Aufgabe 1

a) Mit $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$ liefert die Transformation in den Bildbereich

$$s^2\, Y(s) - s\, y(0) - \dot{y}(0) + s\, Y(s) - y(0) - 6\, Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (s^2 + s - 6)\, Y(s) - 5s - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) = \frac{5s+5}{s^2+s-6}$$

$4\frac{1}{2}$ P

Berechnung der Polstellen:

$$s_{P1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$s_{P1} = 2 \qquad s_{P2} = -3$$

$1\frac{1}{2}$ P

Partialbruchzerlegung:

$$Y(s) = \frac{5s+5}{s^2+s-6} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+3}$$

$$5s+5 = A(s+3) + B(s-2)$$

$2\frac{1}{2}$ P

$\underline{s \to 2:}$ $15 = 5A \quad \rightsquigarrow \quad \underline{A = 3}$

$\underline{s \to -3:}$ $-10 = (-5)B \quad \rightsquigarrow \quad \underline{B = +2}$

$$Y(s) = 3\, \frac{1}{s-2} + 2\, \frac{1}{s+3}$$

Rücktransformation

$1\frac{1}{2}$ P

$$y(t) = (3e^{2t} + 2e^{-3t})\, \sigma(t)$$

b)

$$f(t) = \left(e^{3t} \cos(4t)\right) \sigma(t)$$

$$\cos(4t)\, \sigma(t) \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s}{s^2 + 16}$$

Mit dem Dämpfungssatz folgt:

$$\cos(4)\, \sigma(t)\, e^{3t} \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{s-3}{(s-3)^2 + 16} = \frac{s-3}{s^2 - 6s + 25}$$

2P

c) $$\frac{s+1}{s^2 + 4s + 5}$$

Polstellen: $s_{p_{1/2}} = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm j$

$\rightsquigarrow$ Konjugiert Komplexes Polpaar

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+5} + \frac{1}{s^2+4s+5}$$

(9) + (10)

$a = 2 \qquad b^2 = 5 \qquad D = \frac{2}{\sqrt{5}} < 1$

$\omega = \sqrt{5-4} = 1$

$$f(t) = \left[e^{-2t}\left(\cos(t) - 2\sin(t)\right) + e^{-2t} \sin(t)\right] \sigma(t)$$

$$= e^{-2t}\left(\cos(t) - \sin(t)\right) \sigma(t)$$

3P

Aufgabe 2

a) $f(x) = x \sin(x)$ $\qquad f(\pi) = 0$

$f'(x) = \sin(x) + x\cos(x)$ $\qquad f'(\pi) = -\pi$

$f''(x) = \cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)$

$= 2\cos(x) - x\sin(x)$ $\qquad f''(\pi) = -2$

$f'''(x) = -2\sin(x) - \sin(x) - x\cos(x)$

$= -3\sin(x) - x\cos(x)$ $\qquad f'''(\pi) = \pi$

5 P

$$P_3(x) = -\pi(x-\pi) - \frac{2}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{\pi}{3!}(x-\pi)^3$$

$$= -\pi(x-\pi) - (x-\pi)^2 + \frac{\pi}{6}(x-\pi)^3$$

2 P

b) Entwicklungspunkt $x_0 = 2$

1/2 P

$a_k = \frac{1}{\sqrt{2k-1}} \qquad k \geq 1$

Dann gilt mit dem Quotienten Kriterium:

$$R = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{2(k+1)-1}}{\sqrt{2k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+2-1}{2k-1}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k+1}{2k-1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{2k(1+\frac{1}{2k})}{2k(1-\frac{1}{2k})}} = \lim_{k\to\infty} \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2k}}{1-\frac{1}{2k}}}$$

$$= \underline{\underline{1}}$$

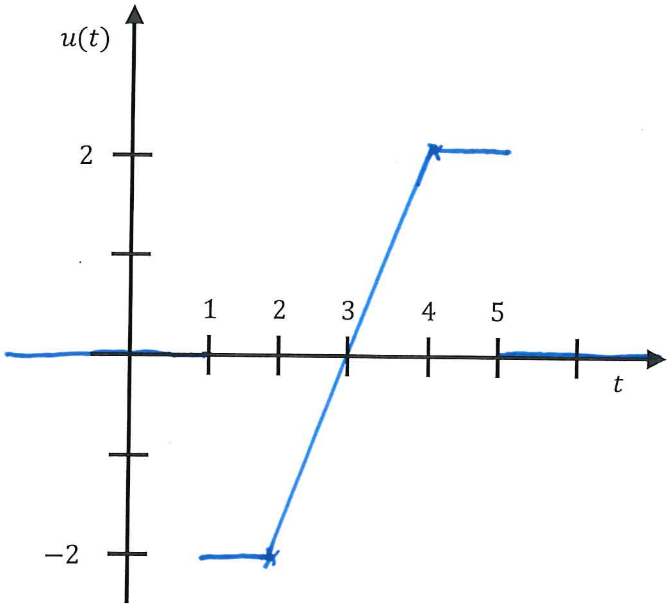
2 1/2 P

B.3. Hilfsfunktionen (15 P)

a) (10 P) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$u(t) = -2\sigma(t-1) + 2(t-2)\sigma(t-2) - 2(t-4)\sigma(t-4) - 2\sigma(t-5)$$

Teilen Sie die Funktion $u(t)$ zunächst in Zeitbereiche auf und beschreiben Sie diese durch Funktionen, so dass Sie auf die Hilfsfunktion $\sigma(t)$ verzichten können, und zeichnen Sie die Funktion in die nachstehende Abbildung ein.



3P

Sprungstellen: 1, 2, 4, 5   2P

(1) $t < 1$: $u(t) = 0$

(2) $1 \leq t < 2$: $u(t) = -2$

(3) $2 \leq t < 4$ $u(t) = -2 + 2t - 4 = 2t - 6$ 5P

(4) $4 \leq t < 5$ $u(t) = 2t - 6 - 2t + 8 = 2$

(5) $5 \leq t$ $u(t) = 2 - 2 = 0$

b)

$$\int_{-\pi}^{\infty} \delta(3\pi + t)\cos(2t)\,dt = 0$$

$$3\pi + t = 0 \rightsquigarrow t = -3\pi \notin [-\pi, \infty)$$

2P

$$\int_{0}^{\pi} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right) d = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -1$$

$$t = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$$

3P