Signale und Systeme

Hinweis zum Urheberrecht und zur Benutzung dieses Dokumentes:

Tabellenverzeichnis

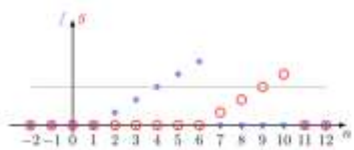
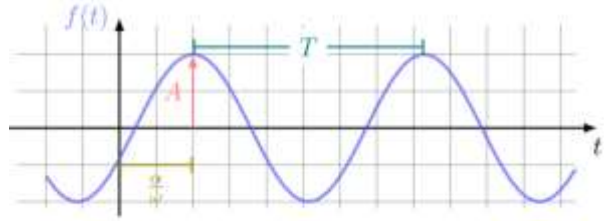
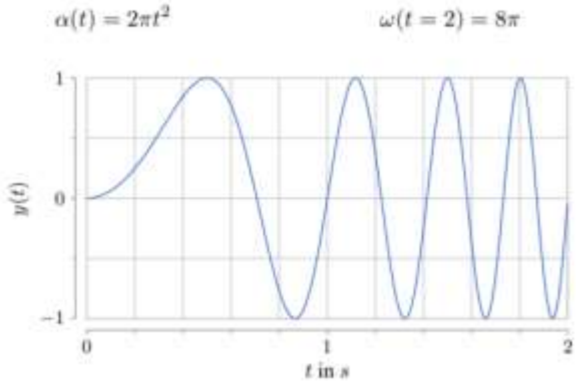
<table>
<tr><td colspan="2">Kapitel 1 Einleitung</td></tr>
<tr><td>Formel/Vorgehen</td><td>Beispiel</td></tr>
<tr><td><u>Das System und Systemarten (Lin., LTI, Zeitkont.)</u>
Ein System kann mit einem Mathematischen Modell, wie z.B. eine Differenzialgleichung, dargestellt werden.</td><td>Differenzialgleichung die einen Schaltkreis beschreibt, oder eine Physikaufgabe.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Lineare Systeme:</u>
Antwort des Systems auf lineare Eingangssignale entspricht eine lineare Kombination der Ausgangssignale.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Zeitinvariante Systeme:</u>
Das Ausgangssignal beschreibt eine Verschiebung des Eingangssignals.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>LTI (Linear Time Invariant) System:</u>
Ist ein System welches Lineare und Zeitinvariante Eigenschaften besitzt.</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Zeitkontinuerliche </u>Signale:
Sind zeitabhängige Funktionen, f(t).</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Zeitdiskrete </u>Signale:
Sind zeitunabhängige Folgen, f[n].</td></tr>
<tr><td><u>Skalierung und Verschiebung:</u>
Wenn g[n]=f[n-k] mit k>0 ist, stellt g eine verschobene Version von f[n] dar.</td><td>Beispiel Verschiebung:


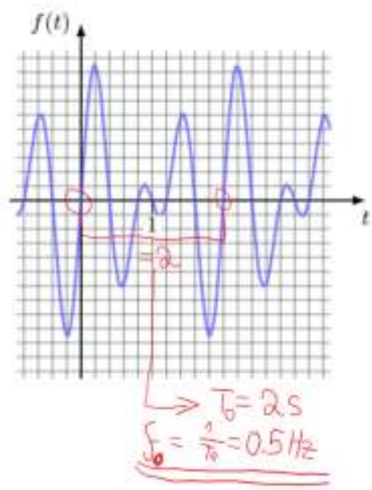
Abbildung 1: Verschiebung der Folge $f[n]$ um $k = 5$ Schritte nach rechts $g[n] = f[n-5]$
*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)</td></tr>
</table>

Kapitel 2 Kosinus und Komplexe Zahlen

Formel/Vorgehen	Beispiel
Bei Konstanter Winkelgeschwindigkeit schreibt sich die Kosinusfunktion zu: $$f(t) = Acos(2\pi ft + \alpha)$$ oder $$f(t) = Acos(\omega t + \alpha)$$ wobei $$\omega = 2\pi f$$ ist.	 Abbildung 2: Kosinusfunktion *BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)
Amplitude A ist einheitslos Frequenz f ist mit [Hz] = [1/s] definiert Winkelgeschwindigkeit w ist mit [rad*1/s] Phasenverzug/Phasenverschiebung a ist [rad]	
Der Phasenverzug a kann mit $f(t_{max})$=f(t+a) bestimmt werden, sodass das Maximum der sinus/cosinus Funktion bei einem beliebigen t_{max} geschieht.	Gegeben ist eine cosinusfunktion mit Amplitude A=2 und Kreisfrequenz w=2pi. Bestimmen Sie den Phasenverzug a sodass, das erste Maximum bei t=0.5s erreicht wird. Berechnung: Gegebene Funktion = f(t) = 2cos(2∏t+a) Einsetzen von t, und A: f_{max}(t)=A=2=2cos(2∏(0.5s)+a) 1=cos(∏+a) ∏+a=cos^{-1}(1) a = 0 - ∏ <u>a=∏</u>

<table>
<tr>
<td><u>Sinus Sweep:</u>
Ist ein Signal mit einer konstanten Winkelbeschleunigung, und einer variierten Phasenverschiebung. Die Phasenverschiebung ist quadratisch, somit ist dessen zweite Ableitung konstant (w‘‘(t)=k). Dadurch ändert sich die Frequenz linear. Der Sinus Sweep wird verwendet um das Verhalten eines Systems bei verschiedenen Frequenzen zu testen.</td>
<td>Beispiel eines Sinus Sweeps:


*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Komplexe Zahlen (Wiederholung):</u>
Sie erlauben eine Vereinfachung der Rechnung mit Sinus- und Cosinusfunktionen.
Eulersche Identität:
$$re^{j\alpha} = rcos(\alpha) + j * rsin(\alpha)$$
Polarkoordinaten eignen sich für multiplizieren
Eulersche für addieren</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"><u>Phasoren</u>:
Mit Komplexen Zahlen können Phasoren dargestellt werden:
$$Acos(\omega t + \alpha) = Re\left(Ae^{j(wt+\alpha)}\right) = Re\left(Ae^{jwt}e^{j\alpha}\right)$$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="2">Kapitel 3 Fourier Reihe</th></tr>
<tr><th>Formel/Vorgehen</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td colspan="2">Herleitung der Spektralen Darstellung:
Eine Spektrale Darstellung entsteht aus den komplexen Formen der in dem Signal enthaltenen Kosinus- und Sinusfunktionen.
$$Acos(\omega t+\alpha)=Re\left(Ae^{jwt}\right)=\frac{1}{2}\left(Ae^{jwt}+Ae^{-jwt}\right)$$
wobei
$$\omega=2\pi f$$
ist.
Somit entstehen die negativen Frequenzen aus formellen, mathematischen Gründen.</td></tr>
<tr><td>Erzeugen einer Spektralen Darstellung:
Besteht ein Signal aus einer Summe von Kosinus- und Sinusfunktionen
$$f(t)=A_0+\sum_{k=1}^{N}A_k\cos\left(\omega_k t+\alpha_k\right)$$
so kann ein „Zweiseitiges Spektrum“ erstellt werden, mit dem A_0 und alle weiteren Funktionen mit index k gilt:
$$\{(0,A_0),\left(\frac{\omega_k}{2},\frac{A_k}{2}e^{-\frac{j\pi}{3}}\right),\left(-\frac{\omega_k}{2},\frac{A_k}{2}e^{+\frac{j\pi}{3}}\right),\ldots\}$$
Der erste Term wo die Frequenz=0 ist heißt Gleichanteil.</td><td>Aus der Funktion:
$$x(t)=10+14\cos(200\pi t-\tfrac{\pi}{3})+8\cos(500\pi t+\tfrac{\pi}{2})$$
wird folgendes Spektrum erzeugt:
$$\left\{(0;10),(100;7e^{-j\frac{\pi}{3}}),(-100;7e^{j\frac{\pi}{3}}),(250;4e^{j\frac{\pi}{2}}),(-250;4e^{-j\frac{\pi}{2}})\right\}$$
*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)</td></tr>
<tr><td>Fourier Reihe:
Beschränkt man die Frequenzen auf vielfache einer gemeinsamen Grundfrequenz wk=k(2pi*f0) ist das neue Signal auch periodisch mit f(t) = f(t+T). Die kleinste zugehörige Frequenz heißt Grundfrequenz f_0. Die Summe nennt man dann Fourier Reihe.</td><td>Beispiel Bestimmung der Grundfrequenz:


