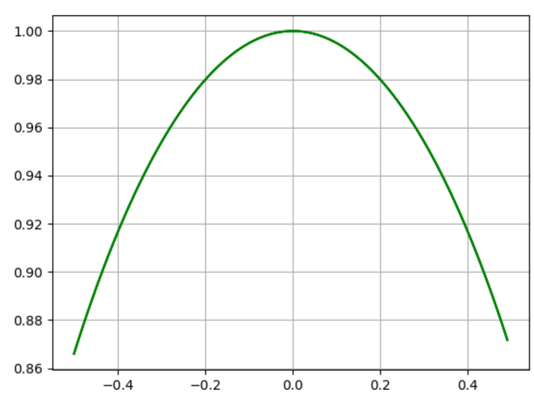
TP2
Intégration numérique

BRAHMI Kahina et HARDY Marion

November 23, 2017

Ce TP,illustre plusieurs méthodes pour calculer, approximativement, l'intégrale d'une fonction sur un intervalle borné et fermé.

1 EXERCICE : $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$



Nous avons commencé par définir la fonction $f(x)$ à l'aide de la fonction `sqrt()` du module `math`. Après avoir représenté graphiquement la fonction sur l'intervalle $[-0.5, 0.5]$ nous avons calculé l'integrale suivante à la main :

$$I = \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x$$

(voir annexe papier)

2 EXERCICE : méthode du point milieu

Calcul approché de I au moyen de la **méthode du point milieu**. Pour mieux se repérer, nous avons représenter graphiquement f sur papier. (voir annexe)

Ensuite, on va en premier temps définir une subdivision régulière $x0, x1, ..., x4$ de l'intervalle d'intégration $[0, 1]$ en n= 4 parts égales.

En deuxième temps on définit les milieux de ces sous-intervalles. Avec ces données on calcule la surface sk du rectanggle de base $[xk - 1, xk]$ et de hauteur $f(ck)$. On sait que la surface d'un rectangle est $S = b * h$ avec b la base et h la hauteur du rectangle.

La *méthode du point milieu* consiste à prendre la somme $S4 = \sum_{i=1}^{4}(s_k)$ comme approximation de I.

Par la suite, il a fallut calculer l'erreur entre l'intégrale et l'approximation qu'on en a faite. Pour cela, on a calculer la valeur absolue de $S4$ soutrait à l'intégrale I.

Nous avons également utiliser la fonction `clock()` du module `time` pour mesurer le temps de calcul de notre intégrale.

Puis nous avons eu à écrire la fonction *point milieu* qui utilise la *méthode du point milieu*. Pour pouvoir la tester par la suite avec $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, `a = -0.5`, `b = 0.5`, et `n` qui va de `10` à `1 000 000`. Et avoir la tableau suivant :

n	erreur	temps (sec.)
10	0.000480384	3.6e-05
100	4.811178e-06	0.000184
1000	4.81125e-08	0.001663
10000	4.8113e-10	0.01584
100000	4.81315e-12	0.161942
1000000	5.06262e-14	1.57448

3 EXERCICE : méthode du trapèze

Pour la *méthode du trapèze*, on approxime `f` sur l'intervalle $[xk - 1, xk]$ par la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que `f` en x_{k-1} et x_k.

On a essayé de calculer l'intégrale par la *méthode du trapèze*. Pour cela, on définit la fonction *trapeze* qui prend en arguments une fonction `f`, des bornes `a` et `b` et un entier `n` et qui renvoie l'intégrale approchée de `f` sur $[a, b]$ au moyen de la *méthode du trapèze*.

Puis on a testé la méthode de la même manière qu'avec la méthode du point milieu.

Avec les données acquises nous avons rempli le tableau ci-dessous:

n	erreur	temps (sec.)
10	0.000961402	2.1e-05
100	9062242e-06	7.8e-05
1000	9.6225e-08	0.00077
10000	9.6225e-10	0.007611
100000	9.63307e-12	0.076049
1000000	1.11022e-13	0.744644

4 EXERCICE : Méthode de Simpson

Pour la *méthode de Simpson*, on approxime `f` sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ par le polynôme de degré 2 qui prend les mêmes valeurs que `f` en x_{k-1}, c_k et x_k.
Nous avons définit la *fonction Simpson* à l'aide de nos camarades.

Puis nous avons testé notre programmme également de la même manière que les méthodes précédentes.
Avec ces données, nous avons rempli le tableau ci-dessous:

n	erreur	temps (sec.)
10	2.11626e-07	2.8e-05
100	2.13807e-11	0.000185
1000	1.33227e-15	0.002373
10000	6.76126e-14	0.02393
100000	6.27609e-13	0.239471
1000000	1.12086e-11	2.40692

5 EXERCICE : comparaison des trois méthodes précédentes

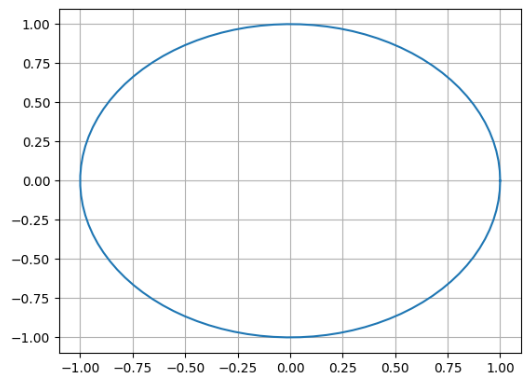
Les trois méthodes **point milieu, trapèze** et **simpson** nous permettent de calculer une approximation d'intégrale d'une fonction sur un intervalle.

