Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften

Ostfalia Fakultät Fahrzeugtechnik

Labor Regelungstechnik

Hausaufgaben für Labor 1

Geprüft von:
M.Eng. Aschen
Prof. Dr.-Ing. Lichte

Bearbeitet von:
[redacted]

Durchgeführt am:
25. April 2022

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

1 Herleitung der Formel für den geschlossenen Regelkreis

Gegeben sei das System in der folgenden Abbildung *(siehe Abb. 1-1)*.

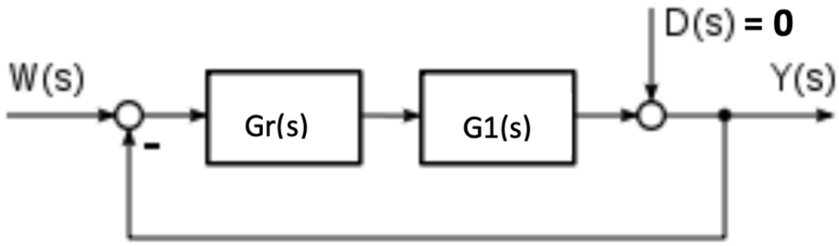

Abbildung 1-1: Blockschaltbild des gegebenen Systems

1.1 Bestimmung der Übertragungsfunktion

Aufgabenstellung:

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion $g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)}$ für das System *(siehe Abb. 1-1)*.

$$Y(s) = -Y(s) \cdot Gr(s) \cdot G1(s) + W(s) \cdot Gr(s) \cdot G1(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) + Y(s) \cdot Gr(s) \cdot G1(s) = W(s) \cdot Gr(s) \cdot G1(s)$$

$$\Rightarrow \quad Y(s) \cdot (1 + Gr(s) \cdot G1(s)) = W(s) \cdot Gr(s) \cdot G1(s)$$

$$\Rightarrow \quad g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Gr(s) \cdot G1(s)}{1 + Gr(s) \cdot G1(s)}$$

2 PT 1 -Strecke mit P-Regler

Gegeben sei eine PT1-Regelstrecke $G1(s) = \frac{V}{T1 \cdot s+1}$ mit V = 5, T1 = 10 und ein P-Regler $Gr(s) = Kp$.

2.1 Allgemeine Übertragungsfunktion

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie anhand der Formel in Frage 1 die allgemeine Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises (T 1-Strecke mit P-Regler). Welches Glied bildet der geschlossene Regelkreis?

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \quad = \frac{Gr(s) \cdot G1(s)}{1 + Gr(s) \cdot G1(s)}$$

$$mit\ G1(s) = \frac{V}{T1 \cdot s+1}\ und\ Gr(s) = Kp:$$

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \quad = \frac{Kp \cdot \frac{V}{T1 \cdot s + 1}}{1 + Kp \cdot \frac{V}{T1 \cdot s + 1}}$$

$$= \frac{\frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1}}{\frac{T1 \cdot s + 1 + Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1}}$$

$$= \frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1 + Kp \cdot V} \tag{2.1}$$

$$mit\ V = 5\ und\ T1 = 10:$$

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} \quad = \frac{Kp \cdot 5}{10 \cdot s + 1 + Kp \cdot 5} \tag{2.2}$$

Der geschlossene Regelkreis bildet mit seiner allgemeinen Übertragungsfunktion *(siehe Gl. 2.1)* ein PT 1 -Glied. Dies wird mithilfe der Grundform eines PT 1 -Gliedes $\frac{V}{Tg \cdot s+1}$ ersichtlich.

2.2 Verstärkung Vg und Zeitkontante Tg

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie nun die Verstärkung Vg und die Zeitkontante Tg des geschlossenen Regelkreises im Fall Kp = 10 und im Fall Kp = 50. Vergleichen Sie dann die Verstärkungswerte mit den stationären Endwerten in Ihren Laborergebnissen (Tabelle).

Durch Umformung der allgemeinen Übertragungsfunktion *(siehe Gl. 2.1)* kann diese wie folgt dargestellt werden. In dieser Darstellung *(siehe Gl. 2.3)* kann mithilfe der Grundform eines PT 1 -Gliedes $\frac{V}{Tg \cdot s+1}$ die Verstärkung Vg und die Zeitkontante Tg abgelesen werden.

