_F & & 1_F \end{pmatrix}$.

עתה נניח ש- A לא הפיכה. לכן C לא הפיכה. ראינו כבר שאם במטריצה קנונית ריבועית אין שורת אפסים, אזי היא מטריצת היחידה. מהיות C לא הפיכה, $C \neq I_n$ ולכן ב- C יש שורת אפסים. ■

מסקנה (אלגוריתם ההיפוך) תהי A מטריצה הפיכה. אזי A^{-1} מתקבלת מ- I_n ע"י הפעלת פעולות השורה האלמנטריות שהפעלנו על A, על מנת לדרג את A למטריצה קנונית $C = I_n$.

הוכחה: מהיות A הפיכה, הצורה הקנונית של A היא I_n (ולכן A ש"ש ל- I_n). לכן קיימות $E_k, ..., E_1 \in M_n(\mathbb{F})$ אלמנטריות שעבורן $\underbrace{E_k \cdot ... \cdot E_1}_{B} \cdot A = I_n$ לכן $BA = I_n$ ולכן ממשפט אוהד, גם $AB = I_n$ ולכן A הפיכה ו- $B = A^{-1}$. לכן

$$A^{-1} = E_k \cdot ... \cdot E_1 = E_k \cdot ... \cdot E_1 \cdot I_n$$

ולכן ממשפט EA, A^{-1} מתקבלת מ- I_n ע"י הפעולות $E_k, ..., E_1$. ■

דוגמה

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&1&7&0&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to 4R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&4&28&0&0&4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3\to R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\0&4&5&0&1&0\\0&0&23&0&-1&4 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2\to\frac{1}{4}R_2]{R_3\to\frac{1}{23}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&3&1&0&0\\0&1&\frac{5}{4}&0&\frac{1}{4}&0\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1\to R_1-3R_3]{R_2\to R_2-\frac{5}{4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&2&0&1&\frac{3}{23}&-\frac{12}{23}\\0&1&0&0&\frac{1}{4}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{23}&-\frac{5}{23}\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-\frac{11}{23}&-\frac{2}{23}\\0&1&0&0&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\\0&0&1&0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23} \end{array}\right)$$

לכן A הפיכה ו- $A^{-1} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 23&-11&-2\\0&7&-5\\0&-1&4 \end{pmatrix}$. נבדוק $\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&-\frac{11}{23}&-\frac{2}{23}\\0&\frac{7}{23}&-\frac{5}{23}\\0&-\frac{1}{23}&\frac{4}{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3\\0&4&5\\0&1&7 \end{pmatrix}$.

XVI

מסקנה תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- A, B הפיכות אזי A, B שקולות שורה.

הוכחה: ראינו שכל מטריצה הפיכה ש"ש ל- I_n (במסקנה 4) לכן $A \sim I_n$, $B \sim I_n$ ומטרנזיטיביות, נקבל ש- $B \sim A$. ■

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אזי A הפיכה אם"ם A ש"ש ל- I_n.

הוכחה: $\Leftarrow$: ראינו (במסקנה 4).

$\Rightarrow$: נניח ש- A ש"ש ל- I_n לכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,...,E_k \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $E_k \cdot ... \cdot E_2 \cdot E_1 \cdot A = I_n$ ולכן

$$A = \underbrace{(E_k \cdot \dots \cdot E_1)^{-1}}_{\text{מכפלה של הפיכות}} I_n = (E_k \cdot ... \cdot E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdot ... \cdot E_k^{-1}$$

לכן A היא מכפלה של מטריצות הפיכות ולכן A הפיכה. $\blacksquare$

משפט (EA) תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. נניח ש- B התקבלה מ- A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אחת. אזי קיימת מטריצה אלמנטרית $E \in M_n(\mathbb{F})$ שעבורה $B = E \cdot A$. יתר על כן, E היא המטריצה שהתקבלה מ- I_n ע"י אותה הפעולה שביצענו על A ע"מ לקבל את B.

הוכחה: נחלק למקרים:

B (i) $\xrightarrow{R_i \to cR_i}$ A כאשר $c \neq 0_F$ ו- $1 \leq i \leq n$.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ c\cdot a_{i1} & c\cdot a_{i2}\cdots & a_{in} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$EA = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ ca_{i1} & ca_{i2} & \cdots & ca_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

B (ii) $\xrightarrow{R_i \leftrightarrow R_j}$ A כאשר $i < j$.

$$E = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

$$EA = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ & \vdots & \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ & \vdots & \\ a_{nn} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = B$$

(iii) $B \xrightarrow{R_i \to R_i + cR_j} A$ כאשר $i \neq j$, $c \in \mathbb{F}$. $E = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & c & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$.

$$E \cdot A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 \quad c & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \vdots & \\ a_{i1}+ca_{j1} & \cdots & a_{in}+ca_{jn} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

דוגמות

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

לכן A ש"ש למטריצה שיש לה שורת אפסים ולכן A לא הפיכה.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 2 \\ 0 & 1+i & 3 \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - iR_2]{R_3 \to R_3 - (1+i)R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4-i & 0 & 1 & -i-1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to \frac{1}{4-i} R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4+i}{17} & \frac{-3-5i}{17} \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to R_1 - 3R_3]{R_2 \to R_2 - iR_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{-3(4+i)}{17} & -i+\frac{3(3+5i)}{17} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-i(4+i)}{17} & 1+\frac{i(3+5i)}{17} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{4+i}{17} & \frac{-3-5i}{17} \end{array}\right)$$

$A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 17 & -12-3i & 9-2i \\ 0 & 1-4i & 12+3i \\ 0 & 4+i & -3-5 \end{pmatrix}$.

משפט תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) A הפיכה.

(ii) $\forall \overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ קיים פתרון יחיד למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$.

(iii) קיים $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ שעבורו למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ יש פתרון יחיד.

(iv) למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ קיים פתרון יחיד (והוא $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$).

הוכחה: $(i) \to (ii)$ יהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ אזי $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ אם"ם $\overrightarrow{x} = I_n \cdot \overrightarrow{x} = A^{-1}A\overrightarrow{x} = A^{-1}\overrightarrow{b}$.

$(ii) \to (iii)$ ברור.

$(iii) \to (iv)$ ראינו כבר ש- $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ הוא פתרון למערכת הומוגנית $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$. נניח בשלילה שקיים פתרון נוסף $\overrightarrow{x_h} \neq \overrightarrow{0}$. יהי $\overrightarrow{b} \in \mathbb{F}^n$ וקטור שעבורו למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ קיים פתרון יחיד ונסמן את הפתרון ב- $\overrightarrow{x_p}$. מתקיים $A\overrightarrow{x_p} = \overrightarrow{b}$. נביט ב- $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}$ נחשב:

$\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{0} = A\overrightarrow{x_p} + A\overrightarrow{x_h} = A(\overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}) = A\overrightarrow{x}$. קיבלנו פתרון $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_h} + \overrightarrow{x_p}$ למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ ו- $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x_p}$ (כי $\overrightarrow{0} \neq \overrightarrow{x_h}$) בסתירה לכך שלמערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$ יש פתרון יחיד.

$(i) \to (iv)$ מספיק להוכיח ש- A ש"ש ל- I_n (מסקנה 6). תהי C המטריצה הקנונית השקולת שורה ל- A ונניח בשלילה ש- $C \neq I_n$. לכן יש ב- C שורת אפסים (מסקנה 4) ומכיוון ש- C קנונית, היא מדורגת ולכן השורה האחרונה ב- C חייבת להיות שורת אפסים ולכן יש עמודה ב- C ללא איבר מוביל. נסמן את עמודה זו ב- j. נביט במערכת. $C \cdot \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ היא שקולה למערכת $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$ (כי A ו- C ש"ש). נוכל לקבוע את x_j להיות מה שנרצה (למשל 1_F) ושאר המשתנים יהיו תלויים ב- x_j. ולכן קיים פתרון לא טריוויאלי. ■

תרגיל נביט במערכת הבאה במשתנים x, y, z מעל $\mathbb{R}$, כאשר $k \in \mathbb{R}$. $\left\{ \begin{smallmatrix} -x-2y+z=0 \\ 2x+5y+kz=1 \\ 7x+(9+k)y-6z=-1 \end{smallmatrix} \right.$ קבעו עבור אילו ערכי k :

(i) יש למערכת פתרון יחיד.

(ii) יש למערכת אינסוף פתרונות (ומצאו את הפתרון הכללי).

(iii) אין פתרון למערכת.

פתרון

$$A^+ = \left(\begin{array}{ccc:c} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & k & 1 \\ 7 & 9-k & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \to -R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & k & 1 \\ 7 & 9-k & -5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 7R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & -5-k & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + (5+k)R_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & k+2 & 1 \\ 0 & 0 & (k+3)(k+4) & k+4 \end{array}\right) = A^{++}$$

(רגעי נוסטלגיה לסוף שיעור $\mathbb{III}$)

(i) $k \neq -3, -4$. במקרה זה, $z = \frac{1}{k+3}$, נציב במשוואה השנייה $y + (k+2)z = 1 \leftarrow y = 1 - \frac{k+2}{k+3} = \frac{1}{k+3}$. נציב במשוואה ראשונה $x + 2y - z = 0$, $x + y = 0 \leftarrow x = -\frac{1}{k+3}$. לכן קיים פתרון יחיד והוא $\frac{1}{k+3}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(iii) אם $k = -3$, הרי שקיבלנו בשורה האחרונה $0\ 0\ 0 \mid 1$ ולכן למערכת אין פתרון.

(ii) עבור $k = -4$, המטריצה היא $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ נקבע $z = t$, $y = 1 + 2t$, $x = -2 - 3t$ ולכן הפתרון הכללי הוא $\left\{ \begin{pmatrix} -2-3t \\ 1+2t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

$\mathbb{XVIII}$

תרגיל נביט בקבוצה $U = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) \;\middle|\; A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.

א. הוכיחו ש- U הוא מ"ו מעל $\mathbb{R}$.

ב. מצאו ל- U קבוצה סופית פורשת.

ג. הוכיחו/הפריכו : אם $A \in U$ אזי A לא הפיכה.

ד. הוכיחו/הפריכו: אם $A,B\in U$ אזי A,B ש"ש.

פתרון א. נוכיח ש- U ת"מ של $M_3(\mathbb{R})$.

(i) יהיו $A,B\in U$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

$$(\alpha A+\beta B)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=(\alpha A)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}+(\beta B)\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\alpha\left(B\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)+\beta\left(B\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right)=\alpha\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ולכן $\alpha A+\beta B\in U$.

(ii) $0_{3\times3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$.

ב.

$$\begin{aligned}U&=\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\;\middle|\;\begin{matrix}a_{12}+2a_{13}=0\\a_{22}+2a_{23}=0\\a_{32}+2a_{33}=0\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{bmatrix}a_{11}&-2a_{13}&a_{13}\\a_{21}&-2a_{23}&a_{23}\\a_{31}&-2a_{33}&a_{33}\end{bmatrix}\right\}\\&=\left\{a_{11}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_1}+a_{13}\underbrace{\begin{pmatrix}0&-2&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_2}+a_{21}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_3}+a_{23}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-2&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A_4}+a_{31}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}}_{A_5}+a_{33}\underbrace{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-2&1\end{pmatrix}}_{A_6}\right\}\\&=\mathrm{sp}\left\{A_1,...,A_6\right\}\end{aligned}$$

לכן $\{A_1,...,A_6\}$ קבוצה סופית פורשת. בנוסף, הקבוצה $A=\{A_1,...,A_6\}$ בת"ל כי $0_{3\times3}\notin A$ וגם כל מטריצה היא לא ק"ל של קודמיה כי לכל מטריצה איבר שלא מתאפס שכן מתאפס בכל שאר המטריצות הקודמות.

ג. נכון. נניח בשלילה כי A הפיכה. לכן $A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ ולכן $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot A\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ סתירה.

ד. לא נכון. $0_{3\times3}\in U$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ והן אינן ש"ש כי שתיהן מטריצות קנוניות ושתי מטריצות קנוניות הן ש"ש אם"ם הן שוות (מיחידות הקנונית).

הוכח/הפרך אם המטריצות $A,B\in M_n(\mathbb{R})$ מקיימות $(AB)^2=0_{n\times n}$, אזי $(BA)^3=0_{n\times n}$.

פתרון של ערד נרשום: $(BA)^3=B(A\cdot BA\cdot B)A=B(AB)^2A=B\cdot0\cdot A=0$.

10 העתקות לינאריות

הגדרה 10.1 יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. העתקה (או פונקציה או טרנספורמציה) $T:V\to W$ תקרא העתקה לינארית אם:

(i) T אדיטיבית, כלומר $\forall v_1,v_2\in V$, $T(v_1+v_2)=T(v_1)+T(v_2)$.

(ii) T הומוגנית, כלומר, $\forall v\in V$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$, $T(\alpha\cdot v)=\alpha\cdot T(v)$.

דוגמות

1. נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ע"י: $T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}x-y\\x+y\\x\end{pmatrix}$, $\forall\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$. נוכיח ש- T ה"ל.
(i) $\forall\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$,

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\end{smallmatrix}\right)\right)=T\left(\left(\begin{smallmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{smallmatrix}\right)\right)=\begin{pmatrix}x_1+x_2-(y_1+y_2)\\x_1+x_2+(y_1+y_2)\\x_1+x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-y_1\\x_1+y_1\\x_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_2-y_2\\x_2+y_2\\x_2\end{pmatrix}=T\left(\begin{smallmatrix}x_1\\y_1\end{smallmatrix}\right)+T\left(\begin{smallmatrix}x_2\\y_2\end{smallmatrix}\right)$$

(ii) $\forall\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$ ו- $\forall t\in\mathbb{R}$, $T\left(t\cdot\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)=T\left(\begin{smallmatrix}t\cdot x\\t\cdot y\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}tx-ty\\tx+ty\\tx\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}x-y\\x+y\\x\end{pmatrix}$.

2. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונגדיר העתקה $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ ע"י $T_A(\overrightarrow{x})=A\cdot\overrightarrow{x}$, $\forall\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}^n$.

3. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ה"ל. נשים לב ש- $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)=f(x\cdot 1)=x\cdot f(1)=c\cdot x$ ולכן קיים $c\in\mathbb{R}$ שעבורו $f(x)=c\cdot x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. נשים לב שבמקרה זה, $f(x+y)=c(x+y)=cx+cy=f(x)+f(y)$ ולכן $f(x)=cx$ עבור $c\in\mathbb{R}$ (שיכול להיות כל דבר).

4. $f(x)=x^2$ $\forall x\in\mathbb{R}$ לא לינארית (כי היא לא מהצורה של 3).

5. $W=\left\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\;\middle|\; f \text{ גזירה}\right\}$ ונגדיר $T:W\to\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $T(f)=f'$, $\forall t\in W$. נשים לב ש- T לינארית מאשג"ז, $T(f+g)=(f+g)'=f'+g'=T(f)+T(g)$, $T(\alpha f)=(\alpha f)'=\alpha f'=\alpha T(f)$.

טענה $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$ היא ה"ל.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $A\cdot\overrightarrow{x}\in\mathbb{F}^m$, $\forall x\in\mathbb{F}^n$.

(i) יהיו $\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{F}^n$. $T_a(\vec{x}+\vec{y})=A\cdot(\vec{x}+\vec{y})=A\vec{x}+A\vec{y}=T_A(\vec{x})+T_A(\vec{y})$.

(ii) יהיו $\vec{x}\in\mathbb{F}^n$ ו- $\alpha\in\mathbb{F}$. $T_A(\alpha\cdot\vec{x})=A\cdot(\alpha\cdot\vec{x})=\alpha\cdot(A\cdot\vec{x})=\alpha\cdot T_A(\vec{x})$. ■

מסקנה כל מטריצה $A\in M_{m\times n}$ מתאימה לה"ל $T_A:\mathbb{F}^n\to\mathbb{F}^m$.

טענה נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x-y\\x\cdot y\end{smallmatrix}\right)$. T לא ה"ל.

הוכחה:

$$T\left(\left(\begin{smallmatrix}7\\4\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right)\right)=T\left(\begin{smallmatrix}12\\6\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}6\\72\end{smallmatrix}\right)$$

$$T\left(\begin{smallmatrix}7\\4\end{smallmatrix}\right)+T\left(\begin{smallmatrix}5\\2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}3\\28\end{smallmatrix}\right)+\left(\begin{smallmatrix}3\\10\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}6\\38\end{smallmatrix}\right)\neq T\left(\begin{smallmatrix}6\\72\end{smallmatrix}\right)$$

בסתירה לאדיטיבות ולכן T לא לינארית. ■

טענה יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$. אזי T ה"ל אם"ם T שומרת על צירופים לינאריים, כלומר, אם"ם $\forall v_1,...,v_k\in V$ ו- $\forall\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$, $T(\alpha v_1+...+\alpha_k v_k)=\alpha_1 T(v_1)+...+\alpha_k T(v_k)$ (הדבר) (ובהארכה, הדבר הזה שתמיד עושים באלגברה לינארית).

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח ש- T ה"ל. נוכיח באינדוקציה שהדבר מתקיים :

$\underline{k=1}$: $T(\alpha_1 v_1)=\alpha_1 T(v_1)$ ברור כי T הומוגנית.

$\underline{k\to k+1}$: יהיו $v_1,...,v_k\in V$ ו- $\alpha_1,...,\alpha_k\in\mathbb{F}$. אזי בעזרת אדיטיביות והומוגניות,

$$T(\alpha v_1+...+\alpha_{k+1}v_{k+1})=T(\alpha v_1+...+\alpha_k v_k)+T(\alpha_{k+1}v_{k+1})\underset{\text{ה"א}}{=}\alpha_1 T(v_1)+...+\alpha_k T(v_k)+\alpha_{k+1}T(v_{k+1})$$

$\Rightarrow$: ברור. נבחר $k=2$, $\alpha_1,\alpha_2=1$ ונקבל ש- T אדיטיבית. נבחר $k=1$ ונקבל ש- T הומוגנית. ■

טענה תהי $T:V\xrightarrow{\text{ה"ל}}W$ אזי $T(0_V)=0_W$.

הוכחה: $T(0_V)=T(0_F\cdot 0_V)=0_F\cdot T(0_V)=0_F\cdot w=0_W$. ■

דוגמה נגדיר $T\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2x+1\\y\end{smallmatrix}\right)$, $\forall\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2$ אזי T לא לינארית, כי $T\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

XVIII

11 אשט"ל

טענה (אשט"ל בסיס) תהיינה $T,S:V\xrightarrow{\text{ה"ל}}W$.

(i) $T+S:V\to W$ העתקה לינארית, כאשר $(T+S)(v)=T(v)+S(v)$, $\forall v\in V$.

(ii) $\forall\alpha\in\mathbb{F}$, $\alpha\cdot T:V\to W$ העתקה לנארית, כאשר $(\alpha\cdot T)(x)=\alpha\cdot T(v)$.

הוכחה: (i) יהיו $v_1,v_2\in V$ ו- $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{F}$ אזי

$$(T+S)(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=T(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)+S(\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2)=\alpha_1 T(v_1)+\alpha_2 T(v_2)+\alpha_1 S(v_1)+\alpha_2 S(v_2)$$
$$=\alpha_1(T(v_1)+S(v_1))+\alpha_2(T(v_2)+S(v_2))=\alpha_1(T+S)(v_1)+\alpha_2(T+S)(v_2)$$

(ii) יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ אזי

$$(\alpha \cdot T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)) = \alpha(\alpha \cdot T)(v_1) + \alpha_2(\alpha \cdot T)(v_2)$$

■

הגדרה 11.1 יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נסמן $\underline{\hom}(V,W) = \left\{ T : V \to W \;\middle|\; \text{ה"ל } T \right\}$.

טענה $\hom(V,W)$ מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נראה שהוא ת"מ של V^W.

$(i)^{(*)}$ ראינו ש- $\hom(V,W)$ סגור לחיבור ולכפל בסקלר (אשט"ל).

$(ii)^{(*)}$ נשים לב ש- $T(v) = 0_W$, $\forall v$ היא לינארית ולכן $0_{V^W} \in \hom(V,W)$:

$$T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = 0_W = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)$$

■

טענה (אשט"ל הרכבה) יהיו V, W, U מ"ו מעל $\mathbb{F}$. תהיינה $T : V \to W$ ו- $S : W \to U$ העתקות לינאריות. אזי $S \circ T : V \to U$ העתקה לינארית.

הוכחה: יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$.

$$(S \circ T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = S(T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) = S(\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2))$$

$$= \alpha_1 S(T(v_1)) + \alpha_2 S(T(v_2)) = \alpha_1 (S \circ T)(v_1) + \alpha_2 (S \circ T)(v_2)$$

■

הגדרה 11.2 $T : V \to W$ תקרא <u>הפיכה</u> אם:

(i) T חח"ע, כלומר, $\forall v_1, v_2 \in V$, $T(v_1) = T(v_2) \iff v_1 = v_2$.

(ii) T על, כלומר $W = \left\{ T(v) \;\middle|\; v \in V \right\} = ImT$.

הערה אם $T : V \to W$ הפיכה, קיימת פונקציה הפוכה $T^{-1} : W \to V$ המוגדרת על ידי: $T^{-1}(w) = v \iff T(v) = w$, $\forall v \in V$ ו- $\forall w \in W$.

טענה (אשט"ל היפוך) יהי V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to W$ ה"ל. נניח ש- T הפיכה. אזי $T^{-1} : W \to V$ היא ה"ל.

הוכחה: יהיו $v_1, v_2 \in V$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ נסמן $v_1 = T^{-1}(w_1)$ ו- $v_2 = T^{-1}(w_2)$. אזי $T(v_1) = w_1$ ו- $T(v_2) = w_2$. נסמן גם $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$$

$$T^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) = v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 T^{-1}(w_1) + \alpha_2 T^{-1}(w_2)$$

■

טענה יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to W$ העתקה לינארית. אזי $ImT = \left\{ T(v) \;\middle|\; v \in V \right\} \subseteq W$ היא מ"ו.

הוכחה: נוכיח כי ImT ת"מ של W ונסיים.

$(i)^{(*)}$ יהיו $w_1, w_2 \in ImT$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. מהיות $w_1 \in ImT$, קיים $v_1 \in V$ כך ש- $w_1 = T(v_1)$. מהיות $w_2 \in ImT$, קיים $v_2 \in V$ כך ש- $w_2 = T(v_2)$. לכן

$$\alpha_2 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(v)$$

ולכן $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in ImT$.

$(ii)^{(*)}$ $0_W \in ImT$. כי $T(0_V) = 0_W$. ■

12 $\ker$ של ה"ל

הגדרה 12.1 יהיו V, W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to W$ ה"ל. נגדיר $\underline{\ker} T = \left\{ v \in V \;\middle|\; T(v) = 0_W \right\}$.

טענה $\ker T$ הוא מ"ו.

הוכחה: נוכיח ש- $\ker T$ ת"מ של V.

$(i)^{(*)}$ יהיו $v_1, v_2 \in \ker T$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2) = \alpha_1 \cdot 0_W + \alpha_2 \cdot 0_W = 0_W$.

$(ii)^{(*)}$ $0_V \in \ker T$: $T(0_V) = 0_W$ ולכן $0_V \in \ker T$. ■

דוגמה תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ אזי $\ker T_A = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; T_A(\vec{x}) = \vec{0} \right\} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; A \cdot \vec{x} = \vec{0} \right\}$ ולכן קבוצת הפתרונות למערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ מ"ו ($\ker T_A$).

תרגיל נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ ע"י $T(p)(x)=2\cdot p(x)+x\cdot p'(x)$.

א. הוכיחו כי T ה"ל.

ב. מצאו בסיס ל- ImT.

ג. מצאו בסיס ל- $\ker T$.

פתרון א. יהיו $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$ ו- $p_1,p_2\in\mathbb{R}_2[x]$. אזי

$$\begin{aligned}T(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)(x)&=2\cdot(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)(x)+x\cdot(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)'(x)\\&=2\cdot(\alpha_1p_1(x)+\alpha_2p_2(x))+x\cdot(\alpha_1\cdot p_1'(x)+\alpha_2\cdot p_2'(x))\\&=\alpha_1(2p_1(x)+xp_1'(x))+\alpha_2(2p_2(x)+xp_2'(x))\\&=\alpha_1T(p_1)(x)+\alpha_2T(p_2)(x)=(\alpha_1T(p_1)+\alpha_2T(p_2))(x)\end{aligned}$$

ולכן $T(\alpha_1p_1+\alpha_2p_2)=\alpha_1T(p_1)+\alpha_2T(p_2)$.

ב. $ImT\subseteq\mathbb{R}_2[x]$. $T(x)=2\cdot x+x\cdot 1=3x\in ImT$. $T(1)=2\cdot 1+x\cdot 0=2$. $T(x^2)=2x^2+x\cdot 2x=4x^2$ ולכן $2,3x,4x^2\in ImT$ ולכן $sp\left\{2,3x,4x^2\right\}\subseteq ImT$ אבל מהיות $2,3x,4x^2$ (כי כל פולינום הוא ממעלה הגדולה ממש מזו של קודמיו) ומכך ש- $\dim\mathbb{R}_2[x]=3$ אזי $\left\{2,3x,4x^2\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $\mathbb{R}_2[x]=sp\left\{2,3x,4x^2\right\}\subseteq ImT\subseteq\mathbb{R}_2[x]$ ולכן $ImT=\mathbb{R}_2[x]$ ולכן בסיס של ImT הוא למשל $\left\{1,x,x^2\right\}$.

ג. $\ker T\subseteq\mathbb{R}_2[x]$.

$$\begin{aligned}\ker T&=\left\{\ p\in\mathbb{R}_2[x]\ \middle|\ T(p)=0\ \right\}=\left\{\ p\in\mathbb{R}_2[x]\ \middle|\ 2\cdot p(x)+x\cdot p'(x)=0\ \right\}\\&=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ 2(a+bx+cx^2)+x(b+2cx)=0\ \right\}\\&=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ 2a+3bx+4cx^2=0\ \right\}\end{aligned}$$

$$=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ \begin{array}{l}2a=0\\3b=0\\4c=0\end{array}\right\}=\{0\}$$

ולכן $\ker T=\left\{0_{\mathbb{R}_2[x]}\right\}$ ולכן בסיס ל- $\ker T$ הוא $\varnothing$.

טענה יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי T חח"ע אם"ם $\ker T=\{0_V\}$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח ש- T חח"ע ונוכיח ש- $\ker T=\{0_V\}$. יהי $v\in\ker T$ ונוכיח כי $v=0_V$: $T(v)=0_W=T(0_V)$ ולכן $T(v)=T(0_V)$ ומהיות T חח"ע, $v=0_V$.

$\Rightarrow$: נניח כי $\ker T=\{0_V\}$ ונוכיח ש- T חח"ע: יהיו $v_1,v_2\in V$ כך ש- $T(v_1)=T(v_2)$ ונוכיח ש- $v_1=v_2$. נשים לב כי $T(v_1-v_2)=T(v_1)-T(v_2)=0_W$ ולכן $v_1-v_2\in\ker T=\{0_V\}$ ולכן $v_1-v_2=0_V$ ולכן $v_1=v_2$. ■

$\mathbb{XIX}$

משפט תהי $T:V\to W$ ה"ל ותהי $\{v_1,...,v_m\}$ קבוצה פורשת ב- V. אזי $\{T(v_1),...,T(v_m)\}$ פורשת את ImT.