*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)</td></tr>
</table>

Analysegleichung:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}\,dt$$

Synthesegleichung:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2\pi f_0 t}$$

x(t)- beschreibt die von der, Zeit t abhängige, Funktion, für die die Koeffizienten zu berechnen sind

T- beschreibt die Periode der ursprünglichen Funktion x(t)

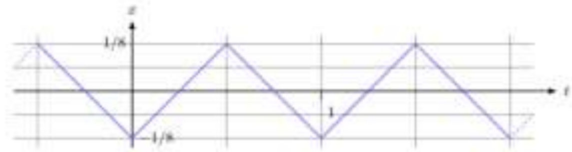
k- beschreibt den Index der Synthesegleichung, welcher bei der Integralrechnung als Konstante behandelt werden kann

f_0- beschreibt die Grundfrequenz

Leiten Sie die Fourierkoeffizienten von der Dreiecksfunktion mittels der Analysegleichung

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk2\pi f_0 t}\,dt$$

her



*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)

Dazu muss folgendes berechnet werden:

$$x(t) = \begin{cases} mx - b \ (0 < x < \frac{T}{2}) \\ -mx + b \ (\frac{T}{2} < x < T) \end{cases}$$

Die Steigung m, Periode T sowie Anfangspunkt b können aus der Abbildung entnommen werden. So resultiert für x(t):

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \ (0 < x < \frac{1}{2}) \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{8} \ (\frac{1}{2} < x < 1) \end{cases}$$

Der Fourierkoeffizient a_k ergibt sich aus der Analysegleichung mit:

$$a_k = \frac{1}{1}\int_0^1 x(t)e^{-jk2\pi 1t}\,dt$$

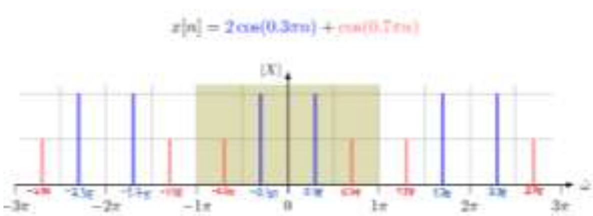
bzw. aus:

$$a_k = \int_0^{0.5} (\frac{1}{2}x - \frac{1}{8})e^{-jk2\pi 1t}\,dt + \int_{0.5}^{1} (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{8})e^{-jk2\pi 1t}\,dt$$

Sodass

$$a_k = -\frac{1}{2\pi^2 k^2}$$

Kapitel 4 Abtastung

Formel/Vorgehen	**Beispiel**
<u>Amplitudenspektrum Zeichnen</u> Das Zeitdiskrete Signal $x[n] = A_1 * cos(\omega_1 \mathrm{n}) + A_2 * cos(\omega_2 \mathrm{n}) + \cdots + A_i * cos(\omega_i \mathrm{n})$ beinhaltet mehrere Amplituden (A_i) und Kreisfrequenzen (ω_i). In dem Amplitudenspektrum soll für jedes $\pm\omega_i \pm 2\pi k$ in dem gegebenen Bereich (oder-π, π), ein Strich mit der Höhe der zugehörigen Amplitude A_i eingezeichnet werden.	Zeichnen Sie das Amplitudenspektrum für: $x[n] = 2cos(0.3\pi \mathrm{n}) + cos(0.7\pi \mathrm{n})$ in dem Bereich [-3π, 3π]. $\omega_1 = 0.3\pi$ mit $A_1 = 2$ Also jeweils einen Strich der höhe 2 für: $\omega_1 = 0.3\pi + 2\pi(0) = 0.3\pi$ $\omega_1 = 0.3\pi - 2\pi(0) = 0.3\pi$ $\omega_1 = 0.3\pi + 2\pi(1) = 2.3\pi$ $\omega_1 = 0.3\pi - 2\pi(1) = -1.7\pi$ $\omega_1 = -0.3\pi + 2\pi(0) = -0.3\pi$ $\omega_1 = -0.3\pi - 2\pi(0) = -0.3\pi$ $\omega_1 = -0.3\pi + 2\pi(1) = 1.7\pi$ $\omega_1 = -0.3\pi - 2\pi(1) = -2.3\pi$ Striche der Höhe A=2 für ω_1 bei: $\{-2.3\pi, -1.7\pi, -0.3\pi,\ 0.3\pi, 1.7\pi, 2.3\pi\}$ Nun dasselbe für $\omega_2 = 0.7\pi$ mit $A_2 = 1$ liefert Striche der Höher A=1 für ω_2 bei: $\{-2.7\pi, -1.3\pi, -0.7\pi, 0.7\pi, 1.3\pi, 2.7\pi\}$ Das Amplitudenspektrum würde so aussehen:  *BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)

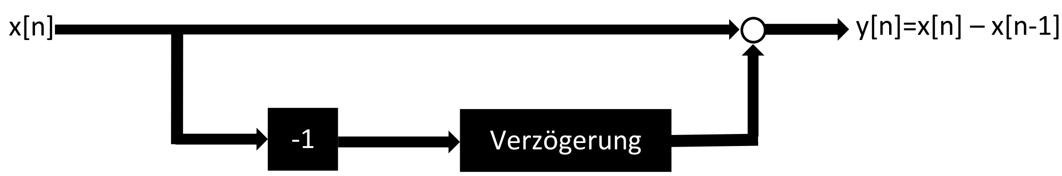
<u>Amplitudenspektrum interpretieren</u> Das Amplitudenspektrum wird meist innerhalb eines Intervalls von [-∏,∏] berücksichtigt, sodass nur die in dem Intervall auftretenden Kreisfrequenzen bzw. Amplituden abgelesen werden. Es werden nur die Positiven Kreisfrequenzen verwendet.	Wenn aus dem obigen Diagramm das Intervall zwischen [-∏,∏] interpretiert wird (der gelb markierte Bereich) kann folgende Funktion abgelesen werden: $\omega_1 = 0.3\pi$ mit $A_1 = 2$ (blau) $\omega_2 = 0.7\pi$ mit $A_2 = 1$ (rot) sodass die ursprüngliche Funktion: $x[n] = 2cos(0.3\pi n) + cos(0.7\pi n)$ wieder vollständig abgelesen werden kann. Wenn die Abtastfrequenz zu gering ist (f_s<2f) kann das ursprüngliche Signal nicht korrekt abgelesen werden, d.h. es wird ein Alias von dem Signal verwendet und wieder ins Zeitkontinuerliche gebracht.

Kapitel 5.1 Zeitdiskrete Systeme als Blockschaltbilder

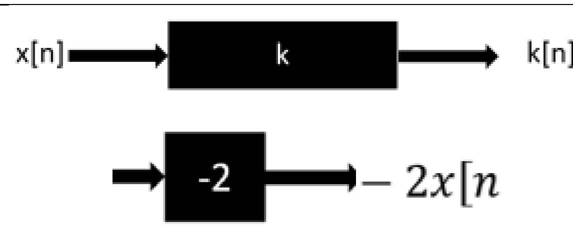
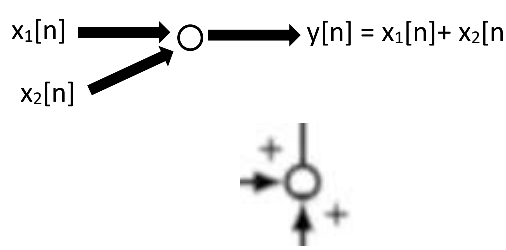
<table>
<tr><th>Formel/Vorgehen</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>Zeitdiskrete Systeme sind:
-Zeit und ggf. Wertediskret (wird nicht behandelt)
-Können gut von Computer verarbeitet werden
-Leichter zu berechnen</td><td></td></tr>
<tr><td>Differenzmaschine
Gibt als Ausgangssignal die Differenz zwischen dem aktuellen und vorherigen Wert eines zeitdiskreten Eingangssignals aus. Ist für effiziente Speicherung von Daten geeignet.</td><td>Beispiel einer Differenzmaschine könnte sein:
y[n] = x[n] – x[n-1]
Wobei y das Ausgangssignal, x das Eingangssignal und n das zeitdiskrete Index darstellt.
Diese kann in eine Tabelle überführt werden:
<table>
<tr><th>n</th><th>x[n]</th><th>x[n-1]</th><th>y[n]</th></tr>
<tr><td>n<0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>n>5</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>Dirac Impuls
Es gibt verschiedene Zeitdiskrete Eingangssignale, die zur Erprobung des Verhaltens eines Systems dienen können. Das einfachste Signal ist der Dirac Impuls, welcher im Zeitdiskreten überall =0 ist außer bei n=0. Die Erprobung eines Signals mithilfe des Dirac Impuls wird als Impulsantwort bezeichnet.</td><td>Der Dirac Impuls ist im Zeitdiskreten wie folgt definiert:
$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \; für \; n = 0 \\ 0 \; sonst \end{cases}$$</td></tr>
</table>

