חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי למדעי המחשב | 67559

הרצאות | פרופ׳ גיא קינדלר

כתיבה | נמרוד רק

תשפ״ב סמסטר ב׳

בכל שבוע יצורף קישור לאיור נבחר של פרופ' גיא קינדלר. חלקים מהתרגול הושלמו באדיבות סיכומה של נועה בן גלים.

תוכן העניינים

א' מבנה המבחן

משך הבחינה יהיה שעתיים וחצי, בלי בחירה, תחת החלוקה הבאה:

1. (15 נק') הגדרות מהקורס (הסיאן, קונוס).
2. (25 נק') הוכחות מהקורס (כל דבר שלא ניפנפנו בידיים).
3. (25 נק') חישובים (אינטגרל, גזירה, סיווג נקודות קריטיות).
4. (35 נק') הוכחות לא מהקורס/שאלות אתגר (וריאציות על שאלות מהתרגיל, יצירתיות).

"הקורס" הכוונה להרצאות, תרגולים **וגם תרגילים**, ואנו נדרשים לדעת להשתמש בכלים מקורסי עבר (אינפי 1 ו-2, לינארית 1-2).

המבחן יחולק לשאלות בהפרדה לוגית ולא טכנית (רק הגדרות, רק חישובים) וסעיפים קודמים יבשרו את הבאות בסעיפים הבאים (הגדרה של כדור בסעיף א' מעלה חשד שהחישוב בהמשך ידרוש המרה לקוור' פולריות).

ב' רשימת הגדרות

רשימה זו וכך גם הבאה, אינה רשמית, לא קיבלה אישור או חסות מצוות הקורס, לא מכילה תכנים מהתרגילים (שהוכרזו כחלק מהחומר ע"י צוות הקורס) ואין לראות בהם כאמת מוחלטת בנוגע לחומר (גם מההרצאה והתרגול).

רשימות אלו נוצרו באופן אטומטי, ע"י קוד פייתון שכתבתי לפני שנתיים עם תיעוד מינימלי שהיה מקבל ציון מאוד נמוך באינטרו. NSO - אם אתם קוראים את זה, תסתכלו לי בתיק פרויקטים וקחו אותי לרדוף עיתונאיים דחוף.

1. תכונה אינווריאנטית היא תכונה שאינה תלויה בשקילות.
2. האוטומורפיזם של $\mathbb{R}^n$ הוא $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})^n = \{T \in \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) : T \text{ הפיכה}\}$.
3. נאמר כי $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ שקולים לינארית אם יש $T \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})^n$ כך ש-$T(K) = L$ (כלומר שכל הנקודות מוזזות באופן לינארי, חח"ע ועל) ונסמן $K \overset{\mathrm{Aut}(\mathbb{R})^n}{\simeq} L$.
4. מקבילון עם קודקוד בראשית הוא גוף השקול לינארית לקוביית היחידה $\mathbb{R}^n$.
5. נורמה היא פוקנצייה $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ המקיימת:
6. המרחק המושרה מהנורמה מוגדר ע"י $\mathrm{dist}_{\|\cdot\|}(y, z) = \|y - z\|$.
7. הכדור (ביחס לנורמה $\|\cdot\|$) ב-$\mathbb{R}^n$ ברדיוס R סביב נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ הוא $B_{\|\cdot\|}(x, R) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \le R\}$.
8. יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$. הרדיוס של K מוגדר להיות $\mathrm{rad}_{\|\cdot\|}(K) = \inf\{R : \exists x \in \mathbb{R}, B_{\|\cdot\|}(x, R) \supseteq K\}$, כלומר רדיוס הכדור הכי קטן שמכיל את הגוף.

9. יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$. הקוטר של K לפי $\|\cdot\|$ מוגדר ע"י $\operatorname{diam}_{\|\cdot\|}(K) = \sup\{\|x-y\| : x, y \in K\}$, כלומר המרחק הכי גדול בין שתי נקודות בגוף.

10. פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נקראת שומרת מרחק אם מתקיים $\mathrm{d}_2(x,y) = \mathrm{d}_2(f(x), f(y))$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$. נסמן ב-$E^n$ את אוסף הפונקציות שומרות המרחק על $\mathbb{R}^n$

11. $L, K \in \mathbb{R}^n$ נקראים חופפים אם הם שקולים ביחס ל-E^n.

12. הזזה בוקטור v היא הפונקצייה $S_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $S_v(x) = x + v$.

13. תהי משפחת פונקציות F, נאמר ששני גופים $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ שקולים תחת F אם קיימת $f \in F$ (הפיכה) כך ש- $f(K) = L$.

14. נאמר כי $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא טרנספורמציה שומרת מרחק (טש"מ) אם $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$.

15. נאמר כי $K \simeq L$ או ש-K, L חופפים אם קיימת טש"מ T כך ש-$T(K) = L$.

16. יהיו $y, z \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי x בקמור שלהן אם הוא ממוצע משוקלל של y, z, כלומר קיים $\alpha \in [0,1]$ כך ש-

$$x = (1-\alpha) y + \alpha z = y + \alpha (z - y)$$

17. הקטע בין y ל-z הוא $[y,z] = \{(1-\alpha) y + \alpha z : \alpha \in [0,1]\}$, כלומר אוסף הנקודות ביניהן.

18. $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ היא טש"מ הומוגנית אם היא טש"מ ומקיימת $T(0) = 0$.

19. יהיו $y, z \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את המכפלה הפנימית של y, z ע"י

$$\langle y \mid z \rangle = \left\| \frac{y+z}{2} \right\|^2 - \left\| \frac{y-z}{2} \right\|^2 = \frac{1}{4}\|y+z\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2$$

20. יהיו $y, z \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את הזווית בין z, y, $\sphericalangle(z,y)$ ע"י $\cos \sphericalangle(y,z) = \frac{\langle y|z \rangle}{\|y\|\|z\|}$.

21. יהיו $(K_1, \ldots, K_n), (L_1, \ldots, L_n)$ סדרות גופים. נאמר כי הסדרות הללו חופפות אם קיימת טש"מ כל שלכל $i \in [n]$, $T(K_i) = L_i$.

22. תהיינה $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נאמר כי $f(n) = \underset{n \to \infty}{\mathcal{O}}(g(n))$ אם קיים $c > 0$ ו-$N \in \mathbb{N}$ כך ש-$\forall n \geq N$, $|f(n)| \leq c|g(n)|$ ונאמר כי f חסום אסימפטוטית או נשלט ע"י g.

23. תהיינה $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נאמר כי $f(x) = \underset{x \to x_0}{\mathcal{O}}(g(x))$ אם קיים $c > 0$ ו-$\delta > 0$ כך שלכל $x_0 \neq x \in \mathbb{R}$ עבורו $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $|f(x)| \leq c|g(x)|$.

24. תהיינה $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. נאמר כי $f(x) = \underset{x \to x_0}{\Omega}(g(x))$ אם"ם $g = \underset{x \to x_0}{\mathcal{O}}(f(x))$.

25. תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f\left(n\right)=\underset{n\to\infty}{o}\left(g\left(n\right)\right)$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים N כך ש-N $\forall n\geq$ מתקיים $\left|f\left(n\right)\right|\leq\epsilon\left|g\left(n\right)\right|$ ונאמר כי f קטן אסימפטוטית מ-g.

26. תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f\left(x\right)=\underset{x\to x_{0}}{o}\left(g\left(x\right)\right)$ אם $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_{0}\neq x\in\mathbb{R}$ עבורו $\left|x-x_{0}\right|<\delta$ מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\leq\epsilon\left|g\left(x\right)\right|$.

27. תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f\left(x\right)=\underset{x\to x_{0}}{\omega}\left(g\left(x\right)\right)$ אם"ם $g\left(x\right)=\underset{x\to x_{0}}{o}\left(f\left(x\right)\right)$.

28. השיפוע של הישר $L=ax+b$ מוגדר ע"י

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_{0}\right)}{x-x_{0}}$$

כאשר α הזווית בין L לציר x. $\frac{b}{a}$ הוא השיפוע הממוצע של f בקטע $\left[x,x_{0}\right]$.

29. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. הנגזרת ב-$x_{0}$ של f היא $f'\left(x_{0}\right)=\lim\limits_{x\to x_{0}}\frac{f(x)-f(x_{0})}{x-x_{0}}$ (אם קיים הגבול).

30. פונקציה רב משתנית היא פ' $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$.

31. הגרף של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{R}^{2}\supseteq\Gamma\left(f\right)=\left\{ \left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}\right\}$ ושל פ' רב ממדית, $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$, הוא

$$\mathbb{R}^{n+1}\supseteq\Gamma\left(f\right)=\left\{ \left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}^{n}\right\}$$

32. תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$. הפונקציה החלקית של f בכיוון $i\in\left[n\right]$ דרך $x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ היא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g\left(x_{i}\right)=f\left(x_{-i}^{0},x_{i}\right)$.

33. הנגזרת החלקית של $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ בכיוון $i\in\left[n\right]$ בנקודה x^{0} מוגדרת ע"י $f'\left(x_{-i}^{0}\right)\left(x_{i}^{0}\right)$ ונסמן $\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$ או אם למשתנה יש שם אז $\partial^{y}f\left(x^{0}\right)$ אבל במקומות אחרים מסמנים גם $\frac{\partial f}{\partial x_{i}}\left(x^{0}\right)$.

34. חלוקה של $\left[a,b\right]$ היא $p=\left(a=p_{0},p_{1},\ldots,p_{k}=b\right)$.

35. תהי $C=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right]$ קוביה מקבילה לצירים (המכפלה היא קרטזית). חלוקה של C היא $p=\left(p^{1},\ldots,p^{n}\right)$ כאשר p^{i} היא חלוקה של $\left[a_{i},b_{i}\right]$.

36. תהיינה p,p' חלוקות של $C=\prod\limits_{i=1}^{n}\left[a_{i},b_{i}\right]$. נאמר כי $p\leq p'$ אם לכל $I\in p'$ קיים $I\in p$ כך ש-$I'\subseteq I$ ובמקרה זה נאמר כי p' היא עידון של p.

37. תהיינה p,q חלוקות של C. העידון המשותף של p,q הוא חלוקה $p\sqcap q=\left(p^{1}\sqcap q^{1},\ldots,p^{n}\sqcap q^{n}\right)$ כאשר עידון משותף של חלוקות חד-ממדיות הוא איחוד הנקודות של שתי החלוקות בסדר עולה.

38. תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ ו-$K\subseteq\mathbb{R}^{n}$. נגדיר את האינטגרל על K להיות $\int\limits_{K}f=\int\limits_{C}f\cdot\mathbb{1}_{K}$ כאשר C היא קוביה שמקיימת $C\subseteq K$.

39. תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$. נגדיר $\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}f=\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{\left[-t,t\right]^{n}}f$.

40. תהיינה $f,g,h\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=O_g\left(h\right)$ אם קיימים $c,\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ עבורו $0<\left|g\left(x\right)\right|\le\delta$, מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\le c\left|h\left(x\right)\right|$.

41. תהיינה $f,g,h\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=o_g\left(h\right)$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ עבורו $\left|g\left(x\right)\right|\le\delta$, מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\le\epsilon\left|h\left(x\right)\right|$.

42. נאמר כי הגבול של f ב-x^0 הוא $\ell\in\mathbb{R}$ אם $f\left(x\right)=\ell+o_{\|x-x^0\|}\left(1\right)$.

43. נאמר כי f רציפה ב-x^0 אם $f\left(x\right)=f\left(x^0\right)+o_{\|x-x^0\|}\left(1\right)$.

44. העתקת $\lambda-\mathrm{Shear}$ של ציר i ביחס לציר j היא העתקה $S_\lambda:\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_i\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_i+\lambda x_j\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$.

45. תהי Ω קבוצה ו-$f,g,h:\Omega\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=o_g\left(h\right)$ אם $\forall\epsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\Omega$ עבורו $\left|g\left(x\right)\right|\le\delta$, מתקיים $\left|f\left(x\right)\right|\le\epsilon\left|h\left(x\right)\right|$.

46. תהיינה $f:\Omega\to\mathbb{R}^n,g:\Omega\to\mathbb{R}^m,h:\Omega\to\mathbb{R}^k$. נאמר כי $f=o_g\left(h\right)$ אם $\|f\|=o_{\|g\|}\left(\|h\|\right)$.

47. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. נגדיר $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $\forall i\in[m]$, $f_i\left(x\right)=\left(f\left(x\right)\right)_i$.

48. נאמר כי α היא הנגזרת של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ב-x^0 אם

$$f\left(x\right)=f\left(x^0\right)+\underbrace{\overset{f'\left(x^0\right)}{\overline{\alpha}}\underbrace{\left(x-x^0\right)}_{dx}}_{df=\alpha\cdot dx}+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$$

49. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. נאמר כי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ היא הנגזרת של f ב-x^0 אם

$$f\left(x\right)=\underbrace{f\left(x^0\right)+A\left(x-x^0\right)}_{\text{נוסחת המשיק של } f \text{ ב-} x^0}+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$$

50. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ב-x^0. אזי $f'\left(x^0\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ (הצמוד של $\mathbb{R}^n$ הוא $M_{1\times n}\left(\mathbb{R}\right)$) והגרדיאנט של f הוא

$$\nabla f\left(x^0\right)=\left(f'\left(x^0\right)\right)^T\in\mathbb{R}^n$$

51. סביבה של $x\in\mathbb{R}^n$ היא כדור ש-x הוא המרכז שלו. או כל קבוצה ב-$\mathbb{R}^n$ המכילה כדור כזה.

52. נאמר כי x הוא מקסימום מקומי של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אם קיימת סביבה N של x כך ש-$f\left(y\right)\le f\left(x\right)$, $\forall y\in N$.

53. נאמר כי x היא נקודה קריטית של f אם $\nabla f\left(x\right)=0$.,

54. תהי $A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$. נאמר כי A היא מוגדרת חיובית (positive defnite) אם A סימטרית וכל הע"ע שלה חיוביים.

55. פולינום הומוגני מדרגה 2 ב-$dx=\left(dx_{1},\ldots,dx_{n}\right)$ הוא ביטוי מהצורה $\sum\limits_{i,j\in[n]}\alpha_{ij}dx_{i}dx_{j}$, $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$.

56. תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$, $x,x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ ו-$dx=x-x^{0}$. אם אפשר לכתוב

$$f\left(x^{0}+dx\right)=f\left(x^{0}\right)+Adx+\frac{1}{2}dx^{T}Hdx+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$$

אזי $\frac{1}{2}dx^{T}Hdx$ נקרא הדיפרנציאל מסדר 2 של f בנקודה x^{0} ונסמנו $d^{2}f$. במקרה זה, H נקרא ההסיאן של f.

57. קו הגובה של $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ גבוה $c\in\mathbb{R}$ היא הקבוצה $\varphi^{-1}\left(c\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^{2}:\varphi\left(x\right)=c\right\}$.

ג' רשימת משפטים

1. המרחק הוא סימטרי, אי שלילי ומקיים את א"ש המשולש, $\text{dist}_{\left\Vert \cdot\right\Vert }\left(x,z\right)\leq\text{dist}_{\left\Vert \cdot\right\Vert }\left(x,y\right)+\text{dist}_{\left\Vert \cdot\right\Vert }\left(y,z\right)$.

2. $E^{n}=\left\{ S\circ T:\text{אורתוג' }T,\text{הזזה }S\right\}$.

3. לכל גוף K, $\text{diam}\left(K\right)\leq2\cdot\text{rad}\left(K\right)$.

4. (צלע זווית צלע) $\triangle ABC\simeq\triangle DEF$ אם"ם $\left|AB\right|=\left|DE\right|,\left|BC\right|=\left|EF\right|$ וגם $\sphericalangle ABC=\sphericalangle DEF$.

5. אם T טש"מ הומוגנית היא מקיימת $\left\Vert T\left(x\right)\right\Vert =\left\Vert x\right\Vert$.

6. תהי T טש"מ הומוגנית כך ש-$T\left(x\right)=e_{1}$ (הפשטה, זה עובד לכל וקטור) אזי $\forall\alpha\in\left[0,1\right]$, $T\left(\alpha x\right)=\alpha e_{1}$, כלומר T הומוגנית.

7. (הכללה של הנ"ל) תהי T טש"מ הומוגנית, אזי $\forall\alpha\in\left[0,1\right]$, $\forall y,z\in\mathbb{R}^{n}$ מתקיים

$$T\left(\left(1-\alpha\right)y+\alpha z\right)=\left(1-\alpha\right)T\left(y\right)+\alpha T\left(z\right)$$

8. מכ"פ היא תכונה גאומטרית ביחס לטש"מ הומוגנית.

9. כל טרנס' ששומרת מכ"פ היא גם טש"מ הומוגנית (ולמעשה אורתוג', אבל עדיין לא הוכחנו ליניאריות).

10. יהיו $y',z'\in\mathbb{R}^{n}$. אזי קיימת טש"מ הומוגנית (ולינארית אורתוג') T המקיימת $T\left(z'\right)=z=\left(z,0,\ldots,0\right)$ וכן $T\left(y'\right)=y=\left(y_{1},y_{2},0,\ldots,0\right)$.

11. (צז"צ) יהיו $A,B,\ldots,F\in\mathbb{R}^{n}$. אזי $\left(A,B,C\right)\simeq\left(D,E,F\right)$ אם"ם מתקיימים התנאים הבאים :

12. תהי T טש"מ הומוגנית אזי היא לינארית.

13. כל טש"מ היא אורתוג' (משמרת מרחקים ולינארית).

14. כל טש"מ הומוגנית היא הפיכה.

15. $[v]_{\mathcal{D}}=\mathbb{R}^n$, כלומר מחלקת השקילות של v ביחס ל-$\mathcal{D}$ היא $\mathbb{R}^n$.

16. יהיו $x,y,z,w\in\mathbb{R}^n$ אזי $(x,y)\simeq(z,w)$ אם"ם $\|x-y\|=\|z-y\|$, כלומר קטעים באורך שווה חופפים ולהפך.

17. יהיו $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,_k\in\mathbb{R}^n$ אזי $(0,x_1,\ldots,x_k)\simeq(0,y_1,\ldots,y_k)$ אם"ם $\langle x_i\mid x_j\rangle=\langle y_i\mid y_j\rangle$ לכל $i,j\in[k]$.

18. (קריטריון הגבול) יהי $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ונניח כי קיים $L=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$.

19. $f(x)=\underset{x\to x_0}{o}(1)$ אם"ם $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

20. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=L\in\mathbb{R}$ אם"ם $f(x)=L+\underset{x\to x_0}{o}(1)$ (כלומר $f(x)-L=\underset{x\to x_0}{o}(1)$).

21. f רציפה ב-x_0 אם"ם $f(x)=f(x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(1)$ לכל x.

22. $f'(x_0)=\alpha$ אם"ם

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$$

23. (כלל לייבניץ) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אזי

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

24. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, אזי $\frac{a}{b+\alpha c}=\underset{\alpha\to 0}{\mathcal{O}}(\alpha)+\frac{a}{b}$.

25. אם α,β מקיימות את הגדרת הנגזרת עם סימון o, אזי $\alpha=\beta$.

26. תהיינה f,g פ' כך ש-f גזירה ב-$g\left(x^0\right)$, g גזירה ב-x^0, אזי $f\circ g$ גזירה ב-x^0.

27. (השתנות חסומה) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי $|f'(x)|\leq M\in\mathbb{R}$, $\forall x$. אזי $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$.

28. אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ומתקיים $\forall x,\forall i$, אזי $\forall a,b\in\mathbb{R}^n$, $|f(b)-f(a)|\leq M\|b-a\|_1$.

29. אם $\forall x\in[a,b]$, $|f'(x)|\leq M$ אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

30. תהי P חלוקה של $C=\prod\limits_{i=1}^{n}I^i$, אזי $\text{vol}(C)=\sum\limits_{I\in P}\text{vol}(I)$.

31. תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות על C, אזי $\int\limits_C f+g=\int\limits_C f+\int\limits_C g$.

32. עבור p,q חלוקות של C, $p,q\le p\sqcap q$.

33. אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$C\subseteq\mathbb{R}^n$ ומתקיים $x\in\mathbb{R}^n$, $\forall i\in[n]$, $\left|\partial^i f(x)\right|\le M>0$ אז קיים האינטגרל $\int\limits_C f$.

34. (פוביני) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פ' עם נגזרות חלקיות חסומות ב-C, אזי $\int\limits_C f=\int\limits_{y_1\in C_1}\left(\int\limits_{C^{-1}} f_{y_1}\right)$.

35. $\mathrm{vol}(K)=\mathrm{vol}(T(K))$ כאשר T הזזה.

36. עבור $K,K'\subseteq\mathbb{R}^n$ זרים, מתקיים $\int\limits_{K\cup K'} f=\int\limits_K f+\int\limits_{K'} f$ (נובע ישירות מאדיטיביות).

37. $\mathrm{vol}(K\uplus K')=\mathrm{vol}(K)+\mathrm{vol}(K')$.

38. אם $\forall x,y\in I\in p$ מתקיים $\underset{|p|\to0}{o}(1)$ $|f(x)-f(y)|=$ אז $\int\limits_C f\simeq\underline{\sum}_p f\simeq\overline{\sum_p}f$ כאשר $\simeq$ מייצג שוויון עם $\underset{|p|\to0}{o}(1)$.

39. (פוביני-טונלי) $\int\limits_C f=\int\limits_{y\in C^1}\underbrace{\left(\int\limits_{C^{-1}} f_y\right)}_{\phi(y)}$ כאשר $f_y(x_2,\ldots,x_n)=f(y,x_2,\ldots,x_n)$.

40. תהי S_λ העתקת λ-גזירה של ציר 1 ביחס ל-2 ו-K גוף. אזי $\mathrm{vol}(K)=\mathrm{vol}(S_\lambda(K))$.

41. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. אזי $\left(f'\left(x^0\right)\right)_i=\partial^i f\left(x^0\right)$.

42. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m, g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$ גזירות ב-x^0 ו-$g\left(x^0\right)$ בהתאמה. אזי $f\circ g$ גזירה ב-x^0.

43. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. אזי $f'\left(x^0\right)_i=\partial^i f\left(x^0\right)$.

44. אם $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^m$ ו-$g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $(f\circ g)'\left(x^0\right)=f'\left(g\left(x^0\right)\right)g'\left(x^0\right)$.

45. אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ב-x^0 אז $f'\left(x^0\right)=\left(\partial^1 f\left(x^0\right),\ldots,\partial^n f\left(x^0\right)\right)$.

46. אם ל-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ יש נגזרות חלקיות ב-x^0 וגם הנגזרות החלקיות קיימות בסביבה של x^0 ורציפות ב-x^0 אז $f'\left(x^0\right)$ קיימת.

47. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. אם $f'\left(x^0\right)=A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ אזי $f_i'\left(x^0\right)=R_i$ כאשר R_i היא השורה ה-i של A.

48. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ כך ש-x^0 היא נקודת מקס' (מקומי) של f. אזי $\nabla f\left(x^0\right)=\vec{0}$.

49. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$\varphi:I\to\mathbb{R}^n$ אז $f(\varphi(s))-f(\varphi(0))=\int\limits_0^s\left\langle\nabla f(\varphi(t))\mid\varphi'(t)\right\rangle$ (כלל השרשרת עם המשפט היסודי).

50. אם ל-f יש מקס' (מינ') מקומי ב-$x^0\in\mathbb{R}^n$ אזי $\nabla f\left(x^0\right)=0$.

51. הדיפרנציאל השני של f ב-x^0 הוא יחיד (וגם ההסיאן). אם נסמן את ההסיאן שם ב-H אז מתקיים

$$[H]_{ij}=\partial^j\left(\partial^i f\right)\left(x^0\right)$$

ו-H סימטרית (סדר הגזירה לא משנה, הראנו בתרגיל).

52. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x^0\in\mathbb{R}^n$ נקודה קריטית. נסמן ב-H את הסימן של f בנקודה x^0. אזי:

53. (יחידות ההסיאן) אם A,B,C,D מקיימות

$$f\left(x\right)=f\left(x^{0}\right)+Adx+dx^{T}Bdx+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$$
$$f\left(x\right)=f\left(x^{0}\right)+Cdx+dx^{T}Ddx+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$$

עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ב-$x^0\in\mathbb{R}^n$, אזי $A=C$, $B=D$.

54. אם H לא בהכרח סימטרית אז $\partial^{i}\partial^{j}f\left(x^{0}\right)=\frac{1}{2}H_{ij}+\frac{1}{2}H_{ji}$ ואז עדיין הנגזרות מתחלפות.

55. תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי לכל $t,t_0\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$g\left(t\right)=g\left(t_{0}\right)+g'\left(t_{0}\right)\left(t-t_{0}\right)+\frac{1}{2}g''\left(t_{0}\right)\left(t-t_{0}\right)^{2}+o_{t-t_{0}}\left(\left(t-t_{0}\right)^{2}\right)$$

(הוכחנו בתרגיל).

56. אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ היא בעלת נגזרות חלקיות שניות אז קיים הדיפרנציאל השני, כלומר לכל $x,x^0\in\mathbb{R}^n$ ניתן לכתוב

$$f\left(x\right)=f\left(x^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)dx+\frac{1}{2}dx^{T}Hdx+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$$

כאשר $H_{ij}=\partial^{i}\partial^{j}f\left(x^{0}\right)=\partial^{j}\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$.

57. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ ו-$\varphi:A\to\mathbb{R}^n$ חח"ע אזי

$$\int\limits_{x\in A}f\left(\varphi\left(x\right)\right)\left|\det\left(\varphi'\left(x\right)\right)\right|=\int\limits_{y\in\varphi\left(A\right)}f\left(y\right)$$

58. אם $K,K'\subseteq\mathbb{R}^n$ גופים חופפים תחת טש"מ אז $\mathrm{vol}\left(K\right)=\mathrm{vol}\left(K'\right)$.

59. (משפט החלפת משתנה) תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$\varphi:A\to\mathbb{R}^n$ פ' על $B\subseteq\mathbb{R}^n$ וחח"ע. אזי

$$\int\limits_{B}f=\int\limits_{A}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\right|$$

60. (שבה השתמשנו במשפט חילוף משתנה) תהי $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש-$\left\Vert \varphi'\left(x\right)\right\Vert$, $\left\Vert \varphi'\left(x\right)^{-1}\right\Vert$ ו-$\sum\limits_{i,j,k}\left|\partial^{k}\partial^{j}\varphi_{i}\left(x\right)\right|$ חסומות לכל x (נורמה על מטריצה הכוונה היא לנורמה של כל וקטור תוצאה של המטריצה). אזי לכל $\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $D\subseteq\mathbb{R}^n$ קוביה

בקוטר לכל היותר δ ולכל $x^0 \in D$ מתקיים

$$\varphi(D) \subseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1+\epsilon)$$
$$\varphi(D) \supseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1-\epsilon)$$

61. $U \circ \varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = u$.

62. (כמעט הפונקציה ההפוכה) תהי $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\left\|\varphi'(x)\right\|$, $\left\|\varphi'(x)^{-1}\right\|$ ו-$\sum_{i,j,k}\left|\partial^k\partial^j\varphi_i(x)\right|$ חסומות לכל x (נורמה על מטריצה הכוונה היא לנורמה של כל וקטור תוצאה של המטריצה). אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $D \subseteq \mathbb{R}^n$ קוביה בקוטר לכל היותר δ ולכל $x^0 \in D$ מתקיים

$$\varphi(D) \subseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1+\epsilon) = P^+$$
$$\varphi(D) \supseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1-\epsilon) = P^-$$

63. (חסם של שארית טיילור מדרגה 1)

$$\left\|\varphi(x) - \left(\varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)\right)\right\| \leq Mn^2\left\|x - x^0\right\|_2^2$$

64. (הפונקציה ההפוכה) יהי φ שהכל חסום אצלו כנ"ל ו- $x^0 \in \mathbb{R}^n$. אזי לכל $\epsilon > 0$, קיימת $\eta > 0$ כך שלכל $y \in \mathbb{R}^n$ כך ש-$\left\|y - \varphi\left(x^0\right)\right\| \leq \eta$, קיים x^* כך ש-$y = \varphi(x^*)$, וגם

$$\left\|x^* - \left(x^0 + \varphi'\left(x^0\right)^{-1}\left(y - \varphi\left(x^0\right)\right)\right)\right\| \leq \epsilon\left\|y - \varphi\left(x^0\right)\right\|$$

65. הפתרון מתקבל בקבוצה $L \cup S$ כאשר

$$L = \left\{x : g(x) = 0 \wedge g'(x) = 0\right\}, \quad S = \left\{x : g(x) = 0 \wedge \nabla f(x) = \lambda\nabla g(x)\right\}$$

66. (כופלי לגרנז') תחת התנאים הנ"ל, אם x^0 הוא מקס' (מינ') של f בקבוצה $G = \{x : g(x) = 0\}$ אז $\nabla f\left(x^0\right) = \lambda\nabla g\left(x^0\right)$.

67. $\nabla\varphi$ מאונך לקווי הגובה של φ (כלומר מאונך לכל מסילה שעוברת דרך הקבוצה).

68. (למה עיקרית לכופלי לגראנז') אם $g\left(x^0\right)=0$ ו-$g'\left(x^0\right)\neq 0$, אזי לכל $u\perp\nabla g\left(x^0\right)$ אפשר ללכת על היריעה $g\left(x\right)=0$ ב-x^0 בכיוון u, כלומר, לכל $\epsilon>0$ (קטן מספיק) קיים δ כך שמתקיים:

69. אם f מקבלת ערך מקסימלי על $\{g\left(x\right)=0\}$ בנקודה x^0 ו-$g'\left(x^0\right)\neq 0$ אזי קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$\nabla f\left(x^0\right)=\lambda\nabla g\left(x^0\right)$.

שבוע $\mathbb{I}$ | מבוא, שקילות ונורמות

איור מובחר

הרצאה

בקורס נלמד על גזירה ואינטגרציה של פ' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ כאשר $n>1$ ו/או $m>1$, הוא המשך של אינפי 1+2 וגם לינארית 1+2. תהיה חזרתיות קצת על מה שכבר למדנו שכן אנחנו לומדים הרחבה של מה שכבר ידוע לנו בקורסי הקדם. לא נעמיק בנושאים כי החומר רחב בהרבה מ-3 נ"ז ולכן גם לא נעסוק במקרי קצה ופורמליקה מלאה.

איברים ב-$\mathbb{R}^n$ הם מהצורה $x=\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ ואם מציירים את הצירים (ב-$\mathbb{R}^2$ זהו המישור) ניתן לייצג את הנקודה כמיקום על המישור. בנוסף, על נקודה על המישור אפשר לחשוב גם בתור וקטור מ-$(0,0)$, ובמקרה זה סכום של נקודות x,y יהיה המקום שאליו נגיע גאומטרית אם נמתח את הוקטור של $\vec{y}$ מ-x. אף על פי שוקטורים נדמים שהם יכולים להתחיל במיקומים שונים (בראשית, ב-$(2,1)$), כל שני וקטורים באותו האורך ובאותו הכיוון הם שקולים לא משנה איפה הם נמצאים (הם שקולים עד כדי הזזה). גם מלבנים במקומות שונים במרחב שלהם אותם מימדים הם שקולים עד כדי הזזה.

הגדרה תכונה אינווריאנטית היא תכונה שאינה תלויה בשקילות.

הערה הנפח של מלבן (נפח בדו-מימד זה שטח) היא אינווריאנטית בהזזה.

הגדרה האוטומורפיזם של $\mathbb{R}^n$ הוא $\operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}\right)^n=\{T\in\hom\left(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n\right):T\text{ הפיכה}\}$.

הגדרה נאמר כי $K,L\subseteq\mathbb{R}^n$ שקולים לינארית אם יש $T\in\operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}\right)^n$ כך ש-$T\left(K\right)=L$ (כלומר שכל הנקודות מוזזות באופן לינארי, חח"ע ועל) ונסמן $L\overset{\operatorname{Aut}(\mathbb{R})^n}{\simeq}K$.

דוגמה עבור $L=\{(x,x):x\in\mathbb{R}\}$ (הישר דרך הראשית), קבוצת הת"מ השקולים לו לינארית היא הישרים העוברים בראשית.

דוגמה עבור $L\subseteq\mathbb{R}^n$ ת"מ ממימד d, מהו אוסף הת"מים השקולים לו לינארית? כל ת"מ ממימד d ב-$\mathbb{R}^n$ (אפשר להגדיר הומומורפיזם על וקטורי הבסיס).

דוגמה האם נפח הוא תכונה גאומטרית לינארית? לא, עבור קוביה מהראשית עם צלע באורך 1 C^2 (קוביית היחידה ממימד 2), אם נכפיל את הת"מ ב-c נקבל נפח גדול פי c^2.

הגדרה מקבילון עם קודקוד בראשית הוא גוף השקול לינארית לקוביית היחידה $\mathbb{R}^n$.

הערה זו הגדרה של מקבילונים אך למעשה גם מאפיינת את אוסף הגופים השקולים לינארית לקוביית היחידה $\mathbb{R}^n$.

הערה כדי להגדיר מרחק אינווריאנטי להזזה בין נקודות $y,z\in\mathbb{R}^n$, נגדיר אותו כפונקציה של $y-z$ וכך הוספה של וקטור ל-y,z תצטמצם ($y-z$ היא דוגמה לנורמה).

הגדרה <u>נורמה</u> היא פוקנצייה $\|\cdot\|:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ המקיימת:

1. (חיוביות): $\|x\|>0$, $\forall x\neq 0$.
2. (סימטריות) $\|-x\|=\|x\|$.
3. (הומוגניות) $\|\lambda x\|=|\lambda|\,\|x\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$.
4. (תת אדיטיביות, א"ש המשולש) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$.

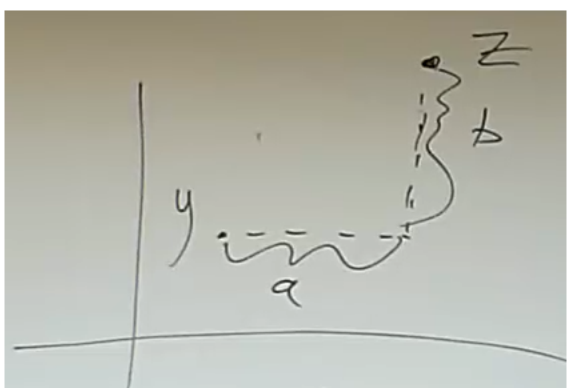
הערה את הסימטריה צריך כדי שהמרחק בין y,z יהיה זהה למרחק בין z,y.

הגדרה המרחק המושרה מהנורמה מוגדר ע"י $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(y,z)=\|y-z\|$.

טענה המרחק הוא סימטרי, אי שלילי ומקיים את א"ש המשולש, $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x,z)\leq\operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(x,y)+\operatorname{dist}_{\|\cdot\|}(y,z)$.

דוגמאות לנורמות

1. נורמת ℓ_1 (מרחק מנהטן): $\|x\|_1=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|$, $\operatorname{dist}_{\|\cdot\|_1}(y,z)=\mathrm{d}_1(y,z)=a+b$ כאשר a,b כבאיור. לדוגמה $\|(-3,5)\|_1=8$.



היא נקראת נורמת מנהטן כי מנהטן בנויה כמו grid וכדי להגיע מרחוב אחד לאחר צריך ללכת בקו אופקי ואנכי.

2. נורמת ℓ_∞ (מרחק מקסימום): $\|x\|_\infty=\max\limits_{1\leq i\leq n}|x_i|$ והמרחק הוא $\mathrm{d}_\infty(y,z)=\max\limits_{1\leq i\leq n}|y_i-z_i|$. באיור הנ"ל $\mathrm{d}_\infty(y,z)=b$ (כי b הוא ההפרש הגדול ביותר בין שתי קוורדינטות מתאימות של y,z כי $b>a$ מהציור).

3. נורמת ℓ_2 (מרחק אוקלידי): $\|x\|_2=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ שזו הנורמה ה"טבעית" ביותר. באיור הנ"ל המרחק האוקלידי בין y,z הוא $\sqrt{a^2+b^2}$. למעשה המרחק האוקלידי מכליל את משפט פיתגורס בכמה מימדים).

דוגמה $\mathrm{d}_2((1,2,3,4),(4,3,2,1))=\sqrt{9+1+1+9}=\sqrt{20}$.

הגדרה הכדור (ביחס לנורמה $\|\cdot\|$) ב-$\mathbb{R}^n$ ברדיוס R סביב נקודה $x \in \mathbb{R}^n$ הוא $B_{\|\cdot\|}(x,R) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \le R\}$.

הערה עבור ההגדרה הנ"ל עם השינוי הקטן ש-$\|y-x\|$ צריך להיות שווה ל-R, נקבל ספירה, כלומר קליפה כדורית.

הערה ב-$\mathbb{R}^2$, לפי מרחק אוקלידי כדור הוא אכן מעגל אבל לפי נורמת אינסוף הוא למעשה ריבוע (עם צלע $2R$)!

הגדרה יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$. הרדיוס של K מוגדר להיות $\mathrm{rad}_{\|\cdot\|}(K) = \inf\left\{R : \exists x \in \mathbb{R}, B_{\|\cdot\|}(x,R) \supseteq K\right\}$, כלומר רדיוס הכדור הכי קטן שמכיל את הגוף.

הגדרה יהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$. הקוטר של K לפי $\|\cdot\|$ מוגדר ע"י $\mathrm{diam}_{\|\cdot\|}(K) = \sup\{\|x-y\| : x,y \in K\}$, כלומר המרחק הכי גדול בין שתי נקודות בגוף.

דוגמה חשבו את הרדיוס והקוטר של קוביית היחידה ב-$\mathbb{R}^n$, $C^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i \in [0,1]|\} = [0,1]^n$ על פי הנורמות $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

נחשב את הקוטר לפי $\|\cdot\|_2$: נחשב את המרחק בין $(0,0,\ldots,0)$ ו-$(1,1,\ldots,1)$,

$$\|(1,1,\ldots,1)-(0,0,\ldots,0)\|_2 = \|(1,1,\ldots,1)\|_2 = \sqrt{n}$$

שזו הכללה לכך שהיתר במשולש ישר זווית עם ניצבים 1 הוא באורך $\sqrt{2}$. נוכיח כי אלו הנקודות הכי רחוקות.

$\forall x,y \in C^n$,

$$\|x-y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n}1^2} = \sqrt{n}$$

כלומר המרחק ביניהן הוא אכן הסופרימום ולכן הקוטר הוא $\sqrt{n}$.

הערה לא תמיד מתקיים שהרדיוס של גוף הוא חצי מהקוטר שלו.

הערה קוטר הוא תכונה גאומטרית ביחס להזזות כי הזזה מצטמצמת כאמור.

הגדרה פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ נקראת שומרת מרחק אם מתקיים $\mathrm{d}_2(x,y) = \mathrm{d}_2(f(x), f(y))$, $\forall x,y \in \mathbb{R}^n$. נסמן ב-$E^n$ את אוסף הפונקציות שומרות המרחק על $\mathbb{R}^n$.

הגדרה $L,K \in \mathbb{R}^n$ נקראים חופפים אם הם שקולים ביחס ל-E^n.

דוגמה C^2 ותיבה מוזזת לא בראשית הן חופפות.

הערה גוף הוא תת קבוצה (אינטואטיבית, לא פתולוגית) של $\mathbb{R}^n$.

הגדרה הזזה בוקטור v היא הפונקציה $S_v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ המוגדרת ע"י $S_v(x) = x + v$.

טענה אם $A \in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגנלית אז ההכפלה ב-A היא טש"מ (טרנספורנציה שומרת מרחק, לא טירוף-שיגעון-מניה). זאת משום שמטריצה אורתוג' מקיימת $\|Ax\|_2 = \|x\|_2$ ולכן $\|Ax-Ay\|_2 = \|A(x-y)\|_2 = \|x-y\|_2$.

טענה $E^n = \{S \circ T : \text{הזזה } S, \text{ אורתוג' } T\}$.

תרגול

הגדרה תהי משפחת פונקציות F, נאמר ששני גופים $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ <u>שקולים תחת F</u> אם קיימת $f \in F$ (הפיכה) כך ש- $f(K) = L$.

דוגמה $\mathcal{T} = \{\text{אוסף כל ההזזות בוקטור}\} = \{S_v : v \in \mathbb{R}^n\}$.

הערה T_v ו-S_v הם אותו הדבר ונראה אותם משומשים לחלופין.

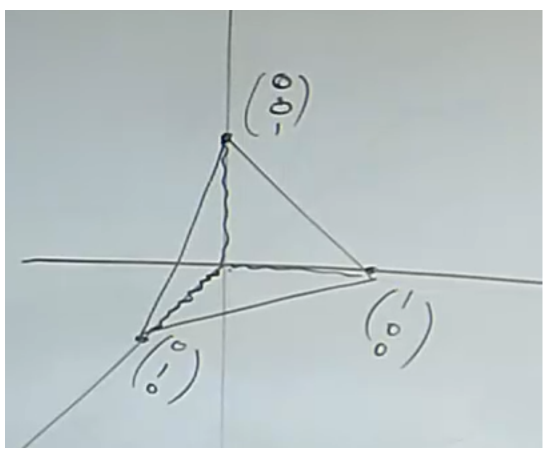
דוגמה $\mathcal{A} = \left\{T \circ A : \text{הזזה } T, A \in \operatorname{Aut}\left(\mathbb{R}^3\right)\right\}$ כלומר מתיחה והזזה בוקטור. זו קבוצת הטרנס' האפיניות.

עבור קו שעובר בראשית ב-$\mathbb{R}^2$, כל קו שעובר בראשית הוא שקול לו לינארית וכל קו שמקביל לו הוא שקול לו תחת הזזות ולכן כל קו ב-$\mathbb{R}^2$ שקול לו תחת $\mathcal{A}$.

באותו האופן, עבור מישורים ב-$\mathbb{R}^3$, כל מישור שקול תחת $\mathcal{A}$ לכל מישור אחר.

דוגמה עבור נורמה ℓ_1, $(x,y) \in B_{\|\cdot\|_1}((0,0),1)$ אם"ם $|x|+|y| \leq 1$ וברביע הראשון זה אומר ש-$x+y \leq 1$ ולכן $y \leq 1-x$. כלומר כדור היחידה תחת ℓ_1 הוא למעשה קוביה מסובבת ב-$45°$ עם צלע באורך $\sqrt{2}$.

דוגמה $(x,y,z) \in B_{\|\cdot\|_1}((0,0,0),1)$ אם"ם $|x|+|y|+|z| \leq 1$. ברור שוקטורי היחידה e_1, e_2, e_3 נמצאים בתוך הכדור וכך גם כל נקודה מאחורי הפאה המשולשית שנוצרת מהם (ראו איור). למעשה נקבל גוף שמורכב מ-8 פאות פרמידיות ביחס לסקטור שלהן בגרף (שוב, ראו איור).



טענה לכל גוף K, $\operatorname{diam}(K) \leq 2 \cdot \operatorname{rad}(K)$.

הוכחה: יהי x, r רדיוס ונקודה כך ש-$K \subseteq B(x,r)$. לכל $u, v \in K$,

$$\mathrm{d}(u,v) \leq \mathrm{d}(u,x) + \mathrm{d}(x,v) \leq r + r = 2r$$

לכן

$$\mathrm{d}(u,v) \leq \inf_{r : K \subseteq B(x,r)} 2r = 2 \inf_{r : K \subseteq B(x,r)} r = 2 \cdot \operatorname{rad}(K)$$

לכן זה נכון גם ל-sup, כלומר $\operatorname{diam}(K)=\sup_{u,v}\mathrm{d}(u,v)\le 2\cdot\operatorname{rad}(K)$. ■

דוגמה ניתן להשתמש בטענה הנ"ל כדי לחשב רדיוס של גוף בהסתמך על קוטרו. לדוגמה, עבור קוביית היחידה C^n, מצאנו ש-$\operatorname{diam}(C^n)=\sqrt{n}$ ומהטענה ידוע כי $\operatorname{rad}(K)\ge\frac{\sqrt{n}}{2}$ ולכן כל שנותר הוא למצוא כדור שמכיל את הקובייה ברדיוס $\frac{\sqrt{n}}{2}$ ונסיים מהגדרת הרדיוס כאינפימום.

שבוע $\mathbb{III}$ | טרנספורמציות שומרות מרחק ומכפלות פנימיות

איור מובחר

הרצאה

הערה מעתה נניח כי הנורמה שלנו היא אוקלידית/ℓ_2 אלא אם נאמר במפורש אחרת.

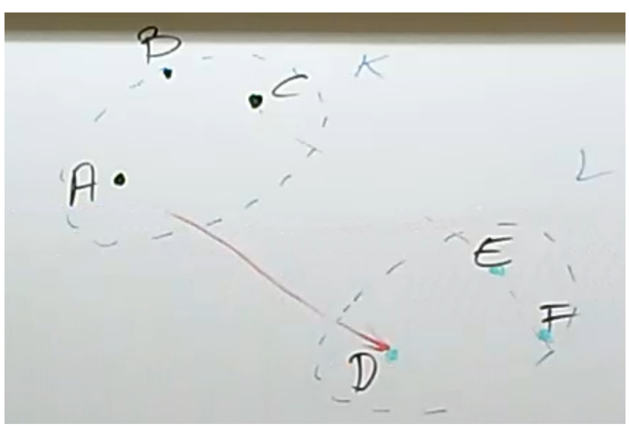
הגדרה נאמר כי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא טרנספורמציה שומרת מרחק (טש"מ) אם $\|T(x)-T(y)\|=\|x-y\|$ לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$.

הגדרה נאמר כי $K\simeq L$ או ש-K,L <u>חופפים</u> אם קיימת טש"מ T כך ש-$T(K)=L$.

הערה גופים שהם קטעים הם חופפים אם"ם אורכי הקטעים שווים. אם קטעים חופפים הם מקבילים, זה אומר שהגופים שקולים גם ביחס להזזות (אינטואיטיבית, לא נוכיח).

משפט (צלע זווית צלע) $\triangle ABC\simeq\triangle DEF$ אם"ם $|AB|=|DE|,|BC|=|EF|$ וגם $\sphericalangle ABC=\sphericalangle DEF$.

דוגמה המשולשים הבאים חופפים לפי המשפט הנ"ל



נרצה להוכיח את המשפט הזה עם הכלים שיש לנו מעבר לתיכון, אבל אין לנו עדיין את מושג הזווית.

הגדרה יהיו $y,z\in\mathbb{R}^n$. נאמר כי x בקמור שלהן אם הוא ממוצע משוקלל של y,z, כלומר קיים $\alpha\in[0,1]$ כך ש-

$$x=(1-\alpha)\,y+\alpha z=y+\alpha\,(z-y)$$

הערה הביטוי השני הוא הדגמה של ההבנה האינטואיטיבית שנקודה בין y ל-z היא להתחיל מ-y וללכת בכיוון z כמות כלשהי (α), על הוקטור $z-y$.

הגדרה הקטע בין y ל-z הוא $[y,z]=\{(1-\alpha)\,y+\alpha z:\alpha\in[0,1]\}$, כלומר אוסף הנקודות ביניהן.

בהינתן קטע ונקודה על הקטע, נרצה לדעת לאן טש"מ תעתיק אותו ביחד לקטע המועתק. נטען שהיא תהיה נקודה על הקטע המועתק עם אותו α. אינטואיטיבית זה נכון כי כל נקודה דורשת שהמרחק ממנה יהיה זהה אחרי ההעתקה ויחד הנקודה היחידה שמקיימת את זה היא הנקודה על הקטע באותו יחס.

הגדרה $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ היא טש"מ הומוגנית אם היא טש"מ ומקיימת $T\,(0)=0$.

טענה אם T טש"מ הומוגנית היא מקיימת $\|T\,(x)\|=\|x\|$.

הוכחה:

$$\|T\,(x)\|=\|T\,(x)-T\,(0)\|=\|x-0\|=\|x\|$$

■

טענה תהי T טש"מ הומוגנית כך ש-$T\,(x)=e_1$ (הפשטה, זה עובד לכל וקטור) אזי $\forall\alpha\in[0,1]$, $T\,(\alpha x)=\alpha e_1$, כלומר T הומוגנית.

הוכחה: נסמן $T\,(\alpha x)=y=(y_1,\ldots,y_n)$. נוכיח כי $y_1=\alpha$ ו-$y_i\neq 0$ לכל $i\geq 2$ ואז נקבל ש-$T\,(\alpha x)=\alpha e_1$. נניח בשלילה שקיים $i\neq 1$ שעבורו $y_i\neq 0$.

$$\begin{aligned}
1&=\alpha+(1-\alpha)\\
(*)&=\|T\,(\alpha x)\|+\|T\,(\alpha x)-e_1\|\\
&=\|y\|+\|y-e_1\|\\
&=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}+\sqrt{(y_1-1)^2+y_2^2+\ldots+y_n^2}\\
&>\sqrt{y_1^2}+\sqrt{(y_1-1)^2}\\
&=|y_1|+|1-y_1|\geq 1
\end{aligned}$$

סתירה ולכן $y=(y_1,0,\ldots,0)$.