הוכחה: יהי $w\in ImT$. מהיות $w\in ImT$, קיים $v\in V$ כך ש- $w=T(v)$. מהיות $v_1,...,v_m$ פורשים את V, קיימים $\alpha_1,...,\alpha_m\in\mathbb{F}$ שעבורם $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_mv_m$. לכן

$$T(v)=T(\alpha_1v_1+...+\alpha_mv_m)=\alpha_1T(v_1)+...+\alpha_mT(v_m)$$

■

13 משפט המימדים השני

משפט (משפט המימדים ה- II) יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ כך ש- V נ"ס. תהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי

$$\dim V=\dim\ker T+\dim ImT$$

הוכחה: ראשית, מהיות V נ"ס, אזי $\dim V<\infty$ ולכן קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $n=\dim V$. מהיות $\ker T\subseteq V$ ו- V נ"ס הרי שגם $\ker T$ נ"ס ונסמן $k=\dim\ker T$. יהי $\{v_1,...,v_k\}$ בסיס של $\ker T$ ונשלים אותו לבסיס $\{v_1,...,v_n\}$ של V (ראינו שכל קבוצה בת"ל מוכלת בבסיס). נוכיח כי $\dim ImT=n-k$ ונסיים. נביט בקבוצה

$$w_1=T(v_{k+1}),w_2=T(v_{k+2}),\ldots,w_{n-k}=T(v_n)$$

ראשית ברור כי $w_1,...,w_{n-k}$ שייכים ל- ImT. נוכיח שהם בסיס ונסיים.

<u>פורשים</u>: מהמשפט הקודם, $v_1,...,v_n$ פורשים את V כי הם בסיס ולכן

$$ImT=\text{sp}\left\{T(v_1),...,T(v_n)\right\}=\text{sp}\left\{0_W,...,0_W,w_1,...,w_{n-k}\right\}=\text{sp}\left\{w_1,...,w_{n-k}\right\}$$

<u>בת"ל</u>: נניח שעבור $\alpha_1,...,\alpha_{n-k}\in\mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1w_1+...+\alpha_{n-k}w_{n-k}=0_W$ ונוכיח כי $\begin{pmatrix}0_F\\ \vdots\\ 0_Fn\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_{n-k}\end{pmatrix}$. נרשום

$$0_W=\alpha_1w_1+...+\alpha_{n-k}w_{n-k}=\alpha_1T(v_{k+1})+...+\alpha_{n-k}T(v_n)=T(\alpha_1v_{k+1}+...+\alpha_{n-k}+v_n)$$

ולכן $\alpha_1 v_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} v_n \in \ker T$ ולכן קיימים $\beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$\alpha_1 v_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_k v_k$$

$$-\beta_1 v_1 - ... - \beta_k v_k + \alpha_1 v_{k+1} + ... + \alpha_{n-k} v_n = 0_V$$

ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל, כל המקדמים שווים ל- 0_F ובפרט $\alpha_1 = 0_F, ..., \alpha_{n-k} = 0_F$. ■

תרגילים

1. האם קיימת ט"ל חח"ע $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$? לא! נניח בשלילה שקיימת ה"ל כנ"ל אזי ממשפט המימדים ה- II

$$3 = \dim V = \dim \underbrace{\ker T}_{0} + \dim ImT$$

ולכן $\dim ImT = 3$ סתירה כי $ImT \subseteq \mathbb{R}^2$.

2. האם קיימת ה"ל חח"ע $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? כן! $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

3. האם קיימת ה"ל על $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$? לא! נניח בשלילה שקיימת ה"ל כנל. אזי ממשפט המימדים ה- II,

$$2 = \dim V = \dim \ker T + \dim \underbrace{ImT}_{3}$$

ולכן $\dim \ker T = -1$ סתירה!

4. האם קיימת ה"ל $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ שעבורה $\ker T = ImT$? לא! כמו קודם, $3 = \dim \ker T + \dim ImT = 2 \dim \ker T$ סתירה!

5. האם קיימת ה"ל $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שעבורה $\ker T = ImT$? כן! נביט ב- $T(x, y) = (y, 0)$, $\forall x, y$.

$$\ker T = \left\{ (x, y) \mid y = 0 \right\} = \left\{ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{sp}\left\{(1, 0)\right\}$$

ולבסוף T לינארית כי $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

6. יהיו U, V, W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $T : V \to W$ ו- $S : W \to U$ ה"ל. נניח כי $S \circ T = 0$. הוכיחו כי

$$\dim ImT + \dim ImS \leq \dim W$$

נשים לב כי $ImT \subseteq \ker S$. יהי $v \in ImT$, נשים לב כי $S(v) = 0$ ולכן $v \in \ker S$ אבל $v \in ImT$. לכן $\dim ImT \leq \dim \ker S$

ולכן

$$\dim ImT + \dim ImS \le \dim\ker S + \dim ImS = \dim W$$

ממשפט המימדים ה- II.

$\mathbb{XX}$

תרגילים

1. יהי V מ"ו כך ש- $\dim V = 9$ ויהיו $U, W, Z \subseteq V$ ת"מים ממימד 6. נניח שקיים $u \in V$ כך ש- $u \notin W + Z$ הוכיחו שקיימים לפחות שני וקטורים שונים ב- $U \cap W \cap Z$.

ראשית, מכך שקיים $u \in V$ כך ש- $u \notin W + Z$ אזי $V \supseteq W + Z \neq V$ ולכן $\dim W + Z < \dim V = 9$ ולכן $\dim(W+Z) \le 8$. ממשפט המימדים ה- I, $\dim(W+Z) = \underbrace{\dim W}_{6} + \underbrace{\dim Z}_{6} - \dim(W\cap Z) \ge 8$ ולכן $\dim(W \cap Z) \ge 4$. נוכיח כי $\dim(U\cap W\cap Z) \ge 1$ ומכך ינבע שקיימים לפחות 2 וקטורים שונים ב- $U \cap W \cap Z$. ממשפט המימדים

$$\dim((W\cap Z)+U) = \dim W\cap Z + \dim U - \dim W\cap Z\cap U \ge 4 + 6 - \dim W \cap Z \cap U$$

ולכן

$$\dim(W\cap Z\cap U) \ge 10 - \dim((W\cap Z)+U) \ge 10 - 9 = 1$$

2. יהי $U \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ת"מ המוגדר ע"י $U = \text{sp}\{2, x, 2^x\}$. נגדיר $T : U \to \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ע"י $T(f) = f(x+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

א. הוכיחו כי T ה"ל.

ב. הוכיחו כי $ImT \subseteq U$.

ג. מצאו את $\dim\ker T$ ואת $\dim ImT$.

א. יהיו $f, g \in U$ ו- $t, s \in \mathbb{R}$.

$$T(tf+sg) = (tf+sg)(x+2) = tf(x+2) + sg(x+2) = tT(f)(x) + sT(g)(x)$$

ב. יהי $f \in U$ אזי $f \in \text{sp}\{2, x, 2^x\}$ ולכן קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ כך ש- $f(x) = 2a + bx + c2^x$ ולכן

$$T(f)(x) = f(x+2) = 2a + b(x+2) = c2^{x+2} = 2(a+b) + bx + (4c)2^x \in U$$

ג. נניח כי $T(f)=0$. אזי $f(x+2)=0$, $\forall x$ ולכן $f(x)=0$, $\forall x$ ולכן $\ker T=\{0\}$ ולכן $\dim\ker T=0$ ולכן ממשפט המימדים ה- II, $\dim U=\dim\underset{0}{\ker} T+\dim ImT \overset{(*)}{=} 3$ ולכן $\dim ImT=3$.

$(*)$ נוכיח כי $2,x,2^x$ בת"ל. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $2a+bx+c2^x=0$, $\forall x$. נוכיח כי $a=b=c=0$. נגזור פעמיים ונקבל כי $\ln^2 2\cdot c\cdot 2^x=0$ לכן $c=0$. ועבור $x=0$, $2a=0$ ולכן $a=0$, ועבור $x=1$, $2b=0$ ולכן $b=0$.

3. יהי V מ"ו $v_1,...,v_5\in V$ כך ש- $v_1\neq 0_V$, $v_3\notin \text{sp}\{v_1,v_2\}$ וכך ש- v_1,v_2-v_3,v_4-v_5 ת"ל. הוכיחו כי

$$v_5\in \text{sp}\{v_1,...,v_4\}$$

מהיות $v_1\neq 0_V$, ו- v_1,v_2-v_3,v_4-v_5 ת"ל, קיים וקטור הת"ל בקודמיו. לכן $v_2-v_3\in\text{sp}\{v_1\}$ או

$$v_4-v_5\in\text{sp}\{v_1,v_2-v_3\}$$

נניח בשלילה כי $v_2-v_3\in\text{sp}\{v_1\}$ לכן קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_2-v_3=\alpha\cdot v_1$ לכן $v_3=v_2-\alpha v_1$ ולכן $v_3\notin\text{sp}\{v_1,v_2\}$ בסתירה לנתון. לכן $v_4-v_5\in\text{sp}\{v_1,v_2-v_3\}$ לכן קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ כך ש- $v_4-v_5=\alpha v_1+\beta(v_2-v_3)$ ולכן $v_5=-\alpha v_1-\beta v_2+\beta v_3+v_4$ ולכן $v_5\in sp\{v_1,...,v_4\}$.

$\mathbb{XXI}$

מסקנה יהי V מ"ו נ"ס. תהי $T:V\to V$ ה"ל. אזי T חח"ע אם"ם T על.

הוכחה: T חח"ע אם $\ker T=\{0_V\}$ אם"ם $\dim\ker T=0$, וזה אם"ם $\dim ImT=\dim V$ (ממשפט המימדים) וזה אם"ם $ImT=V$, כלומר אם"ם T היא על. ■

דוגמה $T:V\to V$ חח"ע ולא על, ושהיא ה"ל. נביט ב- $T:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x]$ המוגדרת על ידי $T(p)(x)=x\cdot p(x)$. נשים לב כי T ה"ל כי

$$T(\alpha p_1+\beta p_2)=x\cdot(\alpha p_2+\beta p_2)(x)=x(\alpha p_1(x)+\beta p_2(x))=\alpha xp_1(x)+\beta xp_2(x)=\alpha T(p_1)(x)+\beta T(p_2)(x)$$

נשים לב כי T חח"ע. נניח שעבור $p_1,p_2\in\mathbb{R}[x]$, $T(p_1)=T(p_2)$ לכן $xp_1=xp_2$, $\forall x$. ולכן $p_1(x)=p_2(x)$, $\forall x\neq 0$ ולכן $p_1(x)=p_2(x)$ גם עבור $x=0$ (כי פולינומים הם פונקציות רציפות). לכן $p_1=p_2$ ולכן T חח"ע. בנוסף נשים לב כי $1\notin ImT$ כי $\forall p\in\mathbb{R}[x]\neq 0$, $\deg T(p)=\deg(x\cdot p(x))\geq 1$ לכן T לא על.

הגדרה 13.1 תהי $T:V\to V$. נגדיר $T^1=T$ ו- $\forall n\in\mathbb{N}$ נגדיר $T^{n+1}=T\circ T^n$. אם T הפיכה, נגדיר $T^{-n}=(T^{-1})^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

מסקנה יהי V מ"ו נ"ס ותהי $T:V\to V$ ה"ל. אם $ImT^2=ImT$ אזי $\ker T^2=\ker T$.

הוכחה: ממשפט המימדים ה- II, $\dim V = \dim \ker T + \dim ImT$. $T^2 = T \circ T$ ה"ל (אשט"ל הרכבה) ולכן

$$\dim V = \dim \ker T^2 + \dim ImT^2$$

מהיות $ImT = ImT^2$, אזי $\dim ImT = \dim ImT^2$ ולכן $\dim \ker T = \dim \ker T^2$ ומהיות $\ker T \overset{(*)}{\subseteq} \ker T^2$ אזי $\ker T = \ker T^2$ (מימד של ת"מ).

$(*)$ אם $T(T(v)) = T(0_V) = 0_V \Leftarrow T(v) = 0_V \Leftarrow T(v) = 0_V \Leftarrow v \in \ker T$. ■

14 איזומופריזם

הגדרה 14.1 תהי $T : V \to W$. T תקרא איזומורפיזם אם:

(i) T ה"ל.

(ii) T חח"ע.

(iii) T על.

הערה נאמר כי V, W איזומורפים אם קיים $T : V \to W$ שהוא איזומורפים.

דוגמה $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{C}$ איזומורפים. נשים לב כי V, W הם מ"ו מעל $\mathbb{R}$. נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ ע"י $T(x, y) = x + yi$. נשים לב כי T ה"ל, חחע"ל ולכן T איזומורפיזם.

דוגמה נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ ע"י $T(a + bx + cx^2) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. נשים לב כי T ה"ל חחע"ל. לכן $\mathbb{R}^3$ ו- $\mathbb{R}_2[x]$ איזומורפים.

תרגיל האם $1 + x + x^2$, $1 - x + 3x^2$, $2 - 2x + x^2$ בת"ל.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 2R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

לכן הוקטורים בת"ל.

דוגמה $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$, $2v_1 = v_1 + v_3$, $2u_2 = u_1 + u_3$.

דוגמה $\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$, $v_3 = 3v_1 - v_2$, $u_3 \neq 3u_1 - u_2$ אבל $u_3 = u_1 + u_2$.

15 משפט חשוב כלשהו

משפט (משפט חשוב כלשהו I) יהיו V, W מ"ו כך ש- V נ"ס. ויהיו $v_1, ..., v_n \in V$ וקטורי בסיס של V. יהיו $w_1, ..., w_n \in W$. אזי קיימת ה"ל $T : V \to W$ יחידה שמקיימת $T(v_i) = w_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

הוכחה: ראשית, נוכיח כי קיימת T כזו. יהי $v \in V$ ונרצה להגדיר את $T(v)$. מהיות $v_1, ..., v_n \in V$ בסיס של V, אזי הם פורשים, ולכן קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ שעבורם $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. נגדיר $T(v) = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + ... + \alpha_n w_n$. עתה נוכיח כי

(i) $T : V \to W$.

(ii) T מוגדרת היטב.

(iii) T ה"ל.

(iv) $T(v_i) = w_i$, $\forall 1 \leq i \leq n$.

(**i**) $T(v)$ מוגדרת $\forall v \in V$ וברור כי $T(v) \in W$ (כי W סגור לקומבינציות לינאריות).

(**ii**) נשים לב כי $T(v)$ נקבע באופן יחיד ע"י v, כלומר, אם $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$, נחסר ונקבל $(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V$ ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל, $\alpha_i - \beta_i = 0_F$, $1 \leq \forall i \leq n$ ולכן

$$T(v) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n = \beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n$$

(**iii**) יהיו $u, v \in V$. קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n, \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $u = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $v = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$ לכן $u + v = (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n$ ולכן

$$T(u + v) = (\alpha_1 + \beta_1)w_1 + ... + (\alpha_n + \beta_n)v_n = (\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n) + (\beta_1 w_1 + ... + \beta_n w_n) = T(u) + T(v)$$

ולכן T אדיטיבית. עתה יהי $\beta \in \mathbb{F}$.

$$T(\beta u) = T(\beta(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n)) = T(\beta\alpha_1 w_1 + ... + \beta\alpha_n w_n) = \beta\alpha_1 w_1 + ... + \beta\alpha_n w_n = \beta(\alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n) = \beta T(u)$$

(**iv**) מתקיים $v_i = 0_F v_1 + ... + 1_F \cdot v_i + ... + 0_F \cdot v_n$ ולכן $T(v_i) = 0_F w_1 + ... + 1_F \cdot w_i + ... + 0_F \cdot w_n = w_i$. נניח שקיימות $T, S : V \to W$ ה"ל כך ש- $T(v_i) = w_i$ וגם $S(v_i) = w_i$. $1 \leq \forall i \leq n$ ונוכיח כי $S = T$, כלומר ש- $S(v) = T(v)$, $\forall v$. יהי $v \in V$. קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ לכן

$$\begin{aligned} T(v) &= T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 w_1 + ... + \alpha_n w_n \\ &= \alpha_1 S(v_1) + ... + \alpha_n S(v_n) = S(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = S(v) \end{aligned}$$

■

תרגילים

1. מצאו ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$$

אזי $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+y+2z\\2x+y+3z\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

2. מצאו ה"ל $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

אזי

$$\begin{aligned}T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}&=xT\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+yT\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=xT\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right]+yT\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right]\\&=x\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right]+y\left[\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]=x\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\x+y\\2x+y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

3. הוכיחו/הפריכו: קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש- $T\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}}_{v_1}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נכון! נשלים את v_1 לבסיס של $\mathbb{R}_3$, נסמנו v_1,v_2,v_3. ראינו שיש ה"ל יחידה כך ש- $T(v_1)=w_1$, $T(v_2)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ ו- $T(v_3)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

XXIII

תרגילים

1. האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$$

לא! נניח בשלילה. נשים לב כי $v_3=2v_2-v_1$ ולכן $T(v_3)=T(2v_2-v_1)=2T(v_2)-T(v_1)=2\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$ סתירה (כי ממשפט חשוב כלשהו קיימת T יחידה כך ש- $T(v_3)=\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}$.

2. האם קיימת ה"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=w_1,T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=w_2,T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\end{pmatrix}$$

כן! נשלים את v_1, v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^3$, ונסמנו $\{v_1, v_2, u\}$. לפי משפט חשוב כלשהו I, קיימת $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ה"ל יחידה המקיימת: $T(v_1) = w_1, T(v_2) = w_2, T(u) = \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי

$$T(v_3) = T(2v_2 - v_1) = 2T(v_2) - T(v_1) = 2\left(\begin{smallmatrix}4\\5\end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}7\\8\end{smallmatrix}\right)$$

ולכן T מקיימת את הדרוש.

3. תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ה"ל כך ש-

$$T\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = w_1, T\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = w_2, T\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} = w_3$$

אזי $w_3 = 2w_2 - w_1$

16 דרגה של מטריצה

הגדרה 16.1 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונסמן ב- $\vec{R}_1, ..., \vec{R}_m$ ו- $\vec{C}_1, ..., \vec{C}_n$ את וקטורי השורות ואת וקטורי העמודות של המטריצה A בהתאמה.

<u>דרגת השורות</u> של A מוגדרת להיות $r_1 = \dim \text{sp}\left\{\vec{R}_1, ...\vec{R}_m\right\}$.

<u>דרגת העמודות</u> של A מוגדרת להיות $r_2 = \dim \text{sp}\left\{\vec{C}_1, ..., \vec{C}_n\right\}$.

דוגמות

1. $A = \begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

$$r_1 = \dim sp\{(1,2,0),(1,0,0),(0,0,0)\} = \dim sp\{(1,2,0),(1,0,0)\} = 2$$

$$r_2 = \dim sp\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\right\} = 2$$

2. $A = \begin{pmatrix}1&3&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. $r_1 = 3$, $r_2 = 3$.

3. $A = \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

4. $A = \left(\begin{smallmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&1\end{smallmatrix}\right)$, $r_1 = 2$, $r_2 = 2$.

5. $A = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$, $r_1 = r_2 = 3$.

משפט תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. אזי $r_1 = r_2$.

הוכחה: נביט ב- $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ ההעתקה המוגדרת ע"י $T_A(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$. ראינו כי T_A ה"ל. נשים לב כי

$$T_A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = T_A(e_1) = Ae_1 = C_1, T_A(e_2) = A \cdot e_2 = \vec{c_2}, ..., T_A(e_n) = \vec{c_n}$$

ולכן $ImT_A = \text{sp}\{T_A(e_1), ..., T_A(e_n)\} = \text{sp}\{\vec{c_1}, ..., \vec{c_n}\}$ (ראינו ה"ל של קבוצה פורשת פורשת את התמונה) ולכן $\dim ImT_A = r_2$.
לכן ממשפט המימדים ה- II, $\dim\ker T_A = n - \dim ImT_A = n - r_2$. נוכיח כי $r_1 = n - \dim\ker T_A$ ונסיים. נשים לב כי r_1 לא משתנה תחת אף אחת מפעולות השורה האלמנטריות: כלומר, אם B התקבלה מ- A ע"י פעולת שורה אלמנטרית אזי דרגת השורות של B זהה לזו של A $(*)$. לכן $r_1 =$ דרגת השורות של הצורה הקנונית של A

$=$ מס' האיברים המובילים בצורה הקנונית של A

$=$ מספר המשתנים שמופיעים בעמודה שיש בה איבר מוביל.

ולכן $n - r_1 =$ מס' האיברים הלא מובילים בצורה הקנונית של A

$= \dim\left\{ \vec{x} \in \mathbb{F}^n \;\middle|\; A\vec{x} = \vec{0} \right\} = \dim\ker T_A$. $r_1 = n - \dim\ker T_A$. ■

הגדרה 16.2 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. <u>הדרגה</u> ($rank$) של A מוגדרת להיות דרגת השורות (או דרגת העמודות) של A, ומסומנות ב- $rankA$.

הערה מס' השורות שלא מתאפסות בצורה הקנונית של A=מס' האיברים המובילים בצורה הקנונית= $r_1 = rankA$.

מסקנה $rankA \leq \min\{n, m\}$.

מסקנה אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי: מס' שורות האפסים$- rankA = n$ ולכן: מס' שורות האפסים בצורה הקנונית= $\dim\ker T_A$.

דוגמה $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ 6x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $\ker T_A = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{8}{6}t - t \\ -\frac{2}{3}t \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\} = \text{sp}\left\{ \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ לכן $rankA = 2$.

משפט יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ ויהי $v_1, ..., v_n$ בסיס של V. יהי $v \in V$ אזי קיימים $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ יחידים שעבורם $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ $(*)$.

הוכחה: ראשית, מהיות $v_1, ..., v_n$ בסיס אזי $v_1, ..., v_n$ פורשים ולכן $v \in \text{sp}\{v_1, ..., v_n\}$ ולכן קימים $\alpha_1, ..., \alpha_n$ כך ש- $(*)$ מתקיימים.
עתה נניח שעבור $\beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$ לכן

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + ... + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V$$

ומהיות $v_1, ..., v_n$ בת"ל אזי $\begin{matrix}\alpha_1-\beta_1=0\\ \vdots\\ \alpha_n-\beta_n=0\end{matrix}$ ולכן $\begin{matrix}\alpha_1=\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n=\beta_n\end{matrix}$. ■

משפט יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$. אזי V איזומורפי ל- $\mathbb{F}^n$.

הוכחה: יהי $v_1, ..., v_n$ בסיס של V. נגדיר $T : V \to \mathbb{F}^n$ ע"י $T(v) = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$. ראינו מהמשפט הקודם ש- T מוגדרת היטב. נוכיח כי T חחע"ל וה"ל.

T <u>חחע"ל</u>: נביט בהעתקה $T^{-1} : \mathbb{F}^n \to V$ המוגדרת ע"י $T^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = x_1 v_1 + ... + x_n v_n$. ברור כי T^{-1} ההעתקה ההפוכה של T ולכן T הפיכה, כלומר חחע"ל.

T <u>ה"ל</u>: יהיו $u_1, u_2 \in V$, $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ונרשום $u_1 = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$, $u_2 = \beta_1 v_1 + ... + \beta_n v_n$ אזי

$$T(\alpha u_1 + \beta u_2) = T((\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1)v_1 + ... + (\alpha\alpha_n + \beta\beta_n)v_n) = \begin{pmatrix}\alpha\alpha_1+\beta\beta_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n+\beta\beta_n\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix} = \alpha T(u_1) + \beta T(u_2)$$

■

17 המטריצה המייצגת

הגדרה 17.1 יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. בסיס סדור הוא n-יה של וקטורים $(v_1, v_2, ..., v_n)$ כך ש- $v_1, ..., v_n \in V$ בסיס של V.

הגדרה 17.2 יהי $A = (v_1, ..., v_n)$ בסיס סדור של מ"ו V. יהי $v \in V$. <u>וקטור הקווארינטות</u> של v ביחס ל- A מסומן ב- $[v]_A$ ומוגדר ע"י $[v]_A = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$, כאשר $v = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$.

הערה $[v]_A$ מוגדר היטב כי $\alpha_1, ..., \alpha_n$ קיימים ויחידים וכי הסדר נקבע (הבסיס הסדור).

דוגמות

1. $V = \mathbb{R}^3$, $A = (e_1, e_2, e_3)$. יהי $v = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$. מהו $[v]_A$? $\underline{1}e_1 + \underline{2}e_2 + \underline{3}e_3 = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$ ולכן $[v]_A = \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$.
2. $V = \mathbb{R}^3$. $A = \left(\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}\right)$. ויהי $v = \begin{pmatrix}2\\ 0\\ 3\end{pmatrix}$. מהו $[v]_A$? $\underline{3}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix} + \underline{-6}\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \underline{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = v$.
3. נביט בבסיס הסדור של $\mathbb{R}_2[x]$ הנתון ע"י $A = (1 + x, 1 + x^2, 1 - x^2)$. יהי $p(x) = 1 - x + 2x^2$. מהו $[p]_A$? $p(x) = \underline{0}(1 - x^2) + \underline{2}(1 + x^2) + \underline{-1}(1 + x)$ לכן $[p]_A = \begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 0\end{pmatrix}$.

XXIII

הגדרה 17.3 יהיו V, W מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. יהיו A, B בסיסים סדורים של V, W בהתאמה ותהי $T : V \to W$ ה"ל. המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיסים A, B מסומנת ב- $[T]_B^A$ ומוגדרת להיות המטריצה מסדר $m \times n$ כאשר $\dim V = n$,

$\dim W = m$. כך שהעמודה ה- j-ית שלה מוגדרת להיות $[T(v_j)]_B$, וכאשר $A = (v_1, ..., v_n)$ ו- $B = (w_1, ..., w_m)$, כלומר $[T]_B^A =$
$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$.

דוגמות

1. נביט ב- $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י: $T(p) = p'$. נבחר $A = (1, x, x^2, x^3), B = (1, x, x^2)$. $[T]_B^A = \begin{pmatrix} 0&1&0&0 \\ 0&0&2&0 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}$.
$T(1) = 0, T(x) = 1, T(x^2) = 2x, T(x^3) = 3x^2$.

2. נביט ב- $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ המוגדרת ע"י: $T(p) = p'$. נבחר $A = (1, 1+x, x+x^2, x^2+x^3), B = (1, 1+x, 1+x^2)$.
$[T]_B^A = \begin{pmatrix} 0&1&-1&-5 \\ 0&0&2&2 \\ 0&0&0&3 \end{pmatrix}$.

$$T(1) = 0, T(1+x) = 1, T(x+x^2) = 1+2x = -1 \cdot 1 + 2(1+x) + 0(1+x^2), T(x^2+x^3) = 2x+3x^2$$

3. תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הה"ל המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$. נסמן ב- $E = (e_1, e_2)$. מהי $[T]_E^E$?

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$[T]_E^E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

4. נביט ב- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&-1 \\ 1&2 \\ 0&-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. מהי $[T]_{E_3}^{E_2}$ כאשר $E_3 = (e_1, e_2, e_3)$, $E_2 = (e_1, e_2)$. $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. לכן $[T]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 2&-1 \\ 1&2 \\ 0&-1 \end{pmatrix}$.

הערה אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $[T_A]_{E_m}^{E_n} = A$.