Il y a en revanche quelques différences entre ces méthodes. Dans la *méthode du point milieu* on approxime `f` par la fonction constante , dans la *méthode du Trapèze* on approxime par la fonction affine et dans la *méthode de Simpson* on approxime par la fonction du polynôme de degré 2.

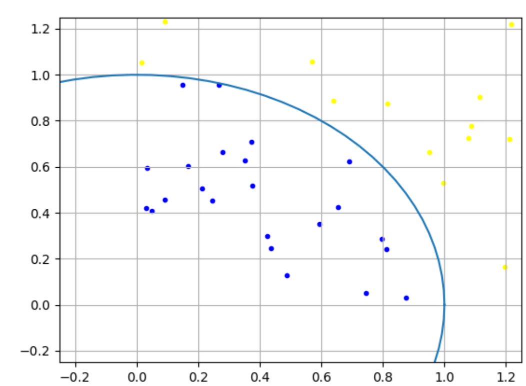
On remarque que l'erreur commise est différente pour chaque méthode. On voit que la *méthode de Simpson* est plus efficace que les deux autres méthodes. En effet les erreurs commises par la *méthode de Simpson* sont très inférieures à celles des deux autres méthodes.

6 EXERCICE : méthode de Monte-Carlo

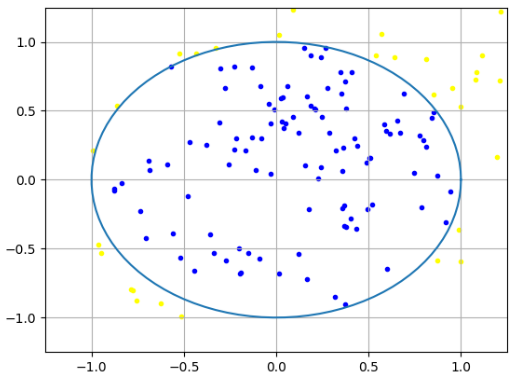
Nous avons eu du mal à dessiner le cercle unité ne sachant pas la fonction à utiliser sur Python, nous avons fait quelques recherches sur Internet puis la solution du problème a été trouvée. Le cercle tracé :



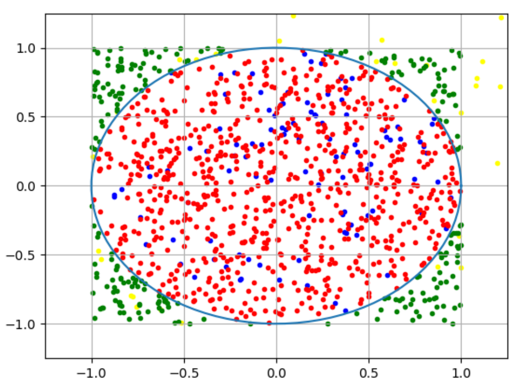
Grâce à la fonction *numpy.random.rand()*, nous avons généré quelques valeurs aléatoires représentées en `bleu` pour celles inférieures au disque unité et en `jaune` pour celles qui lui sont supérieures. Ces valeurs sont d'abord générées suivant la distribution de la loi uniforme sur $[0, 1]$. Ce qui nous donne le cercle suivant :



Puis suivant la distribution de la loi uniforme sur $[-1, 1]$:



Puis nous avons généré `1000` points qui suivent la distribution uniforme sur le carré $[-1,1]^2$ et nous avons fait apparaître les points inférieurs au disque unité en rouge et les points extérieurs au disque en vert :



Ensuite on a compté le nombre `I` de points intérieurs et le nombre `E` de points extérieurs.

On sait que la *méthode de Monte Carlo* consiste à prendre le rapport $\frac{I}{N}$ comme approximation de la surface `S` du disque. Ainsi nous avons calculé la valeur absolue du rapport $\frac{I}{N}$ soustrait à S pour savoir l'erreur commise par la fonction *Monte Carlo*. On a utilisé `clock()` pour mesurer le temps de calcul.

On a testé la fonction *Monte Carlo* avec $N = 10^k$, k variant de 1 à 6.

Monte Carlo est une fonction avec des valeurs aléatoire donc le tableau suivant change à chaque fois que le programme sera exécuté.

n	erreur	temps (sec.)
10	0.0975927	7.8e-05
100	0.0975927	0.000256
1000	0.0975927	0.002503
10000	0.0975927	0.02528
100000	0.0975927	0.246219
1000000	0.0975927	2.47361

Et enfin, nous avons défini une fonction *monte_carlo_2* pour le calcul du volume de la boule unité.