B 1

a) $\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 16\,y(t) = 3\,\dot{u}(t) + 16\,u(t)$

$y(t) \circ\!-\!\bullet\; Y(s)$ und $u(t) = \sigma(t) \circ\!-\!\bullet\; U(s) = \frac{1}{s}$

$s^2\,Y(s) - 8s\,Y(s) + 16\,Y(s) = 3s\,U(s) + 16\,U(s)$ (alle Anfangswerte = 0)

$\Rightarrow (s^2 - 8s + 16)\,Y(s) = (3s + 16)\,U(s)$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{3s+16}{s^2-8s+16}\,U(s)$$

$$= \frac{3s+16}{(s-4)^2}\,\frac{1}{s}$$

(Binomische Formel
Alternativ p-q-Formel)

4 P

Rücktransformation über PBZ:

$$Y(s) = \frac{3s+16}{(s-4)^2}\,\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-4} + \frac{C}{(s-4)^2}$$

$\Rightarrow \quad 3s + 16 = A\,(s-4)^2 + B\,s\,(s-4) + C\,s$

$\underline{s \to 0:}$ $\quad 16 = A \cdot 16 \quad \Rightarrow \quad \underline{A = 1}$

$\underline{s \to 4:}$ $\quad 28 = C \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{C = 7}$

$\underline{s = 3:}$ $\quad 25 = 1 \cdot 1 - 3B + 7 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 3 = -3B \quad \Rightarrow \quad \underline{B = -1}$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s-4} + 7\,\frac{1}{(s-4)^2}$$

4 P

$\bullet\!-\!\circ$ (2), (5), (6) mit $n = 2$

$y(t) = (1 - e^{4t} + 7\,t\,e^{4t})\,\sigma(t)$

3 P

Σ 11 P

b) $f(t) = (t+2)^2 \sigma(t)$

$= (t^2+4t+4)\sigma(t)$

$\circ\!\!-\!\!\bullet$

$F(s) = \frac{2}{s^3} + 4\frac{1}{s^2} + 4\frac{1}{s}$

2P

Alternative: $f(t) = (t+2)^2 \sigma(t)$

Mit $t\sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^3}$ und dem Verschiebungssatz folgt:

$F(s) = e^{+2s}\left(\frac{2}{s^3} - \int_0^2 t^2 e^{-st}\,dt\right)$

$\int_0^2 t^2 e^{-st}\,dt =$

$u = t^2 \rightsquigarrow u' = 2t$

$v' = e^{-st} \rightsquigarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$= \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s}\right]_0^2 + \frac{2}{s}\int_0^2 t\, e^{-st}\,dt$

$u = t \rightsquigarrow u' = 1$

$v' = e^{-st} \rightsquigarrow v = \frac{e^{-st}}{-s}$

$= -\frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{2}{s}\left[-\frac{te^{-st}}{s}\right]_0^2 + \frac{2}{s^2}\int_0^2 e^{-st}\,dt$

$= -\frac{4}{s}e^{-2s} - \frac{4}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s^2}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^2$

$= -\frac{4}{s}e^{-2s} - \frac{4}{s^2}e^{-2s} - \frac{2}{s^3}e^{-2s} + \frac{2}{s^3}$

$F(s) = e^{2s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{4}{s}e^{-2s} + \frac{4}{s^2}e^{-2s} + \frac{2}{s^3}e^{-2s} - \frac{2}{s^3}\right)$

$= \frac{4}{s} + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^3}$

c)

(1) $F(s) = \frac{1}{s+9} \overset{(5)}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} e^{-9t}\,\sigma(t) = f(t)$ 1 P

(2) $F(s) = \frac{1}{s^2+9} = \frac{1}{3}\,\frac{3}{s^2+9} \overset{(8)\ \omega=3}{\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ} f(t) = \frac{1}{3}\sin(3t)$ 2 P

