Klausur: Mathematik II - Teil B	Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften
Termin: 13.06.2019 8:30 Uhr	
SS 2019	
Prof. Dr. B. W. Lichte / Prof. Dr. S. Vanis	

Name, Vorname:

Raum:

Matrikel-Nr.: --

Unterschrift: --

Teil B

Aufgabe	B1	B2	B3
erreichte Punkte			
max. Punkte	15	10	15

Hinweise:

- Lösen Sie die Heftklammern **nicht**.
- Schreiben Sie die Lösungen direkt auf die Aufgabenblätter, **notfalls** auch auf die Rückseiten.
- Melden Sie sich, wenn Sie weitere Blätter benötigen, **keine** eigenen Blätter benutzen.
- Es werden nur Lösungen anerkannt, deren Lösungswege **nachvollziehbar** beschrieben sind.

B.1. Laplace-Transformation (15 P)

a) (10 P) Ein technisches System wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 6y(t) = 0 \ .$$

Die Anfangsbedingungen lauten:

$$y(0) = 5 \quad \text{und} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad .$$

Bestimmen Sie $y(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

Die Rücktransformation ist mittels Partialbruchzerlegung durchzuführen.

b) (2 P) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte für die folgende Zeitfunktion:

$$f(t) = (e^{3t} \ \cos(4t))\sigma(t)$$

Tipp: Nutzen Sie die Eigenschaften der Laplace-Transformation.

c) (3 P) Bestimmen Sie zur folgende Laplace-Transformierten die zugehörige Zeitfunktion

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 4s + 5}$$

Nr.	Bildfunktion $F(s)$	Zeitfunktion $f(t), t \geq 0 \; (f(t) = 0, t < 0)$	Anmerkung
1	1	$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für} \quad t = 0 \\ 0 & \text{für} \quad t \neq 0 \end{cases}$	Dirac-Impuls
2	$\frac{1}{s}$	$\sigma(t)$	Einheitssprungfunktion
3	$\frac{1}{s^2}$	$r(t) = t$	Einheitsanstiegsfunktion
4	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$n > 0$, ganzzahlig
5	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-a\,t}$	a konstant
6	$\frac{1}{(s+a)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, e^{-a\,t}$	a und n wie zuvor
7	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos(\omega\, t)$	$\omega > 0$ konstant
8	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin(\omega\, t)$	$\omega > 0$ konstant
9	$\frac{1}{s^2+2as+b^2}$	$\frac{1}{2\,w}\left(e^{s_1\,t} - e^{s_2\,t}\right)$ $\frac{1}{\omega}\, e^{-a\,t} \sin(\omega\, t)$	$D = \frac{a}{b} > 1$ $D < 1$
10	$\frac{s}{s^2+2as+b^2}$	$\frac{1}{2\,w}\left(s_1\, e^{s_1\,t} - s_2\, e^{s_2\,t}\right)$ $e^{-at}\left(\cos(\omega t) - \frac{a}{\omega}\sin(\omega t)\right)$	$D = \frac{a}{b} > 1$ $D < 1$

In den Beziehungen 9 und 10 ist: $w = \sqrt{a^2 - b^2}$; $\omega = \sqrt{b^2 - a^2}$; $s_{1,2} = -a \pm w$

	Originalbereich	Bildbereich
Linearitätssatz	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$	$c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot F(s)$
1. Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)	$f(t-a) \cdot \sigma(t-a)$ $a > 0$	$e^{-as} \cdot F(s)$
2. Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)	$f(t+a) \cdot \sigma(t)$ $a > 0$	$e^{-as}\left(F(s) - \int_0^a f(t) \cdot e^{-st}\, dt\right)$
Dämpfungssatz	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$
Ableitungen der Originalfunktion	$f'(t)$ $f''(t)$ $f^{(n)}(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$ $s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ $s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) -$ $- s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots$ $\ldots - f^{(n-1)}(0)$
Ableitungen der Bildfunktion	$(-t)^1 \cdot f(t)$ $(-t)^2 \cdot f(t)$ $(-t)^n \cdot f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ $F^{(n)}(s)$
Integration der Originalfunktion	$\int_0^t f(u)\, du$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Integration der Bildfunktion	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$	$\int_s^\infty F(u)\, du$
Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Grenzwertsätze a) Anfangswert b) Endwert	$f(0) = \lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to \infty} [s \cdot F(s)]$ $f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s)]$	

B.2. Potenzreihe/Taylorreihe (10 P)

a) (7 P) Geben Sie das Taylorpolynom $p_3(x)$ dritten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = \pi$ an:

$$f(x) = x \sin(x).$$

b) (3 P) Geben Sie den Entwicklungspunkt x_0 an und berechnen Sie den Konvergenzradius:

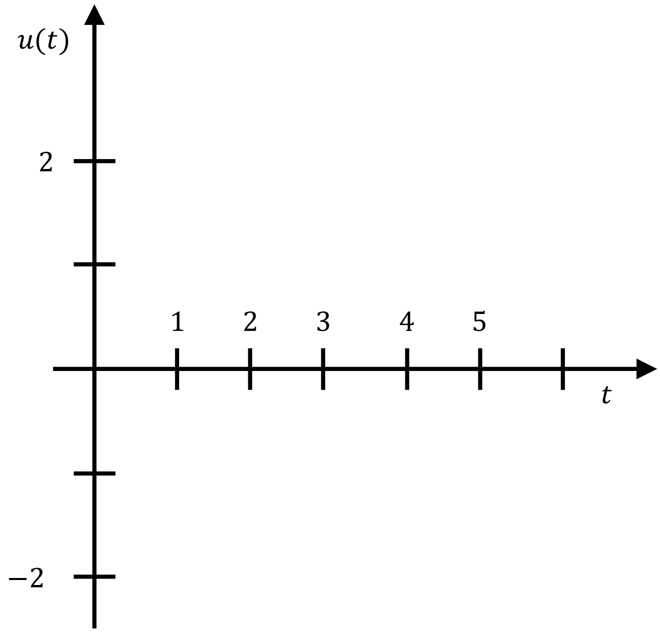
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2k-1}} (x-2)^k \ .$$

B.3. Hilfsfunktionen (15 P)

a) (10 P) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$u(t) = -2\sigma(t-1) + 2(t-2)\sigma(t-2) - 2(t-4)\sigma(t-4) - 2\sigma(t-5)$$

Teilen Sie die Funktion $u(t)$ zunächst in Zeitbereiche auf und beschreiben Sie diese durch Funktionen, so dass Sie auf die Hilfsfunktion $\sigma(t)$ verzichten können, und zeichnen Sie die Funktion in die nachstehende Abbildung ein.



b) (5 P) Nutzen Sie die Eigenschaften der Diracschen Deltafunktion (Impulsfunktion) $\delta(t)$ und berechnen Sie die nachstehenden Integrale:

$$\int_{-\pi}^{\infty} \delta(3\pi + t) \cos(2t) \, dt =$$

$$\int_{0}^{\pi} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) \, dt =$$