$(*)$ מתקיים

$$\|T(\alpha x)\| = \|T(\alpha x) - 0\| = \|\alpha x - 0\| = \alpha\|x\| = \alpha$$
$$\alpha = \|T(\alpha x)\| = \|y\| = |y_1|$$

וגם

$$1 = \|e_1\| \overset{\text{טש"מ}}{=} \|T(x)\| = \|x\|$$
$$\|T(\alpha x) - e_1\| = \|T(\alpha x) - T(x)\| = \|\alpha x - x\| = \|(1-\alpha)x\| = (1-\alpha)\|x\| = 1-\alpha$$
$$1-\alpha = \|T(\alpha x) - e_1\| = |y_1 - 1|$$

אם $y_1 < 0$ אז $|y_1 - 1| > 1$ סתירה ולכן $y_1 \geq 0$ ובנוסף $y_1 = \pm\alpha$ ולכן $y_1 = \alpha$. ■

טענה (הכללה של הנ"ל) תהי T טש"מ הומוגנית, אזי $\forall\alpha \in [0,1]$, $\forall y,z \in \mathbb{R}^n$ מתקיים

$$T((1-\alpha)y + \alpha z) = (1-\alpha)T(y) + \alpha T(z)$$

הגדרה יהיו $y,z \in \mathbb{R}^n$. נגדיר את המכפלה הפנימית של y,z ע"י

$$\langle y \mid z\rangle = \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 = \frac{1}{4}\|y+z\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2$$

הערה השתמשנו בהגדרה שונה מהמקורית כי עם נורמות כבר התעסקנו, ובנוסף כך נוכל לראות שהמכ"פ מוגדרת באמצעות בין היתר $\frac{y+z}{2}$ שהוא אמצע הקטע $[y,z]$.

טענה מכ"פ היא תכונה גאומטרית ביחס לטש"מ הומוגנית.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle T(y) \mid T(z)\rangle &= \left\|\frac{T(y)+T(z)}{2}\right\|^2 - \frac{1}{4}\|T(y)-T(z)\|^2\\ &\overset{\text{מההכללה ומהגדרת הטש"מ}}{=} \left\|T\left(\frac{y+z}{2}\right)\right\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2\\ &= \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 - \frac{1}{4}\|y-z\|^2 = \langle y \mid z\rangle\end{aligned}$$

$\blacksquare$

טענה כל טרנס' ששומרת מכ"פ היא גם טש"מ הומוגנית (ולמעשה אורתוג', אבל עדיין לא הוכחנו לינאריות).

הערה נוכל לכתוב את המכ"פ גם באמצעות

$$\begin{aligned}
\langle y \mid z\rangle &= \frac{1}{4}\left\|y+z\right\|^2 - \frac{1}{4}\left\|y-z\right\|^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i+z_i\right)^2 - \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-z_i\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}4y_iz_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}y_iz_i
\end{aligned}$$

עם קצת אינטרפרטציה גאומטרית, ניתן לקבל ש-$\langle z \mid y\rangle = \|z\|\,\|y\|\cos\measuredangle\,(z,y)$ - נעזרים בטענה הבאה ומשם זה ברור.

טענה יהיו $y', z' \in \mathbb{R}^n$. אזי קיימת טש"מ הומוגנית (ולינארית אורתוג') T המקיימת $T\left(z'\right) = z = (z, 0, \ldots, 0)$ וכן $T\left(y'\right) = y = \left(y_1, y_2, 0, \ldots, 0\right)$.

הגדרה יהיו $y, z \in \mathbb{R}^n$, נגדיר את הזווית בין z, y, $\measuredangle\,(z,y)$ ע"י $\cos\measuredangle\,(y,z) = \frac{\langle y|z\rangle}{\|y\|\|z\|}$.

עבור משולש $\triangle ABC$, מהו $\cos\measuredangle ABC$? למעשה זהו $\cos\measuredangle\,(A-B, C-B)$.

משפט (צז"צ) יהיו $A, B, \ldots, F \in \mathbb{R}^n$. אזי $(A,B,C) \simeq (D,E,F)$ אם"ם מתקיימים התנאים הבאים:

1. $\|B-A\| = \|E-D\|$.
2. $\|B-C\| = \|E-F\|$.
3. $\measuredangle\,ABC = \measuredangle\,DEF$.

הערה הכוונה בחפיפה בין n-יות סדורות היא שקיימת טש"מ שעבורה החפיפה מתקיימת לכל הגופים בו זמנית.

הערה כשמסתכלים על זוויות בדו-מימד יש רק דרך אחת לחשבן שכן כיוון השעון הוא יחיד. עם זאת, במימד 3 והלאה אין כיוון שעון יחיד כי אפשר להסתכל "משני צידי" הוקטורים ולראות גם זווית θ אבל גם $2\pi-\theta$. לכן חשוב להגדיר את הזווית רק בין 0 ל-π ולא עד 2π ועוד על כך בהמשך.

תרגול

בתרגול הזה נפשט את הטש"מ ההומגנית ונראה שהיא לינארית, הפיכה ועוד.

משפט תהי T טש"מ הומוגנית אזי היא לינארית.

הוכחה: נוכיח אדיטיביות כי הומוגניות כבר יש לנו. מספיק שנוכיח כי $\|T(u+v)-T(u)-T(v)\|^2=0$ ומשם מאי-ניוון מקבל את הנדרש.

$$\begin{aligned}\|T(u+v)-T(u)-T(v)\|^2&=\langle T(u+v)-T(u)-T(v)\mid T(u+v)-T(u)-T(v)\rangle\\&=\langle T(u+v)\mid T(u+v)-T(u)-T(v)\rangle\\&\quad-\langle T(u)+T(v)\mid T(u+v)-T(u)-T(v)\rangle\\&=\langle T(u+v)\mid T(u+v)\rangle-\langle T(u+v)\mid T(u)+T(v)\rangle\\&\quad-\langle T(u)+T(v)\mid T(u+v)\rangle+\langle T(u)+T(v)\mid T(u)+T(v)\rangle\\&=\|T(u+v)\|^2-2\langle T(u+v)\mid T(u)\rangle-2\langle T(u+v)\mid T(v)\rangle\\&\quad+\|T(u)\|^2+\|T(v)\|^2+2\langle T(u)\mid T(v)\rangle\\&\overset{\text{הטרנס' היא טש"מ הומוגנית ולכן משמרת נורמה ומכ"פ}}{=}\|u+v\|-2\langle u+v\mid u\rangle-2\langle u+v\mid v\rangle+\|u\|^2+\|v\|^2+2\langle u\mid v\rangle\\&=0\end{aligned}$$

■

מסקנה כל טש"מ היא אורתוג' (משמרת מרחקים ולינארית).

משפט כל טש"מ הומוגנית היא הפיכה.

הוכחה: מספיק להוכיח ש-T חח"ע כי משם ממשפט המימדים II, $\dim\operatorname{Im}T=n$ ולכן היא על.

יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ לכן $\|T(u)-T(v)\|=\|u-v\|\neq0$ ולכן $T(u)\neq T(v)$. ■

הערה נסמן ב-$\mathcal{D}$ את אוסף הטש"מ על $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{D}$ סגורה להרכבות ומכילה העתקות הזזה ואורתוג', והרכבה של שתיים מהאחרונות נקראת העתקה אפינית.

טענה $[v]_{\mathcal{D}}=\mathbb{R}^n$, כלומר מחלקת השקילות של v ביחס ל-$\mathcal{D}$ היא $\mathbb{R}^n$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח ש-$u\simeq v$ עבור T טש"מ, לכן $T(v)=u\in\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow$: אם $u\in\mathbb{R}^n$, אז הזזה בוקטור $u-v$ מקיימת $T_{u-v}(v)=u-v+v=u$ ולכן $u\simeq v$. ■

הגדרה יהיו $(K_1,\ldots,K_n),(L_1,\ldots,L_n)$ סדרות גופים. נאמר כי הסדרות הללו חופפות אם קיימת טש"מ כל שלכל $i\in[n]$, $T(K_i)=L_i$.

טענה יהיו $x,y,z,w\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $(x,y)\simeq(z,w)$ אם"ם $\|x-y\|=\|z-y\|$, כלומר קטעים באורך שווה חופפים ולהפך.

הוכחה: $\Leftarrow$: תהי T טש"מ כך ש- $T(x)=z,T(y)=w$. לכן

$$\|x-y\|\overset{\text{טש"מ}}{=}\|T(x)-T(y)\|=\|z-w\|$$

$\Rightarrow$: $(x,y)\simeq(0,y-x)$ (נכון באמצעות הזזה ב-$x-$ עדיין חופפת) ובאותו האופן $(z,w)\simeq(0,w-z)$.

בנוסף, אם $\|v\|=\|v'\|$ אז $(0,v)\simeq(0,v')$ כי אפשר להגדיר העתקה לינארית אורתוג' שמקיימת $T(0)=0$ (כמובן) וכן $T(v)=v'$ וכדי להוכיח את קיומה והיות אורתוג', נרחיב את $(\hat{v})$ ו-$\left(\hat{v'}\right)$ לבסיסים אורתונ' באמצעות גראם שמידט ובאמצעות הבסיסים הללו נגדיר את ההעתקה. ∎

שבוע $\mathbb{III}$ | סימונים אסימפטוטיים ונחויותם

סרטון של חתולים רוקדים עד שהאיי קלאוד יחזור לעבוד

הרצאה

משפט יהיו $x_{1},\ldots,x_{k},y_{1},\ldots,_{k}\in\mathbb{R}^{n}$ אזי $(0,y_{1},\ldots,y_{k})\simeq(0,x_{1},\ldots,x_{k})$ אם"ם $\langle y_{i}\mid y_{j}\rangle=\langle x_{i}\mid x_{j}\rangle$ לכל $i,j\in[k]$.

הערה הוספנו 0 כדי להראות שמדובר בטש"מ הומוגנית ולא סתם טש"מ שמעתיקה בין הנקודות.

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(n)=\underset{n\to\infty}{\mathcal{O}}(g(n))$ אם קיים $c>0$ ו-$N\in\mathbb{N}$ כך ש-$\forall n\geq N$, $|f(n)|\leq c|g(n)|$ ונאמר כי f <u>חסום אסימפטוטית</u> או <u>נשלט</u> ע"י g.

הערה למעשה בגלל שאנחנו מחפשים מספר מספיק גדול אנחנו מגדירים שליטה ב"סביבת אינסוף".

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(x)=\underset{x\to x_{0}}{\mathcal{O}}(g(x))$ אם קיים $c>0$ ו-$\delta>0$ כך שלכל $x_{0}\neq x\in\mathbb{R}$ עבורו $|x-x_{0}|<\delta$ מתקיים $|f(x)|\leq c|g(x)|$.

הערה האי-שוויון הוא חשוב כדי ש-g יוכל להיות 0 (ואז גם f אפס).

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(x)=\underset{x\to x_{0}}{\Omega}(g(x))$ אם"ם $g=\underset{x\to x_{0}}{\mathcal{O}}(f(x))$.

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(n)=\underset{n\to\infty}{o}(g(n))$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים N כך ש-$\forall n\geq N$ מתקיים $|f(n)|\leq\epsilon|g(n)|$ ונאמר כי f <u>קטן אסימפטוטית</u> מ-g.

הערה ההבדל כאן הוא זה לכל ϵ ולא שקיים קבוע כזה, כלומר f נשלטת ע"י g עוד ועוד ככל שמתקרבים לאינסוף.

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(x)=\underset{x\to x_0}{o}(g(x))$ אם $\forall\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_0\neq x\in\mathbb{R}$ עבורו $|x-x_0|<\delta$ מתקיים $|f(x)|\leq\epsilon|g(x)|$.

הגדרה תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f(x)=\underset{x\to x_0}{\omega}(g(x))$ אם"ם $g(x)=\underset{x\to x_0}{o}(f(x))$.

הערה לא נתייחס ל-Θ כי זה טריוויאלי ולא מעניין (פשוט גם $\mathcal{O}$ וגם Ω).

תכונות

לא נוכיח אף אחד מהן כי ההוכחות זהות למקרים האסימפטוטיים ולא מעניינים.

1. $\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f)+\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(g)=\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f+g)$ כלומר סכום של שתי פ' שנשלטות ע"י f,g בהתאמה בסביבת x_0 נשלט ע"י $f+g$ בסביבת x_0 (למעשה, אי אפשר לסכום סימוני $\mathcal{O}$ אבל הכוונה היא לפ' שמקיימות את התנאי).
2. $\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f)\cdot\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(g)=\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f\cdot g)$.
3. אם $\underset{x\to x_0}{o}(f)$ אז $\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f)$.
4. אם $f=\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(g)$ וגם $g=\underset{x\to x_0}{o}(h)$ אזי $f=\underset{x\to x_0}{o}(h)$ (f חסומה ע"י משהו שקטן אסימפטוטית מ-h ולכן בעצמה קטנה אסימפטוטית מ-h).

משפט (קריטריון הגבול) יהי $x_0\in\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ ונניח כי קיים $L=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}$.

1. אם $L=\infty$ אז $g=\underset{x\to x_0}{o}(f)$.
2. אם $0<L<\infty$ אז $g=\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(f)$ וגם $f=\underset{x\to x_0}{\mathcal{O}}(g)$.
3. אם $L=0$ אז $f=\underset{x\to x_0}{o}(g)$.

דוגמאות

1. $f(x)=x^3,g(x)=x^2$, עבור $x_0=2$, ברור ש-$f=\underset{x\to 2}{\Theta}(g)$ (f הוא בערך 8 ו-g הוא בערך 4 בסביבת x_0).

עבור $x_0=-\infty$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\lim_{x\to-\infty}|x|=\infty$$

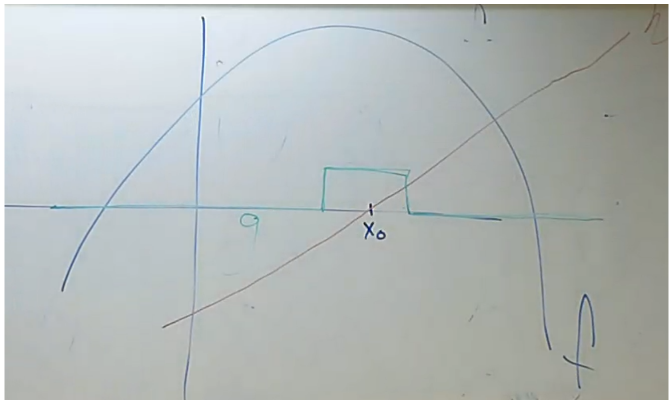
ולכן מתקיים $f=\underset{x\to-\infty}{\omega}(g)$ מקריטריון הגבול.

עבור $x_0=0$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)|}{|g(x)|}=\lim_{x\to 0}|x|=0$$

ומקריטריון הגבול זה אומר ש-$f\left(x\right)=\underset{x\to0}{o}\left(g\left(x\right)\right)$. את זה יכולנו לראות גם מזה ש-$f\left(x\right)=xg\left(x\right)$ ולכן עבור כל f ו-g שמקיימות את זה f קטנה יותר מהר ב-0 וגדלה יותר מהר ב-∞ ולכן לא צריך את קריטריון הגבול בכלל.

2. ננתח את f,g,h ב-x_0 מהאיור הבא:



ברור ש-$f=\underset{x\to x_0}{\Theta}\left(g\right)$ כי שניהם 0.

$h=\underset{x\to x_0}{o}\left(g\right)$ כי h מתאפס ב-x_0 ואילו g הוא ערך חיובי ולכן בסביבה קטנה מספיק הוא קטן מכל מספר שנרצה.

$h=\underset{x\to x_0}{o}\left(f\right)$ כי h מתאפס ו-f ערך חיובי כאמור.

טענה $f\left(x\right)=\underset{x\to x_0}{o}\left(1\right)$ אם"ם $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=0$.

הוכחה: $\Rightarrow$: מקריטריון הגבול.

$\Leftarrow$: יהי $\epsilon>0$. מהגדרת o קיימת סביבה מנוקבת של x_0 בה $\left|f\left(x\right)-0\right|\le\epsilon$ שזו בדיוק הגדרת הגבול עבור הגבול 0. ■

טענה תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. $\lim_{x\to x_0}f\left(x\right)=L\in\mathbb{R}$ אם"ם $f\left(x\right)=L+\underset{x\to x_0}{o}\left(1\right)$ (כלומר $f\left(x\right)-L=\underset{x\to x_0}{o}\left(1\right)$).

הוכחה: ברור מהגדרת הגבול ו-o. ■

טענה f רציפה ב-x_0 אם"ם $f\left(x\right)=f\left(x_0\right)+\underset{x\to x_0}{o}\left(1\right)$ לכל x.

הוכחה: f רציפה אם"ם היא מתכנסת בכל נקודה לערך בנקודה. ■

הערה שימוש ב-o לעתים יותר נוח מגבולות כי אפשר למעשה "להתעלם" ממנו ולהתמקדם במה שחשוב במשוואה.

הגדרה השיפוע של הישר $L=ax+b$ מוגדר ע"י

$$\tan\alpha=\frac{b}{a}=\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

כאשר α הזווית בין L לציר x. $\frac{b}{a}$ הוא השיפוע הממוצע של f בקטע $\left[x,x_0\right]$.

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. <u>הנגזרת</u> ב-$x_0$ של f היא $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (אם קיים הגבול).

טענה $f'(x_0)=\alpha$ אם"ם

$$f(x)=f(x_0)+\alpha(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$$

הערה אינטואיטיבית, המשמעות של זה היא שהערך ב-x מספיק קרוב הוא הערך ב-x_0 ועוד הדמיה של ישר בשיפוע הנגזרת.

הוכחה: $\Rightarrow$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}&=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)}{x-x_0}\\ \frac{1}{x-x_0}=\underset{x\to x_0}{o}(1)\ \text{כי}\ &=\alpha+\lim_{x\to x_0}\underset{x\to x_0}{o}(1\cdot(x-x_0))\\ &=\alpha\end{aligned}$$

$\Leftarrow$: נשתמש בקריטריון הגבול

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-\alpha(x-x_0)}{x-x_0}=\alpha-\alpha=0$$

■

טענה (כלל לייבניץ) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אזי

$$(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)g(x_0)+g'(x_0)f(x_0)$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(x)-(f\cdot g)(x_0)&=f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)\\ \text{מטענה הקודמת}&=\left(f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)\right)\left(g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)-\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)\right)-f(x_0)g(x_0)\\ (*)&=(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)+f(x_0)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)\\ &=(f'(x_0)g(x_0)+f(x_0)g'(x_0))(x-x_0)+\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)\end{aligned}$$

$(*)$ כל הגורמים שלא רשומים במפורש הם מכפלה של קבוע או $\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$ עם $\underset{x\to x_0}{o}(x-x_0)$.

עתה מהטענה הקודמת קיבלנו את השוויון. ■

תרגול

דוגמאות

1. $x^n, x^m, m>n$, $x_0=0$. נבדוק האם $\underset{x\to x_0}{o}(x^m)=x^n$? נשתמש בקריטריון הגבול, $\lim_{x\to x_0}\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}\overset{m\geq n}{=}\infty$ ונגלה שהתשובה היא לא! באופן לא אינטואיטיבי, ב-0 מתקיים למעשה $\underset{x\to x_0}{o}(x^n)=x^m$.
2. $e^x-1, x^n, n>1$, $x_0=0$. נשתמש בקריטריון הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^n}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{nx^{n-1}}=\infty$ ולכן $\underset{x\to x_0}{o}(2^x-1)=x^n$ שזה הגיוני כי קצב הגדילה של e^x באזור הראשית קטן משל פולינום על-לינארי.

טענה יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$, אזי $\frac{a}{b+\alpha c}=\underset{\alpha\to 0}{\mathcal{O}}(\alpha)+\frac{a}{b}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a}{b+\alpha c}-\frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{ba-a(b+\alpha c)}{b^2+\alpha cb}\right| \\ &= \left|\frac{\alpha ac}{b^2+\alpha cb}\right| \\ &= \left|\frac{ac}{b^2+\alpha cb}\right||\alpha| \\ &\leq \tilde{C}|\alpha| \text{ כאשר } \alpha\to 0,\ \left|\frac{ac}{b^2+\alpha cb}\right|\longrightarrow\left|\frac{ac}{b^2}\right|\end{aligned}$$

■

הערה מעתה נסמן x_0 עם 0 למעלה, כלומר x^0 כי בהמשך נעבור לנקודות עם אינדקסים למטה, וזה לא אומר חזקת אפס.

דוגמה $f(x)=x^2+3x+5, x^0=0$. $f'(x)=2x+3$ ולכן $f'(0)=3$ - נראה זאת באמצעות סימון o:

$$f(x)=5+3(x-0)+x^2=f(0)+f'\left(x^0\right)(x-0)+\underset{x\to 0}{o}(x-0)$$

טענה אם α,β מקיימות את הגדרת הנגזרת עם סימון o, אזי $\alpha=\beta$.

הוכחה:

$$f(x)=f(x^0)+\alpha(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)$$
$$f(x)=f(x^0)+\beta(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)$$

נחסר

$$0=(\alpha-\beta)(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)-\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)$$

ומטענה שנוכיח בתרגיל, זה אומר ש-$(\alpha-\beta)(x-x_0)=\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)$ (אי אפשר סתם לחסר o) וזה דורש ש-$\alpha=\beta$ כי אחרת לא מתקיימת הגדרת o. ■

טענה תהיינה f,g פ' כך ש-f גזירה ב-$g(x^0)$, g גזירה ב-x^0, אזי $f\circ g$ גזירה ב-x^0.

הוכחה: נראה את קיום הגדרת הגזירות עם סימון o

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= f\left(g(x^0)+\underbrace{g'(x^0)(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)}_{\beta}\right)\\
&\overset{(*)}{=} f(g(x^0))+f'(g(x^0))\left(\underbrace{g'(x^0)(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)}_{\beta}\right)+\underbrace{\underset{x\to x^0}{o}}_{(**)}\left(\underbrace{g'(x^0)(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)}_{\beta}\right)\\
&= f(g(x^0))+f'(g(x^0))g'(x^0)(x-x^0)+f'(g(x^0))\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}\left(g'(x^0)(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)\right)\\
&= (f\circ g)(x^0)+\underbrace{f'(g(x^0))g'(x^0)}_{(f\circ g)'(x^0)}(x-x^0)+\underbrace{\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)}_{(***)}
\end{aligned}$$

$(*)$ הגדרת הנגזרת של f בנקודה $g(x^0)$ בהצבת $\beta=x-g(x^0)$ (כלומר $x=g(x^0)+\beta$).

$(**)$ למעשה זה היה אמור להיות $g(x)\to g(x^0)$ אבל זה שקול בעזרת אינפי.

$(***)$ מתקבל מסכום של ה-o שמוכל ב-$f'(g(x^0))$, יחד עם ה-o המקונן, שהוא $\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)$ מהחישוב הבא:

$$\begin{aligned}
\underset{x\to x^0}{o}\left(\alpha(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)\right) &= \underset{x\to x^0}{o}\left(\underset{x\to x^0}{\mathcal{O}}(x-x^0)+\underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)\right)\\
&\overset{\text{דאסט}}{=} \underset{x\to x^0}{o}\left(\underset{x\to x^0}{\mathcal{O}}(x-x^0)\right)\\
&\overset{\text{דאסט}}{=} \underset{x\to x^0}{o}(x-x^0)
\end{aligned}$$

■

שבוע $\mathbb{IV}$ | פונקציות רב ממדיות

איור מובחר

הרצאה

הגדרה פונקציה רב משתנית היא פ' $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

דוגמאות

1. $f\left(x\right)=x_1+2x_2-x_3+6x_4=\left(1,2,-1,7\right)\cdot x$, זו פ' לינארית.
2. $f\left(x,y,z\right)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (נורמה ℓ_2).
3. $f\left(x,y\right)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.

הערה לרוב נחשוב על משתנים של פ' רב משתניות בתור וקטורי עמודה אבל לפעמים נרשום אותם כוקטורי שורה - זה לא משנה לצורכנו יותר מדי.

