

თავი 11 დისპერსიული ანალიზი

მეათე თავში განვიხილეთ ორი დამოუკიდებელი ნორმალური შერჩევის საშუალოების შედარების ამოცანა. კერძოდ, შევამოწმეთ ჰიპოთეზა პოპულაციების საშუალოების ტოლობის შესახებ და ავაგეთ ნდობის ინტერვალი პოპულაციების საშუალოთა სხვაობისთვის. ამ მიზნით გამოვიყენეთ t -კრიტერიუმი.

ვთქვათ, ახლა გვაქვს ორზე მეტი შერჩევა და გვინტერესებს შევამოწმოთ ჰიპოთეზა საშუალოთა ტოლობის შესახებ. ჩვენ ამ სიტუაციაში ვერ გამოვიყენებთ t -კრიტერიუმს, რადგანაც მრავალჯერადი შედარების დროს (შერჩევების თითოეული წყვილის შედარებისას), შეცდომების ალბათობა ძალიან სწრაფად იზრდება შედარებების რიცხვის ზრდასთან ერთად.

მეთოდს, რომელიც გვაძლევს რამდენიმე საშუალოს შედარების საშუალებას, ეწოდება დისპერსიული ანალიზი (რომლის აბრევიატურაა — ANOVA). ერთი შეხედვით შეიძლება უცნაურად მოგვეჩვენოს, რომ ტესტს, რომელიც საშუალოთა შესადარებლად გამოიყენება, დისპერსიული ანალიზი ეწოდება. მიზეზი იმაში მდგომარეობს, რომ ეს მეთოდი ეყრდნობა დისპერსიების შეფარდებას, როგორც ცვალებადობის საზომს შერჩევების საშუალოებს შორის, ასევე თვით შერჩევის შიგნით.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ აღნიშნული ტესტი — ANOVA, საჭიროა:

- ყველა პოპულაცია იყოს ნორმალური;
- პოპულაციების დისპერსიები იყოს ტოლი.

ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი ცდის პირთა შორის სქემისათვის (ჰიპოთეზები)

გვინდა შევამოწმოთ ძირითადი

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

ჰიპოთეზა

$$H_A: \text{ყველა } \mu_i \text{ არ არის ერთმანეთის ტოლი}$$

ალტერნატივის წინააღმდეგ.

ჩვენ არ მოვითხოვთ, რომ ყველა საშუალო განსხვავებული იყოს ერთმანეთისგან. ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ მაშინაც, როცა თუნდაც საშუალოების რომელიმე ერთი წყვილი მაინც იქნება ერთმანეთისგან განსხვავებული.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

გვაქვს დამოუკიდებელი შემთხვევითი შერჩევები k პოპულაციიდან. პირველი პოპულაციიდან გვაქვს n მონაცემი

$$X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n},$$

მეორე პოპულაციიდანაც გვაქვს n მონაცემი

$$X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n}$$

და ა. შ. k -ური პოპულაციიდანაც გვაქვს n მონაცემი

$$X_{k1}, X_{k2}, \dots, X_{kn}.$$

თითოეულ შერჩევას აქვს თავისი საშუალო და სტანდარტული გადახრა. შევადგინოთ 11.1 ცხრილი. შემოვიღოთ აღნიშვნები:

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 \quad \text{— არის } X_{ij} \text{ მონაცემების მათი საერთო საშუალო მნიშვნელობიდან}$$

გადახრების კვადრატების სრული ჯამური სიდიდე (total sum of squares). ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობისას $MST = \frac{SST}{n-1}$ არის უცნობი σ^2 დისპერსიის ჩაუნაცვლებელი შეფასება, ანუ S^2

(გვაქვს k ჯგუფი და თითოეულ ჯგუფში n მონაცემი, $j = 1, 2, \dots, n$; $i = 1, 2, \dots, k$. სულ გვაქვს $N = nk$ მონაცემი).

ცხრილი 11.1

	ჯგუფი 1	ჯგუფი 2		ჯგუფი k	სულ
	X_{11}	X_{21}	...	X_{k1}	k
	X_{12}	X_{22}	...	X_{k2}	k

	X_{1n}	X_{2n}	...	X_{kn}	k
შერჩევის მოცულობა	n	n	...	n	$N = kn$
საშუალო	\bar{X}_1	\bar{X}_2	...	\bar{X}_k	$\bar{\bar{X}}$
სტანდარტული გადახრა	s_1	s_2	...	s_k	S

აქ $\bar{\bar{X}}$ არის საშუალოების საშუალო, სრული საშუალო (ანუ ყველა მონაცემთა საშუალო):

$$\bar{\bar{X}} = \frac{X_{11} + \dots + X_{kn}}{N} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{k},$$

სადაც N შერჩევის მთლიანი რაოდენობაა, S არის შერჩევის მონაცემების სტანდარტული გადახრა, S^2 დისპერსიის შეფასებაა.

$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ — ყოველი ჯგუფის ვარიაციის ჯამია, მას შეიძლება შევხედოთ, როგორც ჯგუფებში ვარიაციის (ცვალებადობის) მახასიათებელს (sum of square within groups). ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს $MSE = \frac{SSE}{N-k}$ უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასებაა.

$SSR = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 = n \cdot \sum_{i=1}^k (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$ — არის ჯგუფის საშუალო მნიშვნელობის საერთო საშუალოდან გადახრების კვადრატების ჯამი (sum of square between groups). მას შეიძლება შევხედოთ, როგორც ჯგუფთაშორისი ცვალებადობის მახასიათებელს. ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის დროს $MSR = \frac{SSR}{k-1}$ არის იგივე უცნობი σ^2 დისპერსიის შეფასება.

თუ უცნობი σ^2 დისპერსიის აღნიშნული სამი შეფასება გვაძლევს დაახლოებით ერთნაირ რიცხვით მნიშვნელობებს, მაშინ ჯგუფის საშუალოებს შორის არ არის მნიშვნელოვანი სხვაობა. ირ-იქით, თუ დისპერსიის შეფასებები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან და, ამასთან, $\frac{SSR}{k-1}$ მნიშვნელოვნად ჭარბობს $\frac{SSE}{n-k}$ -ს, მაშინ უნდა უარვყოთ ნულოვანი ჰიპოთეზა, ანუ ჩავთვალოთ, რომ ზოგიერთი ჯგუფის საშუალოებს შორის მნიშვნელოვანი განსხვავებაა.

უცნობი σ^2 დისპერსიის ორი განხილული შეფასება ეფუძნება ჯგუფთა შორის SSR და ჯგუფებში შიგნით ცვალებადობას SSE . მათ ფარდობას ნულოვანი ჰიპოთეზის სამართლიანობის პირობებში აქვს F -განაწილება $k-1$ და $N-k$ თავისუფლების ხარისხებით. ეს საშუალებას გვაძლევს ჰიპოთეზის შესამოწმებლად გამოვიყენოთ

$$F = \frac{\frac{SSR}{k-1}}{\frac{SSE}{N-k}} = \frac{MSR}{MSE} \cong F(k-1, N-k).$$

სტატისტიკის დაკვირვებული (ჩვენს მიერ გამოთვლილი) მნიშვნელობა.

გადაწყვეტილების მიღების წესი

დავაფიქსიროთ მნიშვნელოვნების დონე α . ვიპოვოთ F -განაწილების შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა ფიშერის ზედა კრიტიკული წერტილების α ალბათობის შესაბამისი ცხრილიდან ვიპოვოთ $k-1$ და $N-k$ თავისუფლების ხარისხების მქონე ფისერის განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილი — $F_{crit} = F_{k-1, N-k, \alpha}$. თუ F სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობაა f და $f > F_{crit}$, მაშინ $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$ ჰიპოთეზას დავინუნებთ, წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 -ის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

ANOVA ცხრილში არის სამი სტრიქონი: პირველი სტრიქონი შეიცავს ინფორმაციას ჯგუფთა შორის ცვალებადობაზე, მეორე — ჯგუფთა შიგნით ცვალებადობაზე, ხოლო მესამე სტრიქონი კი ტესტისთვის არ არის საჭირო, მაგრამ საჭიროა გამოთვლების სისწორის შესამოწმებლად:

$$SST = SSR + SSE, \quad N-1 = N-k + k-1.$$

თავისუფლების ხარისხი $N-1$, რომელიც ნაჩვენებია მესამე სტრიქონში, ეფუძნება N დაკვირვებას მინუს ერთი დამაკავშირებელი თანაფარდობა (ერთი ბმა) სრული საშუალოს შეფასებასთან. მეორე სტრიქონის თავისუფლების ხარისხი $N-k$ ეფუძნება N დაკვირვებას მინუს k დამაკავშირებელი თანაფარდობა k ჯგუფის საშუალოს შეფასებებთან.

პირველი სტრიქონის თავისუფლების ხარისხი $k-1$ ეფუძნება k ჯგუფის საშუალოს მინუს ერთი დამაკავშირებელი თანაფარდობა სრულ საშუალოსთან.

ცხრილი 11.2

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	SSR	$k-1$	$MSR = \frac{SSR}{k-1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
ჯგუფთა შიგნით	SSE	$N-k$	$MSE = \frac{SSE}{N-k}$	
სულ	SST	$N-1$		

მაგალითი 11.1. ტყის ოთხ უბანზე შეაგროვეს სოკო. ცხრილში მოცემულია თითოეულ უბანზე 5 სხვადასხვა ადგილას ნაპოვნი სოკოს რაოდენობა:

უბანი	რაოდენობა					საშუალო
1	8	7	6	4	5	$\bar{X}_1 = 6$
2	14	14	12	7	8	$\bar{X}_2 = 11$
3	6	9	7	8	5	$\bar{X}_3 = 7$
4	4	7	4	3	2	$\bar{X}_4 = 4$
$k = 4, n = 5, N = nk = 20$						

შევამოწმოთ $H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ ჰიპოთეზა, H_A : ყველა μ_A არ არის ერთმანეთის ტოლი ალტერნატივის წინააღმდეგ.

გამოვთვალოთ საერთო საშუალო და ცვალებადობის მახასიათებლები. გვაქვს:

$$\bar{X} = \frac{6+11+7+4}{4} = 7;$$

$$SSR = n[(\bar{X}_1 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_2 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_3 - \bar{X})^2 + (\bar{X}_4 - \bar{X})^2] =$$

$$= 5[(6-7)^2 + (11-7)^2 + (7-7)^2 + (4-7)^2] = 5(1+16+0+9) = 130$$

$$SSE = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (X_{ij} - X_i)^2 = (8-6)^2 + (7-6)^2 + (6-6)^2 + (4-6)^2 + (5-6)^2 +$$

$$+ (14-11)^2 + (14-11)^2 + (12-11)^2 + (7-11)^2 + (8-11)^2 +$$

$$+ (6-7)^2 + (9-7)^2 + (7-7)^2 + (8-7)^2 + (5-7)^2 +$$

$$+ (4-4)^2 + (7-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (2-4)^2 = 78,$$

$$k-1 = 4-1 = 3, \quad N-k = 20-4 = 16.$$

შევავსოთ ANOVA ცხრილი.

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	130	3	43.33	8.888
ჯგუფთა შიგნით	78	16	4.875	
სულ	208	19		

ტესტი ცალმხრივია. ვიპოვოთ კრიტიკული მნიშვნელობა F განაწილების ცხრილიდან. $F_{crit} = F_{3,16,0.05} = 3.2389$. ტესტის სტატისტიკის 8.888 მნიშვნელობა მეტია 3.2389 კრიტიკულ მნიშვნე-

ლობაზე, ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყოფილიყოს. დასკვნა: სხვადასხვა უბნებზე შეგროვილი სოკოს საშუალო რაოდენობები განსხვავებულია ერთმანეთისაგან.

ტესტი არ განსაზღვრავს კონკრეტულად რომელი საშუალოები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. როცა გვაქვს ოთხი შერჩევის საშუალო, შეგვიძლია გავაკეთოთ ექვსი შედარება ორ საშუალოს შორის:

\bar{X}_1 შევადაროთ \bar{X}_2 -ს;

\bar{X}_1 შევადაროთ \bar{X}_3 -ს;

\bar{X}_1 შევადაროთ \bar{X}_4 -ს;

\bar{X}_2 შევადაროთ \bar{X}_3 -ს;

\bar{X}_2 შევადაროთ \bar{X}_4 -ს;

\bar{X}_3 შევადაროთ \bar{X}_4 -ს.

შედარებები უნდა მოვახდინოთ მხოლოდ მაშინ, თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა უარყოფილია. შედარების მრავალი კრიტერიუმი არსებობს, ჩვენ გამოვიყენებთ ტუკის კრიტერიუმს, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$CD = q \sqrt{\frac{MSE}{n}}.$$

ტუკის კრიტერიუმი ინარჩუნებს პირველი გვარის შეცდომის დაშვების ალბათობას α -ს ტოლად ყველა წყვილთაშორის შედარებაში.

თუ ორ საშუალოს შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია ან ტოლია ტუკის კრიტერიუმის მნიშვნელობაზე, მაშინ პოპულაციების საშუალოები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

q მნიშვნელობა დამოკიდებულია არჩეულ მნიშვნელოვნების დონეზე, ჯგუფების (შესადარებელი საშუალოების) k რაოდენობაზე და $N - k$ თავისუფლების ხარისხზე. მისი მნიშვნელობა უნდა მოვძებნოთ სტიუდენტის რანგობრივი სტატიტიკის q -ს მნიშვნელობების ცხრილიდან. ჩვენს მაგალითში: $\alpha = 0.05$, $k = 4$ და $N - k = 16$. ამიტომ ცხრილიდან დავინახავთ, რომ $q = 4.05$. გარდა ამისა, $n = 5$ და $MSE = 4.875$. შესაბამისად,

$$CD = q \sqrt{\frac{MSE}{n}} = 4.05 \cdot \sqrt{\frac{4.875}{5}} = 3.999.$$

განსხვავებულია იმ პოპულაციების საშუალოები, რომელთა შერჩევით საშუალოს შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია ან ტოლია 3.999-ზე. ჩვენს მაგალითში გვაქვს:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 = |6 - 11| = 5 > 3.999 \rightarrow \mu_1 \neq \mu_2.$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_3 = |6 - 7| = 1 < 3.999.$$

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_4 = |6 - 4| = 2 < 3.999.$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_3 = |11 - 7| = 4 > 3.999 \rightarrow \mu_2 \neq \mu_3.$$

$$\bar{X}_2 - \bar{X}_4 = |11 - 4| = 7 > 3.999 \rightarrow \mu_2 \neq \mu_4.$$

$$\bar{X}_3 - \bar{X}_4 = |7 - 4| = 3 < 3.999.$$

დასკვნა: მეორე უბანზე სოკოს საშუალო რაოდენობა მნიშვნელოვნად განსხვავდება ყველა დანარჩენ სამ უბანზე სოკოს საშუალო რაოდენობისგან.

განხილულ სტატისტიკურ მეთოდს ეწოდება ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი (ანალიზი ერთი ფაქტორის სტატისტიკის). ის გამოიყენება სამი ან მეტი პოპულაციის საშუალოების შესადარებლად, შერჩევები აღებულია ერთმანეთისაგან დამოუკიდებლად. ამ მაგალითში ფაქტორი არის უბანი და ამ ფაქტორს აქვს 4 დონე.

ცდის პირთა შიდა ორფაქტორიანი სქემა და დისპერსიული ანალიზი

მაგალითი 11.2. შევამოწმოთ ჰიპოთეზა, რომ არ არსებობს განსხვავება სახლების შეფასებაში, რომელიც წარდგენილია სამი განსხვავებული შემფასებელი ექსპერტის მიერ. აფასებენ სახლის მახასიათებლებს: ზომა, ხარისხი, სახლის განლაგება და ა. შ. ასეთ მახასიათებლებს ხშირად ბლოკებს უწოდებენ. ცხრილში მოყვანილია სახლის სამი ექსპერტის შეფასება 5 მახასიათებლის მიხედვით:

	შემფასებელი			
მახასიათებელი	1	2	3	\bar{X}_j
1	78.0	82.0	79.0	79.67
2	102.0	102.0	99.0	101.00
3	68.0	74.0	70.0	70.67
4	83.0	88.0	86.0	85.67
5	95.0	99.0	92.0	95.33
\bar{X}_i	85.2	89.0	85.2	

გამოვთვალოთ საერთო საშუალო :

$$\bar{\bar{X}} = \frac{85.2 + 89.0 + 85.2}{3} = \frac{79.67 + 101.0 + 70.67 + 85.67 + 95.33}{5} = 86.47 .$$

ჩვენ უნდა გამოვიყენოთ **ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი** იმისათვის, რომ შევამოწმოთ ჰიპოთეზა, არსებობს თუ არა განსხვავება სამი ექსპერტის შეფასებაში.

შესამოწმებელი გვაქვს:

ძირითადი ჰიპოთეზა: $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$,

ალტერნატიული ჰიპოთეზა: H_A : ყველა საშუალო ერთმანეთის ტოლი არ არის.

ისევე როგორც ერთფაქტორიან ანალიზში, შემოვიღოთ მონაცემთა დისპერსიის შეფასებები:

$$SST = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^r (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2 ,$$

სადაც k სვეტების (ექსპერტების) რაოდენობა, r სტრიქონების, ბლოკების (სახლის მახასიათებლების) რაოდენობა, X_{ij} ინდივიდუალური შეფასება (1000 დოლარი), $\bar{\bar{X}}$ სრული (საერთო) საშუალო (86.47). გვაქვს:

$$SST = (78.0 - 86.47)^2 + (102.0 - 86.47)^2 + \dots + (92.0 - 86.47)^2 = 1829.73 .$$

ერთფაქტორიან ANOVA-ში სრულდება ტოლობა:

$$SST = SSR + SSE$$

ორფაქტორიანი ANOVA -ს შემთხვევაში მონაცემთა სრული ცვალებადობა იყოფა სამ ნაწილად ორის ნაცვლად:

$$SST = SSR + SSE + SSB ,$$

სადაც SST არის X_{ij} მონაცემების მათი საერთო საშუალო მნიშვნელობიდან გადახრების კვადრატების სრული ჯამური სიდიდე, SSR — გადახრების კვადრატების ჯამი ჯგუფებს შორის (ექსპერტებს შორის), SSB — გადახრების კვადრატების ჯამი ბლოკებს შორის (მახასიათებლებს შორის), SSE — გადახრების კვადრატების ჯამი ჯგუფებს შიგნით.

ჩვენს მაგალითში

$$SSR = \sum_{i=1}^k r (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2 ,$$

სადაც \bar{X}_i თითოეული ჯგუფის საშუალოა, r — სტრიქონების, ბლოკების რაოდენობა — $r = 5$, k — ჯგუფების (ექსპერტების) რაოდენობა — $k = 3$:

$$SSR = 5(85.2 - 86.47)^2 + 5(89.0 - 86.47)^2 + 5(85.2 - 86.47)^2 = 48.13 ,$$

$$SSB = \sum k (\bar{X}_j - \bar{\bar{X}})^2 = 3(79.67 - 86.47)^2 + \dots + 3(95.33 - 86.47)^2 = 1758.42 ,$$

$$SSE = SST - SSR - SSB = 1829.73 - 48.13 - 1758.42 = 23.18 .$$

გამოსათვლელი გვაქვს ორი F სიდიდე, რადგანაც შესამოწმებელი გვაქვს ბლოკებთან დაკავშირებული მეორადი ჰიპოთეზა: ახდენს თუ არა შეფასებაზე გავლენას ის, თუ რა მახასიათებლით შევაფასებთ სახლს.

მეორადი ჰიპოთეზა:

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5$,

H_A : ყველა ბლოკის საშუალო არ არის ერთმანეთის ტოლი.

ჩვენ ვამოწმებთ ტოლია თუ არა საშუალო შეფასება მახასიათებლების მიხედვით. თუ H_0 ჰიპოთეზა უარყოფილია, ეს ნიშნავს იმას, რომ ბლოკირება გამართლებულია. შევავსოთ ANOVA ცხრილი.

ჯგუფთა შორის	SSR	$k - 1$	$\frac{SSR}{k - 1}$	$F = \frac{MSR}{MSE}$
ბლოკებს შორის	SSB	$r - 1$	$\frac{SSB}{r - 1}$	$F = \frac{MSB}{MSE}$
ჯგუფთა შიგნით	SSE	$(k - 1)(r - 1)$		
სულ	SST	$N - 1$		

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	48.13	2	$\frac{48.13}{2} = 24.065$	8.3
ბლოკებს შორის	1758.42	4	$\frac{1758.42}{4} = 439.605$	151.7
ჯგუფთა შიგნით	23.18	8	$\frac{23.18}{8} = 2.898$	
სულ	1829.73	14		

მნიშვნა: $SSE = SST - (SSR + SSB)$.

F -ის კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 0.05$ და თავისუფლების ხარისხებია 4 და 8 არის 3.84. ვინაიდან $8.31 > 3.84$ -ზე, ამიტომ მეორად ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ: მახასიათებლის არჩევა გავლენას ახდენს შეფასებაზე.

რადგანაც F -ის კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 0.05$ და თავისუფლების ხარისხებია 2 და 8 არის 4.46 და $8.31 > 4.46$, ამიტომ ძირითადი ჰიპოთეზაც უარყოფილი იქნება: სამი ექსპერტი განსხვავებულად აფასებს სახლს.

რადგან ნულოვანი ჰიპოთეზა უარყოფილია, უნდა გავიგოთ კონკრეტულად რომელი საშუალოები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. ამისათვის გამოვთვალოთ საშუალოების სხვაობების აბსოლუტური მნიშვნელობები და შევადაროთ CD კრიტიკულ სხვაობას, რომელიც გამოითვლება ფორმულით

$$CD = t_{crit} \cdot \sqrt{MSE} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}},$$

სადაც $n = 5$ ჯგუფში მონაცემთა რაოდენობაა, $t_{crit} = t_{(k-1)(r-1), \alpha/2} = t_{8, 0.025} = 2.306$, $MSE = 2.898$. გვაქვს:

$$CD = t_{8, \alpha/2} \cdot \sqrt{MSE} \cdot \sqrt{\frac{2}{n}} = 2.306 \cdot \sqrt{2.898} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}} = 2.483.$$

თუ ორ საშუალოს შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობა მეტია ან ტოლია CD კრიტიკულ სხვაობაზე, მაშინ პოპულაციების საშუალოები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან. გვაქვს:

სხვაობა	გადაწყვეტილება
$ 85.2 - 89.0 = 3.8 > 2.483$	$\mu_1 \neq \mu_2$
$ 85.2 - 85.2 = 0.0 < 2.483$	$\mu_1 = \mu_2$
$ 89.0 - 85.2 = 3.8 > 2.483$	$\mu_2 \neq \mu_3$

მეორე ექსპერტი განსხვავებულად აფასებს.

ცდის პირთა შორის ორფაქტორიანი სქემა და დისპერსიული ანალიზი

მაგალითი 11.3. ფსიქოლოგები სწავლობენ მუსიკის გავლენას ადამიანის მიერ სხვადასხვა ამოცანის შესრულებაზე. 4 სტუდენტ გოგონას და 6 სტუდენტ ვაჟს სთხოვეს გაეკეთებინათ მოკლე სტატიის კორექტურა (სტატიაში იყო 25 შეცდომა). ერთი ჯგუფი ასრულებდა სამუშაოს მუსიკის თანხლების გარეშე, მეორე კი პოპულარული მელოდის თანხლებით. აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობა მოყვანილია ცხრილში:

აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობა			
ფაქტორი A			
		მუსიკის გარეშე A_1	მუსიკის თანხლებით A_2
		4	16
		5	14
მამრობითი B_1		7	17
		6	19
		10	16
		4	20
$\bar{X}_{A_1B_1} = 6, \bar{X}_{A_2B_1} = 17, \bar{X}_{B_1} = 11.5$			
მდედრობითი B_2		18	7
		13	6
		16	10
		16	5
$\bar{X}_{A_1B_2} = 15, \bar{X}_{A_2B_2} = 7, \bar{X}_{B_2} = 11$			
$\bar{X}_{A_1} = 10.5, \bar{X}_{A_2} = 12, \bar{X} = 11.25$			

ფაქტორი A — მუსიკის ტიპი, ფაქტორი B — სქესი. A ფაქტორს აქვს ორი დონე, B ფაქტორსაც აქვს ორი დონე.

$\bar{X}_{A_1B_1}$ — ვაჟების მიერ აღმოჩენილი შეცდომების საშუალო რაოდენობა მუსიკის გარეშე ტოლია 6-ის (უჯრედის საშუალო);

$\bar{X}_{A_1B_2}$ — გოგონების მიერ აღმოჩენილი შეცდომების საშუალო რაოდენობა მუსიკის გარეშე ტოლია 15-ის (უჯრედის საშუალო);

\bar{X}_{A_1} — შეცდომების საშუალო რაოდენობა აღმოჩენილი მუსიკის გარეშე ტოლია 10.5-ის (სვეტის საშუალო);

$\bar{X}_{A_2B_1}$ — ვაჟების მიერ აღმოჩენილი შეცდომების საშუალო რაოდენობა მუსიკის თანხლებით არის 17 (უჯრედის საშუალო);

$\bar{X}_{A_2B_2}$ — გოგონების მიერ აღმოჩენილი შეცდომების საშუალო რაოდენობა მუსიკის თანხლებით არის 7 (უჯრედის საშუალო);

\bar{X}_{A_2} — შეცდომების საშუალო რაოდენობა აღმოჩენილი მუსიკის თანხლებით არის 12 (სვეტის საშუალო);

\bar{X}_{B_1} — შეცდომების საშუალო რაოდენობა აღმოჩენილი ვაჟების მიერ არის 11.5 (სტრიქონის საშუალო);

\bar{X}_{B_2} — შეცდომების საშუალო რაოდენობა აღმოჩენილი გოგონების მიერ არის 11 (სტრიქონის საშუალო);

$$\bar{X} = \frac{\bar{X}_{A_1} + \bar{X}_{A_2}}{2} = \frac{\bar{X}_{B_1} + \bar{X}_{B_2}}{2} (\text{სრული საშუალო}) = 11.25.$$

შესამოწმებელია სამი ჰიპოთეზა:

1. მუსიკა არ მოქმედებს აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობაზე — $H_0: \mu_{A_1} = \mu_{A_2}$,

$H_A: \mu_{A_1} \neq \mu_{A_2}$;

2. სქესზე არ არის დამოკიდებული აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობა —

$H_0: \mu_{B_1} = \mu_{B_2}$, $H_A: \mu_{B_1} \neq \mu_{B_2}$;

3. სქესი და მუსიკის ტიპი ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია.

ამ სამი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად საჭიროა ორფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზის გამოყენება.

მონაცემთა სრული ცვალებადობა დაეყოთ ოთხ ნაწილად

$$SST = SSA + SSB + SSA \cdot B + SSE,$$

სადაც SST სრული ცვალებადობაა, N მონაცემთა სრული რაოდენობაა, n მონაცემთა რაოდენობაა ჯგუფში, a არის A ფაქტორის დონეების რაოდენობა, b არის B ფაქტორის დონეების რაოდენობა, SSA არის ცვალებადობა A ფაქტორის გამო (მუსიკის ტიპი), SSB არის ცვალებადობა B ფაქტორის გამო (სქესი), $SSA \cdot B$ არის ცვალებადობა გამოწვეული A და B ფაქტორის ურთიერთქმედებით, SSE არის ცვალებადობა ჯგუფის შიგნით,

$$SSA = N(\bar{X}_{A_1} - \bar{X})^2 = 24(10.5 - 11.25)^2 = 13.5;$$

$$SSB = N(\bar{X}_{B_1} - \bar{X})^2 = 24(11.5 - 11.25)^2 = 1.5;$$

$$SSA \cdot B = N(\bar{X}_{A_1 B_1} - \bar{X}_{A_1} - \bar{X}_{B_1} + \bar{X})^2 = 24(6 - 10.5 - 11.5 + 11.25)^2 = 541.5;$$

$$SSE = (4 - 6)^2 + (5 - 6)^2 + \dots + (10 - 7)^2 + (5 - 7)^2 = 96.0.$$

თავისუფლების ხარისხებია:

$$df A = a - 1, \quad df B = b - 1,$$

$$df A \cdot B = (a - 1)(b - 1),$$

ჯგუფთა შიგნით $df = ab(n - 1)$, ამასთანავე

$$a - 1 + b - 1 + (a - 1)(b - 1) + ab(n - 1) = abn - 1 = N - 1.$$

შევავსოთ ორფაქტორიანი ANOVA ცხრილი:

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
მუსიკა	13.5	1	13.5	2.81
სქესი	1.5	1	1.5	0.31
ურთიერთქმედება	541.5	1	541.5	112.81
ჯგუფთა შიგნით	96.0	20	4.8	
სულ	652.5	23		

$$F_A = \frac{MSA}{MSE}, \quad F_B = \frac{MSB}{MSE}, \quad F_{AB} = \frac{MSA \cdot B}{MSE},$$

$$F_{crit} = F_{1,20,0.05} = 4.35.$$

გადაწყვეტილებები:

1. მუსიკის ტიპი (ფაქტორი A) არ ახდენს გავლენას ($2.81 < 4.35$);

2. სქესი (ფაქტორი B) არ ახდენს გავლენას ($0.31 < 4.35$);

3. მუსიკის ტიპი და სქესი ურთიერთქმედებაშია ($112.81 > 4.35$).

ამიტომ უნდა გავარკვიოთ რომელი უჯრედის საშუალოები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან, ამისათვის გამოვთვალოთ ტუკის კრიტერიუმის მნიშვნელობა

$$CD = q \sqrt{\frac{MSE}{n}}.$$

სტიუდენტის რანგობრივი სტატისტიკის q -ს მნიშვნელობების ცხრილიდან იმის გათვალისწინებით რომ საქმე გვაქვს ორ ფაქტორიან სქემასთან: $2 \cdot 2$, $a = 2$, $b = 2$, ვპოულობთ, რომ $q = 3.58$. ამიტომ

$$CD = 3.58 \cdot \sqrt{\frac{4.8}{6}} = 3.2.$$

გამოვთვალოთ შერჩევით საშუალოს შორის სხვაობის აბსოლუტური მნიშვნელობები:

$$|6-17|=11, |15-7|=8, |6-15|=9, |17-7|=10.$$

1. აღმოჩენილი შეცდომების საშუალო რაოდენობა მუსიკის გარეშე და მუსიკის თანხლებით მნიშვნელოვნად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან.

2. შეცდომების საშუალო რაოდენობა, აღმოჩენილი ვაჟების მიერ მნიშვნელოვნად არ განსხვავდება შეცდომების საშუალო რაოდენობისაგან, აღმოჩენილი ქალების მიერ.

3. მნიშვნელოვანია ურთიერთქმედება: მუსიკის ტიპის ეფექტი დამოკიდებულია სქესზე. ვაჟები, მუსიკის მოსმენის დროს უფრო ბევრ შეცდომას ამჩნევენ, გოგონები კი, უფრო ბევრ შეცდომას პოულობენ, როცა არ უსმენენ მუსიკას. განსხვავება ქალებსა და ვაჟებს შორის დამოკიდებულია მუსიკის ტიპზე: ქალები საშუალოდ უფრო ბევრ შეცდომას ამჩნევენ როცა არ უსმენენ მუსიკას, ვაჟები კი როცა უსმენენ.

ურთიერთქმედების ანალიზი გვიჩვენებს, რომ მუსიკა გავლენას ახდენს აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობაზე, მაგრამ ეფექტის მიმართულება დამოკიდებულია სქესზე. უფრო მეტიც, ქალები და მამაკაცები განსხვავდებიან აღმოჩენილი შეცდომების მხრივ, მაგრამ განსხვავება დამოკიდებულია მუსიკის ტიპზე.

შეჯამება

ორი საშუალოს შესადარებლად იყენებენ t -კრიტერიუმს. თუ შესადარებელია ორზე მეტი საშუალო, გამოიყენება სტატისტიკური მეთოდი ცნობილი, როგორც დისპერსიული ანალიზი.

თუ ყველა შერჩევა აღებულია ნორმალური პოპულაციიდან და პოპულაციების დისპერსიები ტოლია, ნულოვანი ჰიპოთეზის შესამოწმებლად, რომლის თანახმად ყველა შერჩევა აღებულია ერთი

და იგივე პოპულაციიდან ალტერნატივის წინააღმდეგ, იყენებენ $F = \frac{MSR}{MSE}$ სტატისტიკას. ამ სტატისტიკას აქვს F -განაწილება $k-1$ და $N-k$ თავისუფლების ხარისხებით.

თუ დასტურდება, რომ საშუალოები ერთმანეთის ტოლი არ არის, საჭიროა მრავალჯერადი შედარების კრიტერიუმის გამოყენება, იმის დასადგენად, თუ რომელი საშუალოები განსხვავდებიან მნიშვნელოვნად ერთმანეთისაგან.

არსებობს სიტუაციები, სადაც ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი არ არის საკმარისი. მაგალითად, როცა გვინდა შევაფასოთ სხვადასხვა ტიპის აკუმულატორის მუშაობის ვადა. ჩვენ უნდა მოვათავსოთ სხვადასხვა ტიპის აკუმულატორი მანქანაში და გავიმეოროთ ეს ცდა სხვადასხვა ტიპის მანქანებისთვის. უნდა ვაკონტროლოთ მანქანების ცვალებადობა, იმისათვის, რომ შევამოწმოთ აკუმულატორების მუშაობის ვადები. ასეთი ტიპის ამოცანებისათვის იყენებენ ცდის პირთა შიდა ერთფაქტორიან სქემას.

ცდის პირთა შორის ორფაქტორიან სქემის გამოყენება საჭიროა მაშინ, როცა ცდის შედეგები მიიღება ორი ფაქტორის ზემოქმედებით მაგალითად, როცა გვინტერესებს განსხვავდება თუ არა ქალებისა და მამაკაცების (პირველი ფაქტორი) რეაქცია ორ განსხვავებულ სტიმულზე (მეორე ფაქტორი).

კითხვები

1. მოქმედებს თუ არა სმენის პრობლემები სტუდენტების შეფასებაზე. ქვემოთ მოცემულია სტუდენტების მიერ ნაკარნახევ ლიტერატურულ ტესტში მიღებული ქულები.

სმენა		
ნორმალური	საშუალო	ცუდი
31	23	12
29	27	18
32	26	17
38	24	13
36	20	15
14	20	15

ა) რას უდრის n , k , N .

ბ) შეამოწმეთ $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ ჰიპოთეზა „სმენის პრობლემები გავლენას ახდენენ მიღებულ ქულებზე“ ალტერნატივის წინააღმდეგ. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

გ) რას უდრის საშუალო ქულის საუკეთესო შეფასება სტუდენტებისთვის ცუდი სმენით. რას უდრის საშუალო ქულის საუკეთესო შეფასება, როცა არ ვიცით რომელ ჯგუფს ეკუთვნის სტუდენტი.

2. შემთხვევით შერჩეული იყო ხუთ-ხუთი სტუდენტი საცხოვრებელი ადგილის მიხედვით, ქვემოთ მოცემულია მათ მიერ მიღებული ქულები.

სოფელი	დაბა	ქალაქი	დედაქალაქი
4	30	5	25
16	10	40	35
27	6	37	40
33	24	23	7
15	25	10	23

ა) შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, მოქმედებს თუ არა საცხოვრებელი ადგილი მომზადების დონეზე. $\alpha = 0.05$.

ბ) რა ტიპის შეცდომა შეიძლება იყოს დაშვებული?

გ) რას უდრის სტუდენტის საშუალო ქულის შეფასება?

3. ერთი და იგივე დონის 15 სტუდენტი შემთხვევით გადაანაწილეს ინგლისურის სწავლების სამ ჯგუფში. ერთი და იგივე ტესტში საკონტროლოში მიღებული ქულებია:

სწავლების მეთოდი			
	1	2	3
ქულები	19	14	15
	13	13	10
	16	16	11
	17	12	12
	20	10	12

ახდენს თუ არა სწავლების მეთოდი გავლენას ტესტში მიღებულ ქულებზე? $\alpha = 0.05$.

4. ავსტრალიის ბაყაყები 30 წელს ცოცხლობენ და მთელი სიცოცხლის განმავლობაში აგრძელებენ ზრდას. 1984 წელს 100 ბაყაყი გადაყვანილი იყო ორ განსხვავებულ ახალ საცხოვრებელ ადგილას. 1996 წელს სამივე საცხოვრებელ ადგილზე დაჭერილი და აწონილი იყო სამ-სამი ბაყაყი. შეამოწმეთ, იქონია თუ არა გავლენა ახალმა ადგილმა მათ წონაზე. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

საცხოვრებელი ადგილი	წონა		
ძირითადი	1.67	0.43	2.72
ახალი 1	2.93	0.80	4.18
ახალი 2	2.55	3.80	3.60

5. სამ ახლომდებარე ტბაში დაჭერილი და აწონილი იყო ხუთ-ხუთი ერთიდაიგივე ჯიშის თევზი. განსხვავებულია თუ არა თევზის საშუალო წონები, $\alpha = 0.01$.

პირველი ტბა	285	315	260	290	420
მეორე ტბა	305	340	310	320	270
მესამე ტბა	500	380	480	350	400

ა) ჩამოაყალიბეთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები და შეავსეთ ANOVA ცხრილი.

- ბ) რას უდრის ამ ჯიშის თევზის საშუალო წონის ნერტილოვანი შეფასება?
 გ) რას უდრის მესამე ტბის თევზის საშუალო წონის ნერტილოვანი შეფასება?
6. ტყის სამ უბანზე გაზომილი იყო ხავსის სისქე (სმ²). *A* და *B* უბანი იყო ქარისგან დაუცველი, *D* და *C* ქარისგან დაცული, *D* უბანი უფრო მშრალია ვიდრე *C* უბანი. ჩამოაყალიბეთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები და შეავსეთ ANOVA ცხრილი.
7. შეავსეთ გამოტოვებული ადგილები ANOVA ცხრილებში და უპასუხეთ კითხვებს.

ცხრილი 1

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	50	1	-	-
ჯგუფთა შიგნით	270	26	-	-
სულ				

ცხრილი 2

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	-	3	6	-
ჯგუფთა შიგნით	-	60	-	-
სულ	170			

- ა) რამდენი რესპონდენტი მონაწილეობდა თითოეულ კვლევაში?
 ბ) თუ $\alpha = 0.05$, იპოვეთ *F*-ის კრიტიკული მნიშვნელობები.
 გ) რა გადაწყვეტილებას მიიღებთ თითოეული ცხრილის მიხედვით?
8. ინკუბატორში მოთავსებული იყო კვერცხები სხვადასხვა ტემპერატურულ რეჟიმში. ქვემოთ მოყვანილია გამოჩეკილი წინილების წონები:

18° C	82	82	81	82	73
21° C	91	84	90	85	85
22° C	81	83	81	84	81

- ა) ჩამოაყალიბეთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები და შეავსეთ ANOVA ცხრილი.
 ბ) მოქმედებს თუ არა ტემპერატურული რეჟიმი წინილების წონაზე? ისარგებლეთ $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით.
9. შემჩნეული იყო რომ ავსტრალიაში მსჯავრდებულის მიღებული სასჯელი ძარცვისთვის (20-25 წლის მამაკაცები) ეროვნებაზეა დამოკიდებული. შეამოწმეთ ამ ინფორმაციის სისწორე.

	სასჯელი (თვე):					
ევროპელები	12	18	12	12	12	36
წყნარი ოკეანე	18	24	16	24	22	30
მაიორი	24	24	36	24	36	44
სხვები	18	12	16	18	12	12

10. მოქმედებს თუ არა მდინარის ნაპირზე მომუშავე ტყის დასამუშავებელი საწარმოები მდინარის ტემპერატურაზე? ცხრილში წარმოდგენილია წყლის 5 სინჯის ტემპერატურა მდინარის სხვადასხვა ადგილას:

	ტემპერატურა					\bar{X}
5 კმ ობიექტიდან მაღლა	7	7	15	11	9	9.8
ობიექტთან	19	25	22	19	23	21.6
5 კმ ობიექტიდან დაბლა	14	18	18	19	19	17.6
10 კმ ობიექტიდან დაბლა	12	17	12	18	18	15.4
25 კმ ობიექტიდან დაბლა	11	7	10	11	15	10.8

11. გამოკვლეული იყო ძილის თავისებურებები 8, 10 და 12 წლის ბავშვებში. ცხრილში მოყვანილია ძილის ხანგრძლივობა (წთ) დაძინებიდან გაღვიძებამდე:

ასაკი		
8	10	12
580	497	525
525	515	506
562	543	475
590	478	493
575	567	537
603	532	532
594	517	480
536	534	472
612	556	463
592	574	515

- ა) ჩამოაყალიბეთ სტატისტიკური ჰიპოთეზები.
 ბ) რისი ტოლია F -ის მნიშვნელობა 0.05 დონეზე?
 გ) რა გადაწყვეტილებას მიიღებთ სტატისტიკური ჰიპოთეზების შესახებ?
 დ) საჭიროა თუ არა მრავალჯერადი კრიტერიუმის გამოყენება?
 ე) რისი ტოლია ტუკის χ მნიშვნელობა?
 ვ) რომელ წყვილთა შორის განსხვავება არის მნიშვნელოვანი?

12. ფსიქოლოგები სწავლობენ მუსიკის გავლენას ადამიანის მიერ სხვადასხვა ამოცანის შესრულებაზე. 24 ადამიანს სთხოვეს წაეკითხათ მოკლე სტატიის კორექტურა. პირველი ჯგუფის წევრები ამ ამოცანას მუსიკის თანხლების გარეშე ასრულებდნენ, მეორე ჯგუფის წევრები უსმენდნენ პოპულარულ მელოდიას, მესამე ჯგუფის წევრები ასრულებდნენ ამოცანას მძიმე როკის თანხლებით. აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობა 50 შესაძლებელიდან ქვემოთაა მოყვანილი:

მუსიკის გარეშე	პოპულარული მელოდია	მძიმე როკი
40	34	26
41	39	24
39	38	19
36	40	23
35	34	18
32	35	21
31	29	23
34	36	29

- ა) ახდენს თუ არა მუსიკა გავლენას აღმოჩენილი შეცდომების რაოდენობაზე, ისარგებლეთ $\alpha = 0.05$.

ბ) თუ საჭიროა გამოიყენეთ ტუკის კრიტერიუმი.

13. 340 დემოკრატი, 313 დამოუკიდებელი, 290 რესპუბლიკელი გამოკითხეს მათი პოლიტიკური იდეოლოგიის შესახებ. პოლიტიკური იდეოლოგიის სკალა შედგებოდა 7 კატეგორიიდან: 1 — ექსტრემალური ლიბერალი, 2 — ლიბერალი, 3 — ოდნავ ლიბერალი, 4 — ზომიერი, 5 — ოდნავ კონსერვატორი, 6 — კონსერვატორი, 7 — ექსტრემალური კონსერვატორი. გამოკითხვის შედეგები მოყვანილია ცხრილში.

ცხრილი 3. პოლიტიკური იდეოლოგია განპირობებული პარტიული იდენტიფიკაციით

პოლიტიკური იდეოლოგია	მოცულობა							\bar{x}	S^2	პარტიული
დემოკრატი	11	50	60	139	35	39	6	340	3.82	1.74
დამოუკიდებელი	8	33	47	142	37	40	6	313	3.99	1.61
რესპუბლიკელი	2	19	30	99	65	61	14	290	4.53	1.64

დამუშავების შედეგები მოყვანილია ANOVA ცხრილში.

ANOVA ცხრილი

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	85.38	2	42.69	25.6
ჯგუფთა შიგნით	1570.84	940	1.67	
სულ	1656.22	942		

ა) ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზები.

ბ) თუ $\alpha = 0.05$, რა გადანყვეტილებას მიიღებთ.

გ) საჭიროა თუ არა ტუკის კრიტერიუმის გამოყენება?

დ) საშუალოთა რომელი წყვილები განსხვავდებიან მნიშვნელოვნად ერთმანეთისაგან?

ამონაწერი კომპიუტერული პროგრამიდან:

Dependent Variable: IDEOLOGY					
Source	DF	Sum of Squares	Mean Square	F Value	Pr > F
Between	2	85.382	42.691	25.55	0.0001
Within	940	1570.84	1.67		
Total	942	1656.22			

14. არსებობს ე. წ. საცხოვრებელი სეგრეგაციის ინდექსი. ეს ინდექსი იცვლება ნულიდან 100-მდე, სადაც უფრო დიდი რიცხვები ნიშნავს უფრო დიდ სეგრეგაციას (1990 წელს აშშ-ს ნაციონალური ინდექსი იყო 65). ცხრილში მოცემულია სეგრეგაციის ინდექსის მნიშვნელობები ქალაქების მიხედვით.

ჩრდილოეთი	ცენტრალური	სამხრეთი	დასავლეთი
ბუფალო 84	გარი 91	ნიუ ორლეანი 73	რიჩმონდი 38
ნევარკი 83	დეტროიტი 89	ორლანდო 64	დალასი 64
ფილადელფია 83	ჩიკაგო 87	მაიამი 75	ანაჰაიმი 43
პიტსბურგი 74	მილუოკი 85	ატლანტა 72	ჰიუსტონი 59

შესაბამისი ANOVA ცხრილი:

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
ჯგუფთა შორის	3107.0	3		
ჯგუფთა შიგნით	622.0	12		
სულ				

ა) დაასრულეთ ANOVA ცხრილი.

ბ) ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზები.

გ) თუ $\alpha = 0.05$, რა გადაწყვეტილებას მიიღებთ?

დ) რომელი საშუალოები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან მნიშვნელოვნად?

15. ცხრა პირველკურსელი სტუდენტი გადაანაწილეს იაპონური ენის სწავლების ჯგუფებში. პირველი ჯგუფის სტუდენტებს ჰქონდათ მაღალი ქულები უნარებში, მეორე ჯგუფის სტუდენტებს — საშუალო, მესამე ჯგუფის სტუდენტებს — დაბალი. პირველ “კვიზში” მიღებული ქულები (მაქსიმალური ქულა 10):

პირველი ჯგუფი	მეორე ჯგუფი	მესამე ჯგუფი
10	6	3
9	4	2
11	5	4

ა) ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზები.

ბ) რა გადაწყვეტილებას მიიღებთ? $\alpha = 0.05$.

გ) მოქმედებს თუ არა უნარებში მიღებული ქულა “კვიზის” ქულებზე?

16. თავისი ნაკეთობების რეკლამისათვის ფირმა უშვებდა სამ განსხვავებულ კატალოგს. გაყიდვების მენეჯერს დაავალეს გაერკვია რომელი ტიპის კატალოგი იზიდავს მეტ მყიდველს. მენეჯერს ესმოდა რომ განსხვავება კლიენტებს შორის დამალავდა სხვაობას კატალოგებს შორის ამიტომ მიმართა ცდის პირთა შიდა დისპერსიულ ანალიზს. შეარჩიეს 100 კლიენტი და ყოველ მათგანს გაუგზავნეს სამ-სამი კატალოგი. შესაბამისი შესყიდვები (დოლარი) მოყვანილია ქვემოთ:

კლიენტი	კატალოგი 1	კატალოგი 2	კატალოგი 3
1	44	27	90
2	67	36	80
3	50	20	112
4	80	40	230
5	36	18	60
6	50	30	80
7	110	140	209
8	80	40	140
9	20	12	40
10	30	12	58

ა) ჩამოაყალიბეთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზები.