Blockschaltbilder:

Die Systeme können entweder als Gleichung oder als Blockschaltbild dargestellt werden. Das Blockschaltbild ermöglicht eine bessere Veranschaulichung der Umsetzung des Systems in einen Schaltkreis.
Das obige Beispiel würde wie folgt aussehen:



In einem Blockschaltbild gelten folgende Komponenten:

Verzögerung R Die Verzögerung liefert als Ausgang eine um 1*n verzögerte Version des Eingangssignals. Für eine Verzögerung muss auch ein Anfangszustand festgelegt werden da anfangs der vorherige Wert von x[n] undefiniert ist. Eine Verzögerung wird in der Differenzengleichung als x[n-1] beschrieben. Ein um zwei verzögertes Signal würde mit x[n-2], oder im Bild mit zwei hintereinanderliegenden Verzögerungen beschrieben werden.	
Verstärkung/Skalierung Die Verstärkung liefert als Ausgang eine um k verstärkte Version des Eingangssignals. Die Skalierung beschreibt das Multiplizieren eines Signals mit einem Faktor, wird als Koeffizient in die Formel einbezogen und in dem Blockschaltbild als Zahl innerhalb eines Kastens.	
Knoten Alle Signale, die an einem Knoten eines Blockschaltbildes auftreten, werden (je nach Pfeilrichtung) summiert. Knoten werden in dem Blockschaltbild mit einem Kreis beschrieben und in der Formel einfach mit dem Addieren/Subtrahieren der Terme. Es sollten an einem Punkt nicht mehr als zwei Signale summiert werden.	

Operator Gleichung/Systemfunktional

Die Operator Gleichung ist eine andere Beschreibung der Differenzengleichung, welche dem Blockschaltbild näher ist. Sie kann auch recht einfach aus dem Blockschaltbild aufgestellt werden. Wichtig ist dass, das Systemfunktional mit Y/X angegeben wird (also beide Seiten der Operator Gleichung durch X teilen).

Bei der Operator Gleichung werden die Verzögerungen mit R beschrieben, sodass

$$x[n-k]$$

als

$$R^k X$$

beschrieben wird.

Somit entfällt das [n] bei x[n]:

$$x[n] \rightarrow X$$

RX beschreibt also eine um 1 nach rechts verzögerter Version des Eingangssignales.

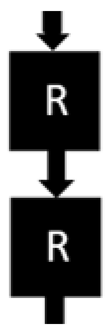
$$RX = x[n-1]$$

R^2X beschreibt eine um zwei nach rechts verzögerter Version des Eingangssignales, und sollte nicht mit 2RX verwechselt werden:

$$R^2X = x[n-2]$$
$$2RX = 2x[n-1]$$

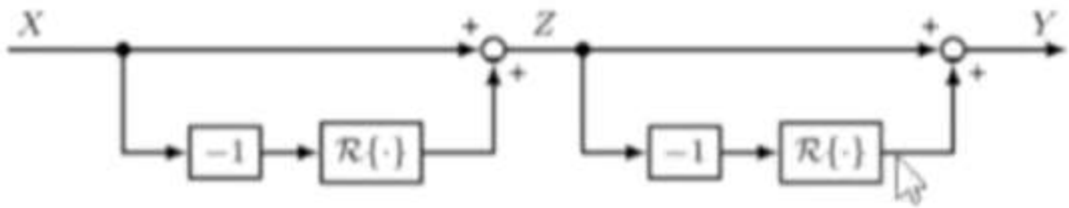
Koeffizienten stellen immer eine Skalierung dar, sodass 2RX ein um 2 skaliertes, und um 1 verzögertes Signal beschreiben würde, während R^2X ein doppelt verzögertes beschreibt.

R^2 in einem Blockschaltbild:



Verstärkung und Knoten werden ähnlich behandelt wie bei den Differenzengleichungen.

Hier ist als Beispiel ein Blockschaltbild.



*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)
Mithilfe der Operatoren Schreibweise kann erst das Ausgangssignal Z[n] berechnet werden, um anschließend Y[n] zu berechnen.
Somit wäre

$$Z = X + (-1 * RX) = X - RX = X(1 - R)$$

Im nächsten Schritt kann Y[n] mit Z[n] als Eingang berechnet werden:

$$Y = Z + -1 * RZ = Z - RZ = Z(1 - R)$$

Wenn nun für Z[n] eingesetzt wird erhält man:

$$Y = (X(1 - R))(1 - R) = X(1 - R)^2$$

Nun muss das für Y[n] erhaltene Polynom ausmultipliziert und so umgeformt werden, dass daraus ein Blockschaltbild erzeugt werden kann:

$$Y = (1 - 2R + R^2)X = (1 + (-2R + R^2))X$$

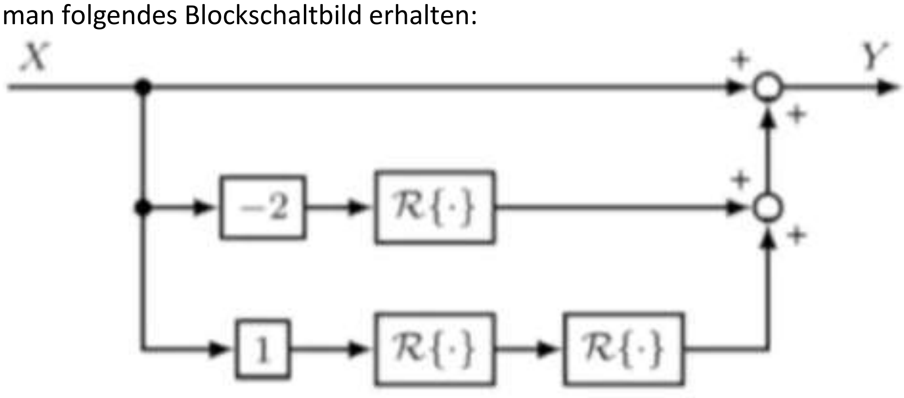
$$Y = X + X(-2R) + X(R^2)$$

Aus dieser Formel können folgende Zweige bestimmt werden:

-X ist einfach das unveränderte Eingangssignal

-X(-2R) ist das Eingangssignal um -2 Skaliert, und um 1 nach rechts verzögert

-XR^2 ist das Eingangssignal um 1 (also nicht) Skaliert, und um 2 nach rechts verzögert.
Somit würde man folgendes Blockschaltbild erhalten:



*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)

Würde man dieselbe Formel als

$$Y = (1 + R(-2 + R))X$$

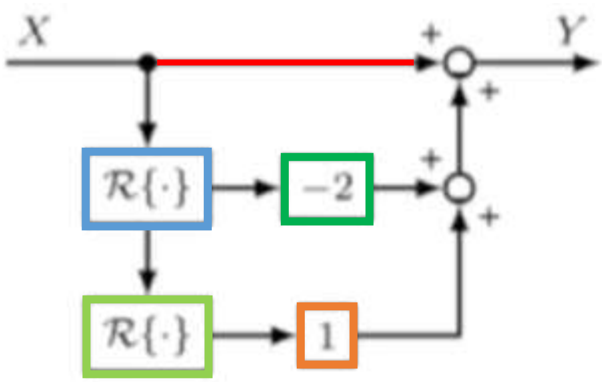
Betrachten, so würde man ein anderes Blockschaltbild erhalten. Zur Veranschaulichung ist die Formel mit Farben versehen.

$$Y = (1 + R(-2 + R))X$$

-Die 1 stellt dann den Zweig des unveränderten Eingangssignals X dar

-Das R vor der Klammer heißt das der Inhalt der klammer direkt nach das R angeschlossen werden kann also wenn ein Term R(...) existiert, so malen wir ein R und schließen am Ausgang des R's die Zweige für die in der Klammer enthaltenen Terme an.

-Somit wäre an dem Ausgang des R's einen Zweig mit der Skalierung -2 und einen Zweig mit dem anderen R (und der Skalierung 1).
Das resultierende Schaltbild sieht so aus:



*BITTE QUELLE LESEN (Siehe letzte Seite)

Die Systemfunktion wird erhalten in dem man die vereinfachte Gleichung auf beiden Seiten durch X teilt, sodass man Y/X=... erhält:

$$\frac{Y}{X} = 1 - 2R + R^2$$

Von Blockschaltbild zur Gleichung

Ähnlich wie im vorherigen, aber halt anders herum, kann aus einem Blockschaltbild eine Gleichung aufgestellt werden. Hier ist ein vollständiges Beispiel um dies nochm

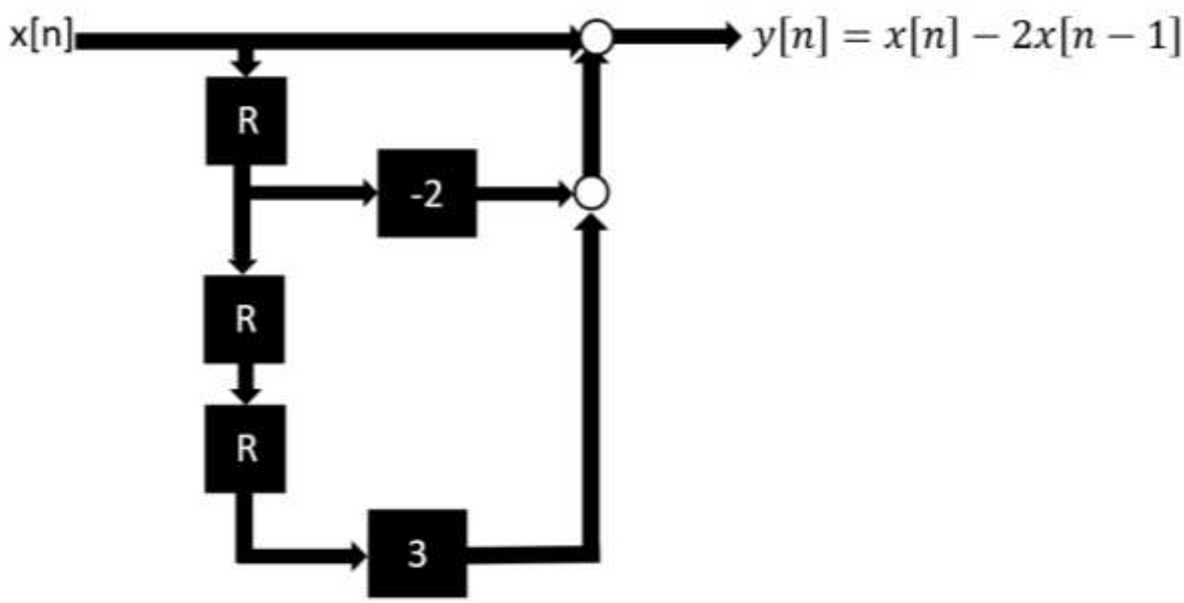
Gegeben sei folgende Differenzengleichung:

$$y[n] = x[n] - 2x[n-1] + 3x[n-3]$$

1. Berechnen Sie die den Systemausgang der Schritte n=-1,…,5 für die Anregung des Systems mit dem diskreten Einheitsimpuls $x[n] = \delta[n]$. Das System ist vorher in Ruhe->(heißt man kann für n<-1 annehmen dass x[n<-1]=0 ist.

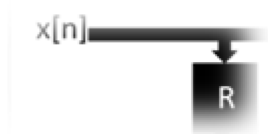
n	x[n]	-2x[n-1]	3x[n-3]	y[n]
n<-1	0	0	0	0
-1	0	0	0	0
0	1	0	0	1
1	0	-2	0	-2
2	0	0	0	0
3	0	0	3	3
4	0	0	0	0
5	0	0	0	0
n>5	0	0	0	0

2. Zeichnen Sie das Blockschaltbild.



3. Berechnen Sie das Systemfunktional des Systems Y/X mit Hilfe der Operationsschreibweise.

Das erste was wir aus dem Blockschalt entnehmen können sind: das ursprüngliche Eingangssignal x[n] und der Zweig des verzögerten Eingangssignals.

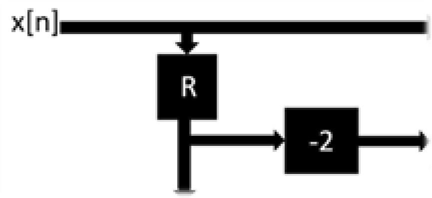


$$Y = X + RX(\dots)$$

Zunächst können wir das X auf die Linke Seite bringen, indem wir die Gleichung durch X teilen.

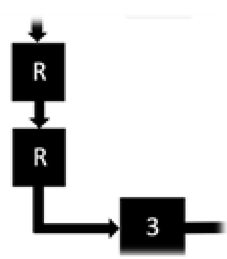
$$\frac{Y}{X} = 1 + R(\dots)$$

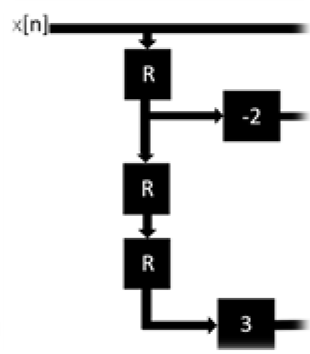
Nun betrachten wir die in dem () enthaltenen Zweige, wobei der Obere Zweig eine Skalierung von -2 beschreibt. Den Inhalt des Unteren Zweigs wird im folgenden Schritt genauer betrachtet.



$$\frac{Y}{X} = 1 + R((\dots) + (-2))$$

Der Untere Zweig enthält zwei hintereinanderliegenden Verzögerungen, welche wie bereits erwähnt als R^2 beschrieben werden können, sowie das aus der Skalierung resultierende Vorzeichen 3.





$$\frac{Y}{X} = 1 + R\big((3R^2) + (-2)\big)$$

So ergibt sich für die Schaltung die Formel:

$$\frac{Y}{X} = 1 + R(3R^2 - 2)$$

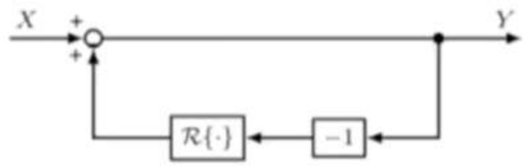
Zusammenfassung

Die verschiedenen Darstellungsformen des 5. Kapitels können wie folgt zusammengefasst werden:

1. Die Verbale Darstellungsform kommt sehr häufig vor, und kann als Problemstellung verwendet werden um Systeme aufzustellen.
2. Die Differenzengleichung bringt einige Vorteile mit sich, da sie recht kompakt, präzise und einzelwertorientiert ist.
3. Das Blockschaltbild bringt ein guten Ansatzcharakter mit sich, und dient als gute Veranschaulichung eines Systems.
4. Die Operatorgleichung ist sehr Signalorientiert und beschreibt Signale als Polynome.

