COMPTE-RENDU TP1

ISIK Umut,
NAIT-DAOUD Mohamed,
Université Paris 13,
L2-Mathématiques,
Maths AP,

5 octobre 2017

1 Introduction

En tant qu'étudiant en mathématiques nous allons être confronté, durant notre formation, à la résolution de problèmes à partir d'outils informatiques. Afin de nous familiariser avec ceux-ci on étudiera la résolution d'une fonction polynôme du second degré : $f(x) = x^2 - x - 1$.
Pour ce faire nous allons programmer différentes méthodes qui permettront d'approximer les racines de f.

2 Premiers pas en python

On a défini la fonction $f(x) = x^2 - x - 1$ en python, on a ensuite représenté graphiquement la fonction sur l'intervalle [-1,2]. Pour cela on a utilisé le module **matplotlib.pyplot**.
On observe la présence de deux racines : $x_1 = -0.6$ et $x_2 = 1.6$ On a eu aucunes difficultées pour la première question.

3 Méthode du point fixe

On a défini la fonction $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ en python.
Pour verifier que les points fixes de g sont les racines de f, il faut résoudre l'équation $g(x) = x$.
$g(x) = x \iff 1+\frac{1}{x} = x \iff x+1 = x^2 \iff x^2-x-1 = 0 \iff f(x) = 0$

On a aussi calculé les vingt-cinq premiers termes de la suite définie par :
$x_{n+1} = g(x_n)$ et $x_0 = 1.0$

x_1	2.0000000000	x_7	1.6190476190	x_{13}	1.6180371353	x_{19}	1.6180339985
x_2	1.5000000000	x_8	1.6176470588	x_{14}	1.6180327869	x_{20}	1.6180339850
x_3	1.6666666667	x_9	1.6181818182	x_{15}	1.6180344478	x_{21}	1.6180339902
x_4	1.6000000000	x_{10}	1.6179775281	x_{16}	1.6180338134	x_{22}	1.6180339882
x_5	1.6250000000	x_{11}	1.6180555556	x_{17}	1.6180340557	x_{23}	1.6180339890
x_6	1.6153846154	x_{12}	1.6180257511	x_{18}	1.6180339632	x_{24}	1.6180339887

On voit que la suite $x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers la racine positive de la fonction $f(x) = x^2 - x - 1$

En somme, on a observé que pour un x_0 positif ou négatif on obtient une approximation de la racine positive.
On remarque que lors de la construction d'une suite sur le graphique on obtient une suite qui converge vers la racine positive. En effet, lorsqu'on part d'un réel positif on obtient un colimaçon qui congerge vers la racine positive on dit que le point fixe positif est attractif. Lorsqu'on part d'un réel compris entre -1 et 0 on observe une suite qui ne converge pas vers la racine négative, le colimaçon grandit on dit que le point fixe négatif est repulsif. (cf. Annexe 1)

4 Méthode de Newton

On a défini la fonction $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ en python.
Pour verifier que les points fixes de g sont les racines de f, il faut résoudre l'équation $g(x) = x$.

$g(x) = x \iff x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x \iff \frac{f(x)}{f'(x)} = 0 \iff f(x) = 0$

Pour une valeur positif x_0 on trouve la racine positive et pour un valeur negatif de x_0 on trouve la racine négative.

5 Méthode de la sécante

On a eu quelques difficultés à coder cette fonction étant donné qu'on générait le terme suivant à partir des deux precedents. Il fallait donc, à chaque boucle, conserver les deux termes précédents sachant que le terme suivant d'un tour devient le précédent du tour suivant.
Concernant les observation, lorsque x_0 et x_1 sont positifs, on approxime la racine positive de f. Pour les valeurs negativess de x_0 et x_1 la racine approximée est la racine negative de f.

6 Méthode de dichotomie

La méthode de dichotomie permet d'encadrer la racine d'une fonction par deux réels.
La racine encadrée dépendra du signe des réels. Plutôt que de faire quatre test qui verifient le signe des images des réels on a décidé de mettre la condition :

if$(f(a) > 0$ and $f((a+b)/2) > 0)$ or $(f(a) < 0$ and $f((a+b)/2) < 0)$:

7 Vitesse de convergences de ces méthodes

Afin d'observer laquelle des méthodes utilisées est la plus rapide en calcul on a implémenté un compteur à chaque fonction qui nous donne le nombre d'iteration de la boucle.

	$\mathbf{10^{-3}}$	$\mathbf{10^{-6}}$	$\mathbf{10^{-9}}$	$\mathbf{10^{-12}}$	$\mathbf{10^{-15}}$
Point fixe	9	16	23	30	38
Newton	4	4	5	5	6
Sécante	4	5	6	6	7
Dichotomie	9	19	29	39	49

À partir du tableau ci-dessus, on remarque que la méthode de Newton et la méthode de la sécante sont celles qui convergent les plus rapidement.

8 Conclusion

Ce TP a permis de découvrir différentes méthodes d'approximation d'une racine carrée. Il nous a permis de nous familiariser avec le langage python et de ses fonctionnalités.