תרגיל תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ העתקה $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y \\ x+2y \\ y \end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי T ה"ל.

ב. מצאו את $[T]_{E_3}^{E_2}$.

ג. יהיו $B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$, מצאו את $[T]_B^A$ ואת $[T]_B^{E_2}$.

פתרון א. $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2&-1 \\ 1&2 \\ 0&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ולכן T ה"ל.

ב. $[T]_{E_3}^{E_2} = \begin{pmatrix} 2&-1 \\ 1&2 \\ 0&1 \end{pmatrix}$.

ג.

$$T\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},T\left(\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\7\\3\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+-8\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

ולכן $[T]_B^A=\begin{pmatrix}3&7\\-2&-8\\0&\frac{4}{3}\end{pmatrix}$.

$$T\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix},T\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{2}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}$$

ולכן $[T]_B^{E_2}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-3\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\end{pmatrix}$.

תרגיל נביט ב- $k_1=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ ו- $k_2=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$.

א. מצאו $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ כך ש- $[T]_{E_3}^{E_3}=k_1$.

ב. האם קיימת $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ובסיסים סדורים A,B של $\mathbb{R}^3$ כך ש- $k_1=[T]_A^A$ ו- $k_2=[T]_B^B$.

פתרון א. $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+z\\z\\0\end{pmatrix}$.

ב. נסמן $A=(v_1,v_2,v_3)$, $B=(w_1,w_2,w_3)$. נרצה כי

$$T(v_1)=0\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3,\quad T(v_2)=1\cdot v_1+0\cdot v_2+0\cdot v_3,\quad T(v_3)=1\cdot v_1+1\cdot v_2$$

$$T(w_1)=w_2,\quad T(w_2)=w_2+w_3,\quad T(w_3)=w_1+w_2+w_3$$

נשים לב כי $w_2,w_2+w_3,w_1+w_2+w_3$ הם בת"ל: נניח שעבור $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\alpha_1(w_2)+\alpha_2(w_2+w_3)+\alpha_3(w_1+w_2+w_3)=\vec{0}$$

לכן

$$\alpha_3w_1+(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)w_2+(\alpha_2+\alpha_3)w_3=0$$

ומהיות w_1,w_2,w_3 בת"ל, אזי $\alpha_3=0$ ולכן $\alpha_2=0$ ולכן $\alpha_1=0$. לכן $T(w_1),T(w_2),T(w_3)$ בסיס של $\mathbb{R}^3$ ולכן ImT מכילה בסיס ולכן T על ולכן T חח"ע אבל $v_1\in\ker T$ סתירה.

18 העתקות לינאריות ומטריצות הן בעצם מאוד דומות

משפט יהיו V,W מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהיו $A=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס של V. תהי $T:V\to W$ ה"ל. אזי T הפיכה אם"ם $\{T(v_1),...,T(v_n)\}$ בסיס של W.

הוכחה: $\Leftarrow$: ראשית, נניח כי T הפיכה. אזי T חחע"ל. $\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ ולכן $W = ImT = \text{sp}\{T(v_1), ..., T(v_n)\}$ פורשת את W.
נוכיח כי $T(v_1), ..., T(v_n)$ בת"ל. יהיו $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ כך ש-

$$T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = 0_W$$

לכן $\alpha_n v_1 + ... + \alpha_n v_n \in \ker T = \{0_V\}$ ולכן $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = 0_V$ ולכן $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0_F$ כי בת"ל מהיות בסיס. ולכן הם בסיס.

$\Rightarrow$: עתה נניח כי $T(v_1), ..., T(v_n)$ בסיס של W, ונוכיח כי T הפיכה. $ImT = \text{sp}\{T(v_1), ..., T(v_n)\} = W$ לכן T על, ולכן ממשפט המימדים, $\dim \ker T + \dim \underset{n}{ImT} = \dim V = n$ ולכן $\dim \ker T = 0$ ולכן $\ker T = \{0_V\}$ ולכן T חח"ע ולכן T הפיכה. ■

הגדרה 18.1 יהיו V, W מ"ו נוצרים סופית מעל $\mathbb{F}$ ויהיו A, B בסיסים סדורים של V, W בהתאמה. נגדיר

$$\psi : \hom(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$$

ע"י $\psi(T) = [T]_B^A$.

משפט נניח שעבור $T \in \hom(V, W)$ מתקיים $\psi(T) = 0_{m\times n}$. אזי $T = 0_{\hom(V,W)}$.

הוכחה: נוכיח ש- $T(v) = 0_W$, $\forall v \in V$. נסמן $A = (v_1, ..., v_n), B = (w_1, ..., w_m)$.

$$T(v) = (\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 \cdot 0_W + ... + \alpha_n \cdot 0_W = 0_W$$

$0_{m\times n} = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [T(v_1)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = [T]_B^A = \psi(T)$ ולכן $T = 0_{\hom(V,W)}$. ■

משפט נניח ש- $V = W$ ותהי $T \in \hom(V, V)$. נניח כי $[T]_A^A = I_n$. אזי $T(v) = v$, $\forall v \in V$.

הוכחה: יהי $v \in V$.

$$T(v) = T(\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T(v_1) + ... + \alpha_n T(v_n) = \alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n = v$$

■

כאן נגמר החומר שנלמד בסמסטר ב' תש"ף

חלק II

80564

XXIX

משפט ψ חח"ע, כלומר אם עבור $T,S:V\to W$ מתקיים $[T]_B^A=[S]_B^A$, אזי $S=T$.

הוכחה: מהיות $[T]_B^A=[S]_B^A$ אזי כל העמודות במטריצות הן שוות, ולכן $\forall v_i\in A$ מתקיים $[T(v_i)]_B=[S(v_i)]_B$ ולכן $T(v_i)=S(v_i)$ ולכן S,T שוות על כל הוקטורים בבסיס A ולכן $S=T$ (משפט חשוב כלשהו 1). ■

תרגיל יהיו $U=\left\{\ p\in(\mathbb{Z}_7)_2[x]\ \middle|\ p(1)=p(2)\ \right\}$, $W=\left\{\ \vec{x}\in\mathbb{Z}_7^3\ \middle|\ x_1-x_2+x_3=0\ \right\}$ ונגדיר $T:U\to W$ ע"י $T(p)=\begin{pmatrix} p(1)\\ 2p(2)\\ p(1)\end{pmatrix}$.

א. הוכיחו כי U,W הם מ"ו מעל $\mathbb{Z}_7$.

ב. מצאו בסיסים סדורים A,B ל- U,W בהתאמה.

ג. הוכיחו כי T היא ה"ל וחשבו את $[T]_B^A$.

פתרון א.

$$\begin{aligned}U&=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ a+b+c=a+2b+4c\ \right\}=\left\{\ a+bx+cx^2\ \middle|\ b=-3c\ \right\}\\&=\left\{\ a+-3cx+cx^2\ \middle|\ a,c\in\mathbb{Z}_7\ \right\}=\left\{\ a\cdot 1+c\cdot(x^2-3x)\ \middle|\ a,c\in\mathbb{Z}_7\ \right\}\\&=\operatorname{sp}\left\{\underset{v_1}{1},\underset{v_2}{x^2-3x}\right\}\end{aligned}$$

לכן U ת"מ של $(\mathbb{Z}_7)_2[x]$ (ממימד 2). באותו האופן

$$W=\left\{\ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \middle|\ \substack{x_1-x_2+x_3=0\\ x_{1-3}\in\mathbb{Z}_7}\ \right\}=\left\{\ \begin{pmatrix}x_2-x_3\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\ \middle|\ x_2,x_3\in\mathbb{Z}_7\ \right\}=\operatorname{sp}\left\{\underset{w_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}},\underset{w_1}{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}}\right\}$$

ולכן W ת"מ של $\mathbb{Z}_7^3$ (ממימד 2).

ב. ברור כי $\{v_1,v_2\}$, $\{w_1,w_2\}$ בת"ל ולכן $A=(v_1,v_2),B=(w_1,w_2)$

ג. ראשית ברור כי $T:U\to W$ מוגדרת היטב.

$$p(1)-2p(2)+p(1)=2(p(1)-p(2))\overset{p\in U}{=}0$$

ולכן $T(p)\in W$, $\forall p\in U$. עתה נוכיח כי T ה"ל. יהיו $p,q\in U$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}_7$.

$$T(\alpha p+\beta q)=\begin{pmatrix}(\alpha p+\beta q)(1)\\ 2(\alpha p+\beta q)(2)\\ (\alpha p+\beta q)(1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha p(1)+\beta q(1)\\ 2\alpha p(2)+2\beta q(2)\\ \alpha p(1)+\beta q(1)\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}p(1)\\ 2p(2)\\ p(1)\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}q(1)\\ 2q(2)\\ q(1)\end{pmatrix}=\alpha T(p)+\beta T(q)$$

עתה נחשב את $[T]_B^A$.

$$T(v_1)=T(1)=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\underline{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\underline{1}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\quad T(v_2)=T(x^2-3x)=\begin{pmatrix}-2\\-4\\-2\end{pmatrix}=\underline{-4}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\underline{-2}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

ולכן

$$[T]_B^A=\begin{pmatrix}\vdots & \vdots\\ [T(v_1)]_B & [T(v_2)]_B\\ \vdots & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$$

משפט ψ על, כלומר $\forall K\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ קיימת ה"ל $T:V\to W$ שעבורה $[T]_B^A=K$.

הוכחה: ברור ממשפט חשוב כלשהו 1 (קיימת ה"ל $T:V\to W$ שעבורה $T(v_i)=w_i$ כאשר w_i נקבע ע"י $[w_i]_B$ = העמודה ה-i-ית במטריצה K). ■

משפט ψ לינארית, כלומר $\forall T,S\in\hom(V,W)$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים $\psi(\alpha T+\beta S)=\alpha\psi(T)+\beta\psi(S)$.

הוכחה: יהיו $T,S\in\hom(V,W)$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ונוכיח כי $[\alpha T+\beta S]_B^A=[\alpha T]_B^A+[\beta S]_B^A$. יהי $v_j\in A$.

נסמן $[S(v_j)]_B=\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}$, $[T(v_j)]_B=\begin{pmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}$ לכן

$$\begin{aligned}(\alpha T+\beta S)(v_j)&=\alpha T(v_j)+\beta S(v_j)=\alpha(a_{1j}w_1+a_{2j}w_2+\cdots+a_{mj}w_m)+\beta(b_{1j}w_1+\cdots+b_{mj}w_m)\\ &=(\alpha a_{1j}+\beta b_{1j})w_1+\cdots+(\alpha a_{mj}+\beta b_{mj})w_m\end{aligned}$$

$$[(\alpha T+\beta S)(v_j)]_B=\begin{pmatrix}\alpha a_{1j}+\beta b_{1j}\\ \vdots\\ \alpha a_{1j}+\beta b_{1j}\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}a_{1j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}b_{1j}\\ \vdots\\ b_{mj}\end{pmatrix}=\alpha\,[T(v_j)]_B+\beta\,[S(v_j)]_B$$

■

טענה יהי $A=(v_1,\dots,v_n)$ ב"ס של V ויהי $u,v\in V$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$. אזי $[\alpha u+\beta v]_A=\alpha\,[u]_A+\beta\,[v]_A$.

הוכחה: נסמן $[v]_A=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$, $[u]_A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ לכן $u=\alpha_1u_1+\cdots+\alpha_nu_n, v=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$ ולכן

$$\alpha u+\beta v=(\alpha\alpha_1+\beta\beta_1)v_1+\cdots+(\alpha\alpha_n+\beta\beta_n)v_n$$

ולכן

$$[\alpha u+\beta v]_A=\begin{pmatrix}\alpha\alpha_1+\beta\beta_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n+\beta\beta_n\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\alpha\,[u]_A+\beta\,[v]_A$$

■

משפט תהי $T:V\to W$ ה"ל ויהיו A,B בסיסים סדורים של V,W בהתאמה ויהי $v\in V$. אזי $[T(v)]_B=[T]_B^A\cdot[v]_A$.

הוכחה: נסמן $A=(v_1,\dots v_n)$. נשים לב כי $i=e_i$ $\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1_F\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ $=[v_i]_A$ ולכן

$$[T]_B^A\cdot[v_i]_A=[T]_B^A\cdot e_i=\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [T(v_1)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1_F\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}i=[T(v_i)]_B$$

עתה נרשום $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ $=[v]_A$ ולכן $v=\alpha_1v_1+\dots\alpha_nv_n$ וגם $[v]_A=\alpha_1e_1+\dots\alpha_ne_n$ ולכן

$$\begin{aligned}[T]_B^A\cdot[v]_A&=[T]_B^A\cdot(\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_ne_n)=\alpha_1\,[T]_B^A\,e_1+\cdots+\alpha_n\,[T]_B^A\,e_n=\alpha_1\,[T(v_1)]_B+\cdots+\alpha_n\,[T(v_n)]_B\\ &\overset{(*)}{=}[\alpha_1T(v_1)+\cdots+\alpha_nT(v_n)]_B=[T(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n)]_B=[T(v)]_B\end{aligned}$$

■

משפט יהיו V,W,U מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהיינה $T:V\to W$ ו- $S:W\to U$ ה"ל. יהיו A,B,C בסיסים סדורים של V,W,U בהתאמה אזי $[S\circ T]_C^A=[S]_C^B\,[T]_B^A$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}[S]_C^B\,[T]_B^A&=[S]_C^B\cdot\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [T(v_1)]_B & \cdots & [T(v_n)]_B\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}\overset{(*)}{=}\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [S]_C^B\cdot[T(v_1)]_B & \cdots & [S]_C^B\cdot[T(v_n)]_B\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [S(T(v_1))]_C & \cdots & [S(T(v_n))]_C\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ [(S\circ T)(v_1))]_C & \cdots & [(S\circ T)(v_n))]_C\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}=[S\circ T]_C^A\end{aligned}$$

$(*)$ בהינתן שתי מטריצות A,B הניתנות להפכלה, $\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ A\vec{b}_1 & \cdots & A\vec{b}_n\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\vdots & & \vdots\\ \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_n\\ \vdots & & \vdots\end{pmatrix}\cdot A\cdot B=A$. ■

XXX

הערה תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונביט בהעתקה $T_A : \mathbb{F}_n \to \mathbb{F}_m$ ע"י $T_A(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $\forall \vec{x}\in\mathbb{F}^n$. יהי $E=(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ הבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbb{F}^n$. אזי $[T_A]_{E_m}^{E_n} = A$, (העמודה ה- n) $T_A(e_n) = A\cdot e_n =$.

דוגמה תהי $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ הה"ל הנתונה ע"י $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x \\ x+y \\ y \end{smallmatrix}\right)$. מצאו את $[T]_{E3}^{E_2}$, $[T]_A^{E_2}$ ואת $[T]_{E_3}^B$ כאשר A, B הבסיסים הסדורים

$$A = \left(\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{w_1}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)}_{w_2}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{w_3}\right), B = \left(\underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)}_{v_1}, \underbrace{\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)}_{v_2}\right).$$

פתרון $[T]_{E3}^{E_2} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[T]_{E_3}^B = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $[T]_A^{E_2} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

מסקנה בהינתן שבחרנו בסיסים סדורים ל- V, W, ניתן לתאר כל $T : V \to W$ ה"ל ע"י מטריצה.

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי התנאים הבאים שקולים:

(i) קיים פתרון יחיד למערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ והוא $\vec{x} = \vec{0}$.

(ii) $\forall \vec{b} \in \mathbb{F}^m$, קיים פתרון יחיד למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$.

(iii) A הפיכה.

(הוכחנו זאת בעבר)

הוכחה: (אלטרנטיבית) נביט בהעתקה $T_A : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ המוגדרת ע"י $T_A(\vec{x}) = A\cdot\vec{x}$, $\forall\vec{x}\in\mathbb{F}^n$. ראינו כבר כי $A = [T_A]_{E_n}^{E_n}$ לכן $A\vec{x} = \vec{0}$ אם"ם

$$[T(\vec{x})]_{E_n} = [T]_{E_n}^{E_n}[x]_{E_n} = A\vec{x} = [A\vec{x}]_{E_n} = \left[\vec{0}\right]_{E_n} = \vec{0}$$

אם"ם $T_A(\vec{x}) = \vec{0}$ ולכן קיים פתרון יחיד למערכת $A\vec{x} = \vec{0}$ אם"ם $\ker T_A = \left\{\vec{0}\right\}$ אם"ם T_A חח"ע אם"ם T_A על, כלומר אם"ם $\forall\vec{b}$ קיים $\vec{x}\in\mathbb{F}^n$ שעבורו $A\vec{x} = T_A(\vec{x}) = \vec{b}$ אם"ם T הפיכה אם"ם קיימת $T^{-1} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ כך ש- $T_A \circ T_A^{-1} = T_A^{-1}\circ T_A = id$ אם"ם

$$\underbrace{[T_A]_{E_n}^{E_n}}_{A} \cdot \underbrace{\left[T_A^{-1}\right]_{E_n}^{E_n}}_{B} = \left[T_A \circ T_A^{-1}\right]_{E_n}^{E_n} = [id]_{E_n}^{E_n} = I_n$$

ובאותו האופן $\left[T_A^{-1}\right]_{E_n}^{E_n} \cdot [T_A]_{E_n}^{E_n} = I_n$ לכן $A\cdot B = B\cdot A = I_n$ אם"ם A הפיכה ו- $A^{-1} = \left[T_A^{-1}\right]_{E_n}^{E_n}$. ■

מסקנה תהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $A\cdot B = I_n$, אזי $B\cdot A = I_n$.

הוכחה: אם $A\cdot B = I_n$ אז $A\cdot B$ הפיכה ולכן B חח"ע (כי אחרת $A\cdot B$ לא חח"ע) ולכן B על ולכן B הפיכה. לכן $A = A\cdot B\cdot B^{-1} = B^{-1}$ ולכן $B\cdot A = B\cdot B^{-1} = I_n$. ■

תרגיל נגדיר $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ ע"י $T(p) = \left(\begin{smallmatrix} p(0) \\ p'(0) \\ p(1) \end{smallmatrix}\right)$. יהיו $B = \left(1, x, x^2\right)$ ו- $C = (e_1, e_2, e_3)$ בסיסים סדורים של $\mathbb{R}_2[x]$ ו- $\mathbb{R}^3$ בהתאמה.

א. חשבו את $[T]_C^B$.

ב. קבעו האם T חח"ע והאם T על.

פתרון א. $T(1)=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, T(x)=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, T(x^2)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ולכן $K=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}=[T]_C^B$.

ב. נשים לב כי K הפיכה כי שורות K בת"ל ולכן T הפיכה ולכן חח"ע ועל.

תרגיל יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$ ויהי $A=(v_1,v_2,v_3)$ בסיס סדור של V.

א. הוכיחו כי $C=(v_2-v_3, v_1+v_3, 2v_1+v_2)$ בסיס סדור של V.

ב. מצאו את $[v_1]_C, [v_2]_C, [v_3]_C$

פתרון א. מספיק להוכיח כי C בת"ל. נניח שעבור $\alpha_{1-3}\in\mathbb{R}$,

$$\alpha_1(v_2-v_3)+\alpha_2(v_1+v_3)+\alpha_3(2v_1+v_2)=0_V$$

לכן

$$(\alpha_2+2\alpha_3)v_1+(\alpha_1+\alpha_3)v_2+(\alpha_2-\alpha_1)v_3=0_V$$

ולכן מהיות A בת"ל הרי ש- $\alpha_2+2\alpha_3=0$, $\alpha_1+\alpha_3=0$, $\alpha_2-\alpha_1=0$ ולכן $\alpha_1=\alpha_2$ ובנוסף $\alpha_2+2\alpha_3=0=\alpha_2+\alpha_3$ ולכן $\alpha_3=0$ ולכן גם $\alpha_1=\alpha_2=0$ ולכן C בת"ל.

ב. $[v_1]_C=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ כי

$$v_1=\underline{-1}(v_2-v_3)+\underline{-1}(v_1+v_3)+\underline{1}(2v_1+v_2)$$

$$v_2=\underline{a}(v_2-v_3)+\underline{b}(v_1+v_3)+\underline{c}(2v_1+v_2)$$

$\begin{cases}b+2c=0\\a+c=1\\-a+b=0\end{cases}$ ולכן $a=b$, $b+c=1$ ולכן $a=b=2$, $c=-1$. על כן $[v_2]_C=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$.

$$v_3=\underline{1}(v_2-v_3)+\underline{2}(v_1+v_3)+\underline{-1}(2v_1+v_2)$$

ו- $[v_3]_C=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$.

תרגיל תהי $T:\mathbb{F}^2\to\mathbb{F}^2$ ה"ל ונניח שקיימים שני בסיסים סדורים של $\mathbb{F}^2$, B,C שעבורם $[T]_B^C=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$. נניח בנוסף ש- $T\circ T=0$.
הוכיחו שקיים $b\neq 0_F$ ב- $\mathbb{F}$ שעבורו $[T]_B^B=\begin{pmatrix}0&b\\0&0\end{pmatrix}$.

הוכחה: נסמן $[T]_B^B=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ נשים לב שמתקיים

$$0_{2\times 2}=[0]_B^C=[T\circ T]_B^C=[T]_B^B\cdot[T]_B^C=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

לכן $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ לכן $a = c = 0$. בנוסף $[0]_B^B = [T \circ T]_B^B = [T]_B^B \cdot [T]_B^B$ לכן

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & bd \\ 0 & d^2 \end{smallmatrix}\right)$$

לכן $d^2 = 0$ ולכן $d = 0$ ולכן $[T]_B^B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. אם בשלילה $b = 0$ אזי $T = 0$ ולכן $[T]_B^C = 0$ סתירה. ■

תרגיל נביט במ"ו $V = \mathrm{sp}\left\{\cos x, \sin x, x\cos x, x\sin x\right\}$. נסמן $e_1(x) = \cos x, e_2(x) = \sin x$ וכיוצ"ב. נגדיר העתקות $A, D : V \to V$ ע"י $D(f) = f'$, $A = f'' + f' + f$.

א. מצאו את $[D]_E^E$ ו- $[A]_E^E$ כאשר $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ (אין צורך להוכיח כי E בסיס של V ולא ש- A, D מוגדרות היטב).

ב. מצאו את $\left([A]_E^E\right)^{-1}$.

ג. יהי $y(x) = \cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x$. מצאו $f \in V$ שעבורה $f'' + f' + f = y$.

פתרון א.

$$D(e_1) = -\sin x = -e_2 \quad D(e_2) = \cos x = e_1, \quad D(e_3) = \cos x - x\sin x = e_1 - e_4, \quad D(e_4) = \sin x + x\cos x = e_2 + e_3,$$

לכן $[D]_E^E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ נשים לב כי $A = D^2 + D + id$.

$$[A]_E^E = \left([D]_E^E\right)^2 + [D]_E^E + [id]_E^E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ב. לפי אלגוריתם ההיפוך

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{R_4 \to -R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_1 \to -R_1]{R_1 \leftrightarrow R_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_1 \to R_1 + R_4]{R_2 \to R_2 - 2R_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - R_3]{R_1 \to R_1 - 2R_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ולכן $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left([A]_E^E\right)^{-1}$.

ג. יהי $y(x) = \cos x + \sin x + x\cos x + x\sin x$. נמצא $f \in V$ שעבורו $A \cdot f = f'' + f' + f = y$. הפתרון הוא $f = A^{-1} \cdot y$ לכן $[f]_E = \left[A^{-1}(y)\right]_E = \left[A^{-1}\right]_E^E \cdot [y]_E$. $[y]_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left[A^{-1}\right]_E^E \cdot [A]_E^E = \left[A^{-1} \cdot A\right]_E^E = [id]_E^E = I_n$$

ולכן $\left([A]_E^E\right)^{-1} = \left[A^{-1}\right]_E^E$ מיחידות ההופכי. לכן $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = [f]_E$ ולכן $f = 2\cos x - x\cos x + x\sin x$.

XXXI

הגדרה 19.1 תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. המטריצה המשוחלפת של A מסומנת ב- A^t ומוגדרת להיות מטריצה מסדר $n \times m$ שרכיביה הם $[A^t]_{ij} = [A]_{ji}$.

דוגמה $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{smallmatrix}\right)$.

דוגמה $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)^t = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.

הגדרה 19.2 מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת סימטרית אם $A^t = A$ ואנטי-סימטרית אם $A^t = -A$.

משפט (תכונות ה-$transpose$)

(i) $\forall A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $\left(A^t\right)^t = A$.

(ii) I_n סימטרית.

(iii) $\forall A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $(A+B)^t = A^t + B^t$.

(iv) $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$ ו- $\forall \alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha \cdot A)^t = \alpha A^t$.

הוכחה: (i) תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. נשים לב כי $\left(A^t\right)^t \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו- $\forall ij$, $\left[\left(A^t\right)^t\right]_{ij} = \left[A^t\right]_{ji} = [A]_{ij}$.

(ii) $[I_n]_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} = [I_n]_{ji} = [I_n^t]_{ij}$.

(iii) תהיינה $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

$$\left[(A+B)^t\right]_{ij} = [A+B]_{ji} = [A]_{ji} + [B]_{ji} = \left[A^t\right]_{ij} + \left[B^t\right]_{ij}$$

(iv) יהיו $\alpha \in \mathbb{F}$, $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

$$\left[(\alpha A)^t\right]_{ij} = [\alpha A]_{ji} = \alpha\,[A]_{ji} = \alpha\left[A^t\right]_{ij} = \left[\alpha A^t\right]_{ij}$$

■

משפט תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$, $B \in M_{n\times r}(\mathbb{F})$ אזי $(A\cdot B)^t = B^t \cdot A^t$.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $A \cdot B$ מוגדרת והיא מסדר $m \times r$ ולכן $(A\cdot B)^t$ מוגדרת והיא מסדר $r \times m$. יהיו $1 \le i \le r$, $1 \le j \le m$.

$$\left[(A\cdot B)^t\right]_{ij} = [A\cdot B]_{ji} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{jk}\,[B]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} \left[B^t\right]_{ik}\left[A^t\right]_{kj} = \left[B^t \cdot A^t\right]_{ij}$$

■

משפט תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי A הפיכה אס"ם A^t הפיכה ו- $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

הוכחה $\Leftarrow$: נניח כי A הפיכה. $\left(A^{-1}\right)^t \cdot A^t = \left(A \cdot A^{-1}\right)^t = I_n^t = I_n$ לכן A^t הפיכה ו- $\left(A^{-1}\right)^t = \left(A^t\right)^{-1}$.

$\Rightarrow$: נניח כי A^t הפיכה לכן $A = \left(A^t\right)^t$ הפיכה.

טענה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי

(i) $A + A^t$ סימטרית.

(ii) $A - A^t$ אנטי-סימטרית.

הוכחה: (i) $\left(A + A^t\right)^t = A^t + \left(A^t\right)^t = A^t + A$.

(ii) $\left(A - A^t\right)^t = A^t + \left(-A^t\right)^t = A^t + \left((-1) \cdot A^t\right)^t = A^t - A = -(A - A^t)$.

■

מסקנה כל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ ניתנת לכתיבה כסכום של מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית ($A = \overset{\text{סימטרית}}{\frac{A+A^t}{2}} + \overset{\text{אנטי-סימטרית}}{\frac{A-A^t}{2}}$).