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1 + Kp \cdot V}$$

$$= \frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1 + Kp \cdot V} \cdot \frac{\frac{1}{1 + Kp \cdot V}}{\frac{1}{1 + Kp \cdot V}}$$

$$= \frac{Kp \cdot V}{Kp \cdot V + 1} \cdot \frac{1}{\frac{T1}{Kp \cdot V + 1} \cdot s + 1} \tag{2.3}$$

Somit ergeben sich für die allgemeinen Übertragungsfunktion folgende Gleichungen, welche die Verstärkung Vg und die Zeitkontante Tg beschreiben.

$$\text{Vg} = \frac{Kp \cdot V}{Kp \cdot V + 1}$$

$$\text{Tg} = \frac{T1}{Kp \cdot V + 1}$$

Im Fall Kp = 10:

$$\text{Vg} = \frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1} = \frac{10 \cdot 5}{10 \cdot 5 + 1} = \frac{50}{51} = 0{,}9803$$

$$\text{Tg} = \frac{T1}{Kp \cdot V + 1} = \frac{10}{10 \cdot 5 + 1} = \frac{10}{51} = 0{,}1961$$

Im Fall Kp = 50:

$$\text{Vg} = \frac{Kp \cdot V}{T1 \cdot s + 1} = \frac{50 \cdot 5}{50 \cdot 5 + 1} = \frac{250}{251} = 0{,}9960$$

$$\text{Tg} = \frac{T1}{Kp \cdot V + 1} = \frac{10}{50 \cdot 5 + 1} = \frac{10}{251} = 0{,}0398$$

Der Vergleich der Verstärkungswerte mit den stationären Endwerten der Laborergebnisse ergibt, da diese zahlenmäßig exakt übereinstimmen.

2.3 Pol- und Nullstellen der Übertragungsfunktion

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie die Pol-Nullstellen für die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises im Fall Kp = 10 und im Fall Kp = 50. Vergleichen Sie die berechneten Werte mit Ihren Laborergebnissen.

Da der Zähler der Funktion konstant ist bzw. nicht die Variable s enthält, besitzt die Übertragungsfunktion keine Nullstellen. Die Polstellen entsprechen den Nullstellen des Nenners, weshalb dieser für die Berechnung wie folgt gleich Null gesetzt werden muss.

$$0 = T1 \cdot s + 1 + Kp \cdot V$$

$$s = -\frac{1 + Kp \cdot V}{T1} \tag{2.4}$$

Im Fall Kp = 10:

$$s = -\frac{1 + Kp \cdot V}{T1} = -\frac{1 + 10 \cdot 5}{10} = -\frac{51}{10} = -5{,}10$$

Im Fall Kp = 50:

$$s = -\frac{1 + Kp \cdot V}{T1} = -\frac{1 + 50 \cdot 5}{10} = -\frac{251}{10} = -25{,}1$$

Der Vergleich der Polstellen mit den entsprechenden Pol-Lagen in den Laborergebnissen zeigt, dass diese identisch sind.

2.4 Stabilität bei größerer Reglerverstärkung

Aufgabenstellung:
Ist der geschlossene Regelkreis bei größerer Reglerverstärkung (Kp) stabiler oder instabiler und warum?

Je geringer der Realteil der Polstelle ist bzw. desto weiter diese in der linken s-Halbebene liegt, umso stabiler ist das System. Das Verhalten der Lage der Polstelle für größere Reglerverstärkungen Kp, kann mithilfe einer Grenzwertbetrachtung der Gleichung (2.4), mit welcher die Polstellen berechnet werden, bestimmt werden.

$$\lim_{\mathrm{Kp}\to\infty} s = \lim_{\mathrm{Kp}\to\infty} -\frac{1 + Kp \cdot V}{T1} = -\infty$$

Hierbei wird deutlich das für große Reglerverstärkungen Kp die Polstelle immer geringer wird bzw. weiter in die linken s-Halbebene rückt. Somit wird das System für große Reglerverstärkungen Kp folglich immer stabiler.

3 PT 1 -Strecke mit I-Regler

Gegeben sei eine PT1-Regelstrecke $G1(s) = \frac{V}{T1 \cdot s+1}$ mit V = 2, T1 = 10 und ein I-Regler $\mathrm{Gr}(s) = \frac{KI}{s}$.

3.1 Allgemeine Übertragungsfunktion

Aufgabenstellung:

Berechnen Sie anhand der Formel in Frage 1 die allgemeinen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises mit I-Regler im Fall KI = 5 und im Fall KI = 100. Welches Glied bildet der geschlossene Regelkreis und warum?