Kapitel 5.2 Rückkopplung

Eine Rückkopplung entsteht sobald ein **Signal von seinen eigenen Altwerten abhängig** ist.
Bei einer Rückkopplung können **unendliche Ausgangswerte** entstehen. Systeme mit unendlich langer Impulsantwort werden als **Infinite Impulse Response (IIR)** Systeme bezeichnet. Diese gelten generell als **instabil**.
Systeme mit endlich langer Impulsantwort werden als **Finite Impulse Response (FIR)** Systeme bezeichnet. Diese gelten als **stabil.**
Wenn die Impulsantwort bei wachsendem n konvergiert, so wird es als Gegenkopplung bezeichnet.
Wenn die Impulsantwort bei wachsendem n divergiert, wird es als Mitkopplung bezeichnet.
Die Divergenz des Systems wird meist von der Verstärkung bestimmt.



$$y[n] = x[n] - y[n-1] \qquad Y = X - \mathcal{R}Y \Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{1}{1+\mathcal{R}}$$

Bei einer Rückkopplung wird die Richtung des Signals geändert, sodass das Eingangssignal über eine Schaltung in das Eingangssignal zurückgeführt wird.
Als Beispiel kann die Impulse Antwort des obigen Systems berechnet werden wenn

$$y[n] = x[n] - y[n-1]$$

mit dem Anfangszustand

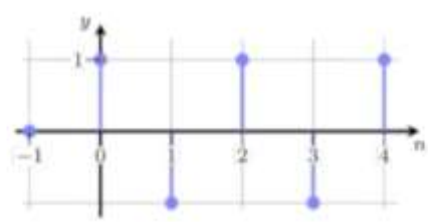
$$y[n] = 0, n < 0$$

gilt. Vorerst wird folgende Tabelle gebildet

Tabelle

n	x[n]	y[n-1]	y[n]
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	-1
2	0	-1	1
3	0	1	-1

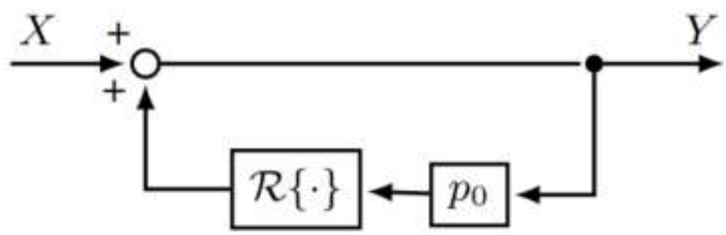
Das Diagramm für y[n]



Das System wird, im Gegensatz zu den vorherigen Systemen, periodisch, und kann mit der Gleichung $(-1)^n$ beschrieben werden.

Pol eines Systems

Die **allgemeine Verstärkung** eines Systems wird als Pol des Systems, mit dem Buchstaben p_0 bezeichnet. Besitzt ein System eine Rückkopplung mit einem Pol größer als 1 ist es meist instabil, da das Ausgangssignal bis ins unendliche verstärkt wird.

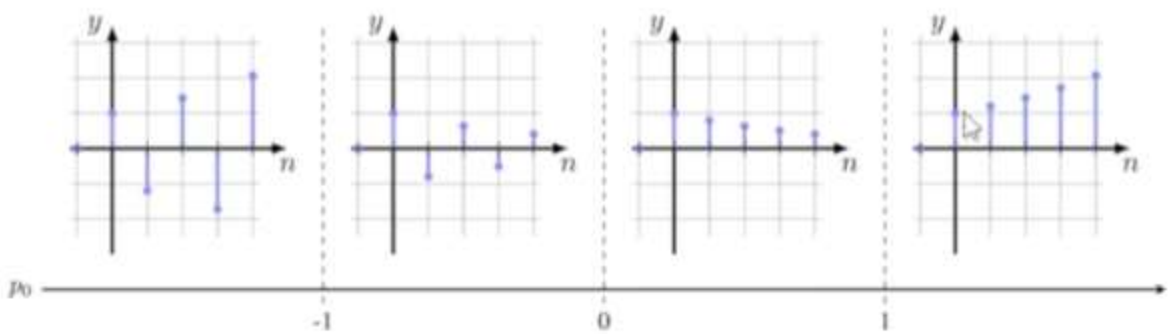


Die oben gezeigte Rückkopplung weißt ein allgemeines Verhalten von

$$y[n] = h[n] = (p_0)^n$$

Der Ausgang des Systems kann ohne den vorherigen Ausgangswerten bestimmt werden. Die entstehende Exponentialfolge nennt man **Eigenmode** des Systems.

Man unterscheidet zwischen Pole die größer oder kleiner als 1 sind, sowie positive und negative.



Das obige Diagramm veranschaulicht das Verhalten der jeweiligen Polen. Es sind zwei bemerkenswerte Phänomene die auftreten:

Negative Pole erzeugen ein alternierendes Vorzeichen

Pole größer als |1| erzeugen instabile Systeme die unendlich große Werte produzieren (konvergenz)

Pol eines Systems bestimmen

Befindet sich im Nenner der Operatoren Gleichung eine Quadratische Gleichung müssen folgende Schritte angewendet werden:

1) Substitution mit A=1/Z

2) Nenner in die pq form bringen (z^2+bz+c)->(z+p)(z+q)

3)Ansatz für Partialbruchzerlegung bestimmen

$$\frac{f}{(z+p)(z+q)} = \frac{a}{z+p} + \frac{b}{z+q}$$

$$\frac{c}{(z+p)(z+q)} = \frac{a(z+q)}{z+p(z+q)} + \frac{b(z+p)}{z+q(z+p)}$$

4) Die Nullstellen von z (in diesem Fall p und q) einsetzen, um a und b wieder zu bestimmen

5) a und b wieder in die aus Schritt 3 berechnete Formel einsetzen, und den Nenner gleich 0 setzen

6) Das aus dem Nenner berechneten Z_0 ist die Polstelle

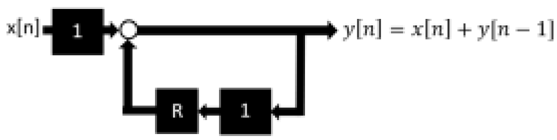
Beispielaufgabe
Gegeben ist folgende Differenzengleichung:

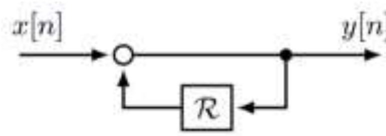
$$y[n] = x[n] + y[n-1]$$

Berechnen Sie die Antwort auf den Einheitsimpuls für n = -1,0,1,2,3

n	x[n]	y[n-1]	y[n]
n<-1	0	0	0
-1	0	0	0
0	1	0	1
1	0	1	1
2	0	1	1
3	0	1	1

Zeichnen Sie das Blockschaltbild.
-Der Term x[n] stellt das ursprüngliche Eingangssignal dar
-Der Term y[n-1] stellt die um 1 verzögerte Rückkopplung dar
Somit ergibt sich das Blockschaltbild (das Linke habe ich erstellt, das Rechte Prof. Kolbus)





Die eingezeichneten Verstärkungen von 1 sind eigentlich überflüssig, da sie keine Verstärkung darstellen. Trotzdem schaden sie nicht.

Schreiben Sie das Systemfunktional hin
-Aus dem oberen Zweig ergibt sich wie gewohnt der Term +X
-Aus dem unteren Zweig ergibt sich +RY
Sodass die Operator Gleichung wie folgt bestimmt werden kann:

$$Y = X + RY$$

Da aber das Systemfunktional gefragt ist, muss nach Y/X aufgelöst werden:

$$\frac{Y}{X} = \frac{X}{X} + R\frac{Y}{X}$$

$$\frac{Y}{X} - R\frac{Y}{X} = 1$$

$$\frac{Y}{X}(1-R) = 1$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R}$$

Mit dem berechnetem Systemfunktional kann nun der Pol des Systems bestimmt werden. Da wir bereits wissen das der Pol die allgemeine Verstärkung des Systems beschreibt, und in diesem System eine Verstärkung von 1 auftritt, ist es schon klar dass der Pol = 1 sein wird. Bei komplizierteren Schaltungen ist es meist nicht möglich eine solche Aussage zu treffen, sodass ein Rechenprozess

notwendig ist. Die Polstellen bei komplexeren Gleichungen können entweder mittels Partialbruchzerlegung oder Substitution mit R=1/z berechnet werden.
In diesem Beispiel wurde das letztere verwendet.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-R}$$

Zuerst Substituieren

$$R \rightarrow \frac{1}{z}$$

Dann die Nullstellen des Nenners berechnen

$$\frac{1}{0} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$\frac{1}{0} = \frac{z}{z-1}$$

Da sich im Nenner die Nullstelle z=1 ergibt, befindet sich die Polstelle bei p_0=1.
Dieser Rechenweg ist nicht geprüft, und könnte falsch sein.