הערה במקום לכתוב כל פעם $\left(x_1,\ldots,x_{i-1},s,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$, עבור $x^0\in\mathbb{R}^n$, נסמן $x_{-i}^0=\left(x_1,\ldots,x_{i-1},\cdot,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ ואז $\left(x_{-i}^0,s\right)=\left(x_1,\ldots,x_{i-1},s,x_{i+1},\ldots,x_n\right)$ הוא קיצור יותר נוח (הצבה של s ב-$\cdot$).

הגדרה הגרף של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ הוא $\mathbb{R}^2\supseteq\Gamma\left(f\right)=\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}\right\}$ ושל פ' רב ממדית, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, הוא

$$\mathbb{R}^{n+1}\supseteq\Gamma\left(f\right)=\left\{\left(x,f\left(x\right)\right):x\in\mathbb{R}^n\right\}$$

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. הפונקציה החלקית של f בכיוון $i\in[n]$ דרך $x^0\in\mathbb{R}^n$ היא $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $g\left(x_i\right)=f\left(x_{-i}^0,x_i\right)$.

הערה נסמן $g=f\left(x_{-i}^0\right)$ ואז לפי הסימונים שלנו זה בערך יסתדר יפה.

דוגמה הפ' החלקית של $f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2}$ בכיוון y דרך הנקודה $\left(3,4\right)$ היא $g\left(y\right)=f\left(3,y\right)=\sqrt{9+y^2}$.

הגדרה הנגזרת החלקית של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ בכיוון $i\in[n]$ בנקודה x^0 מוגדרת ע"י $f'\left(x_{-i}^0\right)\left(x_i^0\right)$ ונסמן $\partial^i f\left(x^0\right)$ או אם למשתנה יש שם אז $\partial^y f\left(x^0\right)$ אבל במקומות אחרים מסמנים גם $\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x^0\right)$.

הערה כלומר, אנחנו מחשבים את הנגזרת של הפ' החלקית ומציבים בה את x^0 (למעשה רק את x_i^0).

דוגמה $f\left(x_1,x_2\right)=\frac{x_1^2}{1+x_2^2}$. הנגזרת החלקית בנקודה $x^0=(2,1)$ בכיוון 1 היא $\left(f\left(x_1,1\right)\right)'=\left(\frac{x_1^2}{2}\right)'=x_1=2$, כלומר בהינתן x^0,

$$\begin{aligned}\partial^i f\left(x^0\right)&=f'\left(x,x_2^0\right)=\left(\frac{x_1^2}{1+\left(x_2^0\right)^2}\right)'\left(x_1^0\right)\\&=\left(\frac{2x_1}{1+\left(x_2^0\right)^2}\right)\left(x_1^0\right)\\&=\frac{2x_1^0}{1+\left(x_2^0\right)^2}\end{aligned}$$

טענה (השתנות חסומה) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ונניח כי $\left|f'(x)\right|\le M\in\mathbb{R}$, $\forall x$. אזי $|f(b)-f(a)|\le M|b-a|$.

הוכחה: ממשפט הערך הממוצע של לגרנז', קיים ξ כך ש-$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$, ולכן

$$|f(b)-f(a)|=\left|f'(\xi)\right|\cdot|b-a|\le M|b-a|$$

■

מסקנה אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ומתקיים $\forall x,\forall i$, אזי $\forall a,b\in\mathbb{R}^n$, $|f(b)-f(a)|\le M\|b-a\|_1$.

הוכחה: נגדיר $a^i=\left(a_1,\ldots,a_i,b_{i+1},\ldots,b_n\right)$. אזי $a^n=a,a^0=b$

$$\begin{aligned}f(b)-f(a)&=f\left(a^0\right)-f\left(a^n\right)\\&=f\left(a^0\right)-f\left(a^1\right)+f\left(a^1\right)-\ldots-f\left(a^n\right)&&\text{הפרש כל שני ערכים הוא בעצם הפרש פ' חלקיות}\\&\le M\left|a_1-b_1\right|+M\left|a_2-b_2\right|+\ldots+M\left|a_n-b_n\right|\\&=M\|a-b\|_1\end{aligned}$$

כאשר הרעיון הוא שאנחנו יודעים לזוז רק על ציר אחד כל פעם ולכן כל פעם נשנה קוורדינטה אחת ונשתמש בטענה הנ"ל. ■

הגדרה חלוקה של $[a,b]$ היא $p=\left(a=p_0,p_1,\ldots,p_k=b\right)$.

נאמר כי $I\in p$ אם"ם $I=\left(p_{i-1},p_i\right)$ ונסמן $\text{length}(I)=p_i-p_{i-1}$.

פרמטר החלוקה של p הוא $|p|=\max\limits_{i\in[k]}\left|p_i-p_{i-1}\right|$.

סכום על החלוקה (לפי דרבו) הוא

$$\overline{\sum_p} f=\sum_{i=1}^k \overline{f\left(\left[p_{i-1},p_i\right]\right)}\text{length}\left(\left[p_{i-1},p_i\right]\right)$$

(עליון) ו-

$$\underline{\sum}_p f=\sum_{i=1}^{k}\underline{f\left([p_{i-1},p_i]\right)}\text{length}\left([p_{i-1},p_i]\right)$$

(תחתון) כאשר עבור קבוצה A, $\overline{A}=\sup A,\underline{A}=\inf A$.

נאמר כי f אינטגרבילית אם קיים $\ell\in\mathbb{R}$ כך ש-$\overline{\sum}_p=\ell+\underset{|p|\to 0}{o}(1)$ וגם $\underline{\sum}_p=\ell+\underset{|p|\to 0}{o}(1)$.

טענה אם $\forall x\in[a,b]$, $|f'(x)|\leq M$ אזי f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הערה זה כרגע לא ממש מעניין כי אם f גזירה אז היא רציפה ולכן אינטגרבילית.

הערה אז נוכל לסמן $\overline{\sum}_p f=\sum\limits_{I\in p}\overline{f(I)}\text{length}(I)$, כך נוכל להכליל זאת לכמה ממדים.

הגדרה תהי $C=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$ קוביה מקבילה לצירים (המכפלה היא קרטזית). חלוקה של C היא $p=\left(p^1,\ldots,p^n\right)$ כאשר p^i היא חלוקה של $[a_i,b_i]$.

נאמר כי $I^i\in p$ $I=\prod\limits_{i=1}^{n}$ אם $\forall i$, $I^i\in p^i$.

נגדיר את פרמטר החלוקה להיות $|p|=\max\limits_{I\in p}|I|$ כאשר $|I|=\sum\left|I^i\right|$.

נגדיר את הסכומים על החלוקה להיות (עליון ותחתון בהתאמה)

$$\overline{\sum}_p f=\sum_{I\in p}\overline{f(I)}\text{vol}(I)$$

$$\underline{\sum}_p f=\sum_{I\in p}\underline{f(I)}\text{vol}(I)$$

כאשר $\text{vol}(I)=\prod\limits_{i=1}^{n}\text{length}\left(I^i\right)$.

נאמר כי f אינטגרבילית אם קיים $\ell\in\mathbb{R}$ כך ש-$\overline{\sum}_p f=\ell+\underset{|p|\to 0}{o}(1)$ וכן $\underline{\sum}_p f=\ell+\underset{|p|\to 0}{o}(1)$.

הערה אם פרמטר החלוקה הוא קטן מאוד זה אומר שאורך כל הצלעות של התיבה הרב ממדית מאוד קצרות.

תרגול

דוגמה $f(x,y)=xy+y^2$. עבור $y=3$, הפ' החלקית היא לפי x היא $g(x)=3x+9$, כלומר קו ישר, ואילו לפי y ב-$x=-2$ נקבל $h(y)=-2y+y^2$, כלומר היא פרבולה בכיוון y וישר בכיוון x (דמיינו את זה או הסתכלו בגאו-גברה).

$\partial^x f(2,5)=(5x+25)'(2)=5$ ובאותו האופן

$$\partial^y f(-3,8)=\left(-3y+y^2\right)'(8)=-3+2\cdot 8=13$$

ככלל, $\partial^x f=y$ וגם $\partial^y f=x+2y$.

טענה תהי P חלוקה של $C=\prod\limits_{i=1}^{n}I^{i}$, אזי $\operatorname{vol}(C)=\sum\limits_{I\in P}\operatorname{vol}(I)$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\sum_{I\in P}\operatorname{vol}(I) &\overset{(*)}{=} \sum_{J_1\in p^1}\sum_{J_2\in p^2}\dots\sum_{J_n\in p^n}\prod_{i=1}^{n}|J_i|\\ \text{שינוי סדר כפל} &= \left(\sum_{J_1\in p^1}|J_1|\right)\left(\sum_{J_2\in p^2}|J_2|\right)\dots\left(\sum_{J_n\in p^n}|J_n|\right)\\ &=\prod_{i=1}^{n}\left|I^i\right|=\operatorname{vol}(C)\end{aligned}$$

$(*)$ אנחנו סוכמים את נפחי כל התיבות, ואפשר במקום זאת לסדר את הקטעים (כל הקופסאות שמכילות את הקטע הראשון מהמימד הראשון והקטע הראשון מהמימד השני, ואז הקטע השני מהמימד השני וכו'). ■

טענה תהיינה $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות על C, אזי $\int\limits_C f+g=\int\limits_C f+\int\limits_C g$.

הוכחה: נסמן ℓ,ℓ_f,ℓ_g האינטגרלים בהתאמה. נוכיח כי $\ell\le\ell_f+\ell_g$. תהי p חלוקה של C, לכן

$$\begin{aligned}\ell+o(1)=\overline{\sum}_p(f+g) &= \sum_{I\in p}\overline{f+g}(I)\operatorname{vol}(I)\\ \text{אינפי 1} &\le \sum_{I\in p}\overline{f}(I)\operatorname{vol}(I)+\sum_{I\in p}\overline{g}(I)\operatorname{vol}(I)\\ &=\ell_f+\ell_g+o(1)\end{aligned}$$

ולכן $\ell+o(1)\le\ell_f+\ell_g+o(1)$, לכן $\forall\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל חלוקה עם $|p|<\delta$ מתקיים $-\epsilon+\ell\le\ell_f+\ell_g+\epsilon$ (הגדרת $\underset{|p|\to0}{o}(1)$), כלומר $\ell\le\ell_f+\ell_g+2\epsilon$ ולכן מארכימדיות או טענה אחרת לא מעניינת מאינפי 1, $\ell\le\ell_f+\ell_g$.

באותו האופן אפשר להוכיח את הא"ש בכיוון ההפוך ולסיים את ההוכחה. ■

שבוע $\mathbb{V}$ | אינטגרלים רב ממדיים

איור מובחר

הרצאה

הגדרה תהיינה p,p' חלוקות של $C=\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]$. נאמר כי $p\le p'$ אם לכל $I\in p'$ קיים $I\in p$ כך ש-$I'\subseteq I$ ובמקרה זה נאמר כי p' היא <u>עידון</u> של p.

הגדרה תהיינה p,q חלוקות של C. העידון המשותף של p,q הוא חלוקה $p\sqcap q=\left(p^{1}\sqcap q^{1},\ldots,p^{n}\sqcap q^{n}\right)$ כאשר עידון משותף של חלוקות חד-ממדיות הוא איחוד הנקודות של שתי החלוקות בסדר עולה.

טענה עבור p,q חלוקות של C, $p,q\leq p\sqcap q$.

משפט אם $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ ו-$C\subseteq\mathbb{R}^{n}$ ומתקיים $x\in\mathbb{R}^{n}$, $\forall i\in[n]$, $\left|\partial^{i}f\left(x\right)\right|\leq M>0$ אז קיים האינטגרל $\int\limits_{C}f$.

הוכחה: הרעיון הוא שבגלל שהשתנות של f חסומה, אז עבור חלוקה מספיק קטנה הפ' תשתנה ממש קצת ואז נקבל את הנדרש.

מתקיים לכל p,q חלוקות $\overline{\sum}_{p}f\geq\underline{\sum}_{q}f$ (זה נובע מעידון משותף וההמשך מושאר לסטודנטית המשקיעה).

נוכיח כי לכל שתי חלוקות p,q של C עם פרמטר $\geq\lambda$, מתקיים $\overline{\sum}_{p}f\leq\underline{\sum}_{q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)$.

ראשית נראה כי $\overline{\sum}_{p}f=\overline{\sum}_{p\sqcap q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)$. אם $I\in p$ ו-$I'\subseteq I$ אז לכל $x\in I,y\in I'$ מתקיים

$$\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|\leq M\left\Vert x-y\right\Vert _{1}\leq M\left|I\right|\leq M\left|p\right|=\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\overline{\sum}_{p}f & =\sum_{I\in p}\overline{f\left(I\right)}\mathrm{vol}\left(I\right)\\
 & =\sum_{I\in p}\sum_{I'\in p\sqcap q,I'\subseteq I}\overline{f\left(I\right)}\mathrm{vol}\left(I'\right) && \text{הנפח שווה לסכום הנספחים המוכלים בו}\\
 & =\sum_{I\in p}\sum_{I'\in p\sqcap q,I'\subseteq I}\left(\overline{f\left(I'\right)}+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)\right)\mathrm{vol}\left(I'\right) && \text{מההשתנות החסומה}\\
 & =\sum_{I'\in p\sqcap q}\overline{f\left(I'\right)}\mathrm{vol}\left(I'\right)+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)\sum_{I'\in p\sqcap q}\mathrm{vol}\left(I'\right)\\
 & =\overline{\sum}_{p\sqcap q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)\mathrm{vol}\left(C\right)\\
 & =\overline{\sum}_{p\sqcap q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)
\end{aligned}$$

באופן דומה מתקיים

$$\begin{aligned}\overline{\sum}_{p\sqcap q}f & \leq\underline{\sum}_{p\sqcap q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)\\
\underline{\sum}_{p\sqcap q}f & \leq\underline{\sum}_{q}f+\underset{\lambda\to0}{o}\left(1\right)
\end{aligned}$$

ושירשור שלהם מניב את הא"ש הנ"ל אבל את הכתיבה הפורמלית נשאיר לסטודנטית המשקיעה.

משם אפשר להוכיח את הא"ש בכיוון השני ולקבל שוויון על הגבולות של הסכום העליון והתחתון. ■

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$K\subseteq\mathbb{R}^n$. נגדיר את האינטגרל על K להיות $\int\limits_K f=\int\limits_C f\cdot\mathbb{1}_K$ כאשר C היא קוביה שמקיימת $K\subseteq C$.

הערה אנחנו מניחים בהגדרה ש-f על K היא אינטרגבילית וש-K הוא גוף נחמד.

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נגדיר $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f=\lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_{[-t,t]^n} f$.

תכונות האינטרגל

1. $\int\limits_K \lambda f=\lambda\int\limits_K f$ (הומוגניות) וגם $\int\limits_K f+g=\int\limits_K f+\int\limits_K g$ (אדיטיביות) ולכן $\int$ הוא פ' לינארי על מרחב הפ' האינטגרביליות.
2. $\int\limits_C 1=\text{vol}\left(C\right)$.
3. $\int\limits_K 1=\text{vol}\left(K\right)$ (זו לא באמת תכונה, זו ההגדרה של נפח של גוף).

הערה עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $i\in[n]$, $y\in\mathbb{R}$, נסמן $f_{i\leftarrow y}:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}$ $f_y\left(x_1,\dots,x_{n-1}\right)=f\left(x_1,\dots,x_{i-1},y,x_i,\dots,x_{n-1}\right)$.

הערה עבור $C=\prod\limits_{i=1}^n\left[a_i,b_i\right]$. נסמן $C^i=\left[a_i,b_i\right]$ ו-$C^{-i}=\prod\limits_{i\neq j=1}^n\left[a_j,b_j\right]$.

משפט (פוביני) תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פ' עם נגזרות חלקיות חסומות ב-C, אזי $\int\limits_C f=\int\limits_{y_1\in C_1}\left(\int\limits_{C^{-1}} f_{y_1}\right)$.

הערה כלומר עם משפט פוביני אפשר לחשב אינטגרל באמצעות אינטגרל חד ממדי על פ' לינארית (שהוא במקרה אינטגרל על $n-1$ ממדים).

דוגמה

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]^2}\frac{2xy}{1+x^2}&=\int\limits_{x\in[0,1]}\left(\int\limits_{y\in[0,1]} f_x\left(y\right)\right)\\
&=\int\limits_{x\in[0,1]}\int\limits_{y\in[0,1]}\frac{2xy}{1+x^2}\\
&=\int\limits_{x\in[0,1]}\frac{1}{2}\cdot\frac{2xy^2}{1+x^2}\Big|_0^1\\
&=\int\limits_{x\in[0,1]}\frac{x}{1+x^2}\\
&=\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{2}\Big|_0^1\\
&=\frac{\ln 2}{2}
\end{aligned}
$$

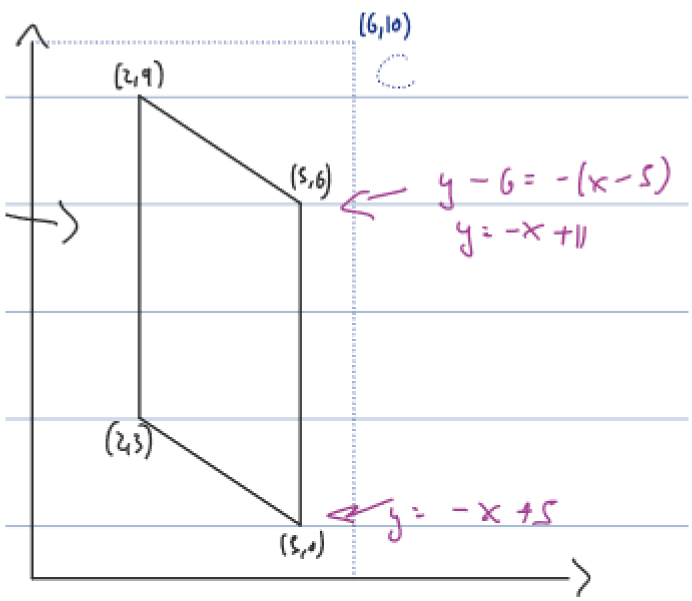
תרגול

דוגמאות

1. חשבו את האינטגרל של $f\left(x,y\right)=3xy^{2}+e^{x}$ על $C=\left[1,2\right]\times\left[3,5\right]$.

$$\begin{aligned}\int\limits_{C}f & \overset{\text{פוביני}}{=}\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{3}^{5}f\left(x,y\right)\,\text{dy}\right)\,\text{dx}\\
 & =\int\limits_{1}^{2}\left(\int\limits_{3}^{5}3xy^{2}+e^{x}\,\text{dy}\right)\,\text{dx}\\
 & =\int\limits_{1}^{2}\left(xy^{3}+e^{x}y\Big|_{3}^{5}\right)\,\text{dx}\\
 & =\int\limits_{1}^{2}\left(98x-2e^{x}\right)\,\text{dx}\\
 & =\ldots=\,49x^{2}-2e^{x}\Big|_{1}^{2}=\ldots
\end{aligned}$$

2. חשבו את שטח המקבילית שבאיור.



נסמן אותה ב-K. $\text{vol}\left(K\right)=\int\limits_{\left[0,6\right]\times\left[0,10\right]}\mathbb{1}_{K}$ כי $C=\left[0,6\right]\times\left[0,10\right]$ היא קוביה שמכילה את המקבילית (אנחנו בדו מימד, אפילו שזה נראה תלת מימדי).

ברגע שקיבענו ערך y, האורך שנצטרך לאנטגרל עליו משתנה (למעלה קטן, באמצע הכי גדול וכו').

אם נקבע ערך x, הגובה שנצטרך לסכום עליו הוא כן קבוע! כלומר, הסדר הספציפי כאן מקל על החישוב שלנו.

$$\begin{aligned}\int\limits_{[0,6]\times[0,10]} \mathbb{1}_K &\overset{\text{פוביני}}{=} \int\limits_0^6 \left(\int\limits_0^{10} \mathbb{1}_K \text{ dy}\right) \text{ dx}\\ &= \int\limits_2^5 \left(\int\limits_{5-x}^{11-x} 1 \text{ dy}\right) \text{ dx} \quad \text{מצמצמים את הגבולות רק למה שלא מתאפס}\\ &= \int\limits_2^5 \left((11-x)-(5-x)\right) \text{ dx}\\ &= \int\limits_2^5 6 \text{ dx} = 6\cdot(5-2) = 18\end{aligned}$$

שזה בדיוק בסיס כפול גובה - הנוסחה מהתיכון.

3. חשבו את האינטגרל של $f(x,y)=2y$ על המקבילית K הנ"ל.

$$\begin{aligned}\int\limits_K = \int\limits_C f\mathbb{1}_K &\overset{\text{פוביני}}{=} \int\limits_2^5 \left(\int\limits_{5-x}^{11-x} f(x,y) \text{ dy}\right) \text{ dx}\\ &= \int\limits_2^5 y^2\Big|_{5-x}^{11-x} \text{ dx} = \dots\end{aligned}$$

שאלה בהינתן $K\subseteq\mathbb{R}^n$ והזזה $T(x)=x+v$, איך הפ' $\mathbb{1}_{T(K)}$ מתנהגת?

$$\begin{aligned}&\mathbb{1}_{T(K)} = 1\\ \iff& x\in T(K)\\ \iff& x\in K+v\\ \iff& x-v\in K\\ \iff& \mathbb{1}_K(x-v)=1\\ \iff& \mathbb{1}_K\circ T^{-1}(x)=1\end{aligned}$$

טענה $\text{vol}(K)=\text{vol}(T(K))$ כאשר T הזזה.

הוכחה: תהי C קוביה המכילה את K. לכן $T(C)$ מכילה את $T(K)$. תהי p חלוקה של C, לכן $T(p)$ (הזזה של כל הנקודות בתוך החלוקה)

היא חלוקה של $T(c)$ ובפרט $|p| = |T(p)|$.

$$
\begin{aligned}
\overline{\sum}_p \mathbb{1}_K &= \sum_{I\in p} \overline{\mathbb{1}_K(I)}\mathrm{vol}(I) \\
&= \sum_{T(I)\in T(p)} \overline{\mathbb{1}_K \circ T^{-1}(T(I))}\mathrm{vol}(T(I)) \\
&= \sum_{T(I)\in T(p)} \overline{\mathbb{1}_{T(K)}(T(I))}\mathrm{vol}(T(I)) \\
&= \overline{\sum}_{T(p)} \mathbb{1}_{T(K)}
\end{aligned}
$$

כלומר יש ממש שוויון על הסכומים העליונים בין החלוקות המוזזות ובדומה גם על התחתונים ואז מההגדרה האינטגרל על הצורות עם המציין שווה. ■

שבוע $\mathbb{VI}$ | משפט פוביני

איור מובחר

הרצאה

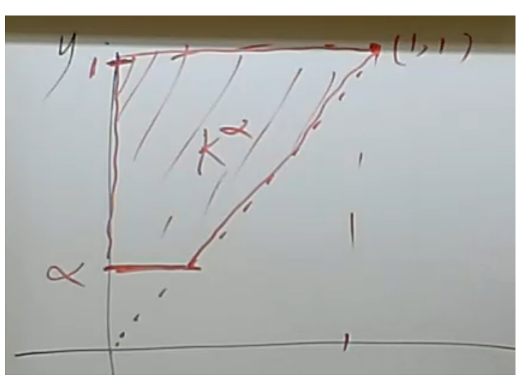
טענה עבור $K,K'\subseteq\mathbb{R}^n$ זרים, מתקיים $\int_{K\cup K'} f = \int_K f + \int_{K'} f$ (נובע ישירות מאדיטיביות).

מסקנה $\mathrm{vol}(K\uplus K') = \mathrm{vol}(K)+\mathrm{vol}(K')$.

טענה אם $\forall x,y\in I\in p$ מתקיים $|f(x)-f(y)| = \underset{|p|\to 0}{o}(1)$ אז $\overline{\sum}_p f \simeq \underline{\sum}_p f \simeq \int_C f$ כאשר $\simeq$ מייצג שוויון עם $\underset{|p|\to 0}{o}(1)$.

משפט (פוביני-טונלי) $\int_C f = \int_{y\in C^1} \underbrace{\left(\int_{C^{-1}} f_y\right)}_{\phi(y)}$ כאשר $f_y(x_2,\dots,x_n) = f(y,x_2,\dots,x_n)$.