ბ) ააგეთ ANOVA ცხრილი. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, აიღეთ $\alpha = 0.01$.

გ) გაარკვიეთ რომელი კატალოგი იზიდავს მეტ კლიენტს.

17. სამი ქარხანა უშვებს მანქანის საბურავებს. შეარჩიეს 20 მანქანა და დაამონტაჟეს თითოეული ქარხნის საბურავი. 12.000 მილის გავლის შემდეგ შეამოწმეს საბურავების პროფილი. მიღებული იყო შემდეგი მონაცემები: $SST = 200$, $SSR = 50$, $SSB = 70$.

ა) ჩამოაყალიბეთ ჰიპოთეზები.

ბ) ააგეთ ANOVA ცხრილი. შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, აიღეთ $\alpha = 0.05$.

გ) გაარკვიეთ არის თუ არა განსხვავება გამოშვებულ პროდუქციას შორის.

დ) დაასაბუთეთ რატომ მიმართეს ცდის პირთა შიდა ანალიზს ამ კვლევაში.

18. ექსტრავერტებს ახასიათებენ, როგორც ღია, სოციალურ და ხალისით აღსავსე ადამიანებს, ხოლო ინტროვერტებს — როგორც ჩაკეტილ და ნაკლებად სოციალურ ტიპებს. განსხვავებულად რეაგირებენ თუ არა ექსტრავერტები და ინტროვერტები ხმაურზე? ცდის პირები ასრულებდნენ დავალებას: ნაკითხულის შინაარსის გადმოცემას ხმადაბალი და ხმამაღალი ხმაურის ფონზე. ცდის პირების მიღებული ქულებია:

პიროვნების ტიპი (ფაქტორი A)		
	ინტროვერტული	ექსტრავერტული
	დონე A	დონე A

	10	15
	8	14
	12	12
	15	15
ხმადაბალი	10	11
B ფაქტორის B_1 დონე	9	8
	14	12
	13	8
	14	13
	7	10
	12	9
	11	11
ხმაურის ფონი (ფაქტორი B)	6	13
	8	8
	11	9
	4	14
	5	13
	8	12
ხმა მაღალი B_2 დონე	9	15
	10	11
	9	9
	10	11
	7	12
	11	10

რა დამოკიდებულება არსებობს პიროვნების ტიპისა და ხმაურის ფონის ეფექტს შორის? თუ ხდება ურთიერთქმედება. აღწერეთ ის.

19. დაასრულეთ ANOVA ცხრილები და უპასუხეთ კითხვებს.

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
დავალების ტიპი (ფაქტორი A)	-	3	5.0	-
ხმაურის დონე (ფაქტორი B)	16.0	-	-	-
$A \cdot B$	36.0	6	-	-
ჯგუფთა შიდა	-	60	2.0	
სულ		-	-	

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
--------------------	----	----	----	---

დავალების ტიპი (ფაქტორი A)	40.0	-	10.0	
ხმაურის დონე (ფაქტორი B)	-	3	40.0	
$A \cdot B$	960.0	-	80.0	
ჯგუფთა შიდა	3200.0	160		

ა) A ფაქტორის რამდენი დონე იყო ?

ბ) B ფაქტორის რამდენი დონე იყო ?

გ) სულ რამდენი ცდის პირი მონაწილეობდა ცდაში?

დ) თუ $\alpha = 0.05$, როგორ გადაწყვეტილებებს გააკეთებთ ნულოვანი ჰიპოთეზისათვის?

20. 1980 წლის ზამთრის ოლიმპიადის შემდეგ გაანალიზებული იყო ფიგურულ სრიალში მონაწილეთა შედეგები და მსაჯების გადაწყვეტილებები. კვლევის საგანი იყო რამდენად „პატრიოტული“ ან „ნეიტრალური“ იყვნენ მსაჯები თავისი თანამემამულე კონკურსანტების მიმართ.

ცვალებადობის წყარო	SS	df	MS	F
კონკურსანტი (A)	40.22	10	4.02	205.9
მსაჯი (B)	0.23	8	0.03	1.45
ურთიერთქმედება	1.58	80	0.02	
შიდა ცვალებადობა	5.80	297	0.02	
სულ	47.83	395		

ა) რამდენი იყო კონკურსანტი?

ბ) რამდენი იყო მსაჯი?

გ) არის თუ არა განსხვავება კონკურსანტებს შორის?

დ) არის თუ არა განსხვავება მსაჯებს შორის?

ე) თუ ურთიერთქმედება მნიშვნელოვანია, ნიშნავს თუ არა ეს „პატრიოტულ“ ან „ნეიტრალურ“ გადაწყვეტილებას თანამემამულის მიმართ?

თავი 12

არაპარამეტრული სტატისტიკური კრიტერიუმები

მე-8 თავიდან ამ თავამდე, პოპულაციის პარამეტრების შესახებ დასკვნების გასაკეთებლად, განიხილებოდა პარამეტრული სტატისტიკური კრიტერიუმები.

t -კრიტერიუმის და დისპერსიული ანალიზის პარამეტრული კრიტერიუმების გამოყენებისათვის დაშვებული იყო, რომ:

1. პოპულაციებში, რომლიდანაც აღებულია შერჩევა, მონაცემები ნორმალურადაა განაწილებული;
2. სხვადასხვა პოპულაციაში მონაცემების დისპერსიები ერთმანეთის ტოლია;
3. აზრი აქვს მიღებული მონაცემების საშუალოს გამოთვლას (პარამეტრულ კრიტერიუმს ვერ გამოიყენებთ, როცა მონაცემები სახელდების სკალაზეა).

არაპარამეტრული სტატისტიკური კრიტერიუმები ამოწმებენ ჰიპოთეზებს, რომლებიც არ ეხება პოპულაციის პარამეტრებს. მათ უფრო ნაკლები დაშვებები აქვთ პოპულაციის განაწილების შესახებ და ამიტომ მათ ზოგჯერ განაწილებისგან თავისუფალ კრიტერიუმებსაც უწოდებენ.

ხი-კვადრატ (χ^2) თანხმობის კრიტერიუმი

ვთქვათ, გვაქვს 100 სტუდენტის სია, ზოგი მათგანი პირველ კურსზე სწავლობს, ზოგი მეორე, მესამე ან მეოთხე კურსელია. შერჩევის მოცულობა $n=100$ და ჩვენ ვანალიზებთ მათ, კურსების მიხედვით, $k=4$ კატეგორიად.

ზოგადად, თუ n მონაცემი ნაწილდება k კატეგორიად, ამ k კატეგორიაში უნდა მოხვდეს ყველა შესაძლო მონაცემი. მაშინ თუ p_i -ით აღვნიშნავთ i -ურ კატეგორიაში მოხვედრილ მონაცემთა წილს, გვექნება $\sum p_i = 1$.

ჰიპოთეზები

შესაბამებელია $H_0: p_1 = \bar{p}_1, p_2 = \bar{p}_2, \dots, p_k = \bar{p}_k$ ჰიპოთეზა, სადაც $\sum \bar{p}_i = 1$. \bar{p}_i — პირველ კატეგორიაში მოხვედრის ალბათობა, \bar{p}_2 — მეორე კატეგორიაში მოხვედრის ალბათობა და ა. შ.

ალტერნატიული ჰიპოთეზაა H_A : ნულოვანი ჰიპოთეზის რომელიმე ერთი მაინც ტოლობა არ სრულდება.

ამ ჰიპოთეზის სპეციალური სახეა $H_0: p_i = \frac{1}{k}$ — ყველა კატეგორიაში მოხვედრის ალბათობა ერთი და იგივეა.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

გვაქვს n მონაცემი. აღვნიშნოთ o_i -ით i -ურ კატეგორიაში მოხვედრილ მონაცემთა რაოდენობა (სიხშირე). o_i — დაკვირვებული სიხშირეა (observed frequency). ცხადია, რადგან გვაქვს n მონაცემი, დაკვირვებულ სიხშირეთა ჯამი იქნება n ($\sum o_i = n$).

დაკვირვებულ სიხშირეებთან ერთად განიხილავენ ე. წ. მოსალოდნელ სიხშირეებს (expected frequency) — e_i , პირობაში, რომ სამართლიანია H_0 ჰიპოთეზა.

p_i არის პირველ კატეგორიაში მოხვედრის ალბათობა. პირველ კატეგორიაში მოხვედრილ ინდივიდთა რაოდენობა განაწილებულია ბინომურად არის განაწილებული პარამეტრებით n და p_1 (ნარმატების ალბათობა) და საშუალოთი $n \cdot p_1$. ამ სიდიდეს პირველი კატეგორიის შესაბამისი მოსალოდნელი სიხშირე ეწოდება (იგულისხმება, რომ სრულდება ნულოვანი ჰიპოთეზა).

i -ური კატეგორიის შესაბამისი მოსალოდნელი სიხშირეა $e_i = n \cdot p_i$, სადაც p_i არის i -ურ კატეგორიაში მოხვედრის ალბათობა

$$\sum p_i = 1, \quad \sum o_i = n.$$

თუ H_0 ჰიპოთეზა სამართლიანია, მოსალოდნელია, რომ დაკვირვებული სიხშირეები ახლოს იქნებიან მოსალოდნელ სიხშირეებთან. ამიტომ გამოსათვლელია $o_i - e_i$ სხვაობები და კრიტერიუმის სტატისტიკის სახეა:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}.$$

ამ სტატისტიკას აქვს χ^2 -კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $k-1$. ეს სტატისტიკა ყოველთვის არაუარყოფითია. როცა ყველა დაკვირვებული სიხშირე უდრის მოსალოდნელ სიხშირეებს სტატისტიკა ნულის ტოლია. თავისუფლების ხარისხი უდრის კატეგორიების რაოდენობას k მინუს ერთი (დაკავშირებული $\sum p_i = 1$ ტოლობასთან).

უარყოფის არეები

χ^2 -კვადრატ განაწილების კრიტიკული მნიშვნელობები $\chi^2_{k-1, \alpha}$ მოცემული α -თვის უნდა მოვძებნოთ χ^2 -კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილიდან. კრიტიკული არე მარჯვენა ცალმხრივია — $[\chi^2_{k-1, \alpha}, +\infty)$.

გადაწყვეტილება

თუ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე $\chi^2_{k-1, \alpha}$, მაშინ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყოფთ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ამის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

შ ე ნ ი შ ე ნ ა . სწორი გადაწყვეტილების მისაღებად საჭიროა მოსალოდნელი სიხშირეების სულ მცირე 80% იყოს 5-ზე მეტი. თუ მოსალოდნელი სიხშირეების 20% -ზე მეტი ნაკლებია 5-ზე, საჭიროა კატეგორიების გაერთიანება (იხ. მაგალითი 12.4).

მაგალითი 12.1. მოთამაშე ეჭვობს რომ მისი კამათელი არ არის „სწორი“. მან გააგორა კამათელი 120-ჯერ და მიიღო შემდეგი შედეგი:

ქულა	1	2	3	4	5	6
სიხშირე	23	18	24	19	25	11

შევამოწმოთ არის თუ არა კამათელი „ნესიერი“. სანდოობის დონე იყოს $\alpha = 0.05$.

ა მ ო ხ ს ნ ა . H_0 — ნულოვანი ჰიპოთეზა ნიშნავს, რომ $p_i = \frac{1}{n}$ ყველა i -თვის, ანუ კამათელის ყველა შედეგი არის ტოლშესაძლებელი. ალტერნატიული ჰიპოთეზის თანახმად ყველა p_i ერთმანეთის ტოლი არ არის. ყველა მოსალოდნელი სიხშირე არის

$$e_i = n \cdot p_i = 120 \cdot \frac{1}{6} = 20.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა იქნება

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i} = \frac{(23-20)^2}{20} + \frac{(18-20)^2}{20} + \dots + \frac{(11-20)^2}{20} = 6.8.$$

ამ სტატისტიკას აქვს χ^2 -კვადრატ განაწილება $k-1=6-1=5$ თავისუფლების ხარისხით. კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 0.05$, არის $\chi^2_{5, 0.05} = 11.0705$ და ჩვენ ვერ უარყოფთ ნულოვან ჰიპოთეზას.

თუ შევამჩნევთ, რომ კენტი ქულები უფრო ხშირად ჯდება ვიდრე ლუწები, და შევამოწმოთ ჰიპოთეზას პროპორციების ტოლობის შესახებ, მოთამაშის ეჭვები შეიძლება გამართლდეს. შეამოწმეთ!

χ^2 -კვადრატ თანხმობის კრიტერიუმი შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ამოცანების გადასაწყვეტად: არის თუ არა მონაცემები მიღებული ბინომური პოპულაციიდან $p = 0.5$ პარამეტრით? ან არის თუ არა პოპულაცია ნორმალურად განაწილებული? და სხვა.

დამოუკიდებლობის χ^2 -კვადრატ კრიტერიუმი

ორ სიდიდეს შორის კავშირის არსებობის დადგენა სხვადასხვაგვარად შეიძლება: თუ მონაცემები ინტერვალის სკალაზეა გაზომილი, წრფივი კავშირის დასადგენად, გამოვიყენებთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტს, თუ რიგის სკალაზეა — სპირმენის კორელაციის კოეფიციენტს. ორი, სახელდების სკალაზე გაზომილი სიდიდეების კავშირის დადგენა ხდება χ^2 -კვადრატ დამოუკიდებლობის კრიტერიუმით. მონაცემები, ამ შემთხვევაში, წარმოდგენილია ე. წ. *შეუღლების ცხრილის* სახით.

მაგალითი 12.2. დამოუკიდებელია თუ არა სახლის გაყიდვის ვადა სახლის ღირებულებაზე. შეგროვილი იყო შემდეგი მონაცემები, რომელიც წარმოდგენილია შეუღლების ცხრილის სახით (იხ. ცხრილი 12.1).

ცხრილი 12.1

გაყიდვის ფასი	რამდენ დღეში გაიყიდა სახლი		
	60 დღე ან ნაკლები	61 დღე ან მეტი	სულ
75 000 დოლარზე ნაკლები	18	12	30
75 000-დან 125 000-მდე	14	31	45
125 000 დოლარზე მეტი	4	11	15
სულ	36	54	90

H_0 : ალბათი ორი ცვლადი დამოუკიდებელია,

H_A : ალბათი ორი ცვლადი დამოკიდებულია.

რას ნიშნავს ამ ამოცანაში, რომ ცვლადები დამოკიდებულია? ეს ნიშნავს, რომ გაყიდვამდე უკვე ცნობილია, რომ ფასზეა დამოკიდებული სწრაფად გაიყიდა სახლი თუ არა. დამოუკიდებლობა ნიშნავს, რომ ფასზე არ არის დამოკიდებული სახლის გაყიდვის ვადები.

ზოგად შემთხვევაში შეუღლების ცხრილს აქვს შემდეგი სახე:

ცხრილი 12.2

ცვლადი B	ცვლადი A				სულ
	A_1	A_2	\dots	A_c	
B_1	o_{11}	o_{12}	\dots	o_{1c}	r_1
B_2	o_{21}	o_{22}	\dots	o_{2c}	r_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
B_r	o_{r1}	o_{r2}	\dots	o_{rc}	r_r
სულ	c_1	c_2	\dots	c_c	n

o_{ij} არის ij უჯრაში მონაცემთა რაოდენობა, სადაც i სტრიქონის ნომერია, j კი სვეტის ნომერი, r_i არის i -ურ სტრიქონში მონაცემთა მთლიანი რაოდენობა, c_j არის j -ურ სვეტში მონაცემთა მთლიანი რაოდენობა, n კი მონაცემთა სრული რაოდენობაა, $n = \sum r_i = \sum c_j = \sum o_{ij}$.

ჰიპოთეზები

ნულოვანი ჰიპოთეზა ნიშნავს: ცვლადები დამოუკიდებელია. ალტერნატიული ჰიპოთეზა ნიშნავს, რომ ცვლადები დამოკიდებულია.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

ნულოვანი ჰიპოთეზის თანახმად, ცვლადები დამოუკიდებელია. ეს კი ნიშნავს რომ $A_i B_j$ უჯრედში მოხვედრის ალბათობა უდრის i -ურ სტრიქონში და j -ურ სვეტში მოხვედრის ალბათობათა ნამრავლს

$$P(A_i B_j) = P(A_i) P(B_j) = \frac{r_i}{n} \cdot \frac{c_j}{n} = \frac{r_i \cdot c_j}{n^2}.$$

ij უჯრაში მოხვედრილი მონაცემების მოსალოდნელი e_{ij} სიხშირე უდრის n -ჯერ ამ უჯრაში მოხვედრის ალბათობას

$$n \cdot \frac{r_i \cdot c_j}{n^2} = \frac{r_i \cdot c_j}{n}.$$

თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა სრულდება, მაშინ მოსალოდნელი სიხშირეები გამოითვლება ფორმულით:

$$e_{ij} = \frac{r_i \cdot c_j}{n}.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკა ეფუძნება მოსაზრებას, რომ თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა სამართლიანია, დაკვირვებული სიხშირეები ახლოს იქნებიან მოსალოდნელ სიხშირეებთან, ხოლო თუ ალტერნა-

ტიული ჰიპოთეზა სწორია, მაშინ სხვაობა დაკვირვებულ და მოსალოდნელ სიხშირებს შორის დიდი.

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს სახე:

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$$

და ამ სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $(r-1) \cdot (c-1)$.

უარყოფის არე

თუ ყველა დაკვირვებული სიხშირე უდრის თავის შესაბამის მოსალოდნელ სიშირეს, სხვაობა მათ შორის ნულის ტოლია და კრიტერიუმის სტატისტიკაც ნულის ტოლია. რაც უფრო დიდია განსხვავება დაკვირვებულ და მოსალოდნელ სიხშირებს შორის, მით უფრო დიდ მნიშვნელობას მიიღებს კრიტერიუმის სტატისტიკა. კრიტიკული მნიშვნელობა $\chi^2_{df,\alpha}$ უნდა ვიპოვოთ ხი-კვადრატ განაწილების კრიტიკული ნერტილების ცხრილიდან. უარყოფის არეა — $[\chi^2_{df,\alpha}, +\infty)$. კრიტერიუმი მარჯვენა ცალმხრივია.

გადაწყვეტილება

თუ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა მეტია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ, α მნიშვნელოვნების დონით, ალტერნატივის სასარგებლოდ. წინააღმდეგ შემთხვევაში ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვაჩნია.

მაგალითი 12.3. ცხრილში მოყვანილია პოლიკლინიკაში განკურნების შედეგები სქესის მიხედვით (ერთი და იგივე დაავადება).

ცხრილი 12.3

	აბებით მკურნალობა	კონსულ- ტაციები	მკურნა- ლობის გარეშე	სულ
მამრობითი	10/6	8/9	6/9	24
მდედრობითი	6/10	16/15	18/15	40
სულ	16	24	24	64

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობაა

$$\chi^2 = \frac{(10-6)^2}{6} + \frac{(8-9)^2}{9} + \frac{(6-9)^2}{9} + \frac{(6-10)^2}{10} + \frac{(16-15)^2}{15} + \frac{(18-15)^2}{15} = 6.044$$

თუ $\alpha = 0.05$, $(r-1) \cdot (c-1) = 1 \cdot 2 = 2$ თავისუფლების ხარისხის შესაბამისი კრიტიკული მნიშვნელობა, არის $\chi^2_{2,0.05} = 5.9915$ და ვინაიდან $6.044 > 5.9915$, ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ. სქესსა და განკურნების შედეგებს შორის არსებობს კავშირი. აბებით მკურნალობა უფრო შედეგიანია კაცებისათვის. ქალებს განკურნებისათვის უფრო ხშირად მკურნალობა არ სჭირდებათ.

ჰიპოთეზათა შემოწმება 2×2 შეუღლების ცხრილის შემთხვევაში

2×2 ცხრილის შემთხვევაში, კორექციის გათვალისწინებით, კრიტერიუმის სტატისტიკა გამოითვლება ფორმულით:

$$\chi^2 = \sum \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}$$

და ამ სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით 1.

ამ შემთხვევაში ყველა უჯრისთვის $|o_{ij} - e_{ij}|$ სხვაობა ერთი და იგივეა, ამ სხვაობას უნდა გამოვაკლოთ 0.5, მერე ავიყვანოთ კვადრატში, გავყოთ მოსალოდნელ სიხშირეზე და მიღებული რიცხვები შევკრიბოთ.

მაგალითი 12.4. მონაცემები შეგროვებული იყო მცირე და საშუალო ბიზნესის მფლობელებისგან მათი მომავალი საქმიანობის პროგნოზის შესახებ:

ცხრილი 12.4

	მფლობელის პროგნოზი			
	გაუმჯობეს- დება	იგივე დარჩება	გაუარეს- დება	სულ
მცირე ბიზნესის მფლობელი	6	18	8	28
საშუალო ბიზნესის მფლობელი	3	12	13	23
სულ	9	30	21	60

არის თუ არა ბიზნესის ზომა და მფლობელის რწმენა ერთმანეთთან კავშირში?
 ნულოვანი ჰიპოთეზა: მფლობელის პროგნოზი და ფირმის ზომა ერთმანეთისაგან დამოუკი-
 დებელია, ისინი დაკავშირებულია ერთმანეთთან — ალტერნატივის სანინაალმდეგოდ.
 მოსალოდნელი სიხშირეები:

$$e_{ij} = \frac{r_i \cdot c_j}{n},$$

$$e_{11} = \frac{28 \cdot 9}{60} = 4.2, \quad e_{12} = \frac{28 \cdot 30}{60} = 14, \quad e_{13} = \frac{21 \cdot 28}{60} = 9.8,$$

$$e_{21} = \frac{9 \cdot 32}{60} = 4.8, \quad e_{22} = \frac{30 \cdot 32}{60} = 16, \quad e_{23} = \frac{21 \cdot 32}{60} = 11.2.$$

ორი მოსალოდნელი სიხშირე ნაკლებია 5-ზე. ეს კი დაუშვებელია და ამიტომ უნდა მოვახდი-
 ნოთ კატეგორიების გაერთიანება. ახალი ცხრილი მიიღებს სახეს:

ცხრილი 12.5

	მფლობელის პროგნოზი		სულ
	გაუმჯობესდება ან იგივე დარჩება	გაუარესდება	
მცირე	24/20.8	8/11.2	32
საშუალო	15/18.2	13/9.8	28
სულ	39	21	60

მივიღეთ შეუღლების 2×2 ცხრილი. კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა იქნება:

$$\chi^2 = \sum \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}} = \frac{2.7^2}{20.8} + \frac{2.7^2}{11.2} + \frac{2.7^2}{18.2} + \frac{2.7^2}{9.8} = 2.146.$$

სტატისტიკის ტავისუფლების ხარისხია — $(2-1) \cdot (2-1) = 1$. ხი-კვადრატ განაწილების
 ცხრილიდან, კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 0.05$ არის $\chi^2_{1,0.05} = 3.841$. ვინაიდან $2.146 < 3.841$,
 ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას 0.05 დონეზე ვერ უარვყოფთ. ჩვენ ვერ აღმოვაჩინეთ მნიშვნელოვანი
 კავშირი ბიზნესის ზომასა და მფლობელის აზრს შორის.

მაგალითი 12.5. მიკრო-საფინანსო ბანკის მენეჯერს დაავალეს შეემუშავებინა ავტო-
 მანქანის სესხის გაცემის კრიტერიუმები. ორი წლის განმავლობაში გაცემული იყო 400 სესხი. მენე-
 ჯერმა დაახარისხა სესხები შემდეგნაირად:

კატეგორია	სიხშირე
კარგი გადამხდელი (დროზე იხდის)	300
საშუალო (აგვიანებს გადახდას)	60
ცუდი (საჭიროა ზომების მიღება)	40

კლიენტებზე მოდიებული იქნა დამატებითი ინფორმაცია, აქირავებს, თუ ყიდულობს ის
 სახლს. მონაცემები წარმოდგენილი იყო შეუღლების ცხრილის სახით, რადგანაც მენეჯერს აინტერე-
 სებდა არიან, თუ არა მიღებული ცვლადები ერთმანეთზე დამოკიდებული. $\alpha = 0.01$.

ცხრილი 12.6

		აქირა- ვებს	ყიდუ- ლობს	სულ
(სვეტის ცვლადი)	კარგი	140	160	300
გადამხდელის კატეგორია	საშუალო	20	40	60
(სტრიქონის ცვლადი)	ცუდი	20	20	40
სულ		180	220	400 = N

180 კლიენტი აქირავენ სახლს, 220 — ყიდულობს. 140 „კარგი“ კლიენტი აქირავენ სახლს და ა. შ.

H_0 : სტრიქონის და სვეტის ცვლადები დამოუკიდებელია,

H_A : სტრიქონის და სვეტის ცვლადები დამოკიდებულია.

თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა სრულდება, მაშინ კარგი გადამხდელის ალბათობა, რომელიც აქირავენ სახლს და კარგი გადამხდელის ალბათობა, რომელიც ყიდის სახლს, ტოლია. ეს ორი ალბათობა უდრის კარგი გადამხდელის ალბათობას ქირა-ყიდვის გარეშე.

$$p(\text{კარგი}) = \frac{\text{kar gi gad amxd el ebi s r aod eno ba}}{\text{sesxebi s r aod eno ba}} = \frac{300}{400} = 0.75,$$

თუ სრულდება ნულოვანი ჰიპოთეზა

$$p(\text{კარგი/აქირავენ}) = 0.75,$$

$$p(\text{კარგი/ყიდულობს}) = 0.75.$$

180 კაციდან, ვინც სახლს აქირავენ 75% ანუ 135 უნდა იყოს კარგი გადამხდელი. 220 კაციდან, ვინც სახლს ყიდულობს 75% , ანუ 165 უნდა იყოს კარგი გადამხდელი. ასეთი მსჯელობით ვიპოვით სხვა დანარჩენ მოსალოდნელ სიხშირეს. ცხრილი 12.6 მიიღებს სახეს:

ცხრილი 12.7

		აქირა- ვებს	ყიდუ- ლობს	სულ
(სვეტის ცვლადი)	კარგი	140/135	160/165	300
გადამხდელის კატეგორია	საშუალო	20/27	40/33	60
(სტრიქონის ცვლადი)	ცუდი	20/18	20/22	40
სულ		180	220	400 = N

თუ სრულდება ნულოვანი ჰიპოთეზა განსხვავება დაკვირვებულ და მოსალოდნელ სიხშირებს შორის პატარაა.

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(140-135)^2}{135} + \frac{(160-165)^2}{165} + \frac{(20-27)^2}{27} + \frac{(40-33)^2}{33} + \frac{(20-18)^2}{18} + \frac{(20-22)^2}{22} = 4.04.$$

სვეტის ცვლადს აქვს 2 დონე (აქირავენს, ყიდულობს),

სტრიქონის ცვლადს სამი დონე (კარგი, საშუალო, ცუდი),

$$\text{თავისუფლების ხარისხი} = (2-1)(3-1) = 2,$$

$$\text{როცა } \alpha = 0.01, \chi^2_{crit} = 9.21.$$

რადგან კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა $4.04 < 9.21$, ნულოვან ჰიპოთეზას ვერ უარვყოფთ. ცვლადები დამოუკიდებელია.

ცნობილი იყო კლიენტების შემოსავალი და შედგენილი იყო შეუღლების ცხრილი.

ცხრილი 12.8

	შემოსავალი (ათასი დოლარი)				სულ
	0-10	10-20	20-30	30-ზე მეტი	
კარგი	12/37.5	43/54.75	87/84	158/123.75	300
საშუალო	18/7.5	20/10.95	18/16.8	4/24.75	60
ცუდი	20/5	10/7.3	7/11.2	3/16.5	40
სულ	50	73	112	165	400

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = \frac{(12-37.5)^2}{37.5} + \frac{(43-54.75)^2}{54.75} + \dots + \frac{(3-16.5)^2}{16.5} = 127.73.$$

თავისუფლების ხარისხი $= (4-1)(3-1) = 6$, $\alpha = 0.01$, $\chi^2_{crit} = 16.812$.

რადგან $127.72 > 16.812$, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყვოდ. კლიენტები მაღალი შემოსავლით უფრო კარგი გადამხდელები არიან.

როცა χ^2 სტატისტიკის მნიშვნელობა მეტია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყვოდ. ეს კი ნიშნავს, რომ დაკვირვებულ და მოსალოდნელ სიხშირებს შორის განსხვავება მნიშვნელოვანია. მაგრამ ეს სტატისტიკა არ გვიჩვენებს რომელი უჯრედები აჩვენებენ გადახრას დამოუკიდებლობისგან და რომელი არა. სხვაობას $o_{ij} - e_{ij}$ ნაშთი ეწოდება.

განვიხილოთ ისევ 12.3 ცხრილი. ნაშთი $o_{11} - e_{11} = 10 - 6 = 4$ დადებითია, ნაშთი $o_{21} - e_{21} = 6 - 10 = -4$ უარყოფითია. ნაშთი დადებითია, როცა დაკვირვებული სიხშირე მეტია მოსალოდნელ სიხშირეზე და უარყოფითია, როცა პირიქით — ნაკლებია. რამდენად დიდი უნდა იყოს ნაშთი, რომ ეს მეტყველებდეს დამოკიდებულებაზე?

იმისათვის, რომ ვუპასუხოთ ამ კითხვას უნდა გამოვთვალოთ სტატისტიკა:

$$t = \frac{|o_{ij} - e_{ij}|}{\sqrt{e_{ij}(1-r_i)(1-c_j)}},$$

სადაც r_i არის i -ურ სტრიქონში მონაცემთა მთლიანი რაოდენობა, c_j არის j -ურ სვეტში მონაცემთა მთლიანი რაოდენობა.

თუ ამ სტატისტიკის მნიშვნელობა მეტია ან ტოლი 2-ზე, ჩავთლით რომ ამ უჯრედის დაკვირვებული და მოსალოდნელი სიხშირეები მნიშვნელოვნად განსხვავდებიან. 12.3 მაგალითში ასეთია 4 ნაშთი: აბებით მკურნალობა, როგორც ქალებისთვის ასევე მამაკაცებისთვის; მკურნალობის გარეშე, როგორც ქალებისთვის ასევე მამაკაცებისთვის გვიჩვენებს მნიშვნელოვან გადახრას დამოუკიდებლობისგან.

თუ χ^2 სტატისტიკაზე დაყრდნობით ნულოვანი ჰიპოთეზა უარყოფილია, ცვლადებს შორის არის სტატისტიკური კავშირი. მაგრამ იმისათვის, რომ გავარკვიოთ რამდენად ძლიერია ეს კავშირი, უნდა განვიხილოთ შანსების შეფარდება.

შანსების შეფარდება

მაგალითი 12.6. განვიხილოთ 1993 წლის მონაცემების შეუღლების ცხრილი მსხვერპლისა და დამნაშავეს რასის მიხედვით (ერთი მსხვერპლი, ერთი დამნაშავე)

ცხრილი 12.9

დამნაშავეს რასა	მსხვერპლის რასა		სულ
	თეთრი	შავი	
თეთრი	4686	304	4990

შავი	849	5393	6242
------	-----	------	------

შემოვიღოთ ალენიშნები:

p_1 ალბათობა იმისა, რომ მსხვერპლი თეთრია, როცა დამნაშავე თეთრია (განიხილება როგორც წარმატების ალბათობა);

$1 - p_1$ შავი მსხვერპლის ალბათობა, როცა დამნაშავე თეთრია (მარცხის ალბათობა),

p_2 — ალბათობა იმისა, რომ მსხვერპლი თეთრია, როცა დამნაშავე შავია (წარმატების ალბათობა),

$1 - p_2$ — შავი მსხვერპლის ალბათობა, როცა დამნაშავე შავია (მარცხის ალბათობა).

წარმატების შანსი განიმარტება როგორც შეფარდება

$$\text{შანსი} = \frac{p}{1-p} = \frac{\text{წარმატების ალბათობა}}{\text{მარცხის ალბათობა}}.$$

თეთრი დამნაშავისათვის თეთრი მსხვერპლის პროპორციაა $\frac{4686}{4990} = 0.939$ და შავი მსხვერპლის პროპორცია — $\frac{304}{4990} = 0.061$.

თეთრი დამნაშავისათვის შანსი, რომ მსხვერპლი იქნება თეთრი არის $\frac{0.939}{0.061} = 15.4$.

სიდიდე

$$\frac{\frac{4686}{4990}}{\frac{304}{4990}} = \frac{4686}{304} = 15.4$$

ნიშნავს, რომ თეთრი დამნაშავისათვის ყოველ ერთ შავ მსხვერპლზე მოდის 15.4 თეთრი.

შავი დამნაშავისათვის შანსი, რომ მსხვერპლი იქნება თეთრი არის $\frac{849}{5393} = 0.157$. ეს კი ნიშნავს, რომ ერთ შავ მსხვერპლზე მოდის 0.157 თეთრი.

ანალოგიურად, რადგან $\frac{5393}{849} = \frac{1}{0.157} = 6.4$, შავი დამნაშავისათვის ერთ თეთრ მსხვერპლზე მოდის 6.4 შავი.

შანსების შეფარდება:

2×2 ცხრილში ორი სტრიქონის შანსების შეფარდებას ეწოდება შანსების შეფარდება

$$\theta = \frac{\text{შანსი თეთრი დამნაშავის}}{\text{შანსი შავი დამნაშავის}} = \frac{15.4}{0.157} = 98.089.$$

თეთრი მსხვერპლის შანსი თეთრი დამნაშავეებისთვის 98.089-ჯერ მეტია, ვიდრე თეთრი მსხვერპლის შანსი შავი დამნაშავეებისთვის.

$\theta = 98.089$ არ ნიშნავს, რომ p_1 ალბათობა 98.089-ჯერ მეტია p_2 -ზე. $\theta = 98.089$ ნიშნავს, რომ პირველ სტრიქონში შანსი 98.089-ჯერ მეტია მეორე სტრიქონის შანსზე.

შანსების შეფარდების თვისებები 2×2 შეუღლების ცხრილებისათვის

$$1. \theta = \frac{o_{11} \cdot o_{22}}{o_{21} \cdot o_{12}};$$

2. θ -მ შეიძლება მიიღოს ნებისმიერი დადებითი მნიშვნელობა;

3. როცა $p_1 = p_2$ და ორივე სტრიქონის შანსებიც ტოლია, მაშინ ცვლადები დამოუკიდებელია.

$\theta = 1$, როცა ცვლადები დამოუკიდებელია;

4. რაც უფრო ძლიერია კავშირი ორ ცვლადს შორის, მით უფრო განსხვავდება θ ერთისაგან. როცა $\theta > 1$, წარმატების შანსი პირველ სტრიქონში მეტია წარმატების შანსზე მეორე სტრიქონში. როცა $\theta < 1$, წარმატების შანსი პირველ სტრიქონში ნაკლებია წარმატების შანსზე მეორე სტრიქონში.

მან-უიტნის კრიტერიუმი

მაგალითი 12.7. საგზაო სამსახურის მენეჯერის ეჭვით, ქალაქის შიგნით გზების გასარემონტებლად ნაკლებ ასფალტს ხარჯავენ ვიდრე გზებზე ქალაქის გარეთ. შეგროვილი იყო 12 კვირის მონაცემები (იარდი ასფალტი ერთ მილზე).

ცხრილი 12.10

ქალაქის შიგნით		ქალაქის გარეთ	
	რანგი		რანგი
460	2	600	6
830	16	652	9
720	12	603	7
930	20	594	5
500	4	1402	23
620	8	1111	21
703	11	902	18
407	1	700	10
1521	24	827	15
900	17	490	3
750	13	904	19
800	14	1400	22
	რანგების ჯამი		რანგების ჯამი
	142		158

მიუხედავად იმისა, რომ მონაცემები ინტერვალის სკალებზეა გაზომილი, მენეჯერმა არ გამოიყენა t -კრიტერიუმი (ორი დამოუკიდებელი შერჩევისათვის), რადგანაც გრძნობდა, რომ მონაცემებს არ ექნებოდათ ნორმალური განაწილება. ასეთი ტიპის ამოცანებისათვის არსებობს მან-უიტნის არაპარამეტრული სტატისტიკური კრიტერიუმი ცდის პირთა შორის სქემაში. ეს კრიტერიუმი არის ორი დამოუკიდებელი ჯგუფისათვის t -კრიტერიუმის არაპარამეტრული ანალოგი.

ჰიპოთეზები

ნულოვანი ჰიპოთეზა მან-უიტნის U ტესტში:

H_0 : ორივე შერჩევა აღებულია ერთი და იგივე პოპულაციიდან,

H_A : შერჩევები აღებულია სხვადასხვა პოპულაციიდან (პოპულაციები განსხვავდებიან მდებარეობის მიმართებაში).

ჩვენი ამოცანის ჰიპოთეზები:

H_0 : მოხმარებული ასფალტის მონაცემებს ქალაქის შიგნით და ქალაქის გარეთ აქვთ ერთი და იგივე განაწილება,

H_A : ქალაქის გარეთ აღინიშნება ასფალტის მეტი მოხმარების ტენდენცია ვიდრე ქალაქის შიგნით.

ავიღოთ $\alpha = 0.05$.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ მან-უიტნის კრიტერიუმი ორივე შერჩევის მონაცემები უნდა გავაერთიანოთ და მივუწეროთ რანგები, როგორც ნაჩვენებია 12.10 ცხრილში. მან-უიტნის კრიტერიუმის ლოგიკა მდგომარეობს იმაში, რომ თუ ერთი ჯგუფის რანგების ჯამი მნიშვნელოვნად განსხვავდება მეორე ჯგუფის რანგების ჯამისაგან, შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პოპულაციის მდებარეობის პარამეტრები განსხვავებულია.

გამოსათვლელი გვაქვს U სტატისტიკა ორივე შერჩევისთვის.

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} \text{ მინუს პირველი შერჩევის რანგების ჯამი,}$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} \text{ მინუს მეორე შერჩევის რანგების ჯამი,}$$

სადაც n_1 და n_2 პირველი და მეორე შერჩევის მოცულობებია. შერჩევის რანგების ჯამი მოცემულია ცხრილში 12.10.

$$U_1 = 12 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 142 = 80,$$

$$U_2 = 12 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 13}{2} - 158 = 64.$$

მიაქციეთ ყურადღება, რომ $U_1 + U_2 = n_1 n_2$.

კრიტერიუმის სტატისტიკა U = მინიმუმი U_1 -სა და U_2 -ს შორის ($U = \min(U_1, U_2)$), $U =$

უმცირესი 80-სა და 64-ს შორის = 64.

უარყოფის არეები

თუ ავირჩევთ ორმხრივ კრიტერიუმს და კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა იქნება ნაკლები მან-უიტნის კრიტიკული წერტილების ცხრილში ნაპოვნ კრიტიკულ მნიშვნელობაზე, მაშინ ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ.

ჩვენს მაგალითში, 0.05 მნიშვნელოვნების დონისათვის, $n_1 = 12$ და $n_2 = 12$ მოცულობების შესაბამისი U განაწილების კრიტიკულ მნიშვნელობა იქნება $U_{crit} = 37$. უარყოფის არეა — $U \leq U_{crit}$.

გადაწყვეტილება

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა — 64 მეტია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე — 37, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას ვერ უარყოფთ, ვერ ვიტყვით, რომ ქალაქგარეთ ასფალტი იფლანგება. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ კრიტერიუმით ნულოვანი ჰიპოთეზის უარყოფა ხდება მაშინ, თუ გამოთვლილი კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა ნაკლებია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე.

უილკოქსონის ნიშნის რანგების კრიტერიუმი

უილკოქსონის ნიშნის რანგების კრიტერიუმი არის არაპარამეტრული კრიტერიუმი ცდის პირებს შიგნით სქემისთვის. ის, დაწყვილებული მონაცემებისათვის t -კრიტერიუმის არაპარამეტრული ანალოგია.

მაგალითი 12.8. ორი დღის განმავლობაში კაფეში აკვირდებოდნენ ერთი და იმავე 11 კლიენტის სადილობას. პირველ დღეს უკრავდა ნელი მუსიკა, მეორე დღეს — სწრაფი. ჩაინერეს თითოეული ცდის პირის მიერ წუთში მიღებული ლუკმების რაოდენობა:

ცხრილი 12.11

	მუსიკის ტემპი					
ცდის პირი	სწრაფი	ნელი	d	$ d $	$ d $ -ს რანგი	ნიშნის რანგი
1	3	4	-1	1	2	2 ₋
2	4	6	-2	2	4.5	4.5 ₋
3	2	3	-1	1	2	2 ₋
4	3	3	0	0		
5	3	8	-5	5	9	9 ₋
6	4	2	+2	2	4.5	4.5 ₊
7	1	4	-3	3	6.5	6.5 ₋
8	5	4	+1	1	2	2 ₊
9	3	6	-3	3	6.5	6.5 ₋

10	5	9	-4	4	8	8
11	2	8	-6	6	10	10

ჰიპოთეზები

H_0 : ერთმანეთთან დაკავშირებული პირველი და მეორე დღის მონაცემების განაწილებები იდენტურია.

H_1 : ერთმანეთთან დაკავშირებული პირველი და მეორე დღის მონაცემების განაწილებები იდენტური არ არის.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

ნიშნის რანგების ჯამებს შორის უმცირესი ჯამი

$$T = \text{უმცირესი } \sum R_- \text{ და } \sum R_+ \text{ შორის,}$$

სადაც $\sum R_-$ უარყოფითი სხვაობების შესაბამისი რანგების ჯამია, ხოლო $\sum R_+$ — დადებითი სხვაობების შესაბამისი რანგების ჯამია.

12. 11 ცხრილიდან

$$\sum R_- = 2+4.5+2+9+6.5+6.5+8+10=48.5, \quad \sum R_+ = 4.5+2=6.5,$$

ე. ი.

$$T = \text{უმცირესი } \sum R_- \text{ -სა და } \sum R_+ \text{ -ს შორის} = 6.5.$$

უარყოფის არე

უარყოფის არე არის კრიტერიუმის სტატისტიკის ის მნიშვნელობები, რომლებიც ნაკლებია ან ტოლია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე.

კრიტიკული მნიშვნელობები დამოკიდებული არიან მნიშვნელოვნების α დონეზე და ნულისგან განსხვავებული სხვაობების მქონე წყვილების რაოდენობაზე.

T -ს კრიტიკული მნიშვნელობები მოცემულია უილკოქსონის ნიშნის რანგების კრიტერიუმისათვის T -ს კრიტიკული მნიშვნელობების ცხრილში. როცა $\alpha = 0.05$ და ნულისგან განსხვავებული სხვაობების რაოდენობა 10-ის ტოლია, კრიტიკული მნიშვნელობა უდრის 8-ს. მიაქციეთ ყურადღება, რომ ამ ტესტში ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფენ, როცა გამოთვლილი სტატისტიკის მნიშვნელობა ნაკლებია ან ტოლი ცხრილში ნაპოვნ კრიტიკულ მნიშვნელობაზე.

გადაწყვეტილება

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა — 6.5, ნაკლებია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე — 8. ამიტომ ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყოფილიყოს. მიღებული ლუკმების რაოდენობის განაწილება მუსიკის სხვადასხვა ტემპის პირობებში განსხვავდება ერთმანეთისგან. ნელ ტემპთან შედარებით სწრაფი ტემპის დროს მეტ ლუკმას იღებენ.

კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმი

ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი გამოიყენება ორზე მეტი საშუალოს შესადარებლად. ამ ანალიზის გამოყენება შეიძლება, თუ შერჩევები ალბულის ნორმალური პოპულაციებიდან და პოპულაციების დისპერსიები ტოლია.

კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმი არის ერთფაქტორიანი ANOVA კრიტერიუმების არაპარამეტრული ანალოგი. ამ კრიტერიუმის გამოყენებისას არ არის აუცილებელი ნორმალურობის მოთხოვნა.

მაგალითი 12.9. შესამოწმებელი იყო სამი ტიპის ელექტრო ჯაგრის მუშაობის ვადები (საათი). $\alpha = 0.05$.

ბრენდი 1	40	37	51	20	46	93	27	25	48
ბრენდი 2	69	113	217	92	65	49	122	117	105
ბრენდი 3	5	14	10	17	36	52	13	68	141

ჰიპოთეზები

H_0 : სამი ბრენდის მუშაობის ვადა არ განსხვავდება ერთმანეთისგან.

H_A : სამი ბრენდის მუშაობის ვადა განსხვავებულია.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

გავაერთიანოთ სამივე შერჩევის მონაცემები და მოვახდინოთ მათი რანჟირება:

	რანგი									რანგების ჯამი
ბრენდი 1	11	10	15	6	12	21	8	7	13	103
ბრენდი 2	19	23	27	20	17	14	25	24	22	191
ბრენდი 3	1	4	2	5	9	16	3	18	26	84

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს სახე:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1),$$

სადაც N მონაცემთა სრული რაოდენობაა, k შერჩევების რაოდენობაა, R_i არის i -ური შერჩევის რანგების ჯამი, n_i არის i -ური შერჩევის მოცულობა.

H სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $k-1$.

უარყოფის არე — კრიტერიუმის სტატისტიკის ის მნიშვნელობებია, რომლებიც მეტია ან ტოლი კრიტიკულ მნიშვნელობაზე $\chi^2_{k-1, \alpha}$.

გადაწყვეტილება

თუ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა მეტია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ. ჩვენს მაგალითში

$$\begin{aligned} H &= \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) = \\ &= \frac{12}{27 \cdot (27+1)} \cdot \left[\frac{103^2}{9} + \frac{191^2}{9} + \frac{84^2}{9} \right] - 3 \cdot (27+1) = 11.4956. \end{aligned}$$

კრიტიკული მნიშვნელობა, ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან, როცა $\alpha = 0.05$ და თავის-უფლების ხარისხია $k-1 = 3-1 = 2$ უდრის 5.9915-ს.

რადგან $11.4956 > 5.9915$ -ზე, ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ. ელექტრო ჯაგრისების მუშაობის ვადები განსხვავებულია.

არსებობს შეზღუდვები კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმის გამოყენებისას: შერჩევის მოცულობები უნდა იყოს ხუთზე მეტი, შერჩევები პოპულაციიდან დამოუკიდებლად არის ალბულო, პოპულაციები განსხვავდებიან მხოლოდ მდებარეობის პარამეტრებით.

თუ შერჩევებში ბევრი მონაცემი მეორდება, ანუ არსებობენ „ბმები“, H სტატისტიკა უნდა გაიყოს საკორექციო L მამრავლზე

$$L = 1 - \frac{\sum_{i=1}^g (t_i^3 - t_i)}{N^3 - N},$$

სადაც g ჯგუფების რაოდენობაა ბმებით, t გამოვრებული მონაცემების რაოდენობაა, N კი მონაცემთა სრული რაოდენობაა.

