B1

a) $\ddot{y}(t) + 6\,\dot{y}(t) + 25\,y(t) = u(t)$

$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ Y(s) \qquad u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U(s) = 1$

$$s^2 Y(s) - s y(0) - \dot{y}(0) + 6\,(s\,Y(s) - y(0)) + 25\,Y(s) = U(s) = 1$$

$$(s^2 + 6s + 25)\,Y(s) - 5s + 5 - 30 = 1$$

$$(s^2 + 6s + 25)\,Y(s) = 5s + 26$$

$$Y(s) = 5\,\frac{s}{s^2 + 6s + 25} + 26\,\frac{1}{s^2 + 6s + 25}$$ 5

(9) v (10) $\quad a = 3,\ b = 5 \Rightarrow D = \frac{3}{5} < 1$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$

$$y(t) = 5\,e^{-3t}\left[\cos(4t) - \frac{3}{4}\sin(4t)\right]\sigma(t) + 26 \cdot \frac{1}{4}\,e^{-3t}\sin(4t)\,\sigma(t)$$

$$= e^{-3t}\left[5\cos(4t) + \frac{11}{4}\sin(4t)\right]\sigma(t)$$ 5

Σ 10 P

b) $$F(s) = \frac{1/2}{s^2(s + \frac{1}{2})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s + 1/2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = A\,s(s + \tfrac{1}{2}) + B(s + \tfrac{1}{2}) + C s^2$$ 2 P

$\underline{s \to 0:}\quad \frac{1}{2} = B\,\frac{1}{2} \Rightarrow \underline{B = 1}$

$\underline{s \to -\frac{1}{2}:}\quad \frac{1}{2} = C\,\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{C = 2}$

$\underline{s = \frac{1}{2}:}\quad \frac{1}{2} = A\,\frac{1}{2} \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 0 = \frac{1}{2}A + 1 \Rightarrow \underline{A = -2}$

1,5 P

$$F(s) = -2\,\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + 2\,\frac{1}{s + 1/2}$$

(2), (3), (5)

$$f(t) = \left(-2 + t + 2\,e^{-\frac{t}{2}}\right)\sigma(t)$$ 1,5 P

Σ 5 P

B2

a) MacLaurinsche Reihe $\rightsquigarrow$ $x_0 = 0$ Entwicklungspunkt

$f(x) = (4+x)^{-1} \rightsquigarrow f(0) = \frac{1}{4}$

$f'(x) = (-1)\,(4+x)^{-2} \rightsquigarrow f'(0) = -\frac{1}{4^2} = -\frac{1}{16}$

$f''(x) = (-1)(-2)\,(4+x)^{-3} \rightsquigarrow f''(0) = \frac{2!}{4^3} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$

$f^{(3)}(x) = (-1)(-2)(-3)\,(4+x)^{-4} \rightsquigarrow f^{(3)}(0) = -\frac{3!}{4^4} = -\frac{6}{256} = -\frac{3}{128}$

$f^{(4)}(x) = (-1)(-2)(-3)(-4)\,(4+x)^{-5} \rightsquigarrow f^{(4)}(0) = +\frac{4!}{4^5} = \frac{24}{1024} = \frac{3}{128}$

$\vdots$

$$f^{(i)}(0) = (-1)^i \frac{i!}{4^{i+1}}$$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} (x-0)^i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{4^{i+1}} x^i$$

Σ 8 P

b) $x_0 = 0$ $\quad a_k = \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}$

$$R_a = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^{k+2}}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} 2 = \underline{\underline{2}}$$

2 P

$g(-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$ divergent

$g(2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} 2^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots$ divergent

2 P

Konvergenzradius besagt:

(1) absolute Konvergenz für $-2 < x < 2$

(2) Divergenz für $x < -2$ oder $x > 2$

(3) Keine Aussage am Rand ⇝ explizit untersuchen

Insgesamt folgt:

Konvergenz für $-2 < x < 2$

Divergenz für $x \leq -2$ oder $x \geq 2$

3 P

$\sum$ 7 P

B.3. Fourier-Reihe (10 P)

Seien $a_0, a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ die Fourier-Koeffizienten zur Funktion

$$f: [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$$

und f werde durch ihre Fourier-Reihe

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

dargestellt.

Welcher Zusammenhang besteht zu den Fourier-Koeffizienten $a_{0,g}$, $a_{1,g}$, $a_{2,g}$, $b_{1,g}$ und $b_{2,g}$? **Füllen Sie die Tabelle entsprechend aus**. Die erste Zeile ist schon exemplarisch ausgefüllt.

Falsche oder fehlende Einträge führen zu Punktabzügen innerhalb einer Zeile. (Sie brauchen Ihre Angaben nicht zu begründen.

	$a_{0,g}$	$a_{1,g}$	$a_{2,g}$	$b_{1,g}$	$b_{2,g}$	
$g(t) = -f(t)$	$-a_0$	$-a_1$	$-a_2$	$-b_1$	$-b_2$	
$g(t) = f(t) + 2$	$a_0 + 4$	a_1	a_2	b_1	b_2	2,5 P
$g(t) = f(t) - \sin(t)$	a_0	a_1	a_2	$b_1 - 1$	b_2	2,5 P
$g(t) = f(-t)$	a_0	a_1	a_2	$-b_1$	$-b_2$	2,5 P
$g(t) = 4 \cdot f(t)$	$4a_0$	$4a_1$	$4a_2$	$4b_1$	$4b_2$	2,5 P

Σ 10 P