דוגמה האינטגרל של $f(x,y)=\frac{1}{y}$ על K^α כאשר K^α הוא כבציור.



$$\begin{aligned}
\int\limits_{K^\alpha} f = \int\limits_{K^\alpha} \frac{1}{y} &= \int\limits_{[0,1]\times[\alpha\times 1]} \frac{1}{y}\mathbb{1}_{K^\alpha} \\
&= \int\limits_{y\in[\alpha,1]} \left(\int\limits_{x\in[0,1]} \frac{1}{y}\mathbb{1}_{[0,y]}\left(x\right) \right) \\
&= \int\limits_{[\alpha,1]} \left(\int\limits_{[0,y]} \frac{1}{y}\ \mathrm{dx} \right) \\
&= \int\limits_{[\alpha,1]} \left(\frac{1}{y}\cdot\left(y-0\right) \right) \\
&= 1-\alpha
\end{aligned}$$

מתקיים בנוסף $\int\limits_{K^0} f = \lim_{\alpha\to 0}\int\limits_{K^\alpha} f = 1$. נשים לב כי ב-0 הערכים של f שואפים לאינסוף וב-0 היא בכלל לא מוגדרת ולכן זה אינטגרל לא אמיתי (לפחות תחת ההגדרה שלנו).

הוכחה: (של פוביני-טונלי) ראשית האינטגרל $\int\limits_{C^{-1}} f_y$ קיים כי הנגזרות החלקיות של f_y הן של f ואנחנו מניחים השתנות חסומה ולכן היא גם אינטגרבילית.

נוכיח כי לכל y האינטגרל $\int\limits_{C^{-1}} \phi\left(y\right)$ קיים. מספיק שנוכיח השתנות חסומה. יהיו $y,y'\in I$,

$$\begin{aligned}
0 &\le \left|\phi\left(y'\right)-\phi\left(y\right)\right| \\
&\le \left|\int\limits_{C^{-1}} \left(f_{y'}-f_y\right)\right| \\
\text{מונוטוניות האינטגרל וא''ש המשולש}\quad &\le \int\limits_{C^{-1}} \left|f_{y'}-f_y\right| \\
&= \int\limits_{C^{-1}} \left|f\left(y',x_2,\ldots,x_n\right)-f\left(y,x_2,\ldots,x_n\right)\right| \\
\text{השתנות חסומה של } f\quad &\le \int\limits_{C^{-1}} M\left|y'-y\right| \\
&= M\left|y'-y\right|\mathrm{vol}\left(C^{-1}\right)
\end{aligned}$$

מה שקורה מעכשיו מהותית זה שאנחנו מפרידים סכום דרבו לאיבר הראשון בחלוקה וכל השאר. לאחר מכן מצמידים את הערכים בכל

$I^1 = [a,b]$ לערך של a באמצעות השתנות חסומה ואז מחברים הכל חזרה.

$$\begin{aligned}
\int_C f &= \overline{\sum}_p f + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{I\in p} \overline{f(I)}\mathrm{vol}(I) + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{I^1\in p^1}\sum_{J\in p^{-1}} \overline{f(I^1\times J)}\left|I^1\right|\mathrm{vol}(J) + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
\text{השתנות חסומה} &= \sum_{I^1=[a,b]\in p^1}\left|I^1\right|\sum_{J\in p^{-1}}\left(\overline{f(\{a\}\times J)} + \underset{|p|\to 0}{o}(1)\right)\mathrm{vol}(J) + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{I^1=[a,b]\in p^1}\left|I^1\right|\sum_{J\in p^{-1}}\left(\overline{f_a(J)}\right)\mathrm{vol}(J) + (\mathrm{vol}(C)+1)\underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{I^1=[a,b]\in p^1}\left|I^1\right|\overline{\sum}_{p^{-1}} f_a + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{I^1=[a,b]\in p^1}\left|I^1\right|\left(\phi(a) + \underset{|p|\to 0}{o}(1)\right) + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
\text{השתנות חסומה} &= \sum_{I^1\in p^1}\left(\overline{\phi(I^1)} + \underset{|p|\to 0}{o}(1)\right)\left|I^1\right| + \underset{|p|\to 0}{o}(1) \\
&= \int_{C^1}\phi + \underset{|p|\to 0}{o}(1)
\end{aligned}$$

ואם שני קבועים שווים עד כדי ערך זניח, הם שווים. ■

הגדרה תהיינה $f,g,h\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=O_g(h)$ אם קיימים $c,\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ עבורו $0<|g(x)|\le\delta$, מתקיים $|f(x)|\le c|h(x)|$.

הגדרה תהיינה $f,g,h\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=o_g(h)$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ עבורו $|g(x)|\le\delta$, מתקיים $|f(x)|\le\epsilon|h(x)|$.

הערה מתקיים $f(x)=\underset{x\to x^0}{o}(g(x))$ אם"ם $f(x)=o_{x-x^0}(g(x))$.

הגדרה נאמר כי הגבול של f ב-x^0 הוא $\ell\in\mathbb{R}$ אם $f(x)=\ell+o_{\|x-x^0\|}(1)$.

הגדרה נאמר כי f רציפה ב-x^0 אם $f(x)=f\left(x^0\right)+o_{\|x-x^0\|}(1)$.

תרגול

דוגמה חשבו את $\int_C f$ כאשר $f(x,y,z)=2x\cos z$ ו-$C=[-1,1]\times[0,2]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{C} f &= \int\limits_{C^{-z}} \left(\int\limits_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} f \text{ dz} \right) \text{ dx dy} \\
&= \int\limits_{C^{-z}} \left(\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos z \text{ dz} \right) \text{ dx dy} \\
&= \int\limits_{C^{-z}} \left(2x \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) \right) \text{ dx dy} \\
&= \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{0}^{2} 2x \text{ dy dx} = \int\limits_{-1}^{1} 4x \text{ dx} = 0
\end{aligned}$$

אם היינו מקבעים הכל חוץ מ-x אז היינו מקבלים אינטגרל מ--1 ל-1 של $2x \cos z$ וזה פשוט 0 מזוגיות הפ'.

דוגמה חשבו את נפח הגוף הכלא ב-$\mathbb{R}^3$ בין המשטחים $x + y = 2$ ו-$z = x^2 + 2y$ כאשר $x, y, z \geq 0$.

בגלל ש-z תלוי ב-x, y, נשים אותו בפנים אחרי שכבר קיבענו את x, y והסדר של x, y לא כזה משנה

$$\begin{aligned}
\int\limits_{K} 1 &= \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{2-x} \int\limits_{0}^{x^2+2y} 1 \text{ dz dy dx} \\
&= \int\limits_{0}^{2} \int\limits_{0}^{2-x} x^2 + 2y \text{ dy dx} \\
&= \int\limits_{0}^{2} x^2 (2-x) + (2-x)^2 \text{ dx} \\
&= \int\limits_{0}^{2} (2-x) \left(x^2 + 2 - x \right) \text{ dx} \\
&= \dots
\end{aligned}$$

הגדרה <u>העתקת $\lambda - \text{Shear}$</u> של ציר i ביחס לציר j היא העתקה $S_\lambda : \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i + \lambda x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

דוגמה עבור $S_\lambda : \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} x+\lambda y \\ y \end{smallmatrix}\right)$ (כלומר λ-גזירה של ציר x ביחס לציר y) היא למעשה מעתיקה מלבן למקבילית - אנחנו מזיזים כל קטע אופקי ימינה, אבל שומרים על האורך שלו ועל הגבוה שלו. אינטואיטיבית זה אומר שהנפח שלו נשמר.

טענה תהי S_λ העתקת λ-גזירה של ציר 1 ביחס ל-2 ו-K גוף. אזי $\text{vol}\left(K\right) = \text{vol}\left(S_\lambda\left(K\right)\right)$.

הוכחה: תהי C תיבה המכילה את K ו-$S_\lambda(K)$.

$$\begin{aligned}\int\limits_C \mathbb{1}_K &= \int\limits_{C^{-1}} \left(\int\limits_{[a_1,b_1]} \mathbb{1}_K \text{ dx} \right) \text{dx}_2, \ldots, \text{x}_\text{n} \\ &= \int\limits_{C^{-1}} \left(\int\limits_{[a_1+\lambda_2, b_1+\lambda x_2]} \mathbb{1}_K \begin{pmatrix} x_1-\lambda x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{dx}_1 \right) \text{dx}_2, \ldots, \text{x}_\text{n} \\ &= \int\limits_{C^{-1}} \left(\int\limits_{[a_1+\lambda_2, b_1+\lambda x_2]} \mathbb{1}_K \circ S_\lambda^{-1} \text{ dx}_1 \right) \text{dx}_2, \ldots, \text{x}_\text{n} \\ &= \int\limits_C \mathbb{1}_{S_\lambda(K)} \text{ dx} \\ &= \text{vol}\left(S_\lambda(K)\right)\end{aligned}$$

■

הערה כל העתקה אורתוג' היא הרכבה של שלוש העתקות גזירה, למעט פ' מחליפות קוורדינטות (כגון שיקוף).

שבוע $\mathbb{VIII}$ | נגזרות רב מימדיות

איור מובחר

הרצאה

הגדרה תהי Ω קבוצה ו-$f,g,h:\Omega\to\mathbb{R}$. נאמר כי $f=o_g(h)$ אם $\forall\epsilon>0$, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\Omega$ עבורו $|g(x)|\le\delta$, מתקיים $|f(x)|\le\epsilon|h(x)|$.

הערה כבר הגדרנו את זה, פשוט ניסחנו מחדש קצת.

דוגמה תהי $C\subseteq\mathbb{R}$ תיבה ו-$f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. תהי Ω אוסף החלוקות של C. עבור $\overline{\sum}_{(\bullet)}f, \underline{\sum}_{(\bullet)}f:\Omega\to\mathbb{R}$ מתקיים $\int\limits_C f=\ell$ אם"ם $\underline{\sum}_p f, \overline{\sum}_p f=\ell+o_{|p|}(1)$, כאשר למעשה $|p|$ היא פ' של החלוקה.

דוגמה נוכיח כי $\frac{2xy^2}{x^2+y^2-1}=o_{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right)$. נבחר $\frac{1}{2}<\delta$ ואז נכליל לכל ϵ. כאשר $\left|x^2+y^2\right|<\delta$ מתקיים $|y|<\sqrt{\delta}$ וגם $|2xy|\le x^2+y^2$ (אלגברה) ולכן

$$\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2-1}\right|\le 2\left|2xy^2\right|\le 2\sqrt{\delta}\left|x^2+y^2\right|$$

ולכן $\forall\epsilon>0$, נוכל לבחור $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\epsilon^2}{4}\right\}$ ואז כאשר $\underbrace{\left|x^2+y^2\right|}_{g}<\delta$ מתקיים

$$\underbrace{\left|\frac{2xy^2}{x^2+y^2-1}\right|}_{f}\le 2\sqrt{\frac{\epsilon^2}{4}}\left|x^2+y^2\right|=\epsilon\underbrace{\left|x^2+y^2\right|}_{h}$$

תכונות ה-o

1. (החלפה) אם $h=o_g(1)$ ו-$f=o_h(\eta)$ אז $f=o_g(\eta)$.

הוכחה: אינטואיטיבית, כש-g מאוד קטן, h מאוד קטן ואז f קטן מאוד מ-η. יהי $\epsilon>0$. לכן קיים $\delta^h>0$ כך ש-

$$|h(x)|\le\delta^h\Rightarrow\epsilon|\eta(x)|$$

קיים $\delta^g>0$ כך ש- $|g(x)|\le\delta^g\Rightarrow|h(x)|\le\frac{\delta^h}{2}$ ובמקרה כזה $f(x)<\epsilon|\eta(x)|$. ■

2. (הצבה) אם $f=o_g(h)$ אזי לכל φ שהתמונה שלה מוכלת בדומיין של f,g,h, מתקיים $f\circ\varphi=o_{g\circ\varphi}(h\circ\varphi)$.

הוכחה: יהי $\epsilon>0$ אזי קיימת $\delta>0$ כך ש-$|g(x)|<\delta\Rightarrow|f(x)|\le\epsilon|h(x)|$ ולכן

$$|g(\varphi(y))|<\delta\Rightarrow|f(\varphi(y))|\le\epsilon|h(\varphi(y))|$$

■

הגדרה תהיינה $f:\Omega\to\mathbb{R}^n,g:\Omega\to\mathbb{R}^m,h:\Omega\to\mathbb{R}^k$. נאמר כי $f=o_g(h)$ אם $\|f\|=o_{\|g\|}(\|h\|)$.

הערה זה סימול שמפשט את ההגדרה המלאה כי הנורמות מאפשרות מעבר פשוט למספרים ב-$\mathbb{R}$ במקום וקטורים.

דוגמה $\ln(x)=-1+x+o_{x-1}(x-1)$ כי זה למעשה טור טיילור מדרגה ראשונה סביב 1, כי

$$\ln(x)=\ln 1+\frac{1}{1}(x-1)+o_{x\to1}(x-1)$$

לכן עבור $\varphi y=\sin y$ מתקיים

$$\ln\sin y+1-\sin y=o_{\sin y-1}(\sin y-1)$$

התרומה בסימון החדש כאן היא שאנחנו מבטאים את הקרבה לכל נקודה y שבה $\sin y$ קרוב ל-1 ולא בנקודה אחת ספציפית.

דוגמה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ אז f רציפה ב-$x^0\in\mathbb{R}^n$ אם $f(x)=f\left(x^0\right)+o_{x-x^0}(1)$ (הנורמה מובלעת כאן).

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. נגדיר $f_i:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ע"י $f_i(x)=(f(x))_i$, $\forall i\in[m]$.

הערה מתקיים $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$.

הערה אם $\forall i$ מתקיים $f_i=o_g(h)$ אז $f=o_g(h)$ (הסטודנטית המשקיעה תוכיח).

הגדרה נאמר כי α היא הנגזרת של $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ב-x^0 אם

$$f(x)=f\left(x^0\right)+\underbrace{\overbrace{\alpha}^{f'\left(x^0\right)}\underbrace{\left(x-x^0\right)}_{dx}}_{df=\alpha\cdot dx}+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$$

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. נאמר כי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ היא הנגזרת של f ב-x^0 אם

$$f(x)=\underbrace{f\left(x^0\right)+A\left(x-x^0\right)}_{\text{נוסחת המשיק של } f \text{ ב-} x^0}+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$$

דוגמה $f(x)=\|x\|^2$.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\left(x_i-x_i^0+x_i^0\right)^2\\ \text{אלגברה}&=\sum_{i=1}^{n}\left(\left(x_i^0\right)^2+2x_i^0\left(x_i-x_i^0\right)+\left(x_i-x_i^0\right)^2\right)\\ \text{אלגברה לינארית}&=\sum\left(x_i^0\right)^2+2\left(x^0\right)^T\left(x-x^0\right)+\sum\left(x_i-x_i^0\right)^2\\ (*)&=f\left(x^0\right)+2\left(x^0\right)^T\left(x-x^0\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)\end{aligned}$$

$(*)$ ב-x^0, ההתאפסות היא ריבועית ולכן בטוח קטנה יותר מהתאפסות לינארית.

לכן מההגדרה מתקיים $f'(x)=2x^T$.

טענה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. אזי $\left(f'\left(x^0\right)\right)_i=\partial^i f\left(x^0\right)$.

תרגול

דוגמה תהי A מטריצה $m\times n$ ונגדיר $f\left(x\right)=Ax+v$. זוהי העתקה לינארית והנגזרת שלה היא A כי הקירוב הלינארי הכי טוב של העתקה לינארית היא ההעתקה עצמה. פורמלית,

$$\begin{aligned}f\left(x\right)&=Ax+v=A\left(x-x^{0}+x^{0}\right)+v\\&=Ax^{0}+v+A\left(x-x^{0}\right)\\&=f\left(x^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)\left(x-x^{0}\right)+0\end{aligned}$$

טענה תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{m},g:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{k}$ גזירות ב-x^{0} ו-$g\left(x^{0}\right)$ בהתאמה. אזי $f\circ g$ גזירה ב-x^{0}.

הוכחה: נסמן $g'\left(x^{0}\right)=A,f'\left(g\left(x^{0}\right)\right)=B$

$$\begin{aligned}f\circ g\left(x\right)&=f\left(g\left(x^{0}\right)+A\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)\right)\\ \text{טריק שראינו}&=f\left(g\left(x^{0}\right)\right)+\underset{m\times k}{B}\left(\underset{k\times n}{\underline{A\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)}}\right)+o_{g(x)-g(x^{0})}\left(A\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)\right)\\&=f\circ g\left(x^{0}\right)+BA\left(x-x^{0}\right)+Bo_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)+o_{g(x)-g(x^{0})}\left(A\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)\right)\\(*)&=f\circ g\left(x^{0}\right)+BA\left(x-x^{0}\right)+Bo_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(A\left(x-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)\right)\\ \text{כמו בהוכחה המקורית בחד מימד}&=\ldots\end{aligned}$$

$(*)$ תכונת ההחלפה עם $g=x-x^{0},h=g\left(x\right)-g\left(x^{0}\right)$. ∎

טענה תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$. אזי $f'\left(x^{0}\right)_{i}=\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$.

הוכחה: נסמן ב-g את הפ' החלקית של f בכיוון i דרך x^{0}. נגדיר מסילה (פ' מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}^{n}$ רציפה) $\gamma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n}$ ע"י

$$\gamma\left(t\right)=\left(x_{-i}^{0},t\right)=\left(t-x_{i}^{0}\right)e_{i}+x^{0}$$

(זה קו ישר שעובר דרך x^{0} במקביל לציר ה-i). זוהי העתקה אפינית.

מתקיים $g\left(t\right)=f\circ\gamma\left(t\right)$ מההגדרה.

$$\partial^{i}f\left(x^{0}\right)=g'\left(x^{0}\right)=\left(f\circ\gamma\right)'\left(x_{i}^{0}\right)=f'\left(\gamma\left(x_{i}^{0}\right)\right)\gamma'\left(x_{i}^{0}\right)=f'\left(x^{0}\right)e_{i}=\left(f'\left(x^{0}\right)\right)_{i}$$

∎

דוגמה $f\left(x,y\right)=x^{2}y+5e^{x}$. הנגזרת של f היא $\left(\partial^{x}f,\partial^{y}f\right)=\left(2xy+5e^{x},x^{2}\right)$.

שבוע $\mathbb{VIII}$ | הגרדיאנט

איור מובחר

הרצאה

הערה בלינארית 1 הראנו ש-$\hom\left(\mathbb{R}^{n},\mathbb{R}^{n}\right)\simeq M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$.

טענה אם $f:\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{m}$ ו-$g:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}^{k}$, $\left(f\circ g\right)'\left(x^{0}\right)=f'\left(g\left(x^{0}\right)\right)g'\left(x^{0}\right)$.

הערה האינטואיציה כאן היא שאם f,g הן כמעט לינאריות אז מקבלים בדיוק את הנוסחה. אם

$$f\left(y\right)=u+A\left(y-g\left(x^{0}\right)\right),\quad g\left(x\right)=v+B\left(x-x^{0}\right)$$

אז

$$f\left(g\left(x\right)\right)=f+A\left(g\left(x\right)-g\left(x^{0}\right)\right)=u+A\left(B\left(x-x^{0}\right)\right)=u+AB\left(x-x^{0}\right)$$

שזה בדיוק הנוסחה המקורית.

טענה אם $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-x^{0} אז $f'\left(x^{0}\right)=\left(\partial^{1}f\left(x^{0}\right),\ldots,\partial^{n}f\left(x^{0}\right)\right)$.

הוכחה: נגדיר $\varphi_{i}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{n}$ ע"י $\varphi_{i}\left(t\right)=\left(x_{-i}^{0},t\right)$. לכן $\left(f\circ\varphi_{i}\right)'\left(x_{i}^{0}\right)=\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$ מההגדרה. מצדי שני

$$\begin{aligned}f\circ\varphi_{i}\left(x_{i}\right) & =f\circ\varphi_{i}\left(x_{i}^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)\left(\varphi_{i}\left(x_{i}\right)-x^{0}\right)+o_{\varphi_{i}\left(x_{i}\right)-x^{0}}\left(\varphi_{i}\left(x_{i}\right)-x^{0}\right)\\
 & \overset{\text{כלל ההצבה}}{=}f\circ\varphi_{i}\left(x_{i}^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)\left(\varphi_{i}\left(x_{i}\right)-x^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x-x^{0}\right)\\
 & \overset{\text{השאר מתאפסים}}{=}f\left(x^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)_{i}\left(x_{i}-x_{i}^{0}\right)+o_{x-x^{0}}\left(x_{i}-x_{i}^{0}\right)
\end{aligned}$$

ולכן $\left(f\circ\varphi_{i}\right)\left(x_{i}^{0}\right)=f'\left(x^{0}\right)_{i}$. $\blacksquare$

דוגמה אם קיימות כל $\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$, האם בהכרח קיים $f'\left(x^{0}\right)=\left(\partial^{1}f\left(x^{0}\right),\ldots,\partial^{n}f\left(x^{0}\right)\right)$? לא! אפע"פ שעל הצירים אנחנו יודעים שהפ' מתנהגת באופן כמעט לינארי בסביבה מספיק קטנה, זה לא אומר שבכיוונים שאינם הצירים היא מתנהגת כך.

הפ' $f\left(x,y\right)=\mathbb{1}_{\left\{ x\cdot y=0\right\} }\left(x,y\right)$ אז ב-$x^{0}=\left(0,0\right)$, היא 1 על הצירים אבל בכל כיוון אחר היא 0 חוץ מבנקודה עצמה, כלומר כמובן לא גזירה.

טענה אם ל-$f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ יש נגזרות חלקיות ב-x^{0} וגם הנגזרות החלקיות קיימות בסביבה של x^{0} ורציפות ב-x^{0} אז $f'\left(x^{0}\right)$ קיימת.

הערה הדוגמה הנ"ל אינה דוגמה נגדית לטענה זו משום שהנגזרות החלקיות לא קיימות בכלל.

הוכחה: יהי $x\in\mathbb{R}^n$. נגדיר מסלול מ-x^0 ל-x (סדרת נקודות מ-x^0 ל-x) באופן הבא: $x^i=\left(x_1,\ldots,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0\right)$. לכן

$$\begin{aligned}
f\left(x\right)-f\left(x^0\right) &= \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x^i\right)-f\left(x^{i-1}\right)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_{-i}^{i-1},x_i\right)-f\left(x^{i-1}\right)\right)\\
\text{הגדרת הנגזרת החלקית} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\partial^i f\left(x^{i-1}\right)\left(x_i-x_i^0\right)+o_{x_i-x_i^0}\left(x_i-x_i^0\right)\right)\\
\text{רציפות הנגזרות החלקיות} &= \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\partial^i f\left(x^0\right)+o_{x-x^0}\left(1\right)\right)\left(x_i-x_i^0\right)\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\partial^i f\left(x^0\right)\left(x_i-x_i^0\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)\\
&= \left(\partial^1 f\left(x^0\right),\ldots,\partial^n f\left(x^0\right)\right)\cdot\left(x-x^0\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)
\end{aligned}$$

כלומר וקטור הנגזרות החלקיות מקיים את הגדרת הנגזרת ולכן היא קיימת. ■

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ גזירה ב-x^0. אזי $f'\left(x^0\right)\in\left(\mathbb{R}^n\right)^*$ (הצמוד של $\mathbb{R}^n$ הוא $M_{1\times n}\left(\mathbb{R}\right)$) והגרדיאנט של f הוא

$$\nabla f\left(x^0\right)=\left(f'\left(x^0\right)\right)^T\in\mathbb{R}^n$$

טענה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$. אם $f'\left(x^0\right)=A\in M_{m\times n}\left(\mathbb{R}\right)$ אזי $f_i'\left(x^0\right)=R_i$ כאשר R_i היא השורה ה-i של A.

הוכחה: $f\left(x\right)=f\left(x^0\right)+A\left(x-x^0\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$.

$$f_i\left(x\right)=\left(f\left(x\right)\right)_i=f_i\left(x^0\right)+R_i\left(x-x^0\right)+o_{x-x^0}\left(x-x^0\right)$$

כאשר המעבר הוא פשוט איך שמחשבים מכפלת מטריצה בוקטור. ■

דוגמה אם לכל i, $f_i'\left(x^0\right)$ קיימת, האם קיימת $\left(x^0\right)$ $f'=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_m\end{pmatrix}'$? כן! הסטודנטית המשקיעה תוכיח זאת בתרגיל.

הערה

$$f\left(x\right)=f\left(x^0+dx\right)=f\left(x^0\right)+f'\left(x^0\right)\cdot dx+\ldots=f\left(x^0\right)+\left\langle\nabla f\left(x^0\right)\mid dx\right\rangle+\ldots$$

ולכן $\left\langle\nabla f\left(x^0\right)\mid dx\right\rangle\simeq f\left(x^0+dx\right)-f\left(x^0\right)$. לכן כדי להגדיל את הערך של f מ-x^0, נלך בכיוון הגרדיאנט כי אז המכ"פ של dx עם הגרדיאנט הוא חיובי (וכמה שיותר גדול ככל שאנחנו מקבילים). אם נלך בניצב לגרדיאנט, עד כדי טעות תת-לינארית, הערך פשוט לא ישתנה.