მაგალითი 12.10. დამოკიდებულია თუ არა გამოცდაზე მიღებული ქულები გამომცდელების გუნდზე? ქვემოთ მოცემულია 36 აბიტურიენტის ქულები:

გამომცდელების პირველი გუნდი	გამომცდელების მეორე გუნდი	გამომცდელების მესამე გუნდი
90	90	55
65	88	55

72	83	90
83	83	83
65	65	65
50	65	65
65	83	60
83	83	55
83	90	65
55	90	72
72	65	90
65	72	65

ჩამოვაცალიბოთ ნულოვანი და ალტერნატიული ჰიპოთეზა:

H_0 : აბიტურიენტების საშუალო ქულები არ განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

H_A : აბიტურიენტების საშუალო ქულები განსხვავდებიან ერთმანეთისაგან.

$\alpha = 0.10$.

კრუსკალ-უოლისის პროცედურის პირველი ნაბიჯია ქულების გადაყვანა რანგებში. გასათვალისწინებელია, რომ ბევრი ქულა მეორდება. რანგები შემდეგნაირია:

	პირველი გუნდი	მეორე გუნდი	მესამე გუნდი
	33.5	33.5	3.5
	12.0	30.0	3.5
	19.5	25.5	33.5
	25.5	25.5	25.5
	12.0	12.0	12.0
	1.0	12.0	12.0
	12.0	25.5	6.0
	25.5	25.5	3.5
	25.5	33.5	12.0
	3.5	33.5	19.5
	19.5	12.0	33.5
	12.0	19.5	12.0
რანგების ჯამი	201.5	288.0	176.5

ქულა 55 მეორდება 4-ჯერ; ქულა 65 — 11-ჯერ; ქულა 72 — 4-ჯერ; ქულა 83 — 6-ჯერ; ქულა 90 — 6-ჯერ. საკორექციო მამრავლი L ტოლი იქნება:

$$L = 1 - \frac{\sum(t^3 - t)}{N^3 - N} =$$

$$= 1 - \frac{(4^3 - 4) + (11^3 - 11) + (4^3 - 4) + (8^3 - 8) + (6^3 - 6)}{36^3 - 36} = 0.9538.$$

კრუსკალ-უოლისის სტატისტიკის მნიშვნელობაა:

$$H = \frac{\frac{12}{N(N+1)} \sum \frac{R^2}{b} - 3(N+1)}{L} = \frac{\frac{12}{36 \cdot 37} \left(\frac{201.5^2}{12} + \frac{288.0^2}{12} + \frac{176.5^2}{12} \right) - 3 \cdot 37}{0.9538} = \frac{5.1400}{0.9538} = 5.389,$$

ხი-კვადრატ განაწილების ცხრილიდან, როცა $\alpha = 0.1$ და თავისუფლების ხარისხი $k-1=2$, კრიტიკული მნიშვნელობა უდრის 4.605-ს. რადგან $H = 5.389 > 4.605$, ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას უარვყოფთ. შემფასებელი გუნდები ერთნაირად არ აფასებენ აბიტურიენტების ცოდნას.

შეჯამება

თანხმობის ხი-კვადრატ კრიტერიუმი გამოიყენება იმისათვის, რომ დადგინდეს, რამდენად კარგად შეესაბამება კატეგორიებში მოთავსებული მონაცემები ამ კატეგორიისთვის მიღებულ მოსალოდნელ სიხშირებს.

თანხმობის ხი-კვადრატ კრიტერიუმი გამოითვლება ფორმულით

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(o_i - e_i)^2}{e_i}.$$

დამოუკიდებლობის ხი-კვადრატ კრიტერიუმი გამოიყენება ორი ცვლადის კავშირის დასადგენად, როცა მონაცემები სახელდების სკალაზეა მიღებული. დამოუკიდებლობის ხი-კვადრატ კრიტერიუმი გამოითვლება ფორმულით

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}.$$

მან-უიტნის U კრიტერიუმი არაპარამეტრული კრიტერიუმია ცდის პირებს შორის სქემისათვის (ორი დამოუკიდებელი ჯგუფისთვის t -კრიტერიუმის ანალოგი).

უილკოქსონის ნიშნის რანგების კრიტერიუმი არაპარამეტრული კრიტერიუმია ცდის პირებს შიდა სქემისთვის (დანყვილებული მონაცემებისათვის t -კრიტერიუმის ანალოგი).

კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმი არის ერთფაქტორიანი ANOVA კრიტერიუმის არაპარამეტრული ანალოგი.

კითხვები

1. ერთი თვის განმავლობაში დათვლილი იყო დღეში მარკეტში მოსული მყიდველების რაოდენობა.

კვირის დღე	დაკვირვებული სიხშირე
ორშაბათი	1525
სამშაბათი	1711
ოთხშაბათი	1655
ხუთშაბათი	1497
პარასკევი	1603
შაბათი	1801
კვირა	1500

შეამოწმეთ ჰიპოთეზა: დამოკიდებულია თუ არა მყიდველების რაოდენობა კვირის დღეზე, თუ $\alpha = 0.05$.

2. უსაფრთხოების მენეჯერის ჰიპოთეზით, უბედური შემთხვევების რაოდენობა დამოკიდებულია მუშის პროფესიონალიზმის დონეზე. ერთი წლის განმავლობაში შეგროვილი იყო შემდეგი მონაცემები:

პროფესიული დონე	შ-9	შ-7	შ-5 და შ-3	სულ
შემთხვევათა რაოდენობა	3	7	8	18

ა) შეამოწმეთ არის თუ არა მოსალოდნელი სიხშირე მეტია 5-ზე;

ბ) შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, აიღეთ $\alpha = 0.05$.

3. ფირმა ყიდის მაცივრებს თავის ოთხ ფილიალში. ერთი თვის გაყიდვის შედეგები მოცემულია ცხრილში:

ფილიალი 1	ფილიალი 2	ფილიალი 3	ფილიალი 4
305	287	112	196

შეამოწმეთ ჰიპოთეზა: განსხვავდება თუ არა გაყიდვის მოცულობები ფილიალების მიხედვით? $\alpha = 0.05$.

3. სასტუმროში სამი ტიპის ნომერია: ორადგილიანი, ოთხადგილიანი და ლუქსი. მენეჯერმა დათვალა ამ ნომრებზე დაკვეთების რაოდენობა:

ერთოთახიანი	18
ოროთახიანი	21
ლუქსი	11

შეამოწმეთ ჰიპოთეზა: თანაბრად არის თუ არა განაწილებული დაკვეთები ამ ნომრებზე? $\alpha = 0.05$.

4. დამოკიდებულია თუ არა მძღოლის სქესზე ავტო-საგზაო შემთხვევების რაოდენობა? სამი წლის დაკვირვების მონაცემებია:

ავტო-საგზაო შემთხვევათა რაოდენობა	მძღოლის სქესი	
	მამრობითი	მდედრობითი
0	240	160
1	80	40
2	32	18
3	11	9
სამზე მეტი	5	4

შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, ისარგებლეთ $\alpha = 0.05$.

5. დამოკიდებულია თუ არა მიმდინარე ანგარიშზე გარიგების რაოდენობა კლიენტების ოჯახურ მდგომარეობაზე. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

ოჯახური მდგომარეობა	გარიგების რაოდენობა				
	0 - 10	11-20	21-30	31-40	40-ზე მეტი
მარტოხელა	13	23	19	20	11
დაოჯახებული	6	15	33	45	27
გაყრილი	4	19	22	20	15
სხვა	2	11	8	5	2

6. შეგროვილი იყო ინფორმაცია ერთ-ერთი ფირმის თანამშრომლებზე. რამდენი წელი მუშაობენ ისინი ამ ფირმაში და გაფიცვის შემთხვევაში სავარაუდოდ რამდენი კვირა იქნებიან გაფიცულები.

მუშაობის ვადა	გაფიცვის სავარაუდო დრო		
	ერთ კვირამდე	1-4 კვირა	ოთხ კვირაზე მეტი
ერთ წლამდე	23	6	3
1-2 წელი	19	15	8
2-5 წელი	20	23	19
5-10 წელი	4	21	29
10 წელზე მეტი	2	5	18

ამ მონაცემებზე დაყრდნობით, შეგიძლიათ თუ არა დაასკვნათ, რომ გაფიცვის სავარაუდო დრო დამოკიდებულია მუშაობის სტაჟზე. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

7. შეგროვილი იყო შემდეგი ორი დამოუკიდებელი შერჩევა:

შერჩევა 1	405	450	290	370	345	460
შერჩევა 2	300	340	400	250	270	410

შერჩევა 1	425	275	380	330	500	215
შერჩევა 2	435	390	225	210	395	315

ა) ამ შერჩევებზე დაყრდნობით, შეგიძლიათ, თუ არა დაასკვნათ, რომ შერჩევები ალბულის ერთიდაიგივე პოპულაციიდან. გამოიყენეთ $\alpha = 0.05$ და t -კრიტერიუმი. რა დაშვებები უნდა იყოს შესრულებული, რომ გამოიყენოთ ეს კრიტერიუმი?

ბ) ვთქვათ, არ გვსურს შევამოწმოთ ა)-ში მოთხოვნილი დაშვებები. რომელი არაპარამეტრული ტესტი უნდა გამოვიყენოთ შერჩევის საშუალოების ტოლობის შესამოწმებლად? შეამოწმეთ. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

8. 27 პროფესიონალს და 24 მომხმარებელს სთხოვეს შეეფასებინათ ახალი კომპიუტერული პროგრამა ას ბალიან სკალაზე, სადაც 100 ნიშნავდა უმაღლეს კმაყოფილებას. განსხვავდება თუ არა პროფესიონალების და მომხმარებლების შეფასება? $\alpha = 0.05$.

პროფესიონალები	მომხმარებლები
$n = 27$	$n = 24$
რანგების ჯამი = 348	რანგების ჯამი = 300

9. ეფექტურია თუ არა სწრაფი კითხვის შემსწავლელი კურსები? შემოწმებული იყო 15 მამაკაცის კითხვის სისწრაფე კურსის დასაწყისიდან კურსის დასრულების შემდეგ. დამუშავების შედეგად მიიღეს შემდეგი მონაცემები:

უარყოფითი რანგების ჯამი = 180 ;

დადებითი რანგების ჯამი = 45 .

თუ უფრო მაღალი რანგი ნიშნავს წამში უფრო ბევრი სიტყვის წაკითხვას, როგორ შეაფასებთ ამ კურსებს აიღეთ $\alpha = 0.05$.

10. შემოწმებული იყო სამი წამყვანი ფირმის ფეხსაცმლის ხარისხი 40 ბალიან სკალაზე, სადაც 40 ნიშნავდა უმაღლეს ხარისხს. მიღებული იყო შემდეგი მონაცემები:

ფირმა 1	21	25	36	35	33	23	31	32
ფირმა 2	17	15	34	22	16	19	30	20
ფირმა 3	29	38	28	27	14	26	39	36

ა) რა დაშვებები უნდა სრულდებოდეს, რომ გამოვიყენოთ ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი?

ბ) ვთქვათ, არ გვსურს შევამოწმოთ ა)-ში მოთხოვნილი დაშვებები, რომელი არაპარამეტრული კრიტერიუმი უნდა გამოვიყენოთ ფირმების საშუალო რეიტინგის ტოლობის შესახებ? შეამოწმეთ ეს ჰიპოთეზა. აიღეთ $\alpha = 0.05$.

11. არსებობს თუ არა განსხვავება კალათბურთის გუნდის და ბეისბოლის ნაციონალური ლიგის მოთამაშეების საშუალო ანაზღაურებას შორის?

ა) თუ არ სრულდება ნორმალურობის დაშვება, რა კრიტერიუმს გამოიყენებთ?

ბ) გამოიყენეთ დამუშავების შედეგები და შეამოწმეთ ჰიპოთეზა, თუ $\alpha = 0.05$.

NBA	NFL	ბეისბოლი
$n = 20$	$n = 30$	$n = 40$

$R = 1710$	$R = 1100$	$R = 1340$
------------	------------	------------

12. გარკვეული დეტალის დიამეტრის ზომები ნორმალურადაა განაწილებული საშუალოთი $\mu = 3$ სმ და სტანდარტული გადახრით $\sigma = 0.001$ სმ. გაზომილი იყო 500 დეტალის დიამეტრი და მიღებული იქნა შემდეგი მონაცემები:

ცხრილი 12.12

დიამეტრი	დაკვირვებული სიხშირე	მოსალოდნელი სიხშირე
2.995 ნაკლები	3	0
2.995-დან 2.996-მდე	4	0.015
2.996-დან 2.997-მდე	5	0.635
2.997-დან 2.998-მდე	19	10750
2.998-დან 2.999-მდე	98	67.950
2.999-დან 3.000-მდე	146	170.650
3.000-დან 3.001-მდე	124	170.650
3.001-დან 3.002-მდე	83	67.950
3.002-დან 3.003-მდე	11	10750
3.003-ზე მეტი	7	0.650
სულ	500	

შევამოწმოთ ჰიპოთეზები:

H_0 : დიამეტრები ნორმალურადაა განაწილებული $\mu = 3$ სმ საშუალოთი, $\sigma = 0.001$ სმ სტანდარტული გადახრით.

H_A : ნორმალურობა არ სრულდება.

იმისათვის, რომ ვისარგებლოთ χ^2 -კრიტერიუმით, თითოეული ინტერვალისათვის გამოსათვლეელია მოსალოდნელი სიხშირეები

$$P(\text{დიამეტრის ზომა } 2.995\text{-ზე ნაკლებია}) = \\ = P(Z < \frac{2.995-3}{0.001}) = P(Z < -5) = 0.$$

ანალოგიურად გამოვთვლით, მაგალითად,

$$P(2.997 < X < 2.998) = P(-3 < Z < -2) = 0.4987 - 0.4772 = 0.0215.$$

χ^2 -კრიტერიუმი კარგად არ მუშაობს, თუ მოსალოდნელი სიხშირეების 20% 5-ზე ნაკლებია. ამ შემთხვევაში უნდა გავაერთიანოთ ინტერვალები:

ცხრილი 12.13

დიამეტრი	დაკვირვებული სიხშირე	მოსალოდნელი სიხშირე
2.998-მდე	31	11.4
2.998-დან-2.999-მდე	98	67.95
2.999-დან-3.000-მდე	146	170.65
3.000-დან-3.001-მდე	124	170.65
3.001-დან-3.002-მდე	83	67.95
3.002-ზე მეტი	18	11.40

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} = 70.45$$

თავისუფლების ხარისხი = ინტერვალების (კატეგორიების) რაოდენობა მინუს 1 = 5 . $\alpha = 0.05$
, $\chi^2_{crit} = 11.07$. ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყოფილი, ამის შედეგად დიამეტრები არ არის ნორ-
მალურად განაწილებული და ამიტომ ამოღებული უნდა იქნას პროდუქცია, ხოლო დაზგები,
რომელზედაც მზადდებოდა ეს პროდუქცია უნდა იქნას დარეგულირებული ან შეცვლილი.
13. სადაზღვეო კომპანია სწავლობს დამოკიდებულებას, თუ არა ავტო-საგზაო შემთხვევების რაოდენობა
მძღოლის ასაკზე, სქესზე, საოჯახო სტატუსზე და ა. შ. 1000 კლიენტზე დაყრდნობით შევსებული იყო
შეუღლების ცხრილი:

ავტო- საგზაო შემთხვევებზე	ასაკი				
	25 წელზე ნაკლები	25-40	40-55	55-ზე მეტი	სულ
აქვთ სარჩელი	93	72	53	63	281
არ აქვთ სარჩელი	115	155	265	184	719
სულ	208	227	318	247	1000 = N

ამ მონაცემებზე დაყრდნობით დაასკვნის თუ არა სადაზღვეო კომპანია, რომ ახალგაზრდ-
ებს მოსალოდნელზე მეტი ავტო-საგზაო შემთხვევები აქვთ და ამიტომ გაზრდილი უნდა იყოს თუ არა
მათთვის სადაზღვეო პრემია (გადასახადი)? $\alpha = 0.05$.

დამოკიდებულია თუ არა სტატისტიკაში მიღებული საბოლოო ქულა ლექტორზე?

ლექტორი 1	90	65	72	83	65	50
ლექტორი 2	90	88	83	83	65	65
ლექტორი 3	55	55	90	83	65	65

ლექტორი 1	65	83	83	55	72	65
ლექტორი 2	83	83	90	90	65	72
ლექტორი 3	60	55	65	72	90	65

შეამოწმეთ ეს ჰიპოთეზა იმ პირობებში, როდესაც პოპულაციები არ არის ნორმალურად განა-
წილებული. იგულისხმეთ, რომ პოპულაციების დისპერსიები ტოლია.

H_0 : სამივე ლექტორის ჯგუფში მიღებულია ერთნაირი საშუალო ქულები.

H_A : ჯგუფების საშუალო ქულები ერთმანეთისგან განსხვავებულია.

პირველი ნაბიჯი კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმის გამოყენებისას არის შერჩევების გაერთ-
იანება და რანჟირება.

მიღებული რანგებია:

ლექტორი 1	ლექტორი 2	ლექტორი 3
33.5	33.5	3.5
12.0	30.0	3.5
19.5	25.5	33.5
25.5	25.5	25.5
12.0	12.0	12.0
1.0	12.0	12.0

12.0	25.5	6.0
25.5	25.5	3.5
25.5	33.5	12.0
3.5	33.5	19.0
19.5	12.0	33.5
12.0	19.5	12.0
ჯამი = 201.5	ჯამი = 288	ჯამი = 176.5

მაშინ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა იქნება:

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1) - \frac{\sum_{i=1}^g (t_i^3 - t_i)}{N^3 - N} =$$

$$= \frac{12}{36 \cdot 37} \left[\frac{201.5^2}{12} + \frac{288.0^2}{12} + \frac{176.5^2}{12} \right] - 3 \cdot 37 =$$

$$= \frac{(4^3 - 4) + (11^3 - 11) + (4^3 - 4) + (8^3 - 8) + (6^3 - 6)}{36^3 - 36} =$$

$$= \frac{5.1400}{0.9538} = 5.389.$$

19.5 მეორდება 4-ჯერ, 12 მეორდება 11-ჯერ, 3.5 მეორდება 4-ჯერ, 25.5 მეორდება 8-ჯერ, 33.5 მეორდება 6-ჯერ. თავისუფლების ხარისხი $k - 1 = 3 - 1 = 2$, თუ $\alpha = 0.05$, $\chi^2_{2,0.05} = 5.991$.

კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა 5.389 ნაკლებია კრიტიკულ მნიშვნელობაზე 5.991. ამიტომ ნულოვან ჰიპოთეზას ვერ უარყვით.

14. დამოკიდებულია თუ არა ალკოჰოლის მიღება იმაზე, რომ ადამიანი თამბაქოს მომხმარებელია თუ არა. დაამუშავეთ შეუღლების ცხრილი და შეამოწმეთ ჰიპოთეზა. $\alpha = 0.05$.

		ენევა	
		კი	არა
სვამს	კი	1449	500
	არა	46	281

რომელი უჯრედის დაკვირვებული სიხშირე აჩვენებს ყველაზე დიდ გადახრას დამოუკიდებლობისაგან?

15. 100000 პაციენტზე დაყრდნობით შედგენილი იყო შეუღლების ცხრილი, სადაც ერთი ცვლადი დაავადების სტატუსია, მეორე ცვლადი კი ამ დაავადებაზე ტესტის შედეგი.

	სადიაგნოსტიკო ტესტის შედეგი	
	დადებითი	უარყოფითი
დაავადებული	475	25
ჯანმრთელი	4975	94525

ა) რამდენი ადამიანია დაავადებული? რამდენია ჯანმრთელი?

ბ) დაავადებული ადამიანებისათვის რას უდრის დადებითი სადიაგნოსტიკო ტესტების პროპორცია? უარყოფითი ტესტების პროპორცია?

გ) დაავადებული ადამიანისათვის რას უდრის შანსი, რომ ტესტი დაადასტურებს დაავადებას?

დ) ჯანმრთელი ადამიანისთვის რას უდრის დადებითი ტესტების პროპორცია? უარყოფითი ტესტების პროპორცია?

ე) ჯანმრთელი ადამიანისთვის რას უდრის ცრუ დადებითი ტესტის შანსი?

ვ) დაავადებული ადამიანისთვის დაავადების აღმოჩენის შანსი რამდენჯერ მეტია ცრუ შედეგის მიღების შანსზე ჯანმრთელი ადამიანისთვის?

ზ) დამოკიდებული არის თუ არა ტესტის შედეგი დაავადების სტატუსზე?

თ) თუ ტესტის შედეგი დადებითია, აქედან ადამიანების რამდენი % არის დაავადებული? ჯანმრთელი?

16. არის თუ არა ახალგაზრდების მისწრაფებები დამოკიდებული ოჯახის შემოსავალზე? იხილეთ ცხრილი და

ოჯახის შემოსავალი	მისწრაფება			
	მხოლოდ სკოლა	ბაკალავრიატი	მაგისტრატურა	დოქტორანტურა
დაბალი	9	44	13	10
საშუალო	11	52	23	22
მაღალი	9	41	12	27

ამ ცხრილის დამუშავების შედეგი წარმოდგენილია SSPS ამონაბეჭდით.

statistic	df	Value	Prob
chi-Square	6	8.871	0.181

ა) რასუდრისკრიტერიუმისსტატისტიკისმნიშვნელობა?

ბ) დამოკიდებულია, თუ არა მისწრაფება ოჯახის შემოსავალზე?

17. შეუღლების ცხრილში ერთი ცვლადი პოლიტიკური კუთვნილებაა, მეორე ცვლადი პოლიტიკური იდეოლოგია.

პოლიტიკური მიკუთვნებულება	პოლიტიკური იდეოლოგია				
	ძალიან ლიბერალური	ოდნავ ლიბერალური	ზომიერი	ოდნავ კონსერვატორი	ძალიან კონსერვატორი
დემოკრატი	80	81	171	41	55
რესპუბლიკელი	30	46	148	84	99

ა) დამოკიდებული არიან თუ არა ეს ცვლადები?

ბ) რომელი უჯრედის დაკვირვებული სიხშირე აჩვენებს ყველაზე დიდ გადახრას დამოუკიდებლობისგან?

თავი 13 რეგრესია და წინასწარმეტყველება (მარტივი რეგრესიის მოდელი)

ორ რაოდენობრივ ცვლადს შორის დამოკიდებულება შეიძლება იყოს ფუნქციონალური ანუ ისეთი, როცა ერთი ცვლადის მნიშვნელობების მიხედვით ცალსახად შეგვიძლია გამოვთვალოთ მეორე ცვლადის შესაბამისი მნიშვნელობები. ასეთი დამოკიდებულების მრავალ მაგალითს სკოლის პროგრამაში ეცნობოდით. მაგალითად, ვიცით, რომ დროს, სიჩქარესა და განვლილ მანძილს შორის დამოკიდებულება, თანაბარი მოძრაობისას გამოითვლება ფორმულით $s = v \cdot t$. ამ ფორმულის მიხედვით უტყუარად შეგვიძლია გამოვთვალოთ განვლილი მანძილი, თუ ცნობილია სიჩქარე და დრო. ასეთივე მდგომარეობაა სამკუთხედის ფართობის გამოთვლისას. ვიცით, რომ ფართობი სიმაღლისა და

ფუძის სიგრძეების ნამრავლის ნახევრის ტოლია $S = \frac{ah}{2}$ (აქ a ფუძის სიგრძეა, h — სიმაღლისა).

ცალსახად შეგვიძლია კვადრატის ფართობის გამოთვლა $S = a^2$ ფორმულით, სადაც a კვადრატის გვერდის სიგრძეა. ასეთი მაგალითები თქვენთვის მრავლადაა ცნობილი.

მეორეს მხრივ, შესაძლებელია ცვლადებს შორის კავშირი არ იყოს ზუსტად ფუნქციონალური. მაგალითად, დათესილი მინდვრის ფართობით მოსავლის რაოდენობა ზუსტად, ფუნქციონალურად, არ შეიძლება აღინეროს. თუმცა შეგვიძლია ვივარაუდოთ, რომ მეტი ფართობის დათესვა იწვევს აღებული მოსავლის ზრდის ტენდენციას. ანუ ვვარაუდობთ, რომ ეს სიდიდეები (ფართობი და მოსავლიანობა) ერთმანეთთან დაკავშირებული არიან. ასეთი ტიპის კავშირები, როცა ერთი ცვლადის ზრდა ან კლება, იწვევს მეორე ცვლადის ზრდის ან კლების ტენდენციას აღინერება ამ ცვლადებს შორის კორელაციური კავშირით. თუ ერთი ცვლადის ცვლილება არ იწვევს მეორე ცვლადის ცვლილებას და პირიქით, ვამბობთ, რომ ცვლადები არაკორელირებულია. სხვა შემთხვევაში ისინი კორელირებული არიან. თუ რამდენად ძლიერია ეს კავშირი ცალკე კვლევის საგანია. კორელაციური კავშირის სიდიდეს კორელაციის კოეფიციენტით ვზომავთ. კორელაციის კოეფიციენტის დასადგენად ვატარებთ ცდას და მოვიპოვებთ მონაცემებს.

მეხუთე თავში, შერჩევებზე დაყრდნობით, ორ რაოდენობრივ ცვლადს შორის კავშირის დასადგენად, შემოღებული იყო პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი

$$r = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}} = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n \sum X^2 - (\sum X)^2][n \sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}.$$

ეს სიდიდე პოპულაციის უცნობი კორელაციის ρ კოეფიციენტის წერტილოვანი შეფასებაა. r -ის საშუალებით შეიძლება გაკეთდეს დასკვნები ρ -ს მნიშვნელობის შესახებ.

დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ

განვიხილოთ შემდეგი ჰიპოთეზის შემონმების ამოცანა:

$$H_0 : \rho = 0, H_A : \rho \neq 0,$$

სადაც ρ პოპულაციის კორელაციის კოეფიციენტი.

ვთქვათ, (X, Y) სიდიდეების განაწილება ნორმალურია. მაშინ H_0 -ის სამართლიანობისას სტატისტიკას

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

აქვს t -განაწილება, თავისუფლების ხარისხით $n-2$. ამგვარად, t -განაწილების ცხრილის საშუალებით შეიძლება შემონმდეს ეს ჰიპოთეზა.

სახელდობრ, H_0 -ს უარყოფთ, თუ

$$|t| \geq t_{n-2, \alpha/2} \quad (t \leq -t_{n-2, \alpha/2} \text{ ან } t \geq t_{n-2, \alpha/2})$$

და დავასკვნით რომ ორ ცვლადს შორის ნამდვილად არსებობს კავშირი; წინააღმდეგ შემთხვევაში H_0 ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გავაჩნია.

მე-5 თავში ჩვენ შევისწავლეთ, რომ წრფივი კავშირი ორ ცვლადს შორის აღინერება განტოლებით:

$$Y = \alpha + \beta X,$$

სადაც Y დამოკიდებული ცვლადია, X დამოუკიდებელი ცვლადია, α და β უცნობი სიდიდეებია (პოპულაციის პარამეტრებია). α წრფის თანაკვეთაა oy ღერძთან, β წრფის დახრილობა. ამ მოდელს მარტივი რეგრესიის მოდელი ეწოდება (ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი X და ერთი დამოკიდებული ცვლადი Y).

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით დავადგენთ, რომ α და β უცნობი პარამეტრების შეფასებებია:

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}.$$

$\hat{Y} = a + bX$ წრფეს ეწოდება რეგრესიის წრფის შეფასება, ან უმცირეს კვადრატთა მეთოდით აგებული წრფე. თუ ამ წრფის განტოლებაში X -ის ნაცვლად ჩავსვამთ მის დაკვირვებულ მნიშვნელობებს, შესაბამის \hat{Y}_i მნიშვნელობებს ეწოდება Y ცვლადის პროგნოზირებული მნიშვნელობები, ხოლო $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ სიდიდეებს კი — ნაშთები (ან ცდომილებები).

ჰიპოთეზის შემოწმება დახრილობის შესახებ

ორ ცვლადს შორის მნიშვნელოვანი კავშირის დადგენის ალტერნატიული გზა მდგომარეობს რეგრესიის წრფის პარამეტრების შესახებ ჰიპოთეზათა შემოწმებაში.

შესამოწმებელია, რომ $\beta = 0$, ალტერნატივის საწინააღმდეგოდ — $\beta \neq 0$,

$$H_0: \beta = 0, \quad H_A: \beta \neq 0.$$

თუ რეგრესიის წრფის დახრილობა ნულის ტოლია, ეს ნიშნავს, რომ არ არსებობს წრფივი დამოკიდებულება ორ ცვლადს შორის. ამ შემთხვევაში „ნამდვილი“ დამოკიდებულება მოცემულია შემდეგი სახით:

$$y_i = \alpha.$$

Y ცვლადი არ არის დამოკიდებული დამოუკიდებელ X ცვლადზე და, უბრალოდ, წარმოადგენს შემთხვევით შერჩევას $\mu = \alpha$ საშუალოთი და მუდმივი დისპერსიით. ამიტომ, როცა ვამოწმებთ ამ ჰიპოთეზას, ფაქტიურად ვამოწმებთ არის თუ არა წრფივი კავშირი Y და X ცვლადებს შორის. როცა უარვყოფთ ნულოვან ჰიპოთეზას, ვრწმუნდებით რომ X წარმოადგენს საჭირო ინფორმაციას Y -თვის.

კრიტერიუმის სტატისტიკა

ვთქვათ, Y_i არის Y ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობები, $i = 1, 2, \dots, n$; n — შერჩევის მოცულობა.

\hat{Y}_i არის გამოთვლილი მნიშვნელობები, რომლებიც მიღებულია $\hat{Y} = a + bX$ განტოლებიდან, თუ ამ განტოლებაში ჩასმულია X -ის მნიშვნელობები X_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

$Y_i - \hat{Y}_i = e_i$ — სხვაობას დაკვირვებულ და გამოთვლილ მნიშვნელობებს შორის ეწოდება **ნაშთი ან ცდომილება**.

ჰიპოთეზის შესამოწმებლად უნდა დავუშვათ, რომ ნაშთები ნორმალურადაა განაწილებული ნულის ტოლი საშუალოთი და მუდმივი σ^2 დისპერსიით (ამ დაშვების შესამოწმებლად აგებენ (e_i, \hat{Y}_i) გრაფიკულ დამოკიდებულებას). თუ e_i ნორმალურადაა განაწილებული, b დახრილობის კოეფიციენტი იქნება ნორმალურად განაწილებული საშუალოთი β და დისპერსიით, რომელიც გამოითვლება ფორმულით:

$$se(b) = \frac{\sigma}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}.$$

σ^2 -ის შეფასება გამოითვლება ფორმულით:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2 - b \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n-2}.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკაა

$$T = \frac{b - \beta}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}}$$

და ამ სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$ (2 აკლდება, რადგან შესაფასებელი გვაქვს ორი α და β პარამეტრი).

უარყოფის არე

უარყოფის არეს ავაგებთ სტიუდენტის ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილის გამოყენებით, რადგან კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$.

გადაწყვეტილება

თუ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა მოხვდა კრიტიკულ არეში, α მნიშვნელოვნების დონით, ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ. თუ კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობა არ მოხვდა კრიტიკულ არეში ნულოვან ჰიპოთეზას ვერ უარყოფთ, ეს კი ნიშნავს, რომ დამოკიდებული ცვლადი არ არის წრფივად დამოკიდებული დამოუკიდებელ ცვლადზე.

ჰიპოთეზის შემოწმება თანაკვეთის შესახებ

თუ ნულოვანი ჰიპოთეზა სრულდება, მაშინ a შეფასების საშუალოა α და სტანდარტული გადახრა გამოითვლება ფორმულით:

$$se(a) = \sigma \sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum X^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს სახე:

$$T = \frac{a - \alpha}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{\frac{1}{n} \sum X^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}}}$$

და ამ სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$. უარყოფის არეს ჩვენ ავაგებთ სტიუდენტის განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილის გამოყენებით.

მაგალითი 13.1. X არის რეკლამაზე დახარჯული ფული (ათასი დოლარი), Y მოგება (ათასი დოლარი).

$X :$	$Y :$
0.8	22
1.0	28
1.6	22
2.0	26
2.2	34
2.6	18
3.0	30
3.0	38
4.0	30
4.0	40
4.0	50

4.6	46
$\Sigma = 32.8$	$\Sigma = 384$

არის თუ არა კავშირი ამ ორ ცვლადს შორის? გამოვთვალოთ პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი. შევავსოთ შემდეგი ცხრილი:

$XY :$	$X^2 :$	Y^2
17.6	0.64	484
28.0	1.00	784
35.2	2.56	484
52.0	4.00	676
74.8	4.84	1156
46.8	6.76	324
90.0	9.00	900
114.0	9.00	1444
120.0	16.00	900
160.0	16.00	1600
200.0	16	2500
211.6	21.16	2116
$\Sigma = 1.150$	$\Sigma = 106.96$	$\Sigma = 13368$

ფორმულაში

$$r = \frac{\Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \bar{X})^2 \Sigma(Y - \bar{Y})^2}} =$$

$$= \frac{n \Sigma XY - \Sigma X \Sigma Y}{\sqrt{(n \Sigma X^2 - (\Sigma X)^2)(n \Sigma Y^2 - (\Sigma Y)^2)}}.$$

ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$r = \frac{12 \cdot 11500 - 384 \cdot 32.8}{\sqrt{(12 \cdot 106.96 - 32.8^2) \cdot (12 \cdot 13.368 - 384^2)}} = 0.7344.$$

რეკლამაზე დახარჯულ ფულსა და მოგებას შორის არსებობს წრფივი დადებითი კავშირი.

დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ

მიუხედავად იმისა, რომ კორელაციის კოეფიციენტი საკმაოდ დიდია, $r = 0.7343$, უნდა გვახსოვდეს, რომ ის არის გამოთვლილი მხოლოდ 12 მონაცემზე დაყრდნობით და ყოველთვის არსებობს შეცდომის ალბათობა. იმისათვის, რომ დავრწმუნდეთ არსებობს თუ არა კავშირი მოგებასა და რეკლამას შორის უნდა შევამოწმოთ ჰიპოთეზა: უდრის თუ არა ნულის პოპულაციის კორელაციის კოეფიციენტი ρ .

$$H_0 : \rho = 0, H_A : \rho \neq 0.$$

ამისათვის კი გამოსათვლელია სტატისტიკის მნიშვნელობა:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0.7344}{\sqrt{\frac{1-0.5393}{10}}} = 3.422.$$

ამ სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$. თუ $\alpha = 0.05$, $t_{crit} = 2.228$.
 . ლაღგან $t = 3.422 > 2.228$, H_0 -ს უარყოფთ. რეკლამაზე დახარჯულ ფულსა და მოგებას შორის არსებობს წრფივი კავშირი, ე. ი. რაც უფრო მეტ ფულს დავხარჯავთ რეკლამაზე, მით უფრო მეტი მოგებაა მოსალოდნელი.

ორ ცვლადს შორის კავშირის დასადგენად მივმართოთ ალტერნატიულ გზას. საპროგნოზო განტოლებას აქვს სახე:

$$\begin{aligned} \hat{Y} &= a + bX, \\ b &= \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{n}}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}} = \\ &= \frac{1150 - \frac{32.8 \cdot 384}{12}}{106.96 - \frac{32.8^2}{12}} = 5.801, \\ a &= \bar{Y} - b\bar{X} = 32 - 5.801 \cdot 2.733 = 16.146. \end{aligned}$$

უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებულ რეგრესიის განტოლებას აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{Y} = 16.146 + 5.801 \cdot X.$$

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა:

$$H_0 : \beta = 0, H_A : \beta \neq 0$$

პოპულაციის დისპერსიის შეფასებაა:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2 &= \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2 - b \sum (X - \bar{X}) \sum (Y - \bar{Y})}{n-2} = \\ &= \frac{1080 - 5.801 \cdot 100.4}{12-2} = 49.76, \\ \sum e_i^2 &= 497.556, \\ T &= \frac{b - \beta}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}} = \frac{5.801 - 0}{\frac{\sqrt{49.76}}{\sqrt{17.31}}} = 3.421, \end{aligned}$$

$\hat{\sigma}$ შეფასების სტანდარტული შეცდომაა.

თავისუფლების $n-2 = 12-2 = 10$ ხარისხისა და $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონისათვის, კრიტიკული მნიშვნელობა იქნება $t_{n-2, \alpha/2} = t_{10, 0.025} = 2.228$. ვინაიდან $3.421 > 2.228$ -ზე, ნულოვანი ჰიპოთეზა უნდა უარყოფთ. რეკლამაზე დახარჯულ ფულსა და მოგებას შორის არსებობს წრფივი დამოკიდებულება. რაც ურო დიდ ფულს ვხარჯავთ რეკლამაზე, მით უფრო დიდია მოგება.

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა თანაკვეთის შესახებ.

შევამოწმოთ, მაგალითად, $H_0 : a = 1$, $H_A : a \neq 1$.

კრიტერიუმის სტატისტიკაა

$$T = \frac{a - \alpha}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum (X - \bar{X})^2}}} = 2.99.$$

ვინაიდან $2.99 > 2.228$, ნულოვანი ჰიპოთეზა $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით უნდა უარყოფთ.

საპროგნოზო ინტერვალები

განტოლება

$$Y = a + bX$$

გვაძლევს საშუალებას დავინახოთ რა არის მოსალოდნელი, თუ X მიიღებს გარკვეულ მნიშვნელობას. მაგალითად, თუ X რეკლამაზე დახარჯული ფულია, რა მოგებას მოიტანს ის?

სიდიდეს — $\hat{Y}_0 = a + bX_0$ აქვს საშუალო $\alpha + \beta X_0$ და სტანდარტული გადახრა

$$se(Y_0) = \sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}.$$

ნდობის ინტერვალს Y_0 -თვის აქვს სახე:

$$Y_0 \pm t\sigma \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_0 - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2}},$$

სადაც t სიდიდე უნდა ვიპოვოთ t -განაწილების ზედა კრიტიკული წერტილების ცხრილში, $n-2$ თავისუფლების ხარისხის და $(100-\alpha)\%$ სანდობის შესაბამისად. ეს ინტერვალი დამოკიდებულია იმაზე, თუ კონკრეტულად რომელი მნიშვნელობისათვისაა ის ასაგები. $(X_0 - \bar{X})^2$ ზრდასთან ერთად იზრდება სტანდარტული გადახრა და ინტერვალი უფრო განიერი ხდება იმ X_0 -თვის, რომლებიც უფრო შორს არიან გადახრილი \bar{X} -გან და უფრო ვიწროა იმ მნიშვნელობებისათვის, რომლებიც ახლოს არიან \bar{X} -თან.

დავუბრუნდეთ 13.1 მაგალითს და ვუპასუხოთ შემდეგ კითხვებს:

ა) საშუალოდ რა მოგებას უნდა ველოდოთ, თუ რეკლამაზე დავხარჯავთ 2100 დოლარს?

ბ) ააგეთ 95% -იანი ნდობის ინტერვალი ამ მოგებისათვის.

ა მ ო ხ ს ნ ა . ა) საპროგნოზო განტოლებაში ჩასმის შემდეგ მივიღებთ:

$$\hat{Y} = a + bX = 16143 + 5.801 \cdot 2.1 = 28.325.$$

საშუალოდ მოგება შეადგენს 28.325 დოლარს.

ბ) ამ მოგების 95% -იანი ნდობის ინტერვალია:

$$28.325 \pm 2.228 \cdot 7.05 \sqrt{1 + \frac{1}{12} + \frac{(2.1 - 2.73)^2}{17.31}} = 28.325 \pm 16.52,$$

ანუ (11.810; 44.840).

დეტერმინაციის კოეფიციენტი. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება

მაგალითი 13.2. განვიხილოთ ისევ 13.1 მაგალითი. მოგებებში სრული ცვალებადობა მოცემულია ფორმულით:

$$SST = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n} = 13368 - \frac{(384)^2}{12} = 1080,$$

სადაც SST დამოკიდებული ცვლადის (მოგებების) სრული ცვალებადობაა, n შერჩევის მოცულობაა, Y_i დამოკიდებული ცვლადის i -ური მნიშვნელობაა, \bar{Y} დამოკიდებული ცვლადის შერჩევის საშუალოს მნიშვნელობაა.

უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით ვაგებთ წრფეს, რომლისთვისაც მინიმალურია ნაშთების კვადრატების ჯამი

$$SSE = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 497.556,$$

სადაც Y_i არის დამოკიდებული ცვლადის i -ური დაკვირვებული მნიშვნელობა, \hat{Y}_i რეგრესიის განტოლებაში X ჩასმის შემდეგ მიღებული (გამოთვლილი) მნიშვნელობა.

SSE რეგრესიის წრფისგან გადახრების კვადრატების ჯამი წარმოადგენს დამოკიდებული ცვლადის ცვალებადობის ნაწილს, რომელიც არ არის ახსნილი რეგრესიის წრფით.

ცვალებადობის ნაწილი, რომელიც ახსნილია რეგრესიის წრფით, გამოითვლება როგორც

$$SSR = SST - SSE = 1080 - 497.556 = 582.444.$$

სრულ ცვალებადობაში რეგრესიით ახსნილ ცვალებადობის წილს ეწოდება დეტერმინაციის კოეფიციენტი

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{582.444}{1080} = 0.5393.$$

ეს ნიშნავს, რომ ამ შერჩევაში მოგებების ცვალებადობის 53.93% აიხსნება რეკლამაზე დახარჯული თანხით.

R^2 -ის თვისებები

R^2 იღებს მნიშვნელობებს ნულსა და ერთს შორის. თუ ცვლადებს შორის ზუსტი წრფივი კავშირია, მაშინ $R^2 = 1$. ამ დროს ყველა დაკვირვებული მნიშვნელობა ძევს რეგრესიის წრფეზე. რაც უფრო ძლიერია კავშირი ცვლადებს შორის, მით უფრო ახლოსაა R^2 სიდიდე ერთთან.

როგორც ნაჩვენებია იყო მე-5 თავში, არსებობს დეტერმინაციის კოეფიციენტის გამოთვლის ალტერნატიული გზა:

$$R^2 = r^2, \quad r^2 = 0.7344^2 = 0.5393,$$

სადაც R^2 დეტერმინაციის კოეფიციენტია, r პირსონის კორელაციის კოეფიციენტია.

თუ R^2 მცირეა, ე. ი. რეგრესიით ახსნილია სრული გაბნევის მცირე წილი, მოსაძებნია სხვა ალტერნატიული მოდელი (ვთქვათ, არანრფივი ან მრავლობითი წრფივი რეგრესიის მოდელი და სხვა), რომელიც უფრო ეფექტურად ახსნის დამოკიდებული ცვლადის დაკვირვებული მნიშვნელობების სრულ გაბნევას თავისი საშუალო მნიშვნელობის მიმართ.

რეგრესიული ანალიზი მრუდწირული (არანრფივი) კავშირისთვის

თუ გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კავშირი ორ ცვლადს შორის არ არის წრფივი და ახლოს არის ერთ ერთ ქვემოთ მოყვანილ დამოკიდებულებასთან:

$$Y = X^2, \quad Y = \sqrt{X} \quad \text{ან} \quad Y = \log X \quad \text{ან} \quad \text{სხვა},$$

მაშინ ხელოვნურად, ცვლადების ტრანსფორმაციით, კავშირი შეიძლება გარდაიქმნას წრფივ დამოკიდებულებად.

მაგალითი 13.3. დამოკიდებულება გამოშვებულ პროდუქციას და ზეგანაკვეთურ სამუშაო საათებს შორის მოცემულია ცხრილით:

გამოშვებული პროდუქცია (ცალი)	200	500	1000	1300	1300	800
ზეგანაკვეთი (საათი)	25	25	75	175	200	75

გამოშვებული პროდუქცია (ცალი)	200	1400	600	1100	900	900	1200
ზეგანაკვეთი (საათი)	50	225	75	125	75	75	175

გამოშვებული პროდუქცია (ცალი)	400	30	160	1100	1200	700	1000
ზეგანაკვეთი (საათი)	50	50	250	150	50	100	

წრფივი რეგრესიული ანალიზის შედეგები მოცემულია 13.1 ცხრილში

ცხრილი 13.1

REGRESSION EQUATION			
VARIABLE	B	ST. ERROW	T-VALUE
X	0.1526	0.01858	8.20
INTERSEPT	-24.78		
CORRELATION COEFF.	0.888		
R SQUARE	0.789		

STANDARD ERROW OF ESTIMATE	32.08		
----------------------------	-------	--	--

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე

$$\hat{Y} = -24.78 + 0.1526X$$

გაბნევის დიაგრამა გვიჩვენებს, რომ კავშირი ამ ორ ცვლადს შორის შესაძლებელია უფრო კარგად აისახოს არანრფივი დამოკიდებულებით.

X-ის ნაცვლად შემოვიღოთ ახალი ცვლადი X^2 და ჩავატაროთ რეგრესიული ანალიზი. ქვემოთ მოცემულია ამონაბეჭდი SPSS პროგრამიდან (იხ. 13.2 ცხრილი).

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$\hat{Y} = 17.224 + 0.0001X^2$$

თუ შევადარებთ 13.1 და 13.2 ცხრილების შედეგებს ვნახავთ, რომ ცვლადის ტრანსფორმაციის შედეგად R^2 გაიზარდა 78.9%-დან 90.5%-მდე. სტანდარტული შეცდომა შემცირდა 32.08-დან 21.55-მდე. მეორე წრფე უფრო სასარგებლოა პროგნოზისთვის, მას ახლავს შეფასების ნაკლები შეცდომა.

ცხრილი 13.2

REGRESSION EQUATION			
VARIABLE	B	ST. ERROW B	T-VALUE
X SQUARE	0.0001	0.0000076	13.08
INTERSEPT	17.224		
CORRELATION COEFF.	0.9513		
R SQUARE	0.905		
STANDARD ERROW OF ESTIMATE	21.55		

მრავლობითი რეგრესია და კორელაცია

მარტივი რეგრესიის მოდელი გვეხმარება გარკვევაში, თუ რა გავლენას ახდენს ერთი ცვლადი (დამოუკიდებელი ცვლადი) მეორე ცვლადზე (დამოკიდებულ ცვლადზე). მიუხედავად იმისა, რომ მარტივი რეგრესიის მოდელს იყენებენ მრავალ პრაქტიკულ ამოცანაში, არსებობს ამოცანები, სადაც ერთი დამოუკიდებელი ცვლადით შემოფარგვლა არ არის გამართლებული.

განვიხილოთ მაგალითი.

მაგალითი 13.4. რაზე არის დამოკიდებული სახლის გასაყიდი ფასი Y ? ჩამოვთვალოთ შესაძლო დამოუკიდებელი ცვლადები: X_1 სახლის ფართობი (კვ.მ), X_2 — სახლის „ასაკი“, X_3 — საძინებელი ოთახების რაოდენობა, X_4 — სველი წერტილების რაოდენობა, X_5 — ბუხრების რაოდენობა, Y — სახლის გასაყიდი ფასი.

მარტივი რეგრესიის მოდელის განხილვისას, ჩვენ ვიხილავდით ერთ დამოუკიდებელ X ცვლადს და ერთ დამოკიდებულ Y ცვლადს. დამოუკიდებელი ცვლადით ვცდილობდით აგვეხსნა დამოკიდებული ცვლადის ცვალებადობა. როგორც წესი, არ არსებობს ზუსტი კავშირი X და Y ცვლადებს შორის, ეს კი ნიშნავს იმას, რომ თავს იჩენს e_i ნაშთი — სხვაობა დაკვირვებულ და რეგრესიით გამოთვლილ სიდიდეებს შორის. დაშვებული იყო, რომ e_i მნიშვნელობები ნორმალურად არიან განაწილებული ნულის ტოლი საშუალოთი და სტანდარტული გადახრით, რომელსაც ეწოდება შეფასების სტანდარტული შეცდომა.

თუ სტანდარტული შეცდომა საკმაოდ დიდია, უნდა ჩავთვალოთ, რომ რეგრესიის მოდელი არ არის სასარგებლო პროგნოზისათვის.

დამოკიდებულ ცვლადზე ჯერ „არახსნილი“ ცვალებადობის ასახსნელად მრავლობითი რეგრესიის მოდელში დამატებულია დამოუკიდებელი ცვლადები. მრავლობითი რეგრესიის მოდელს ზოგადად აქვს შემდეგი სახე:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \dots + \beta_k X_k$$

სადაც Y დამოკიდებული ცვლადია, X_1, X_2, \dots, X_k დამოუკიდებელი ცვლადებია, რომლებსაც ხშირად ამხსნელ ცვლადებს ან პრედიქტორებს, ანდა რეგრესორებს უწოდებენ. β_i არის X_i ცვლადის რეგრესიის კოეფიციენტი, $i = 1, 2, \dots, k$.

იმისათვის, რომ გამოვიყენოთ მრავლობითი რეგრესიის მოდელი უნდა სრულდებოდეს შემდეგი პირობები:

1. ნაშთებს აქვს ნორმალური განაწილება;
2. ნაშთების საშუალო ნულის ტოლია;
3. დამოუკიდებელი ცვლადების ნებისმიერი კომბინაციისთვის ნაშთების დისპერსია არის ერთი და იგივე და σ^2 -ის ტოლი.

როცა გვაქვს დამოკიდებული ცვლადის და k დამოუკიდებელი ცვლადის n მოცულობის შერჩევები, უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_k X_k,$$

$$\hat{Y}_i = b_0 + b_1 X_{i1} + b_2 X_{i2} + \dots + b_k X_{ik},$$

სადაც b_i , $i = 1, 2, \dots, k$, დახრილობის კოეფიციენტია, \hat{Y} დამოკიდებული ცვლადის რეგრესიით გამოთვლილი მნიშვნელობაა, X_i — დამოუკიდებელი ცვლადია, b_i — უმცირეს კვადრატთა მეთოდით მიღებული β_i პარამეტრების შეფასებებია, $i = 1, 2, \dots, k$. რეგრესიის კოეფიციენტები გამოთვლილია უმცირეს კვადრატთა მეთოდის გამოყენებით, ანუ $\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$ მინიმალურობის მოთხოვნით.

შ ე ნ ი შ ე ნ ა . შერჩევის მოცულობა უნდა იყოს 4-ჯერ მეტი მაინც, ვიდრე დამოუკიდებელი ცვლადების რაოდენობა.

ცხრილი 13.3 (მაგალითი 13.3)

დაკვირვებები	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	21400	1410	3.0	3.0	1.0	0
2	37275	37275	5.0	3.0	2.5	1
$n = 531$	47175	2250	1.0	4.0	2.75	2

ცხრილი 13.4

ცვლადი	საშუალო	სტანდარტული გადახრა	მოცულობა
Y	45009.6139	14290.2132	531
X_1	1715.5273	588.1123	531
X_2	4.3936	7.7781	531
X_3	3.4038	0.0555	531
X_4	1.9143	0.6094	531
X_5	0.9208	0.5608	531

კორელაციური მატრიცა

პირველ რიგში გამოსათვლელია კორელაციის კოეფიციენტები დამოკიდებულ ცვლადსა (სახლის გასაყიდი ფასი) და ცალ-ცალკე ყველა დამოუკიდებელ ცვლადს შორის.

კორელაციის კოეფიციენტი ყველა წყვილს შორის გამოითვლება ფორმულით:

$$r = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}} = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{(n \sum X^2 - (\sum X)^2)(n \sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}.$$

კორელაციურ მატრიცას აქვს სახე:

ცხრილი 13.5

	Y	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
--	-----	-------	-------	-------	-------	-------

Y	1.000	0.841	-0.068	0.494	0.720	0.599
X ₁	0.841	1.000	0.054	0.644	0.680	0.589
X ₂	-0.068	0.054	1.000	0.007	-0.149	0.086
X ₃	0.494	0.644	0.007	1.000	0.551	0.338
X ₄	0.720	0.680	-0.149	0.551	1.000	0.518
X ₅	0.599	0.589	0.086	0.338	0.518	1.000

კორელაციის კოეფიციენტი გასაყიდ ფასს და სახლის ფართობს შორის 0.841;
კორელაციის კოეფიციენტი გასაყიდ ფასს და სახლის ასაკს შორის უარყოფითია და უდრის
-0.068 -ს, კორელაციის კოეფიციენტი სახლის ფართობსა და სახლის ასაკს შორის 0.054-ია და ა. შ.

ამონაბეჭდი SPSS პროგრამიდან

ცხრილი 13.6

R SQUARE	0.76686			
ADJUSTED R SQUARE	0.76509			
STANDARD ERROR	6926.16662			
ANALYSIS OF VARIANCE	DF	SUM OF SQUARES	MEAN SQUARE	F
REGRESSION	4	82998243602.67404	20749560900.6651	432.53678
RESIDUAL (UNEXPLAINED)	536	252331158443	47971784.11251	
VARIABLES IN THE EQUATION				
VARIABLE	B	STD.ERROR B	T	
X ₁	16.43956	0.84287	19.504	
X ₃ BEDROOMS	-2845.89318	616.91611	-4.613	
X ₄ BATHS	6599.24009	604.46151	9.367	
X ₅ FIREPLACES	2507.93424	681.93968	3.677	
CONSTANT	11549.1426			

რეგრესიის განტოლებას აქვს სახე:

$$Y = 11549.14 + 16.44X_1 - 2845.89X_3 + 6599.24X_4 + 2507.93X_5.$$

X₂ ცვლადი არ არის შეყვანილი, რადგანაც კორელაცია გასაყიდ ფასსა და სახლის ასაკს შორის უმნიშვნელოა ($r = 0.068$).

გავაკეთოთ პროგნოზი: საშუალოდ რა ფასად გაიყიდება სახლი, თუ $X_1 = 2100$, $X_3 = 4$, $X_4 = 1.75$, $X_5 = 2$.

ფასი = $11549.14 + 16.44 \cdot 2100 - 2845.89 \cdot 4 + 6599.24 \cdot 1.75 + 2507.93 \cdot 2 = 51253.19$ დოლარი.

13.6 ცხრილზე დაყრდნობით შეგვიძლია გავაკეთოთ დასკვნები რეგრესიის კოეფიციენტების შესახებ. შევამოწმოთ $H_0: \beta = 0$ ჰიპოთეზები $H_A: \beta \neq 0$ ალტერნატივის საწინააღმდეგოდ. ამისათვის უნდა გავიგოთ რას უდრის T სტატისტიკის მნიშვნელობა. T-ს ყველა (19.504, -4.613, 9.367, 3.677) მნიშვნელობა მეტია 1.96 კრიტიკულ მნიშვნელობაზე. ამრიგად, არსებული მონაცემებით ნულოვან ჰიპოთეზას უარყოფთ და მნიშვნელოვნების დონით სარწმუნოა მტკიცება, რომ სახლის ფასსა და განხილულ დამოუკიდებელ ცვლადებს შორის წრფივი კავშირი არსებობს.

რამდენად კარგია პროგნოზი?

13.5 ცხრილის მიხედვით დეტერმინაციის კოეფიციენტი $R^2 = 0.76686$. ფასების თითქმის 77% აიხსნება ოთხი დამოუკიდებელი ცვლადით.

F სტატისტიკაზე დაყრდნობით შეგვიძლია აგრეთვე დავასკვნათ ხსნის თუ არა მოდელი ფასების ცვალებადობის მნიშვნელოვან წილს. F -ის მნიშვნელობა უდრის 432.53678. კრიტიკული მნიშვნელობა, როცა $\alpha = 0.01$ და თავისუფლების ხარისხი $531 - 5 = 526$ (შეფასებულია 5 კოეფიციენტი) არის 3.32.

დასკვნა. რეგრესიის მოდელი ხსნის ფასების ცვალებადობის მნიშვნელოვან ნაწილს. ADJUSTED R^2 — შესწორებული დეტერმინაციის კოეფიციენტი (თავისუფლების ხარისხებთან შეთანხმებული). ამ სიდიდის გამოყენების მნიშვნელობა მდგომარეობს იმაში, რომ თუ დამოუკიდებელ ცვლადთა k რაოდენობა შედარებადია n -თან, R^2 -ის მნიშვნელობა შეიძლება არარეალურად დიდი გამოვიდეს და მიგვიყვანოს მცდარ დასკვნამდე. სწორედ ამის ასაცილებლად შემოღებულია ADJUSTED R^2 .

იმისათვის, რომ ვუპასუხოთ კითხვას, რამდენად კარგია პროგნოზი (რამდენად ვარგისიანია მოდელი), ჩვენ ასევე უნდა ვნახოთ რას უდრის პროგნოზის სტანდარტული შეცდომა (ცხრილი 13.5). მიუხედავად იმისა, რომ დეტერმინაციის კოეფიციენტი დიდია (0.76686), სტანდარტული შეცდომაც დიდია და შეადგენს 6926.17 დოლარს.

ალტერნატიული გზაა ვარიაციის კოეფიციენტის გამოთვლა. V არიაციის კოეფიციენტი

$$CV = \frac{\text{სტანდარტული შეცდომა}}{Y\text{-ის საშუალო}} = \frac{6926.17}{45009.6139} \cdot 100 = 15.3\%$$

(ითვლება, რომ თუ მოდელი ვარგისიანია, ის არ უნდა აღემატებოდეს 10% -ს).

როგორ უნდა შევამციროთ პროგნოზის შეცდომა?

სანამ ვუპასუხებთ ამ კითხვას, მაგალითზე ვაჩვენოთ რას ნიშნავს რეგრესიის კოეფიციენტები.

β_0 — მოდელში არის თანაკვეთა, β_0 არის Y -ის საშუალო როცა ყველა $X_i = 0$. ჩვენ მაგალითში ეს იქნება ნაკვეთის ფასი.

β_1 — ფასების საშუალო ცვლილება, როცა ფართობი იცვლება ერთი კვადრატული მეტრით. $\beta_1 = 16.44$ ნიშნავს, რომ ფასი საშუალოდ 16.44 დოლარით იზრდება, როცა ფართი იზრდება 1 კვ.მ-ით.

X_4 -ის კოეფიციენტი (სველი წერტილების რაოდენობა) და X_5 -ის კოეფიციენტი (ბუხრების რაოდენობა) დადებითია, მათი რაოდენობის გაზრდა იწვევს ფასის გაზრდას. ეს მოსალოდნელია, მაგრამ საკვირველია, რომ X_3 -ის კოეფიციენტი (საძინებელი ოთახების რაოდენობა) არის -2845.89. ამ ოთახების ერთით გაზრდა ფასს ამცირებს 2845.89-ით.

13.5 ცხრილის მიხედვით კავშირი ფასსა და ოთახებს შორის დადებითია და შეადგენს 0.494.

რაც იმას ნიშნავს, რომ თუ მხედველობაში არ მივიღებთ სხვა ცვლადებს, ოთახების რაოდენობის გაზრდა იწვევს ფასის გაზრდას. რატომ ხდება კავშირი უარყოფითი? იმიტომ რომ გასათვალისწინებელია მულტიკოლინეარულობა (მრავლობითი კორელაცია).

მულტიკოლინეარულობას ადგილი აქვს მაშინ, თუ დამოუკიდებელი ცვლადები ერმანეთა-ნაა დაკავშირებული. როგორც ვხედავთ:

$$r_{X_3X_1} = 0.644, \quad r_{X_3X_4} = 0.551, \quad r_{X_3X_5} = 0.338,$$

ანუ ყველა კორელაცია მნიშვნელოვანია.

X_3 ცვლადი კორელირებს ბევრ დამოუკიდებელ ცვლადთან. დასაშვებია მისი ამოღება მოდელიდან და შესაძლებელია სხვა დამოუკიდებელი ცვლადების შეყვანა, მაგალითად, შეიძლება შეყვანილი იყოს სახლის ადგილმდებარეობა, მაგრამ ეს ცვლადი არის თვისობრივი.

ფიქტიური ცვლადები რეგრესიულ ანალიზში

ხშირ შემთხვევაში რეგრესიულ ანალიზში გვჭირდება თვისობრივი ცვლადების გამოყენება. მაგალითად, თუ გვინდა განვიხილოთ შემოსავლების მოდელი, ერთ-ერთი დამოუკიდებელი ცვლადი შეიძლება იყოს სქესი (სახელების სკალა), პარტიული კუთვნილება, ეროვნება და ა.შ.

ამ პრობლემის დასაძლევად იყენებენ ფიქტიურ ცვლადებს (dummy variables). მაგალითად, თუ დამოუკიდებელი ცვლადი არის სქესი, ფიქტიური ცვლადი შეგვიძლია განვმარტოთ:

$X = 0$ — მამრობითი,

$X = 1$ — მდედრობითი.

თუ თვისობრივი ცვლადის კატეგორიების რაოდენობა ორზე მეტია, შეიძლება გამოვიყენოთ რამდენიმე ფიქტიური ცვლადი. მაგალითად, ოჯახური მდგომარეობა:

თუ მართახელაა — $X_1 = 1$, სხვა დანარჩენ შემთხვევაში $X_1 = 0$.

თუ დაოჯახებულია — $X_2 = 1$, სხვა დანარჩენ შემთხვევაში $X_2 = 0$.

თუ ქვრია — $X_3 = 1$, სხვა დანარჩენ შემთხვევაში $X_3 = 0$.

თუ გაყრილია — $X_4 = 1$, სხვა დანარჩენ შემთხვევაში $X_4 = 0$.

მაგალითი 13.5. რეგრესიის განტოლება სახლის გასაყიდ ფასსა და სახლის ფართობს შორის შემდეგი სახისაა:

$$\text{გასაყიდი ფასი} = 9915.78 + 20.45 (\text{ფართობი}).$$

შემოვიღოთ ახალი ცვლადი:

$X_6 = 1$ — სახლში არის კონდიციონერი,

$X_6 = 0$ — სახლში არ არის კონდიციონერი,

მაშინ რეგრესიის განტოლება მიიღებს სახეს

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X_1 + b_6 X_6 = 8739.21 + 18.11 X_1 + 2455.16 X_6.$$

თუ $X_6 = 0$, მაშინ $\hat{Y} = 8739.21 + 18.11 X_1$.

თუ $X_6 = 1$, მაშინ $\hat{Y} = 11194.37 + 18.11 X_1$.

სახლის ფასი საშუალოდ $11194.37 - 8739.21 = 2455.16$ დოლარით მეტია, თუ სახლში დაყენებულია კონდიციონერი.

შემოვიღოთ კიდევ ერთი ფიქტიური ცვლადი — სახლის ადგილმდებარეობა.

$X_7 = 1$ — პრესტიჟული ადგილი,

$X_7 = 0$ — არაპრესტიჟული ადგილი.

ცხრილი 13.7

R SQUARE	0.8940
ADJUSTED R SQUARE	0.8920
STANDARD ERROR	514.1353

$$\hat{Y} = 1693 X_1 + 4154.21 X_4 + 2010.45 X_5 + 1972.11 X_6 + 9699.80 X_7.$$

ჩვენ ვხედავთ, რომ ცვლადის ამოღებით და ორი ახალი ცვლადის შეყვანით პროგნოზის შეცდომა მნიშვნელოვნად შემცირდა.

შეჯამება

რეგრესია და კორელაცია შეისწავლის ორ ცვლადს შორის სტატისტიკური კავშირის ასპექტებს. აღწერილია უცნობი რეგრესიის კოეფიციენტების შეფასების პროცედურები, ჰიპოთეზების შემოწმება და ნდობის ინტერვალების აგება; უცნობი დისპერსიის შეფასება, კორელაციისა და დეტერმინაციის კოეფიციენტების გამოთვლა; მოდელის გამოსაყენებლად ვარგისიანობის შემოწმება.

ხშირ შემთხვევაში რაიმე ცვლადის ვარიაციულობის (ცვალებადობის) ახსნა ვერ ხერხდება მხოლოდ ერთი ფაქტორის გავლენით და ამიტომ განიხილება უფრო რთული მრავლობითი წრფივი რეგრესიული მოდელი.

ასევე განიხილება როგორ შეიძლება ცვლადთა გარდაქმნით არანრფივი კავშირის შესწავლა.

რამოდენიმე პრაქტიკული ამოცანის ამოხსნა

1. მერიის თანამშრომელს დაავალეს გაერკვია, როგორ არის დამოკიდებული წყლის მოხმარება ოჯახის ზომაზე. მან გადაწყვიტა წრფივი რეგრესიული მოდელის აგება. წინა თვის 15 ოჯახის მონაცემებია:

წყლის მოხმარება (გალონი):	1100	1425	785	950	1200
ოჯახის ზომა:	3	5	2	3	4

წყლის მოხმარება (გალონი):	1152	973	1225	1600	700
ოჯახის ზომა:	4	3	5	4	3

წყლის მოხმარება (გალონი):	1100	1414	700	953	1063
---------------------------	------	------	-----	-----	------

ოჯახის ზომა:	5	4	2	2	2
--------------	---	---	---	---	---

კორელაციის კოეფიციენტი მიღებული იყო კომპიუტერული პროგრამის მეშვეობით.

ცხრილი 13.8

R-SQUARE		0.551986	
CORRELATION COEFFICIENT		0.742958	
F FOR ANALYSIS OF VARIANCE (D.F. = 1,13)		16.1069	
STANDARD ERROR OF ESTIMATE		197.084	
VARIABLE	REG. COEFF.	STD. ERR. COEFF.	T
Y	188.011	46.978	4.00212
INTERCEPT	470.094		

კორელაციის კოეფიციენტი $r = 0.743$.

შევამოწმოთ ჰიპოთეზა: $H_0: \rho = 0$, $H_A: \rho \neq 0$, $\alpha = 0.05$,

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0.743}{\sqrt{\frac{1-(0.743)^2}{13}}} = 4.002.$$

$t_{crit} = t_{n-2, \alpha/2} = t_{13, 0.025} = 2.160$ და რადგან $4.002 > 2.160$ დავასკვნით, რომ ოჯახის ზომასა და მობარებულ წყალს შორის დადებითი კავშირი არსებობს.

თუ კომპიუტერით დავთვლით რეგრესიის კოეფიციენტებს, მაშინ მივიღებთ, რომ საპროგნოზო წრფეს აქვს შემდეგი სახე:

$$\hat{Y} = 470.094 + 188.011X.$$

პროგნოზის სტანდარტული შეცდომაა 197.084. დეტერმინაციის კოეფიციენტი უდრის 0.551986, ანუ ოჯახის ზომა ხსნის წყლის ხარჯვის ცვალებადობის მხოლოდ 55%-ს.

ვთქვათ, ამ მოდელზე დაყრდნობით გვინდა გავიგოთ საშუალოდ რამდენ წყალს ხარჯავს ხუთ კაციანი ოჯახი და ავაგოთ 90% -იანი ნდობის ინტერვალი. გამოვთვალოთ ნაშთები.

	დაკვირვებული Y	გამოთვლილი \hat{Y}	ნაშთი $e = Y - \hat{Y}$
1	1100	1034.13	65.8713
2	1425	1410.15	14.8486
3	785	846.17	-61.1173
4	950	1034.13	-84.1287
5	1200	1222.14	-22.1401
6	1152	1222.14	-70.1401
7	973	1034.13	-61.1287
8	1525	1410.15	114.849
9	1600	1222.14	377.860
10	700	1034.13	-334.129
11	1100	1410.15	-310.151

12	1412	1222.14	191.860
13	700	846.117	-146.117
14	953	846.117	106.883
15	1063	846.117	216.883

ნდობის ინტერვალია

$$\hat{Y} \pm t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{SSE}{n-2} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{n}} \right)}$$

\hat{Y} -ის გამოსათვლელად საპროგნოზო განტოლებაში ჩავსვით $X = 5$,
 $\hat{Y} = 470.097 + 188.01 \cdot 5 = 1410.152$.

ხუთკაციანი ოჯახი საშუალოდ ხარჯავს 1410.152 გალონს.

13.8 ცხრილიდან $\sqrt{\frac{SSE}{n-2}} = 197.84$ (სტანდარტული შეცდომა), $t_{\alpha/2} = 1.771$, $\alpha = 0.1$.

ნდობის ინტერვალია:

$$1410 \pm 1.771 \cdot 197.084 \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(5 - 3.4)^2}{191 - \frac{2601}{15}}} = 1410 \pm 384.28$$

ხუთკაციანი ოჯახი ხარჯავს 1025 გალონიდან 1794.28 გალონამდე. მიუხედავად იმისა, რომ ეს შეიძლება იყოს სასარგებლო ინფორმაცია, შეფასების სიზუსტე არ არის საკმარისი.

კითხვები

1. არსებობს თუ არა კავშირი ადამიანების ასაკსა და საცურაო აუზზე დასწრებას შორის?

ასაკი X	16	15	28	16	29	38
კვირაში დასწრება Y	7	3	6	5	1	2

ასაკი X	48	18	24	33	56
კვირაში დასწრება Y	4	7	4	5	1

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა.

ბ) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და შეამოწმეთ მნიშვნელოვნად განსხვავდება თუ არა ის პოპულაციაში ნულოვანი კორელაციისაგან 0.05 დონეზე.

გ) გააკეთეთ დასკვნები მოდელის პარამეტრების შესახებ.

დ) შეამოწმეთ მოდელის ვარგისიანობა.

ე) კვირაში რამდენჯერ მიდის აუზზე 55 წლის ადამიანი? ააგეთ 95% -იანი ნდობის ინტერვალი ამ ასაკის ადამიანთა დასწრების რაოდენობისათვის. როგორ ფიქრობთ ეს ინტერვალი 29 წლის ადამიანის შესაბამის ინტერვალთან უფრო ვიწრო იქნება თუ განიერი?

2. ცხრილში მოცემულია სკოლების კურსდამთავრებულთა რაოდენობა და სკოლისათვის შემოწირული ფულის რაოდენობა.

სკოლა	1	2	3	4	5
კურსდამთ.	987	1350	2345	1300	12569
თანხა	234700	769000	1230000	450780	645000

სკოლა	6	7	8	9
-------	---	---	---	---

კურსდამთ.	8560	3450	1890	23456
თანხა	2650000	143000	230000	4560000

ა) გამოთვალეთ კორელაციის კოეფიციენტი და შეამოწმეთ მნიშვნელოვნად განსხვავდება თუარა ის პოპულაციაში ნულოვანი კორელაციისაგან 0.05 დონეზე.

ბ) საშუალოდ რა თანხა ჩაირიცხება სკოლის ანგარიშზე, თუ 12000 კურსდამთავრებულია?

3. კომპანია ამზადებს კვების დანამატებს მსხვილფეხა რქოსანი პირუტყვისათვის. 335 ხბოს წონაში ყოველდღიური ზრდასა და დანამატის რაოდენობას შორის კორელაციის კოეფიციენტი $r = 0.104$. ამ სიდიდეზე დაყრდნობით რა დასკვნის გაკეთება შეგიძლიათ ამ ორი სიდიდის რეალურ კავშირზე.

4. კომპანია რეცხავს და წმენდს მანქანებს. მომსახურების გაუმჯობესებისათვის კლიენტებს სთხოვეს შეეფასებინათ სერვისის მუშაობა სარეინტინგო სკალაზე (0 — ძალიან ცუდი, 100 — საუკეთესო მომსახურება). მიღებული იყო შემდეგი მონაცემები:

მომსახურების დრო (საათი), X	1.5	0.2	0.3	0.35	1.0	0.23	0.32
შეფასება, Y	85	60	70	72	80	65	70

მომსახურების დრო (საათი), X	2.5	1.6	0.27	1.6	0.40	0.45	2.0
შეფასება, Y	90	84	70	82	75	77	89

ა) ააგეთ გაბნევის დიაგრამა და აღწერეთ დამოკიდებულება ამ ორ ცვლადს შორის.

ბ) ააგეთ წრფივი რეგრესიის მოდელი და შეაფასეთ პროგნოზის შეცდომა.

გ) მიღებული შედეგების გათვალისწინებით როგორ გარდაქმნილით დამოუკიდებელ ცვლადს?

5. საფეხბურთო კლუბის მენეჯერს სურს მრავლობითი რეგრესიის მოდელის აგება, რომელიც ახსნის კლუბის თამაშებზე დასწრებას. მან შეაგროვა საკუთარ მოედანზე ათი სეზონის 16 თამაშის მონაცემები.

Y — თამაშებზე დასწრება (game attendance),

X_1 — გუნდის მოგება/წაგების პროცენტი,

X_2 — მოწინააღმდეგეების მოგება/წაგების პროცენტი,

X_3 — სეზონში თამაშების რაოდენობა,

X_4 — ჰაერის ტემპერატურა თამაშის დროს.

Y	14502	12459	15600	16780	14600	19300
X_1	33.3	25.0	80.0	75.0	60.0	100.0
X_2	80.0	50.0	66.6	100.0	80.0	60.0
X_3	6	4	5	8	10	10
X_4	47	56	55	60	55	49

Y	14603	15789	17800	19450	13890
X_1	66.6	50.0	80.0	75.0	20.0
X_2	25.0	50.0	40.0	100.0	75.0
X_3	3	6	10	8	5
X_4	67	55	53	48	65

Y	15097	17666	12500	16780	17543
-----	-------	-------	-------	-------	-------

X_1	70.0	83.3	20.0	80.0	80.0
X_2	70.0	66.6	20.0	100.0	70.0
X_3	10	6	5	8	10
X_4	56	60	59	46	50

ა) გამოთვალეთ კორელაციის მატრიცა;

ბ) ააგეთ ოთხი მარტივი რეგრესიის მოდელი თითოეული დამოუკიდებელი ცვლადით. აღნიშნეთ ოთხიდან რომელია საუკეთესო;

გ) ააგეთ მრავლობითი რეგრესიის მოდელი ოთხი დამოუკიდებელი ცვლადით;

დ) ცვალებადობის რა წილს ხსნის დამოკიდებულ ცვლადში მრავლობითი მოდელი?

ე) რომელი დამოუკიდებელი ცვლადია სტატისტიკურად მნიშვნელოვანი $\alpha = 0.05$ დონით?

ვ) ააგეთ 95% -იანი ნდობის ინტერვალი თითოეული რეგრესიის კოეფიციენტისათვის;

თ) არსებობს თუ არა მულტიკოლინეარულობის პრობლემა ამ ამოცანაში?

6. მენეჯერს სურს რეგრესიულ მოდელში ახალი ცვლადის დამატება, რომელიც იზომება სახელდების სკალაზე კატეგორიებით განათლების დონე: 1 — დაწყებითი; 2 — არასრული საშუალო; 3 — საშუალო ზოგადი; 4 — საშუალო პროფესიული.

ა) რამდენი ფიქტიური ცვლადის გამოყენება დასჭირდება მენეჯერს?

ბ) განსაზღვრეთ ეს ცვლადები.

7. რეგრესიის განტოლება შემდეგი სახისაა:

$$Y = -23200 + 4.2X_1 + 2345X_2 + 4607X_3,$$

სადაც Y ფერმის წლიური შემოსავალია, X_1 დასამუშავებელი ფართობია, $X_2 = 1$ მიწის სტრიქონური მორწყვაა, $X_2 = 0$ არაა მორწყვა, $X_3 = 1$ სპრინკლერ მორწყვაა, $X_3 = 0$ არაა მორწყვა. ახსენით თითოეული რეგრესიის კოეფიციენტი.

8. მიღებული მომგებიანობის ასახსნელად მიღებული იყო შემდეგი მონაცემები:

Y	-2345	4200	278	1211	1406	500
X_1	-45	56	26	56	24	23
X_2	-1	2	3	2	2	3

Y	-700	3457	3478	1975	206
X_1	34	45	47	24	32
X_2	3	1	1	2	3

სადაც Y კლიენტისგან მიღებული სუფთა მოგებაა, X_1 კლიენტთან მუშაობის საათების რაოდენობაა, X_2 კლიენტის ტიპია: 1 — თუ კლიენტია წარმოების სფერო, 2 — თუ კლიენტია მომსახურების სფერო, 3 — თუ კლიენტი სამთავრობოა.

ა) ააგეთ სამი გაბნევის დიაგრამა თითოეული დამოუკიდებელი ცვლადით;

ბ) ააგეთ რეგრესიის განტოლება თუ დამოუკიდებელი ცვლადია X_1 ;

გ) ააგეთ რეგრესიის განტოლება ორივე დამოუკიდებელი ცვლადით. შესაყვანი გექნებათ ფიქტიური ცვლადები.

9. შესწავლილი იყო 25 კლიენტის (Y) შესყიდვების დამოკიდებულება (X_1) ასაკზე, (X_2) ოჯახის შემოსავალზე, (X_3) ოჯახის მოცულობაზე. მიღებული იყო კორელაციის მატრიცა:

	Y	X_1	X_2	X_3
Y	1.00	-0.4057	0.4591	-0.2444
X_1		1.00	0.0512	-0.5037
X_2			1.00	0.2718

X_3				1.00
-------	--	--	--	------

შეამოწმეთ $\alpha = 0.05$ დონით რომელი კორელაციის კოეფიციენტი მნიშვნელოვანი.

10. რა პირადული მონაცემებით უნდა ხასიათებოდეს მენეჯერი კარიერის გასაკეთებლად? გადანყვებული იყო მრავლობითი რეგრესიის აგება სამუშაო რეიტინგსა და კომუნიკაბელურობის უნარს შორის. კომუნიკაბელურობა შეფასებული იყო რამდენიმე ფაქტორით. შერჩეული იყო 15 საშუალო დონის მენეჯერი. მათ მისცეს გასაანალიზებლად რამდენიმე სამუშაო სიტუაცია და სთხოვეს წარედგინათ წერილობითი და ვერბალური პრეზენტაცია.

სამუშაო რეიტინგი	შემთხვევათა ანალიზის ქულა	წერილობითი პრეზენტაციის ქულა	ვერბალური პრეზენტაციის ქულა
87	8.4	8.7	9.2
93	8.2	9.4	9.4
91	9.3	9.7	9.5
85	7.9	8.1	8.7
86	8.1	8.3	8.8
97	9.4	9.3	9.6
90	9.1	9.0	9.2
93	8.9	9.2	9.5
88	8.6	8.4	8.5
96	9.7	9.5	9.6
86	8.3	7.9	8.4
89	8.7	8.5	8.7
94	9.2	9.1	9.6
91	8.1	9.5	9.2
95	9.3	9.1	9.7

ა) გამოიყენეთ კომპიუტერული პროგრამა და შეამოწმეთ არიან, თუ არა ცვლადები კორელირებული ერთმანეთთან;

ბ) შეამოწმეთ მოდელის ვარგისიანობა;

გ) თუ თქვენ საშუალო დონის მენეჯერი ბრძანდებით, თანახმა იქნებით თუ არა, თქვენი სამუშაო რეიტინგი შეფასდეს ამ მოდელით?

დ) სამუშაო რეიტინგის ცვალებადობის რამდენი პროცენტია ახსნილი სამი დამოუკიდებელი ცვლადით;

ე) არის თუ არა ყველა დამოუკიდებელი ცვლადი მნიშვნელოვანი ამ მოდელში?

თ) ერთ-ერთმა მენეჯერმა მიიღო შემდეგი ქულები: შემთხვევათა ანალიზის ქულა — 9.1, წერილობითი პრეზენტაციის ქულა — 9.4, ვერბალური პრეზენტაციის ქულა — 9.3. ამ მონაცემებზე დაყრდნობით, რას უდრის სამუშაო რეიტინგის ქულის საუკეთესო წერტილოვანი შეფასება?

ვ) ღირს თუ არა ამ მოდელის გამოყენება ახალი თანამშრომლების მისაღებად?

11. გამომცემლობას სურს დაადგინოს მომზადებული წიგნების საუკეთესო გასაყიდი ფასები. შეგროვებული იყო შემდეგი მონაცემები 15 გამოშვებულ წიგნზე.

გაყიდული წიგნების რაოდენობა, Y	გვერდების რაოდენობა, X_1	კონკურენტული წიგნების რაოდენობა, X_2	სარეკლამო ბიუჯეტი, X_3	ავტორის ასაკი, X_4
----------------------------------	----------------------------	--	--------------------------	----------------------

15000	176	5	\$25000	49
140000	296	10	83000	57
75000	483	7	40000	29
100000	811	14	29000	37
26000	302	9	52000	35
33000	411	15	33000	43
59000	333	7	19000	51
103000	602	4	37000	62
88000	504	12	51000	33
10000	204	3	30000	50
9000	376	4	19000	26
77000	600	7	41000	40
59000	400	3	26000	44
183000	597	8	51000	59
16000	126	1	27000	38

- ა) გამოიყენეთ კომპიუტერული პროგრამა და შეამოწმეთ რომელი დამოუკიდებელი ცვლადი კორელირებს მნიშვნელოვნად დამოუკიდებელ ცვლადთან;
- ბ) შეადგინეთ რეგრესიის განტოლება ოთხივე დამოუკიდებელი ცვლადით;
- გ) ცვალებადობის რამდენი პროცენტი აიხსნება ამ ოთხი ცვლადით.

თავი 14

ხშირად გამოყენებული ფორმულები. შეფასების და ჰიპოთეზათა შემოწმების ამოცანათა მიმოხილვა

სიხშირეთა განაწილებები

ქულის ფარდობითი სიხშირე — $rf = f/n$, სადაც f — ქულის სიხშირეა, ხოლო n — შერჩევის მოცულობაა.

ქულის პროცენტული სიხშირე — $\%f = rf \cdot 100\%$.

ცენტრალური ტენდენციის საზომები

მედიანა. ვარიაციულ მწკრივში შუაში მდგომი მონაცემი, თუ მონაცემთა რაოდენობა კენტი და ორი შუაში მდგომი მონაცემის საშუალო არითმეტიკული, თუ მონაცემთა რაოდენობა ლუწია.

შერჩევის საშუალო. მონაცემთა საშუალო არითმეტიკული — $\bar{X} = \frac{\sum X}{n}$.

პოპულაციის საშუალო — $\mu = \frac{\sum X}{N}$, სადაც N — პოპულაციის მოცულობაა.

შერჩევის საშუალო — \bar{X} პოპულაციის საშუალოს — μ -ს წერტილოვანი შეფასებაა. მოდა — ყველაზე ხშირად განმეორებადი მონაცემი.

ცვალებადობის საზომები

დიაპაზონი. $R = x_{\max} - x_{\min}$.

P -პროცენტილი. $x_p = x_{([np]+1)}$, როცა $np/100 \equiv na$ არ არის მთელი რიცხვი, და $x_p = \frac{x_{(na)} + x_{(na+1)}}{2}$, როცა na მთელი რიცხვია.

პირველი კვარტილი — Q_1 . 25-პროცენტილი ანუ იმ მონაცემების მედიანა, რომლებიც არ აღემატება მედიანას.

მესამე კვარტილი — Q_3 . 75-პროცენტილი ანუ იმ მონაცემების მედიანა, რომლებიც მეტია ან ტოლი მედიანაზე.

კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი — $IQR = Q_3 - Q_1$.

რანგი — r . მონაცემის ნომერი ვარიაციულ მწკრივში.

პროცენტული რანგი — $\frac{2r-1}{2n} \cdot 100\%$.

შესწორებული შერჩევითი დისპერსია — $S^2 = \frac{\sum (X - \bar{X})^2}{n-1} = \frac{1}{n-1} [\sum X^2 - n(\bar{X})^2]$.

პოპულაციის დისპერსია — $\sigma^2 = \frac{\sum (X - \mu)^2}{N}$.

შერჩევის დისპერსია — S^2 პოპულაციის დისპერსიის — σ^2 -ის წერტილოვანი შეფასებაა.

შერჩევის სტანდარტული გადახრა — $S = \sqrt{S^2}$.

პოპულაციის სტანდარტული გადახრა — $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

შერჩევის სტანდარტული გადახრა — S პოპულაციის სტანდარტული გადახრის — σ -ს წერტილოვანი შეფასებაა.

Z -ქულები

ერთეული ქულა — $z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

z ქულა გვიჩვენებს რამდენი სტანდარტული გადახრით (რამდენი σ -თი) არის X ქულა დაშორებული μ საშუალოსგან.

სტანდარტული ქულა — $z = \frac{X - \bar{X}}{S} = \frac{X - \bar{X}}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 / n}}$.

$$\text{შერჩევის საშუალოს ქულა} - z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}.$$

დიდი შერჩევები

შერჩევა დიდია, თუ მისი მოცულობა $n \geq 30$.

კრიტერიუმი საშუალოსათვის

დაშვებულია, რომ $\sigma \approx s$, სადაც σ — პოპულაციის სტანდარტული გადახრაა, s — შერჩევის სტანდარტული გადახრა. კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}.$$

Z სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული ნულის ტოლი საშუალოთი და ერთის ტოლი სტანდარტული გადახრით, $N(0,1)$. 95% სანდოობით, პოპულაციის უცნობი μ საშუალო მოთავსებულია ორ საზღვარს შორის

$$\bar{X} \pm z \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ სადაც } z = 1.96.$$

კრიტერიუმი ორი საშუალოსათვის

$\sigma \approx s$ დაშვებულია თითოეული პოპულაციისათვის. თუ შერჩევები დამოუკიდებელია, კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}},$$

სადაც n_1 — პირველი შერჩევის მოცულობაა, n_2 — მეორე შერჩევის მოცულობაა. ეს სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული $N(0,1)$.

95%-ანი სანდოობით, საშუალოების სხვაობა $\mu_1 - \mu_2$ მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \pm 1.96 \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}.$$

კრიტერიუმი პროპორციისათვის

$\hat{p} = \frac{X}{n}$ — შერჩევის პროპორცია (ფარდობითი სიხშირე), სადაც X — წარმატებათა რაოდენობაა n დამოუკიდებელ ცდაში. აუცილებელია, რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა

$$0 < \hat{p} \pm 3\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n} < 1 \text{ და } 0 < p \pm 3\sqrt{p(1-p)/n} < 1.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

ეს სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული $N(0,1)$.

95% -ანი სანდოობით, პოპულაციის პროპორცია მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში

$$\hat{p} \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

კრიტერიუმი ორი პროპორციისათვის

საჭიროა შემდეგი პირობების შესრულება

$$0 < \hat{p}_1 \pm 3\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1}} < 1 \text{ და } 0 < \hat{p}_2 \pm 3\sqrt{\frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} < 1,$$

$$0 < p_1 \pm 3 \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}} < 1 \quad \text{და} \quad 0 < p_2 \pm 3 \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} < 1.$$

თუ $H_0 : p_1 = p_2$ კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$

სადაც

$$\bar{p} = \frac{n_1 \hat{p}_1 + n_2 \hat{p}_2}{n_1 + n_2}.$$

ეს სტატისტიკა მიახლოებით ნორმალურადაა განაწილებული $N(0,1)$.

95%-ანი სანდოობით პროპორციების სხვაობა $p_1 - p_2$ მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm 1.96 \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}}.$$

პატარა შერჩევები. ნორმალური პოპულაციიდან

იგულისხმება, რომ შერჩევების მოცულობებიდან ერთი მაინც < 30 -ზე და ორივე შერჩევა მიღებულია ნორმალური პოპულაციებიდან. ამის შემოწმება შეიძლება ჰისტოგრამის ან ბოქსპლოტის აგებით.

კრიტერიუმი საშუალოსათვის

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე:

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}.$$

ამ სტატისტიკას აქვს t – განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-1$.

95% სანდოობით, პოპულაციის უცნობი საშუალო μ მოთავსებულია ორ საზღვარს შორის

$$\bar{X} \mp t_{n-1, \alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

სადაც t მოსაძებნია t – განაწილების ცხრილიდან თავისუფლების $n-1$ ხარისხის გათვალისწინებით.

კრიტერიუმი დისპერსიისათვის

სტატისტიკური ჰიპოთეზის შემოწმება ნორმალური $N(a, \sigma^2)$ განაწილების დისპერსიის შესახებ:

ჰიპოთეზა: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$

მნიშვნელოვნების დონე: α

$$\text{კრიტერიუმის სტატისტიკა: } \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2}{\sigma_0^2} \equiv \chi^2(n), \text{ თუ } a \text{ ცნობილია,} \\ \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \equiv \chi^2(n-1), \text{ თუ } a \text{ უცნობია.} \end{cases}$$

ალტერნატივა

კრიტიკული არე C.R. (H_0 -ის უარყოფის არე)

$$H_A : \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \quad \begin{cases} (0, \chi_{n-1-\alpha/2}^2] \cup [\chi_{n,\alpha/2}^2, +\infty), \text{ თუ } a \text{ ცნობილია,} \\ (0, \chi_{n-1,1-\alpha/2}^2] \cup [\chi_{n-1,\alpha/2}^2, +\infty), \text{ თუ } a \text{ უცნობია.} \end{cases}$$

α მნიშვნელოვნების დონის მქონე ნდობის ინტერვალი ნორმალური $N(a, \sigma^2)$ პოპულაციის დისპერსიისათვის უცნობი საშუალოს შემთხვევაში:

$$\left(\frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}, \frac{(n-1)s'^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}} \right),$$

სადაც $\chi^2_{m,\alpha}$ — თავისუფლების m ხარისხის მქონე ჰი-კვადრატ განაწილების ($\chi^2(m)$) ზედა α -კრიტიკული წერტილია.

კრიტერიუმი ორი საშუალოსათვის

იგულისხმება, რომ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ — უცნობია. ამ საერთო დისპერსიის წერტილოვანი შეფასებაა s_p^2

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2},$$

სადაც n_1 და s_1^2 — შესაბამისად პირველი შერჩევის მოცულობა და დისპერსია; n_2 და s_2^2 — მეორე შერჩევის მოცულობა და დისპერსია.

თუ შერჩევები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, მაშინ კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$T = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}} \cong t(n_1 + n_2 - 2).$$

ამ სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n_1 + n_2 - 2$.

95%-ანი სანდოობით, საშუალოების სხვაობა მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \mp t_{n_1+n_2-2,\alpha/2} \cdot s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},$$

სადაც $t_{n_1+n_2-2,\alpha/2}$ თავისუფლების $n_1 + n_2 - 2$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$ -კრიტიკული წერტილია.

თუ შერჩევები ერთმანეთზე დამოკიდებულია, განიხილება სხვაობები $d_i = x_i - y_i$, სადაც x_i — i -ური მონაცემია პირველი შერჩევიდან, y_i — i -ური მონაცემია მეორე შერჩევიდან. n სხვაობის საშუალოა — \bar{X} , პოპულაციის სხვაობების საშუალოა — μ_d ; სხვაობების სტანდარტული გადახრაა — s , პოპულაციის სტანდარტული გადახრა — σ_d . იგულისხმება, რომ $\sigma_d \approx s$. კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_d}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - \mu_d}{\sqrt{\frac{\sum d^2 - (\sum d)^2 / n}{n(n-1)}}},$$

სადაც n — წყვილების რაოდენობაა. ამ სტატისტიკას აქვს t -განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-1$.

95%-იანი სანდოობით, პოპულაციის საშუალო მოთავსებულია შემდეგ საზღვრებში

$$\bar{X} \mp t_{n-1,\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},$$

სადაც $t_{n-1,\alpha/2}$ თავისუფლების $n-1$ ხარისხის მქონე სტიუდენტის განაწილების ზედა $\alpha/2$ -კრიტიკული წერტილია.

კრიტერიუმი ორი დისპერსიისათვის

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2},$$

სადაც $s_1^2 > s_2^2$. ამ სტატისტიკას აქვს F -განაწილება $n_1 - 1$ და $n_2 - 1$ თავისუფლების ხარისხებით.

დისპერსიათა σ_1^2 / σ_2^2 შეფარდების $(1-\alpha) \cdot 100\%$ -იანი ნდობის ინტერვალი მოიცემა ფორმულით:

$$\left(\frac{1}{F_{n_2-1, n_1-1, \alpha/2}} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2}, F_{n_1-1, n_2-1, \alpha/2} \cdot \frac{s_1^2}{s_2^2} \right),$$

სადაც $F_{n,m,\alpha}$ თავისუფლების n და m ხარისხების მქონე ფიშერის განაწილების ზედა α -კრიტიკული ნერტილია.

კრიტერიუმი ორზე მეტი საშუალოსათვის.

იგულისხმება, რომ k შერჩევის დისპერსია მნიშვნელოვნად არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$F = \frac{MSR}{MSE},$$

სადაც

$$MSR = \frac{\sum \sum (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2}{k-1} \quad \text{და} \quad MSE = \frac{\sum \sum (X - \bar{X})^2}{N-k},$$

\bar{X}_i — i -ური შერჩევის საშუალოა, $\bar{\bar{X}}$ — გაერთიანებული შერჩევების საშუალოა, k — შერჩევების რაოდენობაა, N — მონაცემთა სრული რაოდენობაა.

სტატისტიკას აქვს F - განაწილება $k-1$ და $N-k$ თავისუფლების ხარისხებით.

პატარა შერჩევები, როცა პოპულაციის განაწილება არაა ნორმალური

თუ შერჩევები ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია, მან-უიტნის U კრიტერიუმს აქვს შემდეგი სახე

$$U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} \text{ მინუს პირველი შერჩევის რანგების ჯამი,}$$

$$U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} \text{ მინუს მეორე შერჩევის რანგების ჯამი,}$$

$$U = \min(U_1, U_2).$$

თუ შერჩევები დამოუკიდებელია ერთმანეთზე, უილკოქსონის T კრიტერიუმს აქვს შემდეგი სახე

$$T = \text{უმცირესი } \sum R_- \text{-სა და } \sum R_+ \text{-ს შორის,}$$

სადაც $\sum R_-$ — უარყოფითი სხვაობების რანგების ჯამია, $\sum R_+$ — დადებითი სხვაობების რანგების ჯამია.

თუ შერჩევების რაოდენობა $k > 2$.

კრუსკალ-უოლისის H კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$H = \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^K \frac{R_i^2}{n_i} - 3(N+1).$$

ამ სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $k-1$.

