

TP3

Equations différentielles

24 octobre 2017

Dans ce TP, on présente quelques méthodes pour intégrer numériquement sur un intervalle $t \in [0, T]$, une équation différentielle ordinaire - dite EDO - c'est-à-dire de la forme

$$u'(t) = f(t, u(t)), \quad u(0) = u_0$$

La fonction f , qui prend en argument un couple de réels et qui renvoie un réel, ainsi que la valeur initiale u_0 sont donnés; la fonction u , qui prend un réel en argument et qui renvoie un réel, est inconnue; c'est la solution cherchée.

1. Exemple : considérons l'EDO très simple

$$u'(t) = -u(t), \quad u(0) = 1.0$$

Le problème est ici de déterminer la solution u .

- (a) Que vaut la fonction f dans cet exemple
 - (b) Calculer à la main la solution u de l'EDO ci-dessus, et la dessiner sur papier; on prendra comme intervalle $t \in [0, 2]$.
 - (c) Sur ordinateur, représenter graphiquement u à l'aide du module `matplotlib`; on créera le vecteur d'abscisses au moyen de `numpy.linspace` et on sauvera la figure au format `png` dans le répertoire courant.
2. Calcul approché de u au moyen de la **méthode d'Euler**.

On divise l'intervalle $[0, T]$ en n parties égales, puis on pose $h = T/n$, ce qui fournit une subdivision $t_0 = 0, t_1 = h, t_2 = 2h, \dots, t_n = T$. A partir de là veut calculer, approximativement, la valeur de u aux points t_k de la subdivision. Voici l'idée :

Supposons que l'on connaisse, pour un indice k , une approximation u_k de la valeur exacte $u(t_k)$; comment alors calculer une approximation u_{k+1} de la valeur exacte $u(t_{k+1})$? Réponse :

On écrit $u'(t_k) \approx \frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h}$, approximation d'autant meilleure que h est petit;

on a donc $\frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h} \approx u'(t_k) = f(t_k, u(t_k))$, puis $u(t_{k+1}) \approx u(t_k) + hf(t_k, u(t_k))$

et enfin $u(t_{k+1}) \approx u_k + hf(t_k, u_k)$. On a donc trouvé une approximation u_{k+1} de la valeur exacte $u(t_{k+1})$, à savoir

$$u_{k+1} = u_k + hf(t_k, u_k)$$

Cette formule permet, par récurrence, de calculer une suite d'approximations u_k , à condition que l'on connaisse une première approximation u_0 de $u(t_0)$; mais pour u_0 on peut bien sûr prendre la valeur de la condition initiale donnée par l'EDO.

- (a) Calculer la suite u_k , définie par la méthode d'Euler, pour l'exemple ci-dessus; on prendra $T = 2.0$ et $n = 10$.
- (b) Représenter sur le même graphique la solution exacte u et les points (t_k, u_k) ; faire le travail sur papier et numériquement à l'aide de `matplotlib`.

3. Ecrire une fonction python `euler` qui prend en arguments une fonction f de deux variables scalaires t, u , une valeur initiale u_0 , un réel T , un entier n , et qui renvoie la liste tt des t_k et la liste uu des u_k , valeurs obtenues par la méthode d'Euler (alternativement, on pourra renvoyer tt et uu sous forme de `numpy arrays`).
4. Reprendre le travail précédent avec les EDOs suivantes (attention, certaines équations peuvent être facilement intégrées à la main, d'autres non).

$$u'(t) = -u(t) + t, \quad u(0) = 1.0 \quad (1)$$

$$u'(t) = u^2(t), \quad u(0) = 1.0 \quad (2)$$

$$u'(t) = u^2(t) - t, \quad u(0) = 1.0 \quad (3)$$

5. Nous montrons maintenant comment intégrer une EDO d'ordre supérieur. Prenons l'exemple de l'oscillateur harmonique (modélisation du ressort) qui est une EDO d'ordre 2

$$u''(t) + \omega^2 u(t) = 0, \quad u(0) = u_0, u'(0) = v_0$$

où ω, u_0, v_0 sont des scalaires donnés ; ω s'appelle la pulsation, u_0 la position initiale, v_0 la vitesse initiale.