למעשה, אם אנחנו הולכים כל הזמן בכיוון הגרדיאנט בשלב כלשהו נגיע למקסימום (אם הוא קיים). במקרה כזה, במקסימום יהיה גרדיאנט שהוא 0.

תרגול

דוגמה $f\left(x,y\right)=\left\Vert \binom{x}{y}\right\Vert =\sqrt{x^{2}+y^{2}}$.

$$\nabla f\binom{x}{y}=\begin{pmatrix}\partial^{1}f\binom{x}{y}\\ \partial^{2}f\binom{x}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x}{\left\Vert \binom{x}{y}\right\Vert }\\ \frac{y}{\left\Vert \binom{x}{y}\right\Vert }\end{pmatrix}=\frac{1}{\left\Vert \binom{x}{y}\right\Vert }\binom{x}{y}$$

כי $\partial^{1}f\binom{x}{y}=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\left(x^{2}+y^{2}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}$.

כזכור, הגרדיאנט מצביע (אם נציירו כוקטור) לכיוון בו f גדלה. במקרה הזה, הגרדיאנט לכל נקודה הוא וקטור מהראשית לכיוון הנקודה. כלומר, ככל שנתרחק יותר מהראשית כך הערך יגדל - וזה הגיוני כי הנורמה גדלה ככל שהנקודה יותר רחוקה מהראשית.

טענה תהי $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ כך ש-x^{0} היא נקודת מקס' (מקומי) של f. אזי $\nabla f\left(x^{0}\right)=\vec{0}$.

הוכחה: נניח בשלילה כי $\nabla f\left(x^{0}\right)\neq\vec{0}$. תהי δ קטנה מספיק כך ש-$f\left(x\right)\geq f\left(x^{0}\right)$ לכל $\left\Vert x-x^{0}\right\Vert \leq\delta$. נתבונן ב-$\tilde{x}=x^{0}+t\nabla f\left(x^{0}\right)$ כאשר t קטן מספיק כדי ש-$\tilde{x}$ תהיה בתוך הסביבה. לכן

$$\begin{aligned}0 & \geq f\left(\tilde{x}\right)-f\left(x^{0}\right)\\
 & =f'\left(x^{0}\right)\left(t\nabla f\left(x^{0}\right)\right)+o_{\tilde{x}-x^{0}}\left(\tilde{x}-x^{0}\right)\\
 & =\left\langle \nabla f\left(x^{0}\right)\mid t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\rangle +o_{t\nabla f\left(x^{0}\right)}\left(t\nabla f\left(x^{0}\right)\right)\\
 & =t\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert ^{2}+\underset{h}{\underline{o_{t\nabla f\left(x^{0}\right)}\left(t\nabla f\left(x^{0}\right)\right)}}\\
 & =\left(*\right)
\end{aligned}$$

מההגדרה, קיימת $\delta'>0$ כך שלכל $\left\Vert t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert <\delta'$ מתקיים $\left|h\right|\leq\epsilon\left\Vert t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert$, כלומר $-\epsilon\left\Vert t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert \leq h\leq\epsilon\left\Vert t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert$ ולכן

$$\begin{aligned}\left(*\right) & \geq t\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert ^{2}-\epsilon\left\Vert t\nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert \\
\text{בה"כ } t>0 & =t\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert ^{2}-\epsilon t\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert \\
 & =t\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert \left(\left\Vert \nabla f\left(x^{0}\right)\right\Vert -\epsilon\right)\\
 & >0\quad\text{עבור } \epsilon \text{ קטן מספיק}
\end{aligned}$$

סתירה. ■

הערה כדי שהערך של הפ' לא ישתנה, נצטרך ללכת בניצב לגרדיאנט.

שאלה האם קיימת f כך ש-$\nabla f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}-y\\x\end{smallmatrix}\right)$?

אם קיימת פ' כזו, זה אומר שהגרדיאנט כל הזמן פונה בכיוון המשיק למעגל (היחידה) כי הניצב ל-$\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ הוא $\left(\begin{smallmatrix}-y\\x\end{smallmatrix}\right)$ (על מעגל היחידה). לכן אם הייתה כזו, היינו הולכים על המעגל וחוזרים לאותה הנקודה אבל באותו הזמן גם הערך של הפ' היה עולה כי הלכנו בכיוון הגרדיאנט. לכן הנקודה אמורה להיות עם ערך יותר גדול מעצמה שזה לא הגיוני.

נגדיר $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ ע"י $\varphi(t)=\left(\begin{smallmatrix}\cos t\\\sin t\end{smallmatrix}\right)$.

טענה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ו-$\varphi:I\to\mathbb{R}^n$ אז $f(\varphi(s))-f(\varphi(0))=\int\limits_0^s\langle\nabla f(\varphi(t))\mid\varphi'(t)\rangle$ (כלל השרשרת עם המשפט היסודי).

נניח בשלילה שקיימת f כנ"ל.

$$\begin{aligned}0=f\circ\varphi(2\pi)-f\circ\varphi(0)&=\int\limits_0^{2\pi}\left\langle\left(\begin{smallmatrix}-\sin t\\\cos t\end{smallmatrix}\right)\mid\left(\begin{smallmatrix}-\sin t\\\cos t\end{smallmatrix}\right)\right\rangle\ \mathrm{dt}\\&=\int\limits_0^{2\pi}\sin^2+\cos^2t\ \mathrm{dt}=\int\limits_0^{2\pi}1=2\pi\end{aligned}$$

סתירה.

שבוע $\mathbb{IX}$ | מיון של נקודות קריטיות

איור מובחר

הרצאה

הגדרה סביבה של $x\in\mathbb{R}^n$ היא כדור ש-x הוא המרכז שלו. או כל קבוצה ב-$\mathbb{R}^n$ המכילה כדור כזה.

הגדרה נאמר כי x הוא מקסימום מקומי של $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אם קיימת סביבה N של x כך ש-$f(y)\le f(x)$, $\forall y\in N$.

טענה אם ל-f יש מקס' (מינ') מקומי ב-$x^0\in\mathbb{R}^n$ אזי $\nabla f\left(x^0\right)=0$.

הוכחה: ראינו בתרגול (ההוכחה משתמשת באינטואיציה ש-$df=\left\langle\nabla f\left(x^0\right)\mid dx\right\rangle$). ■

דוגמאות

1. $f(x)=\|x\|^2$. ברור שלפ' זו אין מקס' מקומי כי תמיד אפשר למצוא וקטור ליד שהוא גדול יותר. עם זאת יש לה מינימום גלובלי ב-$x=0$ וראינו ש-$f'(x)=2x^T$ ואכן $\nabla f(0)=2\cdot0=0$.

2. $f(x,y)=x\sin y$. $f'(x,y)=(\sin y, x\cos y)$ וב-$\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ הגרדיאנט מתאפס. זה לא אומר שזו נקודת קיצון והיא אכן לא, שכן אם נלך לכיוון $(+,-)$ (בכל קוורדינטה בהתאמה) נקבל ערכים קטנים יותר ובכיוון $(+,+)$ גדולים יותר, כלומר זו בסה"כ נקודת אוכף (המקבילה של פיתול ברב-ממדי).

הגדרה נאמר כי x היא <u>נקודה קריטית</u> של f אם $\nabla f(x)=0$.,

הערה אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ו-$f'(x^0)=0$ אז

$$f\left(x^0+dx\right)=f\left(x^0\right)+\underbrace{f'\left(x^0\right)}_{=0}dx+\frac{1}{2}f''\left(x^0\right)dx^2+o_{dx}\left(dx^2\right)$$

ולכן אם $f''\left(x^0\right)<0$ אז x^0 מקס' מקומי (הערך קטן אם זזים לאן שהוא), אם $f''\left(x^0\right)>0$ אז זה מינ' ואם $f''\left(x^0\right)=0$ צריך להתאמץ יותר.

לכן אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, נרצה את המקבילה לנגזרת שנייה למקרה הרב-ממדי. למעשה, $f'\left(x^0\right)dx$ זה הדיפרנציאל של f שכבר ראינו df. לכן נחפש את הדיפרנציאל מסדר שני. במקרה החד-ממדי, מדובר ב-$\frac{1}{2}f''\left(x^0\right)dx^2$, נסמנו d^2f.

הגדרה תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. נאמר כי A היא <u>מוגדרת חיובית</u> (positive defnite) אם A סימטרית וכל הע"ע שלה חיוביים.

הגדרה <u>פולינום הומוגני</u> מדרגה 2 ב-$dx=(dx_1,\ldots,dx_n)$ הוא ביטוי מהצורה $\sum\limits_{i,j\in[n]}\alpha_{ij}dx_idx_j$, $\alpha_{ij}\in\mathbb{R}$.

הערה עבור $p(dx)=7dx_1dx_2-3dx_2dx_1+5dx_1^2=2dx_1dx_2+2dx_2dx_1+5dx_1^2$ מתקיים

$$p=(dx_1,dx_2)\left(\begin{smallmatrix}5&2\\2&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}dx_1\\dx_2\end{smallmatrix}\right)$$

כאשר הרישום השני של הפולינום עם המקדמים הסימטריים עוזרים לנו לכתיבה המטריציונית (הרישום השלישי) שהיא עוזרת לנו כי אפשר להשתמש בתכונות של תבניות בילינאריות סימטריות עליה.

הגדרה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x,x^0\in\mathbb{R}^n$ ו-$dx=x-x^0$. אם אפשר לכתוב

$$f\left(x^0+dx\right)=f\left(x^0\right)+Adx+\frac{1}{2}dx^THdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)$$

אזי $\frac{1}{2}dx^THdx$ נקרא הדיפרנציאל מסדר 2 של f בנקודה x^0 ונסמנו d^2f. במקרה זה, H נקרא <u>ההסיאן</u> של f ב-x^0.

טענה הדיפרנציאל השני של f ב-x^0 הוא יחיד (וגם ההסיאן). אם נסמן את ההסיאן שם ב-H אז מתקיים

$$[H]_{ij}=\partial^j\left(\partial^if\right)\left(x^0\right)$$

ו-H סימטרית (סדר הגזירה לא משנה, הראנו בתרגיל).

טענה תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $x^0\in\mathbb{R}^n$ נקודה קריטית. נסמן ב-H את הסימן של f בנקודה x^0. אזי:

1. אם $H \succ 0$ אזי x^0 היא מינ' מקומי (ממש - אין נקודה בסביבה עם ערך שווה).
2. אם $H \prec 0$ אזי x^0 היא מקס' מקומי (ממש).
3. אם ל-H גם ע"ע חיוביים וגם ע"ע שליליים אזי x^0 נקודה אוכף.

הוכחה: $f\left(x^0+dx\right)=f\left(x^0\right)+\frac{1}{2}dx^THdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)$. יהי $(v_1,\ldots,v_n)$ בסיס אורתונ' של ו"ע H עם ע"ע $\lambda_1\leq\ldots\leq\lambda_n$ (H סימטרית ולכן לכסינה אורתונ'). נכתוב $dx=\sum\alpha_iv_i$ ולכן $\|dx\|^2=\sum|\alpha_i|^2$ ולכן

$$\begin{aligned}f\left(x^0+dx\right)-f\left(x^0\right)&=\frac{1}{2}\left(\sum\alpha_iv_i\right)^T\underbrace{\sum\alpha_i\lambda_iv_i}_{Hdx}+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\\&=\frac{1}{2}\sum\alpha_i^2\lambda_i+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\end{aligned}$$

1. $0<\lambda_1$ ולכן $f\left(x^0+dx\right)-f\left(x^0\right)\geq\frac{1}{2}\lambda_1\|dx\|^2+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\overset{(*)}{>}0$.

   $(*)$ אם $\|dx\|$ קטנה מספיק.

2. באותו האופן.

■

תרגול

דוגמה ננתח את הפ' הבאה,

$$\begin{aligned}f(v)&=(v_1+1)\,e^{\|v-e_1\|^2}+(v_1-1)\,e^{\|v+e_1\|^2}\\f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)&=(x+1)\,e^{-(x-1)^2-y^2}+(x-1)\,e^{-(x+1)^2-y^2}\end{aligned}$$

$f'=(\partial^xf,\partial^yf)$, כאשר

$$\partial^yf=-2y\,(x+1)\,e^{\cdots}-2y\,(x-1)\,e^{\cdots}=-2y\underbrace{\left((x+1)\,e^{-(x+1)^2-y^2}+(x-1)\,e^{-(x-1)^2-y^2}\right)}_{\beta}$$

וזה מתאפס רק כאשר $y=0$ (e חיובי ממש, ה-x לא מתאפס בגלל איך שהוא בנוי).

$$\begin{aligned}\partial^x f &= e^{-(x-1)^2-y^2}+(x+1)(-2)(x-1)e^{-(x-1)^2-y^2}\\ &\quad+e^{-(x+1)^2-y^2}+(x-1)(-2)(x+1)e^{-(x+1)^2-y^2}\\ &= -2(x+1)(x-1)\underbrace{\left(e^{-(x+1)^2-y^2}-e^{-(x-1)^2-y^2}\right)}_{\alpha}+\underbrace{e^{-(x-1)^2-y^2}+e^{-(x+1)^2-y^2}}_{\alpha}\\ &= \alpha\left(-2x\left(x^2-1\right)+1\right)\end{aligned}$$

כאשר הגזירה היא באמצעות נגזרת של מכפלה יחד עם כלל השרשרת.

הנגזרת הזו מתאפסת אם"ם $-2x^2+3=0$ (כי $\alpha>0$) כלומר $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. לכן הנקודות הקריטיות הן $\left(\pm\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)$.

נמיין את הנקודות בעזרת ההסיאן. כלומר, נמצא את הסימן של הנגזרות החלקיות של הנגזרות החלקיות.

$$\begin{aligned}\partial^x\partial^y f &= \partial^x\left(-2y\beta(x,y)\right)=-2y\partial^x\beta(x,y)\overset{\text{בקריטיות}}{=}0\\ \partial^x\partial^x f &= \partial^x\left(\alpha\left(3-2x^2\right)\right)=-4x\alpha+\underbrace{\left(3-2x^2\right)}_{\text{0 בקריטיות}}\alpha'<0\\ \partial^y\partial^y f &= -2\left((x+1)e^{-(x+1)^2-y^2}+(x-1)e^{-(x-1)^2-y^2}\right)-\underbrace{2y(\ldots)}_{\text{0 בקריטיות}}<0\end{aligned}$$

$$H\begin{pmatrix}\sqrt{\frac{3}{2}}\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1<0 & 0\\ 0 & \lambda_2<0\end{pmatrix}\prec 0$$

כאשר המטריצה אלכסונית כי ראינו ש-$\partial^x\partial^y f=0$ בקריטיות והסימן נקבע ע"י הצבה פשוטה בנגזרות השניות שחישבנו למעלה.

ולכן $\sqrt{\frac{3}{2}}$ נקודת מקסימום. באותו האופן ניתן להגיע לכך ש-$-\sqrt{\frac{3}{2}}$ היא נקודת מינימום.

טענה (יחידות ההסיאן) אם A,B,C,D מקיימות

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(x^0\right)+Adx+dx^TBdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\\ f(x)&=f\left(x^0\right)+Cdx+dx^TDdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\end{aligned}$$

עבור $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ב-$x^0\in\mathbb{R}^n$, אזי $A=C$, $B=D$.

הוכחה: $o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)=o_{dx}(\|dx\|)$ וכן $dx^TBdx=o_{dx}(dx)$ (ראינו בתרגיל 7). לכן $C=A=f'\left(x^0\right)$ (מיחידות הנגזרת).

$$\begin{aligned}f(x)&=f\left(x^0\right)+f'\left(x^0\right)dx+dx^TBdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\\ f(x)&=f\left(x^0\right)+f'\left(x^0\right)dx+dx^TDdx+o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)\end{aligned}$$

ולכן $dx^T(B-D)dx=o_{dx}\left(\|dx\|^2\right)$. אינטואטיבית יש לנו משהו שמחשב דברים ממעלה 2 והדברים האלה קטנים ממש ממעלה 2, לכן

זה אפס. נניח בשלילה ש-$B-D\neq0$ ולכן יש ל-$B-D$ ע"ע $\lambda\neq0$ עם ו"ע v של λ. נבחר $dx=tv$ ולכן

$$\left|\lambda\right|t^{2}\left\Vert v\right\Vert ^{2}=\left|tv^{T}\left(B-D\right)tv\right|\overset{(*)}{<}\epsilon\left\Vert tv\right\Vert ^{2}=\epsilon t^{2}\left\Vert v^{2}\right\Vert$$

$(*)$ עבור t קטן מספיק, מהיות הביטוי $o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$.

לכן $\epsilon>\left|\lambda\right|$ לכל ϵ ועבור $\epsilon=\frac{\left|\lambda\right|}{2}$ סתירה. לכן $B-D=0$ ו-$B=D$. ■

שבוע $\mathbb{X}$ | החלפת משתנה

איור מובחר

הרצאה

הערה עבור $x=x^{0}+dx$, ניתן לרשום $f\left(x^{0}+dx\right)=d^{0}f+d^{1}f+d^{2}f+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$ כאשר $d^{i}f$ הוא פולינום הומוגני מדרגה i ב-dx.

הערה הראנו שהדיפרנציאל השני הוא יחיד אבל למעשה באמצעות הטענה על פולינומים מהתרגיל כל דיפרנציאל הוא יחיד.

טענה אם H לא בהכרח סימטרית אז $\partial^{i}\partial^{j}f\left(x^{0}\right)=\frac{1}{2}H_{ij}+\frac{1}{2}H_{ji}$ ואז עדיין הנגזרות מתחלפות.

טענה תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ אזי לכל $t,t_{0}\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$g\left(t\right)=g\left(t_{0}\right)+g'\left(t_{0}\right)\left(t-t_{0}\right)+\frac{1}{2}g''\left(t_{0}\right)\left(t-t_{0}\right)^{2}+o_{t-t_{0}}\left(\left(t-t_{0}\right)^{2}\right)$$

(הוכחנו בתרגיל).

טענה אם $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ היא בעלת נגזרות חלקיות שניות אז קיים הדיפרנציאל השני, כלומר לכל $x,x^{0}\in\mathbb{R}^{n}$ ניתן לכתוב

$$f\left(x\right)=f\left(x^{0}\right)+f'\left(x^{0}\right)dx+\frac{1}{2}dx^{T}Hdx+o_{dx}\left(\left\Vert dx\right\Vert ^{2}\right)$$

כאשר $H_{ij}=\partial^{i}\partial^{j}f\left(x^{0}\right)=\partial^{j}\partial^{i}f\left(x^{0}\right)$.

הוכחה: נגדיר מסלול מ-x^0 ל-x ע"י $x^i = \left(x_1, \ldots, x_i, x^0_{i+1}, \ldots, x^0_n\right)$ לכל $i \in [n]$.

$$\begin{aligned}
f\left(x\right) - f\left(x^0\right) &= \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x^i\right) - f\left(x^{i-1}\right)\right) \\
\text{אינדקסציה} &= \sum_{i=1}^{n} \left(f\left(x^{i-1}_{-i}, x_i\right) - f\left(x^{i-1}_{-i}, x^0\right)\right) \\
\text{הטענה הנ"ל} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\partial^i f\left(x^{i-1}_{-i}, x^0_i\right)\left(x_i - x^0_i\right) + \frac{1}{2}\partial^i\partial^i f\left(x^{i-1}_{-i}, x^0_i\right)\left(x_i - x^0_i\right)^2 + o_{x_i - x^0_i}\left(\left(x_i - x^0_i\right)^2\right)\right) \\
(*) &= \sum_{i} \left(\partial^i f\left(x^0\right) + \left(\partial^i f\right)'\left(x^0\right)\left(x^{i-1} - x^0\right) + o_{x^{i-1}-x^0}\left(x^{i-1} - x^0\right)\right)\left(x_i - x^0_i\right) \\
(**) \quad &+ \frac{1}{2}\sum_{i} \left(\partial^i\partial^i f\left(x^0\right) + o_{x^{i-1}-x^0}\left(x^{i-1} - x^0\right)\right)\left(x_i - x^0_i\right)^2 \\
&+ o_{x-x^0}\left(\left\|x - x^0\right\|^2\right) \\
(***) &= f'\left(x^0\right) dx + \sum_{i}\sum_{j<i} \partial^i\partial^j f\left(x^0\right) \underbrace{\left(x_j - x^0_j\right)\left(x_i - x^0_i\right)}_{dx_i^2} + \frac{1}{2}\sum_{i} \partial^i\partial^i f\left(x^0\right)\left(x_i - x^0_i\right)^2 + o_{dx}\left(\|dx\|\right)^2
\end{aligned}$$

$(*)$ הצבת הגדרת הנגזרת (החד-ממדית) של $\partial^i f$ ב-$x^{i-1} = \left(x^{i-1}_{-i}, x^0_i\right)$.

$(**)$ הצבת הגדרת הרציפות עבור הנגזרת החלקית השנייה ב-x^0 ואריתמטיקה בסיסית כדי לסכום את כל ה-o בסוף ל-o על הנורמה בריבוע.

$(***)$ כתבנו מחדש כל ביטוי לפי הסדר וכל ה-o התקבצו ביחד ל-o אחד, ה-$j < i$ נובע מכך ששאר איברים מתאפסים במכ"פ.

באותו האופן, אם היינו מריצים את המסלול מאינדקסים גבוהים לנמוכים במקום נמוכים לגבוהים, היינו מקבלים את אותו הדבר רק בסכימה $i < j$ במקום $j < i$. אם ניקח חצי מכל שוויון, נקבל

$$f\left(x\right) - f\left(x^0\right) = f'\left(x^0\right) dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \partial^i\partial^j f\left(x^0\right) dx_i^2 + o_{dx}\left(\|dx\|\right)^2$$

■

דוגמה $f\left(y_1, y_2\right) = \left\|\binom{y_1}{y_2}\right\|$, $B = B^2\left(0, 1\right)$ מהו $\int_B \sqrt{y_1^2 + y_2^2}\ \mathrm{dy_1}\ \mathrm{dy_2}$? קשה לחשב את זה בלי משהו נוסף, לכן נרצה כלי כלשהו שיכול להעתיק לנו את המרחב B למשהו שיותר נוח לנו לעבוד איתו. כלומר, נניח שיש לנו מרחב A ופ' φ שמעבירה אותנו מ-A ל-B, בהנחה שקל לנו לחשב אינטגרלים על A. לא מתקיים $\int_{x\in A} f\left(\varphi\left(x\right)\right) = \int_{y\in B} f\left(y\right)$ כי אינטאוטיבית, האינטגרל לא רק מחשב ערכים אלא גם מכיל מכפלה בנפחים ולא הובטח לנו ש-φ טש"מ (אם היא כן השוויון כן מתקיים).

משפט תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ו-$\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ חח"ע אזי

$$\int_{x\in A} f\left(\varphi\left(x\right)\right)\left|\det\left(\varphi'\left(x\right)\right)\right| = \int_{y\in\varphi(A)} f\left(y\right)$$

דוגמה B הוא מעגל היחידה ב-$\mathbb{R}^2$ ו-A יהיה מלבן $[0,1] \times [2\pi]$ כאשר ההעתקה שלנו היא φ המעתיקה $\left(x_1, x_2\right)$ לוקטור שמרחקו מהראשית

x_1 והזווית שלו ביחס לציר x (y_1) היא x_2, כלומר

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_1 \sin x_2 \end{smallmatrix}\right)$$

מתקיים $\left(\begin{smallmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ \sin x_2 & x_1 \cos x_2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \cdots & \varphi_1' & \cdots \\ \cdots & \varphi_2' & \cdots \end{pmatrix} = \varphi'\left(\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right)$ ולכן $\det \varphi' = x_1 \cos^2 x_2 + x_1 \sin^2 x_2 = x_1$ ולכן

$$\int\limits_{y \in B} \|y\| \ \mathrm{dy} = \int\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]} x_1 \cdot x_1 \ \mathrm{dx_1} \ \mathrm{dx_2}$$

$$\overset{\text{פוביני}}{=} 2\pi \int\limits_{x_1 \in [0,1]} x_1^2 = \frac{2\pi}{3}$$

תרגול

אנחנו עוסקים בהחלפת משתנה, ובמצב שבו אנחנו רוצים לחשב את $\int\limits_B f(y) \ \mathrm{dy}$ אבל אנחנו לא יודעים לחשב את זה, אז נמצא $\varphi : A \to B$ חח"ע ונוכל לחשב את

$$\int\limits_{y \in \varphi(A)} f(y) \ \mathrm{dy} = \int\limits_{x \in A} f(\varphi(x)) \left|\det \varphi'(x)\right| dx$$

טענה אם $K, K' \subseteq \mathbb{R}^n$ גופים חופפים תחת טש"מ אז $\mathrm{vol}(K) = \mathrm{vol}(K')$.

