Les fonctions de Bessel

En analyse, les fonctions de Bessel, découvertes par le mathématicien suisse Daniel Bernoulli, portent le nom du mathématicien allemand Bessel qui développa l'analyse de ces fonctions pour l'étude du mouvement des planètes induit par l'interaction gravitationnelle.

Ces fonctions sont des solutions canoniques y(x) de l'équation différentielle de Bessel :

$$x^2 \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \alpha^2) y = 0$$

Pour tout nombre réel ou complexe a. Le plus souvent, a est un entier naturel on appel a ordre de la fonction.

Il existe deux sortes de fonctions de Bessel :

Les fonctions de Bessel de première espèce Jn, solutions de l'équation différentielle ci-dessus qui sont définies en 0 avec :

$$J_a(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+a+1)} (x/2)^{2k+a}$$

Où Γ(z) est la fonction gamma, généralisant la fonction factorielle à des valeurs non entières definie par :

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \quad \mathrm{dt}$$

Cette intégrale impropre converge absolument sur le demi-plan complexe où la partie réelle est strictement positive, et avec une intégration par parties on peut montrer que :

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z)$$

Dans le cas où z est un entier naturel, il est clair que : Γ(z) = (z-1) !

La fonction $J_a(x)$, pour une valeur entière de a est une série entière convergente de rayon de convergence infini.

En effet, le rayon de convergence R est défini par la relation suivante : $\frac{1}{R} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$.

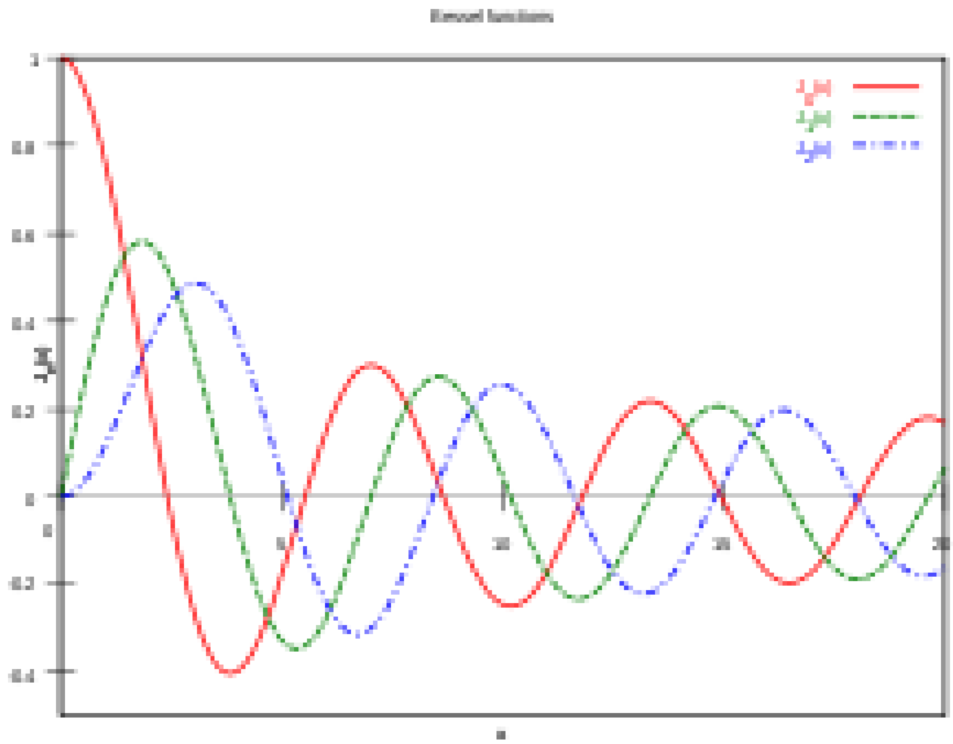
Les fonctions de Bessel de seconde espèce Yn, solutions qui ne sont pas définies en 0 mais qui ont une limite infinie en 0.

$$Y_n(x) = \lim_{a \to n} \frac{J_a(x)\cos(a\pi) - J_{-a}(x)}{\sin(a\pi)}$$

Avec :

$$J_{-a}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k-a+1)} (x/2)^{2k-a}$$

Les représentations graphiques des fonctions de Bessel ressemblent à celles des fonctions sinus ou cosinus, mais s'amortissent comme s'il s'agissait de fonctions sinus ou cosinus divisées par un terme de la forme √x.



En rouge, $J_0(x)$ en vert, $J_1(x)$ en bleu, $j_2(x)$

Les fonctions de Bessel jouent un rôle important en physique mathématique, où elles interviennent dans des problèmes de conduction de la chaleur, d'électromagnétisme et de diffraction.

Elles possèdent certaines analogies avec les fonctions trigonométriques, comme leur caractère oscillant.

Pour les valeurs entières de a, les fonctions de Bessel peuvent être représentées par des intégrales :

$$J_a(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(aT - x\sin(T))\,dT$$

Cette définition peut s'étendre au cas α non entier pour Re(x) > 0, en ajoutant un autre terme :

$$J_a(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(aT - x\sin(T))\,dT \quad - \quad \frac{\sin(ax)}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\sinh(t)-at} \quad dt$$

Voici 2 propriétés des $J_n(x)$:

$$J_{n+1}(x) = \frac{nJ_n(x)}{x} - J'_n(x)$$

$$J_{n+1}(x) = J_{n-1}(x) - 2J'_n(x)$$

De plus, pour a,b distincts, on a que $xJ_n(ax)\ et\ J_n(bx)$ sont deux polynômes orthogonaux.

En effet, nous avons l'égalité suivante : $\int_0^1 xJ_n(ax)J_n(bx)$ = 0

Deux fonctions sont orthogonales entre elles si leur produit scalaire est égal à zéro. Or, un produit scalaire est une application bilinéaire, symétrique, définie et positive.

Donc, l'intégrale précédente est un produit scalaire.

Notant L_k le *k*-ème polynôme de Laguerre les fonctions de Bessel peuvent être exprimées ainsi:

$$\frac{J_\alpha(x)}{\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha} = \frac{e^{-t}}{\alpha!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{L_k^{(\alpha)}\left(\frac{x^2}{4t}\right)}{\binom{k+\alpha}{k}}\frac{t^k}{k!},$$

où l'expression de droite ne dépend pas de *t* et demande, pour être généralisée au cas α non entier, l'utilisation de dérivées fractionnaires.

Les polynômes de Laguerre sont les solutions de l'équation de Laguerre :

$$x\,y'' + (1-x)\,y' + n\,y = 0$$

qui est une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a des solutions non singulières seulement si *n* est un entier positif.

Ces polynômes, traditionnellement notés L_0, L_1, ... forment une suite de polynômes qui peut être définie par la formule suivante :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x}x^n\right).$$

ce polynôme se calcule grâce a la formule de Leibnitz qui permet d'exprimer la dérivée n-ème du produit de deux polynômes.