דוגמה

$$A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right)\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 8 \end{smallmatrix}\right) + \frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

טענה תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אזי $A^t \cdot A$ ו- $A \cdot A^t$ סימטריות.

הוכחה: ראשית נשים לב כי $A \cdot A^t \in M_m(\mathbb{F})$ וכן $A^t \cdot A \in M_n(\mathbb{F})$.

$$\left(A \cdot A^t\right)^t = \left(A^t\right)^t \cdot A^t = A \cdot A^t$$

$$\left(A^t \cdot A\right)^t = A^t \cdot \left(A^t\right)^t = A^t \cdot A$$

■

טענה יהי $\mathbb{F}$ שדה כך ש- $char\mathbb{F} \neq 2$. נביט ב- $W = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \;\middle|\; A^t = A \right\}$, $U = \left\{ A \in M_n(\mathbb{F}) \;\middle|\; A^t = -A \right\}$ אזי U, W ת"מ של $M_n(\mathbb{F})$ וכן $W \oplus U = M_n(\mathbb{F})$.

הוכחה: (i) נשים לב כי $0_{n\times n}^t = 0_{n\times n} = -0_{n\times n}$ ולכן $0_{n\times n} \in W, U$.

(ii) יהיו $A,B\in W$, $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי $\alpha A+\beta B$ $(\alpha A+\beta B)^t=(\alpha A)^t+(\beta B)^t=\alpha A^t+\beta B^t=\alpha A+\beta B$ ולכן $\alpha A+\beta B\in W$.

יהיו $A,B\in U$ ו- $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ אזי $(\alpha A+\beta B)^t=(\alpha A)^t+(\beta B)^t=-\alpha A^t-\beta B^t=-(\alpha A+\beta B)$. ולכן W,U ת"מ של $M_n(\mathbb{F})$.

ראינו כבר כי $W+U=M_n(\mathbb{F})$ כי כל מטריצה ניתן לרשום כסכום של מטריצה סימטרית ואנטי סימטרית. נותר להראות כי $W\cap U=\{0_{n\times n}\}$. תהי $A\in W\cap U$. אז $A=A^t=-A$ ולכן $2A=0_{n\times n}$ ומהיות $char\mathbb{F}\neq 2$ אזי $A=0_{n\times n}$. ■

דוגמה ב- $M_3(\mathbb{R})$,

$$W=\left\{\begin{pmatrix} a&b&c\\ b&d&e\\ c&e&f\end{pmatrix}\,\middle|\, a,\ldots,f\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{sp}\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

וברור שמטריצות בת"ל ולכן $\dim W=6$ ולכן $9=\dim M_3(\mathbb{R})=\dim(U\oplus W)=\dim U+\dim W$ ולכן $\dim U=3$.

$$U=\left\{\begin{pmatrix} 0&b&c\\ -b&0&d\\ -c&-d&0\end{pmatrix}\,\middle|\, a,\ldots,f\in\mathbb{R}\right\}=sp\left\{\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\right\}$$

20 פונקציות נפח

XXXII

הגדרה 20.1 פונקציה $\Delta:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ תקרא <u>פונקציית נפח</u> אם מתקיימים התנאים הבאים:

(i) Δ לינארית בכל שורה, כלומר עבור כל $1\le i\le n$, ו- $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ מתקיים

$$\Delta\begin{pmatrix}\cdots R_1\cdots\\ \cdots\alpha R_i+\beta\tilde{R}_i\cdots\\ \cdots R_n\cdots\end{pmatrix}=\alpha\Delta\begin{pmatrix}\cdots R_1\cdots\\ \cdots R_i\cdots\\ \cdots R_n\cdots\end{pmatrix}+\beta\Delta\begin{pmatrix}\cdots R_1\cdots\\ \cdots\tilde{R}_i\cdots\\ \cdots R_n\cdots\end{pmatrix}$$

(ii) אם ב- A יש שתי שורות שוות אזי $\Delta(A)=0_F$.

(iii) $\Delta(I_n)=1_F$.

טענה תהי $\Delta:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ פונקציית נפח. תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ ותהי B מטריצה שהתקבלה מ- A ע"י פעולת שורה אלמנטרית. אזי

(i) אם $B\xrightarrow{R_i\to cR_i}A$ אזי $\Delta(B)=c\cdot\Delta(A)$.

(ii) אם $B\xrightarrow[i\neq j]{R_i\leftrightarrow R_j}A$, אזי $\Delta(B)=-\Delta(A)$.

(iii) אם $B\xrightarrow[i\neq j]{R_i\to R_i+cR_j}A$, אזי $\Delta(B)=\Delta(A)$.

הוכחה: (i) נסמן $A=\begin{pmatrix}\cdots R_1\cdots\\ \cdots R_2\cdots\\ \vdots\\ \cdots R_n\cdots\end{pmatrix}$ אזי $B=\begin{pmatrix}\cdots R_1\cdots\\ \vdots\\ \cdots c\cdot R_i\cdots\\ \vdots\\ \cdots R_n\cdots\end{pmatrix}$ ולכן מלינאריות

$$\Delta(B)=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ cR_i\\ R_n\end{pmatrix}=c\cdot\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}=c\cdot\Delta(A)$$

(ii)

$$0\overset{\text{שורות שוות}}{=}\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i+R_j\\ R_i+R_j\\ R_n\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_i+R_j\\ R_n\end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_j\\ R_i+R_j\\ R_n\end{pmatrix}=\underbrace{\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}}_{0}+\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_j\\ R_n\end{pmatrix}+\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_j\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}+\underbrace{\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_j\\ R_j\\ R_n\end{pmatrix}}_{0}$$

ולכן $\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_j\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}=-\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_j\\ R_n\end{pmatrix}$.

(iii)

$$\Delta\left(B\right)=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i+cR_j\\ R_n\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}+c\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_j\\ R_n\end{pmatrix}$$

במטריצה הימנית יש את השורה ה- R_j פעמיים ולכן הנפח שלה הוא 0 ולכן $\Delta\left(A\right)=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ R_i\\ R_n\end{pmatrix}=\Delta\left(B\right)$. ■

מסקנה בתנאים של הטענה הקודמת, בכל המקרים מתקיים $\Delta(A)=0$ אם"ם $\Delta(B)=0$.

טענה תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$. אם ב- A יש שורת אפסים, אז $\Delta(A)=0$.

הוכחה: נניח כי $R_i=\vec{0}$ לכן

$$\Delta(A)=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ \vec{0}\\ R_n\end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ 0\cdot\vec{0}\\ R_n\end{pmatrix}=0\cdot\Delta\begin{pmatrix}R_1\\ \vec{0}\\ R_n\end{pmatrix}=0\cdot\Delta(A)$$

לכן $\Delta(A)=0$. ■

מסקנה תהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ ותהי Δ פונקציית נפח. אזי $\Delta(A)=0$ אם"ם A לא הפיכה.

הוכחה: ראינו כי אם A,B שקולות שורה אזי $\Delta(A)=0$ אם"ם $\Delta(B)=0$. בנוסף, A לא הפיכה אם"ם היא שקולת שורה למטריצה שיש בה שורת אפסים (הצורה הקנונית). לכן A לא הפיכה ולכן ב- C יש שורת אפסים ולכן $\Delta(C)=0$ אם"ם $\Delta(A)=0$. עתה, ראינו כי אם A הפיכה אזי $C=I_n$ לכן A הפיכה ולכן $\Delta(C)=1$ ועל כן $\Delta(A)\neq 0$. ■

XXXIII

מסקנה תהי $E\in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה אלמנטרית, ותהי $A\in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\Delta\left(E\cdot A\right)=\Delta\left(E\right)\cdot\Delta\left(A\right)$.

הוכחה: נסמן $B=E\cdot A$. ראינו כי $B\in M_n(\mathbb{F})$ היא המטריצה שהתקבלה מ- A ע"י פעולת השורה האלמנטרית המתאימה למטריצה E.
נחלק למקרים.

$E\left(i\right)\xrightarrow[c\neq 0_F]{R_i\to cR_i}I_n$. במקרה זה ראינו כי $\Delta\left(B\right)=c\Delta\left(A\right)$. נשים לב כי $E=\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}$ ולכן

$$\Delta\left(E\right)=c\Delta\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1\end{pmatrix}=c\Delta\left(I_n\right)=c\cdot 1_F=c$$

ולכן $\Delta\left(EA\right)=\Delta\left(B\right)=c\Delta\left(A\right)=\Delta\left(E\right)\Delta\left(A\right)$.

$E\left(ii\right)\xrightarrow[i\neq j]{R_i\leftrightarrow R_j}I_n$. במקרה זה ראינו כי $\Delta\left(B\right)=-\Delta\left(A\right)$. נשים לב כי $\Delta\left(E\right)=-\Delta\left(I_n\right)=-1_F$ ולכן

$$\Delta\left(EA\right)=\Delta\left(B\right)=-\Delta\left(A\right)=\Delta\left(E\right)\cdot\Delta\left(A\right)$$

$E\left(iii\right)\xrightarrow[c\neq 0_F]{R_i\to R_i+cR_j}I_n$. ראינו כי $\Delta\left(B\right)=\Delta\left(A\right)$, $\Delta\left(E\right)=\Delta\left(I_n\right)=1_F$ ולכן

$$\Delta\left(E\cdot A\right)=\Delta\left(B\right)=\Delta\left(A\right)=1_F\cdot\Delta\left(A\right)=\Delta\left(E\right)\cdot\Delta\left(A\right)$$

■

משפט (יחידות פונקציית הנפח) תהיינה $\Delta,\tilde{\Delta}:M_n(\mathbb{F})\to\mathbb{F}$ שתי פונקציות נפח אזי $\Delta\left(A\right)=\tilde{\Delta}\left(A\right)$, $\forall A\in M_n(\mathbb{F})$.

הוכחה: ראשית, אם A לא הפיכה, אז ראינו כבר כי $\Delta\left(A\right)=0_F$ וגם $\tilde{\Delta}\left(A\right)=0_F$ ולכן $\Delta\left(A\right)=\tilde{\Delta}\left(A\right)$. אחרת, אם A הפיכה, אזי ראינו שקיימות מטריצות אלמנטריות $E_1,\ldots,E_k\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $E_k\cdot\cdots\cdot E_1\cdot A=I_n$ כלומר $A^{-1}=E_k\cdot\cdots\cdot E_2\cdot E_1$ ולכן $A=\left(E_k\cdot\cdots\cdot E_1\right)^{-1}=E_1^{-1}\cdot\cdots\cdot E_k^{-1}$. ראינו גם שמטריצה הפוכה של מטריצה אלמנטרית גם היא אלמנטרית (המתאימה לפעולה האלמנטרית ההפוכה). לכן

$$\Delta\left(A\right)=\Delta\left(E_1^{-1}\cdot\cdots\cdot E_k^{-1}\right)=\Delta\left(E_1^{-1}\right)\cdot\cdots\cdot\Delta\left(E_k^{-1}\right)\overset{(*)}{=}\tilde{\Delta}\left(E_1^{-1}\right)\cdot\cdots\cdot\tilde{\Delta}\left(E_k^{-1}\right)=\tilde{\Delta}\left(E_1^{-1}\cdot\cdots\cdot E_k^{-1}\right)=\tilde{\Delta}\left(A\right)$$

$(*)$ ראינו כי $\Delta\left(E\right)=\tilde{\Delta}\left(E\right)=\begin{cases}c & R_i\to cR_i & c\neq 0_F\\ -1 & R_i\leftrightarrow R_j & i\neq j\\ 1 & R_i\to R_i+cR_j & i\neq j\end{cases}$. ■

משפט תהי $\Delta : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ פונקציית נפח ותהיינה $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\Delta(A \cdot B) = \Delta(A)\Delta(B)$.

הוכחה: ראשית, אם A לא הפיכה אזי ראינו ש- $\Delta(A) = 0$. כמו כן, נשים לב כי $A \cdot B$ לא הפיכה, שכן A לא הפיכה גורר כי T_A לא על ולכן גם $T_{AB} = T_A \circ T_B$ לא על ולכן T_{AB} לא הפיכה ולכן AB לא הפיכה. לכן $\Delta(AB) = 0$ ולכן $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B)$ במקרה זה. אחרת, ראינו שאם A הפיכה אז A מכפלה של מטריצות אלמנטריות (ראינו במשפט הקודם) ולכן קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1^{-1}, \dots, E_k^{-1}$ כך ש- $A = E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ ולכן

$$\Delta(AB) = \Delta\left(E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1} B\right) = \Delta\left(E_1^{-1}\right) \cdot \dots \cdot \Delta\left(E_k^{-1}\right)\Delta(B) = \Delta\left(E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}\right)\Delta(B) = \Delta(A) \cdot \Delta(B)$$

■

מסקנה תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ מטריצה הפיכה אזי $\Delta\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\Delta(A)}$.

הוכחה: ראינו כי $\Delta\left(A^{-1}\right) \cdot \Delta(A) = \Delta\left(A^{-1} \cdot A\right) = \Delta(I_n) = 1_F$ ומיחידות ההופכי, $\Delta\left(A^{-1}\right) = (\Delta(A))^{-1}$. ■

מסקנה $\forall A, B \in M_n(\mathbb{F})$, $\Delta(AB) = \Delta(BA)$.

הוכחה: $\Delta(AB) = \Delta(A)\Delta(B) = \Delta(B)\Delta(A) = \Delta(BA)$. ■

משפט תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $\Delta\left(A^t\right) = \Delta(A)$.

הוכחה: ראינו כי A^t הפיכה אם"ם A הפיכה. לכן, אם A לא הפיכה גם A^t לא הפיכה ולכן $\Delta\left(A^t\right) = 0 = \Delta(A)$. אחרת, אם A הפיכה, אזי קיימות מטריצות אלמנטריות $E_1, \dots, E_k \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $A = E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}$ (והופכית של מטריצה אלמנטרית גם היא אלמנטרית). מתכונות ה- $transpose$, $A^t = \left(E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}\right)^t = \left(E_k^{-1}\right) \cdot \dots \cdot \left(E_1^{-1}\right)^t$ ולכן

$$\begin{aligned}\Delta\left(A^t\right) &= \Delta\left(\left(E_k^{-1}\right)^t \cdot \dots \cdot \left(E_1^{-1}\right)^t\right) = \Delta\left(\left(E_k^{-1}\right)^t\right) \cdot \dots \cdot \Delta\left(\left(E_1^{-1}\right)^t\right) \\ &\overset{(*)}{=} \Delta\left(E_k^{-1}\right) \cdot \dots \cdot \Delta\left(E_1^{-1}\right) = \Delta\left(E_1^{-1} \cdot \dots \cdot E_k^{-1}\right) = \Delta(A)\end{aligned}$$

$(*)$ מספיק להראות שלכל מטריצה אלמנטרית $E \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $\Delta\left(E^t\right) = \Delta(E)$. נחלק למקרים:

$E\ (i)$ $\xrightarrow[c \neq 0_F]{R_i \to cR_i}$ I_n. כלומר $E = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$ כאשר $[A]_{ii} = c$ ולכן $E = E^t$ ולכן ברור כי $\Delta\left(E^t\right) = \Delta(E)$.

$E\ (ii)$ $\xrightarrow[i \neq j]{R_i \leftrightarrow R_j}$ I_n. $E = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 0 & 1 & \\ & & 1 & 0 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}$ כאשר אחרי ההחלפה האיברים המובילים עדיין בקווארדינטה שווה בשורות והעמודות. $E^t = E$ כלומר גם $\Delta\left(E^t\right) = \Delta(E)$.

(iii) $I_n \xrightarrow[c\neq 0_F]{R_i\to R_i+cR_j} E$. ,$E = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & c & \\ & & & \ddots & \\ \text{0} & & & & 1\end{pmatrix}$ $E^t = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ j \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & & & & \text{0} \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & c & \\ & & & \ddots & \\ \text{0} & & & & 1\end{pmatrix}$ ולכן $I_n \xrightarrow[c\neq 0_F]{R_j\to R_j+cR_i} E$ ולכן

$$\Delta\left(E^t\right) = \Delta\left(I_n\right) = 1 = \Delta\left(E\right)$$

■

21 הדטרמיננטה

הגדרה 21.1 נגדיר פונקציה $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ באופן הבא:

(i) אם $n=1$ נגדיר $\det(a) = a$.

(ii) $\forall n \geq 2$, נגדיר $\det A = \sum\limits_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1}$ כאשר $\forall ij$, M_{ij} מוגדר להיות המינור ה- ij במטריצה A, כלומר ה- det של המטריצה שהתקבלה מ- A ע"י השמטת השורה ה-i-ית והעמודה ה-j-ית.

הערה $M_{ij}^{(A)}$ הוא המינור ה-ij ב- A.

דוגמות

1.

$$\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1} = a_{11} \cdot M_{11} - a_{21} \cdot M_{21} = a \cdot \det(d) - c\det(b) = ad - bc$$

2.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix} = 1 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9\end{smallmatrix}\right) - 4 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9\end{smallmatrix}\right) + 7 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6\end{smallmatrix}\right) = 45 - 48 - 4(18-24) + 7(12-15) = -3 + 24 - 21 = 0$$

3. $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6\end{smallmatrix}\right) = 6 - 6 = 0$.

4. $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ i & 1\end{smallmatrix}\right) = -1 - i^2 = -1 + 1 = 0$.

XXXIV

משפט (משפט הקיום) $\det : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ היא פונקציית נפח.

הוכחה: יש להוכיח את 3 התכונות הבסיסיות. נוכיח באינדוקציה על n.

בסיס ($n=1$): $\det a = a$.

(i) ברור (פונקציית הזהות לינארית).

(ii) לא רלוונטי.

(iii) $\det(1_F) = 1_F$.

בסיס אפקטיבי ($n=2$): $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$.

(i) ברור. נבדוק למשל לינאריות בשורה הראשונה:

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{smallmatrix} \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 & \alpha_2 b_1 + \beta_2 b_2 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) &= (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2)d - (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2)c \\ &= \alpha_1(a_1 d - b_1 c) + \alpha_2(a_2 d - b_2 c) = \alpha_1 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) + \alpha_2 \det\left(\begin{smallmatrix} a_1 & b_2 \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\end{aligned}$$

(ii) $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ a & b \end{smallmatrix}\right) = ab - ba = 0$.

(iii) $\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$.

צעד ($n-1 \to n$):

(i) נסמן $C = \begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11} & \dots & \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 b_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$. נבדוק על השורה הראשונה

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11} & \dots & \alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 b_{1n} \\ a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} &= (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11})\, M_{11}^{(C)} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1}^{(C)} \\ &\overset{(*)}{=} (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11})\, M_{11}^{(A)} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1}^{(C)} \\ &\overset{\text{ה"א}}{=} (\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 b_{11})\, M_{11}^{(A)} + \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} \left(\alpha_1 M_{i1}^{(A)} + \alpha_2 M_{i1}^{(B)}\right) \\ &\overset{(**)}{=} \alpha_1 a_{11} M_{11}^{(A)} + \alpha_1 \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} M_{i1}^{(A)} + \alpha_2 b_{11} M_{11}^{(A)} + \alpha_2 \sum_{i=2}^{n} (-1)^{i+1}\, a_{i1} M_{i1}^{(A)} \\ &= \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1}^{(A)} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1}^{(A)} = \det(A) + \det(B)\end{aligned}$$

$(*)$ בגלל שמחקנו את השורה הראשונה במינור אז זה לא משנה אם המינור הגיע מהמטריצה A או C. על כל שאר השורות החישוב זהה.

$(**)$ $M_{11}^{(A)} = M_{11}^{(B)}$.

(iii)

$$\det I_n = \det \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1} \underset{\forall j \neq 1}{\overset{a_{1j}=0}{=}} a_{11} \cdot M_{11} = 1 \cdot \det I_{n-1} \overset{\text{ה"א}}{=} 1$$

(ii) עתה נניח שהשורות ה- k, l ב- A שוות זו לזו וכן כי $1 \leq l < k \leq n$, ונוכיח כי $\det A = 0$. מה"א, det היא פונקציית נפח ב- $M_{n-1}(\mathbb{F})$.
נחשב:

$$\begin{aligned}
\det A =& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \cdot a_{i1} \cdot M_{i1} \\
&\overset{(*)}{=} (-1)^{l+1} \cdot a_{l1} \cdot M_{l1} + (-1)^{k+1} \cdot a_{k1} \cdot M_{k1} \overset{a_{k1}=a_{l1}}{=} a_{k1}((-1)^{l+1} \cdot M_{l1} + (-1)^{k+1} \cdot M_{k1}) \\
&\overset{(**)}{=} a_{k1}((-1)^{l+1} \cdot M_{l1} + (-1)^{k+1} \cdot (-1)^{k-l-1} M_{l1}) \\
&= a_{k1} M_{l1} \left((-1)^{l+1} + (-1)^{2k-l}\right) = a_{k1} M_{l1} \left((-1)^{l+1} + (-1)^{l}\right) = 0
\end{aligned}$$

$(*)$ כל שאר המינורים מתאפסים כי שתי השורות השוות עדיין שם והם ב- $M_{n-1}(\mathbb{F})$ ומה"א הם מתאפסים.

$(**)$ נשים לב כי ניתן להגיע מהמטריצה המתאימה ל- M_{l1} למטריצה המתאימה ל- M_{k1} ע"י $k-l-1$ החלפות של שורות סמוכות. מה"א, בכל החלפה הדטרמיננטה מחליפה סימן (הוכחנו לכל פונקציית נפח) ולכן $M_{k1} = (-1)^{k-l-1} M_{l1}$ ■

מסקנה (פיתוח לפי העמודה ה-j-ית) $1 \leq \forall j \leq n$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$.

הוכחה: כמו בהוכחה הקודמת (נרשום j במקום 1) נקבל כי אגף ימין הוא פונקציית נפח ומיחידות נקבל את הדרוש. ■

מסקנה (פיתוח לפי השורה ה-i-ית) $1 \leq \forall j \leq n$, $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$.

הוכחה: הוכחנו כי $\det A = \det A^t$. ■

דוגמות

.1

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \overset{i=2}{=} \sum_{j=1}^{3} (-1)^{2+j} a_{2j} M_{2j} = -3 M_{23} = -3 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

2.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 0 & 7 \end{pmatrix} \overset{j=3}{=} 0\cdot M_{13} - 3\cdot M_{23} + 0\cdot M_{33} - 0\cdot M_{34} = -3\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 7 \end{pmatrix} = -3(-2+14-20) = -3(21) = -63$$

3.

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a\det\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - d\det\begin{pmatrix} b & c \\ h & i \end{pmatrix} + g\det\begin{pmatrix} b & c \\ e & f \end{pmatrix} = a(ei-fh) - d(bi-ch) + g(bf-ce)$$

XXXV

תרגילים

1. הוכחי/הפרכי: תהיינה $A, B \in M_n$ אזי $\det(A+B) = \det A + \det B$. לא נכון! נבחר $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ לכן $\det A = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ שעבורה $\det B = 0$, אבל $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ולכן $\det(A+B) = 1$.

2.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{4} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 1(6-16-6) + 2(6+48-8-18) = 40$$

בעזרת פיתוח לפי השורה הראשונה.

3. הוכיחו כי $\forall a,b,c \in \mathbb{F}$, $\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$. מהיות $\det A = 1\cdot M_{13} - cM_{23} + c^2 M_{33}$ מפיתוח לפי העמודה השלישית נקבל כי $\det A$ הוא פולינום ממעלה 2. נשים לב כי אם $a = c$ או $a = b$ נקבל שתי עמודות שוות ולכן $\det A = 0$ לכן $\det A = k(c-a)(c-b)$. נשים לב כי $k = M_{33} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} = b - a$.

4. תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. נניח כי A מטריצה משולשת עליונה (כלומר $[A]_{ij} = 0$, לכל $j < i$) הוכיחו כי $\det A = \prod_{i=1}^{n} [A]_{ii}$. באינדוקציה:

$n = 1$: ברור $\det A = a$.

$n-1 \to n$: נפתח את $\det A$ לפי העמודה הראשונה:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} M_{i1} \overset{(*)}{=} [A]_{11} \cdot M_{11} \overset{\text{ה"א}}{=} [A]_{11} \cdot \prod_{i=2}^{n} [A]_{ii} = \prod_{i=1}^{n} [A]_{ii}$$

$(*)$ כל השאר המינורים מוכפלים באיברי המטריצה בעמודה הראשונה אבל אילו מתאפסים ולכן מה שנשאר זה רק עבור האיבר הראשון בעמודה.

5. $\det\begin{pmatrix} 1&2&3&1\\ 0&1&7&2\\ 0&0&2&4\\ 0&0&0&3 \end{pmatrix} = 6$ בעזרת הטענה הנ"ל.

6. יהיו $a,b,c,d,e \in \mathbb{F}$. חשבו את $\det\begin{pmatrix} a&0&0&0&0\\ 0&b&0&0&0\\ 0&0&c&0&0\\ 0&0&0&d&0\\ 0&0&0&0&e \end{pmatrix} = abcde$ $\stackrel{(*)}{=} \det\begin{pmatrix} 0&0&0&0&a\\ 0&0&0&b&0\\ 0&0&c&0&0\\ 0&d&0&0&0\\ e&0&0&0&0 \end{pmatrix}$. $(*)$ עשינו על המטריצה שתי החלפות שורה ולכן הסימן התהפך פעמיים כלומר נשאר זהה.

22 מטריצת ה-Adjoint

XXXVI

הגדרה 22.1 תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. מטריצת ה- Adjoint של A היא המטריצה מסדר $n \times n$ שאיבריה מוגדרים ע"י

$$[\text{adj }(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ji}$$

כאשר M_{ji} הוא המינור ה- ji של A.

דוגמות

1. $A = \begin{pmatrix} a&b\\ c&d \end{pmatrix}$. $\text{adj }(A) = \begin{pmatrix} d&-b\\ -c&a \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1&2\\ 3&4 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1&2&1&0\\ 3&4&0&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1&2&1&0\\ 0&-2&-3&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1\to R_1+R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&-2&1\\ 0&-2&-3&1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1&0&-2&1\\ 0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

ולכן $\begin{pmatrix} -2&1\\ \frac{3}{2}&-\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} +4&-2\\ -3&+1 \end{pmatrix}$ A^{-1}. $\text{adj }(A) = \begin{pmatrix} 4&-2\\ -3&1 \end{pmatrix}$.

משפט תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ אזי $A\text{adj }(A) = \text{adj }(A)\, A = \det A \cdot I_n$.

הוכחה: ראשית, נוכיח כי $[A\text{adj }(A)]_{ii} = \det(A)$.

$$[A\text{adj }(A)]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [\text{adj }(A)]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} (-1)^{k+i} M_{ik}^{(A)} \stackrel{(*)}{=} \det A$$

$(*)$ זוהי הנוסחה לדטרמיננטה לפי השורה ה-i-ית.

כמו כן,

$$[\text{adj }(A)\, A]_{ii} = \sum_{k=1}^{n} [\text{adj }(A)]_{ik} [A]_{ki} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ki} (-1)^{k+i} M_{ki}^{(A)} \stackrel{(**)}{=} \det(A)$$

(**) זוהי הנוסחה לדטרמיננטה לפי העמודה ה-i-ית.

