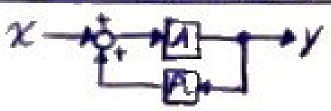
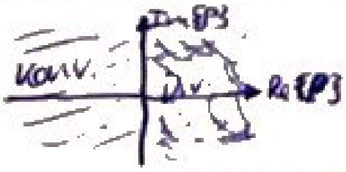
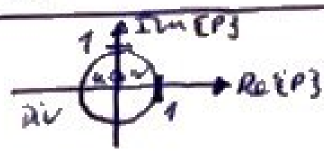
Transformationen / Umformungen etc
Übersicht Grundformen

$y(t) = x(t) + p\,y(t)$ (IIR)	$y[n] = x[n] + p\,y[n-1]$ (IIR)
	
$\frac{Y}{X} = \frac{A}{1-pA} \to h(t) = e^{pAt}\,1(t)$	$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-pz^{-1}} \to h[n] = p^n\,1[n]$
	

z transformation

$\delta[n] = 1[n]$

$\delta[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1$

$\delta[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-1}$

$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

Grundhaltung

$a^n\,1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{z}{z-a}$, $|z|>a$

Verschiebung im Originalbereich

$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(z)$, $z \in K_1$

$x_2[n-k] = x_2 \circ\!\!-\!\!\bullet\ z^{-k} X_1(z)$, $z \in K_2$

Linearität

$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(z)$, $z \in K_1$

$x_2[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_2(z)$, $z \in K_2$

$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n]\,1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z)$, $z \in K_m$

Lineare Gewichtung im Originalbereich

$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(z)$, $z \in K_1$

$x_2 = n \cdot x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ -z \cdot \frac{d}{dz} X(z)$, $z \in K_1$

Inversion im Originalbereich

$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_1(z)$, $|z|<a$

$x_2 = x_1[-n] \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_2 = X_1\left(\frac{1}{z}\right)$, $|z| > \frac{1}{a}$

Bsp $y[n] - \frac{1}{2} y[n-1] = \delta[n]$

$Y(z) - \frac{1}{2} z^{-1} Y(z) = 1$

Umformen:

$Y(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$

$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n 1[n]$

Rücktransformation

$\frac{z}{(z-p_0)^{m+1}} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{n(n-1)\cdots(n-(m-1))}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots m} p_0^{\,n-m}\,1[n-m]$

$\frac{z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^4}_{m=3} \bullet\!\!-\!\!\circ\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\,1[n-3]$

$y[n] = (x * h)[n] \bullet\!\!-\!\!\circ\ Y(z) = X(z) \cdot H(z) \circ\!\!-\!\!\bullet$ … Im z-Bereich rechnen

Frequenzgang "Welche Frequenzen blockiert?"

1. $Y/X(z) = H(z) = \cdots$
   Um Nenner zu faktorisieren:
2. Nullstellen $z_{0,1}$, $z_{0,2}$ (aus Nenner) $H(z)$ bestimmen
   Um 0-Stellen in komplexe e-Form zu bringen
3. $|z_0|$ finden
4. $\arg(z_{0,1}, z_{0,2})$ finden mit $\tan^{-1}(\ldots)$ (Winkel = arg)
   Jetzt sollte Nenner von $H(z)$ faktorisiert & in e-Form sein:
   $\frac{(z-e\ )(z-e\ )}{(\ldots)}$
5. z substituieren mit $z \to e^{j\hat{\omega}}$, $H(z) \to H(e^{j\hat{\omega}})$
6. $\hat{\omega}$ so bestimmen dass Zähler gleich null wird
7. Das zu blockierende ω kann berechnet werden mit Abtastfrequenz $f_S = (T_S)^{-1}$ ← Abtastzeit
   $\hat{\omega}_0 = \frac{\omega}{f_S} \to \omega = \hat{\omega} f_S$
8. Die zu blockierende Frequenz kann mit $f = \frac{\omega}{2\pi}$

zusätzliche Frequenz f_2 blockieren:

1. Winkelgeschw. ω_2 berechnen: $\omega_2 = 2\pi \cdot f_2$
2. $\hat{\omega} = \frac{\omega_2}{f_S}$
3. Nullstelle hinzufügen bei $e^{\pm j\hat{\omega}}$, also zwei Terme mit $(z-e^{j\hat{\omega}})(z-e^{-j\hat{\omega}})$ im Nenner von $H(z)$

Kap. 1

Definitionen

- Zeitkont.: Zeit lässt sich immer feiner teilen
- Diskret: Zwischen benachbarten Punkten kein weiterer Punkt
- Abtastung Zeitkont. → Zeitdiskret. Quantisierung

Zeitinvariantes System ist dies nur, wenn Ausgangssignal nicht von Verschiebung des Eingangssignals abhängig ist

Lineare Systeme
Antwort auf lineare Komb. der Eingangssignale ergibt lineare Komb. d. Ausgangssig.

Kausales System
System ist kausal wenn es nur von den vorh. Ausgangswerten abhängig ist

Stabiles System: Beschr. Eingangssig. → beschr. Ausg.

Eigenschaften von Signalen

- Zeitbegrenzt – Außerhalb endlichen Zeitraums ist Signal 0
- Einseitig – Das Signal geht nur auf einer Seite bis unendlich
- Kausal – Das Signal ist bei $t < 0$ null
- Beschränkt – Alle Werte des Signals liegen unter einer Schwelle

Mathematisch

$y(t) = F(t - t_0)$, wenn $t_0 > 0$, nach rechts "verzögert"; wenn $t_0 < 0$, nach links "voreilend"

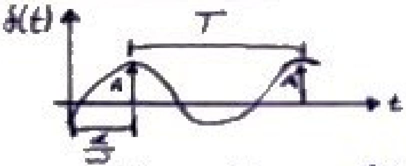
$g(t) = f(a \cdot t)$, für $a > 1$ Signal comprimiert, sonst gedehnt (erweitert)

FIR = Finite Impulse Response (keine Rückkopplung)

IIR = Infinite Impulse Response (Rückkopplung) mit unendlichen ...