$\sum$ 3P

B 2

a) Zum Zeitpunkt 0 wird die Funktion "eingeschaltet"
zum Zeitpunkt T wird die Funktion "ausgeschaltet"
Die Funktion ist eine Gerade und eine Gerade wird durch 2 Punkte bestimmt:

$$y(t) = a\,t + b \rightsquigarrow \cancel{0} = y(0) = b$$
$$\rightsquigarrow 1 = a \cdot T \rightsquigarrow a = \frac{1}{T}$$

Insgesamt:

$$u(t) = \frac{1}{T} \cdot t \ \left(\sigma(t) - \sigma(t-T) \right)$$

3 P

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\pi) \cos(t)\, e^{t-\pi}\, dt =$$

$t = \pi \in (-\infty, \infty)$ $$= \cos(\pi)\, e^{0}$$
$$= -1$$

3 P

c) $$f(0) = 0$$

1/2 P

$$f'(x) = 3e^{2x} + 3x \cdot 2e^{2x}$$
$$= 3(1+2x)e^{2x} \rightsquigarrow f'(0) = 3$$

1 1/2 P

$$f''(x) = 3e^{2x} \cdot 2 + 3 \cdot 2e^{2x} + 3x \cdot 2 \cdot 2e^{2x}$$
$$= 3(2 \cdot 2 + 2 \cdot 2x)e^{2x}$$
$$= 3(2+2x)\,2e^{2x} \rightsquigarrow f''(0) = 12$$

1 1/2

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2^2 \cdot 2e^{2x} + 3 \cdot 2^2 e^{2x} + 3x \cdot 2^2 \cdot 2e^{2x}$$
$$= 3 \cdot 2^2 (2 + 1 + 2x)e^{2x}$$
$$= 3(3+2x)\,2^2 e^{2x} \rightsquigarrow f^{(3)}(0) = 36$$

1 1/2

$$p_3(x) = 0 + 3x + \frac{12}{2}x^2 + \frac{36}{6}x^3$$
$$= 3x + 6x^2 + 6x^3$$

1 P

Σ 6 P

d)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + (-2)^k}{k} (x+1)^k \qquad x_0 = -1 \qquad a_k = \frac{3^k + (-2)^k}{k}$$

$$R = R_Q = \lim_{k \to \infty} \frac{3^k + (-2)^k}{k} \cdot \frac{k+1}{3^{k+1} + (-2)^{k+1}}$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \frac{3^k \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^k\right)}{3^{k+1} \left(1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{k+1}\right)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$

2 P

BRUNNEN

B3

(1) Verschiebungssatz + Linearitätssatz

$$G_1(\omega) = 2\, e^{-2j\omega} F(\omega) = 4\, e^{-2j\omega}\, si(\omega)$$ 2P

(2) z.B. Ableitungssatz für die Bildfunktion

$$g_2(t) = t \cdot f(t)$$

$$G_2(\omega) = j\, F'(\omega) = j\, 2 \cdot \frac{\cos(\omega)\cdot\omega - \sin(\omega)}{\omega^2}$$ 2P

(3) Ähnlichkeitssatz:

$$g_3(t) = f\left(\tfrac{1}{2}t\right) = \begin{cases} 1 & -1 \le \tfrac{1}{2}t \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 & -2 \le t \le 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$G_3(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot F\left(\frac{\omega}{\frac{1}{2}}\right) = 2 \cdot 2 \cdot si(2\omega)$$

$$= 4\; si(2\omega)$$ 2P

(4) Linearitätssatz: $g_4(t)$

$$G_4(j\omega) = 1\, e^{-j\omega} F(\omega) + (-1)\, e^{j\omega} F(\omega)$$

$$= \left(e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right) \cdot 2 \cdot si(\omega)$$

$$= \left(\cos(\omega) - j\sin(\omega) - \cos(\omega) - j\sin(\omega)\right) \cdot 2 \cdot si(\omega)$$

$$= -4j \sin(\omega) \frac{\sin(\omega)}{\omega} = -4j \frac{\sin^2(\omega)}{\omega}$$

$$= -4j\omega\; si(\omega)^2$$ 4P