עתה נניח כי $i \neq j$ ונוכיח כי $[\operatorname{adj}(A)A]_{ij} = [A\operatorname{adj}(A)]_{ij} = 0$ ונסיים.

$$[A\operatorname{adj}(A)]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} (-1)^{k+j} M_{jk}^{(A)} \overset{(***)}{=} 0$$

$(***)$ זוהי הדטרמיננטה של המטריצה בה $R_i = R_j$ כלומר המטריצה שהתקבלה מ- A ע"י החלפת השורה ה-j-ית בשורה ה-i-ית, מבלי לשנות את שורה ה-i-ית.

$$[\operatorname{adj}(A)A]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{adj}(A)]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+i} M_{ki}^{(A)} [A]_{kj} \overset{(\star)}{=} 0$$

$(\star)$ דטרמיננטה של מטריצה שבה יש שתי עמודות שוות. ■

מסקנה אם A הפיכה אזי $A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det A}$.

תרגיל תהי $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)$. מצאו את $\operatorname{adj}(A)$.

פתרון

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} \left|\begin{smallmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{smallmatrix}\right| \\ -\left|\begin{smallmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{smallmatrix}\right| \\ \left|\begin{smallmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{smallmatrix}\right| & -\left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{smallmatrix}\right| & \left|\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{smallmatrix}\right| \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

משפט (נוסחת קרמר) תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ונניח כי A הפיכה. יהי $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$ ונביט במערכת הלינארית $A\vec{x} = \vec{b}$. יהי $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ הפתרון למערכת זו ונסמן $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. אזי $1 \leq \forall j \leq n$, $x_j = \frac{\det A_j}{\det A}$ כאשר A_j התקבלה מ- A ע"י החלפת העמודה ה-j-ית ב- $\vec{b}$.

הוכחה: מהיות A הפיכה, אזי

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{\operatorname{adj} A}{\det A} \cdot \vec{b} = \frac{1}{\det A} \cdot \operatorname{adj} A \cdot \vec{b}$$

יהי $1 \leq j \leq n$. אזי $x_j = \frac{1}{\det A}\left[\operatorname{adj}(A) \cdot \vec{b}\right]_j$. נוכיח כי $\left[\operatorname{adj}(A)\vec{b}\right]_j = \det A_j$ ונסיים.

$$\left[\operatorname{adj}(A)\vec{b}\right]_j = \sum_{k=1}^{n} [\operatorname{adj}(A)]_{jk} \cdot b_k = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot M_{kj}^{(A)} \cdot b_k \overset{(*)}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} \cdot M_{kj}^{(A_j)} \cdot a_{kj} = \det A_j$$

$(*)$ החלפנו את a_{kj} ב- b_k והמינור kj של A שווה לשל A_j.

דוגמה נביט במערכת $\left\{\begin{smallmatrix} x+2y-z=4 \\ 2x-y+z=0 \\ x+y+z=3 \end{smallmatrix}\right.$. פתרו את המערכת.

■

פתרון $A=\left(\begin{smallmatrix}1&2&-1\\2&-1&1\\1&1&1\end{smallmatrix}\right)$. $\det A=-1+2-2+1-1-4=-7$ לכן A הפיכה. לכן, מסנוחת קרמר,

$$z=\frac{\det A_3}{\det A}=-\frac{1}{7}\det\left(\begin{smallmatrix}1&2&4\\2&-1&0\\1&1&3\end{smallmatrix}\right)=-\frac{1}{7}\left(-3+8+4-12\right)=\frac{3}{7}$$

$$x=\frac{\det A_1}{\det A}=-\frac{1}{7}\det\left(\begin{smallmatrix}4&2&-1\\0&-1&1\\3&1&1\end{smallmatrix}\right)=-\frac{1}{7}\left(-4+6-3-4\right)=\frac{5}{7}$$

$$y=\frac{\det A_1}{\det A}=-\frac{1}{7}\det\left(\begin{smallmatrix}1&4&-1\\2&0&1\\1&3&1\end{smallmatrix}\right)=-\frac{1}{7}\left(4-6-3-8\right)=\frac{13}{7}$$

כלומר, $x=\frac{13}{7},y=\frac{5}{7},z=\frac{3}{7}$ הוא פתרון פרטי של המערכת.

משפט נביט המטריצת בלוקים מהצורה $T=\left(\begin{array}{c|c}A&B\\\hline 0&C\end{array}\right)$ כאשר $A\in M_{l\times l}\left(\mathbb{F}\right)$, $C\in M_{(n-l)\times(n-l)}$ ו- $B\in M_{l\times(n-l)}$. אזי $\det T=\det A\cdot\det C$.

הוכחה: $l=1$: נחשב את $\det T$ לפי העמודה ראשונה ונקבל

$$\det T=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\left[T\right]_{k1}M_{k1}^{(T)}=a\cdot M_{11}^{(T)}=a\det C=\det A\cdot\det C$$

$l\to l+1$: נפתח את $\det T$ לפי העמודה הראשונה ונקבל

$$\begin{aligned}\det T&=\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k+1}\left[T\right]_{k1}M_{k1}^{(T)}=\sum_{k=1}^{l}\left(-1\right)^{k+1}\left[A\right]_{k1}M_{k1}^{(T)}\overset{\text{ה"א}}{=}\sum_{k=1}^{l}\left(-1\right)^{k+1}\left[A\right]_{k1}M_{k1}^{(A)}\det C\\&=\det C\cdot\sum_{k=1}^{l}\left(-1\right)^{k+1}\left[A\right]_{k1}M_{k1}^{(A)}=\det C\cdot\det A\end{aligned}$$

■

הגדרה 22.2 מטריצה $D\in M_n(\mathbb{F})$ תקרא <u>אלכסונית</u> אם קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $D=\begin{pmatrix}\alpha_1&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha_n\end{pmatrix}$.

הערה אם D אלכסונית אז:

(i) $\det D=\alpha_1\cdot\cdots\cdot\alpha_n$ (כי D משולשת עליונה).

(ii) D סימטרית, כלומר $D^t=D$.

(iii) $D^m=\begin{pmatrix}\alpha_1^m&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha_n^m\end{pmatrix}$, $D^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{-1}&&0\\&\ddots&\\0&&\alpha_n^{-1}\end{pmatrix}$.

XXXVIII

תרגיל תהי $A = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)$. האם קיימת מטריצה $P \in M_{2\times 2}$ הפיכה כך ש- $P^{-1} \cdot A \cdot P$ אלכסונית?

פתרון נסמן $P = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. ראינו כבר כי $P^{-1} = \frac{adjP}{\det P} = \frac{\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)}{ad-bc}$ ולכן

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \frac{1}{\det P}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\det P}\left(\begin{smallmatrix} d & -b \\ -c & a \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 3a+2c & 3b+2d \\ a+4c & b+4d \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{\det P}\left(\begin{smallmatrix} \cdots & d(3b+2d)-b(b+4d) \\ -c(3a+2c)+a(a+4c) & \cdots \end{smallmatrix}\right)$$

לכן נרצה כי

$$\left\{\begin{smallmatrix} d(3b+2d)-b(b+4d)=0 \\ -c(3a+2c)+a(a+4c)=0 \\ ac-bd\neq 0 \end{smallmatrix}\right. \to \left\{\begin{smallmatrix} 2d^2-b^2-bd=0 \\ -2c^2+a^2+ac=0 \\ ac-bd\neq 0 \end{smallmatrix}\right.$$

עבור $a=b=1$ נקבל $c_{1,2}=d_{1,2}=1,-\frac{1}{2}$ לכן $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ מקיימת את התנאי. נבדוק:

$$P^{-1}\cdot A\cdot P = \frac{1}{-\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\left(\begin{smallmatrix} 5 & 2 \\ 5 & -1 \end{smallmatrix}\right) = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -\frac{15}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$$

היא אלכסונית.

תרגיל מצאו את כל הפונקציות הגזירות ברציפות $u,v\in C^1(\mathbb{R})$ כך ש- $\left\{\begin{smallmatrix} u'(x)=3u(x)+2v(x) \\ v'(x)=u(x)+4v(x) \end{smallmatrix}\right.(*)$.

הערה $\vec{F}$ רציפה אם"ם $\lim\limits_{x\to x_0}\vec{F}(x)=\vec{F}(x_0)$ כלומר אם $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ כך שלכל $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $||\vec{F}(x)-\vec{F}(x_0)||<\epsilon$ (כאשר $||\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)||=\sqrt{x^2+y^2}$).

פתרון נגדיר $\vec{F}(x)=\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$. נשים לב כי $\vec{F}$ גזירה ברציפות ו- $\vec{F}'=\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$.

$$\vec{F}'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\vec{F}(x+h)-\vec{F}(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\begin{pmatrix} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ \frac{v(x+h)-v(x)}{h} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u'(x) \\ v'(x) \end{pmatrix}$$

נשים לב כי את $(*)$ ניתן לרשום כ $\vec{F}'(x)=\left(\begin{smallmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}=A\cdot\vec{F}(x)$. בתרגיל הקודם הוכחנו כי קיימת $P\in M_2$ הפיכה שעבורה $P^{-1}AP=\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ אלכסונית ולכן $A=P\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}$. נציב ונקבל $\vec{F}'(x)=A\cdot F(x)=P\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}\vec{F}(x)$ ולכן $\left(P^{-1}\cdot\vec{F}\right)'(x)=P^{-1}\cdot\vec{F}'(x)=\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)P^{-1}\cdot\vec{F}(x)$. נסמן $\vec{G}(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \end{pmatrix}=P^{-1}\cdot\vec{F}(x)$. קיבלנו כי $\vec{G}'(x)=\left(\begin{smallmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)\vec{G}(x)$ לכן $\left\{\begin{smallmatrix} g_1'(x)=5g_1(x) \\ g_2'(x)=2g_2(x) \end{smallmatrix}\right.$ ולכן $g_1'-5g_1=0$ ולכן $\left(e^{-5x}\cdot g_1\right)'=e^{-5x}g_1'-5e^{-5x}g_2'=0$ כלומר $e^{-5x}\cdot g_1(x)=c_1\in\mathbb{R}$ ולכן $g_1(x)=c_1e^{5x}$. באותו האופן $g_2=c_2\cdot e^{2x}$, $c_2\in\mathbb{R}$ ולכן $P^{-1}\vec{F}=\vec{G}=\begin{pmatrix} c_1e^{5x} \\ c_2e^{2x} \end{pmatrix}$ ולכן $\vec{F}=P\begin{pmatrix} c_1e^{5x} \\ c_2e^{2x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1e^{5x} \\ c_2e^{2x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_1e^{5x}+c_2e^{2x} \\ c_1e^{5x}-\frac{c_2}{2}e^{2x} \end{pmatrix}$.

23 המרחב הדואלי ופונקציונאלים לינאריים

הגדרה 23.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. המרחב הדואלי של V מוגדר להיות $V^* = \hom(V, \mathbb{F}) = \left\{ \psi : V \to W \;\middle|\; T \text{ ה"ל} \right\}$. איברים של V^* נקראים פונקציונאלים לינאריים (או קו-וקטורים).

הגדרה 23.2 נגדיר העתקה $\langle , \rangle : V^* \times V \to \mathbb{F}$ ע"י $\langle \psi, v \rangle = \psi(v)$, $\forall \psi \in V^*$, $\forall v \in V$.

משפט (i) $\forall v \in V$, $\forall \psi_1, \psi_2 \in V^*$ מתקיים $\langle \psi_1 + \psi_2, v \rangle = \langle \psi_1, v \rangle + \langle \psi_2, v \rangle$.

(ii) $\forall v_1, v_2 \in V$, $\forall \psi \in V^*$ מתקיים $\langle \psi, v_1 + v_2 \rangle = \langle \psi, v_1 \rangle + \langle \psi, v_2 \rangle$.

(iii) $\forall \psi \in V^*$, $\forall v \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים $\langle \alpha\psi, v \rangle = \alpha \langle \psi, v \rangle = \langle \psi, \alpha v \rangle$.

הוכחה: (i) יהיו $v \in V$, $\psi_1, \psi_2 \in V^*$.

$$\langle \psi_1 + \psi_2, v \rangle = (\psi_1 + \psi_2)(v) = \psi_1(v) + \psi_2(v) = \langle \psi_1, v \rangle + \langle \psi_2, v \rangle$$

(ii) יהיו $v_1, v_2 \in V$, $\psi \in V^*$.

$$\langle \psi, v_1 + v_2 \rangle = \psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = \langle \psi, v_1 \rangle + \langle \psi, v_2 \rangle$$

(iii) יהיו $v \in V$, $\psi \in V^*$, $\alpha \in \mathbb{F}$. $\langle \psi, \alpha v \rangle = \psi(\alpha v) = \alpha\psi(v) = \alpha \langle \psi, v \rangle$ וגם $\langle \alpha\psi, v \rangle = (\alpha\psi)(v) = \alpha\psi(v) = \alpha \langle \psi, v \rangle$. ■

24 המאפס

הגדרה 24.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A \subseteq V$. נגדיר את המאפס של A להיות $A^0 = \{\psi \in V^* : \psi(w) = 0, \forall w \in A\} \subseteq V^*$.

הערה $\{0_v\}^0 = V^*$ וגם $V^0 = \{0_{V^*}\}$.

דוגמה תהי $A = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \right\}$. מהו המאפס של A?

$$A^0 = \left\{ \psi \in \hom(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) : \psi \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) \right\} = \left\{ \psi \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix} \right) = ax + by + cz : a + 2b + 3c = 0 \right\}$$

XXXVIII

דוגמות

1. תהי $W=\operatorname{sp}\left\{\underset{A_1}{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)},\underset{A_2}{\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)},\underset{A_3}{\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)}\right\}$. מצאו בסיס ל-$W^0$.

$$W=\left\{a\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)+b\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)c\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right):a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\left(\begin{smallmatrix}b&a\\a&c\end{smallmatrix}\right):a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a\in M_2:A^t=A\right\}$$

יהי $\psi\in W^0$ אזי $\psi\left(\begin{smallmatrix}b&a\\a&c\end{smallmatrix}\right)=0$, $\forall a,b,c\in\mathbb{R}$. נשים לב כי A_1,A_2,A_3 בת"ל ולכן ניתן להשלים אותן לבסיס של M_2. $A=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ מקיים כי $A_4\notin W$, ולכן $A_{1,\dots,4}$ בת"ל ולכן הם בסיס. לכן $\forall A\in M_2$, קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_4\in\mathbb{R}$ כך ש- $A=\alpha_1A+\dots+\alpha_4A_4$ ולכן $\psi(A)=\alpha_1\psi(A_1)+\dots\alpha_4\psi(A_4)=\alpha_4\psi(A_4)$. נביט ב- $\psi_0:M_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $\psi_0(A)=\alpha_4$ כאשר $A=\alpha_1A+\dots+\alpha_4A_4$. נשים לב כי ψ_0 ה"ל ומוגדרת היטב. נוכיח כי ψ_0 בסיס ל- W^0 ונסיים. תהי $\psi\in W^0$. אזי $\psi(A)=\alpha_4\psi(A_4)=\psi(A_4)\cdot\psi_0(A)$ כלומר $\psi=\psi(A_4)\cdot\psi_0$ ולכן $\psi\in\operatorname{sp}\{\psi_0\}$ ולכן $\{\psi_0\}$ פורשת את W^0. ברור כי ψ_0 בת"ל ולכן ψ_0 בסיס ל- W^0. נשים לב כי

$$\begin{aligned}\psi_0(A)=\psi_0\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)&=\psi_0\left(\frac{A+A^t}{2}+\frac{A-A^t}{2}\right)=\psi_0\left(\frac{A+A^t}{2}\right)+\psi_0\left(\frac{A-A^t}{2}\right)\\&\overset{(*)}{=}\psi_0\left(\begin{smallmatrix}0&b-c\\c-b&0\end{smallmatrix}\right)=(c-b)\,\psi_0\underbrace{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)}_{A_4}=(c-b)\end{aligned}$$

$(*)$ $\frac{A+A^t}{2}$ סימטרית ולכן ψ_0 היא 0.

2. מצאו את $\left\{\underset{v_1}{\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}},\underset{v_2}{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}}\right\}^0$. נשלים את v_1,v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^4$. $v_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},v_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. ממשפט חשוב כלשהו 1, קיים $\psi_1\in\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ יחיד כך ש- $\left\{\begin{smallmatrix}\psi_1(v_1)=0\\\psi_1(v_2)=0\\\psi_1(v_3)=1\\\psi_1(v_1)=0\end{smallmatrix}\right.$ ובאותו האופן קיים $\psi_2\in\left(\mathbb{R}^4\right)^*$ יחיד כך ש- $\left\{\begin{smallmatrix}\psi_2(v_1)=0\\\psi_2(v_2)=0\\\psi_2(v_3)=0\\\psi_2(v_1)=1\end{smallmatrix}\right.$. נוכיח כי $A^0=\operatorname{sp}\{\psi_1,\psi_2\}$ כאשר $A=\{v_1,v_2\}$. יהי $\psi\in\operatorname{sp}\{\psi_1,\psi_2\}$. אזי קיימים $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ כך ש- $\psi=\alpha v_1+\beta v_2$ לכן

$$\psi(v_1)=(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)(v_1)=\alpha\psi_1(v_1)+\beta\psi_2(v_1)=0$$

ובאותו האופן $\psi(v_2)=(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)(v_2)=0$ ולכן $\psi\in A^0$ ולכן $\operatorname{sp}\{\psi_1,\psi_2\}\subseteq A^0$.

יהי $\psi\in A^0$ לכן $\forall v\in V$, קיימים $\alpha_1,\dots,\alpha_4\in\mathbb{R}$ שעבורם $v=\alpha_1v_1+\dots+\alpha_4v_4$ ולכן

$$\psi(v)=\alpha_1\psi(v_1)+\alpha_2\psi(v_2)+\alpha_3\psi(v_3)+\alpha_4\psi(v_4)=\alpha_3\psi(v_3)+\alpha_4\psi(v_4)\overset{(*)}{=}\psi_1(v)\cdot\psi(v_3)+\psi_2(v)\,\psi(v_4)$$

$(*)$ $\psi_1\left(\overbrace{\alpha_1v_1+\dots+\alpha_4v_4}^{v}\right)=0+0+\alpha_3+0$.

ולכן $\psi=\psi(v_3)\,\psi_1+\psi(v_1)\,\psi_2$ ולכן $\psi\in sp\{\psi_1,\psi_2\}$ ולכן $A^0\subseteq sp\{\psi_1,\psi_2\}$.

XXXIX

תרגיל תהי $K=\begin{pmatrix}x&-1&0\\0&x&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}$.

א. עבור אילו ערכי x מתקיים כי K הפיכה?

ב. יהי W המרחב הנפרש ע"י עמודות K. לאילו ערכי x מתקיים כי $\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\in W$?

פתרון א. K הפיכה אם"ם $2x^2-3x+1=\det K\neq 0$ ולכן היא הפיכה עבור $x\neq\frac{1}{2},1$.

ב. K הפיכה אם"ם העמודות פורשות ולכן $\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\in W$ עבור $x\neq\frac{1}{2},1$. עבור $x=1$, $K=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}$. נשים לב כי וקטור העמודה השלישי תלוי לינארית בקודמיו ולכן נבדוק האם

$$\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\in\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}=\text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\\-3\end{pmatrix}\right\}$$

$\det\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&-3&1\end{pmatrix}=2\neq 0$ ולכן הוקטורים בת"ל ולכן $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\notin W$. עבור $x=\frac{1}{2}$, האם $\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}\notin W$? $\det\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&1\\1&-3&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\neq 0$ ולכן גם הוא לא ב- W.

הערה אם V,W נ"ס אז $\dim\hom(V,W)=\dim V\cdot\dim W$ (שכן היא איזורמפוית ל- $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ע"י הה"ל $\psi(T)=[T]_B^A$ לכל שני בסיסים סדורים A,B).

מסקנה אם V נ"ס אז $\dim V^*=\dim V$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $A\subseteq V$ אזי A^0 ת"מ של V^*.

הוכחה: (i) יהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$, $\psi_1,\psi_2\in V^*$ ויהי $v\in A$.

$$(\alpha\psi_1+\beta\psi_2)(v)=\alpha\psi_1(v)+\beta\psi_2(v)=\alpha\cdot 0+\beta\cdot 0=0_F$$

לכן A^0 סגור לקומבינציות לינאריות.

(ii) $0_{V^*}\in A^0$ כי $\forall v\in A\subseteq V$, $0_{V^*}(v)=0_F$. ■

25 הבסיס הדואלי

הגדרה 25.1 יהיו V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ ויהי $A=(v_1,\dots,v_n)$ בסיס סדור של v. הבסיס הדואלי של A מוגדר להיות $A^*=(\psi_1,\dots,\psi_n)$ כאשר $\psi_i\in V^*$ מוגדרת ע"י $\psi_i(v_j)=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$.

טענה הבסיס הדואלי A^* מוגדר היטב ובסיס של V^*.

הוכחה: ראשית מהיות A בסיס, ממשפט חשוב כלשהו ראינו כי קיימת ה"ל יחידה $\psi_i \in V^*$ שעבורה $\psi_i(v_1) = \cdots = \psi_i(v_n) = 0$, $\psi_i(v_i) = 1$ ולכן $\psi_i \in V^*$ מוגדרת היטב. נוכיח כי A^* בסיס ונסיים. $\dim V^* = \dim V$ ולכן מספיק שנוכיח כי היא בת"ל. יהיו $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ ונניח כי $\alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_n\psi_n = 0_{V^*}$. יהי $1 \leq j \leq n$ ונוכיח כי $\alpha_j = 0_F$.

$$\alpha_j = \alpha_j\psi_j(v_j) = \alpha_1\psi_1(v_j) + \cdots + \alpha_n\psi_n(v_j) = (\alpha_1\psi_1 + \cdots + \alpha_n\psi_n)(v_j) = 0_{V^*}(v_j) = 0_F$$

■

תרגיל יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

א. הראו כי $A = (v_1, \ldots, v_3)$ בסיס של $\mathbb{R}$.

ב. מצאו את $A^* = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.

פתרון א. $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ ולכן v_1, v_2, v_3 בת"ל ב- $\mathbb{R}^3$ ולכן הם בסיס.

ב. יהי $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ומהיות A בסיס קיימים $a, b, c \in \mathbb{R}$ יחידים כך ש-

$$\psi_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a\psi_1(v_1) + b\psi_1(v_2) + c\psi_1(v_3) = a$$

ובאותו האופן

$$\psi_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b. \quad \psi_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c$$

מתקיים

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix}$$

ולכן $\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} = K^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. $K^{-1} = \frac{\text{adj}(K)}{\det K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & -4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} b \\ a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -3x+y \\ 12x-4y+z \end{pmatrix}$$

לכן $\psi_1\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3x + y$, $\psi_2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x$, $\psi_3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 12x - 4y + z$.

תרגיל יהיו $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$. מצאו את הבסיס הדואלי.

פתרון $K^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ולכן $\psi_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -x + y$, $\psi_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}y$.

טענה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ויהי $A = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס סדור של A. יהי $A^* = (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ הבסיס הדואלי של A. יהי $\psi \in V^*$ אזי $[\psi]_{A^*} = \begin{pmatrix} \psi(v_1) \\ \vdots \\ \psi(v_n) \end{pmatrix}$.

הוכחה: מהיות A^* הבסיס של V^* קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ כך ש- $\psi=\alpha_1\psi_1+\cdots+\alpha_n\psi_n$. נוכיח כי $1\le\forall j\le n$, $\alpha_j=\psi\left(v_j\right)$.

$$\psi\left(v_j\right)=\left(\alpha_1\psi_1+\cdots+\alpha_n\psi_n\right)\left(v_j\right)=\alpha_1\psi_1\left(v_j\right)+\cdots+\alpha_n\psi_n\left(v_j\right)=\alpha_j\psi_j\left(v_j\right)=\alpha_j$$

■

משפט (המימדים ה- III) יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. יהי $W\subseteq V$ ת"מ. אזי $\dim W+\dim W^0=\dim V$.

הוכחה: מהיות $W\subseteq V$ ו- V נ"ס אזי W נ"ס ויהי $\left(v_1,\ldots,v_k\right)$ בסיס סדור של W. נשלים אותו לבסיס סדור של V, $A=\left(v_1,\ldots,v_n\right)$. נסמן $A^*=\left(\psi_1,\ldots,\psi_n\right)$ הבסיס הדואלי של A. נוכיח כי $\dim W^0=n-k$ ונסיים. מספיק להוכיח כי $\psi_{k+1},\ldots,\psi_n$ בסיס של W^0. ראשית, $\forall w\in W$ ו- $k+1\le\forall i\le n$ קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ כך ש- $w=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k$ ולכן $\psi_i\left(w\right)=\alpha_1\psi_i\left(w\right)+\cdots+\alpha_k\psi_i\left(w\right)=$ 0_F, כלומר $\psi_i\in W^0$, עבור $k+1\le i\le n$. ברור כי $\psi_{k+1},\ldots,\psi_n$ בת"ל כי היא תת קבוצה של בת"ל. נוכיח שהם פורשים: יהי $\psi\in W^0$. הוכחנו כי

$$\psi\left(v\right)=\psi\left(v_1\right)\psi_1\left(v\right)+\cdots+\psi\left(v_n\right)\psi_n\left(v\right)=\psi\left(v_{k+1}\right)\psi_{k+1}\left(v\right)+\cdots+\psi\left(v_n\right)\psi_n\left(v\right)$$

כלומר $\psi\in\text{sp}\left\{\psi_{k+1},\ldots,\psi_n\right\}$. ■

$\mathbb{XL}$

טענה יהי V מ"ו ויהיו $\varnothing\neq A,B\subseteq V$ כך ש- $A\subseteq B$ אזי $B^0\subseteq A^0$.

הוכחה: יהי $\psi\in B^0$ לכן $\psi\left(v\right)=0$, $\forall v\in B$ ולכן $\forall v\in A$ ולכן $\psi\in A^0$ כלומר $B^0\subseteq A^0$. ■

טענה יהי V מ"ו ותהי $A\subseteq V=\left\{v_1,\ldots,v_k\right\}$ אזי $A^0=\left(\text{sp}\left(A\right)\right)^0$.

הוכחה: ראינו כי $A\subseteq spA$ ולכן מהטענה הקודמת, $\left(\text{sp}A\right)^0\subseteq A^0$. יהי $\psi\in A^0$. נוכיח כי $\psi\in\left(\text{sp}A\right)^0$ ונסיים. יהי $v\in\text{sp}A$ לכן קיימים $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{F}$ כך ש- $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k$. לכן

$$\psi\left(v\right)=\psi\left(\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_kv_k\right)=\alpha_1\psi\left(v_1\right)+\cdots+\alpha_k\psi\left(v_k\right)=0+\cdots+0=0$$

לכן $\psi\in\left(\text{sp}A\right)^0$ כלומר $A^0\subseteq\left(\text{sp}A\right)^0$. ■

טענה יהי V מ"ו נ"ס ותהי $A\subseteq V=\left\{v_1,\ldots,v_k\right\}$ אזי $U=\left\{v\in V:\psi\left(v\right)=0,\forall\psi\in A^0\right\}=\text{sp}A$.

הוכחה: נוכיח כי $\text{sp}(A) \subseteq U$. יהי $v \in \text{sp}(A)$ ונוכיח כי $v \in U$. קיימים $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ כך ש- $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$. יהי $\psi \in A^0$. נוכיח כי $\psi(v) = 0$.

$$\psi(v) = \alpha_1 \psi(v_1) + \cdots + \alpha_k \psi(v_k) = 0 + \cdots + 0 = 0$$

לכן $v \in U$ ולכן $\text{sp}(A) \subseteq U$. עתה נוכיח כי $U \subseteq \text{sp}(A)$. נשים לב כי U ת"מ של V:

ברור כי $0_V \in U$.