הוכחה: ראינו שהזזה לא משפיעה על הנפח, עתה נוכיח שהנפח לא משתנה על העתקה אורתוג' (הרי כל טש"מ היא הרכבה של הזזה על אורתוג'). נניח כי $U(K) = K'$ העתקה אורתוג'. תהי C קוביה המכילה את K לכן

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(K') &= \int\limits_{U(C)} \mathbb{1}_{K'}(x) \\
&\overset{\text{חילוף משתנה}}{=} \int\limits_C \mathbb{1}_{K'}(U(x)) \left|\det U\right| \\
&\overset{(*)}{=} \int\limits_C \mathbb{1}_{K'} \circ U \\
&= \int\limits_C \mathbb{1}_K = \mathrm{vol}(K)
\end{aligned}$$

$(*)$ כל הע"ע של U הם ± 1 ו-U לכסינה מעל $\mathbb{C}$ ולכן הדטרמיננטה שלה היא ± 1. ■

דוגמה אין קדומה אלמנטרית לפ' $e^{-\frac{x^2}{2}}$ אבל אפשר לחשב את האינטגרל שלה על כל $\mathbb{R}$, והוא $\sqrt{2\pi}$. נחשב את

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = \lim_{R\to\infty} \int_{B(0,R)} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

נעתיק מלבנים למעגלים כאשר x^2+y^2 יהיה המרחק מהראשית וזה יהיה קבוע על פיסות מעגלים. נסתכל על $C=[0,R]\times[2\pi]$ והעתקה $\varphi\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$ (שמות המשתנים שרירותיים, זו הקונבנציה). מתקיים בדומה להרצאה,

$$\varphi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$$

ואז $\det\varphi'\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right) = r$.

אינטואטיבית, עבור מלבן מתוך C עם רוחב dr וגובה $\mathrm{d}\theta$ עם פינה שמאלית תחתונה ב-$\left(\begin{smallmatrix} r \\ \theta \end{smallmatrix}\right)$, אנחנו מועתקים לפיסה מעגלית מתוך המעגל עם אורך dr וקשת בגודל $r\ \mathrm{d}\theta$ (החל מהנקודה $\left(\begin{smallmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{smallmatrix}\right)$) ואז שטח הקוביה מועתק מ-$\mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta$ ל-$\mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta\ r$ (שכנעו עצמכם). במקרה הזה הדטרמיננטה היא מה שנותנת לנו את r הנוסף.

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,R)} \underbrace{\exp\left(-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)\right)}_{f(x,y)} \mathrm{dx}\ \mathrm{dy} &= \int_{\varphi(C)} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) dx\ \mathrm{dy} \\
&\overset{\text{חילוף משתנה}}{=} \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} f\circ\varphi\,|\det\varphi|\ dx\ \mathrm{dy} \\
&= \int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-\frac{1}{2}r^2} r\ \mathrm{dr}\ \mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi \int_0^R e^{-\frac{r^2}{2}} r\ \mathrm{dr} \\
&= 2\pi \left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)\Big|_0^R \\
&= 2\pi\left(1-e^{-\frac{\mathbb{R}^2}{2}}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 2\pi
\end{aligned}$$

כלומר $2\pi = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\ \mathrm{dy}$. מתקיים באותו האופן כי

$$\begin{aligned}\int\limits_{[-a,a]^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx\ \mathrm{dy} &= \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dx\ \mathrm{dy}\\ &= \int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}} \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{y^2}{2}}\ \mathrm{dy}\right) dx\\ &= \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{dx}\right)\left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{y^2}{2}}\ \mathrm{dy}\right)\\ &= \left(\int\limits_{-a}^{a} e^{-\frac{x^2}{2}}\ \mathrm{dx}\right)^2 \xrightarrow{a\to\infty} 2\pi\end{aligned}$$

ולכן האינטגרל המקורי שווה ל-$\sqrt{2\pi}$.

שבוע $\mathbb{XI}$ | החלפת משתנה לעומק

איור מובחר

הרצאה

משפט (משפט החלפת משתנה) תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ו-$\varphi : A \to \mathbb{R}^n$ פ' על $B \subseteq \mathbb{R}^n$ וחח"ע. אזי

$$\int\limits_B f = \int\limits_A (f\circ\varphi)\,|\det\varphi'|$$

הערה ניזכר כי הדטרמיננטה נשמרת תחת טרנספוז, שומרת על מכפלה, מולטי-לינארית, אנטי-סימטרית (על חילוף עמודות) ומתאפסת על מטריצות לא הפיכות.

הערה נסמן $A_{-i\downarrow}, v$ להיות המטריצה A עם v במקום העמודה ה-i ואז הדטרמיננטות של כמה מטריצות אלמנטריות הן $\det(I_{-i\downarrow}, \lambda e_i) = \lambda$ (מתיחה בקוורדינטה אחת), $\det(I_{-i\downarrow}, e_i+\lambda e_j) = 1$ (גזירה על i ביחס ל-j).

הוכחה: עבור $f \equiv 1$, נוכיח כי $\int\limits_A |\det\varphi'| = \int\limits_{\varphi(A)} 1 = \operatorname{vol}(\varphi(A))$.

- <u>הזזה</u>: $\varphi(x) = x+v$. מתקיים $\operatorname{vol}(\varphi(A)) = \operatorname{vol}(A)$ ו-$\det\varphi' = 1$ ומשם השוויון נובע.

- <u>מתיחה</u>: $\varphi(x) = (I_{-i\downarrow}, \lambda e_i)\,x$. מתקיים $\mathrm{vol}(\varphi(A)) = |\lambda|\,\mathrm{vol}(A)$ (הוכחנו בתרגיל) ו-$\det\varphi' = \lambda$ מההערה הנ"ל ולכן

$$\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} 1 = \int\limits_{A} |\lambda| = |\lambda|\,\mathrm{vol}(A)$$

ולכן גם כאן המשפט נכון.

- <u>גזירה</u>: $\varphi(x) = (I_{-i\downarrow}, e_i + \lambda e_j)\,x$. מתקיים $\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}(A)$ (הוכחנו בתרגיל) ו-$\det\varphi' = 1$ מההערה הנ"ל ולכן

$$\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} 1 = \int\limits_{A} 1 = \mathrm{vol}(A)$$

- <u>שחלוף</u>: $\varphi(x) = \left(I_{-(i,j)\downarrow}, e_j, e_i\right)x$. מתקיים $\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \mathrm{vol}(A)$ (לא מעניין) וכרגיל המשפט מתקיים.

- <u>לינארית כללית</u>: $\varphi(x) = Mx + v$. מתקיים $M = M_k \cdot \ldots \cdot M_1 N$ כאשר N מטריצה מדורגת ו-M_i היא מטריצה אלמנטרית (מתיחה, גזירה או שחלוף).

1. אם $N = I$, נסמן $d_i = |\det M_i|$ ולכן

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}(\varphi(A)) &= \mathrm{vol}(M(A)) = \mathrm{vol}(M_k(M_{k-1}\cdot\ldots\cdot M_1\cdot A))\\ &= d_k\mathrm{vol}(M_{k-1}\cdot\ldots\cdot M_1(A))\\ &= \ldots = d_k\cdot\ldots\cdot d_1\mathrm{vol}(A)\\ \text{כפליות} &= |\det M|\,\mathrm{vol}(A)\end{aligned}$$

ולכן

$$\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} 1 = \int\limits_{A} |\det M| = |\det M|\,\mathrm{vol}(A)$$

כלומר המשפט נכון גם כאן.

2. אם $N \neq I$, נקבל מאותו החישוב למעלה כי $\mathrm{vol}(\varphi(A)) = \ldots = d_k\cdot\ldots\cdot d_1\mathrm{vol}(N(A))$ אבל $\mathrm{vol}(N(A)) = 0$ אם $N \neq I$ כי יש שורת אפסים (אחרת זה היה I).

נשים לב כי $Mx+v$ מעבירה לנו קוביה למקבילון ומתקיים $\mathrm{vol}(M(C)+v) = |\det(M)|\,\mathrm{vol}(C)$.

נניח כי A היא קוביה ותהי P חלוקה של A. אם פרמטר החלוקה מספיק קטן, אז בתוך כל קטע בחלוקה, φ מתנהגת בערך כמו פ' לינארית (אנחנו מניחים שהיא גזירה) ולכן נוכל להיעזר בכל המקרים הקודמים כדי להוכיח את המקרה הכללי.

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\varphi(A)} f &\overset{\text{אדיטיביות}}{=} \sum_{D\in P}\int\limits_{\varphi(D)} f \\
\text{השתנות חסומה} &= \sum_{D\in P}\int\limits_{\varphi(D)}\left(\overline{f\left(\varphi\left(D\right)\right)}+o_{\operatorname{diam}(\varphi(D))}\left(\operatorname{diam}\left(\varphi\left(D\right)\right)\right)\right) \\
\text{אינטגרל על קבוע} &= \sum_{D}\overline{f\left(\varphi\left(D\right)\right)}\operatorname{vol}\left(\varphi\left(D\right)\right)+o_{\operatorname{diam}(\varphi(D))}\left(\operatorname{diam}\left(\varphi\left(D\right)\right)\right)\operatorname{vol}\left(\varphi\left(D\right)\right) \\
(*) &= \sum_{D}\overline{\left(f\circ\varphi\right)\left(D\right)}\left|\det\varphi'\left(x\right)\right|\operatorname{vol}\left(D\right)+o_{|P|}\left(1\right)\operatorname{vol}\left(D\right) \\
&= \overline{\sum}_{P}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\right|+o_{|P|}\left(1\right)\operatorname{vol}\left(A\right) \\
&= \int\limits_{A}\left(f\circ\varphi\right)\left|\det\varphi'\right|+o_{|P|}\left(1\right)
\end{aligned}
$$

$(*)$ ה-o כולל בתוכו את כל ה-o-ים הקודמים ובנוסף את העובדה ש-$\det\varphi'\left(x\right)=\frac{\operatorname{vol}(\varphi(D))}{\operatorname{vol}(D)}$ רק בקירוב (נוכיח בהמשך, לא כל כך פשוט להוכיח שאם φ לא לינארית זה מתקיים).

ובגלל ששני האינטגרל הם מספרים (קבועים), הרי שהם שווים. אם A לא תיבה מוסיפים מציין והכל בסדר. ■

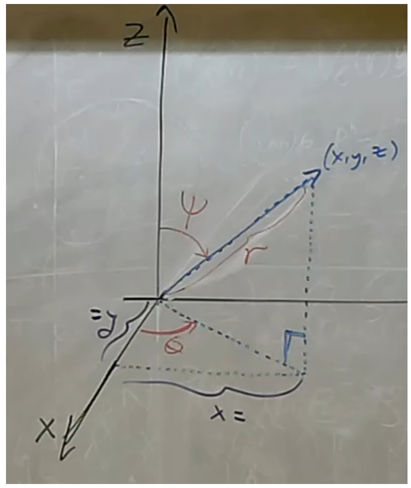
טענה (שבה השתמשנו במשפט חילוף משתנה) תהי $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ כך ש-$\|\varphi'\left(x\right)\|$, $\left\|\varphi'\left(x\right)^{-1}\right\|$ ו-$\sum\limits_{i,j,k}\left|\partial^k\partial^j\varphi_i\left(x\right)\right|$ חסומות לכל x (נורמה על מטריצה הכוונה היא ל-$\max\limits_{v\in\mathbb{R}^n:\|v\|\le1}\|Av\|$). אזי לכל $\epsilon>0$ קיימת $\delta>0$ כך שלכל $D\subseteq\mathbb{R}^n$ קוביה בקוטר לכל היותר δ ולכל $x^0\in D$ מתקיים

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(D\right)&\subseteq\varphi\left(x^0\right)+\varphi'\left(x^0\right)\left(D-x^0\right)\left(1+\epsilon\right)\\
\varphi\left(D\right)&\supseteq\varphi\left(x^0\right)+\varphi'\left(x^0\right)\left(D-x^0\right)\left(1-\epsilon\right)
\end{aligned}
$$

הערה מה שאנחנו רואים כאן זה ש-$\varphi\left(D\right)$ מוכל בתיבה שהיא ניפוח קטן של קירוב לינארי של $\varphi\left(x\right)$ סביב x^0 לכל $x\in D$ ומכילה צימוק של אותו קירוב לינארי.

תרגול

דוגמה נרצה לחשב את הנפח של כדור סביב הראשית (בתלת מימד). נגדיר העתקה $\varphi\begin{pmatrix}r\\\theta\\\psi\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x(r,\theta,\psi)\\y(r,\theta,\psi)\\z(r,\theta,\psi)\end{pmatrix}$ כאשר r המרחק מהראשית, θ הזווית בין ציר x להטלה של הוקטור על מישור XY ו-ψ הזווית ביחס לציר ה-z (ראו איור).



נסמן ρ את אורך ההטלה של הוקטור על מישור XY. מתקיים

$$x = \rho \sin\theta = r\sin\psi\sin\theta$$

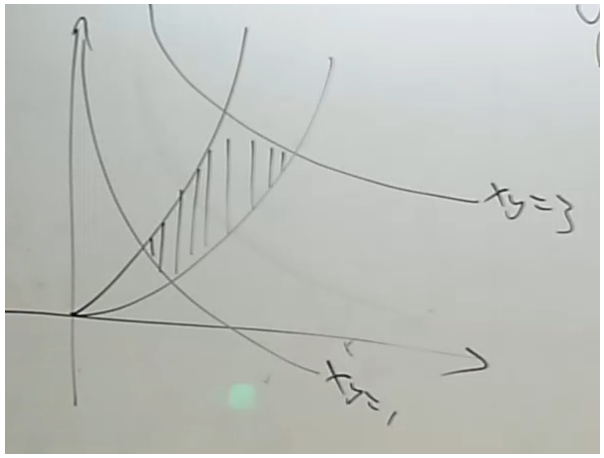
$$y = \rho\cos\theta = r\sin\psi\cos\theta$$

$$z = r\cos\psi$$

כאשר r רץ מ-0 עד כמה שנרצה, θ רץ מ-0 עד 2π ו-ψ רץ בין 0 ל-π (מספיק שירד עד שהוא בכיוון ההפוך, לא צריך להסתובב לכיוון השני. מתקיים $|\det\varphi'| = r^2\sin\psi$ (חישוב לא מעניין).

$$\begin{aligned}
\text{vol}\left(B_2^3(R,0)\right) &= \int\limits_{B=\varphi([0,R]\times[0,2\pi]\times[0,\pi])} 1 \\
\text{החלפת משתנה ופוביני} &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 1\cdot r^2 \sin\psi \ \text{d}\psi \ \text{d}\theta \ \text{dr} \\
&= \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \left(-\cos\psi|_0^{\pi}\right) \ \text{d}\theta \ \text{dr} \\
&= 2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \ \text{d}\theta \ \text{dr} \\
&= 2\cdot 2\pi\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4\pi R^3}{3}
\end{aligned}$$

דוגמה חשבו את $\int\limits_d \frac{x^3}{y}dx \ \text{dy}$ כאשר D הוא התחום הכלוא בין העקומות $xy=1, xy=3, y=x^3, y=2x^3$



נסמן u להיות קוורדינטה שערכה תהיה xy ואז היא נעה בין 1 ל-3. נסמן v להיות הקוורדינטה שערכה $\frac{y}{x^3}$ ואז היא נעה בין $\frac{1}{2}$ ל-1.

לכן נצטרך למצוא העתקה φ שלוקחת את D לקוביה הנוחה שלנו, כלומר

$$\varphi\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x^3}{y} \\ xy \end{pmatrix}$$

ולכן אם $C = [1,3] \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ אז מתקיים $\varphi(D) = C$ ולכן ממשפט חילוף משתנה (בהצבת ההעתקה $\varphi^{-1} : C \to D$) מתקיים $\left|\det(\varphi')^{-1}\right| = \frac{1}{4} \cdot \frac{y}{x^3} = \frac{1}{4u}$ ולכן מניסוח מחדש של משפט חילוף משתנה,

$$\int\limits_D f(x,y) = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(D))} f(x,y) = \int\limits_{\varphi(D)} f\circ\varphi^{-1}(u,v)\left|\det(\varphi')^{-1}\right| = \int\limits_C u\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{u} = \frac{1}{4}\int\limits_C 1 = \frac{1}{4}(2-1)\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8}$$

שבוע $\mathbb{XII}$ | החלפת משתנה לעומק יותר

איור מובחר

הרצאה

טענה תהי $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\|\varphi'(x)\|$, $\left\|\varphi'(x)^{-1}\right\|$ ו-$\sum\limits_{i,j,k}\left|\partial^k\partial^j\varphi_i(x)\right|$ חסומות לכל x (נורמה על מטריצה הכוונה היא לנורמה של כל וקטור תוצאה של המטריצה). אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל $D \subseteq \mathbb{R}^n$ קוביה בקוטר לכל היותר δ ולכל $x^0 \in D$ מתקיים

$$\varphi(D) \subseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1+\epsilon) = P^+$$

$$\varphi(D) \supseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1-\epsilon) = P^-$$

הוכחה: נוכיח את ההכלה הראשונה. יהי $x\in D$ ונרצה להראות ש-$\varphi\left(x\right)\in P^{+}$. אינטואיטיבית,

$$\varphi\left(x\right)\approx\varphi\left(x^{0}\right)+\varphi'\left(x^{0}\right)\left(x-x^{0}\right)\in\varphi\left(x^{0}\right)+\varphi'\left(x^{0}\right)\left(D-x^{0}\right)$$

אבל הקירוב הוא זה שמביא אותנו ל-ϵ וכו'. נוכיח כי אם M חוסם את כל הפ' החסומות לעיל, אז

$$\left\Vert \varphi\left(x\right)-\left(\varphi\left(x^{0}\right)+\varphi'\left(x^{0}\right)\left(x-x^{0}\right)\right)\right\Vert \leq Mn^{2}\delta^{2}$$

ומשם (בניפנוף ידיים), $\delta^{2}=o_{\delta}\left(\delta\right)$ ולכן המרחקים קטנים מאוד עבור קוטר מסוים וזה מספיק לסיום ההוכחה, אבל לא נראה את זה. נראה כי

$$\left|\varphi_{i}\left(x\right)-\left(\varphi_{i}\left(x^{0}\right)+\varphi_{i}'\left(x^{0}\right)\left(x-x^{0}\right)\right)\right|\leq Mn\delta^{2}$$

ונסיים. ניתן להוכיח כי אם $\left|g''\left(t\right)\right|\leq T$ לכל t אזי

$$\left|g\left(t\right)-\left(g\left(t_{0}\right)+g'\left(t_{0}\right)\left(t-t_{0}\right)\right)\right|\leq T\left(t-t_{0}\right)^{2}$$

ונשתמש בזה, רק שנצטרך קודם להתאים את זה ל-$\mathbb{R}^{n}$, באמצעות מסילה. נגדיר $\psi\left(t\right)=x^{0}+t\left(x-x^{0}\right)$, ו-$g\left(t\right)=\varphi_{i}\left(\psi\left(t\right)\right)$. מתקיים $g\left(0\right)=\varphi_{i}\left(x^{0}\right),g\left(1\right)=\varphi_{i}\left(x\right)$ וכן מנגזרת של הרכבה,

$$g'\left(t\right)=\varphi_{i}'\left(\psi\left(t\right)\right)\left(x-x^{0}\right)$$

נגדיר $T=\max_{t\in[0,1]}\left|g''\left(t\right)\right|$ ונשתמש בטענה הנ"ל עבור $t_{0}=0,t=1$ ונקבל

$$\varphi_{i}\left(x\right)-\left(\varphi_{i}\left(x^{0}\right)+\varphi_{i}'\left(x^{0}\right)\left(x-x^{0}\right)\left(1-0\right)\right)\leq T\cdot\left(1-0\right)^{2}$$

לכן נותר להוכיח כי $T\leq Mn\delta^{2}$. מהנוסחה למעלה, מתקיים

$$g'\left(t\right)=\left\langle \nabla\varphi_{i}\left(\psi\left(t\right)\right)\mid x-x^{0}\right\rangle$$

ולכן מכלל השרשרת שוב (עקבו אחר כל המעברים, לדוגמה הנגזרת של ψ היא $x-x^{0}$),

$$g''\left(t\right)=\left(x-x^{0}\right)^{T}H_{\varphi_{i}}\left(\psi\left(t\right)\right)\left(x-x^{0}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left|g''(t)\right| &= \left|\sum_{j,k=1}^{n}\left[H_{\varphi_i}(\psi(t))\right]_{jk}\left(x-x^0\right)_j\left(x-x^0\right)_k\right| \\ &\overset{\Delta}{\leq} \sum\left|\left[H_{\varphi_i}(\psi(t))\right]_{jk}\left(x-x^0\right)_j\left(x-x^0\right)_k\right| \\ &\leq M\sum\left|\left(x-x^0\right)_j\left(x-x^0\right)_k\right| \\ &= M\left\|x-x^0\right\|_1^2 \leq Mn\left\|x-x^0\right\|_2^2 \quad \text{ראינו בתרגיל} \\ &\leq Mn\delta^2\end{aligned}$$

ניתן אינטואיציה להכלה בכיוון ההפוך. הקירוב הלינארי הוא $\varphi(x) = \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(x-x^0\right)$ ולכן

$$x = \varphi'\left(x^0\right)^{-1}\left(\varphi(x) - \varphi\left(x^0\right)\right) + x^0$$

כלומר לא חזרנו בדיוק ל-x, אלא ליד, ואת הקפיצה הזו לא נוכל להוכיח בקורס. ■

תרגול

דוגמה כיצד נחשב את $\int_0^1 (2x+1)^{100}\,dx$? אפשר לסמן $u = 2x+1$ ואז $\mathrm{du} = 2dx$ ואז האינטגרל הקודם הוא

$$\int_0^1 \frac{(2x+1)^{100}}{2} 2dx = \int_1^3 \frac{u^{100}}{2} = \mathrm{du} = \ldots$$

כאן ראינו אינטגרל קשה, ומצאנו אינטגרל קל שאפשר לחשב אותו.

דוגמה כיצד נחשב את $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$? נציב $x = \sin u$ ומשם נציב גבולות וכו'. כאן ראינו אינטגרל קל, ומצאנו אינטגרל קשה, אבל שאנחנו יודעים לחשב. ההצבות הפולריות שלנו עד כה היו מהסוג הזה.

הערה למעשה, המקרה הראשון הוא בהינתן φ, המעבר

$$\int_{\varphi(A)=B} f(x,y)\,dx\,\mathrm{dy} = \int_A f\circ\varphi(u,v)\left|\det\varphi'\right|\ \mathrm{du}\ \mathrm{dv}$$

המקרה השני הוא שנתון לנו φ^{-1} ונחשב

$$\int_B f = \int_{\psi(B)} \frac{f\circ\psi^{-1}}{\left|\det\psi'\circ\psi^{-1}\right|}$$

כשמציבים $\psi = \varphi^{-1}$.

דוגמה נתונות $f(x,y) = xy$, $\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} U(x,y) \\ V(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)^2 \\ (x-y)^2 \end{pmatrix}$ ולכן מקצת אינפי, מתקיים

$$f(x,y) = \frac{4xy}{4} = \frac{U(x,y) - V(x,y)}{4}$$

ולכן $\frac{u-v}{4} = \frac{U\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) - V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right)\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)}{4} = f \circ \varphi$ כאשר המעבר האחרון מסתמך על טענה קטנה.

טענה $U \circ \varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = u$.

