

TP4

Arithmétique

15 novembre 2017

1. Un nombre est-il premier ?

- (a) Chercher comment on obtient en python le quotient et le reste de la division euclidienne d'un entier par un autre entier.
- (b) Ecrire la définition d'un nombre premier.
- (c) Parmi les entiers suivants, dire lesquels sont premiers : 1001, 2017, 3001, 49999, 89999.
- (d) Ecrire une fonction python `is_prime` qui prend en argument un entier n et qui renvoie `true` si n est premier, `false` sinon.
- (e) Les nombres de Fermat F_n sont définis par $F_n = 2^{2^n} + 1$; les nombres F_0, F_1, \dots, F_5 sont ils premiers ?

2. Crible d'Erasthote, distribution des nombres premiers.

- (a) A l'aide du crible d'Erasthote, calculer la liste de tous les nombres premiers inférieurs à 200.
- (b) Ecrire une fonction python `primes` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la liste de tous les premiers inférieurs à n .
- (c) Calculer la liste de tous les premiers inférieurs à 1000 ; écrire cette liste dans un fichier `primes.txt`, dix nombres par ligne.
- (d) On note $\pi(n)$ le nombre d'entiers premiers inférieurs à n . Représenter graphiquement $\pi(n)$ en fonction de n pour n variant de 2 à 1000. Sur le même graphique, rajouter la fonction $\frac{n}{\log n}$. Qu'observe-t'on ? voir le théorème des nombres premiers.
- (e) Créer en python la table suivante, la remplir et l'écrire dans un fichier texte.

n	$\pi(n)$	$\frac{n}{\log n}$
10^1		
10^2		
10^3		
10^4		
10^5		
10^6		

3. Factorisation d'un entier en premiers.

- (a) Ecrire le théorème fondamental de l'arithmétique.
- (b) Calculer la décomposition en facteurs premiers de 924.
- (c) Ecrire une fonction python `factors` qui prend en arguments un entiers n et qui renvoie la liste, dans l'ordre croissant, des facteurs premiers de n , chaque facteur étant répété autant de fois que nécessaire. Ainsi, pour $n = 60$, on obtiendra `[2, 2, 3, 5]`.

4. pgcd de deux entiers, identité de Bézout, algorithme d'Euclide.

- (a) Ecrire la définition du pgcd de deux entiers.
- (b) En utilisant la décomposition en facteurs premiers, calculer le pgcd des deux nombres $a = 4864, b = 3458$.

- (c) Ecrire l'énoncé de l'identité de Bézout
- (d) A l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu, calculer d , le pgcd des deux nombres $a = 4864, b = 3458$, ainsi que les coefficients de Bézout x, y tels que $xa + yb = d$.
- (e) Ecrire une fonction python **euclide** qui prend en arguments deux entiers a, b et qui renvoie x, y, d , où d est le pgcd de a, b et x, y les coefficients de Bézout.