Beispiel einer verbalen Aufgabe aus der Übungsaufgabensammlung:
Bei der Überziehung eines Kontos fallen 4% Zinsen pro Jahr an. Modellieren Sie das System als Differenzengleichung. Durch eine einmalige Abhebung wird das Konto mit 1000 Euro belastet. Dieses Ereignis kann als gewichteter Einheitsimpuls modelliert werden. Bestimmen Sie den Pol des Systems und berechnen Sie den Kontostand nach 10, 20 Jahren. Ist das System stabil?
Das bedeutet dass das Eingangssignal x[n] einen Gewichteten Einheitsimpuls darstellt, welcher bei 0 den Wert 1000 beträgt. Somit könnte sich folgende Differenzengleichung ergeben:

$$y[n] = x[n] + 1.04y[n-1]$$

Das x[n] brauchen wir eigentlich in jeder Funktion. Die Verstärkung von 1.04 stellt den jährlich um 4% Steigenden Kontostand dar.
Aus dieser Formel soll vorerst die Operator Gleichung gebildet werden:

$$Y = X + 1.04RY$$

Das Systemfunktional ergibt sich als:

$$\frac{Y}{X} = 1 + 1.04R\frac{Y}{X}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{1-1.04R}$$

Die Polstelle kann wie in dem vorherigen Beispiel durch Substituierung bestimmt werden, jedoch ist es relativ offensichtlich dass nur eine einzige Verstärkung von 1.04 auftritt sodass die Polstelle p_0=1.04 sein muss. Da das ursprüngliche Eingangssignal bis ins unendliche um 1.04 verstärkt wird, und somit immer größer wird, kann es als instabil bezeichnet werden.

Systeme mit höherer Ordnung:
Die bisherigen System haben nur eine Rückkopplung besitzt, sodass sie als Systeme Erster Ordnung beschrieben werden können. Natürlich gibt es auch Systeme höherer Ordnungen, welche auch Rückkopplungen welche um mehr als 1 verzögert sind. Zwar gelten weitgehend dieselben Regeln wie bisher erwähnt, jedoch ist die Berechnung etwas komplizierter. Da bei den Operatoren Gleichungen oftmals eine Quadratische Gleichung auftritt, müssen die bereits erwähnten Methoden zur Berechnung der Polstellen erst recht angewendet werden.
Um aus einer Gleichung das Blockschalt zu bilden, und die mathematische Formel zu berechnen, ist es sinnvoll die einzelnen Terme als summen zu schreiben (u.a. durch Partialbruchzerlegung) sodass das System mit dem Fundamentalsystem beschrieben werden kann, welches immer gleich $(p_0)^n$ ist.

Beispiel eines Systems zweiter Ordnung:
Bestimmen Sie das Systemfunktional, die Pole und die Impulsantwort der Gleichung:

$$y[n] = x[n] + \frac{\sqrt{2}}{2}y[n-1] - \frac{1}{4}y[n-2]$$

Operatorengleichung bilden:

$$Y = X + \frac{\sqrt{2}}{2}RY - \frac{1}{4}R^2Y$$

Umformen:

$$\frac{Y}{X} = 1 \; + \frac{\sqrt{2}}{2}R * \frac{Y}{X} \; - \frac{1}{4}R^2 * \frac{Y}{X}$$

$$\frac{Y}{X} \; - \frac{\sqrt{2}}{2}R * \frac{Y}{X} \; + \frac{1}{4}R^2 * \frac{Y}{X} = 1$$

$$\frac{Y}{X}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}R + \frac{1}{4}R^2\right) = 1$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}R + \frac{1}{4}R^2\right)}$$

Substituieren:

$$R \to \frac{1}{z}$$

Nenner gleich 0 setzen:

$$\frac{}{0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2z} + \frac{1}{4z^2}\right)}$$

Mal z^2

$$\frac{}{0} = \frac{z^2}{\left(z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{1}{4}\right)}$$

Die Quadratische Formel

$$z^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}z + \frac{1}{4}$$

Kann nun mit der PQ Formel bestimmt werden

$$z_0 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2} - 1}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-1 * \frac{1}{2}}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{-1} * \sqrt{\frac{1}{2}}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i * \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}$$

$$z_0 = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)}{2}$$

$$z_0 = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 \pm i)$$

$$z_{0.1} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} * i$$

$$z_{0.2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} * i$$

Aus z_0 kann die Eulerform bestimmt werden (geht auch mit Formel).

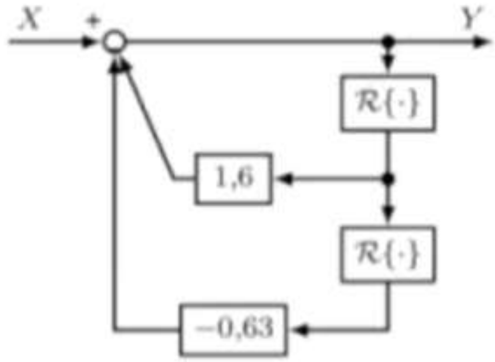
$$tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) = tan^{-1}\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\pm\frac{\sqrt{2}}{4}}\right) = \pm 45^0$$

$$\left||z|\right| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{4})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{4})^2} = \frac{1}{2}$$

Somit sind die Pole des Systems imaginär wobei

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} e^{\pm 45^0 j}$$

Beispiel der Aufteilung eines rekursiven Systems in parallelgeschaltete Grundschaltungen



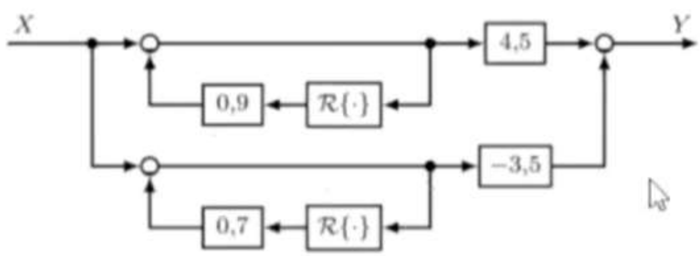
Das obige Blockschaltbild kann recht einfach mit der Formel

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1 - 1,6\mathcal{R} + 0,63\mathcal{R}^2)}$$

Beschrieben werden. Daraus ist es aber schwer zu erkennen wie die Mathematische, Index abhängige Formel aufgestellt werden kann, wo das vorherige Ausgangssignal nicht benötigt wird. Daher ist es sinnvoll mittels Partialbruchzerlegung die Formel aufzuteilen

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{(1 - 1,6\mathcal{R} + 0,63\mathcal{R}^2)} = \frac{1}{(1 - 0,9\mathcal{R})(1 - 0,7\mathcal{R})} = \frac{a}{1 - 0,9\mathcal{R}} + \frac{b}{1 - 0,7\mathcal{R}}$$

Die beiden Brüche beschreiben zwei Grundschaltungen, in parallel geschaltet, welche ganz leicht als Formel beschrieben werden können. Zudem kann aus den Brücken die Polstellen ausgelesen werden.



$$y_1[n] = 0,9^n$$

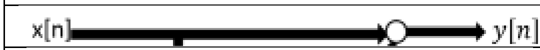
$$y_2[n] = 0,7^n$$

$$y[n] = 4,5\, y_1[n] + (-3,5) y_2[n] = 4,5 \cdot 0,9^n - 3,5 \cdot 0,7^n$$

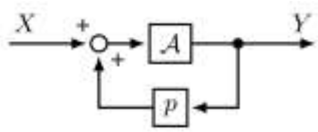
Kapitel 6 Zeitkontinuerliche Systeme

Die zeitkontinuerlichen Systemen werden mit Differentialgleichungen, statt Differenzengleichungen beschrieben.
Bei zeitkontinuerlichen Systemen wird statt mit Verzögerungen, mit Integratoren gearbeitet. Summe und Verstärkung ist ähnlich wie bei den zeitdiskreten Systemen.
Im zeitkontinuerlichen gibt es keine FIR (Finite Systeme). Das heißt dass das Ausgangssignal nicht endlich ist.

Die Unterschiede zwischen den Zeitkontinuerlichen und Zeitdiskreten Systemen sind im Folgenden abgebildet.

Zeitdiskret	->	Zeitkontinuerlich
	->	
	->	

Die Grundschaltung des Zeitkontinuerlichen Systems ist hier abgebildet.



