Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften Fakultät für Fahrzeugtechnik Prof. Dr.-Ing. Michael Kolbus	Modulprüfung Signale und Systeme BPO 2011 Wintersemester 2020 19.02.2021
Name: ____________________ Vorname: ____________________	Matr. Nr.: ____________________ Unterschrift: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel	Beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt Nicht programmierbarer Taschenrechner
Zeit	90 min

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe:
Punkte:	7	16	18	10	16	16	8	91
Ergebnis:								

Bearbeitungshinweise

- Beschriften Sie die Deckblätter mit *Namen*, *Vornamen*, *Matrikel-Nr.* und *Unterschrift*.
- Beschriften Sie alle von Ihnen verwendeten Blätter mit Namen, Matrikelnummer und der Nummer der Aufgabe.
- Fangen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt an.
- Markieren Sie *deutlich* auf demr Seite, wenn die Lösung auf einer weiteren fortgeführt wurde.
  Sie sind dafür verantwortlich, dass ihr gesamtes Material digitalisiert und hochgeladen wird. *Wenn Sie Rückseiten der Blätter beschreiben, achten Sie darauf Sie nichts vergessen!*
- Existiert für eine Teilaufgabe mehr als ein Lösungsvorschlag, so wird diese Teilaufgabe mit 0 Punkten bewertet. Verworfene Lösungsansätze sind durch deutliches Durchstreichen kenntlich zu machen. *Schreiben Sie keine Lösungen in roter Farbe.*
- Ihre Lösung muss Schritt für Schritt nachvollziehbar sein. Geben Sie zu allen Lösungen, wenn möglich auch das zugehörige *Formelergebnis ohne Zahlenwerte* an (Punkte). Die schlichte Angabe des Zahlenergebnisses reicht i. allg. für die volle Punktzahl nicht aus.

Kleine Formelsammlung

Wertetabelle Sinus / Kosinus

$\alpha/$ rad	$\alpha/$ grad	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$1/\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	$\frac{\sqrt{4}}{2} = 1$	$\frac{\sqrt{0}}{2} = 0$	$\to \infty$

Geometrische Reihe

endliche Anzahl Summanden
$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1} - 1}{a - 1}, \qquad a \neq 1$$

unendliche Anzahl Summanden
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1 - a}, \qquad |a| < 1$$

Aufgabe 1: Kurzfragen (wahr/falsch) .... (7 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob folgende Aussagen über LTI Systeme richtig oder falsch sind. *Falsch beantwortete Fragen führen zu einem Punktabzug.*

(a) (1 Punkt) Die z-Transformation des verzögerten Einheitsimpulses ist $\delta[n-1] \circ\!\!-\!\!\bullet\; z^{-1}$.

◯ wahr ◯ falsch

(b) (1 Punkt) Bei zeitdiskreten Systemen verursachen mehrfache Polstellen eine divergierende Impulsantwort (=das System ist instabil).

◯ wahr ◯ falsch

(c) (1 Punkt) Das zeitdiskrete System beschrieben durch die Differenzengleichung $y[n] - x[n] + x[n-1] = 0$ besitzt eine Rückkopplung.

◯ wahr ◯ falsch

(d) (1 Punkt) Das zeitkontinuierliche System mit der Systemfunktion

$$H(s) = \frac{1}{(s - \frac{1}{4})(s + \frac{1}{2})}$$

hat eine konvergierende Impulsantwort (= das System ist stabil).

◯ wahr ◯ falsch

(e) (1 Punkt) Ein kausales Signal ist immer auch zeitbegrenzt.

◯ wahr ◯ falsch

(f) (1 Punkt) Das Antwortsignal eines LTI-Systems auf die Anregung mit einem „ewigen Sinus“ $x(t) = M\sin(\omega t)$ ist immer ein durch M beschränktes Signal $y(t)$, d.h. jeder Wert von $y(t) \leq M$.

◯ wahr ◯ falsch

(g) (1 Punkt) Wenn ein Blockschaltbild nur aus Summationsstellen, Verstärkungen und Integratoren besteht, ist das beschriebene System linear und zeitinvariant.

◯ wahr ◯ falsch

Aufgabe 2: Kurzfragen mit Rechnung .... (16 Punkte)

Skizzieren Sie auch den Rechenweg zur Lösung.

(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der komplexen Zahl z mit

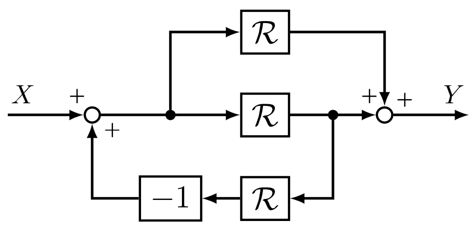
$$z = \left(\tfrac{1}{2} + \jmath\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

(b) (2 Punkte) Gegeben ist die folgende Funktion

$$x(t) = \cos\left(54\pi + \tfrac{\pi}{3}\right) + \cos\left(72\pi - \tfrac{\pi}{2}\right)$$

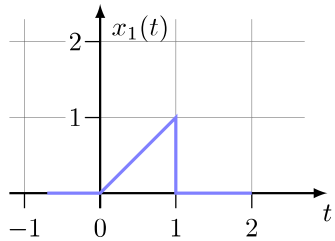
Bestimmen Sie die Grundfrequenz f_0 im Sinne der Fourierreihe für dieses Signal.

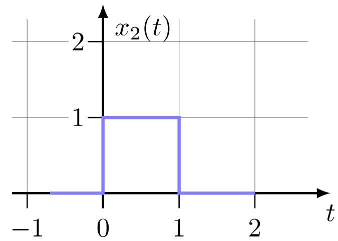
(c) (4 Punkte) Gegeben ist das folgende Blockschaltbild



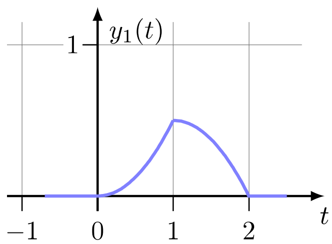
Bestimmen Sie das Systemfunktional des oben darstellten Systems.

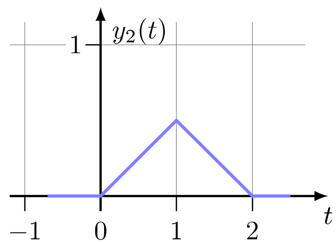
(d) (4 Punkte) Die folgenden Funktionen $x_1(t), x_2(t)$ sollen miteinander gefaltet werden.

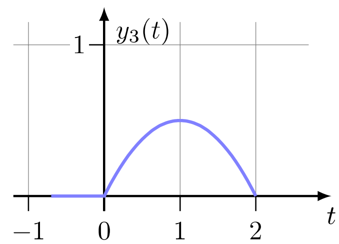




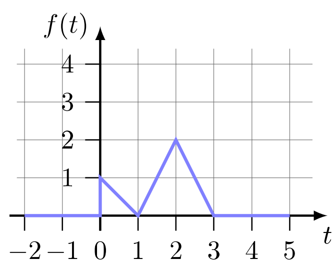
Welche der folgenden Graphen stellt die Funktion $y(t) = (x_1 * x_2)(t)$ da? Begründen Sie Ihre Antwort.

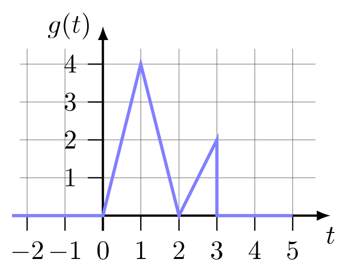






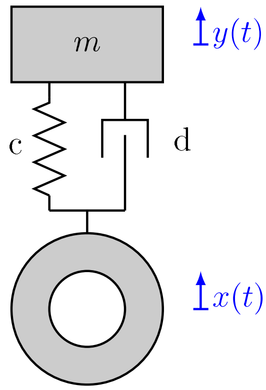
(e) (3 Punkte) Gegeben ist eine Funktion $f(t)$. Kann die Funktion $g(t)$ aus der Funktion $f(t)$ durch Skalierung, Zeitdehnung, Spiegelung und Verschiebung erzeugt werden? Falls ja geben Sie für $g(t) = M \cdot f(at+b)$ die Unbekannten a, b, M an.





Aufgabe 3: zeitkont. System: Viertelfahrzeugmodell .... (18 Punkte)

Zur Modellierung der Federung eines Fahrzeugs, wird ein einzelnes Rad betrachtet. Dieses ist mittels eines Feder-Dämpfer Systems an die Karosserie angekoppelt. Ziel der Federung ist es, Anregungen durch das Rad (schlechte Strecke) von der Fahrgastzelle zu entkoppeln. Ein einfaches Modell ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



Feder und Dämpfer seien lineare Elemente, und die Koordinaten x, y sind auf den Gleichgewichtszustand bezogen, d.h. der Einfluss der Erdbeschleunigung ist kompensiert. Dann ergibt sich für das System die Differentialgleichung

$$m\ddot{y}(t) = c(x(t) - y(t)) + d(\dot{x}(t) - \dot{y}(t))$$

Im Folgenden gelte zur Vereinfachung $m = 1, c = 1$. Eingang des Systems ist $x(t)$ und Ausgang ist die Anregung der Fahrgastzelle $y(t)$.

Zunächst erfolgt die Untersuchung für den Fall, dass der Dämpfer nicht verwendet wird, es gilt also $d = 0$.

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktion $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ des Systems.

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Polstellen der Systemfunktion aus der vorigen Aufgabe.

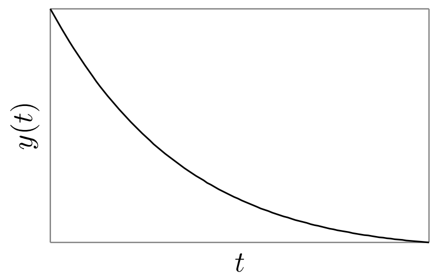
(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h(t)$ (Antwort auf den Einheitssprung $x(t) = \delta(t)$) des obigen Systems (z.B. mit Hilfe der Laplace Transformation).

Dem System wird nun einer Dämpfer hinzugefügt. Die Parameter der Masse und Federsteifigkeit sind unverändert ($m = 1, c = 1$).

(d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des neuen Systems mit Dämpfer.

(e) (4 Punkte) Das Auslegungskriterium sei nun, dass die beiden Pole ($p_{1,2}$) des neuen Systems beide reell sind ($\text{Im}(p_{1,2}) = 0$). Bestimmen sie den kleinsten Wert für d bei dem dies der Fall ist.

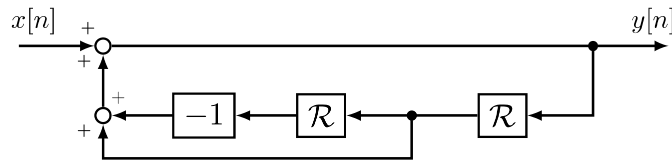
Die Impulsantwort der Lösung der vorigen Aufgabe ist im nachfolgenden Plot skizziert.



(f) (2 Punkte) Basierend auf den Ergebnissen der vorigen Aufgaben: Erklären Sie kurz die Bedeutung des Dämpferelements

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System .... (10 Punkte)

Im folgenden soll ein zeitdiskretes System untersucht werden. Das System ist durch das folgende Blockschaltbild beschrieben.



(a) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktional des oben im Blockschaltbild dargestellten Systems.

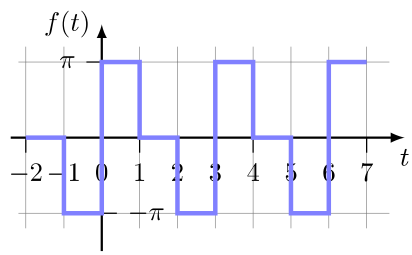
(b) (5 Punkte) Besimmen Sie die Differenzengleichung des oben im Blockschaltbild dargestellten Systems und ermitteln Sie die Impulsantwort des Systems für ersten Schritte, vervollständigen Sie dazu die unten stehende Tabelle.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
$y[n]$	0	0								

(c) (2 Punkte) Besitzt das System eine Rückkopplung? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5: Fourier Reihe eines Signals .... (16 Punkte)

Gegeben ist das folgende periodische Signal $f(t)$. Beachten Sie, dass der positive Wert bei π, der negative bei $-\pi$ liegt.



(a) (2 Punkte) Wie lautet die Periodendauer T und die Grundkreisfrequenz ω des Signals?

(b) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des Signals.

(c) (2 Punkte) Wie lautet der Gleichanteil des Signals?

Von einem weiteren periodischen Signal $f(t)$ wurden die Koeffizienten a_k der Fourier-Reihe (=Spektrum) gebildet. Dabei wurden die folgenden Werte bestimmt

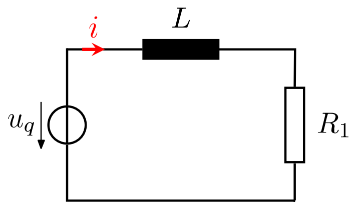
$$
\begin{aligned}
f_{-4} &= -60\,\text{Hz}: & a_{-4} &= 2\mathrm{e}^{-\jmath\pi/8} \\
f_{-1} &= -15\,\text{Hz}: & a_{-1} &= 7\mathrm{e}^{\jmath\pi/2} \\
f_{0} &= 0\,\text{Hz}: & a_{0} &= 3 \\
f_{1} &= 15\,\text{Hz}: & a_{1} &= 7\mathrm{e}^{-\jmath\pi/2} \\
f_{4} &= 60\,\text{Hz}: & a_{4} &= 2\mathrm{e}^{\jmath\pi/8}
\end{aligned}
$$

(d) (5 Punkte) Bestimmen Sie das Signal $f(t)$ im Zeitbereich als Summe sowohl unter Verwendung der komplexen e-Funktion (komplexe Schreibweise) als auch mittels Kosinus Funktionen (reelle Schreibweise).

(e) (1 Punkt) Wie lautet die kleinste Periodendauer des Signals (Kehrwert der Grundfrequenz)?

Aufgabe 6: Diskretisierung eines Systems .... (16 Punkte)

Gegeben ist der folgende Schaltkreis.



Eingang: $u_q(t)$

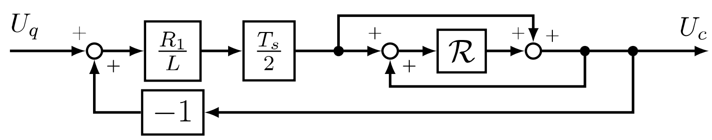
Ausgang: $u_R(t)$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Differentialgleichung des Systems.

$$\text{Hinweis} \qquad u_R(t) = R_1 i_R(t) \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} i_L(t)$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des Systems, die Polstelle der Systemfunktion und die Impulsantwort.

Das System soll nun mit der Abtastzeit T_s diskretisiert werden. Es wird das Trapezverfahren gewählt. Es gilt die Ersetzung $s \to \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$. Damit ergibt sich das folgende Blockschaltbild



(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktion des diskretisieren Systems in z. Hinweis: Beachten Sie den Verzögerungsoperator $\mathcal{R}$ nicht mit dem Widerstand R_1 zu vermischen.

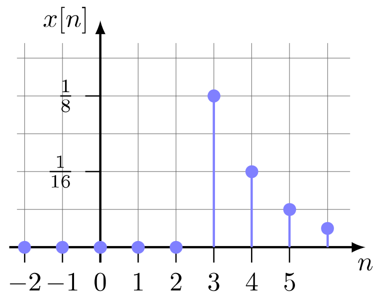
(d) (2 Punkte) Wie wird bei der Diskretisierung nach Trapezregel die linke s-Halbebene in z-Ebene abgebildet? Ist die Stabilität des nach Trapezregel diskretisierten Systems abhängig von der Abtastzeit?

(e) (4 Punkte) Für welche Abtastzeiten ist der Realteil des zeitdiskreten Pols größer als Null? Was bedeutet ein negativer Realteil?

Aufgabe 7: z-Transformation eines Signals .... (8 Punkte)

Gegeben ist das folgende zeitdiskrete Signal

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-3]$$



(a) (6 Punkte) Bestimmen Sie die z-Transformierte des Signals

(b) (2 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzbereich der z-Transformierten