

# TP3

## Equations différentielles

26 octobre 2017

Dans ce TP, on présente quelques méthodes pour intégrer numériquement sur un intervalle  $t \in [0, T]$ , une équation différentielle ordinaire - dite EDO - c'est-à-dire de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0 \quad (1)$$

La fonction  $f$ , qui prend en argument un couple de réels et qui renvoie un réel, ainsi que la valeur initiale  $u_0$  sont donnés; la fonction  $u$ , qui prend un réel en argument et qui renvoie un réel, est inconnue; c'est la solution cherchée.

1. Exemple : considérons l'EDO très simple

$$u'(t) = -u(t), \quad u(0) = 1.0 \quad (2)$$

Le problème est ici de déterminer la solution  $u$ .

- (a) Que vaut la fonction  $f$  dans cet exemple
  - (b) Calculer à la main la solution  $u$  de l'EDO ci-dessus, et la dessiner sur papier; on prendra comme intervalle  $t \in [0, 2]$ .
  - (c) Sur ordinateur, représenter graphiquement  $u$  à l'aide du module `matplotlib`; on créera le vecteur d'abscisses au moyen de `numpy.linspace` et on sauvera la figure au format `png` dans le répertoire courant.
2. Calcul approché de  $u$  au moyen de la **méthode d'Euler**.

On divise l'intervalle  $[0, T]$  en  $n$  parties égales, puis on pose  $h = T/n$ , ce qui fournit une subdivision  $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = T$ . A partir de là veut calculer, approximativement, la valeur de  $u$  aux points  $t_k$  de la subdivision. Voici l'idée :

Supposons que l'on connaisse, pour un indice  $k$ , une approximation  $u_k$  de la valeur exacte  $u(t_k)$ ; comment alors calculer une approximation  $u_{k+1}$  de la valeur exacte  $u(t_{k+1})$ ? Réponse :

On écrit  $u'(t_k) \approx \frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h}$ , approximation d'autant meilleure que  $h$  est petit;

on a donc  $\frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h} \approx u'(t_k) = f(t_k, u(t_k))$ , puis  $u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + hf(t_k, u(t_k))$

et enfin  $u(t_{k+1}) \approx u_k + hf(t_k, u_k)$ . On a donc trouvé une approximation  $u_{k+1}$  de la valeur exacte  $u(t_{k+1})$ , à savoir

$$u_{k+1} = u_k + hf(t_k, u_k) \quad (3)$$

Cette formule permet, par récurrence, de calculer une suite d'approximations  $u_k$ , à condition que l'on connaisse une première approximation  $u_0$  de  $u(t_0)$ ; mais pour  $u_0$  on peut bien sûr prendre la valeur de la condition initiale donnée par l'EDO.

- (a) Calculer la suite  $u_k$ , définie par la méthode d'Euler, pour l'exemple (2); on prendra  $T = 2.0$  et  $n = 10$ .
- (b) Représenter sur le même graphique la solution exacte  $u$  et les points  $(t_k, u_k)$ ; faire le travail sur papier et numériquement à l'aide de `matplotlib`.

3. Ecrire une fonction python `euler` qui prend en arguments une fonction python  $f$  de deux variables scalaires  $t, u$ , une valeur initiale  $u_0$ , un réel  $T$ , un entier  $n$ , et qui renvoie deux `numpy arrays`,  $tt$  contenant les valeurs  $t_k$  et  $uu$  contenant les valeurs  $u_k$ , obtenues par la méthode d'Euler.
4. (a) Ecrire la fonction  $f$  de l'EDO - fonction de deux variables  $t, u$  - dans une fonction python.  
 (b) Appliquer la fonction `euler` à l'exemple (2) et retrouver les résultats précédents.  
 (c) Examiner les EDOs suivantes (attention, certaines équations peuvent être facilement intégrées à la main, d'autres non).

$$\begin{array}{ll} u'(t) = -u(t) + t, & u(0) = 1.0 \\ u'(t) = u^2(t), & u(0) = 1.0 \\ u'(t) = u^2(t) - t, & u(0) = 1.0 \end{array}$$

5. Nous montrons maintenant comment intégrer une EDO d'ordre supérieur. Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique (modélisation du ressort) qui est une EDO d'ordre 2

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, \quad u'(0) = v_0 \quad (4)$$

où  $\omega, u_0, v_0$  sont des scalaires donnés ;  $\omega$  s'appelle la pulsation,  $u_0$  la position initiale,  $v_0$  la vitesse initiale. Posons ensuite  $v = u'$  et écrivons l'EDO sous la forme

$$\begin{cases} u'(t) = v(t) \\ v'(t) = -\omega^2 u(t) \end{cases} \quad (5)$$

On pose  $U = [u, v]$  et  $U_0 = [u_0, v_0]$  de sorte que l'EDO s'écrit maintenant

$$U'(t) = F(t, U(t)), \quad U(0) = U_0 \quad (6)$$

avec  $F(t, [u, v]) = [v, -\omega^2 u]$  ;  $F$  est donc une fonction de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

On a ainsi réécrit l'EDO (4) d'ordre 2 en l'EDO (6) d'ordre 1. Attention ! dans le premier cas, la fonction  $f$  va de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  ; dans le deuxième cas, la fonction  $F$  va de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Il est maintenant facile de résoudre cette EDO numériquement, il suffit de lui appliquer la méthode d'Euler sous la forme  $U_{k+1} = U_k + hf(t_k, U_k)$ , avec  $U_0$  qui est donnée. C'est une récurrence qui fournit la suite des points  $U_k$  de  $\mathbb{R}^2$ , approximations des valeurs  $U(t_k)$ , où  $U$  est la solution exacte de l'EDO.

- (a) Calculer, à la main, la solution exacte de l'EDO (6).
- (b) Ecrire la fonction  $F$  de l'EDO (5) - fonction de deux variables  $t, U$  - dans une fonction python ; on choisira  $\omega = 1.0$ .
- (c) Modifier la fonction `euler`, pour qu'elle prenne quatre arguments : une fonction python  $F$  - fonction des deux variables  $t \in \mathbb{R}, U \in \mathbb{R}^2$  -, un vecteur  $U_0 \in \mathbb{R}^2$ , un réel  $T$  et un entier  $n$ . `euler` renverra deux `numpy arrays` :  $tt$  contenant les valeurs  $t_k$  et  $UU$  contenant les valeurs  $U_k$ , obtenues par la méthode d'Euler.
- (d) Résoudre numériquement l'EDO (4), avec  $\omega = 1.0, T = 4\pi$  et les conditions initiales  $u(0) = 1.0, u'(0) = 0.0$  ; on essaiera différentes valeurs de  $n$ .
- (e) Faire trois graphiques :
  - i. position  $u$  en fonction du temps  $t$
  - ii. vitesse  $v$  en fonction du temps  $t$
  - iii. vitesse  $v$  en fonction de position  $u$
 Sur chaque graphique, représenter la solution exacte et la solution approchée donnée par la méthode d'Euler.