TP2
Intégration numérique

3 octobre 2017

Dans ce TP, on va apprendre quelques méthodes numériques pour calculer, approximativement, l'intégrale d'une fonction sur un intervalle compact (borné, fermé).

1. Création d'une fonction simple et représentation graphique.
   (a) Ecrire la fonction $f(x) = 1 - x^2$ sous forme d'une fonction python.
   (b) Représentation graphique sur l'intervalle $[0, 1]$.
   (c) Calculer, à la main, l'intégrale I de cette fonction sur l'intervalle donné.
2. Calcul approché de I au moyen de la **méthode du point milieu**.
   (a) Représenter graphiquement f sur papier, repère orthonormé, unité = 8 cm.
   (b) On définit une subdivision régulière $x_0, \cdots, x_4$ de l'intervalle d'intégration $[0, 1]$ en $n = 4$ parts égales (on a donc $x_0 = 0, x_1 = 0.25, \cdots, x_4 = 1$. On note $c_1, \cdots, c_4$ les milieux de ces sous-intervalles. Pour chaque $k = 1, \cdots, 4$, dessiner le **rectangle** de base $[x_{k-1}, x_k]$ et de hauteur $f(c_k)$, et calculer sa surface s_k.
   (c) La méthode du point milieu consiste à prendre la somme $S_4 = \sum_{i=1}^{4} s_k$ comme approximation de I. Calculer l'erreur commise $|S_4 - I|$.
   (d) Importer le module `time`. Utiliser la fonction `clock()` du module `time` pour mesurer le temps de calcul de votre intégrale.
   (e) Recommencer les calculs précédents pour $n = 10^k$, k variant de 1 à 6, et remplir, manuellement, le tableau ci-dessous :

n	erreur	temps (sec.)
10		
100		
1000		
10000		
100000		
1000000		

   (f) En python, recréer automatiquement le tableau obtenu au moyen d'une boucle `for`. Utiliser les fonction `print` pour voir le tableau à l'écran et `write` pour écrire le tableau dans un fichier texte. Voir documentation à l'adresse `https://docs.python.org/3/tutorial/inputoutput.html`.
   Exemple de tableau produit automatiquement et envoyé à l'écran :

```
        n |   erreur    | temps (sec.)
---------------------------------------
       10 | 8.33333e-04 | 1.00000e-05
      100 | 8.33333e-06 | 4.10000e-05
     1000 | 8.33333e-08 | 3.99000e-04
    10000 | 8.33337e-10 | 3.96900e-03
   100000 | 8.33034e-12 | 4.01730e-02
  1000000 | 8.37108e-14 | 4.00492e-01
```

3. Dans la méthode du point milieu, on a approximé la fonction f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ par la fonction constante prenant la même valeur que f en c_k, où c_k est le milieu de $[x_{k-1}, x_k]$; dans la **méthode du trapèze**, on approxime f sur cet intervalle par la fonction affine prenant la même valeur que f en x_{k-1} et x_k.
   Refaire le même travail que précédemment avec la méthode du trapèze.
4. Dans la méthode du point milieu, on a approximé f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ par une fonction constante - polynôme de degré 0 ; dans la méthode du trapèze, on a approximé f sur cet intervalle par une fonction affine - polynôme de degré 1 ; dans la **méthode de Simpson**, on approxime f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ par le polynôme de degré 2 qui prend la même valeur que f en x_{k-1}, c_k et x_k.
   Refaire le même travail que précédemment avec la méthode de Simpson.