TP 3
Equations différentielles

SABABADY Kamala et SELVARAJAH Dinusan

December 13, 2017

1 Partie 1 : *EDO Simple*

Pour ce devoir on a pour objectif d'apprendre à intégrer numériquement sur un intervalle $t \in [0, T]$ une équation différentielle ordinaire notée EDO. Une équation différentielle ordinaire d'ordre u est une relation entre la variable réelle t , une fonction inconnue t $\mapsto u(t)$ et ses dérivées u',u",...,$u^{(n)}$ au point t définie sous la forme :

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

Soit l'exemple de l'EDO Simple ci-dessous :

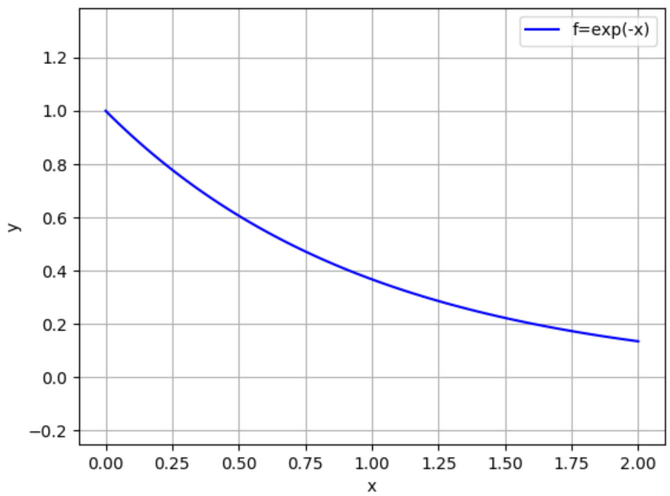
$$u'(t) = -u(t), \quad u(0) = 1.0 \tag{2}$$

Dans cet exemple la fonction f est définie par $f(t, u(t)) = -u(t)$

Calculons à la main la solution u de l'EDO :

on a $u'(t) + u(t) = 0$
donc $u(t) = (e^{-x})$

Nous avons représenter graphiquement u à l'aide du module *matplotlib*, nous avons créé le vecteur d'abscisses au moyen de *numpy.linspace* et nous l'avons sauvegardé au format *png* dans le répertoire courant.
Voici le graphique obtenue:



2 Partie 2 : *Méthode d'Euler*

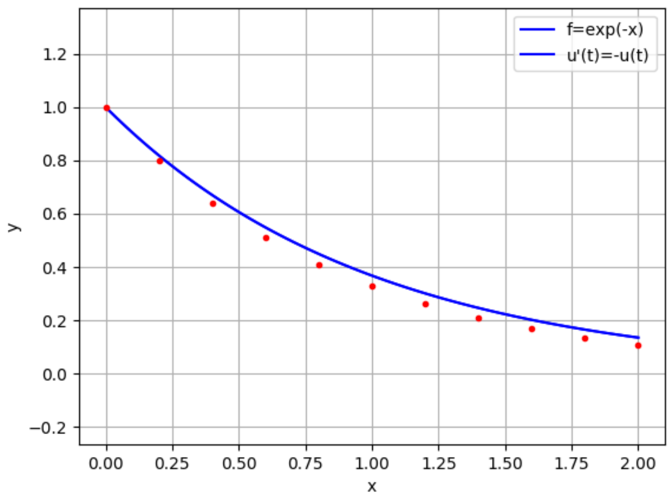
Dans cette partie, on va calculer u au moyen de la **méthode d'Euler**. En effet, on divise l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales, puis on pose $h = T/n$, ce qui fournit une subdivision $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \cdots, t_n = T$. A partir de là on peut calculer approximativement la valeur de u aux points t_k de la subdivision et on a trouvé une approximation u_{k+1} de la valeur exacte $u(t_{k+1})$:

$$u_{k+1} = u_k + hf(t_k, u_k) \tag{3}$$

Si l'on connaît la valeur de la condition initiale donnée par l'EDO , on peut calculer la suite d'approximations u_k par récurrence avec cette formule ci-dessus.

Afin de calculer les n+1 premiers termes de la suite u_k, définie par la méthode d'Euler, pour l'exemple de l'EDO Simple (2), avec $T = 2.0$ et $n = 10$, nous avons utilisé la formule ci-dessus avec une boucle **for** sur python.

Puis nous avons représenté le graphique numériquement la solution exacte u et les points (t_k, u_k) , voici le graphique obtenue :



3 Partie 3 : *Fonction Euler Sur Python*

Nous avons définie la fonction *Euler* sur python qui prend en arguments une fonction f (de deux variables scalaires) t, u, une valeur initiale u_0, un réel T, un entier n, et qui renvoie deux *numpy arrays*: *tt* de taille $n+1$, contenant les valeurs t_k et *uu* de taille $n+1$, contenant les valeurs u_k obtenues par la méthode d'Euler.