კავშირი ორ ცვლადს შორის. კრიტერიუმი ორი კატეგორიული ცვლადისთვის

იგულისხმება, რომ კატეგორიები ურთიერთგამომრიცხავია და მოსალოდნელი სიხშირეების სულ ცოტა 80%, 5-ზე მეტია.

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$\chi^2 = \sum \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}.$$

ამ სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება თავისუფლების ხარისხით $(r-1)(c-1)$.

თუ $r = c = 2$, გამოსაყენებელია მამრავლი უწყვეტობაზე და კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$\chi^2 = \sum \frac{(|o_{ij} - e_{ij}| - 0.5)^2}{e_{ij}}.$$

ამ სტატისტიკას აქვს ხი-კვადრატ განაწილება 1-ის ტოლი თავისუფლების ხარისხით.

ორი რაოდენობრივი ცვლადის წრფივი კავშირის კრიტერიუმი

კორელაციური კვლევის მიზანია ორ ან მეტ ცვლადს შორის კავშირის ხარისხის დადგენა. დადებითი კავშირის შემთხვევაში X ცვლადის მნიშვნელობის ზრდასთან ერთად იზრდება Y ცვლადის მნიშვნელობაც. უარყოფითი კავშირის შემთხვევაში X ცვლადის მნიშვნელობის ზრდასთან ერთად Y ცვლადის მნიშვნელობა მცირდება.

თუ ორივე ცვლადი გაზომილია ინტერვალულების სკალაზე კავშირის მიმართულების და ხარისხის დასადგენად გამოიყენება პირსონის კორელაციის კოეფიციენტი:

$$r = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \sum (Y - \bar{Y})^2}}.$$

პოპულაციაში X და Y ცვლადებს შორის კავშირი წარმოდგენილია ρ - თი. თუ (X, Y) სიდიდეების განაწილება ნორმალურია, მაშინ H_0 -ის სამართლიანობისას, $H_0: \rho = 0$, სტატისტიკას

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

აქვს t - განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$.

დეტერმინაციის კოეფიციენტი r^2 გამოხატავს X ცვლადის ცვალებადობის იმ პროპორციას, რომელიც დაკავშირებულია Y ცვლადის ცვალებადობასთან. წრფივი კავშირი ორ ცვლადს შორის მოცემულია განტოლებით

$$Y = a + bX,$$

სადაც

$$b = \frac{\sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{\sum (X - \bar{X})^2}, \quad a = \bar{Y} - b\bar{X}.$$

კრიტერიუმის სტატისტიკას აქვს შემდეგი სახე

$$T = \frac{b - \beta}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}},$$

სადაც

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (Y - \bar{Y})^2 - b \sum (X - \bar{X})(Y - \bar{Y})}{n-2}.$$

T სტატისტიკას აქვს t - განაწილება თავისუფლების ხარისხით $n-2$.

EXCEL-ის სტატისტიკური ფუნქციების აღწერა

ალბათობა

ფაქტორიალი – **FACT(n):** = $n!$;

წყობა – **PERMUT(n,k):** = $n!/(n-k)!$;

ჯუფდება – **COMBIN(n,k):** = $n!/[k!(n-k)!]$;

EXCEL-ში დისკრეტული განაწილებების ჩანერგვის გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
x	განაწილების სიმკვრივის ან განაწილების ფუნქციის არგუმენტის რიცხვითი მნიშვნელობა
X range	არე, სადაც მითითებულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობები
Prob_range	არე, სადაც მითითებულია შემთხვევითი სიდიდის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობები
Lower_limit	ქვედა საზღვარი
Upper_limit	ზედა საზღვარი
Mean	განაწილების მათემატიკური ლოდინი
Numbers	რაოდენობა (წარმატებათა)
Trials	ცდათა სერიის სიგრძე
Probability_s	ალბათობა
Sample_s	1 სახის ობიექტთა რაოდენობა შერჩევაში
Number_sample	შემთხვევით (დაბრუნების გარეშე) ამორჩეულ ობიექტთა რაოდენობა – შერჩევის მოცულობა
Population_s	1 სახის ობიექტთა რაოდენობა პოპულაციაში
Number_pop.	ობიექტების რაოდენობა პოპულაციაში
Cumulative	თუ Cumulative პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ გამოიანგარიშება $P\{X=k\}$ ალბათობა; თუ Cumulative პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, მაშინ გამოიანგარიშება $P\{X \leq k\}$ ალბათობა

PROB(x_range,prob_range,lower_limit,upper_limit) – ფუნქციით გამოითვლება ალბათობა: $P\{Lower\ limit \leq X \leq Upper\ limit\}$; მაგალითად, თუ X შემთხვევითი სიდიდის კანონი EXCEL-ში არის:

	A	B	C	D	E	F
1	-1	0	2	4	6	9
2	0.05	0.15	0.18	0.22	0.3	0.1

მაშინ **PROB(A1:F1,A2:F2,0,7)** – გამოითვლის $P\{0 \leq X \leq 5\} = 0.45$ -ს.

BINOMDIST(number_s, trials, probability_s, cumulative) – ფუნქციით გამოითვლება ბინომურად განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის $P\{X=k\}$ ალბათობა, თუ **cumulative** = 0-ს და $P\{X \leq k\}$ ალბათობა, თუ **cumulative** = 1-ს.

CRITBINOM(trials, probability_s, alpha) – ფუნქციით, მოცემული α -სათვის, გამოითვლება ის მინიმალური k, რომლისთვისაც: $\sum_{m=0}^k P_n(m) \geq \alpha$.

HYPGEOMDIST(sample_s, number_sample, population_s, number_pop.) – ფუნქციით გამოითვლება ჰიპერგეომეტრიული განაწილებისათვის $P\{X=k\}$ ალბათობა. მაგალითად, თუ ყუთში 100 ბურთია, რომელთა შორის 30 თეთრია და შემთხვევით, დაბრუნების გარეშე, ვიღებთ 45 ბურთს, მაშინ ალბათობა იმისა, რომ მათ შორის აღმოჩნდება 10 თეთრი ბურთი გამოითვლება შემდეგნაირად:

$$\text{HYPGEOMDIST}(10,40,30,100) = C_{30}^{10} \cdot C_{70}^{35} / C_{100}^{45}.$$

POISSON(x,mean,cumulative) – ფუნქციით გამოითვლება პუასონის კანონით განაწილებული შემთხვევითი სიდიდისათვის $P\{X = k\}$ ალბათობა, თუ **cumulative** = 0-ს და $P\{X \leq k\}$ ალბათობა, თუ **cumulative** = 1-ს.

EXCEL-ში უწყვეტი განაწილებების ჩანერგვის გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
x	განაწილების სიმკვრივის ან განაწილების ფუნქციის არგუმენტის რიცხვითი მნიშვნელობა
Mean	განაწილების მათემატიკური ლოდინი
Standard_dev	განაწილების საშუალო კვადრატული გადახრა
Cumulative	თუ Cumulative პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ნულის ტოლია, მაშინ გამოითვლება განაწილების სიმკვრივის რიცხვითი მნიშვნელობა; თუ Cumulative პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, მაშინ გამოითვლება განაწილების ფუნქციის რიცხვითი მნიშვნელობა
Lambda	λ პარამეტრი
Probability	ალბათობის P დონე, რომლისთვისაც გამოითვლება კვანტილი
Deg_freedom	განაწილების თავისუფლების ხარისხი
Probability	$P\{X > k\}$ ალბათობის მნიშვნელობა
Tails	თუ Tails პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, მაშინ TDIST ფუნქცია გვაძლევს ცალმხრივ $T(n) > x$ არეში მოხვედრის ალბათობას, $P\{T(n) > x\}$, სტიუდენტის განაწილებისათვის; თუ Tails პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ორის ტოლია, მაშინ TDIST ფუნქცია გვაძლევს ორმხრივ $ T(n) > x$ არეში მოხვედრის ალბათობას, $P\{ T(n) > x\}$ -ს, სტიუდენტის განაწილებისათვის

NORMSDIST(x) – ფუნქციით გამოითვლება სტანდარტული ნორმალური $N(0,1)$ შემთხვევითი სიდიდისათვის $P\{N(0,1) \leq x\}$ ალბათობა.

NORMDIST(x,mean,standard_dev,cumulative) – ფუნქციით, თუ **cumulative** პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ნულის ტოლია, გამოითვლება $N(\mu, \sigma^2)$ -ის (არასტანდარტული ნორმალური) განაწილების სიმკვრივის მნიშვნელობა; ხოლო თუ **cumulative** პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ერთის ტოლია, გამოითვლება $N(\mu, \sigma^2)$ -ის განაწილების ფუნქციის მნიშვნელობა.

NORMSINV(probability) – ფუნქციით გამოითვლება სტანდარტული ნორმალური განაწილების p დონის კვანტილი. მაგალითად, **NORMSINV(0.65)** = $x_{0.65}$ = 0.39.

NORMINV(probability,mean,standard_dev) – ფუნქციით გამოითვლება არასტანდარტული ნორმალური განაწილების p დონის კვანტილი.

EXPONDIST(x,lambda,cumulative) – ითვლის $\lambda e^{-\lambda x}$ ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა **Cumulative** = 0-ს და $1 - e^{-\lambda x}$ ფუნქციის მნიშვნელობას, როცა **Cumulative** = 1-ს.

CHIDIST(x,deg_freedom) – ითვლის $P\{\chi^2(k) > x\}$ ალბათობას ხი-კვადრატ განაწილებისათვის.

CHIINV(probability,deg_freedom) – ითვლის ხი-კვადრატ განაწილების ზედა კრიტიკულ წერტილს, ანუ ისეთ x რიცხვს, რომლისთვისაც $P\{\chi^2(Deg\ freedom) > x\} = Probability$.

TDIST(x,deg_freedom,tails): TDIST(x,k,1) – ითვლის $P\{T(k) > x\}$ ალბათობას სტიუდენტის $T(k)$ შემთხვევითი სიდიდისათვის, ხოლო **TDIST(x,k,2)** – კი ითვლის $P\{|T(k)| > x\}$ ალბათობას სტიუდენტის $T(k)$ შემთხვევითი სიდიდისათვის.

TINV(probability,deg_freedom): TINV(α ,k) – პოულობს ისეთ x -ს, რომლისთვისაც $P\{|T(k)| > x\} = \alpha$ (ფაქტიურად x იქნება სტიუდენტის $T(k)$ შემთხვევითი სიდიდის ზედა $\alpha/2$ -კრიტიკული წერტილი).

FDIST(x,deg_freedom1,deg_freedom2): FDIST(x,n,m) – ითვლის $P\{F(n,m) > x\}$ ალბათობას ფიშერის $F(n,m)$ შემთხვევითი სიდიდისათვის.

FINV(probability,deg_freedom1,deg_freedom2): FDIST(a,n,m) – პოულობს ფიშერის $F(n,m)$ განაწილების ზედა a -კრიტიკულ წერტილს, ანუ ისეთ x -ს, რომლისთვისაც $P\{F(n,m) > x\} = a$.

სტატისტიკა

EXCEL-ის ქვეპროგრამა **Tools/Data Analysis/Random Number Generation** საშუალებას იძლევა მივიღოთ ფსევდოშემთხვევითი რიცხვების რეალიზაციები. ამ დროს გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Number of variables	დაკვირვებულ სერიათა რაოდენობა
Number of Random Numbers	მონაცემთა რაოდენობა სერიაში
Distribution	განაწილების კანონი
Discrete	დისკრეტული
Value and Probability Input Range	ეთითება ვერტიკალურად ჩანწერილი დისკრეტული განაწილების კანონი, რომლის მიხედვითაც უნდა გათამაშდეს ფსევდოშემთხვევითი სიდიდეები
Uniform	თანაბარი
Parameters	ეთითება თანაბარი განაწილების a და b პარამეტრები
Normal	ნორმალური
Mean	საშუალო
Standard Deviation	სტანდარტული გადახრა
Bernouli	ბერნული
Binomial	ბინომური
p-Value	p პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა
Number of Trials	n პარამეტრის რიცხვითი მნიშვნელობა ბერნულის სქემაში
Poisson	პუასონი
Lambda	λ პარამეტრი

CONFIDENCE(alpha,standard_dev,size): CONFIDENCE(a,σ,n) – ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ითვლის $(1-\alpha)$ საიმედოობის ნდობის ინტერვალის სიგრძის ნახევარს – $z_{\alpha/2} \cdot \sigma / \sqrt{n}$ -ს.

p -მნიშვნელობა

ZTEST ფუნქცია გამოიყენება Z სტატისტიკის p -მნიშვნელობის გამოსათვლელად. ამ დროს გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Array	დაკვირვებულ მონაცემთა არე
x	პოპულაციის საშუალო
Sigma	პოპულაციის სტანდარტული გადახრა

ZTEST(array,x,sigma) – Z სტატისტიკის დაკვირვებული $z = \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ მნიშვნელობისათვის (მარჯვენა

ცალმხრივი კრიტერიუმის შემთხვევაში) ითვლის p -მნიშვნელობას, ანუ $P\left\{Z \geq \frac{\bar{x} - a_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right\}$ ალბათობას.

CHITEST ფუნქცია გამოიყენება ხი-კვადრატ განაწილების p -მნიშვნელობის გამოსათვლელად. ამ დროს გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Actual_range	დაკვირვებული სიხშირეები
Expected_range	მოსალოდნელი სიხშირეები

CHITEST(actual_range,expected_range) – ითვლის $(R-1)(C-1)$ თავისუფლების ხარისხის მქონე ხი-კვადრატ განაწილების p -მნიშვნელობას.

ორამოკრეფიანი ამოცანები

TTEST(array1,array2,tails,type)-ისა და **FTEST(array1,array2)**-ით სარგებლობის დროს გამოიყენება აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Array	არე
Tails	კრიტიკული არე
Type	ტიპი

და ქვეპროგრამები:

- ❖ **z-Test: Two Sample for Means** – Z-ტესტი (ორამოკრეფიან ამოცანაში) საშუალოების შესახებ;
- ❖ **t-Test: Paired Two Sample for Mean** – T-ტესტი დანყვილებული მონაცემთა საშუალოებისათვის;
- ❖ **t-Test: Two Sample Assuming Equal Variances** – T-ტესტი უცნობი ტოლი დისპერსიების შემთხვევაში;
- ❖ **t-Test: Two Sample Assuming Unequal Variances** – T-ტესტი უცნობი არატოლი დისპერსიების შემთხვევაში;
- ❖ **F-Test: Two Sample for Variances** – F-ტესტი დისპერსიებისათვის.

ამ ქვეპროგრამებით სარგებლობისას გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Input	შემაჯალი მონაცემები
Variable 1(2) Range	დაკვირვებათა არე
Variance (known)	პოპულაციათა დისპერსიების მნიშვნელობები
Labels	მონიშვნა
Hypothesized Mean Difference	ძირითადი ჰიპოთეზით განსაზღვრული პოპულაციათა საშუალოების სხვაობა (ანუ ნული)
Alpha	მნიშვნელოვნების დონე (0.05)

z-Test-ის გამოყენების მაგალითი. ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციიდან დისპერსიებით შესაბამისად, 5 და 9 მიღებულია შემდეგი შერჩევები: I) 2.4, -2.3, 5.2, 10.3, 9.9, 12.6, -6.9, 2.8, 9.4, -1.4 და II) -8.2, 17.4, 16.4, 4, 21.7, -3.2, -2.9. 0.05 მნიშვნელოვნების დონით შევამოწმოთ ჰიპოთეზა საშუალოთა ტოლობის შესახებ.

ამოხსნა. მოწმდება ძირითადი ჰიპოთეზა $H_0: a_1 - a_2 = 0$ ცალმხრივი $H_1: a_1 - a_2 < 0$ და ორ-მხრივი $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივების წინააღმდეგ. ქვეპროგრამა **z-Test: Two Sample for Means** გვაძლევს:

	I	II
Mean / საშუალო	4.2	6.5
known Variance / ცნობილი დისპერსიები	5	9
Observations / დაკვირვებები	10	7
Hypothesized Mean Difference / ძირითადი ჰიპოთეზით განსაზღვრული საშუალოთა სხვაობა	0	
z Stat / Z-სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა	-1.689	
$P\{Z \leq z\}$ one-tail / p -მნიშვნელობა ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.046	
z Critical one-tail / კრიტიკული წერტილი ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	1.645	
$P\{Z \leq z\}$ two-tail / p -მნიშვნელობა ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.091	
z Critical two-tail / კრიტიკული წერტილი ორმხრივი კრიტიკული	1.96	

კული არისათვის	
----------------	--

დასკვნა:

- ❖ ცალმხრივი $H_1: a_1 - a_2 < 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა $= 0.046 < \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით ძირითად ჰიპოთეზას უარყოფთ;
- ❖ ორმხრივი $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა $= 0.091 < \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

t-Test-ის გამოყენების მაგალითი. კომპანიის მენეჯერს სურს შეადაროს ორი **A** და **B** შეთანხმებიდან შემოსული თვიური შემოსავლები. **A** შეთანხმება გულისხმობს დაბალ საარენდო გადასახადს, მაგრამ ავალდებულებს არენდატორს დაზიანებული საარენდო ქონების აღდგენის ხარჯების დაფარვას. **B** შეთანხმება ადგენს მაღალ საარენდო გადასახადს, მაგრამ კომპანია თავის თავზე იღებს დაზიანებული საარენდო ქონების აღდგენის ხარჯებს. მენეჯერმა შეაგროვა თითოეული შეთანხმების თვიური შემოსავლები და $\alpha = 0.05$ მნიშვნელოვნების დონით სურს შეამოწმოს ჰიპოთეზა, რომ ამ შეთანხმებების საშუალო შემოსავლები არ განსხვავდება ერთმანეთისაგან. ეს მონაცემებია:

A												
შეთანხმება	84.5	102.6	79.1	92.5	101.7	78.7	88.5	93	72.2	96.8	92.6	93.7
B												
შეთანხმება	106	102.1	105.1	91.5	82.3	88.4	101.1	97.5	75.7	93.6		

ამოხსნა 1. ვიგულისხმობთ, რომ ორივე პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და უცნობი დისპერსიები ტოლია. უნდა შემოწმდეს ძირითადი ჰიპოთეზა $H_0: a_1 - a_2 = 0$ ცალმხრივი $H_1: a_1 - a_2 < 0$ და ორმხრივი $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივების წინააღმდეგ. ქვეპროგრამა **t-Test: Two Assuming Equal Variances** გვაძლევს:

	A	B
Mean / საშუალო	89.658	94.33
Variance / დისპერსია	88.366	100.438
Observations / დაკვირვებები	12	10
Pooled Variance / დაწყვილებული მონაცემების დისპერსია	93.799	
Hypothesized Mean Difference / ძირითადი ჰიპოთეზით განსაზღვრული საშუალოთა სხვაობა	0	
df / თავისუფლების ხარისხი	20	
t Stat / T-სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა	-1.1266	
P{T ≤ t} one-tail / p-მნიშვნელობა ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.1366	
t Critical one-tail / კრიტიკული წერტილი ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	1.7247	
P{T ≤ t} two-tail / p-მნიშვნელობა ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.2733	
t Critical two-tail / კრიტიკული წერტილი ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	2.086	

დასკვნა:

- ❖ ცალმხრივი $H_1: a_1 - a_2 < 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა $= 0.1366 > \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით, ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გავაჩნია;
- ❖ ორმხრივი $H_1: a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა $= 0.2733 > \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით, ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

შენიშვნა. სტატისტიკური ფუნქციით **TTEST(array1,array2,1,2)** – გამოითვლება სტიუდენტის განაწილების p -მნიშვნელობა ცალმხრივი ალტერნატივისათვის, ხოლო **TTEST(array1,array2,2,2)**-ით კი p -მნიშვნელობა ორმხრივი ალტერნატივისათვის.

ამოხსნა 2. ვიგულისხმობთ, რომ ორივე პოპულაცია ნორმალურადაა განაწილებული და უცნობი დისპერსიები არაა ტოლი. ვამოწმებთ ძირითად ჰიპოთეზას $H_0: a_1 - a_2 = 0$ ცალმხრივი $H_1: a_1 - a_2 < 0$ და

ორმხრივი $H_1 : a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივების წინააღმდეგ. ქვეპროგრამა **t-Test: Two Assuming Unequal Variances** გვაძლევს:

	A	B
Mean / საშუალო	89.658	94.33
Variance / დისპერსია	88.366	100.438
Observations / დაკვირვებები	12	10
Hypothesized Mean Difference / ძირითადი ჰიპოთეზით განსაზღვრული საშუალოთა სხვაობა	0	
df / თავისუფლების ხარისხი	19	
t Stat / T-სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა	-1.1197	
P{T ≤ t} one-tail / p-მნიშვნელობა ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.1384	
t Critical one-tail / კრიტიკული ნერტილი ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	1.7291	
P{T ≤ t} two-tail / p-მნიშვნელობა ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.2768	
t Critical two-tail / კრიტიკული ნერტილი ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	2.093	

დასკვნა:

- ❖ ცალმხრივი $H_1 : a_1 - a_2 < 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა = 0.1384 > $\alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით, ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გაგვარჩნია;
- ❖ ორმხრივი $H_1 : a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა = 0.2768 > $\alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით, ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გვაქვს.

შენიშვნა 1. როგორც ვხედავთ, ამოხსნა 1-საგან განსხვავებით აქ ამოიბეჭდა სხვა თავისუფლების ხარისხი და **T** სტატისტიკის სხვა დაკვირვებული მნიშვნელობა. ეს აიხსნება იმით, რომ უკანასკნელ შემთხვევაში სარგებლობენ ე. წ. **სატერტივაციის** მეთოდით.

შენიშვნა 2. სტატისტიკური ფუნქციით **TTEST(array1,array2,1,3)** – გამოითვლება სტიუდენტის განაწილების p -მნიშვნელობა ცალმხრივი ალტერნატივისათვის, ხოლო **TTEST(array1,array2,2,3)**-ით კი p -მნიშვნელობა ორმხრივი ალტერნატივისათვის.

t-Test-ი დაწყვილებული მონაცემებისათვის. ორჰექტარიანი 10 ნაკვეთი დაიყო ორ-ორ ტოლ ნაწილად, ერთ ნაწილზე გამოიყენეს I ტიპის სასუქი, ხოლო მეორეზე კი II ტიპის სასუქი. მოსავლიანობამ შესაბამისად შეადგინა:

	მოსავლიანობა									
ნაკვეთის №	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
I სასუქი	1.2	1.4	1.6	1.1	1.4	1.1	0.7	1.5	1.3	1
II სასუქი	1.4	1.2	1.5	1.1	1.6	1.2	1	1.4	1.3	1.5

0.05 მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ზრდის თუ არა II ტიპის სასუქის გამოყენება მოსავლიანობას I ტიპის სასუქის გამოყენებასთან შედარებით.

ამოხსნა. ვამოწმებთ ძირითად ჰიპოთეზას $H_0 : a_D = a_1 - a_2 = 0$ ცალმხრივი $H_1 : a_D = a_1 - a_2 < 0$ და ორმხრივი $H_1 : a_D = a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივების წინააღმდეგ. ქვეპროგრამა **t-Test: Paired Two Sample for Means** გვაძლევს:

	Variable 1	Variable 2
Mean / საშუალო	1.23	1.32
Variance / დისპერსია	0.0712	0.0373
Observations / დაკვირვებები	10	10
Pearson Correlation / პირსონის კორელაცია	0.612	
Hypothesized Mean Difference / ძირითადი ჰიპოთეზით განსაზღვრული საშუალოთა სხვაობა	0	
df / თავისუფლების ხარისხი	9	
t Stat / T-სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა	-1.3351	
P{T ≤ t} one-tail / p-მნიშვნელობა ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.1073	

Critical one-tail / კრიტიკული წერტილი ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	1.8331
P{T ≤ t} two-tail / p-მნიშვნელობა ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.2146
Critical two-tail / კრიტიკული წერტილი ორმხრივი კრიტიკული არისათვის	2.2622

დასკვნა:

- ❖ ცალმხრივი $H_1: a_D = a_1 - a_2 < 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა = $0.1073 > \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გააჩნია;
- ❖ ორმხრივი $H_1: a_D = a_1 - a_2 \neq 0$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა = $0.2146 > \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით ძირითადი ჰიპოთეზის უარყოფის საფუძველი არ გააქვს.

შენიშვნა. სტატისტიკური ფუნქციით **TTEST(array1,array2,1,1)** – გამოითვლება სტიუდენტის განაწილების p -მნიშვნელობა ცალმხრივი ალტერნატივისათვის, ხოლო **TTEST(array1,array2, 2,1)**-ით კი p -მნიშვნელობა ორმხრივი ალტერნატივისათვის.

F-Test-ის გამოყენების მაგალითი. 0.05 მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმეთ ჰიპოთეზა ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიების ტოლობის შესახებ, თუ მათგან მიღებული შერჩევებია:

I შერჩევა	12.1	4.1	4.6	15.2	-0.9	3.2	2.5	10.1	7.2	13.5
II შერჩევა	7	11.6	11.6	9.8	7.3	9	6.3	13.7		

ამოხსნა. მომდებარე ძირითადი ჰიპოთეზა $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ცალმხრივი $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ალტერნატივის წინააღმდეგ. ქვეპროგრამა **F-Test: Two Sample for Variances** გვაძლევს:

	I	II
Mean / საშუალო	7.16	9.54
Variance / დისპერსია	28.463	6.874
Observations / დაკვირვებები	10	8
df / თავისუფლების ხარისხი	9	7
F Stat / F--სტატისტიკის დაკვირვებული მნიშვნელობა	4.141	
P{F ≤ t} one-tail / p-მნიშვნელობა ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	0.037	
F Critical one-tail / კრიტიკული წერტილი ცალმხრივი კრიტიკული არისათვის	3.677	

დასკვნა: ცალმხრივი $H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ ალტერნატივისათვის p -მნიშვნელობა= $0.037 < \alpha = 0.05$. შესაბამისად, 0.05 მნიშვნელოვნების დონით ძირითად ჰიპოთეზას უარყოფთ.

შენიშვნა. სტატისტიკური ფუნქციით **FTEST(array1,array2)** – გამოითვლება ფიშერის განაწილების p -მნიშვნელობა ცალმხრივი ალტერნატივისათვის.

დისპერსიული ანალიზი

ქვეპროგრამა **Anova: Single Factor** სარგებლობისას გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Input range	შემაჯალი მონაცემები
Grouped by	დაჯგუფებული
Labels	მონიშვნა

მაგალითი. მენეჯერის მიზანია 0.05 მნიშვნელოვნების დონით შეამოწმოს შემთხვევით შერჩეული 3 ჩარხის ერთგვაროვნება მათზე გამოჩარხული ერთი და იმავე დეტალების ზომების მონაცემების ცვალებადობის მიხედვით:

I ჩარხი	6.783	6.781	6.776	6.788	6.785	6.789
II ჩარხი	6.775	6.77	6.772	6.771	6.779	6.773

III ჩარხი 6.778 6.776 6.769 6.772 6.78 6.777

Anova: Single Factor ქვეპროგრამის გამოყენება გვაძლევს:
SUMMARY

Groups	Caunt	Sum	Average	Variance
Column 1	6	502	83.67	23.07
Column 2	6	440	73.33	10.67
Column 3	6	452	75.33	16.67

ANOVA

-----Source of Variation SS df MS F P-value

F crit

ვარიაციის წყარო

Between Groups 360.44 2 180.22 10.73 0.00 3.68

Within Groups 252 15 16.8

Total 612.44 17

დასკვნა: ვინაიდან $f = 10.73 > F_{2,15,0.05} = 3.68$ ამიტომ უარყოფთ ჰიპოთეზას ჩარხების ერთ-გვაროვნების შესახებ – 0.05 მნიშვნელობების დონით ჩარხები არაერთგვაროვანია.

კორელაცია

ფუნქცია **COVAR(array1,array2)** – გამოიყენება კოვარიაციის გამოსათვლელად.

ფუნქცია **CORREL(array1,array2)** – გამოიყენება კორელაციის კოეფიციენტის გამოსათვლელად (**CORREL**-ის იდენტურია **PEARSON** ფუნქცია)

Covariance ქვეპროგრამით გამოითვლება ერთნაირი მოცულობის მონაცემთა რამდენიმე მასივის კოვარიაციული მატრიცა.

Correlation ქვეპროგრამით გამოითვლება ერთნაირი მოცულობის მონაცემთა რამდენიმე მასივის კორელაციური მატრიცა.

რეგრესია

წრფივი რეგრესიული ანალიზის ჩასატარებლად გამოიყენება ფუნქცია **Tools/Data Analysis /Regression**. თუ აღნიშნული ფუნქცია მიუწვდომელია, მაშინ უნდა შესრულდეს შემდეგი მოქმედებები: **Tools/ add-ins**-ში უნდა გააქტიურდეს **Analysis ToolPak, Analysis ToolPak-VBA**.

მარტივ წრფივ რეგრესიულ მოდელთან დაკავშირებით გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

აღნიშვნა	შინაარსი
Known y's	ცნობილი დამოკიდებული ცვლადის მნიშვნელობები
Known x's	ცნობილი დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობები
x	დამოუკიდებელი ცვლადის მნიშვნელობა
Const	თუ Const = 0 , მაშინ რეგრესიის წრფე გადის სათავეზე

ფუნქცია **DEVSQ(number1,2umber2,...)** – ითვლის დაკვირვებული მონაცემების საშუალოდან გადახრების კვადრატების ჯამს.

ფუნქცია **INTERCEPT(known_y's,known_x's)** – ითვლის B_0 კოეფიციენტის b_0 შეფასებას.

ფუნქცია **LINEST(known_y's,known_x's,const,stats)** – ითვლის B_1 კოეფიციენტის b_1 შეფასებას (თუ **Const = 0**, მაშინ გამოითვლება B_1 კოეფიციენტის შეფასება $Y = B_1x + \varepsilon$ მოდელისათვის, ხოლო თუ **Const = 1**, მაშინ გამოითვლება B_1 -ის შეფასება $Y = B_0 + B_1x + \varepsilon$ მოდელისათვის). **LINEST**-ის იდენტურია **SLOPE** ფუნქცია.

ფუნქცია **FORECAST(x,known_y's,known_x's)** – ითვლის საპროგნოზო მნიშვნელობას.

ფუნქცია **RSQ(known_y's,known_x's)** – ითვლის პირსონის კორელაციის კოეფიციენტის კვადრატს (ანუ ე. წ. დეტერმინაციის კოეფიციენტს).

ფუნქცია **TREND(known_y's,known_x's,new_x's,const)** – ითვლის საპროგნოზო მნიშვნელობას (თუ **Const = 0**, მაშინ გამოითვლება B_1 კოეფიციენტის შეფასება $Y = b_1x$ მოდელისათვის, ხოლო თუ **Const = 1**, მაშინ გამოითვლება B_1 -ის შეფასება $Y = b_0 + b_1x$ მოდელისათვის).

ფუნქცია **GROWTH(known_y's,known_x's,new_x's,const)** – ითვლის საპროგნოზო მნიშვნელობას (თუ Const = 0, მაშინ გამოითვლება Y-ის შეფასება $Y = (\beta_1)^x$ მოდელისათვის, ხოლო თუ Const = 1, მაშინ კი გამოითვლება Y-ის შეფასება $Y = \beta_0 \cdot (\beta_1)^x$ მოდელისათვის).

მაგალითი XVIII. 1-ის მონაცემების ანალიზი. Regression ფუნქციის გამოყენება გვაძლევს:

SUMMARY OUTPUT

Regression Statistics	
Multiple R	0.8047
R Square	0.6476
Adjusted R Square	0.6204
Standard Error	12.9965
Observations	15

შესაბამისად, ამონაბეჭდი გვაძლევს კორელაციისა (**Multiple R**) და დეტერმინაციის (**R Square**) კოეფიციენტების, შეთანხმებული დეტერმინაციის კოეფიციენტის (**Adjusted R Square**) და სტანდარტული შეცდომის (**Standard Error**) რიცხვით მნიშვნელობებს. დეტერმინაციის კოეფიციენტი 0.6476 გვიჩვენებს, რომ მარტივი რეგრესიით აიხსნება სახლის გასაყიდი ფასის ვარიაციის მხოლოდ 64.76%, დანარჩენი 35.24% კი აუხსნელი რჩება. საჭიროა შეიქმნას სხვა მოდელი.

დანართი 2
(სტატისტიკური ცხრილები)

თანაბრად განაწილებული შემთხვევითი რიცხვები

11164	36318	75061	37674	26320	75100	10431	20418	19228	91792
21215	91791	76831	58678	87054	31687	93205	43685	19732	08468
10438	44482	66558	37649	08882	90870	12462	41810	01806	02977
36792	26236	33266	66583	60881	97395	20461	36742	02852	50564
73944	04773	12032	51414	82384	38370	00249	80709	72605	67497
49563	12872	14063	93104	78483	72717	68714	18048	25005	04151
64208	48237	41701	73117	33242	42314	83049	21933	92813	04763
51486	72875	38605	29341	80749	80151	33835	52602	79147	08868
99756	26360	64516	17971	48478	09610	04638	17141	09227	10606
71325	55217	13015	72907	00431	45117	33827	92873	02953	85474
65285	97198	12138	53010	94601	15838	16805	61004	43516	17020
17264	57327	38224	29301	31381	38109	34976	65692	98566	29550
95639	99754	31199	92558	68368	04985	51092	37780	40261	14479
61555	76404	86210	11808	12841	45147	97438	60022	12645	62000
78137	98768	04689	87130	79225	08153	84967	64539	79493	74917
62490	99215	84987	28759	19177	14733	24550	28067	68894	38490
24216	63444	21283	07044	92729	37284	13211	37485	10415	36457
16975	95428	33226	55903	31605	43817	22250	03918	46999	98501
59138	39542	71168	57609	91510	77904	74244	50940	31553	62562
29478	59652	50414	31966	87912	87154	12944	49862	96566	48825
96155	95009	27429	72918	08457	78134	48407	26061	58754	05326
29621	66583	62966	12468	20245	14015	04014	35713	03980	03024
12639	75291	71020	17265	41598	64074	64629	63293	53307	48766
14544	37134	54714	02401	63228	26831	19386	15457	17999	18306
83403	88827	09834	11333	68431	31706	26652	04711	34593	22561
67642	05204	30697	44806	96989	68403	85621	45556	35434	09532
64041	99011	14610	40273	09482	62864	01573	82274	81446	32477
17048	94523	97444	59904	16936	39384	97551	09620	63932	03091
93039	89416	52795	10631	09728	68202	20963	02477	55494	39563
82244	34392	96607	17220	51984	10753	76272	50985	97593	34320
96990	55244	70693	25255	40029	23289	48819	07159	60172	81697
09119	74803	97303	88701	51380	73143	98251	78635	27556	20712
57666	41204	47589	78364	38266	94393	70713	53388	79865	92069
46492	61594	26729	58272	81754	14648	77210	12923	53712	87771
08433	19172	08320	20839	13715	10597	17234	39355	74816	03363
10011	75004	86054	41190	10061	19660	03500	68412	57812	57929
92420	65431	16530	05547	10683	88102	30176	84750	10115	69220
35542	55865	07304	47010	43233	57022	52161	82976	47981	46588
86595	26247	18552	29491	33712	32285	64844	69395	41387	87195
72115	34985	58036	99137	47482	06204	24138	24272	16196	04393
07428	58863	96023	88936	51343	70958	96768	74317	27176	29600
35379	27922	28906	55013	26937	48174	04197	36074	65315	12537
10982	22807	10920	26299	23593	64629	57801	10437	43965	15344
90127	33341	77806	12446	15444	49244	47277	11346	15884	28131
63002	12990	23510	68774	48983	20481	59815	67248	17076	78910
40779	86382	48454	65269	91239	45989	45389	54847	77919	41105

43216	12608	18167	84631	94058	82458	15139	76856	86019	47928
96167	64375	74108	93643	09204	98855	59051	56492	11933	64958
70975	62693	35684	72607	23026	37004	32989	24843	01128	74658
85812	61875	23570	75754	29090	40264	80399	47254	40135	69916

კუმულატური ბინომური განაწილების ცხრილი

$$\left(P\{Bin(n, p) \leq x\} = \sum_{k=0}^x C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \right)$$

n	x	P										
		.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
2	0	0.9801	0.9025	0.8100	0.7225	0.6400	0.5625	0.4900	0.4225	0.3600	0.3025	0.2500
	1	0.9999	0.9975	0.9900	0.9775	0.9600	0.9375	0.9100	0.8775	0.8400	0.7975	0.7500
	2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
3	0	0.97030	0.85738	0.729	0.61413	0.512	0.42187	0.343	0.27463	0.216	0.16638	0.125
	1	0.99970	0.99275	0.972	0.93925	0.896	0.84375	0.784	0.71825	0.648	0.57475	0.500
	2	1.00000	0.99988	0.999	0.99663	0.992	0.98437	0.973	0.95713	0.936	0.90887	0.875
3	3	1.00000	1.00000	1.000	1.00000	1.000	1.00000	1.000	1.00000	1.000	1.00000	1.000
	0	0.96060	0.81451	0.6561	0.52201	0.4096	0.31641	0.2401	0.17851	0.1296	0.09151	0.0625
	1	0.99941	0.98598	0.9477	0.89048	0.8192	0.73828	0.6517	0.56298	0.4752	0.39098	0.3125
4	2	1.00000	0.99952	0.9963	0.98802	0.9728	0.94922	0.9163	0.87352	0.8208	0.75852	0.6875
	3	1.00000	0.99999	0.9999	0.99949	0.9984	0.99609	0.9919	0.98499	0.9744	0.95899	0.9375
	4	1.00000	1.00000	1.0000	1.00000	1.0000	1.00000	1.0000	1.00000	1.0000	1.00000	1.0000
5	0	0.95099	0.77378	0.59049	0.44371	0.32768	0.23730	0.16807	0.11603	0.07776	0.05033	0.03125
	1	0.99902	0.97741	0.91854	0.83521	0.73728	0.63281	0.52822	0.42842	0.33696	0.25622	0.18750
	2	0.99999	0.99884	0.99144	0.97339	0.94208	0.89648	0.83692	0.76483	0.68256	0.59313	0.50000
5	3	1.00000	0.99997	0.99954	0.99777	0.99328	0.98437	0.96922	0.94598	0.91296	0.86878	0.81250
	4	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99968	0.99902	0.99757	0.99475	0.98976	0.98155	0.96875
	5	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
6	0	0.94148	0.73509	0.53144	0.37715	0.26214	0.17798	0.11765	0.07542	0.04666	0.02768	0.01563
	1	0.99854	0.96723	0.88573	0.77648	0.65536	0.53394	0.42017	0.31908	0.23328	0.16357	0.10938
	2	0.99998	0.99777	0.98415	0.95266	0.90112	0.83057	0.74431	0.64709	0.54432	0.44152	0.34375
6	3	1.00000	0.99991	0.99873	0.99411	0.98304	0.96240	0.92953	0.88258	0.82080	0.74474	0.65625
	4	1.00000	1.00000	0.99994	0.99960	0.99840	0.99536	0.98906	0.97768	0.95904	0.93080	0.89062
	5	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99976	0.99927	0.99816	0.99590	0.99170	0.98437
6	6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	0	0.93207	0.69834	0.47830	0.32058	0.20972	0.13348	0.08235	0.04902	0.02799	0.01522	0.00781
	1	0.99797	0.95562	0.85031	0.71658	0.57672	0.44495	0.32942	0.23380	0.15863	0.10242	0.06250
7	2	0.99997	0.99624	0.97431	0.92623	0.85197	0.75641	0.64707	0.53228	0.41990	0.31644	0.22656
	3	1.00000	0.99981	0.99727	0.98790	0.96666	0.92944	0.87396	0.80015	0.71021	0.60829	0.50000
	4	1.00000	0.99999	0.99982	0.99878	0.99533	0.98712	0.97120	0.94439	0.90374	0.84707	0.77344
7	5	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99963	0.99866	0.99621	0.99099	0.98116	0.96429	0.93750
	6	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99978	0.99936	0.99836	0.99626	0.99219
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
8	0	0.92274	0.66342	0.43047	0.27249	0.16777	0.10011	0.05765	0.03186	0.01680	0.00837	0.00391
	1	0.99731	0.94276	0.81310	0.65718	0.50332	0.36708	0.25530	0.16913	0.10638	0.06318	0.03516
	2	0.99995	0.99421	0.96191	0.89479	0.79692	0.67854	0.55177	0.42781	0.31539	0.22013	0.14453
8	3	1.00000	0.99963	0.99498	0.97865	0.94372	0.88618	0.80590	0.70640	0.59409	0.47696	0.36328
	4	1.00000	0.99998	0.99957	0.99715	0.98959	0.97270	0.94203	0.89391	0.82633	0.73962	0.63672
	5	1.00000	1.00000	0.99998	0.99976	0.99877	0.99577	0.98871	0.97468	0.95019	0.91154	0.85547
8	6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99962	0.99871	0.99643	0.99148	0.98188	0.96484
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99977	0.99934	0.99832	0.99609
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
9	0	0.91352	0.63025	0.38742	0.23162	0.13422	0.07508	0.04035	0.02071	0.01008	0.00461	0.00195
	1	0.99656	0.92879	0.77484	0.59948	0.43621	0.30034	0.19600	0.12109	0.07054	0.03852	0.01953
	2	0.99992	0.99164	0.94703	0.85915	0.73820	0.60068	0.46283	0.33727	0.23179	0.14950	0.08984
9	3	1.00000	0.99936	0.99167	0.96607	0.91436	0.83427	0.72966	0.60889	0.48261	0.36138	0.25391
	4	1.00000	0.99997	0.99911	0.99437	0.98042	0.95107	0.90119	0.82828	0.73343	0.62142	0.50000
	5	1.00000	1.00000	0.99994	0.99937	0.99693	0.99001	0.97471	0.94641	0.90065	0.83418	0.74609
9	6	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99969	0.99866	0.99571	0.98882	0.97497	0.95023	0.91016
	7	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99989	0.99957	0.99860	0.99620	0.99092	0.98047

8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99992	0.99974	0.99924	0.99805
9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
10	0	0.90438	0.59874	0.34868	0.19687	0.10737	0.05631	0.02825	0.01346	0.00605	0.00253	0.00098
	1	0.99573	0.91386	0.73610	0.54430	0.37581	0.24403	0.14931	0.08595	0.04636	0.02326	0.01074
	2	0.99989	0.98850	0.92981	0.82020	0.67780	0.52559	0.38278	0.26161	0.16729	0.09956	0.05469
	3	1.00000	0.99897	0.98720	0.95003	0.87913	0.77588	0.64961	0.51383	0.38228	0.26604	0.17188
	4	1.00000	0.99994	0.99837	0.99013	0.96721	0.92187	0.84973	0.75150	0.63310	0.50440	0.37695
	5	1.00000	1.00000	0.99985	0.99862	0.99363	0.98027	0.95265	0.90507	0.83376	0.73844	0.62305
	6	1.00000	1.00000	0.99999	0.99987	0.99914	0.99649	0.98941	0.97398	0.94524	0.89801	0.82812
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992	0.99958	0.99841	0.99518	0.98771	0.97261	0.94531
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99986	0.99946	0.99832	0.99550	0.98926
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99990	0.99966	0.99902
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
11	0	0.89534	0.56880	0.31381	0.16734	0.08590	0.04224	0.01977	0.00875	0.00363	0.00139	0.00049
	1	0.99482	0.89811	0.69736	0.49219	0.32212	0.19710	0.11299	0.06058	0.03023	0.01393	0.00586
	2	0.99984	0.98476	0.91044	0.77881	0.61740	0.45520	0.31274	0.20013	0.11892	0.06522	0.03271
	3	1.00000	0.99845	0.98147	0.93056	0.83886	0.71330	0.56956	0.42555	0.29628	0.19112	0.11328
	4	1.00000	0.99989	0.99725	0.98411	0.94959	0.88537	0.78970	0.66831	0.53277	0.39714	0.27441
	5	1.00000	0.99999	0.99970	0.99734	0.98835	0.96567	0.92178	0.85132	0.75350	0.63312	0.50000
	6	1.00000	1.00000	0.99998	0.99968	0.99803	0.99244	0.97838	0.94986	0.90065	0.82620	0.72559
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99976	0.99881	0.99571	0.98776	0.97072	0.93904	0.88672
	8	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99942	0.99796	0.99408	0.98520	0.96729
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99979	0.99927	0.99779	0.99414
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99985	0.99951	
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
12	0	0.88638	0.54036	0.28243	0.14224	0.06872	0.03168	0.01384	0.00569	0.00218	0.00077	0.00024
	1	0.99383	0.88164	0.65900	0.44346	0.27488	0.15838	0.08503	0.04244	0.01959	0.00829	0.00317
	2	0.99979	0.98043	0.88913	0.73582	0.55835	0.39068	0.25282	0.15129	0.08344	0.04214	0.01929
	3	1.00000	0.99776	0.97436	0.90779	0.79457	0.64878	0.49252	0.34665	0.22534	0.13447	0.07300
	4	1.00000	0.99982	0.99567	0.97608	0.92744	0.84236	0.72366	0.58335	0.43818	0.30443	0.19385
	5	1.00000	0.99999	0.99946	0.99536	0.98059	0.94560	0.88215	0.78726	0.66521	0.52693	0.38721
	6	1.00000	1.00000	0.99995	0.99933	0.99610	0.98575	0.96140	0.91537	0.84179	0.73931	0.61279
	7	1.00000	1.00000	1.00000	0.99993	0.99942	0.99722	0.99051	0.97449	0.94269	0.88826	0.80615
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99961	0.99831	0.99439	0.98473	0.96443	0.92700
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99979	0.99915	0.99719	0.99212	0.98071
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99992	0.99968	0.99892	0.99683
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99993	0.99976	
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
13	0	0.87752	0.51334	0.25419	0.12091	0.05498	0.02376	0.00969	0.00370	0.00131	0.00042	0.00012
	1	0.99275	0.86458	0.62134	0.39828	0.23365	0.12671	0.06367	0.02958	0.01263	0.00490	0.00171
	2	0.99973	0.97549	0.86612	0.69196	0.50165	0.33260	0.20248	0.11319	0.05790	0.02691	0.01123
	3	0.99999	0.99690	0.96584	0.88200	0.74732	0.58425	0.42061	0.27827	0.16858	0.09292	0.04614
	4	1.00000	0.99971	0.99354	0.96584	0.90087	0.79396	0.65431	0.50050	0.35304	0.22795	0.13342
	5	1.00000	0.99998	0.99908	0.99247	0.96996	0.91979	0.83460	0.71589	0.57440	0.42681	0.29053
	6	1.00000	1.00000	0.99990	0.99873	0.99300	0.97571	0.93762	0.87053	0.77116	0.64374	0.50000
	7	1.00000	1.00000	0.99999	0.99984	0.99875	0.99435	0.98178	0.95380	0.90233	0.82123	0.70947
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99983	0.99901	0.99597	0.98743	0.96792	0.93015	0.86658
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99987	0.99935	0.99749	0.99221	0.97966	0.95386
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99993	0.99965	0.99868	0.99586	0.98877
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99986	0.99948	0.99829
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997	0.99988	
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
14	0	0.86875	0.48767	0.22877	0.10277	0.04398	0.01782	0.00678	0.00240	0.00078	0.00023	0.00006
	1	0.99160	0.84701	0.58463	0.35667	0.19791	0.10097	0.04748	0.02052	0.00810	0.00289	0.00092
	2	0.99966	0.96995	0.84164	0.64791	0.44805	0.28113	0.16084	0.08393	0.03979	0.01701	0.00647
	3	0.99999	0.99583	0.95587	0.85349	0.69819	0.52134	0.35517	0.22050	0.12431	0.06322	0.02869
	4	1.00000	0.99957	0.99077	0.95326	0.87016	0.74153	0.58420	0.42272	0.27926	0.16719	0.08978
	5	1.00000	0.99997	0.99853	0.98847	0.95615	0.88833	0.78052	0.64051	0.48585	0.33732	0.21198
	6	1.00000	1.00000	0.99982	0.99779	0.98839	0.96173	0.90672	0.81641	0.69245	0.54612	0.39526
	7	1.00000	1.00000	0.99998	0.99967	0.99760	0.98969	0.96853	0.92466	0.84986	0.74136	0.60474
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99962	0.99785	0.99171	0.97566	0.94168	0.88114	0.78802
	9	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99966	0.99833	0.99396	0.98249	0.95738	0.91022
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99975	0.99889	0.99609	0.98857	0.97131
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99986	0.99939	0.99785	0.99353
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99975	0.99908	
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99994