הוכחה: מתקיים

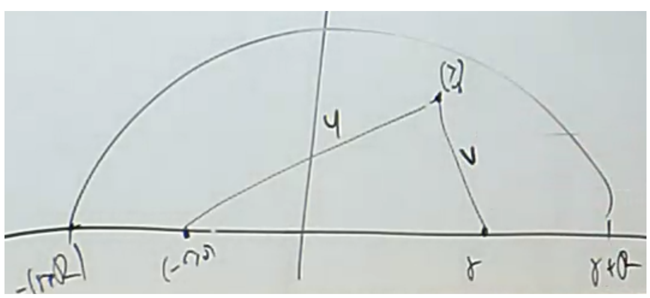
$$\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \varphi^{-1} \circ \varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} U\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \\ V\circ\varphi\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$$

■

דוגמה חשבו את $\int\limits_B 4^2 x^2 y dx \, \mathrm{dy}$ כאשר B היא החלק החיובי של הבערך-אליפסה עם מוקדים $(r,0)$, $(-r,0)$, כלומר

$$B_{r,R} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : \left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} r \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\| + \left\|\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} -r \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right\| \le r + R, y \ge 0\right\}$$

כאשר גאומטרית, מדובר ב-



ואז $B_{r,R} = \left\{\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) : U\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) + V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) \le r + R, y \ge 0\right\}$.

ולכן נוכל לעשות החלפת משתנה ל-$\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$ (במקום פולרי, שאולי גם יעבוד). מתקיים $U\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (x+r)^2 + y^2$ ו-$V\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = (x-r)^2 + y^2$

ולכן $\left(\varphi^{-1}\right)' = \begin{pmatrix} 2(x+r) & 2y \\ 2(x-r) & 2y \end{pmatrix}$, כלומר $\det\left(\varphi^{-1}\right)' = 8ry$ וגבולות האינטגרציה הם

$$\varphi^{-1}(B_{r,R}) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right) : u, v \ge 0, u + v \le r + R, u + v \ge 2r\right\}$$

כאשר הגבול האחרון נובע מכך שהמרחק המינימלי בין $(0,r)$, $(-r,0)$ הוא לכל הפחות $2r$, ולסיום

$$\begin{aligned}\int\limits_B f\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) &= \int\limits_B 4^2x^2y dx\,\mathrm{dy} = \int\limits_B \left(U\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) - V\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)^2 y \\ &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \frac{\left(\left(U\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right) - V\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right)^2 y\right)\circ\varphi}{8ry\circ\varphi(y)} \\ &= \int\limits_{\varphi^{-1}(B)} \frac{(u-v)^2}{8r} = \ldots\end{aligned}$$

שבוע $\mathbb{XIII}$ | משפט הפונקציה ההפוכה

איור מובחר

הרצאה

משפט (כמעט הפונקציה ההפוכה) תהי $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ כך ש-$\|\varphi'(x)\|$, $\left\|\varphi'(x)^{-1}\right\|$ ו-$\sum\limits_{i,j,k}\left|\partial^k\partial^j\varphi_i(x)\right|$ חסומות לכל x (נורמה על מטריצה הכוונה היא לנורמה של כל וקטור תוצאה של המטריצה). אזי לכל $\epsilon > 0$ קיימת $\delta > 0$ כך שלכל קוביה בקוטר $D \subseteq \mathbb{R}^n$ לכל היותר δ ולכל $x^0 \in D$ מתקיים

$$\varphi(D) \subseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1+\epsilon) = P^+$$
$$\varphi(D) \supseteq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(D - x^0\right)(1-\epsilon) = P^-$$

הערה הוכחנו את החלק הראשון בשבוע שעבר, עתה נוכיח את החלק השני (בערך).

טענה (חסם של שארית טיילור מדרגה 1)

$$\left\|\varphi(x) - \left(\varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(x - x^0\right)\right)\right\| \le Mn^2\left\|x - x^0\right\|_2^2$$

הערה השתמשנו בטענה הזו כבר, אבל נזכיר אותה שוב בשל חשיבותה. החשיבות של חסם מפורש היא שכך נדע שהוא לא תלוי ב-x^0 שחשוב לאינגטרציה, שהיא אחידה על כל הקוביות בחלוקה ולא עם פ' אחרת לכל קוביה.

הוכחה: (של החלק השני של הטענה המרכזית) מה שאנחנו רוצים לעשות זה למצוא לכל $y \in P^-$, $x \in D$ כך ש-$\varphi(x) = y$, כלומר אנחנו רוצים למצוא איכשהו φ^{-1} (מקומית לפחות, כי לא הובטח שהיא קיימת גלובלית). מתקיים מהעברת אגפים,

$$D = x^0 + \left(\varphi'\left(x^0\right)\right)^{-1}\left(P - \varphi\left(x^0\right)\right)$$

כאשר P זו התיבה הלא מנופחת (כלומר P^+ בלי אפסילון, או P^- בלי אפסילון). כלומר הצלחנו להפוך את הקירוב הלינארי של φ, ונטען שזה מקרב (לינארית) בעצמו את φ^{-1}.

- לכל $x^0 \in D, y \in P$,

$$\left\|\varphi\left(x^0\right) - y\right\| \leq M\delta$$

כי הנורמה האופרטורית של φ' חסומה ע"י M, ו-P מתקבל ע"י הכפלת D ב-$\varphi'\left(x^0\right)$ (עד כדי קבוע x^0 וכו'). לסיום הנימוק, $y = \varphi\left(x^*\right)$ עבור $x^* \in D$ כלשהו (אותו אנו מחפשים) ולכן המרחק בין x ל-x^* כבר חסום ע"י δ.

- ניקח

$$x^1 = x^0 + \varphi'\left(x^0\right)^{-1}\left(y - \varphi\left(x^0\right)\right)$$

(מחזירים את y ל-x^1 כלשהו באמצעות קירוב לינארי הפוך) ואז הקירוב הלינארי הוא

$$\varphi\left(x^1\right) \simeq \varphi\left(x^0\right) + \varphi'\left(x^0\right)\left(x^1 - x^0\right) = y$$

נסמן L_{φ, x^0} הקירוב הלינארי של φ ב-x^0. לכן

$$\left\|\varphi\left(x^1\right) - y\right\| \overset{(*)}{\leq} Mn^2\left\|x^1 - x^0\right\|^2 \overset{\operatorname{diam}(D) \leq \delta}{\leq} Mn^2\delta^2$$

$(*)$ ממש עכשיו ראינו ש-y הוא פולינום טיילור מדרגה 1 סביב x^0 בהצבת x^1, לאמור $y = P^1_{x^0}\left(x^1\right)$, ואז השתמשנו בטענת העזר.

- עתה, נפעיל את φ על x^1 ונחזיר חזרה עם ההופכית של הקירוב הלינארי של φ ונקבל x^2, ואז x^3 וכו' ונקבל סדרה $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

נותר להוכיח כי:

1. $\left\|y - \varphi\left(x^i\right)\right\| \ll \left\|y - \varphi\left(x^{i-1}\right)\right\|$.
2. $\left\|x^i - x^{i-1}\right\| \leq \alpha\left\|y - \varphi\left(x^{i-1}\right)\right\|$ כאשר α מאוד קטן.

הטענה הזו עם הקודמת חוסמת באופן אינדוקטיבי את מרחקי x^i, ואז מקבלים ש:

(א) יש גבול ל-x^i (זו סדרה קושי).

(ב) $\left\|y-\varphi\left(x^{i}\right)\right\| \longrightarrow 0$.

3. $x^{*} \in D$ כשאינטואטיבית, בגלל ש-$y \in P^{-}$, אז גם כל שאר הקירובים שם ולכן לא הצלחנו להתרחק יותר מדי מעבר למותר.

■

סכמת הוכחה לפי השיטה האיטרטיבית

ההוכחה הזו היא דוגמה לסכמה שעובדת בהרבה תחומים אחרים - השיטה האיטרטיבית.

1. נתחיל בקירוב סביר עבור x^{0}.
2. נשפר את הקירוב ל-x^{1} יותר טוב ע"י לינאריזציה של $y=\varphi\left(x\right)$ סביב x^{0}.
3. בשלב ה-i, נשפר ל-x^{i} באמצעות לינאריזציה של $y=\varphi\left(x\right)$ סביב x^{i-1}.
4. נוכיח כי הפתרון הוא $x^{*}=\lim x^{i}$.

משפט (הפונקציה ההפוכה) יהי φ שהכל חסום אצלו כנ"ל ו- $x^{0} \in \mathbb{R}^{n}$. אזי לכל $\epsilon>0$, קיימת $\eta>0$ כך שלכל $y \in \mathbb{R}^{n}$ כך ש-$\left\|y-\varphi\left(x^{0}\right)\right\| \leq \eta$, קיים x^{*} כך ש-$y=\varphi\left(x^{*}\right)$, וגם

$$\left\|x^{*}-\left(x^{0}+\varphi^{\prime}\left(x^{0}\right)^{-1}\left(y-\varphi\left(x^{0}\right)\right)\right)\right\| \leq \epsilon\left\|y-\varphi\left(x^{0}\right)\right\|$$

דוגמה תהי $f\left(x,y,z\right)=e^{xy+2yz+zx}$. ברור שאין ל-$f$ מקסיום. אבל נרצה למקסם את f על פני נקודות שמקיימות $x+y+z=1$.

הערה נוכל להכליל זאת: מצאו ערך מקסימלי של $f:\mathbb{R}^{n} \rightarrow \mathbb{R}$ על פני הגרף $G=\left\{x \in \mathbb{R}^{n}: g\left(x\right)=0\right\}$ (במקרה שלנו $g=x+y+z-1$).

נוכל מעבר לכך להכליל, כאשר הפעם $G=\left\{x \in \mathbb{R}^{n}: g_{1}\left(x\right)=0, \ldots, g_{n}\left(x\right)=0\right\}$.

טענה הפתרון מתקבל בקבוצה $L \cup S$ כאשר

$$L=\left\{x: g\left(x\right)=0 \wedge g^{\prime}\left(x\right)=0\right\}, \quad S=\left\{x: g\left(x\right)=0 \wedge \nabla f\left(x\right)=\lambda \nabla g\left(x\right)\right\}$$

הערה האינטואיציה ל-S היא שאנחנו רוצים ללכת בכיוון הגרדיאנט כדי להגדיל את הערך, אבל אם הגדריאנט של g (שניצב ליריעה $\left\{g\left(x\right)=0\right\}$) מקביל לגרדיאנט של f, אי אפשר ללכת לשום כיוון שיגדיל את הערך ולכן זהו מקסימום.

הערה לא נתעסק ב-L כי הוא לא מעניין.

דוגמה בדוגמה המקורית, $\nabla f\left(x\right)=e^{xy+2yz+zx}\left(y+z,x+2z,2y+x\right)$ וכן $\nabla g\left(x,y,z\right)=\left(1,1,1\right)$ ולכן האילוץ הוא $\nabla f\left(x\right)=\lambda\left(1,1,1\right)$, כלומר אנחנו רוצים שוויון על כל שלושת האיברים בוקטור של ∇f.

עם קצת לינארית, מקבלים ש-$\frac{1}{2}=y=z,x=0$ ואז $f\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{2}}$ היא אכן המקסימום כי היא האיבר היחיד ב-$L\cup S$, למרות שצריך לשלול שהפ' שואפת לערכים יותר גדולים באינסוף (במקרה הזה היא לא בגלל איך שנראה הגוף), וגם לסווג את הנקודה הקריטית כמו שצריך.

תרגול

נתונה $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ (פ' מטרה כלשהי) ואילוץ מהצורה $g\left(x\right)=0$ כאשר $g:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ ונרצה למקסם את פ' המטרה.

משפט (כופלי לגרנז') תחת התנאים הנ"ל, אם x^{0} הוא מקס' (מינ') של f בקבוצה $G=\left\{ x:g\left(x\right)=0\right\}$ אז $\nabla f\left(x^{0}\right)=\lambda\nabla g\left(x^{0}\right)$.

הגדרה קו הגובה של $\varphi:\mathbb{R}^{2}\to\mathbb{R}$ גבוה $c\in\mathbb{R}$ היא הקבוצה $\varphi^{-1}\left(c\right)=\left\{ x\in\mathbb{R}^{2}:\varphi\left(x\right)=c\right\}$.

טענה $\nabla\varphi$ מאונך לקווי הגובה של φ (כלומר מאונך לכל מסילה שעוברת דרך הקבוצה).

דוגמה מצאו ואפיינו את כל נקודות הקיצון של $f\left(x,y\right)=x^{4}+y^{4}$ בקבוצה $B=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):\left\Vert \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right\Vert \leq1\right\}$.

מתקיים

$$B=\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):\left\Vert \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right\Vert <1\right\} \biguplus\left\{ \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right):\left\Vert \left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\right\Vert =1\right\}$$

נבחין כי $\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)$ היא מינימום גלובלי של f (f אי-שלילית, הצלחנו לאפס). ולכן בחצי הראשון של B מצאנו את המינימום. נחפש עתה בחצי השני.

נגדיר את האילוץ $g=0$ עבור $g=x^{2}+y^{2}-1$ (גם הנורמה בריבוע היא 1, זה לא משנה) וכך קיבלנו את הקבוצה השנייה באיחוד.

לכן ממשפט כופלי לגרנז', אם $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ היא נקודה קיצון ב-$g^{-1}\left(0\right)$ אז $\nabla f=\lambda\nabla g$. כלומר, $\nabla f=\left(\begin{smallmatrix}4x^{3}\\4y^{3}\end{smallmatrix}\right)=\lambda\left(\begin{smallmatrix}2x\\2y\end{smallmatrix}\right)$ ולכן נחפש $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)$ שמקיימים זאת, כאשר לא מעניין אותנו מהו λ והוא בעצם תלוי בנקודות.

אם $x,y\neq0$ אז המשוואות הן $2x^{2}=\lambda,2y^{2}=\lambda$ ולכן $x^{2}=y^{2}$ אבל גם $x^{2}+y^{2}=1$ מהאילוץ ולכן הפתרון הוא $\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{smallmatrix}\right)$, ונסווג את הנקודות הללו בהמשך.

אם $x=0$ (ובאופן סימטרי $y=0$), אז מהאילוץ $y=\pm1$ ומתקיים $2\lambda=4$ מהמשוואה השנייה, כלומר $\lambda=2$ ולכן קיים λ (שהוא 2) כך ש-$\nabla f\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)=\lambda\nabla g\left(\begin{smallmatrix}0\\\pm1\end{smallmatrix}\right)$ ולכן $\left(\begin{smallmatrix}0\\\pm1\end{smallmatrix}\right)$ גם חשודות.

למי שלא עוקב - הטיעון כאן הוא שכל נקודה חשודה מקיימת את התלות עם λ, ולכן כל נקודה שלא מקיימת את האילוץ (כל מה שלא מקיים $y=\pm1$ וכיוצ"ב), לא נק' קריטית, וכל אחת שכן, אולי קריטית (לאמור, חשודה).

לכן הנקודות $\left(\begin{smallmatrix}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}\pm1\\0\end{smallmatrix}\right),\left(\begin{smallmatrix}0\\\pm1\end{smallmatrix}\right)$ מתקיים $\nabla f=\lambda\nabla g$ ולכן הן החשודות למקס'/מינ' תחת האילוץ.

כדי לסווג אי אפשר לעשות הסיאן כי אנחנו בתחום סגור ולא כל $\mathbb{R}^n$. אם $\binom{a}{b}$ מקיים $g=0$ אז a^2+b^2 ולכן $-1\le a,b\le 1$, כלומר $f(a,b)=a^4+b^4\le a^2+b^2=1$ אבל $f(e_1)=1$ ולכן $\pm e_1,\pm e_2$ נקודות מקסימום המקיימות את האילוץ.

לשתי הנקודות האחרות אפשר להגדיר מסילה $\varphi(t)=\binom{\cos t}{\sin t}$ ולהבחין משהו על $f(\varphi(t))$ ולקוות לטוב.

שבוע $\mathbb{XIV}$ | כופלי לגראנז'

איור מובחר

הערה כשאנחנו משתמשים בכופלי לגראנז' אנחנו מחפשים מקסימום על יריעה, ובמקרה שלנו אנחנו נניח שתמיד המקסימום מתקבל עבור $x^0\in g^{-1}(0)$ (כלומר בתוך היריעה).

טענה (למה עיקרית לכופלי לגראנז') אם $g(x^0)=0$ ו-$g'(x^0)\neq 0$, אזי לכל $u\perp\nabla g(x^0)$ אפשר ללכת על היריעה $g(x)=0$ מ-x^0 בכיוון u, כלומר, לכל $\epsilon>0$ (קטן מספיק) קיים δ כך שמתקיים:

1. $g\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)=0$.
2. $\delta=o_\epsilon(\epsilon)$.

הערה הרעיון הוא ש-g לא משתנה בכיוונים ניצבים ל-∇g ולכן הוא נשאר 0.

הוכחה: נגדיר $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ע"י $\varphi(\epsilon,\delta)=\begin{pmatrix}\epsilon\\ g\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)\end{pmatrix}$. נשתמש במשפט הפ' ההפוכה ואז נגלה שיש מקור ל-$\binom{\epsilon}{0}$ וזה ייתן לנו δ שתקיים את הדרישות. נראה את תנאי משפט הפ' ההפוכה (חסימות בסביבת $\binom{0}{0}$ כדי שנוכל להסתכל על $\binom{\epsilon}{0}$ כאשר ϵ קטן, וקטור שיהיה בסביבה).

מתקיים $\varphi\binom{0}{0}=\binom{0}{0}$,

$$\varphi'(\epsilon,\delta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ g'\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)u & g'\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)\nabla g\left(x^0\right)\end{pmatrix}$$
$$\varphi'(0,0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left\|\nabla g\left(x^0\right)\right\|^2\end{pmatrix}$$

כאשר ב-$\binom{0}{0}$ יש אפס בשמאל-למטה כי u אנך ל-$\nabla g\left(x^0\right)=\left(g'\left(x^0\right)\right)^T$. אכן הנורמה האופרטורית כאן חסומה כי אנחנו מניחים ש-∇g חסום. מתקיים בנוסף

$$\left(\varphi'(0,0)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \left\|\nabla g\left(x^0\right)\right\|^{-2}\end{pmatrix}$$

ולכן בסביבת $\binom{0}{0}$, $\left\|\varphi'^{-1}\right\|,\left\|\varphi'\right\|$ חסומות (צריך להוכיח בעיקרון שמטריצה הפיכה הפיכה גם בסביבתה אבל זה לא מעניין). בדומה g'' ו-φ'' גם חסומות. לכן ממשפט הפ' ההפוכה, התמונה ההפוכה $\varphi^{-1}\binom{\epsilon}{0}$ עבור $\epsilon>0$ קטן מספיק (בסביבה) קיימת ונסמנה $\binom{\epsilon}{\delta}$.

לכן עבור $\delta = \left(\varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right)\right)_2$, מתקיים

$$\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right) = \varphi\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\\delta\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\g\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)\end{smallmatrix}\right)$$

כלומר $g\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)=0$.

ממשפט הפ' ההפוכה ניתן להראות ש-φ^{-1} גזירה בעצמה, ועבור $\epsilon=0$ נקבל $\delta=0$ ולכן $\delta=O_\epsilon\left(\epsilon\right)$ מהגדרת הנגזרת (לא o קטן, לא סיימנו עדיין). אם נוכיח שהנגזרת של δ (שהיא תלויה ב-ϵ ולכן פ', פורמלית, פשוט השמטתי את $\delta=\delta_\epsilon$ מטעמי נוחות) היא אפס, אז נקבל את הנדרש.

$$\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) = \left(\varphi'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & \left\|\nabla g\left(x^0\right)\right\|^{-2}\end{smallmatrix}\right)$$

ולכן

$$\begin{aligned}\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\\delta\end{smallmatrix}\right) = \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right) &= \varphi^{-1}\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right) + \left(\left(\varphi^{-1}\right)'\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right) + o_\epsilon\left(\epsilon\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\0 & \dots\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right) + o_\epsilon\left(\epsilon\right)\\ &= \left(\begin{smallmatrix}\epsilon\\0\end{smallmatrix}\right) + o_\epsilon\left(\epsilon\right)\end{aligned}$$

ולכן $\delta=o_\epsilon\left(\epsilon\right)$. ■

משפט אם f מקבלת ערך מקסימלי על $\{g\left(x\right)=0\}$ בנקודה x^0 ו-$g'\left(x^0\right)\neq 0$ אזי קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש-$\nabla f\left(x^0\right)=\lambda\nabla g\left(x^0\right)$.

הוכחה: נניח בשלילה ש-$\nabla f\left(x^0\right)\notin \text{sp}\left\{\nabla g\left(x^0\right)\right\}$. כלומר אפשר להתקדם על היריעה (בניצב ל-g) ובכיוון ∇f ולהגדיל את ערך הפ' כלומר זה לא מקסימום סתירה. נפרמל זאת.

יהי u השלמה לבסיס אורתוג' של $\nabla g\left(x^0\right)$ ל-$\text{sp}\left\{\nabla g\left(x^0\right),\nabla f\left(x^0\right)\right\}$ (זהו ת"מ ממימד 2 כי ∇f לא ת"ל ב-∇g) ולכן $u\perp g\left(x^0\right)$ ובה"כ $\left\langle u\mid\nabla f\left(x^0\right)\right\rangle>0$ (אחרת נסתכל על $-u$, והמכ"פ לא יכולה להיות 0 כי אז הוא ת"ל ב-∇g בסתירה לכך שהוא לא - לינארית 2 קלאסי).

יהי δ מהלמה העיקרית עבור u, x^0 ו-ϵ קטן מספיק. לכן

$$\begin{aligned}g\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right) &= 0\\ f\left(x^0+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right) &= f\left(x^0\right)+f'\left(x^0\right)\left(\epsilon u+\delta\nabla g\left(x^0\right)\right)+o_\epsilon\left(\epsilon\right)\\ &\overset{\text{בלמה העיקרית 2}}{=} f\left(x^0\right)+\epsilon\left\langle\nabla f\left(x^0\right)\mid u\right\rangle+o_\epsilon\left(\epsilon\right)\\ &\overset{\text{עבור } \epsilon \text{ קטן מספיק}}{>} f\left(x^0\right)\end{aligned}$$

סתירה. ■

תרגול

נראה דרך אחרת להוכיח את משפט כופלי לגראנז', באופן לא כל כך פורמלי אבל מסקרן.

הוכחה: אם $G=g^{-1}\left(0\right)$ ו-$x\in G$ אז לכל $u\perp\nabla g\left(x\right)$ ולכל $\epsilon>0$ קטן מספיק, $g\left(x+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right)=0$ וכן $\delta=o_{\epsilon}\left(\epsilon\right)$. נרשום

$$\begin{aligned}g\left(x+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right) & =g\left(x+\epsilon u\right)+\left\langle \nabla g\left(x+\epsilon u\right)\mid\delta\nabla g\left(x\right)\right\rangle +o_{\delta}\left(\delta\nabla g\left(x\right)\right)\\
\left(*\right) & \simeq g\left(x+\epsilon u\right)+\delta\left\Vert \nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}+o_{\delta}\left(\delta\nabla g\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

$\left(*\right)$ הגרדיאנט של g ב-x ו-$x+\epsilon u$ הוא מספיק קרוב מחסם ההשתנות על הנגזרת של g (דורש פירמול). נגדיר $\psi:x\mapsto\left\Vert \nabla g\left(x\right)\right\Vert$ ואז $\psi\left(x\right)\simeq\psi\left(x+\epsilon u\right)$ ובגלל שהגדרנו מכ"פ באמצעות נורמה, זה מספיק קרוב.

לכן אם $g\left(x+\epsilon u\right)$ חיובי בסביבה נבחר δ שלילי שיאפס זאת, אם הוא שלילי נבחר δ חיובי וכך הצלחנו לאפס את g "יותר בקלות" (בהתעלם מהרבה עבודה טכנית).

$$\begin{aligned}0 & =g\left(x+\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right)\\
 & =g\left(x\right)+\left\langle \nabla g\left(x\right)\mid\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right\rangle +o_{\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)}\left(\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right)\\
u\perp\nabla g\quad & =0+\delta\left\Vert \nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}+o_{\epsilon}\left(\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right)
\end{aligned}$$

ומהיות ∇g קבוע, מתקיים $\delta=o_{\epsilon}\left(\epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right)$. לכן מהגדרת o קטן, עבור $\left|\epsilon\right|<\eta$, מתקיים

$$\left\Vert \delta\nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}<\kappa\left\Vert \epsilon u+\delta\nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}=\kappa\left(\left\Vert \epsilon u\right\Vert ^{2}+\left\Vert \delta\nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}\right)$$

ולכן מהעברת אגפים,

$$\left\Vert \delta\nabla g\left(x\right)\right\Vert ^{2}=\frac{\kappa}{1-\kappa}\left\Vert \epsilon u\right\Vert ^{2}$$

כלומר $\delta=o_{\epsilon}\left(\epsilon\right)$. ■

סוף.