4 Partie 4 : *EDO dans Python*

Tout d'abord nous avons définie la fonction f de l'exemple (2) sous la forme de python. Puis nous avons appliqué la fonction *euler* à cet exemple et nous avons retrouvé les résultats précedents.
Enfin, nous avons testé notre fonction avec :

- $u'(t) = -u(t) + t, u(0) = 1.0$

- $u'(t) = u^2(t), u(0) = 1.0$

- $u'(t) = u^2(t) - t, u(0) = 1.0$

Calculons à la main les équation différentielle ci-dessus:

1. $u'(t) = -u(t) + t, u(0) = 1.0$

   - On cherche une solution homogène de cette équation:
     $$u'(t) + u(t) = 0$$
     on trouve donc $u(t) = vect(e^{-t})$.
   - On cherche une solution particulier sous la forme $c(t)e^{-t}$:
     Pour cela, on pose $u(t) = c(t)e^{-t}$ et on replace dans l'équation (1).
     On a alors :
     $$(c(t)e^{-t})' + c(t)e^{-t} = t$$
     $$<=> c'(t)e^{-t} - c(t)e^{-t} + c(t)e^{-t} = t$$
     $$<=> c'(t) = te^{t}$$
     On cherche une primitive de $c'(t)$:
     $$\int te^t \,\mathrm{d}t = -\int e^t \,\mathrm{d}t + [te^t]$$
     $$\int te^t \,\mathrm{d}t = -e^t + te^t$$
     Donc la solution particulière : $(-e^t + te^t)e^{-t} = t - 1$

   Donc la soulution générale est sous la forme $u(t) = ae^{-t} + t - 1$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   On peut trouver a avec la condition initiale: ici on a $u(0) = 1.0$. Donc $u(0) = a - 1 = 1 \rightarrow a = 2$
   Finalement, on a $u(t) = 2e^{-t} + t - 1$

2. $u'(t) = u^2(t), u(0) = 1.0$ On a
   $$u'(t) - u^2(t) = 0$$
   donc on cherche seulement la solution homogène de cette équation. Donc la soulution générale est sous la forme $u(t) = 1/(-t + a)$ avec $a \in \mathbb{C}$.
   On peut trouver a avec la condition initiale: ici on a $u(0) = 1.0$. Donc $u(0) = 1/a = 1 \rightarrow a = 1$
   Finalement, on a $u(t) = \frac{1}{1-t}$

Mais l'équation différentielle $u'(t) = u^2(t) - t, u(0) = 1.0$ ne peut pas être intégrées à la main.

5 Partie 5 : *Intégration d'une EDO d'ordre supérieur*

Dans cette partie, nous allons intégrer une EDO d'ordre supérieur. Prenons l'exemple:

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \tag{4}$$

où ω, u_0, v_0 sont des scalaires donnés; ω s'appelle la pulsation, u_0 la position initiale, v_0 la vitesse initiale. Posons ensuite $v = u'$ et écrivons l'EDO sous la forme $u'(t) = v(t)$ et
$v'(t) = -\omega^2 u(t)$

Calculons à la main la solution exacte de l'EDO (4):

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0$$

Cette équation admet pour équation caractéristique associée $r^2 + 1 = 0$ dont les racines sont i et $-i$. Les solution réelles de cette équation sont donc les fonctions de la forme t $\mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$.
Donc les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$$

avec $A, B \in \mathbb{C}$.
La condition $u(0) = u_0$, entraîne $A = u_0$.
La condition $u'(0) = v_0$ entraîne $B = v_0$.
Donc les solution sont

$$t \mapsto u_0 \cos(x) + v_0 \sin(x).$$

Nous avons définit la fonction F de l'EDO (4) dans une fonction python F en choisisons $\omega = 1.0$. F prend en arguments un flottant t et un *numpy atrays* U de taille 2.

Puis nous avons modifié la fonction *euler* avec l'aide du prof pour qu'elle prenne quatre arguments : une fonction python F- elle même prenant deux arguments `t` flottant et `U` numpy array de taille 2 -, une valeur initiale `U0` numpy array, un flottant `T` et un entier `n`; `euler` renverra deux `numpy arrays` : `tt` de taille $n+1$, contenant les valeurs `tk`, et `UU` de taille $2 \times (n+1)$, contenant les valeurs `Uk` obtenues par la méthode d'Euler.

Ensuite, nous avons résolue numérique ment l'EDO(4) pour cela, nous avons testé notre fonction avec $\omega = 1.0, T = 4\pi$ et les conditions initiales $u(0) = 1.0, \quad u'(0) = 0.0$. nous avons essayé avec les différentes valeurs de n.

Et enfin, nous avons représenté la solution exacte et la solution approchée donné par la méthode d'euler. En effet, on a d'abord représenté la position u

en fonction du temps t puis la vitesse v en fonction du temps t et la vitesse v en fonction de position u.

Voici les graphique obtenue: