Ostfalia
Hochschule für angewandte Wissenschaften

Prof. Dr. B.W. Lichte
Prof. Dr. S. Vanis

Campus Wolfsburg
Fakultät für Fahrzeugtechnik

Name: ______________________________

Sommersemester 2018

Matrikelnummer: ______________________

12. Juni 2018

Klausur zur Mathematik II

Aufgabe	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	Gesamt-punktzahl	Note
erreichte Punkte											
maximale Punkte	10	12	13	15	10	10	6	16	13	105	

Hinweise:

- Klausurdauer: 120 Minuten
- **erlaubte** Hilfsmittel
  - pro Vorlesungs-Teil
    * Teil A: gewöhnliche Differentialgleichungen
    * Teil B: Reihenentwicklung und Transformationen
    * Teil C: mehrdimensionale Funktionen

    eine DinA4-Seite auf Vorder- und Rückseite handschriftlich mit Formel, Beispielrechnungen u.ä. beschrieben, dabei ist zu beachten, dass
    * keine Ausdrucke erlaubt sind (auch nicht vom Tablet)
    * die mathematischen Anteilen einen Bezug zum Vorlesungsteil haben müssen
    * jeder Teil auf einem separaten Blatt stehen muss, welches zusammen mit dem entsprechenden Klausurteil abzugeben ist
    * die Verwendung von zwei einseitig beschriebenen Seiten **nicht** erlaubt ist
  - Taschenrechner vom Typ "Casio FX - 991 DE XXX"
- **nicht erlaubt** sind
  - elektronische Hilfsmittel wie z.B. Notebooks, Handys oder Smartphones
  - Bücher oder gedruckte Formelsammlungen
  - eigenes Schreibpapier (bitte den Punkt zum zusätzlichen Papier beachten)
- Vergessen Sie bitte nicht, dass Deckblatt auszufüllen.
- Verwenden Sie einen dokumentenechten Stift, der **nicht rot** schreibt, z.B. kein Bleistift.
- Der **Lösungsweg muss nachvollziehbar** sein. Eine reine Angabe des Endergebnis ist als Lösung einer Aufgabe nicht ausreichend.
- Umgang mit zusätzlichem Papier
  - Sie erhalten weiteres Papier erst, wenn die für die Aufgabe vorgesehenen Seiten vollständig ausgenutzt wurden (Vorder- und Rückseite).
  - Markieren Sie **deutlich** auf dem Klausurbogen, wenn die Lösung auf einem Zusatzzettel weitergeführt wurde.
  - **Sie sind dafür verantwortlich**, dass Zusatzzettel an den Klausurbogen beim Einsammeln angeheftet werden, um einen Verlust zu verhindern.
  - **Jeder** ausgehändigte Zusatzzettel ist mit Name und Matrikelnummer zu versehen und mit abzugeben.
- Zum Bestehen der Klausur benötigen Sie 50 Punkte.
- Bei durch den Prüfungsausschuß offiziell festgestellten Täuschungsversuchen wird die Klausur als nicht bestanden bewertet (Note 5,0).

Viel Erfolg!

Klausur - Mathematik II Teil A
Prof. Dr. S. Vanis

Sommersemester 2018

Campus Wolfsburg
Fakultät für Fahrzeugtechnik

Name: ______________________________
Matrikelnummer: ______________________

Hinweis:
Begründen Sie Ihr Vorgehen mit kurzen Sätzen oder Stichworten und machen Sie Nebenrechnungen gekennzeichnet auf den Klausurzetteln. So werden Ihre Lösungen besser verständlich.

Aufgabe A.1: (4 + 6 = 10 Punkte)

1. Ordnen Sie die folgenden Begriffe

   (a) lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

   (b) lineare homogene Differentialgleichung 3. Ordnung

   (c) Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

   den Differentialgleichungen zu und begründen Sie kurz die gewählte Zuordnung.

   - $e^x y' = \Big(y^2 + 3\ln(y)\Big)\sin(x)$

     ____

     ____

     ____

   - $(x^2+1)y' = y - \ln(x)$

     ____

     ____

     ____

   - $y^{(3)} + 4y^{(2)} = y - 2y^{(1)}$

     ____

     ____

     ____

Sommersemester 2018

Name: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

2. Berechnen Sie die Lösung, inklusive ihres Definitionsbereichs (maximales Existenzintervall), der Differentialgleichung

$$yy' = \sin(x)y^2 + \sin(x)y \ \text{ mit } \ y(0) = \pi - 1$$

Aufgabe A.2: (12 Punkte)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Differentialgleichungssystems.

$$\begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_2' &= -y_3 \\ y_3' &= -2y_1 + y_2 + 2y_3 \end{aligned}$$

Verwenden Sie die betragsmäßig kleinstmöglichen ganzen Zahlen für die Eigenvektoren, d.h. $\vec{v} \in \mathbb{Z}^3$.
Bestätigen Sie **eine** Ihrer Teillösungen, indem Sie die Probe für diese Teillösung rechnen.

Hinweis:
Das charakteristische Polynom hat die Form

$$p(\lambda) = a\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + a$$

mit einem einheitlichen Koeffizienten $a \in \mathbb{R}$ vor allen Potenzen von λ.

Aufgabe A.3: (13 Punkte)

Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(4)} = 2y^{(2)} - y + 4e^x$$

an.

Hinweis:
Sie dürfen, **ohne sie selbst zu berechnen**, *die Inverse des Fundamentalsystems*

$$\underline{\underline{Y}}^{-1} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_1 x} & \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_1 x} & -\frac{1}{4}xe^{-\lambda_1 x} & \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_1 x} \\ -\frac{1}{4}e^{-\lambda_2 x} & -\frac{1}{4}e^{-\lambda_2 x} & \frac{1}{4}e^{-\lambda_2 x} & \frac{1}{4}e^{-\lambda_2 x} \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_3 x} & \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_3 x} & \frac{1}{4}xe^{-\lambda_3 x} & \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x\right) e^{-\lambda_3 x} \\ \frac{1}{4}e^{-\lambda_4 x} & -\frac{1}{4}e^{-\lambda_4 x} & -\frac{1}{4}e^{-\lambda_4 x} & \frac{1}{4}e^{-\lambda_4 x} \end{pmatrix}$$

verwenden, wobei $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$ die Eigenwerte des Systems sind.
Die angegebene Inverse gehört zu einem Fundamentallösung, bei dem die Lösung(en) zum höchsten Eigenwert zuerst kommen und dann mit absteigenden Eigenwerten die weiteren Lösungen folgen.

Tipp:
Vermeiden Sie unnötige Rechenoperationen.

B.1. Laplace-Transformation

a) (12 P) Ein technisches System wird durch die folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\ddot{y}(t) - 8\dot{y}(t) + 16y(t) = 5\dot{u}(t) + 8u(t)\ .$$

Dabei bezeichnet u(t) die Eingangsgröße und $y(t)$ die Ausgangsgröße.

Bestimmen Sie $y(t)$ mit Hilfe der Laplace-Transformation. Alle Anfangswerte sind Null. Als Eingang wird ein Sprung der Höhe 1 auf das System gegeben.

Die Rücktransformation ist mittels Partialbruchzerlegung durchzuführen.

b) (3 P) Bestimmen Sie zu der nachstehenden Laplace-Transformierten die zugehörige Zeitfunktion:

$$F(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+5}$$

Nr.	$f(s)$	$f(t)$ (für $t<0$ ist $f(t)=0$)	
1	1	$\delta(t)=\begin{cases}\infty & \text{für } t=0\\ 0 & \text{für } t\neq 0\end{cases}$	
2	$\frac{1}{s}$	1	
3	$\frac{1}{s^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	
4	$\frac{1}{s+\alpha}$	$e^{-\alpha t}$	
5	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$	
6	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	
7	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	
8	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{e^{-\beta t}-e^{-\alpha t}}{\alpha-\beta}$	
9	$\frac{1}{(s+\alpha)^n}$ für $n>0$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\cdot e^{-\alpha t}$	
10	$\frac{1}{s(s+\alpha)^n}$	$\frac{1}{\alpha^n}\left[1-\left(\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{(\alpha t)^\nu}{\nu!}\right)\cdot e^{-\alpha t}\right]$	
11	$\frac{1}{s^2+s\cdot 2\alpha+\beta^2}$	$\frac{1}{2w}\cdot\left(e^{s_1 t}-e^{s_2 t}\right)$ $\frac{1}{\omega}\cdot e^{-\alpha t}\cdot\sin\omega t$	$D=\frac{\alpha}{\beta}>1$ $(D<1)$
12	$\frac{s}{s^2+s\cdot 2\alpha+\beta^2}$	$\frac{1}{2w}\cdot\left(s_1 e^{s_1 t}-s_2 e^{s_2 t}\right)$ $e^{-\alpha t}\cdot\left(\cos\omega t-\frac{\alpha}{\omega}\cdot\sin\omega t\right)$	$D=\frac{\alpha}{\beta}>1$ $(D<1)$
13	$\frac{1}{s(s^2+s\,2\alpha+\beta^2)}$	$\frac{1}{\beta^2}\cdot\left(1+\frac{s_2}{2w}\cdot e^{s_1 t}-\frac{s_1}{2w}\cdot e^{s_2 t}\right)$ $\frac{1}{\beta^2}\cdot\left[1-(\cos\omega t+\frac{\alpha}{\omega}\cdot\sin\omega t)\cdot e^{-\alpha t}\right]$	$D=\frac{\alpha}{\beta}>1$ $(D<1)$

In den Beziehungen 11, 12 und 13 ist: $w=\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$; $\omega=\sqrt{\beta^2-\alpha^2}$; $s_{1,2}=-\alpha\pm w=-\alpha\pm j\omega$

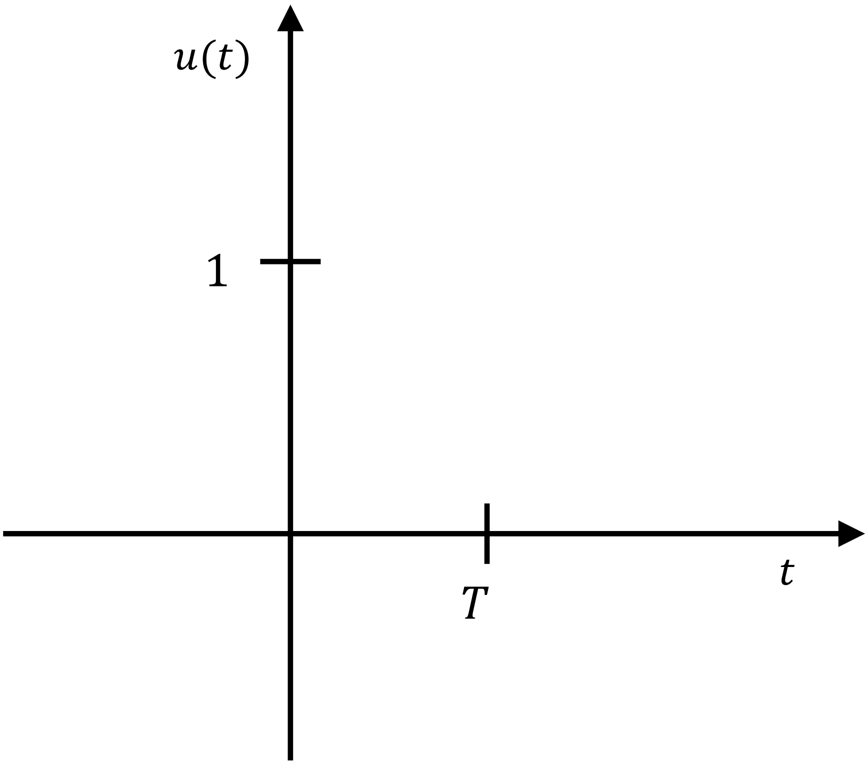
	Originalbereich	Bildbereich
Linearitätssatz	$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t)$	$c_1 \cdot F_1(s) + c_2 \cdot F_2(s)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at), \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot F(s)$
1. Verschiebungssatz (Verschiebung nach rechts)	$f(t-a) \cdot \sigma(t-a)$ $a > 0$	$e^{-as} \cdot F(s)$
2. Verschiebungssatz (Verschiebung nach links)	$f(t+a) \cdot \sigma(t)$ $a > 0$	$e^{-as} \left(F(s) - \int_0^a f(t) \cdot e^{-st} \, dt \right)$
Dämpfungssatz	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(s+a)$
Ableitungen der Originalfunktion	$f'(t)$ $f''(t)$ $f^{(n)}(t)$	$s \cdot F(s) - f(0)$ $s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$ $s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) -$ $- s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots$ $\ldots - f^{(n-1)}(0)$
Ableitungen der Bildfunktion	$(-t)^1 \cdot f(t)$ $(-t)^2 \cdot f(t)$ $(-t)^n \cdot f(t)$	$F'(s)$ $F''(s)$ $F^{(n)}(s)$
Integration der Originalfunktion	$\int_0^t f(u) \, du$	$\frac{1}{s} \cdot F(s)$
Integration der Bildfunktion	$\frac{1}{t} \cdot f(t)$	$\int_s^\infty F(u) \, du$
Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) \cdot F_2(s)$
Grenzwertsätze a) Anfangswert b) Endwert	$f(0) = \lim_{t \to +0} f(t) = \lim_{s \to \infty} [s \cdot F(s)]$ $f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} [s \cdot F(s)]$	

B.2. Hilfsfunktionen

(10 P) Gegeben ist die folgende Funktion:

$$u(t) = \frac{t}{T}\sigma(t) - 2\frac{t-T}{T}\sigma(t-T) + \frac{t-2T}{T}\sigma(t-2T)$$

Teilen Sie die Funktion $u(t)$ zunächst in Zeitbereiche auf und beschreiben Sie diese durch Funktionen, so dass Sie auf die Hilfsfunktion $\sigma(t)$ verzichten können, und zeichnen Sie die Funktion in die nachstehende Abbildung ein.



B.3. Fourier-Reihe (Maximal 10 Punkte, Minimal 0 Punkte)

Seien a_0, a_1, a_2, … und b_1, b_2, … die Fourier-Koeffizienten zur Funktion

$$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

und f werde durch ihre Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \, cos(nt) + b_n \, sin(nt)]$$

dargestellt.

Wie ändern sich die Fourier-Koeffizienten, wenn man f wie beschrieben zur Funktion g modifiziert? Tragen Sie in die Tabelle die richtige Nummer der möglichen Modifikationen aus der Liste unten ein.

Jede **richtige** Angabe zählt **+2** Punkte, jede **falsche −1** Punkt. Kein Eintrag zählt 0 Punkte. Sie nehmen keine negative Punktzahl aus der Aufgabe mit. (Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.)

Modifikation von f	**Modifikation der Fourier-Koeffizienten entsprechend der Liste**
$g(t) = f(t) + 4$	
$g(t) = 2 \cdot f(t)$	
$g(t) = f(-t)$	
$g(t) = -f(t)$	
$g(t) = f(t) + 2\sin(t)$	

Liste der möglichen Modifikationen:

(1) a_0 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.

(2) a_0 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.

(3) a_0 erhöht sich um 8, sonst ändert sich nichts.

(4) b_1 erhöht sich um 2, sonst ändert sich nichts.

(5) b_1 erhöht sich um 4, sonst ändert sich nichts.

(6) b_1 erhöht sich um 8, sonst ändert sich nichts.

(7) Alle a_k und b_k erhöhen sich um 2.

(8) Alle a_k und b_k erhöhen sich um 4.

(9) Alle a_k und b_k verdoppeln sich um 2.

(10) Alle a_k und b_k wechseln das Vorzeichen.

(11) Die a_k wechseln das Vorzeichen, die b_k bleiben gleich.

(12) Die b_k wechseln das Vorzeichen, die a_k bleiben gleich

Ostfalia
Hochschule für angewandte Wissenschaften

Klausur - Mathematik II Teil C
Prof. Dr. S. Vanis

Campus Wolfsburg
Fakultät für Fahrzeugtechnik

Sommersemester 2018

Name: ______________________________
Matrikelnummer: ______________________

Hinweis:
Begründen Sie Ihr Vorgehen mit kurzen Sätzen oder Stichworten und machen Sie Nebenrechnungen gekennzeichnet auf den Klausurzetteln. So werden Ihre Lösungen besser verständlich.

Aufgabe C.1: (6 Punkte)

Gegeben sind die beiden Ebenen

$$\begin{aligned} E_1 &: \; 4x - 3y + 12z = 8 \\ E_2 &: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ a \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 2 \\ b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} c \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Ebenen **parallel** sind und einen **Abstand** von $\frac{4}{13}$ haben.

Aufgabe C.2: (3 + 13 = 16 Punkte)

1. Bestimmen Sie die Richtungsableitung entlang des Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

der Funktion

$$f : D_f \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; \vec{x} \mapsto x^3 y + \ln(z) - 3y^2 x^2$$

2. Bestimmen Sie die Extremwerte der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; \vec{x} \mapsto -x^2 + y + 3z^2$$

wenn gleichzeitig für alle $\vec{x}$

- $x + z = 2(y + 1)$
- und $x^2 = 6 + 3z^2$

gelten sollen.

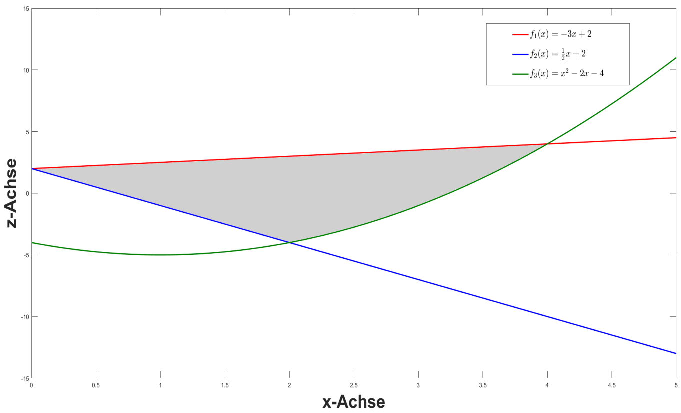
Sommersemester 2018

Name: ______________________________
Matrikelnummer: ______________________

Aufgabe C.3: (13 Punkte)

Bei dieser Aufgaben gelten die Teilaufgaben nur dann als vollständig gelöst, wenn die Integrale schrittweise per Hand berechnet wurden.
Eine Lösung der Integrale mit dem Taschenrechner zählt nicht als vollständige Lösung und bringt daher nur Teilpunkte.

1. Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der bei der Rotation der unten gezeigten grauen Fläche um die angegebene z-Achse entsteht.



Funktionen

- rote Funktion: $f_1(x) = \frac{1}{2}x + 2$
- blaue Funktion: $f_2(x) = -3x + 2$
- grüne Funktion: $f_3(x) = x^2 - 2x - 4$
$$= (x-1)^2 - 5$$

Schnittpunkte

- f_1 mit f_2 bei $(0/2)$
- f_1 mit f_3 bei $(4/4)$
- f_2 mit f_3 bei $(2/-4)$

2. Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers aus Aufgabenteil 1.

   Hinweis: Für den Anteil der grünen Funktion genügt die Angabe der Berechnungsvorschrift ohne weitere Lösung.