יהיו $v_1, v_2 \in U$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ ו- $\psi \in A^0$.

$$\psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \psi(v_1) + \alpha_2 \psi(v_2) = 0 + 0 = 0$$

ראינו כבר כי $\text{sp}A \subseteq U$ ולכן $\text{sp}A$ ת"מ של U. לכן מספיק להוכיח כי $\dim U \geq \dim \text{sp}A$. יהי $\psi \in (\text{sp}(A))^0$ אזי $\psi(v) = 0$ $\forall v \in A$. לכן $\psi(u) = 0$, $\forall u \in U$ כלומר $(\text{sp}A)^0 \subseteq U^0$. ממשפט המימדים ה- III,

$$\dim V - \dim U = \dim U^0 \geq \dim (\text{sp}A)^0 = \dim V - \dim \text{sp}A$$

כלומר $\dim U \leq \dim \text{sp}A$. ■

טענה יהיו $W_1, W_2 \subseteq V$ ת"מ של מ"ו נ"ס V. נניח כי $W_1^0 = W_2^0$ אזי $W_1 = W_2$.

הוכחה: מהטענה הקודמת,

$$W_1 = \left\{v \in V : \forall \psi \in W_1^0, \psi(v) = 0\right\} = \left\{v \in V : \forall \psi \in W_2^0, \psi(v) = 0\right\} = W_2$$

■

26 המתאפס

הגדרה 26.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $\varnothing \neq B \subseteq V^*$. נגדיר $B_0 = \{v \in V : \psi(v) = 0, \forall \psi \in B\}$.

טענה $B_0 \subseteq V$ ת"מ.

הוכחה: ברור כי $0_V \in B_0$ כי $\psi(0_V) = 0$, $\forall \psi \in V^*$. יהיו $v_1, v_2 \in B_0$ ו- $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}$ ויהי $\psi \in B$. אזי

$$\psi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 \psi(v_1) + \alpha_2 \psi(v_2) = 0 + 0 = 0$$

$\blacksquare$

טענה $B_0 = \bigcap\limits_{\psi\in B} \ker\psi$.

הוכחה: יהי $\psi \in B$ ויהי $v \in B_0$. אזי $\psi(v)=0$ ולכן $v \in \ker\psi$. לכן $B_0 \subseteq \ker\psi$ ולכן $B_0 \subseteq \bigcap\limits_{\psi\in B}\ker\psi$. יהי $v \in \bigcap\limits_{\psi\in B}\ker\psi$ אזי $v \in B_0$ ולכן $\bigcap\limits_{\psi\in B}\ker\psi \subseteq B_0$. $\blacksquare$

טענה תהיינה $\varnothing \neq B_1, B_2 \subseteq V^*$ כך ש- $B_1 \subseteq B_2$. אזי $(B_2)_0 \subseteq (B_1)_0$.

הוכחה: יהי $v \in (B_2)_0$ לכן $\psi(v)=0$, $\forall\psi\in B_2$ ולכן גם עבור $\psi \in B_1$ ולכן $v \in (B_1)_0$. $\blacksquare$

טענה יהי V מ"ו נ"ס ותהי $A = \{v_1,\ldots,v_k\} \subseteq V$. אזי $\left(A^0\right)_0 = \text{sp}(A)$.

הוכחה: $\left(A^0\right)_0 = \left\{v\in V : \psi(v)=0, \forall\psi\in A^0\right\} = \text{sp}(A)$. $\blacksquare$

מסקנה אם $W \subseteq V$ ת"מ אזי $\left(W^0\right)_0 = W$.

טענה יהיו $U,W \subseteq V$ שני ת"מ של V. אזי $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$.

הוכחה: ראשית, ראינו כבר ש- $U,W \subseteq U+W$ ולכן $(U+W)^0 \subseteq U^0$ ו- $(U+W)^0 \subseteq W^0$ כלומר $(U+W)^0 \subseteq U^0\cap W^0$. יהי $\psi \in U^0\cap W^0$. יהי $v \in U+W$. לכן קיימים $u\in U, w\in W$ כך ש- $v=u+w$. לכן

$$\psi(v) = \psi(u+w) = \psi(u)+\psi(w) = 0+0 = 0$$

לכן $\psi \in (U+W)^0$. $\blacksquare$

תרגילים

1. יהיו $\psi_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x+2y+3z, \psi_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x-z$. נסמן $B=\{\psi_1,\psi_2\}$. מצאו את B_0.

$$B_0 = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : \psi_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0, \psi_2\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=0\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x+2y+3z=0, x-z=0\right\}$$

$\left\{\begin{smallmatrix}x+2y+3z=0\\x-z=0\end{smallmatrix}\right.$ לכן אם נבחר $x=t$ אז $z=t$, $y=-2t$. כלומר $B_0 = \left\{\begin{pmatrix}t\\-2t\\t\end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\} = \text{sp}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}$.

2. נביט ב- $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. נסמן $A=\{v_1,v_2\}$. מצאו את A^0. יהי $\psi\in A^0$. לכן קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $\psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ax+by+cz$. לכן $\psi\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = a+2b+3c$, $\psi\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = a-c = 0$ לכן $a=t, b=-2t, c=t$ כלומר $\psi\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = t(x-2y+z)$. לכן $A^0 = \text{sp}\{\psi_1\}$ כאשר $\psi_1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = x-2y+z$.

3. נביט ב- $V=\mathbb{R}_2[x]$. $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, נגדיר $\psi_\alpha:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}$ ע"י: $\psi_\alpha(p)=p(\alpha)$, $\forall p\in V$.

א. הוכיחו כי $\psi_\alpha\in V^*$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

ב. הוכיחו כי $\{\psi_1,\psi_2,\psi_3\}$ בסיס של V^*.

ג. מצאו בסיס (p_1,p_2,p_3) שעבורו $A^*=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$.

ד. מצאו $p\in\mathbb{R}_2[x]$ כך ש- $p(1)=4$, $p(2)=-1$, $p(3)=0$.

א. יהיו $\alpha\in\mathbb{R}$. יהיו $p_1,p_2\in V$ ו- $a,b\in\mathbb{R}$.

$$\psi_\alpha(ap_1+bp_2)=(ap_1+bp_2)(\alpha)=ap_1(\alpha)+bp_2(\alpha)=a\psi_\alpha(p_1)+b\psi_\alpha(p_2)$$

לכן ψ_α ה"ל ולכן $\psi_\alpha\in V^*$.

ב. מהיות $\dim V^*=\dim V=3$, מספיק להוכיח כי ψ_1,ψ_2,ψ_3 בת"ל. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ ונניח כי $a\psi_1+b\psi_2+c\psi_3=0_{V^*}$. נציב $p=1$ ונקבל $a\psi_1(1)+b\psi_2(1)+c\psi_3(1)=0$ כלומר $a+b+c=0$. נציב $p=x$ ונקבל $a\psi_1(x)+b\psi_2(x)+c\psi_3(x)=0$ כלומר $a+2b+3c=0$. עבור $p=x^2$ נקבל $a+4b+9c=0$. $\begin{cases}a+b+c=0\\a+2b+3c=0\\a+4b+9c=0\end{cases}$. $\det\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}=2\neq0$ לכן המטריצה הפיכה ולכן הפתרון היחיד למשוואה ההומוגנית הוא הטריוויאלי ולכן $a=b=c=0$.

ג. נחפש p_1,p_2,p_3 כך ש- $\begin{matrix}\psi_1(p_1)=1,\psi_1(p_2)=0,\psi_1(p_3)=0\\\psi_2(p_1)=0,\psi_2(p_2)=1,\psi_2(p_3)=0\\\psi_3(p_1)=0,\psi_3(p_2)=0,\psi_3(p_3)=1\end{matrix}$ נסמן $p_1(x)=a_1+a_2x+a_3x^2$. $\begin{cases}a_1+a_2+a_3=1\\a_1+2a_2+4a_3=0\\a_1+4a_2+9a_3=0\end{cases}$ (ובאותו האופן עבור p_2,p_3). המקדמים של כל אחד מהפולינומים יהיו העמודות של המטריצה ההפוכה למטריצת המקדמים המצומצמת.

$$K^{-1}=\frac{\text{adj }(A)}{\det K}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6&-6&2\\-5&8&-3\\1&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-3&1\\-\frac{5}{2}&4&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

לכן $p_1(x)=3-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x^2$, $p_2(x)=-3+4x-x^2$, $p_3(x)=1-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}x^2$. אם $p\in\mathbb{R}_2[x]$, אז קיימים $a,b,c\in\mathbb{R}$ כך ש- $p(x)=ap_1(x)+bp_2(x)+cp_3(x)=a$, $p(2)=b$ ו- $p(3)=c$.

ד. $p(x)=4\left(3-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(-3+4x-x^2\right)$. עוד דרך לפתור היא זו: נביט במקומות בהם הוא מתאפס ונציב אותם בתור שורשים של הפולינום ונקבל $p_1(x)=\frac{(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)}=3-5x+\frac{1}{2}x^2$ וכו'.

$\mathbb{XLI}$

27 מטריצת המעבר

הגדרה 27.1 יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$. ויהיו A,B בסיסים סדורים של V. <u>מטריצת המעבר</u> מ- A ל- B מוגדרת להיות $[id]_B^A$.

דוגמות

1. ב- $\mathbb{R}^2$, מהי מטריצת המעבר מ- $A=((1,1),(0,3))$ ל- $B=((0,1),(2,3))$ ומהי $[id]_A^B$?

$$(1,1)=\underline{-\frac{1}{2}}(0,1)+\underline{\frac{1}{2}}(2,3)\,,\quad (0,3)=\underline{3}(0,1)+\underline{0}(2,3)$$

כלומר $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=[id]_B^A$.

$$(0,1)=\underline{0}(1,1)+\underline{\frac{1}{3}}(0,3)\,,\quad (2,3)=\underline{2}(1,1)+\underline{\frac{1}{3}}(0,3)$$

לכן $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}=[id]_A^B$.

2. ב- $\mathbb{R}^3$, $A=((2,0,1),(0,1,2),(3,0,0))$, $E=(e_1,e_2,e_3)$. $[id]_E^A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $[id]_A^E=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

הערה יהי A בסיס סדור של V. אזי $[id]_A^A=I_n$.

מסקנה $[id]_B^B\cdot[id]_A^B=[id\circ id]_B^B=[id]_B^B=I_n$, $[id]_A^B\cdot[id]_B^A=[id]_A^A=I_n$ לכן $[id]_B^A$ הפיכה ו- $[id]_A^B=\left([id]_B^A\right)^{-1}$.

תרגיל תהי $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ה"ל הנתונה ע"י $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} x-y \\ 2x+y \end{smallmatrix}\right)$. יהי $A=((2,0),(1,1))$ ו- E הבסיס הסדור הסטנדרטי. מצאו את $[T]_A^A,[T]_E^E$.

פתרון $[T]_E^E=\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $[T]_A^A=\begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{2} \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ כי $T\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)=\underline{-1}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)+\underline{4}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ ו- $T\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \end{smallmatrix}\right)=\underline{-\frac{3}{2}}\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)+\underline{3}\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

28 דמיון מטריצות

הגדרה 28.1 תהיינה $K_1,K_2\in M_n(\mathbb{F})$. נאמר כי K_1,K_2 <u>דומות</u> (ונסמן $K_1\sim K_2$) אם קיימת $P\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה שעבורה $K_2=P^{-1}\cdot K_1\cdot P$.

משפט יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$. תהי $T:V\to V$ ה"ל ונסמן $n=\dim V$. תהיינה $K_1,K_2\in M_n(\mathbb{F})$. נניח כי קיים בסיס סדור A של V שעבורו $K_1=[T]_A^A$ אזי קיים בסיס סדור B של V שעבורו $K_2=[T]_B^B$ אם"ם K_1,K_2 מטריצות דומות.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח שקיים בסיס סדור B שעבורו $K_2=[T]_B^B$ ונוכיח כי $K_1\sim K_2$.

$$K_2=[T]_B^B=[id]_B^A[T]_A^A[id]_A^B=P^{-1}K_1P$$

כאשר $P=[id]_A^B$ וראינו ש- P הפיכה וכי $P^{-1}=[id]_B^A$.

$\Rightarrow$: נניח כי $K_2\sim K_1$ ולכן קיימת P כך ש- $K_2=P^{-1}K_1P$. נסמן $A=(v_1,\ldots,v_n)$ ולפי הנתון, $[T]_A^A=K_1$. נגדיר בסיס סדור $B=(w_1,\ldots,w_n)$ ע"י $w_i=a_{i1}v_1+\cdots+a_{i1}v_n$ כאשר $P=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$. נשים לב כי $P=\begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ [w_1]_A & \cdots & [w_n]_A \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ כלומר

$P = [id]_A^B$. נציב ונקבל

$$K_2 = P^{-1}K_1P = \left([id]_A^B\right)^{-1}[T]_A^A[id]_A^B = [id]_B^A[T]_A^A[id]_A^B = [id\circ T\circ id]_B^B = [T]_B^B$$

■

טענה יחס הדמיון הוא יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי), כלומר:

(i) $\forall K \in M_n(\mathbb{F})$, $K \sim K$.

(ii) $\forall K_1, K_2 \in M_n(\mathbb{F})$ אם $K_1 \sim K_2$ אזי $K_2 \sim K_1$.

(iii) $\forall K_1, K_2, K_3 \in M_n(\mathbb{F})$, אם $K_1 \sim K_2$ ו- $K_2 \sim K_3$ אזי $K_1 \sim K_3$.

הוכחה: (i) $K = I_n^{-1}KI_n$ ולכן $K \sim K$.

(ii) מהיות $K_1 \sim K_2$, קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $K_2 = P^{-1}K_1P$ ולכן $K_1 = PP^{-1}K_1PP^{-1} = PK_2P^{-1}$ לכן $K_1 = PK_2P^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1}K_2P^{-1} = Q^{-1}K_2Q$ ולכן $K_2 \sim K_1$.

(iii) מהיות $K_1 \sim K_2$ ו- $K_2 \sim K_3$, קיימות $P, Q \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכות כך ש- $K_2 = P^{-1}K_1P$ ו- $K_3 = Q^{-1}K_2Q$ לכן

$$K_3 = Q^{-1}\left(P^{-1}K_1P\right)Q = \left(Q^{-1}P^{-1}\right)K_1(PQ) = (PQ)^{-1}K_1(PQ)$$

כלומר $K_1 \sim K_2$. ■

טענה תהיינה $K_1K_2 \in M_n(\mathbb{F})$. נניח כי $K_1 \sim K_2$ אזי $\det K_1 = \det K_2$.

הוכחה: מהיות $K_1 \sim K_2$ קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש- $K_2 = P^{-1}K_1P$ לכן

$$\det K_2 = \det\left(P^{-1}K_1P\right) = \det\left(P^{-1}\right)\det K_1 \det P = \frac{1}{\det P}\det K_1 \det P = \det K_1$$

■

דוגמות

1. $K_2 = \begin{pmatrix} 1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 1&2&3\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$ אזי $K_2 \nsim K_1$ כי $\det K_1 = 24 \neq \det K_2 = 0$.
2. $K_2 = \begin{pmatrix} 1&1\\0&1\end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 1&2\\0&1\end{pmatrix}$. נחפש $P = \begin{pmatrix} a&b\\c&d\end{pmatrix}$ הפיכה כך ש- $PK_2 = K_1P$ וגם $K_2 = P^{-1}K_1P$.

$$PK_2 = \begin{pmatrix} a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a&a+b\\c&c+d\end{pmatrix}$$

$$K_1P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

לכן $PK_2 = K_1P$ אם"ם $c = 0$ ו- $a = 2d$ כלומר $P = \begin{pmatrix} 2d & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. נבחר $d = 1$, $b = 0$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ לכן $K_1 \sim K_2$.

3. $K_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, K_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, האם $K_1 \sim K_2$? לא. אם בשלילה הייתה קיימת מטריצה הפיכה $P \in M_3$ כך ש-

$$K_2 = P^{-1}K_1P = P^{-1}I_3P = I_3$$

אבל $K_2 \neq I_3$ סתירה.

טענה תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$.

(i) אם $K \sim I_n$ אזי $K = I_n$.

(ii) אם $K \sim 0_n$ אזי $K = 0_n$.

הוכחה: (i) $K \sim I_n$ ולכן קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש- $K = P^{-1}I_nP = I_n$.

(ii) $K \sim 0_n$ ולכן קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש- $K = P^{-1}0_nP = 0_n$. ■

כאן נגמר החומר הרשמי של הקורס

חלק III

טעימה מלינארית 2

29 וקטורים וערכים עצמיים ולכסינות

הגדרה 29.1 יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T: V \to V$ ה"ל וקטור $v \in V$ יקרא וקטור עצמי של T ($eigenvector$) אם:

(i) $v \neq 0_V$.

(ii) קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ שעבורו $T(v) = \lambda \cdot v$. λ נקרא הערך העצמי ($eigenvalue$) המתאים ל- v.

הגדרה 29.2 יהי V מ"ו נ"ס מעל $\mathbb{F}$ ותהי $t: V \to V$ ה"ל. T תקרא לכסינה ($diagonalizable$) אם קיים ב- V בסיס של וקטורים עצמיים של T.

הגדרה 29.3 תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. $\vec{x} \in \mathbb{F}^n$ יקרא ו"ע של K אם:

(i) $\vec{x} \neq \vec{0}$.

(ii) קיים $\lambda \in \mathbb{F}$ כך ש- $k\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (כלומר, $\vec{x}$ הוא ו"ע של T_k). K תקרא לכסינה אם יש בסיס של $\mathbb{F}^n$ המורכב מוקטורים עצמיים של K.

הערה נניח כי $T: V \to V$ ה"ל לכסינה ויהי $A = (v_1, \ldots, v_n)$ בסיס סדור של ו"ע של T ויהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ הע"ע המתאימים, כלומר $T(v_j) = \lambda_j v_j$. אזי $[T]_A^A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

דוגמה נגדיר $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix}$. מצאו וקטור עצמי וע"ע מתאימים.? נחפש $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ו- $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $T(v) = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} x+y \\ 2x-y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. $\begin{cases} x+y=\lambda x \\ 2x-y=\lambda y \end{cases} = \begin{cases} (1-\lambda)x+y=0 \\ 2x+(-1-\lambda)y=0 \end{cases}$. נבדוק מתי הדטרמיננטה של מטריצת המקדמים מתאפסת, שכן במקרים אלו קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת. $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} (1-\lambda)(-1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 3 = 0$ כלומר $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$. $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$ ו"ע והע"ע המתאים לו הוא $\sqrt{3}$ כי הוא מקיים את המשוואה הראשונה והשנייה ת"ל בראשונה.

$\mathbb{XLII}$

דוגמות

1. תהי $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ הנתונה ע"י $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

   א. הראו כי 1 ע"ע של T ומצאו לו ו"ע מתאים.

   ב. קבעו האם יש ע"ע $\lambda \neq 1$ ומצאו אותו.

   ג. קבעו האם T לכסינה. אם כן, מצאו בסיס סדור $A = (v_1, v_2)$ של ו"ע של T, ורשמו את $[T]_A^A$.

א. 1 ע"ע אם"ם קיים $\vec{0} \neq \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ שעבורו $T(\vec{v}) = 1 \cdot \vec{v}$. נשים לב כי $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ ו"ע של T ו- $T\left(\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 \cdot \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ כלומר $\lambda = 1$ ע"ע של T.

ב. נחפש $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ כלומר $\left\{\begin{smallmatrix} y - \lambda x = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{smallmatrix}\right.$. יש פתרון לא טריוואלי אם"ם המטריצה לא הפיכה כלומר $\det\left(\begin{smallmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - 1 = 0$ כלומר $\lambda = \pm 1$ ולכן -1 הוא ע"ע.

ג. נחפש $\vec{0} \neq \vec{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ שעבורו $T(\vec{v_2}) = -1 \cdot \vec{v_2}$ כלומר, $\left(\begin{smallmatrix} y \\ x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -x \\ -y \end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי $\vec{v_2} = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ -3 \end{smallmatrix}\right)$ מקיים את הדרוש. נשים לב כי $A = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ בסיס סדור של $\mathbb{R}^2$ ולכן T לכסינה ולבסוף, $[T]_A^A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

2. תהי $K = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

א. מצאו את הע"ע של K.

ב. קבעו האם K לכסינה (כלומר האם קיים בסיס סדור של ו"ע של K). אם כן, מצאו $D \in M_3(\mathbb{R})$ אלכסונית כך ש- $K \sim D$.

א. יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ויהי $\vec{0} \neq \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי λ הוא ע"ע של K אם"ם קיים פתרון לא טרוויאלי למשוואה $K\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{smallmatrix}\right)$. $\left\{\begin{smallmatrix} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ 5x + (3-\lambda)y = 0 \end{smallmatrix}\right.$ $\det\left(\begin{smallmatrix} 1-\lambda & 5 \\ 5 & 3-\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 - 4\lambda - 22 = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{104}}{2} = 2 \pm \sqrt{26}$.

ב. עבור $\lambda = 2 + \sqrt{26}$, נחפש $\vec{v_1} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ ו"ע מתאים $\left\{\begin{smallmatrix} (1-\lambda)x + 5y = 0 \\ 5x + (3-\lambda)y = 0 \end{smallmatrix}\right.$. הדטרמיננטה היא 0 ולכן השורות ת"ל ולכן מספיק לפתור רק אחת מהמשוואות ונסיים. נבחר $x = 1$, $y = \frac{\lambda_1 - 1}{5} = \frac{1 + \sqrt{26}}{5}$ לכן $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{26}}{5} \end{pmatrix}$ ובאותו האופן $\vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{26}}{5} \end{pmatrix}$. נשים לב כי $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ בת"ל ולכן קיים בסיס $A = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ של ו"ע של K. לכן K לכסינה. נמצא D אלכסונית כך ש- $K \sim D$. נשים לב כי $K = [T_k]_E^E$ וכי $[T_K]_A^A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$. לכן $P^{-1}KP = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{smallmatrix}\right)$ כאשר $P = [id]_E^A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1+\sqrt{26}}{5} & \frac{1-\sqrt{26}}{5} \end{pmatrix}$.

3. נגדיר $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right)$.

א. מצאו את $[T]_E^E$.

ב. הוכיחו שלא קיימים ל- T ו"ע.

א. $[T]_E^E = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

ב. נשים לב כי $0 \neq \vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$ ו"ע אם"ם $T\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} -y \\ x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{smallmatrix}\right)$ כלומר אם"ם $\left\{\begin{smallmatrix} -\lambda x - y = 0 \\ x - \lambda y - 0 \end{smallmatrix}\right.$. $\det\left(\begin{smallmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{smallmatrix}\right) = \lambda^2 + 1 = 0$ ולזה אין פתרון. לכן ל- T אין ו"ע (וגם אין ע"ע).

הערה $K \in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה אם"ם קיים בסיס $\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n} \in \mathbb{F}^n$ של ו"ע של K. יהיו $\lambda_1, \ldots, \lambda_2 \in \mathbb{F}$ הע"ע המתאימים. מהיות $K = [T_K]_E^E$, אזי עבור בסיס סדור A מתקיים $[id]_A^E K [id]_E^A = [id]_A^E [T_K]_E^E [id]_E^A = [T_K]_A^A$ לכן אם נסמן $A = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$ ו- $P = [id]_E^A$, אזי קיבלנו ש- $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = [T]_A^A = P^{-1}KP$ ו- $P = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$ כלומר קיבלנו ש- K לכסינה אם"ם $P^{-1}KP = D$.

טענה תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. אזי K לכסינה אם"ם קיימת $D \in M_n(\mathbb{F})$ אלכסונית כך ש- $K \sim D$.

הוכחה: $\Leftarrow$: ראינו

$\Rightarrow$: נניח שקיימת D אלכסונית כך ש- $K \sim D$ לכן קיימת $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש- $P^{-1}KP = D$. נסמן $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ו- $P = \begin{pmatrix} \vdots & & \vdots \\ \vec{v_1} & \cdots & \vec{v_n} \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$. נשים לב כי $K = [T_K]_E^E$. $P = [id]_E^A$ כאשר $A = (\vec{v_1}, \ldots, \vec{v_n})$, A בסיס סדור (כי P הפיכה ולכן העמודות שלה

בת"ל) ולכן $[T_K]_A^A = [id]_E^A [T_K]_E^E [id]_A^E = P^{-1}KP = D$ ולכן $D = [T_K]_A^A$ ולכן $T_K(\vec{v_i}) = \lambda_i \vec{v_i}$, $1 \leq \forall i \leq n$ כלומר A בסיס של ו"ע של K ולכן K לכסינה. ■

דוגמות

1. $I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ לכסינה (כי היא דומה לעצמה).
2. כל מטריצה אלכסונית D היא לכסינה (כי $D \sim D$).
3. ראינו כי $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ לא לכסינה (והיא הפיכה).
4. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ לא לכסינה. נחפש $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \neq \vec{0}$ שהוא ו"ע של K. לכן λ $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \lambda \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)$, $\left\{\begin{smallmatrix} y = \lambda x \\ 0 = \lambda y \end{smallmatrix}\right.$. אם $\lambda = 0$ אזי $y = 0$ ולכן $\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ ו"ע אם $\lambda \neq 0$ אז $y = 0$, $x = 0$ ואין פתרון! לכן הע"ע היחיד של K הוא $\lambda = 0$ וקבוצת הע"ע המתאימה לו היא $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right) : x \in \mathbb{R}\right\}$.
   לכן K לא לכסינה! (אין בסיס של ו"ע).
   $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

30 המרחב העצמי והריבוי האלגברי

הגדרה 30.1 תהי $T : V \to V$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. <u>המרחב העצמי</u> של T המתאים ל- λ מוגדר להיות $V_\lambda = \{v \in V : T(v) = \lambda v\}$.

טענה V_λ מ"ו מעל $\mathbb{F}$.

הוכחה: נשים לב כי $T(0_V) = 0_V = \lambda \cdot 0_V$ ולכן $0_V \in V_\lambda$. יהיו $v_1, v_2 \in V_\lambda$ ו- $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. אזי

$$T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2) = \alpha \lambda v_1 + \beta \lambda v_2 = \lambda(\alpha v_1 + \beta v_2)$$

ולכן $\alpha v_1 + \beta v_2 \in V_\lambda$. ■

הערה $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של T אם"ם $V_\lambda \neq \{0_V\}$ כלומר אם"ם $\dim V_\lambda \geq 1$.

הגדרה 30.2 תהי $T : V \to V$ ה"ל ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. <u>הריבוי הגאומטרי</u> של λ מוגדר להיות $\ell(v) = \dim V_\lambda$.

הערה λ ע"ע אם"ם הריבוי הגאומטרי של λ גדול או שווה ל- 1.

הגדרה 30.3 תהי $T : V \to V$ ה"ל כאשר V נ"ס. נגדיר את <u>הדטרמיננטה</u> של T להיות $\det T = \det [T]_A^A$ כאשר A בסיס סדור של V.

טענה $\det T$ מוגדרת היטב.