Bei den Zeitkontinuerlichen Systemen befindet sich der Operator im Vorwärtszweig. Die Impulsantwort der Zeitkontinuerlichen Grundschaltung kann mit der Gleichung

$$x(t) = \delta(t) \quad \Rightarrow \quad y(t) = h(t) = e^{pt}$$

beschrieben werden.
Die Divergenz wird wie im Zeitdiskreten von den Polen bestimmt. Besitzt eine Schaltung einen oder mehrere Pole welche einen reellen Teil größer als 0 haben, sind diese instabil. Aus dem obigen Blockschaltbild ergibt sich die Systemfunktion

$$\frac{Y}{X} = \frac{A}{1 - pA}$$

Beispielaufgabe
Ein System ist durch folgende Differentialgleichung gegeben

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = cx(t)$$

Wenn wir $\ddot{y}(t)$ als Y betrachten, müssen wir X auch als $\ddot{x}(t)$ festlegen. Somit wäre x$(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\ddot{x}(t)dt$ also A^2X. Damit ist $\dot{y}(t) = \int_{-\infty}^{t}\ddot{y}(t)dt = AY$ und $y(t) = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t}\ddot{y}(t)dt$ =A^2Y
Nun kann die Operatoren Gleichung aufgestellt werden

$$Y + aAY + bA^2Y = cA^2X$$

und durch umformen die Systemgleichung.

$$\frac{Y}{X} + aA\frac{Y}{X} + bA^2\,\frac{Y}{X} = A^2c$$

$$\frac{Y}{X}(1 + aA + bA^2\,) = A^2c$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{cA^2}{1 + aA + bA^2}$$

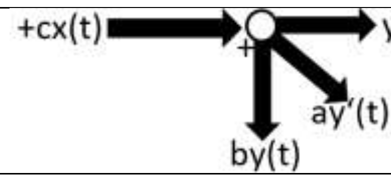
Das Blockschaltbild kann durch das Zerlegen der Systemgleichung in Partialbrüche erfolgen, da aus den einzelnen Brüchen Grundschaltungen gebaut werden können. Die Partialbruchzerlegung ist allerdings in dieser Aufgabe recht umständlich, sodass das Blockschaltbild am einfachsten direkt aus der Differentialgleichung entnommen werden kann. Die Methode mit den Grundschaltungen ist im allgemeinen nicht zu empfehlen, das es schwierig ist die Grundschaltungen richtig zu verbinden.

$$\ddot{y}(t) + a\dot{y}(t) + by(t) = cx(t)$$

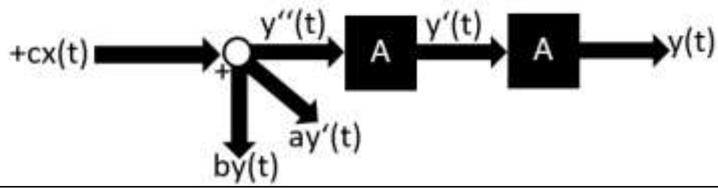
Das Blockschaltbild kann aus den folgenden Schritten nun erzeugt werden. Wenn wir die Gleichung =0 setzen, und den Ersten Operator um den Nullpunkt bilden, kommen wir schnell weiter.

$$0 = cx(t) - \ddot{y}(t) - a\dot{y}(t) - by(t)$$

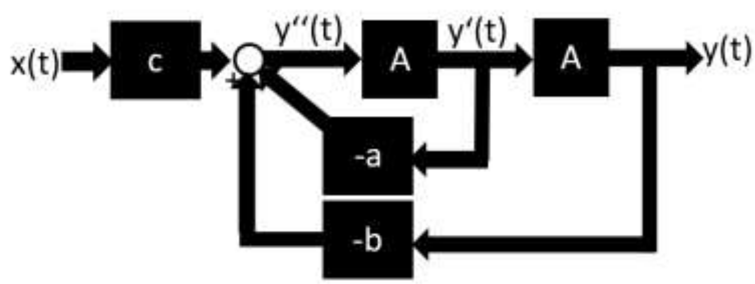
Wenn wir den Operator um den Nullpunkt aufbauen, können die negativen Vorzeichen mit wegfließenden Pfeilen dargestellt werden, und die Positiven Pfeile mit hinzufließenden



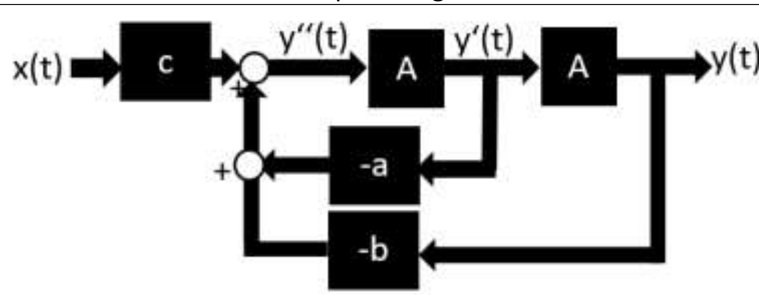
Da wir bereits wissen dass am Ausgang y(t), durch das doppelte Integrieren von y‘‘(t), entstehen soll, kann dies zunächst eingezeichnet werden.



Nun können wir aus den Zwischenschritten das y‘(t) sowie das y(t) bekommen, was wir für den ersten Operator brauchen. Hierzu müssen wir jedoch die Vorzeichen der Koeffizienten negativ machen, sodass die Pfeilrichtungen übereinstimmen.



Dieses Bild verletzt die Regel dass an einem Operator nicht mehr als zwei Zweige angeschlossen werden sollen. Daher sollte ein zusätzlicher Operator gebildet werden.



Beispielaufgabe

Bestimmen Sie den Pol anhand der Operatoren Gleichung:

$$\frac{Y}{X} = \frac{4A^2}{1 + 7A + 10A^2}$$

Um den Pol zu bestimmen muss diese Gleichung mithilfe der Z Transformation und Partialbruchzerlegung bestimmt werden.

Zuerst die Substitution (Z-Transformation)

$$A \rightarrow \frac{1}{Z}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{4\left(\frac{1}{Z^2}\right)}{1 + \frac{7}{Z} + \frac{10}{Z^2}}$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{Z^2 + 7Z + 10}$$

Nun kann die Funktion mit Partialbruchzerlegung zerlegt werden.

$$\frac{Y}{X} = \frac{4}{(Z+2)(Z+5)}$$

Dazu erst den Ansatz wählen, und die Nenner der Ansätze gleichsetzen

$$\frac{4}{(Z+2)(Z+5)} = \frac{a(Z+5)}{(Z+2)(Z+5)} + \frac{b(Z+2)}{(Z+2)(Z+5)}$$

Dann die Nullstellen von Z einsetzen um die Koeffizienten zu bestimmen

$$4 = a(Z+5) + b(Z+2)$$

Das Einsetzen von Z=-5 und Z=-2 Liefert

$$a = \frac{4}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

Sodass die Polstellen nun abgelesen werden können

$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{4}{3}}{z+2} - \frac{\frac{4}{3}}{z+5}$$

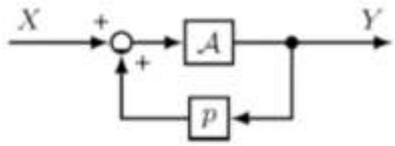
Setzt man die Nenner der Brüche gleich 0, so erhält man die Polstellen Z=-2, Z=-5. Da beide negativ sind, ist das System stabil. Die Polstellen können auch schon aus der vorherigen Gleichung bestimmt werden, jedoch wird die Partialbruchzerlegung trotzdem gefordert.

Elementarfunktion bei Zeitkontinuerlichen Signalen

Da die Dirac Funktion nur bei dem Wert 0 = 1 ist, und somit kein Flächeninhalt besitzt, würde dieses Signal durch den Integrator verschwinden. Somit eignet sich diese Einheitsfunktion für Zeitkontinuerliche Systeme nicht. Daher benutzen wir im Zeitkontinuerlichen als Einheitsimpuls die Delta Funktion, welches immer eine Fläche von 1 besitzt. Es ist bei einem unendlich kleinen Bereich um t=0 immer gleich unendlich, sodass die Fläche 0 bleibt.