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{Gr(s) \cdot G1(s)}{1 + Gr(s) \cdot G1(s)}$$

$$mit\ G1(s) = \frac{V}{T1 \cdot s+1}\ und\ Gr(s) = \frac{KI}{s}:$$

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{\frac{KI}{s} \cdot \frac{V}{T1 \cdot s + 1}}{1 + \frac{KI}{s} \cdot \frac{V}{T1 \cdot s + 1}}$$

$$= \frac{\frac{KI \cdot V}{T1 \cdot s^2 + s}}{1 + \frac{KI \cdot V}{T1 \cdot s^2 + s}}$$

$$= \frac{\frac{KI \cdot V}{T1 \cdot s^2 + s}}{\frac{T1 \cdot s^2 + s + KI \cdot V}{T1 \cdot s^2 + s}}$$

$$= \frac{KI \cdot V}{T1 \cdot s^2 + s + KI \cdot V}$$

$$= \frac{1}{\frac{T1}{KI \cdot V} \cdot s^2 + \frac{1}{KI \cdot V} \cdot s + 1} \tag{3.1}$$

$$mit\ V = 2\ und\ T1 = 10:$$

$$g(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \frac{1}{\frac{10}{KI \cdot 2} \cdot s^2 + \frac{1}{KI \cdot 2} \cdot s + 1} \tag{3.2}$$

Der geschlossene Regelkreis bildet mit seiner allgemeinen Übertragungsfunktion *(siehe Gl. 3.1)* ein PT 2 -Glied. Dies wird mithilfe der Grundform eines PT 2 -Gliedes *(siehe Gl. 3.3)* ersichtlich. Durch die Multiplikation des I-Reglers mit der Regelstrecke bildet sich im Nenner, die für ein PT 2 -Glied markante Funktion, zweiter Ordnung.

$$G(s) = \frac{V}{\frac{1}{\omega^2} \cdot s^2 + \frac{2D}{\omega} \cdot s + 1} \tag{3.3}$$

Im Fall KI = 5:

$$s = \frac{1}{\frac{10}{5 \cdot 2} \cdot s^2 + \frac{1}{5 \cdot 2} \cdot s + 1} = \frac{1}{s^2 + \frac{1}{10} \cdot s + 1}$$

Im Fall KI = 100:

$$s = \frac{1}{\frac{10}{100 \cdot 2} \cdot s^2 + \frac{1}{100 \cdot 2} \cdot s + 1} = \frac{1}{\frac{1}{20} \cdot s^2 + \frac{1}{200} \cdot s + 1}$$

3.2 Vergleichen mit der Übertragungsfunktion des PT2-Gliedes

Aufgabenstellung:
Vergleichen Sie die Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises im Fall KI = 5 und im Fall KI = 100 mit der Übertragungsfunktion des PT2-Gliedes (Labor 1_SS22.pdf / Seite 9) und berechnen Sie jeweils die Dämpfung D.

Ein Koeffizientenvergleich zwischen der Übertragungsfunktion des PT2-Gliedes und der allgemeinen Übertragungsfunktionen des geschlossenen Regelkreises mit I-Regler macht die Berechnung der Dämpfung D möglich.

$$\frac{V}{\frac{1}{\omega^2}\cdot s^2+\frac{2D}{\omega}\cdot s+1}=\frac{1}{\frac{10}{KI\cdot 2}\cdot s^2+\frac{1}{KI\cdot 2}\cdot s+1}$$

Bei der Betrachtung de Faktoren vor dem s^2 und s können folgende zwei Zusammenhänge herausgelesen werden. Nach der Umstellung der Faktoren kann mit diesen zunächst die Kreisfrequenz ω und dann die Dämpfung D berechnet werden.

$$\frac{1}{\omega^2} = \frac{10}{KI\cdot 2}$$

$$\Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{KI\cdot 2}{10}} \tag{3.4}$$

$$\frac{2D}{\omega} = \frac{1}{KI\cdot 2}$$

$$\Rightarrow \qquad D = \frac{\omega}{KI\cdot 4} \tag{3.5}$$

Im Fall KI = 5:

$$\omega = \sqrt{\frac{KI\cdot 2}{10}} = \sqrt{\frac{5\cdot 2}{10}} = 1$$

$$D = \frac{\omega}{KI\cdot 4} = \frac{1}{5\cdot 4} = \frac{1}{20} = 0{,}05$$

Im Fall KI = 100:

$$\omega = \sqrt{\frac{KI\cdot 2}{10}} = \sqrt{\frac{100\cdot 2}{10}} = 4{,}472$$

$$D = \frac{\omega}{KI\cdot 4} = \frac{4{,}47}{100\cdot 4} = \frac{4{,}47}{400} = 0{,}011$$

3.3 Vergleich der Ausregelzeiten des Regelkreises

Aufgabenstellung:

Vergleichen Sie die Ausregelzeit des Regelkreises im Fall KI = 5 und KI = 100.

