Compte rendu TP3
Equations différentielles

14 décembre 2017

1. (a) Dans cet exemple, la fonction f vaut -u.
   (b) En calculant à la main, on trouve que f(t) vaut exp(-t). En effet, si u' = -u, alors, u(t)'/u(t) = -1, en primitivant les deux expressions, on trouve : ln(u(t)) = -t. Ainsi, en appliquant l'exponentiel de chaque coté, on a : u(t) = exp(-t)
   (c) Pour exprimer et tracer la fonction exp(-t), on code le programme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import scipy as sp


def f(x):
    return sp.e**-x

x = np.arange(0, 2, 0.1)
plt.plot(x, f(x),'r-')
plt.grid('on')
plt.axis('equal')
plt.show()
```

2. La méthode d'Euler permet d'approximer la solution d'une equation diférentielle ordinaire. On calcule une suite d'approximations à l'aide de la formule $u_{k+1} = u_k + hf(t_k, u_k)$
   Avec sur un intervalle [0,T], h = T/n

   Calculons les n+1 termes de la suite (u_k) On défini les fonctions f(t,u) et u(x) :

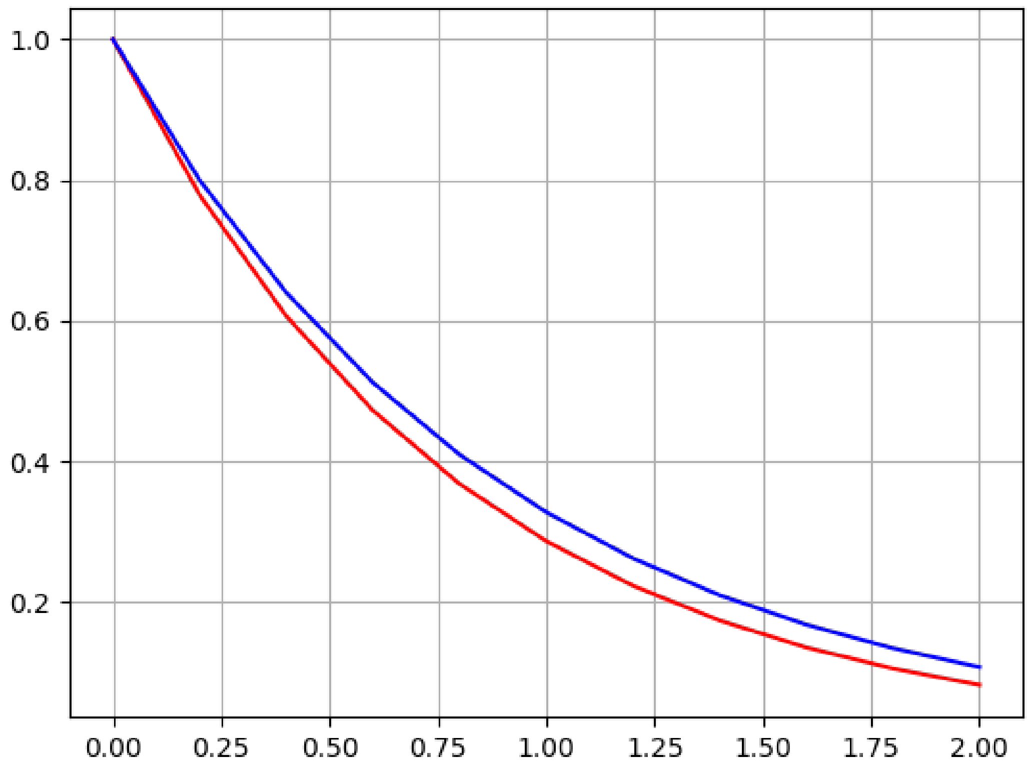
```
def f(t,u):
        return -u

def u(x):
        return exp(-x)
```

On défini des listes, qu'on utilisera plus tard pour tracer les graphes ;
X est la liste contenant les t_k pour k allant de 0 à n
U est la liste contenant les n+1 premiers termes de la suite (u_k)
Y contient les images par la fonction u(x) = exp(-x)
On a :