הוכחה: יהיו A, B בסיסים סדורים של V. ראינו כי $[T]_A^A = [id]_A^B [T]_B^B [id]_B^A$.

$$\det\left([T]_A^A\right) = \det [id]_A^B \det [T]_B^B \det [id]_B^A = \det [T]_B^B$$

■

טענה תהי $T : V \to V$ ה"ל ונניח כי V נ"ס. יהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי λ ע"ע של T אם"ם $\det(T - \lambda id) = 0$.

הוכחה: λ ע"ע של T אם"ם קיים $0_V \neq v \in V$ כך ש- $T(v) = \lambda v$ אם"ם $T(v) = \lambda \cdot id(v)$ אם"ם

$$(T - \lambda id)(v) = T(v) - \lambda id(v) = 0_V$$

אם"ם $v \in \ker(T - \lambda id)$ אם"ם $\ker(T - \lambda id) \neq 0$ אם"ם $T - \lambda id$ לא חח"ע אם"ם $T - \lambda id$ לא על אם"ם $T - \lambda id$ לא הפיכה אם"ם $[T - \lambda id]_A^A$ לא הפיכה לכל בסיס A אם"ם $\det(T - \lambda id) = 0$. ■

מסקנה תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$ אזי λ ע"ע של K אם"ם $\det(K - \lambda id) = 0$.

הוכחה: λ ע"ע של K אם"ם קיים $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $T_K(\vec{v}) = K\vec{v} = \lambda\vec{v}$ אם"ם λ ע"ע של T_K אם"ם $\det(T_k - \lambda id) = 0$ אם"ם $\det[T_K - \lambda id]_E^E = 0$ אבל $[T_K - \lambda id]_E^E = [T_K]_E^E - \lambda [id]_E^E = K - \lambda I_n$. ■

31 הפולינום האופייני

הגדרה 31.1 הפולינום האופייני של $T : V \to V$ ה"ל כך ש- V נ"ס מוגדר להיות $P_T(x) = \det(T - x \cdot id)$. הפולינום של $K \in M_n(\mathbb{F})$ מוגדר להיות $P_K(x) = \det(K - xI_n)$.

מסקנה λ ע"ע של K אם"ם $P_K(\lambda) = 0$.

דוגמות

1. $K = I_n$. $P_K(x) = \det(I_n - xI_n) = (1-x)^n$ לכן $\lambda = 1$ הע"ע היחיד.
2. $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. $P_K(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1$ לכן K לא לכסינה מעל R.
3. $K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. $P_K(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ כלומר $\lambda = 0$ הע"ע החיד. לכן K לא לכסינה. אם בשלילה K לכסינה, אזי $K \sim D$ כאשר $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ ולכן $K \sim 0$ סתירה!

4. $K=\left(\begin{smallmatrix}1&2&1\\0&1&3\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$. $P_K(\lambda)=(1-\lambda)^3=0$ לכן $\lambda=1$ הע"ע היחיד ולכן K לא לכסינה כי $K\nsim I_n$.

5. $K=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\-1&0\end{smallmatrix}\right)$. האם K לכסינה מעל $\mathbb{C}$? $P_K(\lambda)=\left(\begin{smallmatrix}-\lambda&1\\-1&-\lambda\end{smallmatrix}\right)=\lambda^2+1=0$ כלומר $\lambda_{1,2}=\pm i$. יהיו $\vec{v_1},\vec{v_2}$ ו"ע המתאימים ל- λ_1,λ_2 לכן $K\cdot\vec{v_1}=i\vec{v_1}$ ו- $K\cdot\vec{v_2}=i\vec{v_2}$. נשים לב כי $\vec{v_1},\vec{v_2}$ בת"ל. אחרת, אם בשלילה $\vec{v_1},\vec{v_2}$ ת"ל, אזי קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $\vec{v_1}=\alpha\vec{v_2}$ או $\vec{v_2}=\alpha\vec{v_1}$. אם $\vec{v_1}=\alpha\vec{v_2}$ אזי $iv_1=Kv_1=K(\alpha v_2)=\alpha Kv_2=\alpha(-i)v_2=i(-\alpha v_2)$ כלומר $\alpha v_2=-\alpha v_2=v_1$ לכן $\alpha=0$ (כי $v_2\neq 0$) כלומר $v_1=0$ סתירה. לכן קיים בסיס של ו"ע של K ולכן K לכסינה. ולכן $K\sim\left(\begin{smallmatrix}i&0\\0&-i\end{smallmatrix}\right)$.

$\mathbb{XLIII}$

טענה תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$ אזי K לא הפיכה אם"ם $\lambda=0$ ע"ע של K.

הוכחה: $\lambda=0$ הוא ע"ע אם"ם $\det K=\det(K-\lambda I)=0$ אם"ם K לא הפיכה. ■

תרגילים

1. תהי $K=\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{smallmatrix}\right)$. מצאו את כל הע"ע של K וקבעו האם K לכסינה. אם כן, מצאו $P\in M_3(\mathbb{R})$ הפיכה כך ש- $P^{-1}KP$ אלכסונית.

$$P_K(x)=\det(K-xI_3)=\det\left(\begin{smallmatrix}1-x&2&3\\4&5-x&6\\7&8&9-x\end{smallmatrix}\right)=-x^3+15x^2+18x=-x\left(x^2-15x-18\right)=-x(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

כאשר $\lambda_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{297}}{2}$.

$\lambda=0$: נחפש $\vec{v_1}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ כך ש- $K\vec{v}=\lambda\vec{v_1}=\vec{0}$.

$$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{smallmatrix}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+R_4]{R_2\to 2R_2}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\8&10&12\\8&10&12\end{smallmatrix}\right)\xrightarrow{R_3\to R_3-R_1}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\8&10&12\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-8R_1}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\0&-6&-12\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)\xrightarrow{R_2\to -\frac{1}{6}R_2}\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$$

נבחר $z=1$, לכן $y=-2$ ולכן $x=1$ לכן $\vec{v_1}=\left(\begin{smallmatrix}1\\-2\\1\end{smallmatrix}\right)$ ו"ע המתאים ל- $\lambda=0$.

$\lambda=\lambda_1$: נחפש $\vec{v_2}=\left(\begin{smallmatrix}x\\y\\z\end{smallmatrix}\right)\neq\left(\begin{smallmatrix}0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ כך ש- $K\vec{v}=\lambda\vec{v_2}=\vec{0}$ כלומר $(K-\lambda_1 I)\vec{v_2}=0$. $K-\lambda_1 I=\left(\begin{smallmatrix}1-\lambda_1&2&3\\4&5-\lambda_1&6\\7&8&9-\lambda_1\end{smallmatrix}\right)$. אנו יודעים כי קיים פתרון לא טריוויאלי למטריצה למשוואה ולכן נבחר שרירותית $z=1$ לכן המשוואות במערכת המשוואות המתקבלת מהמטריצה בהצבת $z=1$ הן $(1-\lambda_1)x+2y=-3$ וגם $4x+(5-\lambda_1)y=-6$ כלומר

$$\left(\begin{smallmatrix}1-\lambda_1&2\\4&5-\lambda_1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-3\\-6\end{smallmatrix}\right)$$

ולכן

$$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}1-\lambda_1&2\\4&5-\lambda_1\end{smallmatrix}\right)^{-1}\left(\begin{smallmatrix}-3\\-6\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{(1-\lambda_1)(5-\lambda_1)-8}\left(\begin{smallmatrix}5-\lambda_1&-2\\-4&1-\lambda_1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-3\\-6\end{smallmatrix}\right)=\frac{1}{(1-\lambda_1)(5-\lambda_1)-8}\left(\begin{smallmatrix}-3(5-\lambda_1)+12\\12-6(1-\lambda_1)\end{smallmatrix}\right)$$

ולכן $\vec{v_2} = \frac{1}{\lambda_1^2-6\lambda_1-3}\begin{pmatrix}3\lambda_1-3\\6\lambda_1-6\\\lambda_1^2-6\lambda_1-3\end{pmatrix}$ וגם $\vec{v_3} = \frac{1}{\lambda_2^2-6\lambda_2-3}\begin{pmatrix}3\lambda_2-3\\6\lambda_2-6\\\lambda_2^2-6\lambda_2-3\end{pmatrix}$. קל לראות כי v_1, v_2, v_3 בת"ל ולכן K לכסינה ו- $P = \begin{pmatrix}\vdots&\vdots&\vdots\\\vec{v_1}&\vec{v_2}&\vec{v_3}\\\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$ ו- $P^{-1}KP = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}$.

2. תהי $K = \begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{pmatrix}$. מצאו את כל הע"ע של K וקבעו האם K לכסינה.

נשים לב כי $\lambda = 1$ ע"ע כי $K - 1\cdot I = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$. נשים לב כי $\dim V_1 = 3$ **למה**. לכן $\lambda = 1$ ע"ע עם ר"ג 3. $v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}$ בסיס ל- V_1. נשים לב גם כי $K\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\5\\5\end{pmatrix} = 5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ולכן $v_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ ו"ע של K עם ע"ע 5. נשים לב כי v_4 בת"ל בקודמיו כי אחרת, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+b+c\\-a\\-b\\-c\end{pmatrix}$ ולזה אין פתרון ולכן $v_1, \dots v_4$ בסיס של ו"ע של K ולכן K לכסינה ועבור $P = \begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\-1&0&0&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$ מתקיים $P^{-1}KP = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$.

3. סדרת פיבונצ'י מוגדרת ע"י $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$, $\forall n \geq 3$ וגם $x_1 = x_2 = 1$. נחפש נוסחה ישירה (לא ריקורסיבית) ל- x_n. נביט ב- $v_n = \begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix}$, $\forall n \geq 2$. נשים לב כי $v_n \in \mathbb{R}^2$ ומתקיים

$$v_n = \begin{pmatrix}x_n\\x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_{n-1}+x_{n-2}\\x_{n-1}\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}}_{K}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\x_{n-2}\end{pmatrix} = K\cdot v_{n-1}$$

לכן $\forall n \geq 3$, $v_n = K\cdot v_{n-1}$. לכן $v_n = Kv_{n-1} = K^2v_{n-2} = K^{n-2}v_2 = K^{n-2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. נחשב את K^n, $\forall n$.

$$P_K(x) = \det\begin{pmatrix}1-x&1\\1&-x\end{pmatrix} = (1-x)(-x) - 1 = x^2 - x - 1 = 0$$

$\lambda_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

λ_1: נחפש ו"ע המתאים ל- λ_1: $\begin{pmatrix}1-\lambda_1&1\\1&-\lambda_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. נבחר $x = 1$ (השורות ת"ל ולכן נבחר שרירותית) ולכן $y = \lambda_1 - 1$ ולכן $\begin{pmatrix}1\\\lambda_1-1\end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל- λ_1.

λ_2: $\begin{pmatrix}1\\\lambda_2-1\end{pmatrix}$ ו"ע המתאים ל- λ_2.

הוקטורים בת"ל ולכן K לכסינה. $P^{-1}KP = D$ כאשר $D = \begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ ו- $P = \begin{pmatrix}1&1\\\lambda_1-1&\lambda_2-1\end{pmatrix}$ לכן $K = PDP^{-1}$. לכן $K^2 = PDP^{-1}PDP^{-1} = PD^2P^{-1}$ ולכן באינדוקציה $K^{n-2} = PD^{n-2}P^{-1}$. נציב ונקבל

$$v_n = K^{n-2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = PD^{n-2}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\lambda_1^2&0\\0&\lambda_2^2\end{pmatrix}P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\det P = \lambda_2 - 1 - (\lambda_1 - 1) = \lambda_2 - \lambda_1 = -\sqrt{5}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{\det P}\begin{pmatrix}\lambda_2-1&-1\\1-\lambda_1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1-\lambda_2}{\sqrt{5}}&\frac{1}{\sqrt{5}}\\\frac{\lambda_1-1}{\sqrt{5}}&-\frac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}&1\\\frac{\sqrt{5}-1}{2}&-1\end{pmatrix}$$

$P^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\\\frac{\sqrt{5}-1}{2}-1\end{pmatrix}$. נציב ונקבל $v_n = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\lambda_1^{n-2}(2-\lambda_2)+\lambda_2^{n-2}(\lambda_1-2)\right)\\*\end{pmatrix}$.

טענה תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda \in \mathbb{F}$. אזי אם λ ע"ע של K אזי $1 \leq \dim V_\lambda \leq n$. אחרת, $\dim V_\lambda = 0$.

הוכחה: ראשית $V_\lambda = \{v \in \mathbb{F}^n : Kv = \lambda v\} \subseteq \mathbb{F}^n$ אם λ ע"ע, קיים $\vec{0} \neq v \in \mathbb{F}^n$ כך ש- $Kv = \lambda v$ ולכן $V_\lambda \neq \left\{\vec{0}\right\}$, ולכן $\dim V_\lambda \geq 1$.

אחרת, אם λ אינו ע"ע של K ולכן $V_\lambda = \left\{\vec{0}\right\}$ ולכן $\dim V_\lambda = 0$. ■

משפט יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$. תהי $T \in \hom(V,V)$. יהיו $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ ע"ע של T ויהיו $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{F}^n$ המתאימים ל- $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ בהתאמה. נניח כי $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ שונים זה מזה. אזי $v_1, \dots, v_k$ בת"ל.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על k.

$k = 1$: ברור כי v_1 בת"ל (כי $v_1 \neq 0_V$).

$k \to k+1$: נניח שעבור $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ מתקיים $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V$. נוכיח כי $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0_F$ ונסיים.

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = T(0_V) = 0_V$$

לכן $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0_V \\ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0_V \end{smallmatrix} \right.$. נכפיל את המשוואה הראשונה ב- λ_1 ונקבל $\left\{ \begin{smallmatrix} \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k = 0_V \\ \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_1 v_k = 0_V \end{smallmatrix} \right.$ ולכן

$$\alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_1) v_2 + \cdots + \alpha_k (\lambda_k - \lambda_1) v_k = 0_V$$

מה"א, $v_2, \dots, v_k$ בת"ל ולכן $\alpha_i (\lambda_i - \lambda_1)$, $2 \leq \forall i \leq n$ ומכך שכל הע"ע שונים זה מזה, $\alpha_i = 0_F$, $2 \leq \forall i \leq n$. לכן $\alpha_1 v_1 + 0_V + \cdots + 0_V = 0_V$ אבל v_1 ו"ע ולכן $v_1 \neq 0_V$ לכן גם $\alpha_1 = 0$. ■

מסקנה אם יש n ע"ע שונים זה מזה ל- $T \in \hom(V,V)$ ואם $\dim V = n$, אזי יש בסיס $v_1, \dots, v_n$ של ו"ע ולכן T לכסינה.

$\mathbb{XLIV}$

משפט יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T : V \to V$ ה"ל. יהיו $\lambda_1, \dots \lambda_k \in \mathbb{F}$ ע"ע של T השונים זה מזה ויהיו $V_1, \dots, V_k$ המרחבים העצמיים המתאימים. יהיו $\ell_1, \dots, \ell_k$ הריבויים הגאומטרים של $\lambda_1, \dots \lambda_k$ בהתאמה. יהיו $v_1, \dots, v_{\ell_1} \in V_1$ בסיס של V_1 עד $v_{\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_{k-1} + 1}, \dots, v_{\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k} \in V_k$ בסיס של V_k. אזי $v_1, \dots, v_{\ell_1 + \cdots + \ell_k}$ בת"ל.

הוכחה: נוכיח באינדוקציה על k.

$k = 1$: הטענה ברור כי $v_1, \dots, v_{\ell_1}$ בסיס.

$k - 1 \to k$: נסמן $r = \ell_1 + \dots \ell_k$. יהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{F}$ כך ש- $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r = 0_V$ לכן

$$\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_r \lambda_k v_r = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_r T(v_r) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_r v_r) = 0_V$$

לכן $\left\{\begin{smallmatrix}\alpha_1\lambda_1 v_1+\cdots+\alpha_k\lambda_k v_k=0_V\\ \alpha_1\lambda_1 v_1+\cdots+\alpha_k\lambda_1 v_k=0_V\end{smallmatrix}\right.$ (כמו בהוכחה הקודמת) לכן $\alpha_r v_r = 0$ $\alpha_{\ell_1+1}(\lambda_1-\lambda_2)v_{\ell_1+1}+\cdots+(\lambda_1-\lambda_k)$. מה"א, $v_2,\ldots,v_k$ בת"ל ולכן $\alpha_i(\lambda_1-\lambda_i)$, $2 \leq \forall i \leq n$ ומכך שכל הע"ע שונים זה מזה, $\alpha_i = 0_F$, $2 \leq \forall i \leq n$. לכן $\alpha_1 v_1+\cdots+\alpha_{\ell_1}v_{\ell_1}+0_V+$ $\cdots+0_V=0_V$ אבל $v_1,\ldots,v_{\ell_1}$ בת"ל ולכן גם $\alpha_1=\cdots=\alpha_{\ell_1}=0$. ■

מסקנה יהי V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ ותהי $T: V \to V$ ה"ל. יהיו $\lambda_1,\ldots\lambda_k \in \mathbb{F}$ ע"ע של T השונים זה מזה ויהיו $\ell_1,\ldots,\ell_k$ הריבויים הגאומטרים של $\lambda_1,\ldots\lambda_k$ בהתאמה. אזי $r=\ell_1+\cdots+\ell_k \leq n$ ו- $\ell_1+\cdots+\ell_k=n$ אם"ם T לכסינה.

טענה תהי $A(x) \in M_n(\mathbb{F}_1[x])$. אזי $\det A(x)$ פולינום ממעלה $\geq n$.

הוכחה: באינדוקציה על n.

$n=1$: $A(x)=(a+bx)$ ולכן $\det A(x)=a+bx$.

$n-1\to n$: נפתח את $\det A(x)$ לפי השורה הראשונה. $\det A(x)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[A(x)]_{1j}\cdot M_{1j}\overset{\text{ה"א}}{=}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}(a_{1j}+b_{1j}x)\,p_{1j}(x)\in$ $\mathbb{F}_n[x]$ כאשר $p_{1j}(x)$ פולינום ממעל $\geq n-1$ ■

משפט תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי P_K הפולינום האופייני של K. אזי P_k פולינום ממעלה n, שהמקדם הראשי שלו (כלומר המקדם של λ^n הוא $(-1)^n$ ושהמקדם החופשי שלו הוא $\det K$.

הוכחה: נשים לב כי $P_K(x)=\det\begin{pmatrix}a_{11}-x & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}-x\end{pmatrix}$. נוכיח באינדוקציה

$n=1$: $P_K(x)=\det(a_{11}-x)=a_{11}-x$ פולינום ממעלה $1=$ שהמקדם הראשי שלו הוא $-1=(-1)^n$.

$n-1\to n$: נפתח את הדטרמיננטה לפי השורה הראשונה.

$$\det(K-xI)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}[K-xI]_{1j}\cdot M_{1j}=(a_{11}-x)\,M_{11}+\sum_{j=2}^{n}(-1)^{1+j}[K]_{1j}\cdot M_{1j}$$

לפי טענת העזר, M_{1j} הוא פולינום ממעלה $\geq n-1$. מה"א, M_{11} הוא פולינום ממעלה $=n-1$ (כי הוא הפולינום האופייני של המטריצה שהתקבלה מ- K ע"י השמטת העמודה והשורה הראשונה) שהמקדם הראשי שלו הוא $(-1)^{n-1}$. לכן $\det(K-xI)=(n=\text{מעלה})+$ $(n-1\geq\text{מעלה})$ כלומר פולינום ממעלה n, שהמקדם הראשי שלו הוא $(-1)^n=(-1)^{n-1}-$. ■

32 הריבוי האלגברי

הגדרה 32.1 יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ויהי $P_K(x)$ פולינום אופייני של $K\in M_n(\mathbb{F})$. הריבוי האלגברי של λ מוגדר להיות החזקה המקסימלית של $x-\lambda$ בפירוק לגורמים של P_k, כלומר $\max\{r\in\mathbb{Z}:(x-\lambda)^r\,|P_K\}$.

תרגילים

1. $P_K(x) = -(-x-1)^2(x-2)$. $\lambda = 1$ ע"ע מר"א 2. $\lambda = 2$ ע"ע מר"א 1. $\lambda = 3$ מר"א 0.

2. $K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. $P_K(x) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 0 & 2-x \end{pmatrix} = (2-x)^2$. לכן $\lambda = 2$ ע"ע מר"א 2. מהו הר"ג של λ? נחשב

$$V_\lambda = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : K\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R}\right\} = sp\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן הר"ג של λ הוא 1 ו- K לא לכסינה!

3. $K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. האם K לכסינה? $P_K(x) = (1-x)^3$. $\lambda = 1$ ע"ע יחיד. אם K היתה לכסינה אזי $K \sim I$ סתירה!

4. תהי $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}[x]$ העתקה המוגדרת ע"י $T(p) = \left(\left(x^2-1\right)p(x)\right)''$, $\forall p \in \mathbb{R}_3[x]$.

א. הוכיחו כי T ה"ל.

ב. הוכיחו כי $ImT \subseteq \mathbb{R}_3[x]$.

ג. מצאו את $[T]_E^E$ כשאר E הבסיס הסדור הסטנדרטי של $\mathbb{R}_3[x]$.

ד. מצאו את כל הע"ע של T.

ה. קבעו האם T לכסינה.

ו. במידה וכן, מצאו בסיס של ו"ע של T.

א. יהיו $p_1, p_2 \in \mathbb{R}_3[x]$ ויהיו $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$T(\alpha p_1 + \beta p_2) = \left(\left(x^2-1\right)(\alpha p_1(x) + \beta p_2(x))\right)'' = \left(\left(x^2-1\right)\alpha p_1(x) + \left(x^2-1\right)\beta p_2(x)\right)''$$

$$= \left(\left(x^2-1\right)\alpha p_1(x)\right)'' + \left(\left(x^2-1\right)\beta p_2(x)\right)'' = \alpha\left(\left(x^2-1\right)p_1(x)\right)'' + \beta\left(\left(x^2-1\right)p_2(x)\right)'' = \alpha T(p_1) + \beta T(p_2)$$

ב. נסמן $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$.

$$T(p)(x) = \left(\left(x^2-1\right)'p(x) + \left(x^2-1\right)p'(x)\right)' = \left(x^2-1\right)''p(x) + 2\left(x^2-1\right)'p'(x) + \left(x^2-1\right)p''(x)$$

$$= 2p(x) + 4xp'(x) + \left(x^2-1\right)p''(x) = 2\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3\right) + 4x\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2\right) + \left(x^2-1\right)(2a_2 + 6a_3x)$$

$$= 2(a_0 - a_2) + 6(a_1 - a_3)x + 12a_2x^2 + 20a_3x^3$$

ג. $T(1) = 2$, $T(x) = 6x$, $T\left(x^2\right) = -2 + 12x^2$, $T\left(x^3\right) = -6x + 20x^3$. $[T]_E^E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{pmatrix}$.

ד. נמצא את כל הע"ע של T. $P_T = \det(T - x \cdot id) = \det\left([T]_E^E - xI\right) = \det\begin{pmatrix} 2-x & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 6-x & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 12-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20-x \end{pmatrix} = (2-x)(6-x)(12-x)(20-x)$

לכן הע"ע של T הם $2,6,12,20$ עם ר"א 1 בכולם.

ה. T לכסינה כי יש לה 4 ע"ע שונים ו- $\dim V=4$.

ו. עבור $\lambda=2$: $v_1=e_1\in\mathbb{R}_4$, עבור $\lambda=6$: $v_2=e_2$. עבור $\lambda=12$, $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-2&0\\0&6&0&-6\\0&0&12&0\\0&0&0&20\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ ולכן $v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\-5\\0\end{pmatrix}$ ועבור $\lambda=20$, נעשה חישוב דומה.

$\mathbb{XLV}$

טענה יהיו $K_1,K_2\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $K_1\sim K_2$. אזי $P_{K_1}=P_{K_2}$.

הוכחה: מהיות $K_1\sim K_2$, קיימת $P\in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה כך ש- $K_2=P^{-1}K_1P$. לכן $\forall x\in\mathbb{F}$,

$$K_2-xI_n=P^{-1}K_1P-xI_n=P^{-1}K_1P-xP^{-1}K_1I_nP=P^{-1}K_1P-P^{-1}K_1xI_nP=P^{-1}\left(K_1-xI_n\right)P$$

ולכן $K_1-xI_n\sim K_2-xI_n$ ולכן $P_{K_1}\left(x\right)=\det\left(K_1-xI_n\right)\overset{(*)}{=}\det\left(K_2-xI_n\right)=P_{K_2}\left(x\right)$. $(*)$ דטרמיננות של מטריצות דומות שוות. ■

מסקנה יהיו $K_1,K_2\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- $K_1\sim K_2$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$ אזי λ ע"ע של K_1 אם"ם λ ע"ע של K_2.

הוכחה: ראינו כי λ ע"ע של K_1 אם"ם $P_{K_1}\left(\lambda\right)=0$ אם"ם $P_{K_2}\left(\lambda\right)=0$ אם"ם λ ע"ע של K_2. ■

מסקנה תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$ לכסינה ותהי $D=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$ כך ש- $K\sim D$. אזי $\det K=\lambda_1\cdot\dots\cdot\lambda_n$.

הוכחה: $\det K=\det D=\lambda_1\cdot\dots\cdot\lambda_n$. ■

מסקנה הדטרמיננה של מטריצה לכסינה היא מכפלת הע"ע שלה.

מסקנה תהיינה $D_1,D_2\in M_n(\mathbb{F})$ כך ש- D_1,D_2 אלכסוניות. נניח כי $D_2\sim D_1$. נסמן $D_1=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$ ו- $D_2=\begin{pmatrix}\mu_1&&0\\&\ddots&\\0&&\mu_n\end{pmatrix}$.
אזי D_1 מתקבלת מ-D_2 ע"י החלפת סדר האיברים באלכסון.

דוגמות

1. $\begin{pmatrix}4&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\nsim\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$ (כי למטריצות דומות יש את אותם ע"ע). $P_{D_1}=\left(1-x\right)\left(2-x\right)$, $P_{D_2}=\left(4-x\right)\left(\frac{1}{2}-x\right)$.

2. $D_1=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)\sim\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)=D_2$ כי $D_1=\left[T_{D_1}\right]_{E_2}^{E_2}$ כאשר $T_{D_1}\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=D_1\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}x\\2y\end{smallmatrix}\right)$. בנוסף, $\left[T_{D_1}\right]_A^A=D_2$ כאשר $A=\left(\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)\right)$. לכן D_1,D_2 מטריצות מייצגות את אותה ההעתקה ביחס לבסיסים סדורים שונים ולכן הן דומות זו לזו.

3. $K_1=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, $K_2=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, $K_3=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)$. נשים לב כי הפולינום האופייני של כל מטריצות הוא $P(x)=(1-x)(2-x)$. מי מבין $K_{1,2,3}$ דומות זו לזו?

ראינו כי K_1,K_3 לכסינות (כי יש להן 2 ע"ע שונים זה מזה) והע"ע שלהן הם $1,2$ ולכן $K_1,K_3\sim\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)=K_2$ לכן כל המטריצות דומות זו לזו.

4. תהיינה $K_1=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, $K_2=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$, $K_3=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)$. מי מבין המטריצות דומות?