14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
15	0	0.86006	0.46329	0.20589	0.08735	0.03518	0.01336	0.00475	0.00156	0.00047	0.00013	0.00003
	1	0.99037	0.82905	0.54904	0.31859	0.16713	0.08018	0.03527	0.01418	0.00517	0.00169	0.00049
	2	0.99958	0.96380	0.81594	0.60423	0.39802	0.23609	0.12683	0.06173	0.02711	0.01065	0.00369
	3	0.99999	0.99453	0.94444	0.82266	0.64816	0.46129	0.29687	0.17270	0.09050	0.04242	0.01758
	4	1.00000	0.99939	0.98728	0.93829	0.83577	0.68649	0.51549	0.35194	0.21728	0.12040	0.05923
	5	1.00000	0.99995	0.99775	0.98319	0.93895	0.85163	0.72162	0.56428	0.40322	0.26076	0.15088
	6	1.00000	1.00000	0.99969	0.99639	0.98194	0.94338	0.86886	0.75484	0.60981	0.45216	0.30362
	7	1.00000	1.00000	0.99997	0.99939	0.99576	0.98270	0.94999	0.88677	0.78690	0.65350	0.50000
	8	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99922	0.99581	0.98476	0.95781	0.90495	0.81824	0.69638
	9	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99989	0.99921	0.99635	0.98756	0.96617	0.92307	0.84912
	10	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99988	0.99933	0.99717	0.99065	0.97453	0.94077
	11	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99991	0.99952	0.99807	0.99367	0.98242
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99994	0.99972	0.99889	0.99631
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99988	0.99951
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99997
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
20	0	0.81791	0.35849	0.12158	0.03876	0.01153	0.00317	0.00080	0.00018	0.00004	0.00001	0.00000
	1	0.98314	0.73584	0.39175	0.17556	0.06918	0.02431	0.00764	0.00213	0.00052	0.00011	0.00002
	2	0.99900	0.92452	0.67693	0.40490	0.20608	0.09126	0.03548	0.01212	0.00361	0.00093	0.00020
	3	0.99996	0.98410	0.86705	0.64773	0.41145	0.22516	0.10709	0.04438	0.01596	0.00493	0.00129
	4	1.00000	0.99743	0.95683	0.82985	0.62965	0.41484	0.23751	0.11820	0.05095	0.01886	0.00591
	5	1.00000	0.99967	0.98875	0.93269	0.80421	0.61717	0.41637	0.24540	0.12560	0.05533	0.02069
	6	1.00000	0.99997	0.99761	0.97806	0.91331	0.78578	0.60801	0.41663	0.25001	0.12993	0.05766
	7	1.00000	1.00000	0.99958	0.99408	0.96786	0.89819	0.77227	0.60103	0.41589	0.25201	0.13159
	8	1.00000	1.00000	0.99994	0.99867	0.99002	0.95907	0.88667	0.76238	0.59560	0.41431	0.25172
	9	1.00000	1.00000	0.99999	0.99975	0.99741	0.98614	0.95204	0.87822	0.75534	0.59136	0.41190
	10	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99944	0.99606	0.98286	0.94683	0.87248	0.75071	0.58810
	11	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99906	0.99486	0.98042	0.94347	0.86923	0.74828
	12	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99982	0.99872	0.99398	0.97897	0.94197	0.86841
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99974	0.99848	0.99353	0.97859	0.94234
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99969	0.99839	0.99357	0.97931
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99968	0.99847	0.99409
	16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99972	0.99871
	17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99996	0.99980
	18	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
	19	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	20	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
25	0	0.77782	0.27739	0.07179	0.01720	0.00378	0.00075	0.00013	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000
	1	0.97424	0.64238	0.27121	0.09307	0.02739	0.00702	0.00157	0.00030	0.00005	0.00001	0.00000
	2	0.99805	0.87289	0.53709	0.25374	0.09823	0.03211	0.00896	0.00213	0.00043	0.00007	0.00001
	3	0.99989	0.96591	0.76359	0.47112	0.23399	0.09621	0.03324	0.00968	0.00237	0.00048	0.00008
	4	1.00000	0.99284	0.90201	0.68211	0.42067	0.21374	0.09047	0.03205	0.00947	0.00231	0.00046
	5	1.00000	0.99879	0.96660	0.83848	0.61669	0.37828	0.19349	0.08262	0.02936	0.00860	0.00204
	6	1.00000	0.99983	0.99052	0.93047	0.78004	0.56110	0.34065	0.17340	0.07357	0.02575	0.00732
	7	1.00000	0.99998	0.99774	0.97453	0.89088	0.72651	0.51185	0.30608	0.15355	0.06385	0.02164
	8	1.00000	1.00000	0.99954	0.99203	0.95323	0.85056	0.67693	0.46682	0.27353	0.13398	0.05388
	9	1.00000	1.00000	0.99992	0.99786	0.98267	0.92867	0.81056	0.63031	0.42462	0.24237	0.11476
	10	1.00000	1.00000	0.99999	0.99951	0.99445	0.97033	0.90220	0.77116	0.58577	0.38426	0.21218
	11	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99846	0.98927	0.95575	0.87458	0.73228	0.54257	0.34502
	12	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99963	0.99663	0.98253	0.93956	0.84623	0.69368	0.50000
	13	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99908	0.99401	0.97454	0.92220	0.81731	0.65498
	14	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99979	0.99822	0.99069	0.96561	0.90402	0.78782
	15	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99955	0.99706	0.98683	0.95604	0.88524
	16	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99990	0.99921	0.99567	0.98264	0.94612
	17	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99982	0.99879	0.99417	0.97836
	18	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99972	0.99836	0.99268
	19	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99995	0.99962	0.99796
	20	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99954
	21	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99992
	22	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
	23	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	24	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
	25	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
50	0	0.60501	0.07694	0.00515	0.00030	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	1	0.91056	0.27943	0.03379	0.00291	0.00019	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
	2	0.98618	0.54053	0.11173	0.01419	0.00129	0.00009	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

3	0.99840	0.76041	0.25029	0.04605	0.00566	0.00050	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.99985	0.89638	0.43120	0.11211	0.01850	0.00211	0.00017	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.99999	0.96222	0.61612	0.21935	0.04803	0.00705	0.00072	0.00005	0.00000	0.00000	0.00000
6	1.00000	0.98821	0.77023	0.36130	0.10340	0.01939	0.00249	0.00022	0.00001	0.00000	0.00000
7	1.00000	0.99681	0.87785	0.51875	0.19041	0.04526	0.00726	0.00080	0.00006	0.00000	0.00000
8	1.00000	0.99924	0.94213	0.66810	0.30733	0.09160	0.01825	0.00248	0.00023	0.00001	0.00000
9	1.00000	0.99984	0.97546	0.79109	0.44374	0.16368	0.04023	0.00670	0.00076	0.00006	0.00000
10	1.00000	0.99997	0.99065	0.88008	0.58356	0.26220	0.07885	0.01601	0.00220	0.00020	0.00001
11	1.00000	1.00000	0.99678	0.93719	0.71067	0.38162	0.13904	0.03423	0.00569	0.00063	0.00005
12	1.00000	1.00000	0.99900	0.96994	0.81394	0.51099	0.22287	0.06613	0.01325	0.00177	0.00015
13	1.00000	1.00000	0.99971	0.98683	0.88941	0.63704	0.32788	0.11633	0.02799	0.00449	0.00047
14	1.00000	1.00000	0.99993	0.99471	0.93928	0.74808	0.44683	0.18778	0.05395	0.01038	0.00130
15	1.00000	1.00000	0.99998	0.99805	0.96920	0.83692	0.56918	0.28010	0.09550	0.02195	0.00330
16	1.00000	1.00000	1.00000	0.99934	0.98556	0.90169	0.68388	0.38886	0.15609	0.04265	0.00767
17	1.00000	1.00000	1.00000	0.99979	0.99374	0.94488	0.78219	0.50597	0.23688	0.07653	0.01642
18	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99749	0.97127	0.85944	0.62159	0.33561	0.12734	0.03245
19	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99907	0.98608	0.91520	0.72644	0.44648	0.19737	0.05946
20	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99968	0.99374	0.95224	0.81394	0.56103	0.28617	0.10132
21	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99738	0.97491	0.88126	0.67014	0.38996	0.16112
22	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99898	0.98772	0.92904	0.76602	0.50191	0.23994
23	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99963	0.99441	0.96036	0.84383	0.61341	0.33591
24	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99988	0.99763	0.97933	0.90219	0.71604	0.44386
25	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99907	0.98996	0.94266	0.80337	0.55614
26	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99966	0.99546	0.96859	0.87207	0.66409
27	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99988	0.99809	0.98397	0.92204	0.76006
28	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99925	0.99238	0.95562	0.83888
29	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99973	0.99664	0.97646	0.89868
30	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99991	0.99863	0.98840	0.94054
31	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99948	0.99470	0.96755
32	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99982	0.99776	0.98358
33	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99913	0.99233
34	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99969	0.99670
35	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99870
36	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99953
37	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99985
38	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995
39	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
40	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
41	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
42	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
43	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
44	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
45	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
46	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
47	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
48	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
49	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
50	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
100	0	0.36603	0.00592	0.00003	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.73576	0.03708	0.00032	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.92063	0.11826	0.00194	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
3	0.98163	0.25784	0.00784	0.00009	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
4	0.99657	0.43598	0.02371	0.00043	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
5	0.99947	0.61600	0.05758	0.00155	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
6	0.99993	0.76601	0.11716	0.00470	0.00008	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
7	0.99999	0.87204	0.20605	0.01217	0.00028	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
8	1.00000	0.93691	0.32087	0.02748	0.00086	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
9	1.00000	0.97181	0.45129	0.05509	0.00233	0.00004	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
10	1.00000	0.98853	0.58316	0.09945	0.00570	0.00014	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
11	1.00000	0.99573	0.70303	0.16349	0.01257	0.00039	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
12	1.00000	0.99854	0.80182	0.24730	0.02533	0.00103	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
13	1.00000	0.99954	0.87612	0.34742	0.04691	0.00246	0.00006	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
14	1.00000	0.99986	0.92743	0.45722	0.08044	0.00542	0.00016	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
15	1.00000	0.99996	0.96011	0.56832	0.12851	0.01108	0.00040	0.00001	0.00000	0.00000	0.00000
16	1.00000	0.99999	0.97940	0.67246	0.19234	0.02111	0.00097	0.00002	0.00000	0.00000	0.00000
17	1.00000	1.00000	0.98999	0.76328	0.27119	0.03763	0.00216	0.00005	0.00000	0.00000	0.00000
18	1.00000	1.00000	0.99542	0.83717	0.36209	0.06301	0.00452	0.00014	0.00000	0.00000	0.00000
19	1.00000	1.00000	0.99802	0.89346	0.46016	0.09953	0.00889	0.00034	0.00001	0.00000	0.00000
20	1.00000	1.00000	0.99919	0.93368	0.55946	0.14883	0.01646	0.00078	0.00002	0.00000	0.00000
21	1.00000	1.00000	0.99969	0.96072	0.65403	0.21144	0.02883	0.00169	0.00004	0.00000	0.00000

22	1.00000	1.00000	0.99989	0.97786	0.73893	0.28637	0.04787	0.00343	0.00011	0.00000	0.00000
23	1.00000	1.00000	0.99996	0.98811	0.81091	0.37108	0.07553	0.00662	0.00025	0.00000	0.00000
24	1.00000	1.00000	0.99999	0.99392	0.86865	0.46167	0.11357	0.01213	0.00056	0.00001	0.00000
25	1.00000	1.00000	1.00000	0.99703	0.91252	0.55347	0.16313	0.02114	0.00119	0.00003	0.00000
26	1.00000	1.00000	1.00000	0.99862	0.94417	0.64174	0.22440	0.03514	0.00240	0.00007	0.00000
27	1.00000	1.00000	1.00000	0.99939	0.96585	0.72238	0.29637	0.05581	0.00460	0.00016	0.00000
28	1.00000	1.00000	1.00000	0.99974	0.97998	0.79246	0.37678	0.08482	0.00843	0.00036	0.00001
29	1.00000	1.00000	1.00000	0.99989	0.98875	0.85046	0.46234	0.12360	0.01478	0.00076	0.00002
30	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99394	0.89621	0.54912	0.17302	0.02478	0.00154	0.00004
31	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99687	0.93065	0.63311	0.23311	0.03985	0.00297	0.00009
32	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99845	0.95540	0.71072	0.30288	0.06150	0.00550	0.00020
33	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99926	0.97241	0.77926	0.38029	0.09125	0.00976	0.00044
34	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99966	0.98357	0.83714	0.46243	0.13034	0.01663	0.00089
35	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99985	0.99059	0.88392	0.54584	0.17947	0.02724	0.00176
36	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99482	0.92012	0.62692	0.23861	0.04290	0.00332
37	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99725	0.94695	0.70245	0.30681	0.06507	0.00602
38	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99860	0.96602	0.76987	0.38219	0.09514	0.01049
39	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99931	0.97901	0.82758	0.46208	0.13425	0.01760
40	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99968	0.98750	0.87498	0.54329	0.18306	0.02844
41	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99985	0.99283	0.91232	0.62253	0.24149	0.04431
42	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99994	0.99603	0.94057	0.69674	0.30865	0.06661
43	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99789	0.96109	0.76347	0.38277	0.09667
44	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99891	0.97540	0.82110	0.46133	0.13563
45	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99946	0.98499	0.86891	0.54132	0.18410
46	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99974	0.99116	0.90702	0.61956	0.24206
47	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99988	0.99498	0.93621	0.69312	0.30865
48	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99995	0.99725	0.95770	0.75957	0.38218
49	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99855	0.97290	0.81727	0.46020
50	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99926	0.98324	0.86542	0.53979
51	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99964	0.98999	0.90405	0.61782
52	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99983	0.99424	0.93383	0.69135
53	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99992	0.99680	0.95589	0.75794
54	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99997	0.99829	0.97161	0.81590
55	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99912	0.98236	0.86437
56	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99956	0.98943	0.90333
57	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99979	0.99389	0.93339	
58	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99660	0.95569
59	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99818	0.97156
60	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99906	0.98240
61	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99953	0.98951
62	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99978	0.99398
63	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99990	0.99668
64	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996	0.99824
65	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998	0.99911
66	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999	0.99956
67	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99980
68	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99991
69	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99996
70	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99998
71	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	0.99999
72	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
73	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
74	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
75	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
76	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
77	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
78	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
79	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
80	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
81	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
82	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
83	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
84	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
85	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
86	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
87	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
88	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
89	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
90	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
91	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
92	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

93	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
94	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
95	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
96	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
97	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
98	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
99	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
100	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000

კუმულატური პუასონის განაწილების ცხრილი

$$(P\{Po(\lambda) \leq x\} = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda})$$

λ										
x	0.01	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.9950	0.9900	0.9802	0.9704	0.9608	0.9512	0.9418	0.9324	0.9231	0.9139
1	1.0000	1.0000	0.9998	0.9996	0.9992	0.9988	0.9983	0.9977	0.9970	0.9962
2	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999
3	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.9953	0.9825	0.9631	0.9384	0.9098	0.8781	0.8442	0.8088	0.7725	0.7358
2	0.9998	0.9989	0.9964	0.9921	0.9856	0.9769	0.9659	0.9526	0.9371	0.9197
3	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992	0.9982	0.9966	0.9942	0.9909	0.9865	0.9810
4	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996	0.9992	0.9986	0.9977	0.9963
5	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9997	0.9994
6	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
7	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.6990	0.6626	0.6268	0.5918	0.5578	0.5249	0.4932	0.4628	0.4337	0.4060
2	0.9004	0.8795	0.8571	0.8335	0.8088	0.7834	0.7572	0.7306	0.7037	0.6767
3	0.9743	0.9662	0.9569	0.9463	0.9344	0.9212	0.9068	0.8913	0.8747	0.8571
4	0.9946	0.9923	0.9893	0.9857	0.9814	0.9763	0.9704	0.9636	0.9559	0.9473
5	0.9990	0.9985	0.9978	0.9968	0.9955	0.9940	0.9920	0.9896	0.9868	0.9834
6	0.9999	0.9997	0.9996	0.9994	0.9991	0.9987	0.9981	0.9974	0.9966	0.9955
7	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9994	0.9992	0.9989
8	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.3796	0.3546	0.3309	0.3084	0.2873	0.2674	0.2487	0.2311	0.2146	0.1991
2	0.6496	0.6227	0.5960	0.5697	0.5438	0.5184	0.4936	0.4695	0.4460	0.4232
3	0.8386	0.8194	0.7993	0.7787	0.7576	0.7360	0.7141	0.6919	0.6696	0.6472
4	0.9379	0.9275	0.9162	0.9041	0.8912	0.8774	0.8629	0.8477	0.8318	0.8153
5	0.9796	0.9751	0.9700	0.9643	0.9580	0.9510	0.9433	0.9349	0.9258	0.9161
6	0.9941	0.9925	0.9906	0.9884	0.9858	0.9828	0.9794	0.9756	0.9713	0.9665
7	0.9985	0.9980	0.9974	0.9967	0.9958	0.9947	0.9934	0.9919	0.9901	0.9881
8	0.9997	0.9995	0.9994	0.9991	0.9989	0.9985	0.9981	0.9976	0.9969	0.9962
9	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9991	0.9989
10	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
11	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999

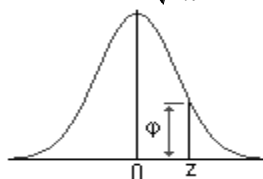
12	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0334	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1847	0.1712	0.1586	0.1468	0.1359	0.1257	0.1162	0.1074	0.0992	0.0916
2	0.4012	0.3799	0.3594	0.3397	0.3208	0.3027	0.2854	0.2689	0.2531	0.2381
3	0.6248	0.6025	0.5803	0.5584	0.5366	0.5152	0.4942	0.4735	0.4532	0.4335
4	0.7982	0.7806	0.7626	0.7442	0.7254	0.7064	0.6872	0.6678	0.6484	0.6288
5	0.9057	0.8946	0.8829	0.8705	0.8576	0.8441	0.8301	0.8156	0.8006	0.7851
6	0.9612	0.9554	0.9490	0.9421	0.9347	0.9267	0.9182	0.9091	0.8995	0.8893
7	0.9858	0.9832	0.9802	0.9769	0.9733	0.9692	0.9648	0.9599	0.9546	0.9489
8	0.9953	0.9943	0.9931	0.9917	0.9901	0.9883	0.9863	0.9840	0.9815	0.9786
9	0.9986	0.9982	0.9978	0.9973	0.9967	0.9960	0.9952	0.9942	0.9931	0.9919
10	0.9996	0.9995	0.9994	0.9992	0.9990	0.9987	0.9984	0.9981	0.9977	0.9972
11	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991
12	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997
13	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
14	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	4.1	4.2	4.3	4.4	4.5	4.6	4.7	4.8	4.9	5
0	0.0166	0.0150	0.0136	0.0123	0.0111	0.0101	0.0091	0.0082	0.0074	0.0067
1	0.0845	0.0780	0.0719	0.0663	0.0611	0.0563	0.0518	0.0477	0.0439	0.0404
2	0.2238	0.2102	0.1974	0.1851	0.1736	0.1626	0.1523	0.1425	0.1333	0.1247
3	0.4142	0.3954	0.3772	0.3594	0.3423	0.3257	0.3097	0.2942	0.2793	0.2650
4	0.6093	0.5898	0.5704	0.5512	0.5321	0.5132	0.4946	0.4763	0.4582	0.4405
5	0.7693	0.7531	0.7367	0.7199	0.7029	0.6858	0.6684	0.6510	0.6335	0.6160
6	0.8786	0.8675	0.8558	0.8436	0.8311	0.8180	0.8046	0.7908	0.7767	0.7622
7	0.9427	0.9361	0.9290	0.9214	0.9134	0.9049	0.8960	0.8867	0.8769	0.8666
8	0.9755	0.9721	0.9683	0.9642	0.9597	0.9549	0.9497	0.9442	0.9382	0.9319
9	0.9905	0.9889	0.9871	0.9851	0.9829	0.9805	0.9778	0.9749	0.9717	0.9682
10	0.9966	0.9959	0.9952	0.9943	0.9933	0.9922	0.9910	0.9896	0.9880	0.9863
11	0.9989	0.9986	0.9983	0.9980	0.9976	0.9971	0.9966	0.9960	0.9953	0.9945
12	0.9997	0.9996	0.9995	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980
13	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
14	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
15	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
16	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	5.9	6
0	0.0061	0.0055	0.0050	0.0045	0.0041	0.0037	0.0033	0.0030	0.0027	0.0025
1	0.0372	0.0342	0.0314	0.0289	0.0266	0.0244	0.0224	0.0206	0.0189	0.0174
2	0.1165	0.1088	0.1016	0.0948	0.0884	0.0824	0.0768	0.0715	0.0666	0.0620
3	0.2513	0.2381	0.2254	0.2133	0.2017	0.1906	0.1800	0.1700	0.1604	0.1512
4	0.4231	0.4061	0.3895	0.3733	0.3575	0.3422	0.3272	0.3127	0.2987	0.2851
5	0.5984	0.5809	0.5635	0.5461	0.5289	0.5119	0.4950	0.4783	0.4619	0.4457
6	0.7474	0.7324	0.7171	0.7017	0.6860	0.6703	0.6544	0.6384	0.6224	0.6063
7	0.8560	0.8449	0.8335	0.8217	0.8095	0.7970	0.7841	0.7710	0.7576	0.7440
8	0.9252	0.9181	0.9106	0.9027	0.8944	0.8857	0.8766	0.8672	0.8574	0.8472
9	0.9644	0.9603	0.9559	0.9512	0.9462	0.9409	0.9352	0.9292	0.9228	0.9161
10	0.9844	0.9823	0.9800	0.9775	0.9747	0.9718	0.9686	0.9651	0.9614	0.9574
11	0.9937	0.9927	0.9916	0.9904	0.9890	0.9875	0.9859	0.9841	0.9821	0.9799
12	0.9976	0.9972	0.9967	0.9962	0.9955	0.9949	0.9941	0.9932	0.9922	0.9912

13	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9983	0.9980	0.9977	0.9973	0.9969	0.9964
14	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9991	0.9990	0.9988	0.9986
15	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995
16	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998
17	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8	6.9	7
0	0.0022	0.0020	0.0018	0.0017	0.0015	0.0014	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009
1	0.0159	0.0146	0.0134	0.0123	0.0113	0.0103	0.0095	0.0087	0.0080	0.0073
2	0.0577	0.0536	0.0498	0.0463	0.0430	0.0400	0.0371	0.0344	0.0320	0.0296
3	0.1425	0.1342	0.1264	0.1189	0.1118	0.1052	0.0988	0.0928	0.0871	0.0818
4	0.2719	0.2592	0.2469	0.2351	0.2237	0.2127	0.2022	0.1920	0.1823	0.1730
5	0.4298	0.4141	0.3988	0.3837	0.3690	0.3547	0.3406	0.3270	0.3137	0.3007
6	0.5902	0.5742	0.5582	0.5423	0.5265	0.5108	0.4953	0.4799	0.4647	0.4497
7	0.7301	0.7160	0.7017	0.6873	0.6728	0.6581	0.6433	0.6285	0.6136	0.5987
8	0.8367	0.8259	0.8148	0.8033	0.7916	0.7796	0.7673	0.7548	0.7420	0.7291
9	0.9090	0.9016	0.8939	0.8858	0.8774	0.8686	0.8596	0.8502	0.8405	0.8305
10	0.9531	0.9486	0.9437	0.9386	0.9332	0.9274	0.9214	0.9151	0.9084	0.9015
11	0.9776	0.9750	0.9723	0.9693	0.9661	0.9627	0.9591	0.9552	0.9510	0.9467
12	0.9900	0.9887	0.9873	0.9857	0.9840	0.9821	0.9801	0.9779	0.9755	0.9730
13	0.9958	0.9952	0.9945	0.9937	0.9929	0.9920	0.9909	0.9898	0.9885	0.9872
14	0.9984	0.9981	0.9978	0.9974	0.9970	0.9966	0.9961	0.9956	0.9950	0.9943
15	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990	0.9988	0.9986	0.9984	0.9982	0.9979	0.9976
16	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9990
17	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996
18	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
19	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	7.1	7.2	7.3	7.4	7.5	7.6	7.7	7.8	7.9	8
0	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003
1	0.0067	0.0061	0.0056	0.0051	0.0047	0.0043	0.0039	0.0036	0.0033	0.0030
2	0.0275	0.0255	0.0236	0.0219	0.0203	0.0188	0.0174	0.0161	0.0149	0.0138
3	0.0767	0.0719	0.0674	0.0632	0.0591	0.0554	0.0518	0.0485	0.0453	0.0424
4	0.1641	0.1555	0.1473	0.1395	0.1321	0.1249	0.1181	0.1117	0.1055	0.0996
5	0.2881	0.2759	0.2640	0.2526	0.2414	0.2307	0.2203	0.2103	0.2006	0.1912
6	0.4349	0.4204	0.4060	0.3920	0.3782	0.3646	0.3514	0.3384	0.3257	0.3134
7	0.5838	0.5689	0.5541	0.5393	0.5246	0.5100	0.4956	0.4812	0.4670	0.4530
8	0.7160	0.7027	0.6892	0.6757	0.6620	0.6482	0.6343	0.6204	0.6065	0.5925
9	0.8202	0.8096	0.7988	0.7877	0.7764	0.7649	0.7531	0.7411	0.7290	0.7166
10	0.8942	0.8867	0.8788	0.8707	0.8622	0.8535	0.8445	0.8352	0.8257	0.8159
11	0.9420	0.9371	0.9319	0.9265	0.9208	0.9148	0.9085	0.9020	0.8952	0.8881
12	0.9703	0.9673	0.9642	0.9609	0.9573	0.9536	0.9496	0.9454	0.9409	0.9362
13	0.9857	0.9841	0.9824	0.9805	0.9784	0.9762	0.9739	0.9714	0.9687	0.9658
14	0.9935	0.9927	0.9918	0.9908	0.9897	0.9886	0.9873	0.9859	0.9844	0.9827
15	0.9972	0.9969	0.9964	0.9959	0.9954	0.9948	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918
16	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9974	0.9971	0.9967	0.9963
17	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989	0.9988	0.9986	0.9984
18	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9994	0.9993
19	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997

20	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
21	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	8.1	8.2	8.3	8.4	8.5	8.6	8.7	8.8	8.9	9
0	0.0003	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001
1	0.0028	0.0025	0.0023	0.0021	0.0019	0.0018	0.0016	0.0015	0.0014	0.0012
2	0.0127	0.0118	0.0109	0.0100	0.0093	0.0086	0.0079	0.0073	0.0068	0.0062
3	0.0396	0.0370	0.0346	0.0323	0.0301	0.0281	0.0262	0.0244	0.0228	0.0212
4	0.0940	0.0887	0.0837	0.0789	0.0744	0.0701	0.0660	0.0621	0.0584	0.0550
5	0.1822	0.1736	0.1653	0.1573	0.1496	0.1422	0.1352	0.1284	0.1219	0.1157
6	0.3013	0.2896	0.2781	0.2670	0.2562	0.2457	0.2355	0.2256	0.2160	0.2068
7	0.4391	0.4254	0.4119	0.3987	0.3856	0.3728	0.3602	0.3478	0.3357	0.3239
8	0.5786	0.5647	0.5507	0.5369	0.5231	0.5094	0.4958	0.4823	0.4689	0.4557
9	0.7041	0.6915	0.6788	0.6659	0.6530	0.6400	0.6269	0.6137	0.6006	0.5874
10	0.8058	0.7955	0.7850	0.7743	0.7634	0.7522	0.7409	0.7294	0.7178	0.7060
11	0.8807	0.8731	0.8652	0.8571	0.8487	0.8400	0.8311	0.8220	0.8126	0.8030
12	0.9313	0.9261	0.9207	0.9150	0.9091	0.9029	0.8965	0.8898	0.8829	0.8758
13	0.9628	0.9595	0.9561	0.9524	0.9486	0.9445	0.9403	0.9358	0.9311	0.9261
14	0.9810	0.9791	0.9771	0.9749	0.9726	0.9701	0.9675	0.9647	0.9617	0.9585
15	0.9908	0.9898	0.9887	0.9875	0.9862	0.9848	0.9832	0.9816	0.9798	0.9780
16	0.9958	0.9953	0.9947	0.9941	0.9934	0.9926	0.9918	0.9909	0.9899	0.9889
17	0.9982	0.9979	0.9977	0.9973	0.9970	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947
18	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9985	0.9983	0.9981	0.9978	0.9976
19	0.9997	0.9997	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9989
20	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996
21	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	9.1	9.2	9.3	9.4	9.5	9.6	9.7	9.8	9.9	10
0	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000
1	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0005	0.0005
2	0.0058	0.0053	0.0049	0.0045	0.0042	0.0038	0.0035	0.0033	0.0030	0.0028
3	0.0198	0.0184	0.0172	0.0160	0.0149	0.0138	0.0129	0.0120	0.0111	0.0103
4	0.0517	0.0486	0.0456	0.0429	0.0403	0.0378	0.0355	0.0333	0.0312	0.0293
5	0.1098	0.1041	0.0986	0.0935	0.0885	0.0838	0.0793	0.0750	0.0710	0.0671
6	0.1978	0.1892	0.1808	0.1727	0.1649	0.1574	0.1502	0.1433	0.1366	0.1301
7	0.3123	0.3010	0.2900	0.2792	0.2687	0.2584	0.2485	0.2388	0.2294	0.2202
8	0.4426	0.4296	0.4168	0.4042	0.3918	0.3796	0.3676	0.3558	0.3442	0.3328
9	0.5742	0.5611	0.5479	0.5349	0.5218	0.5089	0.4960	0.4832	0.4705	0.4579
10	0.6941	0.6820	0.6699	0.6576	0.6453	0.6329	0.6205	0.6080	0.5955	0.5830
11	0.7932	0.7832	0.7730	0.7626	0.7520	0.7412	0.7303	0.7193	0.7081	0.6968
12	0.8684	0.8607	0.8529	0.8448	0.8364	0.8279	0.8191	0.8101	0.8009	0.7916
13	0.9210	0.9156	0.9100	0.9042	0.8981	0.8919	0.8853	0.8786	0.8716	0.8645
14	0.9552	0.9517	0.9480	0.9441	0.9400	0.9357	0.9312	0.9265	0.9216	0.9165
15	0.9760	0.9738	0.9715	0.9691	0.9665	0.9638	0.9609	0.9579	0.9546	0.9513
16	0.9878	0.9865	0.9852	0.9838	0.9823	0.9806	0.9789	0.9770	0.9751	0.9730
17	0.9941	0.9934	0.9927	0.9919	0.9911	0.9902	0.9892	0.9881	0.9870	0.9857
18	0.9973	0.9969	0.9966	0.9962	0.9957	0.9952	0.9947	0.9941	0.9935	0.9928
19	0.9988	0.9986	0.9985	0.9983	0.9980	0.9978	0.9975	0.9972	0.9969	0.9965
20	0.9995	0.9994	0.9993	0.9992	0.9991	0.9990	0.9989	0.9987	0.9986	0.9984

21	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997	0.9996	0.9996	0.9995	0.9995	0.9994	0.9993
22	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9998	0.9998	0.9998	0.9997	0.9997
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
x	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0012	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0049	0.0023	0.0011	0.0005	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0151	0.0076	0.0037	0.0018	0.0009	0.0004	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
5	0.0375	0.0203	0.0107	0.0055	0.0028	0.0014	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001
6	0.0786	0.0458	0.0259	0.0142	0.0076	0.0040	0.0021	0.0010	0.0005	0.0003
7	0.1432	0.0895	0.0540	0.0316	0.0180	0.0100	0.0054	0.0029	0.0015	0.0008
8	0.2320	0.1550	0.0998	0.0621	0.0374	0.0220	0.0126	0.0071	0.0039	0.0021
9	0.3405	0.2424	0.1658	0.1094	0.0699	0.0433	0.0261	0.0154	0.0089	0.0050
10	0.4599	0.3472	0.2517	0.1757	0.1185	0.0774	0.0491	0.0304	0.0183	0.0108
11	0.5793	0.4616	0.3532	0.2600	0.1848	0.1270	0.0847	0.0549	0.0347	0.0214
12	0.6887	0.5760	0.4631	0.3585	0.2676	0.1931	0.1350	0.0917	0.0606	0.0390
13	0.7813	0.6815	0.5730	0.4644	0.3632	0.2745	0.2009	0.1426	0.0984	0.0661
14	0.8540	0.7720	0.6751	0.5704	0.4657	0.3675	0.2808	0.2081	0.1497	0.1049
15	0.9074	0.8444	0.7636	0.6694	0.5681	0.4667	0.3715	0.2867	0.2148	0.1565
16	0.9441	0.8987	0.8355	0.7559	0.6641	0.5660	0.4677	0.3751	0.2920	0.2211
17	0.9678	0.9370	0.8905	0.8272	0.7489	0.6593	0.5640	0.4686	0.3784	0.2970
18	0.9823	0.9626	0.9302	0.8826	0.8195	0.7423	0.6550	0.5622	0.4695	0.3814
19	0.9907	0.9787	0.9573	0.9235	0.8752	0.8122	0.7363	0.6509	0.5606	0.4703
20	0.9953	0.9884	0.9750	0.9521	0.9170	0.8682	0.8055	0.7307	0.6472	0.5591
21	0.9977	0.9939	0.9859	0.9712	0.9469	0.9108	0.8615	0.7991	0.7255	0.6437
22	0.9990	0.9970	0.9924	0.9833	0.9673	0.9418	0.9047	0.8551	0.7931	0.7206
23	0.9995	0.9985	0.9960	0.9907	0.9805	0.9633	0.9367	0.8989	0.8490	0.7875
24	0.9998	0.9993	0.9980	0.9950	0.9888	0.9777	0.9594	0.9317	0.8933	0.8432
25	0.9999	0.9997	0.9990	0.9974	0.9938	0.9869	0.9748	0.9554	0.9269	0.8878
26	1.0000	0.9999	0.9995	0.9987	0.9967	0.9925	0.9848	0.9718	0.9514	0.9221
27	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9983	0.9959	0.9912	0.9827	0.9687	0.9475
28	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9991	0.9978	0.9950	0.9897	0.9805	0.9657
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9989	0.9973	0.9941	0.9882	0.9782
30	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9986	0.9967	0.9930	0.9865
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9993	0.9982	0.9960	0.9919
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9996	0.9990	0.9978	0.9953
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9995	0.9988	0.9973
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9994	0.9985
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9997	0.9992
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998	0.9996
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999
39	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

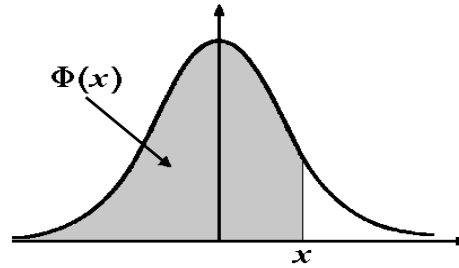
$N(0,1)$ -ის სიმკვრივის ($\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$) მნიშვნელობები



Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.398942	.398922	.398862	.398763	.398623	.398444	.398225	.397966	.397668	.397330
0.1	.396953	.396536	.396080	.395585	.395052	.394479	.393868	.393219	.392531	.391806
0.2	.391043	.390242	.389404	.388529	.387617	.386668	.385683	.384663	.383606	.382515
0.3	.381388	.380226	.379031	.377801	.376537	.375240	.373911	.372548	.371154	.369728
0.4	.368270	.366782	.365263	.363714	.362135	.360527	.358890	.357225	.355533	.353812
0.5	.352065	.350292	.348493	.346668	.344818	.342944	.341046	.339124	.337180	.335213
0.6	.333225	.331215	.329184	.327133	.325062	.322972	.320864	.318737	.316593	.314432
0.7	.312254	.310060	.307851	.305627	.303389	.301137	.298872	.296595	.294305	.292004
0.8	.289692	.287369	.285036	.282694	.280344	.277985	.275618	.273244	.270864	.268477
0.9	.266085	.263688	.261286	.258881	.256471	.254059	.251644	.249228	.246809	.244390
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.241971	.239551	.237132	.234714	.232297	.229882	.227470	.225060	.222653	.220251
1.1	.217852	.215458	.213069	.210686	.208308	.205936	.203571	.201214	.198863	.196520
1.2	.194186	.191860	.189543	.187235	.184937	.182649	.180371	.178104	.175847	.173602
1.3	.171369	.169147	.166937	.164740	.162555	.160383	.158225	.156080	.153948	.151831
1.4	.149727	.147639	.145564	.143505	.141460	.139431	.137417	.135418	.133435	.131468
1.5	.129518	.127583	.125665	.123763	.121878	.120009	.118157	.116323	.114505	.112704
1.6	.110921	.109155	.107406	.105675	.103961	.102265	.100586	.098925	.097282	.095657
1.7	.094049	.092459	.090887	.089333	.087796	.086277	.084776	.083293	.081828	.080380
1.8	.078950	.077538	.076143	.074766	.073407	.072065	.070740	.069433	.068144	.066871
1.9	.065616	.064378	.063157	.061952	.060765	.059595	.058441	.057304	.056183	.055079
Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2.0	.053991	.052919	.051864	.050824	.049800	.048792	.047800	.046823	.045861	.044915
2.1	.043984	.043067	.042166	.041280	.040408	.039550	.038707	.037878	.037063	.036262
2.2	.035475	.034701	.033941	.033194	.032460	.031740	.031032	.030337	.029655	.028985
2.3	.028327	.027682	.027048	.026426	.025817	.025218	.024631	.024056	.023491	.022937
2.4	.022395	.021862	.021341	.020829	.020328	.019837	.019356	.018885	.018423	.017971
2.5	.017528	.017095	.016670	.016254	.015848	.015449	.015060	.014678	.014305	.013940
2.6	.013583	.013234	.012892	.012558	.012232	.011912	.011600	.011295	.010997	.010706
2.7	.010421	.010143	3z98712	3z96058	3z93466	3z90936	3z88465	3z86052	3z83697	3z81398
2.8	3z79155	3z76965	3z74829	3z72744	3z70711	3z68728	3z66793	3z64907	3z63067	3z61274
2.9	3z59525	3z57821	3z56160	3z54541	3z52963	3z51426	3z49929	3z48470	3z47050	3z45666

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის

$$\Phi(x) = P\{N(0,1) \leq x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt \quad \text{მნიშვნელობები } (x \geq 0)$$



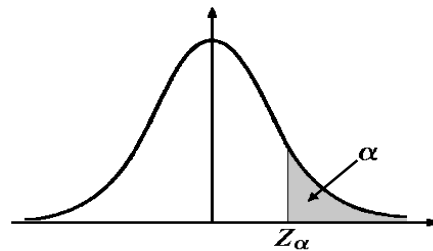
x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56749	0.57142	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68439	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ფუნქციის
მნიშვნელობები ($-x \leq 0$)

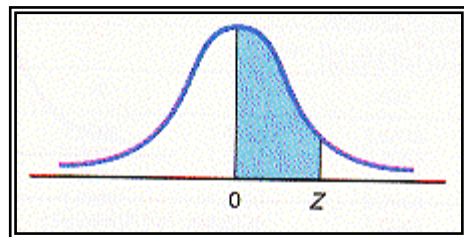
$-x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.49601	0.49202	0.48803	0.48405	0.48006	0.47608	0.47210	0.46812	0.46414
0.1	0.46017	0.45621	0.45224	0.44828	0.44433	0.44038	0.43644	0.43251	0.42858	0.42466
0.2	0.42074	0.41683	0.41294	0.40905	0.40517	0.40129	0.39743	0.39358	0.38974	0.38591

0.3	0.38209	0.37828	0.37448	0.37070	0.36693	0.36317	0.35942	0.35569	0.35197	0.34827
0.4	0.34458	0.34090	0.33724	0.33360	0.32997	0.32636	0.32276	0.31918	0.31561	0.31207
0.5	0.30854	0.30503	0.30153	0.29806	0.29460	0.29116	0.28774	0.28434	0.28096	0.27760
0.6	0.27425	0.27093	0.26763	0.26435	0.26109	0.25785	0.25463	0.25143	0.24825	0.24510
0.7	0.24196	0.23885	0.23576	0.23270	0.22965	0.22663	0.22363	0.22065	0.21770	0.21476
0.8	0.21186	0.20897	0.20611	0.20327	0.20045	0.19766	0.19489	0.19215	0.18943	0.18673
0.9	0.18406	0.18141	0.17879	0.17619	0.17361	0.17106	0.16853	0.16602	0.16354	0.16109
1.0	0.15866	0.15625	0.15386	0.15151	0.14917	0.14686	0.14457	0.14231	0.14007	0.13786
1.1	0.13567	0.13350	0.13136	0.12924	0.12714	0.12507	0.12302	0.12100	0.11900	0.11702
1.2	0.11507	0.11314	0.11123	0.10935	0.10749	0.10565	0.10384	0.10204	0.10027	0.09853
1.3	0.09680	0.09510	0.09342	0.09176	0.09012	0.08851	0.08692	0.08534	0.08379	0.08226
1.4	0.08076	0.07927	0.07780	0.07636	0.07493	0.07353	0.07215	0.07078	0.06944	0.06811
1.5	0.06681	0.06552	0.06426	0.06301	0.06178	0.06057	0.05938	0.05821	0.05705	0.05592
1.6	0.05480	0.05370	0.05262	0.05155	0.05050	0.04947	0.04846	0.04746	0.04648	0.04551
1.7	0.04457	0.04363	0.04272	0.04182	0.04093	0.04006	0.03920	0.03836	0.03754	0.03673
1.8	0.03593	0.03515	0.03438	0.03363	0.03288	0.03216	0.03144	0.03074	0.03005	0.02938
1.9	0.02872	0.02807	0.02743	0.02680	0.02619	0.02559	0.02500	0.02442	0.02385	0.02330
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.02118	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00798	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00509	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00403	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00170	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00140
3.0	0.00135	0.00131	0.00126	0.00122	0.00118	0.00114	0.00111	0.00107	0.00104	0.00100
3.1	0.00097	0.00094	0.00090	0.00087	0.00085	0.00082	0.00079	0.00076	0.00074	0.00071
3.2	0.00069	0.00066	0.00064	0.00062	0.00060	0.00058	0.00056	0.00054	0.00052	0.00050
3.3	0.00048	0.00047	0.00045	0.00043	0.00042	0.00040	0.00039	0.00038	0.00036	0.00035
3.4	0.00034	0.00033	0.00031	0.00030	0.00029	0.00028	0.00027	0.00026	0.00025	0.00024
3.5	0.00023	0.00022	0.00022	0.00021	0.00020	0.00019	0.00019	0.00018	0.00017	0.00017

სტანდარტული ნორმალური განაწილების ზედა α -კრიტიკული
წერტილები (z_α)



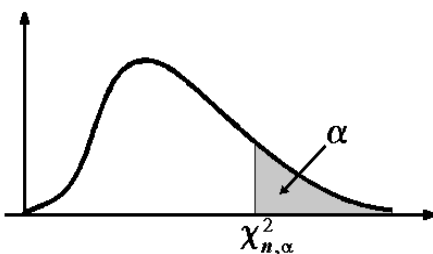
α	0.1	0.05	0.025	0.125	0.01	0.005	0.0025	0.001
z_α	1.28	1.645	1.96	2.24	2.33	2.575	2.81	3.08



$$\Phi_0(z) = P\{0 \leq N(0,1) \leq z\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt \quad \text{ფუნქციის მნიშვნელობები (z \geq 0)}$$

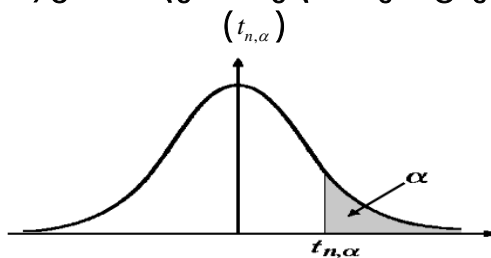
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2518	.2549
0.7	.2580	.2612	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49897	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2	.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3	.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4	.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5	.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6	.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	.49988	.49988	.49989
3.7	.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8	.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49994	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9	.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997

$\chi^2(n)$ (ხი კვადრატ) განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილები
($\chi^2_{n,\alpha}$)