```
T = 2.0
n=10
h = float (T)/n
X,U = [] ,[]
u0=1
x0=0

ui=u0
xi=x0

X.append(x0)
U.append(u0)

for i in range (0,n):
        xi = xi + h
        ui = ui + h*f(xi,ui)
        X.append(xi)
        U.append(ui)
print(X)
print(U)
```

Les n + 1 premiers termes de la suite (u_k) sont avec ce code
U = [1, 0.8, 0.64, 0.512, 0.4096, 0.32768, 0.26214400000000004, 0.20971520000000005, 0.16777216000000003, 0.13421772800000004, 0.10737418240000003]On trace avec matplotlib la solution exacte u et les points (t_k,u_k)

(a)



(a) On définit la fonction euler :

```
def euler(f,u0,T,n):


  h = float (T)/n
  tt,uu = [],[]
  x0=0

  ui=u0
  xi=x0

  tt.append(x0)
  uu.append(u0)

  for i in range (x0,n):
        xi = xi + h
        ui = ui + h*f(xi,ui)
```

```
        tt.append(xi)
        uu.append(ui)

    return tt,uu
```

ce programme prend en paramètre une fonction puis, elle liste les n+1 premiers termes qui sont solutions de l'équation différentielle en x = k* T/n avec k allant de 0 à n.

(a)

(b) Voici le programme permettant d'écrire la fonction de l'exemple 2 puis, d'appliquer la fonction euler :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from numpy import *
from math import *
from pylab import *
from methods import euler


def u(t,u):
        return exp(-t)

X,Y = [] ,[]
X,Y = euler(u,1,2,10)

print X,Y
```

(c) résolution des EDO à la main en pièce jointe(1) Nous avons essayé de résoudre la 3e EDO à la main pour être sûr qu'elle était difficilement résolvable à la main u'(t) = u$^2(t) - t, u(0) = 1.0$ (voir pièce jointe 2)

3. (a) (voir pièce jointe 3)

(b) Avant de définir F, on définit un numpy array U, qui facilitera l'exécution de la fonction Euler qui prendra le numpy array en argument

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from math import *
from pylab import *

def U(u,v):
        return np.array([u,v])

def F(t,U):
        return np.array([U[1],-U[0]])
```

(c) Au lieu de modifier la fonction euler, on a crée une 2e fonction noté "Euler". La fonction a la même structure que euler mais admet quelques changements :

```
def Euler(F,U0,T,n):
        h = float (T)/n

        tt = np.linspace(0,T,n+1)
        suite = [U0]
        for i in range(0,n):
                U0 = U0 + h*F(h*i,U0)
                suite.append(U0)
        UU = np.asarray(suite)
        return tt,UU
```

La fonction np.linspace permet d'obtenir un tableau à une dimension allant d'une valeur de départ à une valeur de fin avec un nombre donné d'élément. La fonction remplace donc la boucle for et le "*tt.append*" présents dans l'autre fonction euler La fonction np.asarray permet de convertir la liste "suite" en array noté "UU"

(d) On essaie la fonction Euler pour $w = 1$ et $T = 4\pi$

```
N=1000

tt,UU = Euler(F,U(1,0),4*np.pi,N)
x = np.linspace(0, 4*np.pi,100)
y=np.cos(x)
print tt,UU
```

En essayant différentes valeurs de N, on remarque que plus le N est grand, plus Euler approche la fonction (voir pieces jointes) On trace ces graphes à l'aide des codes :

```
plt.title('u en fonction du temps')
plt.plot(x, y, color = 'green')
plt.scatter(tt, [UU[i][0] for i in range(N+1)], color='red', marker='.')
plt.show()

plt.title('v en fonction du temps')
plt.plot(x, y2, color = 'green')
plt.scatter(tt, [UU[j][1] for j in range(N+1)], color='red', marker='.')
plt.show()

plt.title('v en fonction de u')
plt.plot(x, y3, color = 'green')
plt.scatter(tt, [UU[j][1] for j in range(N+1)], color='red', marker='.')
plt.show()
```

y2 est la dérivé de y, y vaut $cos(x)$ donc y2 $= -sin(x)$ y3 est le résultat de v en fonction de u, on a défini u et v en fonction du temps, on défini donc y3 $= -sin(arccos(x)$ Le 3e graphe admet toutefois une erreur, la coubre verte s'arrête, elle n'est défini que sur une petite fenêtre. Nous n'avons pas compris d'où venait l'erreur