Kap. 2/3

$\omega = 2\pi f \Rightarrow s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$



Summe cos Signale gleicher Freq.:

$A_1\cos(\omega t + \alpha_1) + A_2\cos(\omega t + \alpha_2) + \dots + A_n\cos(\omega t + \alpha_n)$
$= A'\cos(\omega t + \alpha')$, wobei ω gleich bleibt.

Addition von cos Signale mit

$A\cos(\omega t + \alpha) = Re(Ae^{j(\omega t + \alpha)}) = Re(Ae^{j\alpha} e^{j\omega t})$

$Re(z_1) + Re(z_2) = Re(z_1 + z_2)$

Spektrum:

$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} A_k \cos(\omega_k t + \varphi_k) = A_0 + \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{a_k}{2} e^{j\omega_k t} + \frac{a_k^*}{2} e^{-j\omega_k t}\right)$

$= \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{j\omega_k t} \Rightarrow$ Spektrum $\{(0, A_0), (\omega_1, \frac{A_1}{2} e^{j\varphi_1}), (-\omega_1, \frac{A_1}{2} e^{-j\varphi_1}), \dots\}$

Eulersatz cos/sin

$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}) = Re(e^{j\omega t})$

$\sin(\omega t) = \frac{1}{2j}(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) = Im(e^{j\omega t})$

Spektrum einzeichnen: (meistens für $\omega \in [-\pi, \pi]$)

Für Signal $x[n] = A_1\cos(\omega_1 n) + A_2\cos(\omega_2 n) + \dots + A_i\cos(\omega_i n)$ muss für jeden cos im Bereich $[-\pi, \pi]$ mehrere Striche der Höhe $= A_i$ jeweils bei alle $\pm\omega_i \pm 2\pi k$ im Intervall (meist)

Trig. Regeln

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad \cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x) \quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)$: ... $\sin'(x) = +\cos(x)\,dx$

Fourier

Analysegleichung: $a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-jk2\pi F_0 t}\, dt$

↳ Bei Gleichanteil $k=0$ ins Integral einsetzen; ↳ In d. Grenzen Symmetrie nutzen

Synthesegleichung:

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi F_0 t}$

Abtastung & Diskretisierung Theorem: $f_s > 2 f_{max}$

Indizen: Zeitkont. $x(t) = \cos(2\pi f t)$ → nehmen alle t_s

Zeitdiskret $x[n] = x(t = t_s \cdot n) = \cos(2\pi f t_s n) \Rightarrow n = \frac{t}{t_s}$

t_s = Abtastzeit, $f_s = t_s^{-1}$ = Abtastfrequenz

$\hat{\omega} = 2\pi f t_s = 2\pi f/f_s$

Beispiel $x_1(t) = \cos(200\pi t)$, mit $f_s = 2000\,Hz$

$\Rightarrow x_1[n] = \cos(200\pi/2000 \cdot n) = \cos(0.1\pi n)$

3. Trapezenregel

$u_c((n-\frac{1}{2})T_s) \leftarrow \frac{u_c[n] + u_c[n-1]}{2}$

$(f((n-\frac{1}{2})T_s) \approx \frac{f[n] + f[n-1]}{2})$

$\dot{u}_c((n-\frac{1}{2})T_s) \leftarrow \frac{u_c[n] - u_c[n-1]}{T_s}$

Näherungssätze ① $u_c[n] = u_c(n \cdot T_s)$

1. Euler Vorwärts

$f'(nT_s) \approx \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{f[n+1] - f[n]}{T_s}$

Einsetzen in DGL

$u_q(n T_s) \leftarrow u_q[n]$

$u_c(n T_s) \leftarrow u_c[n]$

$\dot{u}_c(n T_s) \leftarrow \frac{u_c[n+1] - u_c[n]}{T_s}$

Einsetzen, Umformen liefert $u[n+1]$ =

Blockschaltbild

2. Euler Rückwärts

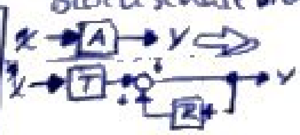
Einsetzen

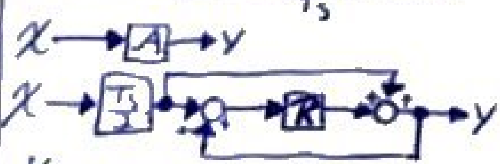
$u_c(n \cdot T_s) \leftarrow u_c[n]$

$\dot{u}_c(n \cdot T_s) \leftarrow \frac{u_c[n] - u_c[n-1]}{T_s}$

Einsetzen, umformen

Blockschaltbild





$\frac{Y}{X}(z) \Rightarrow \frac{T_s}{2} \cdot \frac{z+1}{z-1}$

- Untersumme → Nur stabil bei hoher Abtastrate & hoher Dämpfung
- Obersumme → Ergibt stabile Systeme, aber dämpft das System
- Trapezenregel → volle Ausnutzung des Einheitskreises, erhält dauer Schwingungen

1. Vorwärtseuler (VS) $s \to \frac{z-1}{T_s}$ 2. Rückwärtseuler (Ober Sum) $s \to \frac{z-1}{T_s z}$ 3. $s \to \frac{2}{T_s} \frac{z-1}{z+1}$