თავისუფლების ხარისხი									
α	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.005	7.87946	10.5966	12.8382	14.8603	16.7496	18.5476	20.2778	21.9550	23.5893
0.010	6.63491	9.2103	11.3449	13.2767	15.0863	16.8119	18.4753	20.0902	21.6660
0.025	5.02389	7.3778	9.3484	11.1433	12.8325	14.4494	16.0128	17.5346	19.0228
0.050	3.84146	5.9915	7.8147	9.4877	11.0705	12.5916	14.0671	15.5073	16.9190
0.100	2.70554	4.6052	6.2514	7.7794	9.2364	10.6446	12.0170	13.3616	14.6837
0.900	0.01579	0.2107	0.5844	1.0636	1.6103	2.2041	2.8331	3.4895	4.1682
0.950	0.00393	0.1026	0.3518	0.7107	1.1455	1.6354	2.1674	2.7326	3.3251
0.975	0.00098	0.0506	0.2158	0.4844	0.8312	1.2373	1.6899	2.1797	2.7004
0.990	0.00016	0.0201	0.1148	0.2971	0.5543	0.8721	1.2390	1.6465	2.0879
0.995	0.00004	0.0100	0.0717	0.2070	0.4117	0.6757	0.9893	1.344	1.7349
α	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.005	25.1882	26.7569	28.2996	29.8194	31.3194	32.8013	34.2674	35.7182	37.1564
0.010	23.2093	24.7250	26.2170	27.6882	29.1413	30.5779	32.0001	33.4085	34.8053
0.025	20.4832	21.9201	23.3367	24.7356	26.1190	27.4884	28.8454	30.1910	31.5264
0.050	18.3070	19.6751	21.0261	22.3620	23.6848	24.9958	26.2963	27.5871	28.8693
0.100	15.9872	17.2750	18.5493	19.8119	21.0641	22.3071	23.5418	24.7690	25.9894
0.900	4.8652	5.5778	6.3038	7.0415	7.7895	8.5468	9.3122	10.0852	10.8649
0.950	3.9403	4.5748	5.2260	5.8919	6.5706	7.2609	7.9616	8.6718	9.3905
0.975	3.2470	3.8157	4.4038	5.0088	5.6287	6.2621	6.9077	7.5642	8.2307
0.990	2.5582	3.0535	3.5706	4.1069	4.6604	5.2293	5.8122	6.4078	7.0149
0.995	2.1559	2.6032	3.0738	3.5650	4.0747	4.6009	5.1422	5.6972	6.2648
α	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0.005	38.5820	39.9968	41.4011	42.7960	44.1808	45.5586	46.9285	48.2903	49.6452
0.010	36.1907	37.5662	38.9322	40.2895	41.6382	42.9798	44.3144	45.6419	46.9631
0.025	32.8523	34.1696	35.4789	36.7808	38.0755	39.3641	40.6466	41.9233	43.1946
0.050	30.1435	31.4104	32.6706	33.9245	35.1724	36.4150	37.6525	38.8852	40.1133
0.100	27.2036	28.4120	29.6151	30.8133	32.0069	33.1962	34.3816	35.5632	36.7412
0.900	11.6509	12.4426	13.2396	14.0415	14.8480	15.6587	16.4734	17.2919	18.1139
0.950	10.1170	10.8508	11.5913	12.3380	13.0905	13.8484	14.6114	15.3792	16.1514
0.975	8.9065	9.5908	10.2829	10.9823	11.6886	12.4012	13.1197	13.8439	14.5734
0.990	7.6327	8.2604	8.8972	9.5425	10.1957	10.8564	11.5240	12.1981	12.8785
0.995	6.8440	7.4338	8.0337	8.6427	9.2604	9.8862	10.5197	11.1602	11.8076
α	28	29	30	40	50	60	100		
0.005	50.9936	52.3360	53.6720	66.7673	79.4896	91.9547	140.177		
0.010	48.2783	49.5881	50.8922	63.6914	76.1537	88.3810	135.811		
0.025	44.4608	45.7224	46.9793	59.3420	71.4201	83.2984	129.563		
0.050	41.3372	42.5570	43.7730	55.7586	67.5048	79.0823	124.343		
0.100	37.9159	39.0875	40.2560	51.8051	63.1671	74.3972	118.499		
0.900	18.9392	19.7677	20.5992	29.0505	37.6886	46.4589	82.358		
0.950	16.9279	17.7084	18.4927	26.5093	34.7643	43.1880	77.930		
0.975	15.3079	16.0471	16.7908	24.4330	32.3574	40.4818	74.222		
0.990	13.5647	14.2565	14.9535	22.1643	29.7067	37.4849	70.065		
0.995	12.4613	13.1211	13.7867	20.7065	27.9907	35.5345	67.328		

$t^{(n)}$ (სტიუდენტის) განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილები



მნიშვნელობების ღონე (α)

df	.45	.40	.35	.30	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.001
1	0.158	0.325	0.510	0.727	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3
2	0.142	0.289	0.445	0.617	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.33
3	0.137	0.277	0.424	0.584	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21
4	0.134	0.271	0.414	0.569	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.132	0.267	0.408	0.559	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.131	0.265	0.404	0.553	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.130	0.263	0.402	0.549	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.130	0.262	0.399	0.546	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.129	0.261	0.398	0.543	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.129	0.260	0.397	0.542	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.129	0.260	0.396	0.540	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.128	0.259	0.395	0.539	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.128	0.259	0.394	0.538	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.128	0.258	0.393	0.537	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.128	0.258	0.393	0.536	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.128	0.258	0.392	0.535	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.128	0.257	0.392	0.534	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.127	0.257	0.392	0.534	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.611
19	0.127	0.257	0.391	0.533	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.127	0.257	0.391	0.533	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.127	0.257	0.391	0.532	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.127	0.256	0.390	0.532	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.127	0.256	0.390	0.532	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.127	0.256	0.390	0.531	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.127	0.256	0.390	0.531	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.127	0.256	0.389	0.531	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.127	0.256	0.389	0.530	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
31	0.127	0.256	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.375
32	0.127	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365
33	0.127	0.255	0.389	0.530	0.682	0.853	1.053	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.356
34	0.127	0.255	0.389	0.529	0.682	0.852	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348
35	0.127	0.255	0.388	0.529	0.682	0.852	1.052	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340
36	0.127	0.255	0.388	0.529	0.681	0.852	1.052	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333
37	0.127	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.051	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	3.326
38	0.127	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319
39	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	3.313
40	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
41	0.126	0.255	0.388	0.529	0.681	0.850	1.050	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	3.301
42	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	3.296
43	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	3.291
44	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	3.286
45	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.049	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	3.281

46	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.850	1.048	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	3.277
47	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.849	1.048	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	3.273
48	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	3.269
49	0.126	0.255	0.388	0.528	0.680	0.849	1.048	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	3.265
50	0.126	0.255	0.388	0.528	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261

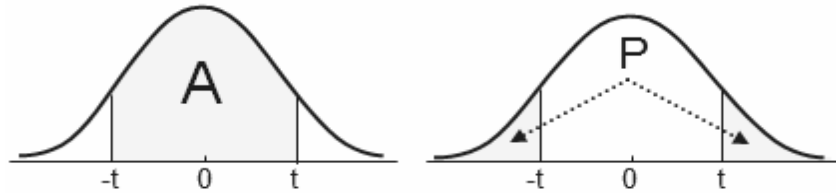
მნიშვნელობების დონე (α)

df	.45	.40	.35	.30	.25	.20	.15	.10	.05	.025	.01	.005	.001
51	0.126	0.255	0.387	0.528	0.679	0.849	1.047	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	3.258
52	0.126	0.255	0.387	0.528	0.679	0.849	1.047	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	3.255
53	0.126	0.255	0.387	0.528	0.679	0.848	1.047	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	3.251
54	0.126	0.255	0.387	0.528	0.679	0.848	1.046	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	3.248
55	0.126	0.255	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	3.245
56	0.126	0.255	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	3.242
57	0.126	0.255	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	3.239
58	0.126	0.255	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	3.237
59	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	3.234
60	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
61	0.126	0.254	0.387	0.527	0.679	0.848	1.045	1.296	1.670	2.000	2.389	2.659	3.229
62	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.670	1.999	2.388	2.658	3.227
63	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.998	2.387	2.656	3.225
64	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.998	2.386	2.655	3.223
65	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.669	1.997	2.385	2.654	3.221
66	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.295	1.668	1.997	2.384	2.652	3.218
67	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.045	1.294	1.668	1.996	2.383	2.651	3.217
68	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.668	1.995	2.382	2.650	3.215
69	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.995	2.382	2.649	3.213
70	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	3.211
71	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.294	1.667	1.994	2.380	2.647	3.209
72	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.293	1.666	1.993	2.379	2.646	3.207
73	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.847	1.044	1.293	1.666	1.993	2.379	2.645	3.206
74	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.666	1.993	2.378	2.644	3.204
75	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.992	2.377	2.643	3.203
76	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.044	1.293	1.665	1.992	2.376	2.642	3.201
77	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.043	1.293	1.665	1.991	2.376	2.641	3.200
78	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.043	1.292	1.665	1.991	2.375	2.640	3.198
79	0.126	0.254	0.387	0.527	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.375	2.640	3.197
80	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	3.195
81	0.126	0.254	0.387	0.526	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.373	2.638	3.194
82	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.664	1.989	2.373	2.637	3.193
83	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.191
84	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.989	2.372	2.636	3.190
85	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.292	1.663	1.988	2.371	2.635	3.189
86	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.663	1.988	2.371	2.634	3.188
87	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.663	1.988	2.370	2.634	3.187
88	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.662	1.987	2.369	2.633	3.186
89	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.043	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.184
90	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.987	2.369	2.632	3.183
91	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.986	2.368	2.631	3.182
92	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.846	1.042	1.291	1.662	1.986	2.368	2.630	3.181
93	0.126	0.254	0.387	0.526	0.677	0.845	1.042	1.291	1.661	1.986	2.367	2.630	3.180
94	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.291	1.661	1.986	2.367	2.629	3.179
95	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.291	1.661	1.985	2.366	2.629	3.178
96	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.985	2.366	2.628	3.177
97	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.985	2.365	2.627	3.176
98	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.661	1.984	2.365	2.627	3.176
99	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.365	2.626	3.175
100	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	3.174

120	0.126	0.254	0.386	0.526	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
140	0.126	0.254	0.386	0.526	0.676	0.844	1.040	1.288	1.656	1.977	2.353	2.611	3.149
160	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.844	1.040	1.287	1.654	1.975	2.350	2.607	3.142
180	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.844	1.039	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.136
200	0.126	0.254	0.386	0.525	0.676	0.843	1.039	1.286	1.653	1.972	2.345	2.601	3.131
∞	0.126	0.253	0.385	0.524	0.675	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.327	2.576	3.091

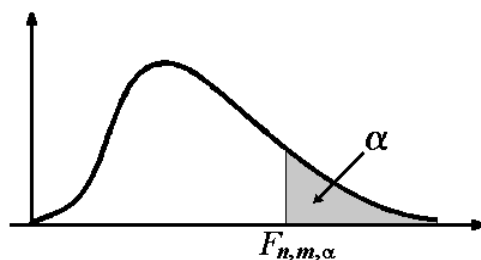
შევნიშნოთ, რომ თუ $df = \infty$, მაშინ სტიუდენტის კრიტიკული მნიშვნელობები ემთხვევა სტანდარტული ნორმალური განაწილების კრიტიკულ მნიშვნელობებს ($t_{\infty, \alpha} = z_{\alpha}$).

$t(n)$ განაწილების ზედა $\alpha/2$ -კრიტიკული წერტილები $t_{n, \alpha/2}$
(ორკუდიანი)



n	α	0.80 0.20	0.90 0.10	0.95 0.05	0.98 0.02	0.99 0.01	0.995 0.005	0.998 0.002	0.999 0.001
1		3.078	6.314	12.706	31.820	63.657	127.321	318.309	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	3.833	4.501	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12		1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13		1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14		1.345	1.761	2.145	2.625	2.977	3.326	3.787	4.140
15		1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16		1.337	1.746	2.120	2.584	2.921	3.252	3.686	4.015
17		1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18		1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19		1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20		1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21		1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22		1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23		1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24		1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.090	3.467	3.745
25		1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26		1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27		1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28		1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29		1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30		1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
∞		1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

$F(n, m)$ (ფიშერის) განაწილების ზედა α -კრიტიკული წერტილები ($F_{n, m, \alpha}$)



	n											
α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$m=1$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	39.8	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	60.5	60.7
0.050	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
0.025	648	800	864	900	922	937	948	957	963	968	973	977
0.010	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6106
$m=2$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.40	9.41
0.050	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.40	19.41
0.025	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.41	39.41
0.010	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.41	99.42
$m=3$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.22	5.22
0.050	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74
0.025	17.44	16.04	15.44	15.10	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.37	14.34
0.010	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.13	27.05
$m=4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.91	3.90
0.050	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91
0.025	12.22	10.65	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90	8.84	8.79	8.75
0.010	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.45	14.37
$m=5$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.28	3.27
0.050	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68
0.025	10.01	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68	6.62	6.57	6.52
0.010	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.96	9.89
$m=6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.92	2.90
0.050	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00
0.025	8.81	7.26	6.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52	5.46	5.41	5.37
0.010	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72
$m=7$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.68	2.67
0.050	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57
0.025	8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82	4.76	4.71	4.67
0.010	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47
$m=8$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.52	2.50
0.050	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28
0.025	7.57	6.06	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36	4.30	4.24	4.20
0.010	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67
$m=9$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.40	2.38
0.050	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07
0.025	7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03	3.96	3.91	3.87
0.010	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11
$m=10$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.29	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.30	2.28
0.050	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91
0.025	6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78	3.72	3.66	3.62
0.010	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71
$m=11$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.23	2.21

0.050	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79
0.025	6.72	5.26	4.63	4.28	4.04	3.88	3.76	3.66	3.59	3.53	3.47	3.43
0.010	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40
m = 12	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.17	2.15
0.050	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69
0.025	6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44	3.37	3.32	3.28
0.010	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16
m = 13	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.12	2.10
0.050	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60
0.025	6.41	4.97	4.35	4.00	3.77	3.60	3.48	3.39	3.31	3.25	3.20	3.15
0.010	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96
m = 14	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.10	2.07	2.05
0.050	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53
0.025	6.30	4.86	4.24	3.89	3.66	3.50	3.38	3.29	3.21	3.15	3.09	3.05
0.010	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80
m = 15	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	2.04	2.02
0.050	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48
0.025	6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12	3.06	3.01	2.96
0.010	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67
m = 16	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.01	1.99
0.050	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42
0.025	6.12	4.69	4.08	3.73	3.50	3.34	3.22	3.12	3.05	2.99	2.93	2.89
0.010	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55
m = 17	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.98	1.96
0.050	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38
0.025	6.04	4.62	4.01	3.66	3.44	3.28	3.16	3.06	2.98	2.92	2.87	2.82
0.010	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46
m = 18	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.01	2.62	2.42	2.29	2.20	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93
0.050	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34
0.025	5.98	4.56	3.95	3.61	3.38	3.22	3.10	3.01	2.93	2.87	2.81	2.77
0.010	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37
m = 19	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.99	2.61	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.93	1.91
0.050	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31
0.025	5.92	4.51	3.90	3.56	3.33	3.17	3.05	2.96	2.88	2.82	2.76	2.72
0.010	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30
m = 20	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89
0.050	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28
0.025	5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84	2.77	2.72	2.68
0.010	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23
m = 21	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.96	2.57	2.36	2.23	2.14	2.08	2.02	1.98	1.95	1.92	1.90	1.87
0.050	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25
0.025	5.83	4.42	3.82	3.48	3.25	3.09	2.97	2.87	2.80	2.73	2.68	2.64
0.010	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17
m = 22	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.88	1.86
0.050	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23
0.025	5.79	4.38	3.78	3.44	3.22	3.05	2.93	2.84	2.76	2.70	2.65	2.60
0.010	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12
m = 23	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.94	2.55	2.34	2.21	2.11	2.05	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.84
0.050	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20
0.025	5.75	4.35	3.75	3.41	3.18	3.02	2.90	2.81	2.73	2.67	2.62	2.57
0.010	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07
m = 24	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.85	1.83
0.050	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18
0.025	5.72	4.32	3.72	3.38	3.15	2.99	2.87	2.78	2.70	2.64	2.59	2.54
0.010	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03
m = 25	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

0.100	2.92	2.53	2.32	2.18	2.09	2.02	1.97	1.93	1.89	1.87	1.84	1.82
0.050	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16
0.025	5.69	4.29	3.69	3.35	3.13	2.97	2.85	2.75	2.68	2.61	2.56	2.51
0.010	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99
m=26	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.83	1.81
0.050	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15
0.025	5.66	4.27	3.67	3.33	3.10	2.94	2.82	2.73	2.65	2.59	2.54	2.49
0.010	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96
m=27	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.90	2.51	2.30	2.17	2.07	2.00	1.95	1.91	1.87	1.85	1.82	1.80
0.050	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13
0.025	5.63	4.24	3.65	3.31	3.08	2.92	2.80	2.71	2.63	2.57	2.51	2.47
0.010	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93
m=28	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.87	1.84	1.81	1.79
0.050	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12
0.025	5.61	4.22	3.63	3.29	3.06	2.90	2.78	2.69	2.61	2.55	2.49	2.45
0.010	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90
m=29	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.89	2.50	2.28	2.15	2.06	1.99	1.93	1.89	1.86	1.83	1.80	1.78
0.050	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10
0.025	5.59	4.20	3.61	3.27	3.04	2.88	2.76	2.67	2.59	2.53	2.48	2.43
0.010	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87
m=30	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.79	1.77
0.050	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09
0.025	5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57	2.51	2.46	2.41
0.010	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84
m=31	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.87	2.48	2.27	2.14	2.04	1.97	1.92	1.88	1.84	1.81	1.79	1.77
0.050	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	2.15	2.11	2.08
0.025	5.55	4.16	3.57	3.23	3.01	2.85	2.73	2.64	2.56	2.50	2.44	2.40
0.010	7.53	5.36	4.48	3.99	3.67	3.45	3.28	3.15	3.04	2.96	2.88	2.82
m=32	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.87	2.48	2.26	2.13	2.04	1.97	1.91	1.87	1.83	1.81	1.78	1.76
0.050	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07
0.025	5.53	4.15	3.56	3.22	3.00	2.84	2.71	2.62	2.54	2.48	2.43	2.38
0.010	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80
m=34	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.86	2.47	2.25	2.12	2.02	1.96	1.90	1.86	1.82	1.79	1.77	1.75
0.050	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05
0.025	5.50	4.12	3.53	3.19	2.97	2.81	2.69	2.59	2.52	2.45	2.40	2.35
0.010	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76
m=36	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.85	2.46	2.24	2.11	2.01	1.94	1.89	1.85	1.81	1.78	1.76	1.73
0.050	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15	2.11	2.07	2.03
0.025	5.47	4.09	3.50	3.17	2.94	2.78	2.66	2.57	2.49	2.43	2.37	2.33
0.010	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95	2.86	2.79	2.72
m=38	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.84	2.45	2.23	2.10	2.01	1.94	1.88	1.84	1.80	1.77	1.75	1.72
0.050	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14	2.09	2.05	2.02
0.025	5.45	4.07	3.48	3.15	2.92	2.76	2.64	2.55	2.47	2.41	2.35	2.31
0.010	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92	2.83	2.75	2.69
m=40	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.74	1.71
0.050	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00
0.025	5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45	2.39	2.33	2.29
0.010	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66
m=42	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.83	2.43	2.22	2.08	1.99	1.92	1.86	1.82	1.78	1.75	1.73	1.71
0.050	4.07	3.22	2.83	2.59	2.44	2.32	2.24	2.17	2.11	2.06	2.03	1.99
0.025	5.40	4.03	3.45	3.11	2.89	2.73	2.61	2.51	2.43	2.37	2.32	2.27
0.010	7.28	5.15	4.29	3.80	3.49	3.27	3.10	2.97	2.86	2.78	2.70	2.64
m=44	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.82	2.43	2.21	2.08	1.98	1.91	1.86	1.81	1.78	1.75	1.72	1.70
0.050	4.06	3.21	2.82	2.58	2.43	2.31	2.23	2.16	2.10	2.05	2.01	1.98
0.025	5.39	4.02	3.43	3.09	2.87	2.71	2.59	2.50	2.42	2.36	2.30	2.26
0.010	7.25	5.12	4.26	3.78	3.47	3.24	3.08	2.95	2.84	2.75	2.68	2.62

m=46													
0.100	2.82	2.42	2.21	2.07	1.98	1.91	1.85	1.81	1.77	1.74	1.71	1.69	
0.050	4.05	3.20	2.81	2.57	2.42	2.30	2.22	2.15	2.09	2.04	2.00	1.97	
0.025	5.37	4.00	3.42	3.08	2.86	2.70	2.58	2.48	2.41	2.34	2.29	2.24	
0.010	7.22	5.10	4.24	3.76	3.44	3.22	3.06	2.93	2.82	2.73	2.66	2.60	
m=48													
0.100	2.81	2.42	2.20	2.07	1.97	1.90	1.85	1.80	1.77	1.73	1.71	1.69	
0.050	4.04	3.19	2.80	2.57	2.41	2.29	2.21	2.14	2.08	2.03	1.99	1.96	
0.025	5.35	3.99	3.40	3.07	2.84	2.69	2.56	2.47	2.39	2.33	2.27	2.23	
0.010	7.19	5.08	4.22	3.74	3.43	3.20	3.04	2.91	2.80	2.71	2.64	2.58	
m=50													
0.100	2.81	2.41	2.20	2.06	1.97	1.90	1.84	1.80	1.76	1.73	1.70	1.68	
0.050	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	
0.025	5.34	3.97	3.39	3.05	2.83	2.67	2.55	2.46	2.38	2.32	2.26	2.22	
0.010	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56	
m=55													
0.100	2.80	2.40	2.19	2.05	1.95	1.88	1.83	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	
0.050	4.02	3.17	2.77	2.54	2.38	2.27	2.18	2.11	2.06	2.01	1.97	1.93	
0.025	5.31	3.95	3.36	3.03	2.81	2.65	2.53	2.43	2.36	2.29	2.24	2.19	
0.010	7.12	5.01	4.16	3.68	3.37	3.15	2.98	2.85	2.75	2.66	2.59	2.53	
m=60													
0.100	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.68	1.66	
0.050	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	
0.025	5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33	2.27	2.22	2.17	
0.010	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	
m=65													
0.100	2.78	2.39	2.17	2.03	1.94	1.87	1.81	1.77	1.73	1.70	1.67	1.65	
0.050	3.99	3.14	2.75	2.51	2.36	2.24	2.15	2.08	2.03	1.98	1.94	1.90	
0.025	5.26	3.91	3.32	2.99	2.77	2.61	2.49	2.39	2.32	2.25	2.20	2.15	
0.010	7.04	4.95	4.10	3.62	3.31	3.09	2.93	2.80	2.69	2.61	2.53	2.47	
m=70													
0.100	2.78	2.38	2.16	2.03	1.93	1.86	1.80	1.76	1.72	1.69	1.66	1.64	
0.050	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	
0.025	5.25	3.89	3.31	2.97	2.75	2.59	2.47	2.38	2.30	2.24	2.18	2.14	
0.010	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	
m=80													
0.100	2.77	2.37	2.15	2.02	1.92	1.85	1.79	1.75	1.71	1.68	1.65	1.63	
0.050	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	
0.025	5.22	3.86	3.28	2.95	2.73	2.57	2.45	2.35	2.28	2.21	2.16	2.11	
0.010	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	
m=100													
0.100	2.76	2.36	2.14	2.00	1.91	1.83	1.78	1.73	1.69	1.66	1.64	1.61	
0.050	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	
0.025	5.18	3.83	3.25	2.92	2.70	2.54	2.42	2.32	2.24	2.18	2.12	2.08	
0.010	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	
m=125													
0.100	2.75	2.35	2.13	1.99	1.89	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.62	1.60	
0.050	3.92	3.07	2.68	2.44	2.29	2.17	2.08	2.01	1.96	1.91	1.87	1.83	
0.025	5.15	3.80	3.22	2.89	2.67	2.51	2.39	2.30	2.22	2.15	2.10	2.05	
0.010	6.84	4.78	3.94	3.47	3.17	2.95	2.79	2.66	2.55	2.47	2.39	2.33	
m=200													
0.100	2.73	2.33	2.11	1.97	1.88	1.80	1.75	1.70	1.66	1.63	1.60	1.58	
0.050	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	
0.025	5.10	3.76	3.18	2.85	2.63	2.47	2.35	2.26	2.18	2.11	2.06	2.01	
0.010	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	
m=400													
0.100	2.72	2.32	2.10	1.96	1.86	1.79	1.73	1.69	1.65	1.61	1.59	1.56	
0.050	3.86	3.02	2.63	2.39	2.24	2.12	2.03	1.96	1.90	1.85	1.81	1.78	
0.025	5.06	3.72	3.15	2.82	2.60	2.44	2.32	2.22	2.15	2.08	2.03	1.98	
0.010	6.70	4.66	3.83	3.37	3.06	2.85	2.68	2.56	2.45	2.37	2.29	2.23	
m=1000													
0.100	2.71	2.31	2.09	1.95	1.85	1.78	1.72	1.68	1.64	1.61	1.58	1.55	
0.050	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89	1.84	1.80	1.76	
0.025	5.04	3.70	3.13	2.80	2.58	2.42	2.30	2.20	2.13	2.06	2.01	1.96	
0.010	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43	2.34	2.27	2.20	
m=5000													
0.100	2.71	2.30	2.08	1.95	1.85	1.78	1.72	1.67	1.63	1.60	1.57	1.55	
0.050	3.84	3.00	2.61	2.37	2.22	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	
0.025	5.02	3.69	3.12	2.79	2.57	2.41	2.29	2.19	2.12	2.05	2.00	1.95	

0.010	6.64	4.61	3.79	3.32	3.02	2.81	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.19
	n											
α	14	16	20	24	30	40	50	75	100	200	500	10000
$m=1$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	61.1	61.4	61.7	62.0	62.3	62.5	62.7	62.9	63.0	63.2	63.3	63.7
0.050	245	246	248	249	250	251	252	253	253	254	254	256
0.025	983	987	993	997	1001	1006	1008	1011	1014	1016	1017	1025
0.010	6143	6170	6209	6235	6261	6287	6303	6324	6334	6350	6360	6366
$m=2$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	9.42	9.43	9.44	9.45	9.46	9.47	9.47	9.48	9.48	9.49	9.49	9.51
0.050	19.42	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.48	19.49	19.49	19.49	19.54
0.025	39.42	39.44	39.45	39.46	39.46	39.47	39.48	39.48	39.49	39.49	39.50	39.59
0.010	99.43	99.44	99.45	99.46	99.46	99.47	99.48	99.49	99.49	99.49	99.50	99.73
$m=3$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	5.20	5.20	5.18	5.18	5.17	5.16	5.15	5.15	5.14	5.14	5.14	5.14
0.050	8.71	8.69	8.66	8.64	8.62	8.59	8.58	8.56	8.55	8.54	8.53	8.54
0.025	14.28	14.23	14.17	14.12	14.08	14.04	14.01	13.97	13.96	13.93	13.91	13.92
0.010	26.92	26.83	26.69	26.60	26.50	26.41	26.35	26.28	26.24	26.18	26.15	26.15
$m=4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.88	3.86	3.84	3.83	3.82	3.80	3.80	3.78	3.78	3.77	3.76	3.76
0.050	5.87	5.84	5.80	5.77	5.75	5.72	5.70	5.68	5.66	5.65	5.64	5.63
0.025	8.68	8.63	8.56	8.51	8.46	8.41	8.38	8.34	8.32	8.29	8.27	8.26
0.010	14.25	14.15	14.02	13.93	13.84	13.75	13.69	13.61	13.58	13.52	13.49	13.47
$m=5$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	3.25	3.23	3.21	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.13	3.12	3.11	3.10
0.050	4.64	4.60	4.56	4.53	4.50	4.46	4.44	4.42	4.41	4.39	4.37	4.36
0.025	6.46	6.40	6.33	6.28	6.23	6.18	6.14	6.10	6.08	6.05	6.03	6.01
0.010	9.77	9.68	9.55	9.47	9.38	9.29	9.24	9.17	9.13	9.08	9.04	9.02
$m=6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.88	2.86	2.84	2.82	2.80	2.78	2.77	2.75	2.75	2.73	2.73	2.73
0.050	3.96	3.92	3.87	3.84	3.81	3.77	3.75	3.73	3.71	3.69	3.68	3.67
0.025	5.30	5.24	5.17	5.12	5.07	5.01	4.98	4.94	4.92	4.88	4.86	4.85
0.010	7.60	7.52	7.40	7.31	7.23	7.14	7.09	7.02	6.99	6.93	6.90	6.89
$m=7$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.64	2.62	2.59	2.58	2.56	2.54	2.52	2.51	2.50	2.48	2.48	2.47
0.050	3.53	3.49	3.44	3.41	3.38	3.34	3.32	3.29	3.27	3.25	3.24	3.23
0.025	4.60	4.54	4.47	4.42	4.36	4.31	4.28	4.23	4.21	4.18	4.16	4.15
0.010	6.36	6.28	6.16	6.07	5.99	5.91	5.86	5.79	5.75	5.70	5.67	5.65
$m=8$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.48	2.45	2.42	2.40	2.38	2.36	2.35	2.33	2.32	2.31	2.30	2.29
0.050	3.24	3.20	3.15	3.12	3.08	3.04	3.02	2.99	2.97	2.95	2.94	2.93
0.025	4.13	4.08	4.00	3.95	3.89	3.84	3.81	3.76	3.74	3.70	3.68	3.67
0.010	5.56	5.48	5.36	5.28	5.20	5.12	5.07	5.00	4.96	4.91	4.88	4.86
$m=9$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.35	2.33	2.30	2.28	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.17	2.17	2.16
0.050	3.03	2.99	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.77	2.76	2.73	2.72	2.71
0.025	3.80	3.74	3.67	3.61	3.56	3.51	3.47	3.43	3.40	3.37	3.35	3.34
0.010	5.01	4.92	4.81	4.73	4.65	4.57	4.52	4.45	4.41	4.36	4.33	4.32
$m=10$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.26	2.23	2.20	2.18	2.16	2.13	2.12	2.10	2.09	2.07	2.06	2.06
0.050	2.86	2.83	2.77	2.74	2.70	2.66	2.64	2.60	2.59	2.56	2.55	2.54
0.025	3.55	3.50	3.42	3.37	3.31	3.26	3.22	3.18	3.15	3.12	3.09	3.08
0.010	4.60	4.52	4.41	4.33	4.25	4.17	4.12	4.05	4.01	3.96	3.93	3.91
$m=11$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.18	2.16	2.12	2.10	2.08	2.05	2.04	2.02	2.01	1.99	1.98	1.97
0.050	2.74	2.70	2.65	2.61	2.57	2.53	2.51	2.47	2.46	2.43	2.42	2.41
0.025	3.36	3.30	3.23	3.17	3.12	3.06	3.03	2.98	2.96	2.92	2.90	2.88
0.010	4.29	4.21	4.10	4.02	3.94	3.86	3.81	3.74	3.71	3.66	3.62	3.60
$m=12$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.12	2.09	2.06	2.04	2.01	1.99	1.97	1.95	1.94	1.92	1.91	1.91
0.050	2.64	2.60	2.54	2.51	2.47	2.43	2.40	2.37	2.35	2.32	2.31	2.30
0.025	3.21	3.15	3.07	3.02	2.96	2.91	2.87	2.82	2.80	2.76	2.74	2.73
0.010	4.05	3.97	3.86	3.78	3.70	3.62	3.57	3.50	3.47	3.41	3.38	3.36
$m=13$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.07	2.04	2.01	1.98	1.96	1.93	1.92	1.89	1.88	1.86	1.85	1.85
0.050	2.55	2.51	2.46	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.22	2.21
0.025	3.08	3.03	2.95	2.89	2.84	2.78	2.74	2.70	2.67	2.63	2.61	2.60

0.010	3.86	3.78	3.66	3.59	3.51	3.43	3.38	3.31	3.27	3.22	3.19	3.17
m = 14	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	2.02	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	1.87	1.85	1.83	1.82	1.80	1.80
0.050	2.48	2.44	2.39	2.35	2.31	2.27	2.24	2.21	2.19	2.16	2.14	2.13
0.025	2.98	2.92	2.84	2.79	2.73	2.67	2.64	2.59	2.56	2.53	2.50	2.49
0.010	3.70	3.62	3.51	3.43	3.35	3.27	3.22	3.15	3.11	3.06	3.03	3.01
m = 15	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.99	1.96	1.92	1.90	1.87	1.85	1.83	1.80	1.79	1.77	1.76	1.76
0.050	2.42	2.38	2.33	2.29	2.25	2.20	2.18	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07
0.025	2.89	2.84	2.76	2.70	2.64	2.59	2.55	2.50	2.47	2.44	2.41	2.40
0.010	3.56	3.49	3.37	3.29	3.21	3.13	3.08	3.01	2.98	2.92	2.89	2.87
m = 16	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.95	1.93	1.89	1.87	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.73	1.72
0.050	2.37	2.33	2.28	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	2.04	2.02	2.01
0.025	2.82	2.76	2.68	2.63	2.57	2.51	2.47	2.42	2.40	2.36	2.33	2.32
0.010	3.45	3.37	3.26	3.18	3.10	3.02	2.97	2.90	2.86	2.81	2.78	2.75
m = 17	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.93	1.90	1.86	1.84	1.81	1.78	1.76	1.74	1.73	1.71	1.69	1.69
0.050	2.33	2.29	2.23	2.19	2.15	2.10	2.08	2.04	2.02	1.99	1.97	1.96
0.025	2.75	2.70	2.62	2.56	2.50	2.44	2.41	2.35	2.33	2.29	2.26	2.25
0.010	3.35	3.27	3.16	3.08	3.00	2.92	2.87	2.80	2.76	2.71	2.68	2.65
m = 18	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.90	1.87	1.84	1.81	1.78	1.75	1.74	1.71	1.70	1.68	1.67	1.66
0.050	2.29	2.25	2.19	2.15	2.11	2.06	2.04	2.00	1.98	1.95	1.93	1.92
0.025	2.70	2.64	2.56	2.50	2.44	2.38	2.35	2.30	2.27	2.23	2.20	2.19
0.010	3.27	3.19	3.08	3.00	2.92	2.84	2.78	2.71	2.68	2.62	2.59	2.57
m = 19	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.88	1.85	1.81	1.79	1.76	1.73	1.71	1.69	1.67	1.65	1.64	1.63
0.050	2.26	2.21	2.16	2.11	2.07	2.03	2.00	1.96	1.94	1.91	1.89	1.88
0.025	2.65	2.59	2.51	2.45	2.39	2.33	2.30	2.24	2.22	2.18	2.15	2.13
0.010	3.19	3.12	3.00	2.92	2.84	2.76	2.71	2.64	2.60	2.55	2.51	2.49
m = 20	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.86	1.83	1.79	1.77	1.74	1.71	1.69	1.66	1.65	1.63	1.62	1.61
0.050	2.22	2.18	2.12	2.08	2.04	1.99	1.97	1.93	1.91	1.88	1.86	1.84
0.025	2.60	2.55	2.46	2.41	2.35	2.29	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.09
0.010	3.13	3.05	2.94	2.86	2.78	2.69	2.64	2.57	2.54	2.48	2.44	2.42
m = 21	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.84	1.81	1.78	1.75	1.72	1.69	1.67	1.64	1.63	1.61	1.60	1.59
0.050	2.20	2.16	2.10	2.05	2.01	1.96	1.94	1.90	1.88	1.84	1.83	1.81
0.025	2.56	2.51	2.42	2.37	2.31	2.25	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04
0.010	3.07	2.99	2.88	2.80	2.72	2.64	2.58	2.51	2.48	2.42	2.38	2.36
m = 22	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.83	1.80	1.76	1.73	1.70	1.67	1.65	1.63	1.61	1.59	1.58	1.57
0.050	2.17	2.13	2.07	2.03	1.98	1.94	1.91	1.87	1.85	1.82	1.80	1.78
0.025	2.53	2.47	2.39	2.33	2.27	2.21	2.17	2.12	2.09	2.05	2.02	2.01
0.010	3.02	2.94	2.83	2.75	2.67	2.58	2.53	2.46	2.42	2.36	2.33	2.31
m = 23	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.81	1.78	1.74	1.72	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59	1.57	1.56	1.55
0.050	2.15	2.11	2.05	2.01	1.96	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.77	1.76
0.025	2.50	2.44	2.36	2.30	2.24	2.18	2.14	2.08	2.06	2.01	1.99	1.97
0.010	2.97	2.89	2.78	2.70	2.62	2.54	2.48	2.41	2.37	2.32	2.28	2.26
m = 24	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.80	1.77	1.73	1.70	1.67	1.64	1.62	1.59	1.58	1.56	1.54	1.53
0.050	2.13	2.09	2.03	1.98	1.94	1.89	1.86	1.82	1.80	1.77	1.75	1.73
0.025	2.47	2.41	2.33	2.27	2.21	2.15	2.11	2.05	2.02	1.98	1.95	1.94
0.010	2.93	2.85	2.74	2.66	2.58	2.49	2.44	2.37	2.33	2.27	2.24	2.21
m = 25	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.79	1.76	1.72	1.69	1.66	1.63	1.61	1.58	1.56	1.54	1.53	1.52
0.050	2.11	2.07	2.01	1.96	1.92	1.87	1.84	1.80	1.78	1.75	1.73	1.71
0.025	2.44	2.38	2.30	2.24	2.18	2.12	2.08	2.02	2.00	1.95	1.92	1.91
0.010	2.89	2.81	2.70	2.62	2.54	2.45	2.40	2.33	2.29	2.23	2.19	2.17
m = 26	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.77	1.75	1.71	1.68	1.65	1.61	1.59	1.57	1.55	1.53	1.51	1.50
0.050	2.09	2.05	1.99	1.95	1.90	1.85	1.82	1.78	1.76	1.73	1.71	1.69
0.025	2.42	2.36	2.28	2.22	2.16	2.09	2.05	2.00	1.97	1.92	1.90	1.88
0.010	2.86	2.78	2.66	2.58	2.50	2.42	2.36	2.29	2.25	2.19	2.16	2.13
m = 27	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.76	1.74	1.70	1.67	1.64	1.60	1.58	1.55	1.54	1.52	1.50	1.49
0.050	2.08	2.04	1.97	1.93	1.88	1.84	1.81	1.76	1.74	1.71	1.69	1.67

0.025	2.39	2.34	2.25	2.19	2.13	2.07	2.03	1.97	1.94	1.90	1.87	1.85
0.010	2.82	2.75	2.63	2.55	2.47	2.38	2.33	2.26	2.22	2.16	2.12	2.10
m=28	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.75	1.73	1.69	1.66	1.63	1.59	1.57	1.54	1.53	1.50	1.49	1.48
0.050	2.06	2.02	1.96	1.91	1.87	1.82	1.79	1.75	1.73	1.69	1.67	1.66
0.025	2.37	2.32	2.23	2.17	2.11	2.05	2.01	1.95	1.92	1.88	1.85	1.83
0.010	2.79	2.72	2.60	2.52	2.44	2.35	2.30	2.23	2.19	2.13	2.09	2.07
m=29	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.75	1.72	1.68	1.65	1.62	1.58	1.56	1.53	1.52	1.49	1.48	1.47
0.050	2.05	2.01	1.94	1.90	1.85	1.81	1.77	1.73	1.71	1.67	1.65	1.64
0.025	2.36	2.30	2.21	2.15	2.09	2.03	1.99	1.93	1.90	1.86	1.83	1.81
0.010	2.77	2.69	2.57	2.49	2.41	2.33	2.27	2.20	2.16	2.10	2.06	2.04
m=30	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.74	1.71	1.67	1.64	1.61	1.57	1.55	1.52	1.51	1.48	1.47	1.46
0.050	2.04	1.99	1.93	1.89	1.84	1.79	1.76	1.72	1.70	1.66	1.64	1.62
0.025	2.34	2.28	2.20	2.14	2.07	2.01	1.97	1.91	1.88	1.84	1.81	1.79
0.010	2.74	2.66	2.55	2.47	2.39	2.30	2.25	2.17	2.13	2.07	2.03	2.01
m=31	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.73	1.70	1.66	1.63	1.60	1.56	1.54	1.51	1.50	1.47	1.46	1.45
0.050	2.03	1.98	1.92	1.88	1.83	1.78	1.75	1.70	1.68	1.65	1.62	1.61
0.025	2.32	2.26	2.18	2.12	2.06	1.99	1.95	1.89	1.86	1.82	1.79	1.77
0.010	2.72	2.64	2.52	2.45	2.36	2.27	2.22	2.14	2.11	2.04	2.01	1.98
m=32	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.72	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.53	1.50	1.49	1.46	1.45	1.44
0.050	2.01	1.97	1.91	1.86	1.82	1.77	1.74	1.69	1.67	1.63	1.61	1.60
0.025	2.31	2.25	2.16	2.10	2.04	1.98	1.93	1.88	1.85	1.80	1.77	1.75
0.010	2.70	2.62	2.50	2.42	2.34	2.25	2.20	2.12	2.08	2.02	1.98	1.96
m=34	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.71	1.68	1.64	1.61	1.58	1.54	1.52	1.49	1.47	1.45	1.43	1.42
0.050	1.99	1.95	1.89	1.84	1.80	1.75	1.71	1.67	1.65	1.61	1.59	1.57
0.025	2.28	2.22	2.13	2.07	2.01	1.95	1.90	1.85	1.82	1.77	1.74	1.72
0.010	2.66	2.58	2.46	2.38	2.30	2.21	2.16	2.08	2.04	1.98	1.94	1.91
m=36	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.70	1.67	1.63	1.60	1.56	1.53	1.51	1.47	1.46	1.43	1.42	1.40
0.050	1.98	1.93	1.87	1.82	1.78	1.73	1.69	1.65	1.62	1.59	1.56	1.55
0.025	2.25	2.20	2.11	2.05	1.99	1.92	1.88	1.82	1.79	1.74	1.71	1.69
0.010	2.62	2.54	2.43	2.35	2.26	2.18	2.12	2.04	2.00	1.94	1.90	1.87
m=38	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.69	1.66	1.61	1.58	1.55	1.52	1.49	1.46	1.45	1.42	1.40	1.39
0.050	1.96	1.92	1.85	1.81	1.76	1.71	1.68	1.63	1.61	1.57	1.54	1.53
0.025	2.23	2.17	2.09	2.03	1.96	1.90	1.85	1.79	1.76	1.71	1.68	1.66
0.010	2.59	2.51	2.40	2.32	2.23	2.14	2.09	2.01	1.97	1.90	1.86	1.84
m=40	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.68	1.65	1.61	1.57	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43	1.41	1.39	1.38
0.050	1.95	1.90	1.84	1.79	1.74	1.69	1.66	1.61	1.59	1.55	1.53	1.51
0.025	2.21	2.15	2.07	2.01	1.94	1.88	1.83	1.77	1.74	1.69	1.66	1.64
0.010	2.56	2.48	2.37	2.29	2.20	2.11	2.06	1.98	1.94	1.87	1.83	1.81
m=42	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.67	1.64	1.60	1.57	1.53	1.50	1.47	1.44	1.42	1.40	1.38	1.37
0.050	1.94	1.89	1.83	1.78	1.73	1.68	1.65	1.60	1.57	1.53	1.51	1.49
0.025	2.20	2.14	2.05	1.99	1.92	1.86	1.81	1.75	1.72	1.67	1.64	1.62
0.010	2.54	2.46	2.34	2.26	2.18	2.09	2.03	1.95	1.91	1.85	1.80	1.78
m=44	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.66	1.63	1.59	1.56	1.52	1.49	1.46	1.43	1.41	1.39	1.37	1.36
0.050	1.92	1.88	1.81	1.77	1.72	1.67	1.63	1.59	1.56	1.52	1.49	1.48
0.025	2.18	2.12	2.03	1.97	1.91	1.84	1.80	1.73	1.70	1.65	1.62	1.60
0.010	2.52	2.44	2.32	2.24	2.15	2.07	2.01	1.93	1.89	1.82	1.78	1.75
m=46	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.65	1.63	1.58	1.55	1.52	1.48	1.46	1.42	1.40	1.38	1.36	1.35
0.050	1.91	1.87	1.80	1.76	1.71	1.65	1.62	1.57	1.55	1.51	1.48	1.46
0.025	2.17	2.11	2.02	1.96	1.89	1.82	1.78	1.72	1.69	1.63	1.60	1.58
0.010	2.50	2.42	2.30	2.22	2.13	2.04	1.99	1.91	1.86	1.80	1.76	1.73
m=48	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.65	1.62	1.57	1.54	1.51	1.47	1.45	1.41	1.40	1.37	1.35	1.34
0.050	1.90	1.86	1.79	1.75	1.70	1.64	1.61	1.56	1.54	1.49	1.47	1.45
0.025	2.15	2.09	2.01	1.94	1.88	1.81	1.77	1.70	1.67	1.62	1.58	1.56
0.010	2.48	2.40	2.28	2.20	2.12	2.02	1.97	1.89	1.84	1.78	1.73	1.71
m=50	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.64	1.61	1.57	1.54	1.50	1.46	1.44	1.41	1.39	1.36	1.34	1.33