נשים לב כי אם $K\in M_n(\mathbb{F})$ דומה ל-K_2 אזי $K=K_2$ כי

$$K=P^{-1}K_2P=P^{-1}2I_2P=2P^{-1}I_2P=2I_2=K_2$$

לכן $K_1,K_3\nsim K_2$. נבדוק האם $K_1\sim K_3$. נחפש $P=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ כך ש- $K_3=P^{-1}K_1P$ כלומר $PK_3=K_1P$ (ו-P הפיכה).

$$PK_3=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}2&0\\1&2\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2a+b&2b\\2c+d&2d\end{smallmatrix}\right)=K_1P=\left(\begin{smallmatrix}2&1\\0&2\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}2a+c&2b+d\\2c&2d\end{smallmatrix}\right)$$

$2a+b=2a+c\to b=c$, $2b=2b+d\to d=0$ לכן נבחר $P=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$.

משפט תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $\lambda\in\mathbb{F}$. יהי ℓ הריבוי הגאומטרי של λ ויהי s הריבוי האלגברי של λ אזי $\ell\le s$.

הוכחה: ראשית, אם λ לא ע"ע אזי $V_\lambda=\left\{\vec{0}\right\}$ ולכן $\ell=0$ ונשים לב גם כי $P_K(\lambda)\neq0$ ולכן $s=0$ ולכן $s=\ell$ וגם $s\ge\ell$.

עתה נניח כי λ ע"ע של K ויהי $v_1,\ldots,v_\ell$ בסיס של V_λ. נשלים אותו לבסיס של $V=\mathbb{F}^n$, שנסמנו $v_1,\ldots,v_n$. נביט ב- $A=(v_1,\ldots,v_n)$ ובה"ל $T_K\vec{x}=K\vec{x}$, $\forall\vec{x}\in\mathbb{F}^n$. נשים לב כי $T_K(v_1)=Kv_1=\lambda v_1,\ldots,T_K(v_\ell)=Kv_\ell=\lambda v_\ell$. לכן
$$[T]_A^A=\left(\begin{array}{c|c}\begin{smallmatrix}\lambda&0&&0\\0&\lambda&&\\&&\ddots&\\0&&0&\lambda\end{smallmatrix}&B\\\hline 0&C\end{array}\right).$$
כאשר $B\in M_{\ell\times(n-\ell)}(\mathbb{F})$ ו- $C\in M_{(n-\ell)\times(n-\ell)}(\mathbb{F})$. בנוסף, ראינו כי $[T_K]_A^A,[T_K]_{E_n}^{E_n}$ דומות זו לזו (כי הן מטריצות המייצגות את T_K לבסיסים סדורים שונים) ולכן יש להן את אותו פולינום אופייני, אבל $K=[T_K]_{E_n}^{E_n}$ ולכן הפולינום האופייני המשותף הוא $P_K(x)$.

נשים לב כי

$$\det\left([T_K]_A^A-xI_n\right)=\det\left(\begin{array}{c|c}\begin{smallmatrix}\lambda-x&0&&0\\0&\lambda-x&&\\&0&\ddots&\\0&&&\lambda-x\end{smallmatrix}&B\\\hline 0&C-xI_{n-l}\end{array}\right)=\det\begin{pmatrix}\lambda-x&0&&0\\0&\lambda-x&&\\&0&\ddots&\\0&&&\lambda-x\end{pmatrix}\det(C-xI)=(\lambda-x)^\ell\cdot P_C(x)$$

לכן $(\lambda-x)^\ell\,|P_K(x)$ ולכן $s\ge\ell$. ■

מסקנה תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $\lambda_1,\ldots\lambda_k$ הע"ע של K. יהיו $\ell_1,\ldots,\ell_k$ ו- $s_1,\ldots,s_k$ הר"ג והר"א של $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. אזי K לכסינה אם"ם $\ell_1=s_1,\ldots,\ell_k=s_k$.

הוכחה: מהמשפט, $\ell_1+\cdots+\ell_k\le s_1+\cdots+s_k\le\deg P_k=n$. ראינו כבר כי K לכסינה אם"ם $n=\ell_1+\cdots+\ell_k$ וזה אם"ם $l_1=s_1,\ldots\ell_k=s_k$. ■

33 מטריצות כמשתנים לפולינומים

הגדרה 33.1 יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ותהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. נסמן $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ כאשר $a_0, \ldots, a_m \in \mathbb{F}$. נגדיר $p(K) = a_0 I_n + a_1 K + \ldots a_m K^m$.

הגדרה 33.2 יהי $p \in \mathbb{F}[x]$ ותהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. נאמר ש-K היא שורש של P אם $p(K) = 0$.

דוגמה $p(x) = 1 - x^2$, $n = 2$. נשים לב כי $p(K) = I - K^2 = 0$ ולכן $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ שורשים. נבדוק אם יש עוד. $K^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & cb+d^2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

מקרה א': $a + d \neq 0$ לכן $b, c = 0$ ולכן $K^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & d^2 \end{smallmatrix}\right)$ ולכן $a^2 = d^2 = 1$ ולכן $a = \pm 1, d = \pm 1$ כלומר $K = \left(\begin{smallmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{smallmatrix}\right)$ אבל $a + d \neq 0$ ולכן רק שתי המטריצות שכבר מצאנו מקיימות את זה.

מקרה ב': $a = -d$. $K^2 = \left(\begin{smallmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ לכן $a^2 + bc = 1$ ולכך יש אינסוף אפשרויות לכך.

משפט תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. אז קיים $p \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $p(K) = 0$ וכך ש- p איננו פולינום האפס.

הוכחה: נביט ב- $I, K, K^2, \ldots, K^{n^2}$. מדובר ב- $n^2 + 1$ מטריצות ב- $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ ומהיות $\dim M_{n\times n}(\mathbb{F}) = n^2$ אזי המטריצות ת"ל ולכן קיימים $a_0, \ldots, a_{n^2} \in \mathbb{F}$ כך ש- $p(k) = a_0 I + a_1 K + \cdots + a_{n^2} K^{n^2} = 0$. ■

34 הפולינום המינימלי

הגדרה 34.1 תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$. הפולינום המינימלי של K מסומן ב- $m_K(x) \in \mathbb{F}[x]$ ומוגדר להיות הפולינום המתוקן בעל הדרגה המינימלית שעבורו $m_K(K) = 0$. כלומר, $m_k(x) = a_0 + \cdots + a_m x^m$ כאשר:

(i) $a_m = 1_F$ (מתוקן).

(ii) $m_k(K) = 0_{n\times n}$.

(iii) $\forall p \in \mathbb{F}[x]$ שמקיים את (i) ו-(ii) מתקיים $\deg m_k \leq \deg p$.

$\mathbb{XLVII}$

הערה ראינו ש- $\forall K \in M_n(\mathbb{F})$, קיים $p \in \mathbb{F}[x]$ כך ש- $p(k) = 0_{n\times n}$ (וכן $\deg p \leq n^2 + 1$) ולכן קיים פולינום ב- $\mathbb{F}[x]$ המאפס את K שמעלתו מינימלית ו-≤ 0. נוכל "לתקן" את הפולינום ע"י הכפלתו בקבוע a_m^{-1} וקבל פולינום ממעלה מינימלית המאפס את K ושהוא פולינום מתוקן.

דוגמה תהי $K = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. מהו הפולינום המינימלי? נשים לב כי

$$K^2 - 3K + 2I = (K - I)(K - 2I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נשים לב כי $K-\alpha I\neq 0_{2\times 2}$,$\forall\alpha\in\mathbb{R}$. ולכן דרגת הפולינום המינימלי$1<$. לכן $m_k\left(x\right)=x^2-3x+2$ פולינום מתוקן שמאפס את K ומעלתו מינימלית.

דוגמה תהי $K=\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)$. מהו הפולינום המינימלי? נשים לב כי $K^2=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ ולכן $m_k\left(x\right)=x^2$.

דוגמה תהי $K=\left(\begin{smallmatrix}2&0\\0&2\end{smallmatrix}\right)$. מהו הפולינום המינימלי? $m_k\left(x\right)=x-2$ אבל $P_K\left(x\right)=\left(x-2\right)^2$.

משפט (תכונות הפולינום המינימלי) תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$.

(i) $\forall p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $p\left(K\right)=0$ מתקיים $m_k|p$.

(ii) הפולינום המינימלי יחיד, כלומר, אם $m_k,\tilde{m_k}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ פולינומים מינימליים של K אזי $m_k=\tilde{m_k}$.

(iii) $m_k|P_k$ כאשר P_k הפולינום האופייני.

(iv) אם λ ע"ע של K אזי $m_k\left(\lambda\right)=0$.

הוכחה: (i) יהי $p\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $p\left(K\right)=0$. ממשפט החילוק עם שארית לפולינומים, קיימים $q,r\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $p=q\left(x\right)m_k\left(x\right)+r\left(x\right)$ ו- $\deg r<\deg m_k$. נציב $x=K$ ונקבל $0=p\left(K\right)=q\left(K\right)m_k\left(K\right)+r\left(K\right)=0+r\left(K\right)$ לכן $r\left(K\right)=0$. אם $r\left(x\right)=0$, $\forall x$ אזי $p\left(x\right)=q\left(x\right)m_k\left(x\right)$, $\forall x$ ולכן $m_k|p$ וסיימנו. אחרת, נתקן את r (כלומר נחלק את r במקדם הראשי שלו) ונקבל פולינום $\tilde{r}$ מתוקן כך ש- $\deg\tilde{r}=\deg r<\deg m_k$ בסתירה למינימליות m_k.

(ii) מהיות m_k מינימלי ו- $\tilde{m_k}\left(K\right)=0$, אזי מ-$(i)$,$m_k|\tilde{m_k}$. באותו האופן $\tilde{m_k}|m_k$. מהיות $m_k|\tilde{m_k}$, קיים $q\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $\tilde{m_k}\left(x\right)=m_k\left(x\right)q\left(x\right)$,$\forall x$. מהיות $\tilde{m_k}|m_k$, קיים $\tilde{q}\in\mathbb{F}\left[x\right]$ כך ש- $m_k\left(x\right)=\tilde{m_k}\left(x\right)\tilde{q}\left(x\right)$, $\forall x\in\mathbb{F}$. לכן $\tilde{m_k}\left(x\right)=\tilde{m_k}\left(x\right)\cdot\tilde{q}\left(x\right)q\left(x\right)$ ולכן $\tilde{q}\left(x\right)q\left(x\right)=1$ ולכן קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ כך ש- $q\left(x\right)=\alpha$, $\forall x$ וגם $\tilde{q}\left(x\right)=\alpha^{-1}$, $\forall x\in\mathbb{F}$. לכן $\tilde{m_k}\left(x\right)=m_k\left(x\right)\cdot\alpha$ אבל מהיות $m_k,\tilde{m_k}$ מתוקנים, אזי בהכרח $\alpha=1$. לכן $\tilde{m_k}=m_k$.

(iii) מספיק להוכיח כי $P_K\left(K\right)=0$ (נוכיח בהמשך ממשפט קיילי המילטון).

(iv) יהי $\lambda\in\mathbb{F}$ ע"ע של K. ממשפט החילוק עם שארית לפולינומים, קיימים $q,r\in\mathbb{F}\left[x\right]$ שעבורם $m_k\left(x\right)=q\left(x\right)\left(x-\lambda\right)+r\left(x\right)$ וכך ש- $\deg r<\deg\left(x-\lambda\right)=1$. לכן קיים $\alpha\in\mathbb{F}$ שעבורו $r\left(x\right)=\alpha$, $\forall x$. נוכיח כי $\alpha=0$ ומכך נקבל $m_k\left(x\right)=q\left(x\right)\left(x-\lambda\right)$ ובפרט $m_k\left(\lambda\right)=q\left(\lambda\right)\cdot 0=0$ כנדרש. נציב $x=K$ ונקבל $0=m_k\left(K\right)=q\left(K\right)\left(K-\lambda I\right)+\alpha I$ ולכן $-\alpha q\left(K\right)\left(K-\lambda I\right)$.
$\left(-\alpha\right)^n=\det\left(-\alpha I\right)=\det\left(q\left(K\right)\left(K-\lambda I\right)\right)=\det q\left(K\right)\cdot\det\left(K-\lambda I\right)=\det q\left(K\right)\cdot P_k\left(\lambda\right)=0$ לכן $\alpha=0$. ■

דוגמה נניח כי $P_k\left(x\right)=\left(1-x\right)^2\left(2-x\right)$. לכן $m_k\left(x\right)=\left(1-x\right)\left(2-x\right)$ או $m_k\left(x\right)=-\left(1-x\right)^2\left(2-x\right)$.

משפט תהי $K\in M_n(\mathbb{F})$ אזי K לכסינה אם"ם m_k מתפרק לגורמים ממעלה ראשונה השונים זה מזה.

דוגמות

1. תהי $K=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&5\end{pmatrix}$. האם K לכסינה? $P_K\left(x\right)=\det\begin{pmatrix}2-x&1&0&0\\0&2-x&0&0\\0&0&2-x&0\\0&0&0&5-x\end{pmatrix}=\left(2-x\right)^3\left(5-x\right)$ לכן יש 3 אפשרויות לפולינום המינימלי: (i) $m_k\left(x\right)=\left(2-x\right)\left(5-x\right)$ (ii) $m_k=-\left(2-x\right)^2\left(5-x\right)$ (iii) $m_k=\left(2-x\right)^3\left(5-x\right)$. נבדוק את (i) (אם K מאפסת אותו אז K לכסינה אחרת היא לא). $\left(2I-K\right)\left(5I-K\right)=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1&0&0\\0&3&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-3&&\\&*&&\\&&*&\\&&&*\end{pmatrix}$

לכן K לא מאפס אותה ולכן היא לא מתאפסת.

מהם הע"ע של K? $\lambda = 2, 5$.

מהו הפולינום המינימלי של K? נבדוק את (ii) (כי אם K מאפסת אותו אז הוא המינימלי ואחרת זה (iii)).

$$-\left(2I-K\right)^{2}\left(5I-K\right) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{4\times 4}$$

לכן $-\left(2-x\right)^{2}\left(5-x\right)$ – הוא הפולינום המינימלי של K.

2. תהי $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ הה"ל המוגדרת ע"י $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7x_1+3x_2+3x_3 \\ -6x_1+2x_2+3x_3 \\ -12x_1+6x_2+5x_3 \end{pmatrix}$. מצאו את $K = [T]_{E_3}^{E_3}$. $[T]_E^E = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 3 \\ -6 & 2 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

מצאו את הע"ע של T. אזי

$$\begin{aligned} P_K\left(x\right) &= \det\left(K-xI\right) = \det\begin{pmatrix} -7-x & 3 & 3 \\ -6 & 2-x & 3 \\ -12 & 6 & 5-x \end{pmatrix} \\ &= -\left(7+x\right)\left(2-x\right)\left(5-x\right) - 108 - 108 + 36\left(2-x\right) + 18\left(7-x\right) + 18\left(5-x\right) \\ &= -x^3+3x+2 \end{aligned}$$

נשים לב כי $\lambda = 2$ ע"ע לכן $P_K\left(x\right) = \left(x-2\right)\left(-x^2-2x-1\right) = -\left(2-x\right)\left(x+1\right)^2$ לכן הע"ע הם $\lambda_{1,2} = 2, -1$.

מצאו את הר"ג של $\lambda = -1$. $K - \lambda I = K + I = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -6 & 3 & 3 \\ -12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ לכן הדרגה של $K+I$ היא 1 (כי יש השורות ת"ל). לכן $\lambda = -1$ ע"ע מר"ג 2.

מהו $m_k\left(x\right)$? $m_k\left(x\right) = \left(2-x\right)\left(x+1\right)$.

מצאו מטריצה D אלכסונית ובסיס A של $\mathbb{R}^3$ כך ש- $D = [T]_A^A$. $[T]_A^A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. נמצא את v_1. $K - 2I = \begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & 3 \end{pmatrix}$. נחפש $\begin{pmatrix} -9 & 3 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ -12 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$K-2I \xrightarrow{\begin{subarray}{l} R_1\to -\frac{1}{3}R_1 \\ R_2\to -\frac{1}{3}R_2 \\ R_3\to -\frac{1}{3}R_3 \end{subarray}} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3+R_2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3\to R_3-2R_1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נציב $z = 1$, לכן $x = \frac{1}{2}$ וגם $y = \frac{1}{2}$ לכן $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. נמצא את v_2, v_3: $K + I \to \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. נציב $y = 0, z = 1$ לכן $x = \frac{1}{2}$ לכן $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. נציב $z = 0$, $y = 1$ לכן $x = \frac{1}{2}$ כלומר $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ לכן $A = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ וגם $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ אזי $D = P^{-1}KP$.

$\mathbb{XLVIII}$

משפט (קיילי המילטון) תהי $K \in M_n(\mathbb{F})$ ויהי $P_K \in \mathbb{F}[x]$ הפולינום האופייני של K. אזי $P_K\left(K\right) = 0_n$.

הוכחה: ראינו כבר כי $\forall A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $A \cdot \text{adj}\left(A\right) = \det A \cdot I_n$. נציב $A = K - xI_n$ ונקבל

$$\left(K - xI_n\right) adj\left(K - xI_n\right) = \det\left(K - xI_n\right) \cdot I_n = P_K\left(x\right) \cdot I_n$$

נביט ב- $(K-xI_n)$ adj. זו מטריצה $n\times n$ שכל רכיב שלה הוא פולינום ממעלה$\leq n-1$. לכן קיימות מטריצות $B_0,\ldots,B_{n-1}\in M_n(\mathbb{F})$ שעבורן $\text{adj}\,(K-xI_n)=B_0+xB_1+\cdots+x^{n-1}B_{n-1}$. נציב ונקבל

$$\begin{aligned}(K-xI_n)\,adj\,(K-xI_n) &= (K-xI_n)\sum_{i=0}^{n-1}x^iB_i\\ &= \sum_{i=0}^{n-1}x^iKB_i-\sum_{i=0}^{n-1}x^{i+1}I_nB_i\\ &= -x^nB_{n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}x^iKB_i-\sum_{i=0}^{n-2}x^{i+1}B_i\\ &= -x^nB_{n-1}+\sum_{i=0}^{n-1}x^iKB_i-\sum_{i=1}^{n-1}x^iB_{i-1}\\ &= -x^nB_{n-1}+KB_0+\sum_{i=1}^{n-1}x^i\left(KB_i-B_{i-1}\right)\overset{\text{ראינו}}{=}P_K\left(x\right)I_n\end{aligned}$$

נציב K ונקבל

$$-x^nB_{n-1}+KB_0+\sum_{i=1}^{n-1}K^i\left(KB_i-B_{i-1}\right)$$

$$=-K^nB_{n-1}+KB_0+K\left(KB_1-B_0\right)+K^2\left(KB_2-B_1\right)+\cdots+K^{n-1}\left(KB_{n-1}-B_{n-2}\right)=0$$

נביט באגף ימין: $P_K\left(x\right)I_n$. נציב $x=K$ ונקבל $P_K\left(K\right)=\left(a_0I+a_1K+\cdots+a_nK^n\right)I_n=P_K\left(K\right)I_n=0$ לכן $P_K\left(K\right)=0$.

■

דוגמות

1. $K=I_3$. $P_K\left(x\right)=\det\begin{pmatrix}1-x & & 0\\ & 1-x & \\ 0 & & 1-x\end{pmatrix}=\left(1-x\right)^3$ ולכן $P_K\left(I-I\right)^3=0$.
2. $K=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$. $P_K\left(x\right)=\det\begin{pmatrix}1-x&2&3\\4&5-x&6\\7&8&9-x\end{pmatrix}=\cdots=-x\left(x^2-15x-18\right)$. $K\left(K^2-15K-18I\right)=0_{3\times3}$ כי ראינו ב-Matlab.

כאן נגמרת הטעימה מאלגברה לינארית 2

חלק IV

ניחוח של אינפי מתקדם 1

35 פונקציה במובן הרחב

$\mathbb{XLVIII}$

הגדרה תהי $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ ויהי $m \in \mathbb{N}$. פונקציה $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^m$ זו התאמה כך ש- $\forall \vec{x} \in D$, קיים $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ יחיד, ומסמנים $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{y}$.

הערה זה מקרה פרטי $f : A \to B$ כאשר A, B קבוצות כלליות ו-$A \neq \varnothing$.

דוגמות

1. נגדיר $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ע"י $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ y+z \end{pmatrix}$, $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.
2. נגדיר $\vec{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ע"י $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 \end{pmatrix}$, $\forall t \in \mathbb{R}$.
3. נגדיר $F(\vec{x}) = \vec{x}^t \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \ldots x_n^2$.
4. עבור $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$, $T_A(\vec{x})\, A\vec{x}$. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ היא העתקה מ-$\mathbb{R}^n$ ל-$\mathbb{R}^m$ (ולמעשה היא ה"ל).

הגדרה תהי $\vec{F} : D \to \mathbb{R}^m$ כאשר $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$. הגרף של $\vec{F}$ מוגדר להיות הקבוצה $G_{\vec{F}} = \left\{ \begin{pmatrix} \vec{x} \\ \vec{F}(\vec{x}) \end{pmatrix} : \vec{x} \in D \right\} \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$.

הערה לא נוכל לצייר גרפים של פ' אלא אם כן $n + m \leq 3$ (כי אנחנו לא יכולים לצייר ארבע-מימדי).

36 הנורמה

הגדרה יהי V מ"ו מעל $\mathbb{R}$. פ' $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ תקרא נורמה אם מתקיימות האקסיומות הבאות:

(i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ו-$v \in V$, $\|\alpha \cdot v\| = |\alpha| \cdot \|v\|$.

(ii) $\forall v, u \in V$, $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

(iii) $\|v\| \geq 0$ ו-$\|v\| = 0$ אם"ם $v = 0_V$.

במקרה זה V יקרא מרחב נורמי.

דוגמות

1. לכל $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר $\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right\|_1 = |x| + |y|$.
2. לכל $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר $\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$.
3. לכל $\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^2$ נגדיר $\left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\right\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

הגדרה יהיו $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. המכפלה הפנימית הסנטדרית (המכפלה הסקלרית) של $\vec{x}, \vec{y}$ מוגדרת ע"י $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^t \vec{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$.

דוגמות

1. $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = -1$.
2. $\left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle = 0$.

הגדרה יהי $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. הנורמה הסטנדרטית של $\vec{x}$ מוגדרת להיות $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x^n} = \|x\|_2$.

משפט $\|\cdot\|_2$ כפי שהגדרנו למעלה היא נורמה על $\mathbb{R}^n$.

משפט (א"ש קושי שוורץ) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. כאשר $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$. יתר כל כן, שוויון מתקיים אמ"ם $\vec{x}, \vec{y}$ ת"ל.

הוכחה: נניח כי $\vec{y} \neq \vec{0}$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} 0 \leq \left\langle \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y}, \vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y} \right\rangle &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle - \left\langle \vec{x}, \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y} \right\rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y}, \vec{x} \right\rangle + \left\langle \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y}, \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y} \right\rangle \\ &= \|x\|^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 - \frac{1}{\|y\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2}{\|\vec{y}\|^4} \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 - \frac{2}{\|\vec{y}\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 + \frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \end{aligned}$$

לכן $\|\vec{x}\|^2 - \frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \geq 0$ כלומר $\frac{1}{\|\vec{y}\|^2} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2$ ולכן $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \leq \|\vec{x}\|^2 \|\vec{y}\|^2$ כלומר $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$. אם $\vec{y} = 0$ אז $0 = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \geq 0 = \left| \left\langle \vec{x}, \vec{0} \right\rangle \right|$. שוויון מתקיים אמ"ם $\vec{y} = 0$ או $\vec{x} - \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\|y\|^2} \vec{y}$ כלומר ש-$\vec{x}, \vec{y}$ ת"ל. ■

מסקנה א"ש ה-$\triangle$.

הוכחה: יהיו $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. אזי

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y} \rangle = (\vec{x} + \vec{y})^t (\vec{x} + \vec{y}) = \left(\vec{x}^t + \vec{x}^t\right)(\vec{x} + \vec{y}) &= \vec{x}^t \vec{x} + \vec{x}^t \vec{y} + \vec{y}^t \vec{x} + \vec{y}^t \vec{y} \\ &= \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle + \langle \vec{y}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\|^2 + 2 \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + \|\vec{y}\|^2 \leq \|\vec{x}\|^2 + 2 |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| + \|\vec{y}\|^2 \\ &\overset{\text{ק"ש}}{\leq} \|\vec{x}\|^2 + 2 \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| + \|\vec{y}\|^2 = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

לכן $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2$ ולכן $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. ■

מסקנה קיים $0 \leq \theta \leq \pi$ יחיד שעבורו $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos\theta$.

הוכחה: $|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}, \vec{y}\|$ ולכן $-\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \leq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$. ■

הגדרה נגדיר את הזוית (הסטנדרטית) בין $\vec{x}, \vec{y}$ ע"י $\theta = \arccos \frac{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$.

37 התכנסות של פונקציות מרובות משתנים

הגדרה תהי $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ סביבה של $\vec{x}_0$ היא כדור פתוח $B_r(\vec{a})$ כך ש- $\vec{x}_0 \in B_r(\vec{a})$ כאשר $\forall r > 0$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, $B_r(\vec{a}) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{a}\| < r\}$.

הגדרה תהי $\vec{F} : D \to \mathbb{R}$ כאשר $\varnothing \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ פ' המוגדרת בסביבה מנוקבת של $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (כלומר ב- $B_r(\vec{a}) \setminus \{\vec{x}_0\}$ כאשר $B_r(\vec{a})$ סביבה של $\vec{x}_0$). יהי $L \in \mathbb{R}$. נאמר כי $\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} F(\vec{x}) = L$ אם $\forall \epsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_2 < \delta$ מתקיים $|F(\vec{x}) - L| < \epsilon$.

הערה זו אותה הגדרת גבול כמו אינפי 1, למעט השינוי $\|\cdot\|$.

מסקנה המשפטים הבאים נותרים נכונים, עם אותה הוכחה:

יחידות הגבול

אש"ג $\circ, \pm, \cdot, /$

מונוטוניות הגבול (וההפוכה)

סנדביץ'

ח$\times$מ

XLIX

דוגמות

1. $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} x = x_0$.
2. $\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} \sqrt{x^2 + y^2} \overset{\text{אש"ג}}{=} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.
3. $\lim_{(x,y) \to (\pi, 3\pi)} \sin(x+y) \overset{t=x+y}{=} \lim_{t \to 4\pi} \sin t = 0$.
4. $\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.
5. $\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. נשים לב כי $-x^2 \leq \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq x^2$ כי $-1 \leq \frac{-|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{|y|}{|y|} = 1$ ומסנדביץ' הגבול מתכנס לאפס.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. נניח בשלילה כי הגבול קיים. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{x=y}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{\sqrt{2}|y|} =$ לא קיים. סתירה.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{x=y}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{2y^2} = \frac{1}{2}$ אבל $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{y=0}{=} 0 \neq \frac{1}{2}$ לכן הגבול לא קיים.

8. $F(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$. האם F רציפה?
בכל נקודה למעט $(0,0)$ היא רציפה מאש"ר. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \overset{x=\alpha y}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{\alpha^2y^4}{\alpha^2y^2+y^4} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\alpha^2y^2}{\alpha^2+y^2} = 0$ אבל $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} \overset{y=0}{=} \lim\limits_{y\to 0} \frac{0}{x^2} = 0$.

סוף.