TP3
Equations différentielles

18 octobre 2017

Dans ce TP, on présente quelques méthodes pour intégrer numériquement sur un intervalle $t \in [0, T]$, une équation différentielle ordinaire - dite EDO - c'est-à-dire de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t))$$
$$u(0) = u_0$$

la fonction f et la valeur initiale u_0 sont donnés ; la fonction u est inconnue, c'est la solution cherchée.

1. Considérons l'EDO très simple
$$u'(t) = -u(t), \quad u(0) = 1.0$$
Le problème est ici de déterminer la solution u ; on prendra par exemple comme intervalle $t \in [0, 2]$.
   (a) Calculer à la main la solution u de l'EDO ci-dessus, et la dessiner sur papier.
   (b) Sur ordinateur, représenter graphiquement u à l'aide du module `matplotlib` ; on créera le vecteur d'abscisses au moyen de `numpy.linspace` et on sauvera la figure au format `png` dans le répertoire courant.
2. Calcul approché de u au moyen de la **méthode d'Euler**.
   (a) On divise l'intervalle $[0, T]$ (ici dans l'exemple,$T = 2.0$) en n parties égales, par exemple $n = 10$, puis on pose $h = T/n$, ce qui fournit une subdivision $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \cdots, t_n = T$. On va maintenant calculer, approximativement, la valeur de u aux points t_k de la subdivision.
      — $u(t_0)$ ne pose pas de problème car on connait la valeur exacte $u(t_0) = u_0$,

      — pour $u(t_1)$ on utilise l'approximation $u'(t_0) \approx \frac{u(t_1)-u(t_0)}{h}$, du fait que h est assez petit ; on a donc $\frac{u(t_1)-u(t_0)}{h} \approx u'(t_0) = -u(t_0)$, c'est-à-dire $u(t_1) \approx u(t_0) - hu(t_0) = (1-h)u_0$; on a donc trouvé une approximation de $u(t_1)$; posons $u_1 = (1-h)u_0$.
      — pour $u(t_1)$ on utilise l'approximation $u'(t_0) \approx \frac{u(t_1)-u(t_0)}{h}$, du fait que h est assez petit ; on a donc $\frac{u(t_1)-u(t_0)}{h} \approx u'(t_0) = -u(t_0)$, c'est-à-dire $u(t_1) \approx u(t_0) - hu(t_0) = (1-h)u_0$; on a donc trouvé une approximation de $u(t_1)$; posons $u_1 = (1-h)u_0$.