0.050	1.89	1.85	1.78	1.74	1.69	1.63	1.60	1.55	1.52	1.48	1.46	1.44
0.025	2.14	2.08	1.99	1.93	1.87	1.80	1.75	1.69	1.66	1.60	1.57	1.55
0.010	2.46	2.38	2.27	2.18	2.10	2.01	1.95	1.87	1.82	1.76	1.71	1.69
m = 55	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.63	1.60	1.55	1.52	1.49	1.45	1.43	1.39	1.37	1.34	1.32	1.31
0.050	1.88	1.83	1.76	1.72	1.67	1.61	1.58	1.53	1.50	1.46	1.43	1.41
0.025	2.11	2.05	1.97	1.90	1.84	1.77	1.72	1.66	1.62	1.57	1.54	1.51
0.010	2.42	2.34	2.23	2.15	2.06	1.97	1.91	1.83	1.78	1.71	1.67	1.64
m = 60	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.62	1.59	1.54	1.51	1.48	1.44	1.41	1.38	1.36	1.33	1.31	1.29
0.050	1.86	1.82	1.75	1.70	1.65	1.59	1.56	1.51	1.48	1.44	1.41	1.39
0.025	2.09	2.03	1.94	1.88	1.82	1.74	1.70	1.63	1.60	1.54	1.51	1.48
0.010	2.39	2.31	2.20	2.12	2.03	1.94	1.88	1.79	1.75	1.68	1.63	1.60
m = 65	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.61	1.58	1.53	1.50	1.47	1.43	1.40	1.37	1.35	1.31	1.29	1.28
0.050	1.85	1.80	1.73	1.69	1.63	1.58	1.54	1.49	1.46	1.42	1.39	1.37
0.025	2.07	2.01	1.93	1.86	1.80	1.72	1.68	1.61	1.58	1.52	1.48	1.46
0.010	2.37	2.29	2.17	2.09	2.00	1.91	1.85	1.77	1.72	1.65	1.60	1.57
m = 70	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.60	1.57	1.53	1.49	1.46	1.42	1.39	1.36	1.34	1.30	1.28	1.27
0.050	1.84	1.79	1.72	1.67	1.62	1.57	1.53	1.48	1.45	1.40	1.37	1.35
0.025	2.06	2.00	1.91	1.85	1.78	1.71	1.66	1.59	1.56	1.50	1.46	1.44
0.010	2.35	2.27	2.15	2.07	1.98	1.89	1.83	1.74	1.70	1.62	1.57	1.54
m = 80	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.59	1.56	1.51	1.48	1.44	1.40	1.38	1.34	1.32	1.28	1.26	1.25
0.050	1.82	1.77	1.70	1.65	1.60	1.54	1.51	1.45	1.43	1.38	1.35	1.33
0.025	2.03	1.97	1.88	1.82	1.75	1.68	1.63	1.56	1.53	1.47	1.43	1.40
0.010	2.31	2.23	2.12	2.03	1.94	1.85	1.79	1.70	1.65	1.58	1.53	1.50
m = 100	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.57	1.54	1.49	1.46	1.42	1.38	1.35	1.32	1.29	1.26	1.23	1.22
0.050	1.79	1.75	1.68	1.63	1.57	1.52	1.48	1.42	1.39	1.34	1.31	1.28
0.025	2.00	1.94	1.85	1.78	1.71	1.64	1.59	1.52	1.48	1.42	1.38	1.35
0.010	2.27	2.19	2.07	1.98	1.89	1.80	1.74	1.65	1.60	1.52	1.47	1.43
m = 125	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.56	1.53	1.48	1.44	1.41	1.36	1.34	1.30	1.27	1.23	1.21	1.19
0.050	1.77	1.73	1.66	1.60	1.55	1.49	1.45	1.40	1.36	1.31	1.27	1.25
0.025	1.97	1.91	1.82	1.75	1.68	1.61	1.56	1.49	1.45	1.38	1.34	1.30
0.010	2.23	2.15	2.03	1.94	1.85	1.76	1.69	1.60	1.55	1.47	1.41	1.37
m = 200	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.54	1.51	1.46	1.42	1.38	1.34	1.31	1.27	1.24	1.20	1.17	1.15
0.050	1.74	1.69	1.62	1.57	1.52	1.46	1.41	1.35	1.32	1.26	1.22	1.19
0.025	1.93	1.87	1.78	1.71	1.64	1.56	1.51	1.44	1.39	1.32	1.27	1.23
0.010	2.17	2.09	1.97	1.89	1.79	1.69	1.63	1.53	1.48	1.39	1.33	1.28
m = 400	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.52	1.49	1.44	1.40	1.36	1.32	1.29	1.24	1.21	1.17	1.13	1.10
0.050	1.72	1.67	1.60	1.54	1.49	1.42	1.38	1.32	1.28	1.22	1.17	1.13
0.025	1.90	1.84	1.74	1.68	1.60	1.52	1.47	1.39	1.35	1.27	1.21	1.16
0.010	2.13	2.05	1.92	1.84	1.75	1.64	1.58	1.48	1.42	1.32	1.25	1.19
m = 1000	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.51	1.48	1.43	1.39	1.35	1.30	1.27	1.22	1.20	1.15	1.10	1.06
0.050	1.70	1.65	1.58	1.53	1.47	1.41	1.36	1.30	1.26	1.19	1.13	1.08
0.025	1.88	1.82	1.72	1.65	1.58	1.50	1.45	1.36	1.32	1.23	1.16	1.10
0.010	2.10	2.02	1.90	1.81	1.72	1.61	1.54	1.44	1.38	1.28	1.19	1.12
m = 5000	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.100	1.51	1.47	1.42	1.38	1.34	1.30	1.27	1.22	1.19	1.13	1.09	1.03
0.050	1.69	1.65	1.57	1.52	1.46	1.40	1.35	1.29	1.25	1.17	1.11	1.04
0.025	1.87	1.81	1.71	1.64	1.57	1.49	1.43	1.35	1.30	1.21	1.14	1.05
0.010	2.09	2.00	1.88	1.79	1.70	1.60	1.53	1.42	1.36	1.25	1.16	1.06

სტიუდენტის რანგობრივი სტატისტიკის q -ს მნიშვნელობები

	შესადარებელი საშუალოების რაოდენობა									
α	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$df = 1$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	17.97	26.98	32.82	37.08	40.41	43.12	45.40	47.36	49.07	
0.01	90.03	135.0	164.3	185.6	202.2	215.8	227.2	237.0	245.6	
$df = 2$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	6.08	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	
0.01	14.04	19.02	22.29	24.72	26.63	28.20	29.53	30.68	31.69	
$df = 3$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	4.50	8.33	9.80	10.88	11.74	12.44	13.03	13.54	13.99	
0.01	8.26	10.62	12.17	13.33	14.24	15.00	11.55	11.93	12.27	
$df = 4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.93	5.04	5.76	6.29	6.71	7.05	7.35	7.60	7.83	
0.01	6.51	8.12	9.17	9.96	10.58	11.10	11.55	11.93	12.27	
$df = 5$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33	6.58	6.80	6.99	
0.01	5.70	6.98	7.80	8.42	8.91	9.32	9.67	9.97	10.24	
$df = 6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.46	4.34	4.90	5.30	5.63	5.90	6.12	6.32	6.49	
0.01	5.25	6.33	7.03	7.56	7.97	8.32	8.61	8.87	9.10	
$df = 7$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.34	4.16	4.68	5.06	5.36	5.61	5.82	6.00	6.16	
0.01	4.95	5.92	6.54	7.01	7.37	7.68	7.94	8.17	8.37	
$df = 8$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40	5.60	5.77	5.92	
0.01	4.75	5.64	6.20	6.62	6.96	7.24	7.47	7.68	7.86	
$df = 9$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.20	3.95	4.41	4.76	5.02	5.24	5.43	5.59	5.74	
0.01	4.60	5.43	5.96	6.35	6.66	6.91	7.13	7.33	7.49	
$df = 10$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.15	3.88	4.33	4.65	4.91	5.12	5.30	5.46	5.60	
0.01	4.48	5.27	5.77	6.14	6.43	6.67	6.87	7.05	7.21	
$df = 11$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.11	3.82	4.26	4.57	4.82	5.03	5.20	5.35	5.49	
0.01	4.39	5.15	5.62	5.97	6.25	6.48	6.67	6.84	6.99	
$df = 12$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95	5.12	5.27	5.39	
0.01	4.32	5.05	5.50	5.84	6.10	6.32	6.51	6.67	6.81	
$df = 13$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.06	3.73	4.15	4.45	4.69	4.88	5.05	5.19	5.32	
0.01	4.26	4.96	5.40	5.73	5.98	6.19	6.37	6.53	6.67	
$df = 14$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.03	3.70	4.11	4.41	4.64	4.83	4.94	5.08	5.20	
0.01	4.21	4.89	5.32	5.63	5.88	6.08	6.26	6.41	6.54	
$df = 15$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78	4.94	5.08	5.20	
0.01	4.17	4.84	5.25	5.56	5.80	5.99	6.16	6.31	6.44	
$df = 16$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	3.00	3.65	4.05	4.33	4.56	4.74	4.90	5.03	5.15	
0.01	4.13	4.79	5.19	5.49	5.72	5.92	6.08	6.22	6.35	
$df = 17$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	2.98	3.63	4.02	4.30	4.52	4.70	4.86	4.99	5.11	
0.01	4.10	4.74	5.14	5.43	5.66	5.85	6.01	6.15	6.27	
$df = 18$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	
0.05	2.97	3.61	4.00	4.28	4.49	4.67	4.82	4.96	5.07	
0.01	4.07	4.70	5.09	5.38	5.60	5.79	5.89	6.02	6.14	

$df = 19$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.05	2.96	3.59	3.98	4.25	4.47	4.65	4.79	4.92	5.04			
	შესადარებელი საშუალოების რაოდენობა											
α	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
0.01	4.05	4.67	5.05	5.33	5.55	5.73	5.89	6.02	6.14			
$df = 20$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.95	3.58	3.96	4.23	4.45	4.62	4.77	4.90	5.01			
0.01	4.02	4.64	5.02	5.29	5.51	5.69	5.84	5.97	6.09			
$df = 24$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54	4.68	4.81	4.92			
0.01	3.96	4.55	4.91	5.17	5.37	5.54	5.69	5.81	5.92			
$df = 30$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.89	3.49	3.85	4.10	4.30	4.46	4.60	4.63	4.73			
0.01	3.89	4.45	4.80	5.05	5.24	5.40	5.54	5.65	5.76			
$df = 40$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.86	3.44	3.79	4.04	4.23	4.39	4.52	4.63	4.73			
0.01	3.82	4.37	4.70	4.93	5.11	5.26	5.39	5.50	5.60			
$df = 60$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31	4.44	4.55	4.65			
0.01	3.76	4.28	4.59	4.82	4.99	5.13	5.25	5.36	5.45			
$df = 120$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.80	3.36	3.68	3.92	4.10	4.24	4.36	4.47	4.56			
0.01	3.70	4.20	4.50	4.71	4.87	5.01	5.12	5.21	5.30			
$df = \infty$	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	2.77	3.31	3.63	3.86	4.03	4.17	4.29	4.39	4.47			
0.01	3.64	4.12	4.40	4.60	4.76	4.88	4.99	5.08	5.16			
	შესადარებელი საშუალოების რაოდენობა											
α	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20		
$df = 1$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	50.59	51.96	53.20	54.33	55.30	56.32	57.22	58.04	58.83	59.56		
0.01	253.2	260.0	266.2	271.8	277.0	281.8	286.3	290.4	294.3	298.0		
$df = 2$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	14.39	14.75	15.08	15.38	15.65	15.91	16.14	16.37	16.57	16.77		
0.01	32.59	33.40	34.13	34.81	35.43	36.00	36.53	37.03	37.50	37.95		
$df = 3$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	9.72	9.95	10.15	10.35	10.52	10.69	10.84	10.98	11.11	11.24		
0.01	17.13	17.53	17.89	18.22	18.52	18.81	19.07	19.32	19.55	19.77		
$df = 4$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	8.03	8.21	8.37	8.52	8.66	8.79	8.91	9.03	9.13	9.23		
0.01	12.57	12.84	13.09	13.32	13.53	13.73	13.91	14.08	14.24	14.40		
$df = 5$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	7.17	7.32	7.47	7.60	7.72	7.83	7.93	8.03	8.12	8.21		
0.01	10.48	10.70	10.89	11.08	11.24	11.40	11.55	11.68	11.81	11.93		
$df = 6$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	6.65	6.79	6.92	7.03	7.14	7.24	7.34	7.43	7.51	7.59		
0.01	9.30	9.48	9.65	9.81	9.95	10.08	10.21	10.32	10.43	10.54		
$df = 7$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	6.30	6.43	6.55	6.66	6.76	6.85	6.94	7.02	7.10	7.17		
0.01	8.55	8.71	8.86	9.00	9.12	9.24	9.35	9.46	9.55	9.65		
$df = 8$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	6.05	6.18	6.29	6.39	6.48	6.57	6.65	6.73	6.80	6.87		
0.01	8.03	8.18	8.31	8.44	8.55	8.66	8.76	8.85	8.94	9.03		
$df = 9$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	5.87	5.98	6.09	6.19	6.28	6.36	6.44	6.51	6.58	6.64		
0.01	7.65	7.78	7.91	8.03	8.13	8.23	8.33	8.41	8.49	8.57		
$df = 10$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
0.05	5.72	5.83	5.93	6.03	6.11	6.19	6.27	6.34	6.40	6.47		
0.01	7.36	7.49	7.60	7.71	7.81	7.91	7.99	8.08	8.15	8.23		

$df = 11$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
0.05	5.61	5.71	5.81	5.90	5.98	6.06	6.13	6.20	6.27	6.33			
0.01	7.13	7.25	7.36	7.46	7.56	7.65	7.73	7.81	7.88	7.95			
	შესადარებელი საშუალოების რაოდენობა												
α	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20			
$df = 12$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.51	5.61	5.71	5.80	5.88	5.95	6.02	6.09	6.15	6.21			
0.01	6.94	7.06	7.17	7.26	7.36	7.44	7.52	7.59	7.66	7.73			
$df = 13$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.43	5.53	5.63	5.71	5.79	5.86	5.93	5.99	6.05	6.11			
0.01	6.79	6.90	7.01	7.10	7.19	7.27	7.35	7.42	7.48	7.55			
$df = 14$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.36	5.46	5.55	5.64	5.71	5.79	5.85	5.91	5.97	6.03			
0.01	6.66	6.77	6.87	6.96	7.05	7.13	7.20	7.27	7.33	7.39			
$df = 15$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.31	5.40	5.49	5.57	5.65	5.72	5.78	5.85	5.90	5.96			
0.01	6.55	6.66	6.76	6.84	6.93	7.00	7.07	7.14	7.20	7.26			
$df = 16$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.26	5.35	5.44	5.52	5.59	5.66	5.73	5.79	5.84	5.90			
0.01	6.46	6.56	6.66	6.74	6.82	6.90	6.97	7.03	7.09	7.15			
$df = 17$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.21	5.31	5.39	5.47	5.54	5.61	5.67	5.73	5.79	5.84			
0.01	6.38	6.48	6.57	6.66	6.73	6.81	6.87	6.94	7.00	7.05			
$df = 18$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.17	5.27	5.35	5.43	5.50	5.57	5.63	5.69	5.74	5.79			
0.01	6.31	6.41	6.50	6.58	6.65	6.73	6.79	6.85	6.91	6.97			
$df = 19$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.14	5.23	5.31	5.39	5.46	5.53	5.59	5.65	5.70	5.75			
0.01	6.25	6.34	6.43	6.51	6.58	6.65	6.72	6.78	6.84	6.89			
$df = 20$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.11	5.20	5.28	5.36	5.43	5.49	5.55	5.61	5.66	5.71			
0.01	6.19	6.28	6.37	6.45	6.52	6.59	6.65	6.71	6.77	6.82			
$df = 24$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	5.01	5.10	5.18	5.25	5.32	5.38	5.44	5.49	5.55	5.59			
0.01	6.02	6.11	6.19	6.26	6.33	6.39	6.45	6.51	6.56	6.61			
$df = 30$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	4.92	5.00	5.08	5.15	5.21	5.27	5.33	5.38	5.43	5.47			
0.01	5.85	5.93	6.01	6.08	6.14	6.20	6.26	6.31	6.36	6.41			
$df = 40$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.16	5.22	5.27	5.31	5.36			
0.01	5.69	5.76	5.83	5.90	5.96	6.02	6.07	6.12	6.16	6.21			
$df = 60$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	4.73	4.81	4.88	4.94	5.00	5.06	5.11	5.15	5.20	5.24			
0.01	5.53	5.60	5.67	5.73	5.78	5.84	5.89	5.93	5.97	6.01			
$df = 120$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	4.64	4.71	4.78	4.84	4.90	4.95	5.00	5.04	5.09	5.13			
0.01	5.37	5.44	5.50	5.56	5.61	5.66	5.71	5.75	5.79	5.83			
$df = \infty$	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*			
0.05	4.55	4.62	4.68	4.74	4.80	4.85	4.89	4.93	4.97	5.01			
0.01	5.23	5.29	5.35	5.40	5.45	5.49	5.54	5.57	5.61	5.65			

ფაქტორულ სქემაში უბრალო ეფექტების კრიტერიუმის CD -სთვის q -ს მოსაძებნად საჭირო სვეტის დასადგენად გამოიყენება შემდეგი გარდაქმნა:

სქემის ტიპი	სვეტის ნომერი
2X2	3
2X3	5
3X2	5
3X3	7
3X4	8

4X3	8
4X4	10

პირსონი კორელაციის კოეფიციენტის (r) კრიტიკული მნიშვნელობები

α (ცალმხრივი)					α (ცალმხრივი)				
	5%	2.5%	1%	0.5%		5%	2.5%	1%	0.5%
n	10%	α (ორმხრივი)			n	α (ორმხრივი)			
		5%	2%	1%		10%	5%	2%	1%
3	0.9877	0.9969	0.9995	0.9999	40	0.2638	0.3120	0.3665	0.4026
4	0.9000	0.9500	0.9800	0.9900	41	0.2605	0.3081	0.3621	0.3978
5	0.8054	0.8783	0.9343	0.9587	42	0.2573	0.3044	0.3578	0.3932
6	0.7293	0.8114	0.8822	0.9172	43	0.2542	0.3008	0.3536	0.3887
7	0.6694	0.7545	0.8329	0.8745	44	0.2512	0.2973	0.3496	0.3843
8	0.6215	0.7067	0.7887	0.8343	45	0.2483	0.2940	0.3457	0.3801
9	0.5822	0.6664	0.7498	0.7977	46	0.2455	0.2907	0.3420	0.3761
10	0.5494	0.6319	0.7155	0.7646	47	0.2429	0.2876	0.3384	0.3721
11	0.5214	0.6021	0.6851	0.7348	48	0.2403	0.2845	0.3348	0.3683
12	0.4973	0.5760	0.6581	0.7079	49	0.2377	0.2816	0.3314	0.3646
13	0.4762	0.5529	0.6339	0.6835	50	0.2353	0.2787	0.3281	0.3610
14	0.4575	0.5324	0.6120	0.6614	55	0.2241	0.2656	0.3129	0.3445
15	0.4409	0.5140	0.5923	0.6411	60	0.2144	0.2542	0.2997	0.3301
16	0.4259	0.4973	0.5742	0.6226	65	0.2058	0.2441	0.2880	0.3173
17	0.4124	0.4821	0.5577	0.6055	70	0.1982	0.2352	0.2776	0.3060
18	0.4000	0.4683	0.5425	0.5897	75	0.1914	0.2272	0.2682	0.2957
19	0.3887	0.4555	0.5285	0.5751	80	0.1852	0.2199	0.2597	0.2864
20	0.3783	0.4438	0.5155	0.5614	85	0.1796	0.2133	0.2520	0.2780
21	0.3687	0.4329	0.5034	0.5487	90	0.1745	0.2072	0.2449	0.2702
22	0.3598	0.4227	0.4921	0.5368	95	0.1698	0.2017	0.2384	0.2631
23	0.3515	0.4132	0.4815	0.5256	100	0.1654	0.1966	0.2324	0.2565
24	0.3438	0.4044	0.4716	0.5151	110	0.1576	0.1874	0.2216	0.2446
25	0.3365	0.3961	0.4622	0.5052	120	0.1509	0.1793	0.2122	0.2343
26	0.3297	0.3882	0.4534	0.4958	130	0.1449	0.1723	0.2039	0.2252
27	0.3233	0.3809	0.4451	0.4869	140	0.1396	0.1660	0.1965	0.2170
28	0.3172	0.3739	0.4372	0.4785	150	0.1348	0.1603	0.1898	0.2097
29	0.3115	0.3673	0.4297	0.4705	160	0.1305	0.1552	0.1838	0.2031
30	0.3061	0.3610	0.4226	0.4629	170	0.1266	0.1506	0.1783	0.1971
31	0.3009	0.3550	0.4158	0.4556	180	0.1230	0.1463	0.1733	0.1915
32	0.2960	0.3494	0.4093	0.4487	190	0.1197	0.1424	0.1687	0.1865
33	0.2913	0.3440	0.4032	0.4421	200	0.1166	0.1388	0.1644	0.1818
34	0.2869	0.3388	0.3972	0.4357	210	0.1138	0.1354	0.1604	0.1774
35	0.2826	0.3338	0.3916	0.4296	220	0.1112	0.1323	0.1568	0.1733
36	0.2785	0.3291	0.3862	0.4238	230	0.1087	0.1294	0.1533	0.1695
37	0.2746	0.3246	0.3810	0.4182	240	0.1064	0.1267	0.1501	0.1660
38	0.2709	0.3202	0.3760	0.4128	250	0.1043	0.1241	0.1471	0.1626
39	0.2673	0.3160	0.3712	0.4076	500	0.0736	0.0877	0.1040	0.1151

სპირმენის კორელაციის კოეფიციენტის (r_s) კრიტიკული მნიშვნელობები

n	$\alpha = .100$	$\alpha = .050$	$\alpha = .025$	$\alpha = .010$	$\alpha = .005$	$\alpha = .001$
4	.8000	.8000				
5	.7000	.8000	.9000	.9000		
6	.6000	.7714	.8286	.8857	.9429	
7	.5357	.6786	.7450	.8571	.8929	.9643
8	.5000	.6190	.7143	.8095	.8571	.9286
9	.4667	.5833	.6833	.7667	.8167	.9000
10	.4424	.5515	.6364	.7333	.8167	.8667
11	.4182	.5273	.6091	.7000	.7818	.8364
12	.3986	.4965	.5804	.6713	.7455	.8182
13	.3791	.4760	.5549	.6429	.7273	.7912
14	.3626	.4593	.5341	.6220	.6978	.7670
15	.3500	.4429	.5179	.6000	.6747	.7464
16	.3382	.4265	.5000	.5824	.6536	.7265
17	.3260	.4118	.4853	.5637	.6324	.7083
18	.3148	.3994	.4716	.5480	.6152	.6904
19	.3070	.3895	.4579	.5333	.5975	.6737
20	.2977	.3789	.4451	.5203	.5684	.6586
21	.2909	.3688	.4351	.5078	.5545	.6455
22	.2829	.3597	.4241	.4963	.5426	.6318
23	.2767	.3518	.4150	.4852	.5306	.6186
24	.2704	.3435	.4061	.4748	.5200	.6070
25	.2646	.3362	.3977	.4654	.5100	.5962
26	.2588	.3299	.3894	.4564	.5002	.5856
27	.2540	.3236	.3822	.4481	.4915	.5757
28	.2490	.3175	.3749	.4401	.4828	.5660
29	.2443	.3113	.3685	.4320	.4744	.5567
30	.2400	.3059	.3620	.4251	.4665	.5479

კენდალის კრიტიკული მნიშვნელობები

$\alpha = .05$					
m	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
3			64.4	103.9	157.3
4		49.5	88.4	143.3	217.0
5		62.6	112.3	182.4	276.2
6		75.7	136.1	221.4	335.2
8	48.1	101.7	183.7	299.0	453.1
10	60.0	127.8	231.2	376.7	571.0
15	89.8	192.9	349.8	570.5	864.9
20	119.7	258.0	468.5	764.4	1158.7
$\alpha = .01$					
m	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
3			75.6	122.8	185.6
4		61.4	109.3	176.2	265.0
5		80.5	142.8	229.4	343.8
6		99.5	176.1	282.4	422.6
8	66.8	137.4	242.7	388.3	579.9
10	85.1	175.3	309.1	494.0	737.0
15	131.0	269.8	475.2	758.2	1129.5
20	177.0	364.2	641.2	764.4	1158.7

დამატებითი მნიშვნელობები, როცა $n = 3$

m	$\alpha = .05$	$\alpha = .01$
9	54.0	75.9
12	71.9	103.5
14	83.8	121.9
16	95.8	140.2
18	107.7	158.6

მან-უიტნი/უილკოქსონის კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობები
(α : 5%-იანი ცალმხრივი, 10%-იანი ორმხრივი)

n_2																									
n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
2	—	—	—	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	5	5	5	6	6	
3	—	—	0	1	2	2	3	3	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	11	12	13	13	14	
4	—	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
5	0	1	2	4	5	6	8	9	11	12	13	15	16	18	19	20	22	23	25	26	28	29	30	32	
6	0	2	3	5	7	8	10	12	14	16	17	19	21	23	25	26	28	30	32	34	36	37	39	41	
7	0	2	4	6	8	11	13	15	17	19	21	24	26	28	30	33	35	37	39	41	44	46	48	50	
8	1	3	5	8	10	13	15	18	20	23	26	28	31	33	36	39	41	44	47	49	52	54	57	60	
9	1	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27	31	34	37	41	44	48	51	55	58	62	65	68	72	75	79	
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34	38	42	46	50	54	57	61	65	69	73	77	81	85	89	
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42	47	51	55	60	64	68	72	77	81	85	90	94	98	
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51	56	61	65	70	75	80	84	89	94	98	103	108	
14	2	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	66	71	77	82	87	92	97	102	107	113	118	
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72	77	83	88	94	100	105	111	116	122	128	
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83	89	96	102	109	115	121	128	134	141	147	
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88	95	102	109	116	123	130	136	143	150	157	
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94	101	109	116	123	130	138	145	152	160	167	
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100	107	115	123	130	138	146	154	161	169	177	
21	5	11	19	26	34	41	49	57	65	73	81	89	97	105	113	121	130	138	146	154	162	170	179	187	
22	5	12	20	28	36	44	52	60	68	77	85	94	102	111	119	128	136	145	154	162	171	179	188	197	
23	5	13	21	29	37	46	54	63	72	81	90	98	107	116	125	134	143	152	161	170	179	189	198	207	
24	6	13	22	30	39	48	57	66	75	85	94	103	113	122	131	141	150	160	169	179	188	198	207	217	
25	6	14	23	32	41	50	60	69	79	89	98	108	118	128	137	147	157	167	177	187	197	207	217	227	

მან-უიტნი/უილკოქსონის კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობები
(α : 2.5%-იანი ცალმხრივი, 5%-იანი ორმხრივი)

	n_2																								
n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
2	–	–	–	–	–	–	0	0	0	0	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	
3	–	–	–	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	
4	–	–	0	1	2	3	4	4	5	6	7	8	9	10	11	11	12	13	14	15	16	17	17	18	
5	–	0	1	2	3	5	6	7	8	9	11	12	13	14	15	17	18	19	20	22	23	24	25	27	
6	–	1	2	3	5	6	8	10	11	13	14	16	17	19	21	22	24	25	27	29	30	32	33	35	
7	–	1	3	5	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	
8	0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	22	24	26	29	31	34	36	38	41	43	45	48	50	53	
9	0	2	4	7	10	12	15	17	20	23	26	28	31	34	37	39	42	45	48	50	53	56	59	62	
10	0	3	5	8	11	14	17	20	23	26	29	33	36	39	42	45	48	52	55	58	61	64	67	71	
11	0	3	6	9	13	16	19	23	26	30	33	37	40	44	47	51	55	58	62	65	69	73	76	80	
12	1	4	7	11	14	18	22	26	29	33	37	41	45	49	53	57	61	65	69	73	77	81	85	89	
13	1	4	8	12	16	20	24	28	33	37	41	45	50	54	59	63	67	72	76	80	85	89	94	98	
14	1	5	9	13	17	22	26	31	36	40	45	50	55	59	64	69	74	78	83	88	93	98	102	107	
15	1	5	10	14	19	24	29	34	39	44	49	54	59	64	70	75	80	85	90	96	101	106	111	117	
16	1	6	11	15	21	26	31	37	42	47	53	59	64	70	75	81	86	92	98	103	109	115	120	126	
17	2	6	11	17	22	28	34	39	45	51	57	63	69	75	81	87	93	99	105	111	117	123	129	135	
18	2	7	12	18	24	30	36	42	48	55	61	67	74	80	86	93	99	106	112	119	125	132	138	145	
19	2	7	13	19	25	32	38	45	52	58	65	72	78	85	92	99	106	113	119	126	133	140	147	154	
20	2	8	14	20	27	34	41	48	55	62	69	76	83	90	98	105	112	119	127	134	141	149	156	163	

21	3	8	15	22	29	36	43	50	58	65	73	80	88	96	103	111	119	126	134	142	150	157	165	173
22	3	9	16	23	30	38	45	53	61	69	77	85	93	101	109	117	125	133	141	150	158	166	174	182
23	3	9	17	24	32	40	48	56	64	73	81	89	98	106	115	123	132	140	149	157	166	175	183	192
24	3	10	17	25	33	42	50	59	67	76	85	94	102	111	120	129	138	147	156	165	174	183	192	201
25	3	10	18	27	35	44	53	62	71	80	89	98	107	117	126	135	145	154	163	173	182	192	201	211

უილკოქსონის კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობები

α (ცალმხრივი)					α (ცალმხრივი)					α (ცალმხრივი)				
5% 2.5% 1% 0.5%					5% 2.5% 1% 0.5%					5% 2.5% 1% 0.5%				
α (ორმხრივი)					α (ორმხრივი)					α (ორმხრივი)				
n	10%	5%	2%	1%	n	10%	5%	2%	1%	n	10%	5%	2%	1%
1	—	—	—	—	31	163	147	130	118	61	715	672	623	589
2	—	—	—	—	32	175	159	140	128	62	741	697	646	611
3	—	—	—	—	33	187	170	151	138	63	767	721	669	634
4	—	—	—	—	34	200	182	162	148	64	793	747	693	657
5	0	—	—	—	35	213	195	173	159	65	820	772	718	681
6	2	0	—	—	36	227	208	185	171	66	847	798	742	705
7	3	2	0	—	37	241	221	198	182	67	875	825	768	729
8	5	3	1	0	38	256	235	211	194	68	903	852	793	754
9	8	5	3	1	39	271	249	224	207	69	931	879	819	779
10	10	8	5	3	40	286	264	238	220	70	960	907	846	805
11	13	10	7	5	41	302	279	252	233	71	990	936	873	831
12	17	13	9	7	42	319	294	266	247	72	1020	964	901	858
13	21	17	12	9	43	336	310	281	261	73	1050	994	928	884
14	25	21	15	12	44	353	327	296	276	74	1081	1023	957	912
15	30	25	19	15	45	371	343	312	291	75	1112	1053	986	940
16	35	29	23	19	46	389	361	328	307	76	1144	1084	1015	968
17	41	34	27	23	47	407	378	345	322	77	1176	1115	1044	997
18	47	40	32	27	48	426	396	362	339	78	1209	1147	1075	1026
19	53	46	37	32	49	446	415	379	355	79	1242	1179	1105	1056
20	60	52	43	37	50	466	434	397	373	80	1276	1211	1136	1086
21	67	58	49	42	51	486	453	416	390	81	1310	1244	1168	1116
22	75	65	55	48	52	507	473	434	408	82	1345	1277	1200	1147
23	83	73	62	54	53	529	494	454	427	83	1380	1311	1232	1178
24	91	81	69	61	54	550	514	473	445	84	1415	1345	1265	1210
25	100	89	76	68	55	573	536	493	465	85	1451	1380	1298	1242
26	110	98	84	75	56	595	557	514	484	86	1487	1415	1332	1275
27	119	107	92	83	57	618	579	535	504	87	1524	1451	1366	1308
28	130	116	101	91	58	642	602	556	525	88	1561	1487	1400	1342
29	140	126	110	100	59	666	625	578	546	89	1599	1523	1435	1376
30	151	137	120	109	60	690	648	600	567	90	1638	1560	1471	1410

კოლმოგოროვ-სმირნოვის კრიტერიუმის კრიტიკული მნიშვნელობები

n	$\alpha = .20$	$\alpha = .10$	$\alpha = .05$	$\alpha = .02$	$\alpha = .01$	n	$\alpha = .20$	$\alpha = .10$	$\alpha = .05$	$\alpha = .02$	$\alpha = .01$
1	.900	.950	.975	.990	.995	21	.226	.259	.287	.321	.344
2	.684	.776	.842	.900	.929	22	.221	.253	.281	.314	.337
3	.565	.636	.708	.785	.829	23	.216	.247	.275	.307	.330
4	.493	.565	.624	.689	.734	24	.212	.242	.269	.301	.323
5	.447	.509	.563	.627	.669	25	.208	.238	.264	.295	.317
6	.410	.468	.519	.577	.617	26	.204	.233	.259	.290	.311
7	.381	.436	.483	.538	.576	27	.200	.229	.254	.284	.305
8	.358	.410	.454	.507	.542	28	.197	.225	.250	.279	.300
9	.339	.387	.430	.480	.513	29	.193	.221	.246	.275	.295
10	.323	.369	.409	.457	.489	30	.190	.218	.242	.270	.290
11	.308	.352	.391	.437	.468	31	.187	.214	.238	.266	.285
12	.296	.338	.375	.419	.449	32	.184	.211	.234	.262	.281
13	.285	.325	.361	.404	.432	33	.182	.208	.231	.258	.277
14	.275	.314	.349	.390	.418	34	.179	.205	.227	.254	.273
15	.266	.304	.338	.377	.404	35	.177	.202	.224	.251	.269
16	.258	.295	.327	.366	.392	36	.174	.199	.221	.247	.265
17	.250	.286	.318	.355	.381	37	.172	.196	.218	.244	.262
18	.244	.279	.309	.346	.371	38	.170	.194	.215	.241	.258
19	.237	.271	.301	.337	.361	39	.168	.191	.213	.238	.255
20	.232	.265	.294	.329	.352	40	.165	.189	.210	.235	.252
						> 40	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.52}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

კრასკელ-უოლისის სტატისტიკის p -მნიშვნელობები

n_1	n_1	n_1	H	p -მნიშვნელობა	n_1	n_1	n_1	H	p -მნიშვნელობა
2	1	1	2.7000	.500	4	3	2	6.4444	.009
2	2	1	3.6000	.267				6.3000	.011
2	2	2	4.5714	.067				5.444	.046
			3.7143	.200				5.400	.051
3	1	1	3.2000	.300				4.5111	.098
3	2	1	4.2857	.100				4.4444	.102
			3.8571	.133	4	3	3	6.7455	.010
3	2	2	5.3572	.029				6.7091	.013
			4.7143	.048				5.7909	.046
			4.5000	.067				5.7273	.050
			4.4643	.105				4.7091	.092
3	3	1	5.1429	.043				4.7000	.101
			4.5714	.100	4	4	1	6.6667	.010
			4.0000	.129				6.1667	.022
3	3	2	6.2500	.011				4.9667	.048
			5.3611	.032				4.8667	.054
			5.1389	.061				4.1667	.082
			4.5556	.100				4.0667	.102
					4	4	2	7.0364	.006
								8.8727	.011
								5.4545	.046
								5.2364	.052

			4.2500	.121					4.5545	.098
									4.4455	.103
3	3	3	7.2000	.004						
			6.4889	.001						
			5.6889	.029		4	4	3	7.1439	.010
			5.6000	.050					7.1364	.011
			5.0667	.086					5.5985	.049
			4.6222	.100					5.5758	.051
									4.5455	.099
									4.4773	.102
4	1	1	3.5714	.200						
						4	4	4	7.6538	.008
4	2	1	4.8214	.057					7.5385	.011
			4.5000	.076					5.6923	.049
			4.0179	.114					5.6538	.054
									4.6539	.097
									4.5001	.104
4	3	1	5.8333	.021						
			5.2083	.050						
			5.0000	.057		5	1	1	3.8571	.143
			4.0556	.093						
			3.8889	.129		5	2	1	5.2500	.036
									5.0000	.048
									4.4500	.071
									4.2000	.095
									4.0500	.119
5	2	2	6.5333	.008		5	4	4	7.7604	.009
			6.1333	.013					7.7440	.011
			5.1600	.034					5.6571	.049
			5.0400	.056					5.6176	.050
			4.3733	.090					4.6187	.100
			4.2933	.112					4.5527	.102
5	3	1	6.4000	.012		5	5	1	7.3091	.009
			4.9600	.048					6.8364	.011
			4.8711	.052					5.1273	.046
			4.0178	.095					4.9091	.053
			3.8400	.123					4.1091	.086
									4.0364	.105
5	3	2	6.9091	.009						
			6.8281	.010						
			5.2509	.049		5	5	2	7.3385	.010
			5.1055	.052					7.2692	.010
			4.6509	.091					5.3385	.047
			4.4945	.101					5.2462	.051
									4.6231	.097
									4.5077	.100
5	3	3	7.0788	.009						
			6.9818	.011						
			5.6485	.049		5	5	3	7.5780	.010
			5.5152	.051					7.5429	.010
			4.5333	.097					5.7055	.046
			4.4121	.109					5.6264	.051
									4.5451	.100
									4.5363	.102
5	4	1	6.9545	.008						
			6.8400	.011						
			4.9855	.044		5	5	4	7.8229	.010
			4.8600	.056					7.7914	.010
			3.9873	.098					5.6657	.049
			3.9600	.102					5.6429	.050
									4.5229	.100
									4.5200	.101
5	4	2	7.2045	.009						
			7.1182	.010						
			5.2727	.049		5	5	5	8.0000	.009
			5.2682	.050					7.9800	.010
			4.5609	.098					5.7800	.049
			4.5182	.101					5.6600	.051
									4.5600	.100
									4.5000	.102
5	4	3	7.4449	.010						
			7.3949	.011						
			5.6564	.049						
			5.6308	.050						

ლიტერატურა

1. ნ. ლაზრიევა, მ. მანია, გ. მარი, ა. მოსიძე, ა. ტორონჯაძე, თ. ტორონჯაძე, თ. შერვაშიძე. ალბათობის თეორია და მათემატიკური სტატისტიკა ეკონომისტებისათვის. ფონდი «ევრაზია», თბილისი, 2000. 661 გვ.
2. ჰარალდ კისი. სტატისტიკა სოციალურ მეცნიერებებში. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 2008. 532 გვ.
3. ო. ფურთუხია. აღწერითი სტატისტიკა, ალბათობა, სტატისტიკური დასკვნების თეორია. თბილისი, 2008. 418 გვ. .
4. ო. ფურთუხია. ალბათობა და სტატისტიკა მაგალითებსა და ამოცანებში. თბილისი, 2009. 268 გვ.
5. ო. ფურთუხია, ზ. ციგროშვილი, ქ. მანჯგალაძე. უმაღლესი მათემატიკა, ნაწილი III, ალბათობა და მათემატიკური სტატისტიკა. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, 2009. 251 გვ.
6. ო. ფურთუხია. ალბათურ-სტატისტიკური ამოცანები. თსუ გამომცემლობა, თბილისი, მეორე გამოცემა, 2013. 562 გვ.
7. კეკელია ნორა, სოხაძე გრიგოლი, ფაცაცია მზევინარი. მათემატიკის ელემენტები (რიცხვითი სისტემები, ფუნქციები, ალბათობა). თბილისი, 2014, 334 გვ.
8. Denis Anthony. Statistics for Health, Life and Social Sciences. Free eBook. Bookboon.com. 2011. 292 p.
9. Dato N. M. de Gruijter, Leo J. Th. Van der Kamp. Statistical Test Theory for the Behavioral Sciences. Chapman&Hall/CRC. 2008. 282 p.
10. Mark S. Handcock, Martina Morris. Relative Distribution Methods in the Social Sciences. Springer. 1999. 280 p.
11. David A. Kenny. Statistics for the Social and Behavioral Sciences. Library of Congress Cataloging-in-Publication Data. 1987. 434 p.
12. James Stevens. Applied Multivariate Statistics for the Social Sciences. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. 2002. 699 p.
13. Артемиева Е. Ю. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. Изд-во МГУ. 1969. 92 стр.
14. Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов. ФИЗМАТЛИТ. Москва, 2004. 464 стр.
15. Крамер Д. Математическая обработка данных в социальных науках. Современные методы. Издательский центр «Академия», Москва. 2007. 288 стр.
16. Мацеевский С. В. Высшая математика для гуманитариев. Изд-во Российского государственного университета им И. Канта. Москва. 2010. 299 с.
17. Наследов А. Д. Математические методы психологического исследования. Анализ и интерпретация данных. Изд-во «Речь», Санкт-Петербург. 2004. 388 стр.
18. Рамси Д. Статистика для «Чайников». Изд-во «Диалектика», Москва – Санкт-Петербург - Киев. 2008. 316 стр.
19. Ростовцев П. С., Ковалева Г. Д., Нуртдинов А. Н. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике для социологов. Изд-во Новосибирского государственного университета, Новосибирск. 2004. 95 стр.

საბნობრივი საძიებელი

სტატისტიკური მეთოდოლოგია. სტატისტიკური მეთოდების დანიშნულება. აღწერა და დასკვნა. პოპულაცია და შერჩევა. დასკვნითი სტატისტიკური მეთოდები. პარამეტრები და სტატისტიკა. პოპულაციის განსაზღვრა. კომპიუტერის როლი სტატისტიკაში. რატომ არის საჭირო სტატისტიკა. შეჯამება. კითხვები. ცვლადები და მათი გაზომვა. ცვლადი. თვისებრივი და რაოდენობრივი მონაცემები. ინტერვალების სკალა. რიგის სკალა. რიგის სკალის მონაცემთა რაოდენობრივი ბუნება. სტატისტიკური მეთოდები და გაზომვის ტიპი. დისკრეტული და უწყვეტი ცვლადები. შერჩევის სახეობები. შერჩევის შეცდომა. მარტივი შემთხვევითი შერჩევა. ალბათური და არაალბათური შერჩევა. ცდომილება. საიმედოობა. შეჯამება. კითხვები. რაოდენობრივი მონაცემების სიხშირეთა განაწილება და მისი გრაფიკული წარმოდგენა. სიხშირეთა განაწილება. სიხშირეთა განაწილების გრაფიკულად გამოსახვა. ჰისტოგრამები. სიხშირეთა პოლიგონი. თვისობრივი მონაცემების სიხშირეთა განაწილება. სვეტოვანი და წრიული დიაგრამები. ფოთლებიანი ლეროების მსგავსი დიაგრამები. პოპულაციის და შერჩევის განაწილება. შეჯამება. კითხვები. აღწერითი სტატისტიკები. პარამეტრები. სტატისტიკები. საშუალო. დამრგვალების ზოგადი წესი. საშუალოს დამრგვალების წესი. საშუალოს შეფასება. საშუალოს თვისებები. მედიანა. მედიანის შეფასება. მედიანის თვისები. მოდა. მოდალური ინტერვალი. შეჯამება. კითხვები. გაბნევის დიაპაზონი. პროცენტული. კვარტილები. კვარტილთშორისი გაბნევის დიაპაზონი. რანგები და პროცენტული რანგები. დისპერსია და სტანდარტული გადახრა. შერჩევითი დისერსია. შესწორებულ შერჩევით დისპერსია. სტანდარტული გადახრა. შესწორებული სტანდარტული გადახრა. ვარიაციის კოეფიციენტი. ემპირიული წესი. ჩებიშევის თეორემა. ბოქსპლოტი. შეჯამება. კითხვები. დამოუკიდებელი სიდიდე. დამოკიდებული სიდიდე. გაბნევის დიაგრამა. მისადაგების წირი. რეგრესიული ანალიზი. უმცირეს კვადრატთა მეთოდი. კორელაციის კოეფიციენტი. კოვარიაციის კოეფიციენტი. სპირმენის რანობრივი კორელაციის კოეფიციენტი. რეგრესიის წრფე. წინასწარმეტყველება (პროგნოზირება). დეტერმინაციის კოეფიციენტი. შეჯამება. კითხვები. რა არის ალბათობა? ალბათობის თვისებები. დენდროგრამა (ხისებრი დიაგრამა). შემთხვევითი სიდიდეები და მათი განაწილებები. განაწილების კანონი. ჯამის ალბათობის ფორმულა. პირობითი ალბათობა. ნამრავლის ალბათობის ფორმულა. სრული ალბათობის ფორმულით. ბაიესის ფორმულა. შეჯამება. კითხვები. ბინომური განაწილება. ბინომური განაწილების თვისებები. ბინომური ალბათობების გამოთვლა. ბერნულის ფორმულა. უალბათესი რიკები. ბინომური შემთხვევითი სიდიდის საშუალო და დისპერსია. ნორმალური მიახლოება. პუასონის მიახლოება. ფარდობითი სიხშირეები. შერჩევის ფარდობითი სიხშირის საშუალო და დისპერსია. შეჯამება. კითხვები. ნორმალური განაწილების თვისებები. სტანდარტული ნორმალური განაწილების ცხრილის გამოყენება. Z სიდიდე. მოცემული ალბათობით Z სიდიდის პოვნა. სტანდარტული ნორმალური განაწილების წირის ქვეშ მდებარე არის ფართობის მოსაძებნი პროცენტული ცხრილი. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა (ცზთ). რამდენად დიდი უნდა იყოს შერჩევის მოცულობა n , რომ სრულდებოდეს ცზთ? შერჩევითი განაწილებები. ბინომური განაწილების ნორმალური აპროქსიმაცია. ცენტრალური ზღვარითი თეორემა და სიხშირეები. p - სიდიდეები. შეჯამება. კითხვები. ნდობის ინტერვალი პოპულაციის საშუალოსთვის. ჰიპოთეზათა შემოწმება საშუალოსთვის. ჰიპოთეზების ფორმულირება. კრიტერიუმის სტატისტიკის მნიშვნელობის გამოთვლა. უარყოფის არის დადგენა. კრიტერიუმის მნიშვნელოვნება დონე. გადაწყვეტილების მიღება. p - სიდიდეების გამოყენება ჰიპოთეზათა შემოწმებაში. პირველი და მეორე გვარის შეცდომები სტატისტიკური კრიტერიუმების გამოყენებისას. ჰიპოთეზათა შემოწმება ნორმალური პოპულაციის საშუალოსათვის ($n < 30$). ნდობის ინტერვალი დისპერსიისათვის. ჰიპოთეზათა შემოწმება (პოპულაცია ნორმალურია, $n < 30$). ჰიპოთეზათა შემოწმება პოპულაციის პროპორციისათვის ($n \geq 30$). ჰიპოთეზათა შემოწმება პოპულაციის პროპორციისათვის, როცა შერჩევის მოცულობა პატარაა. სასრული პოპულაციები. ცდომილება, სიზუსტე და შერჩევის მოცულობა. ჰიპოთეზათა შემოწმება დისპერსიისათვის. შეჯამება. კითხვები. საშუალოთა შორის განსხვავების ჰიპოთეზის შემოწმება დიდი მოცულობის მქონე შერჩევებისას. ჰიპოთეზათა შემოწმება $\mu_1 - \mu_2$ -ის შესახებ. ორი დამოუკიდებელი პოპულაციის საშუალოთა შორის განსხვავების ჰიპოთეზათა შემოწმება (ორივე, ან ერთ-ერთი შერჩევის მოცულობა ნაკლებია 30-ზე). $\mu_1 - \mu_2$ -ის ნდობის ინტერვალი მცირე მოცულობის შერჩევებისათვის. ჰიპოთეზათა შემოწმება ორი დამოუკიდებელი ნორმალური პოპულაციის დისპერსიების შესახებ. ჰიპოთეზათა შემოწმება დაწყვილებულ მონაცემთა საშუალოების სხვაობებისათვის. ორამოკრფიანი ამოცანები ორი ალბათობის შედარებისას. ტესტი პროპორციათა სხვაობისთვის. შეჯამება. კითხვები. ერთფაქტორიანი დისპერსიული ანალიზი ცდის პირთა შორის სქემისათვის (ჰიპოთეზები). ცდის პირთა შიდა ორფაქტორიანი სქემა და დისპერსიული ანალიზი. ცდის პირთა შორის ორფაქტორიანი სქემა და დისპერსიული ანალიზი. შეჯამება. კითხვები. ზი-კვადრატ (χ^2) თანხმობის კრიტერიუმი. დამოუკიდებლობის ზი-კვადრატ კრიტერიუმი. ჰიპოთეზები. ჰიპოთეზათა შემოწმება 2×2 შეუღლების ცხრილის შემთხვევაში. შანსების შეფარდება. შანსების შეფარდების თვისებები 2×2 შეუღლების ცხრილებისათვის. მან-უიტნის კრიტერიუმი. უილკოქსონის ნიშნის რანგების კრიტერიუმი. კრუსკალ-უოლისის კრიტერიუმი. შეჯამება. კითხვები. დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ. ჰიპოთეზის შემოწმება დახრილობის შესახებ. ჰიპოთეზის შემოწმება თანაკვეთის შესახებ. დასკვნები კორელაციის კოეფიციენტის შესახებ. საპროგნოზო ინტერვალები. დეტერმინაციის კოეფიციენტი. მოდელის ვარგისიანობის შემოწმება. R^2 -ის თვისებები. რეგრესიული ანალიზი მრუდწირული (არანრფივი) კავშირისთვის. მრავლობითი რეგრესია და კორელაცია. კორელაციური მატრიცა. ფიქტიური ცვლადები რეგრესიულ ანალიზში. შეჯამება. კითხვები EXCEL-ის სტატისტიკური ფუნქციების აღწერა სტატისტიკური ცხრილები