Projet:
Les polynômes de Tchebychev de première espèces

11 janvier 2018

Réalisé par RAHARIJAONA Dylan et KUCAM Delphine

Encadré par Jean-Paul Cardinal

On appelle *polynômes de Tchebychev de première espèce* la suite de polynômes (T_n) de R[X] définie par les relations : $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et pour tout n $\in$N, $T_{n+1} = 2XT_{n+1}$ - T_n

Pour tout n de N, T_n s'appelle le n-ième polynôme de Tchebychev. Par la suite, nous nous placons sur l'intervalle [-1,1]

Nous calculons les premiers polynômes de Tchebychev et nous obtenons :

$T_0 = 1$
$T_1 = X$
$T_2 = 2XT_1 - T_0 = 2X^2 - 1$
$T_3 = 2XT_2 - T_1 = 4X^3 - 3X$
$T_4 = 2XT_3 - T_2 = 8X^4 - 8X2^2 + 1$
$T_5 = 2XT_4 - T_3 = 16X^5 - 20X^3 + 5X$
$T_6 = 2XT_5 - T_4 = 32X^6 - 48X^4 + 18X^2 - 1$
$T_7 = 2XT_6 - T_5 = 64X^7 - 112X^5 + 56X^3 - 7X$

Nous avons codé sur Python le Polynôme de Tchebychev defini de manière explicite (pas de relation de recurrence) :

$$f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

```
def tchebychev(n, x):
        return np.sum([ (nCk(n, 2*k) * x ** (n - 2*k) * (x**2 -
1) ** k) for k in range(0,(n/2)+1) ])
```

Pour cela, nous avons d'abord codé une fonction permettant de retourner le résultat d'une combinaison binomiale

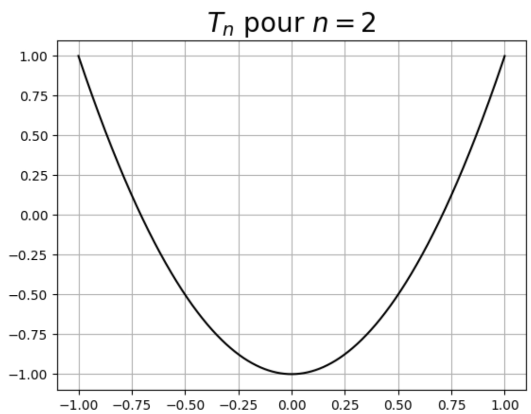
```
def nCk(n,k):
        return int( reduce(mul, (Fraction(n-i, i+1) for i in
range(k)), 1) )
```

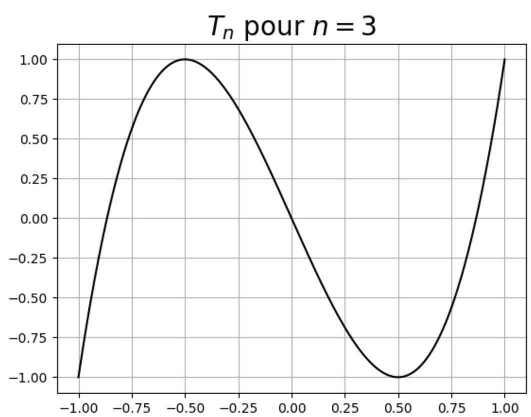
(reduce est une fonction sur python qui est l'équivalent de sum mais pour la multiplication)

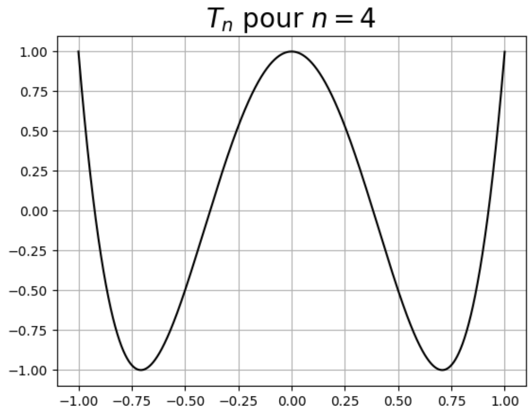
Puis, nous avons créer une fonction qui prend en argument n le dégré du polynôme et qui dessine le graphique de ce polynôme :

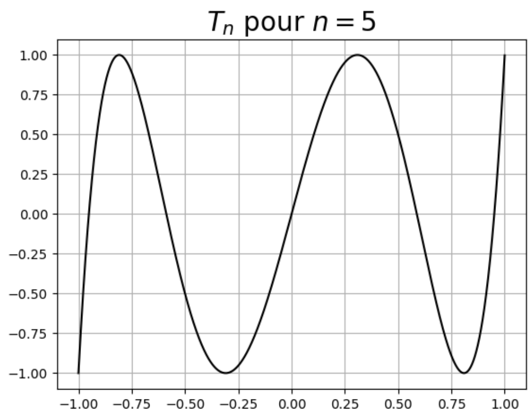
```
def drawTchebychev(n):
        T = [tchebychev(n,i) for i in t]
        plt.plot(t,T, "-", color='black')
        plt.title(u'$T_n$ pour $n='+str(n)+'$', fontsize=20)
        plt.grid(True)
        plt.show()
```

Voici le graphique de quelques polynômes de Tchebychev :









Comme nous pouvons le constater sur les graphiques, les polynômes de Tchebychev possèdent des propriétés particulières telles que :

- ils possèdent n racines (passe n fois par 0)

- T_n est de degré n

- son coefficient dominant est 2^{n-1}

- O n peut remarquer que, pour tout n, $\mathrm{T}_n(0)=$ 0 1 ou -1

- Une propriété très importante, il s'agit de l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad T_n\big(\cos(\alpha)\big) = \cos(n\alpha).$$