Die Ausregelzeit des Regelkreises im Fall KI = 5 entspricht 59,7s und ist somit höher als die Ausregelzeit im Fall KI = 100 mit 57,8s. Dies lässt sich mithilfe der Dämpfung D begründen. Diese ist im Fall KI = 5 mit D = 0,05 deutlich höher als im Fall KI = 100 mit D = 0,011. Die Übertragungsfunktion besitzt komplexe Pole, da mit $1 \geq D \geq 0$ der periodische Fall vorliegt. Eine höhere Dämpfung D führt hier zu einem schnelleren Abklingen der Schwingung. Die Ausregelzeit ist eine Kenngröße für die Geschwindigkeit, mit der eine Regelung sich nach einer sprungförmigen Änderung des Sollwertes auf ihren Endwert einschwingt. Sie beginnt, nachdem der Istwert ein vorgegebenes Toleranzband um den Sollwert verlässt und endet, wenn der Istwert letztmalig in das vorgegebenes Toleranzband eintritt. Eine geringere Ausregelzeit lässt sich somit durch eine höhere Dämpfung D erzielen, welche wiederum durch einen geringeren Beiwert KI hervorgerufen wird, wie sich mit der Berechnung in der Aufgabe 3.2 zeigen lässt. Mathematisch lässt sich dies auch mit einer Grenzwertbetrachtung der Gleichung (3.4) und (3.5) beweisen.

$$D = \frac{\sqrt{\frac{KI \cdot 2}{10}}}{KI \cdot 4}$$

$$= \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{KI}}$$

$$\lim_{\mathrm{KI} \to \infty} D = \lim_{\mathrm{KI} \to \infty} \frac{\frac{4\sqrt{5}}{5}}{\sqrt{KI}} = 0$$

Hier ist deutlich zu sehen das ein hoher Beiwert KI nur eine geringe Dämpfung D hervorruft, dies wiederum führt wie erläutert zu einer höheren Ausregelzeit.

4 PT 1 -Strecke mit PI-Regler

Gegeben sei eine PT1-Regelstrecke $G1(s) = \frac{V}{T1 \cdot s+1}$ mit V = 2, T1 = 10 und ein PI-Regler $\mathrm{Gr}(s) = \frac{Kps+KI}{s}$.

4.1 Vergleich mit Verhalten des Regelkreises mit PI Regler

Aufgabenstellung:

Vergleichen Sie anhand der Eintragungen in der Tabelle oder der Simulation das Verhalten des Regelkreises mit PI Regler mit denen in Frage 2 und Frage 3 (P und I Regler) bezüglich des stationären Endwertes und der Ausregelzeit.

Der P-Regler erreicht am schnellsten den Toleranzbereich von fünf Prozent und hat somit die geringsten Ausregelzeiten für die verschiedenen Beiwerte. Der stationäre Endwert von Eins wird bei dem P-Regler jedoch nie erreicht. Der I-Regler hingegen hat eine sehr hohe Ausregelzeit, erreicht dafür aber einen stationären Endwert von Eins. Der PI-Regler besteht aus den Komponenten eines P- und I-Reglers und vereint somit deren Vorteile. Der PI-Regler hat für gewisse Beiwertkonstellationen, ähnlich wie der P-Regler eine geringe Ausregelzeit. Erreicht jedoch auch wie der I-Regler einen stationären Endwert von Eins.

Tabelle mit Simulationsergebnissen

	P-Regler				I-Regler				PI-Regler					
Kp	2	10	20	50	-	-	-	-	1	5	1	5	10	5
KI	-	-	-	-	1	5	10	100	1	1	5	5	1	2
Anstiegszeit	2,72s	0,987s	0,297s	0,119s	3,66s	1,57s	1,1s	0,34s	3,26s	2,24s	1,48s	1,19s	1,5s	1,71s
Überschwingweite	0	0	0	0	0,7	0,85	0,89	0,97	0,36	0,05	0,63	0,24	0	0,12
Ausregelzeit	2,72s	0,987s	0,297s	0,119s	57,8s	59,7s	58,1s	59,7s	16,8	2,24	19,4	4,42	1,5	6,44
Stat. Endwert	0,909	0,98	0,99	0,996	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Amplitudenreserve	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
Phasenreserve	95,7°	91,1°	90,6°	90,2°	12,8°	5,72°	4,05°	1,28°	37,1°	84,5°	17,1°	56,3°	90,0°	74,8°
Pol-Lage	-1,1	-5,1	-10,1	-25,1	-0,05 +j0,44	-0,05 +j0,99	-0,05 +j1,41	-0,05 +j4,47	-0,15 +j0,42	-0,23	-0,15 +j0,98	-0,55 +j0,84	-0,1	-0,55 +j0,31
					-0,05 -j0,44	-0,05 -j0,99	-0,05 -j1,41	-0,05 -j4,47	-0,15 -j0,42	-0,87	-0,15 -j0,98	-0,55 -j0,84	-2	-0,55 -j0,31