Wenn p>0 erzeugt die Grundschaltung ein instabiles Wachstum von $e^{pt}(t)$

Wenn p<0 erzeugt die Grundschaltung ein stabiles Wachstum von $e^{-pt}(t)$



Finished VL 10.11

Kapitel 7 Z Transformationen

Die Z Transformation dient dazu die Differenzengleichung schneller in die Z form zu bringen, ohne die bisherigen Schritten der Substitution anzuwenden. Die Differenzengleichung wird also direkt aus den Originalbereich in den Bildbereich gebracht.

$$x[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X(Z)$$

Der Hole Kreis beschreibt den Originalbereich, der gefüllte den Bildbereich.

Hier aus dem 7. Übungsblatt die Rechenregeln für die Transformationen

Die z-Transformation besitzt einige Rechenregeln, die ihre Anwendung auf Systeme zulässt. Insbesondere sind die Linearität

$$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(z) \qquad , z \in \mathbf{K_1}$$

$$x_2[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X_2(z) \qquad , z \in \mathbf{K_2}$$

$$c_1 x_1[n] + c_2 x_2[n] 1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet c_1 X_1(z) + c_2 X_2(z) \qquad , z \in \mathbf{K} \supseteq \mathbf{K_1} \cap \mathbf{K_2}$$

und die Verschiebung im Originalbereich.

$$x_1[n] \circ\!\!-\!\!\bullet X_1(z) \qquad , z \in \mathbf{K_1}$$

$$x_2[n] = x_1[n-k] \circ\!\!-\!\!\bullet z^{-k} X_1(z) \qquad , z \in \mathbf{K_1}$$

Mit Hilfe dieser Regeln lässt sich die Transformation auf eine Differenzengleichung anwenden und man erhält eine Gleichung ähnlich dem Systemfunktional. Da es sich aber um Funktionen handelt heißt dies Systemfunktion.

Beispiel:

$$y[n] - 0.5y[n-1] = x[n] \qquad |\text{Differenzengleichung des Systems}$$

$$|\text{Anwenden der z-Transformation}$$

$$Y(z) - 0.5z^{-1}Y(z) = X(z) \qquad |\text{Linearität: Einzeln auf Summanden anwenden}$$

$$|\text{Verschiebung: aus } y[n-1] \text{ wird } z^{-1}Y(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}} = \frac{z}{z - 0.5}$$

Damit ergibt sich hier das gleiche Ergebnis wie beim Weg Systemfunktional und anschließender Ersetzung $\mathcal{R} \rightarrow \frac{1}{z}$.

Der Einheitsimpuls wird zu 1 transformiert.

Zudem gilt für die Geometrische Reihe

$$x[n] = (p)^n 1[n] \Rightarrow X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{p}{z}\right)^n = \frac{Z}{Z-p}$$

Und für die Harmonische Reihe

Beispielaufgabe

n	-1	0	1	2	3	$\dots$
$x[n]$	0	1	0	1	0	$\dots$

Erzeugen Sie aus der obigen Tabelle die Z-Transformation im Bildbereich.
Vorgehen:
Da die Formel x[n] nur als Tabelle gegeben ist, müssen wir annehmen dass, das Eingangssignal aus zwei Einheitsimpulsen besteht.

$$x[n] = \partial[n] + \partial[n-2]$$

Das heißt das Eingangssignal stellt sich aus einem Einheitsimpuls bei 0, und einen um zwei verschobenen Einheitsimpuls bei 2 zusammen.
Daraus kann mithilfe des Linearitäts- und Verschiebungssatzes die Gleichung transformiert werden.
Dabei wird der erste Einheitsimpuls

$$\partial\,[n] \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ 1 * Z^{-0}$$

wobei die Potenz von Z aus die im Verschiebungssatz definierte Verschiebung stammt. Diese ist im ersten Term 0.
Der zweite Term, welcher um zwei Verschoben ist, kann ähnlich transformiert werden

$$\partial\,[n-2] \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\ 1 * Z^{-2}$$

Nun erlaubt uns der Linearitätssatz die Transformierten Terme einfach zu addieren, woraus sich die Funktion im Bildbereich ergibt

$$x[n] = \partial[n] + \partial[n-2] \quad \circ\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet \quad X(Z) = 1 + \frac{1}{Z^2}$$

Durch geschicktes Umformen erhalten wir dann für die Z Transformation

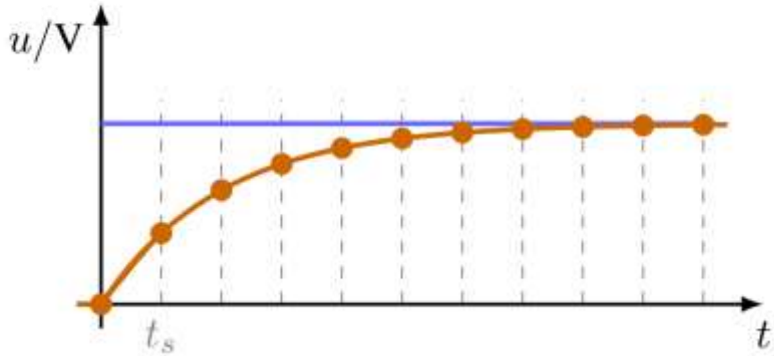
$$X(Z) = \frac{Z^2 + 1}{Z^2}$$

Diese Gleichung konvergiert für alle Z≠0.

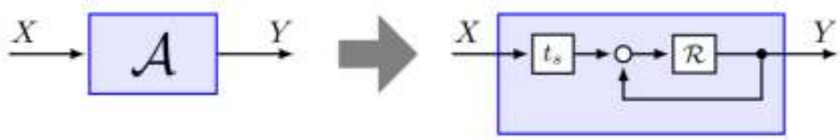
Kapitel 8 Diskretisierung

Bei der Diskretisierung geht es darum zeitkontinuerliche Systeme in zeitdiskrete Systeme umzuwandeln. Dies geschieht durch das Abtasten eines Zeitkontinuerlichen Signals, sodass daraus eine diskrete Folge gebildet werden kann.
In diesem Beispiel wurde ein zeitkontinuerliches Signal mit der Abtastzeit t_s abgetastet.
Daraus kann dann die diskrete Funktion gebildet werden

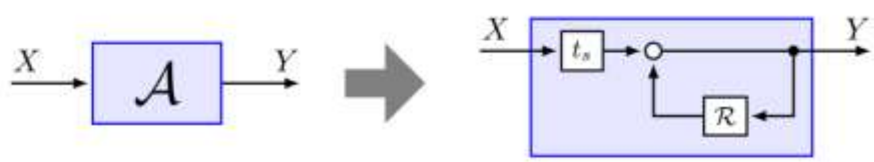
$$x(t) \rightarrow x[t_s n]$$
$$x'(t) \rightarrow AX$$



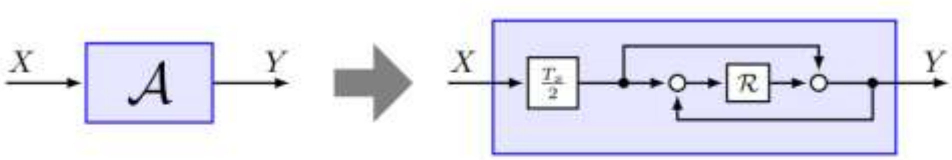
Da der Integrationsblock A nicht zu den zeitdiskreten Systemen gehört, muss dieser durch andere Methoden ersetzt werden.
Dazu gibt es drei Näherungsverfahren welches die Integration mithilfe der Verzögerung ersetzen können.
Aus der Untersumme ergibt sich:



Untersumme Instabile Systeme bleiben instabil, aber stabile Systeme können auf instabile abgebildet werden.
Aus der Obersumme ergibt sich



Obersumme Stabile Systeme bleiben stabil, aber instabile Systeme können auf stabile abgebildet werden. Der verfahren bringt eine Dämpfung ein.
Aus der Trapezenregel ergibt sich:



Trapezregel Die Regionen der Stabilität und Instabilität werden korrekt abgebildet. Die Eigenschaft wird erhalten

Beispielaufgabe

Gegeben ist ein Feder-Masse System in der Anordnung nach Abbildung 2. Dabei bezeichnet $x(t)$ die obere Position der Feder und $y(t)$ die untere Postion der Feder bzw. die der Masse.

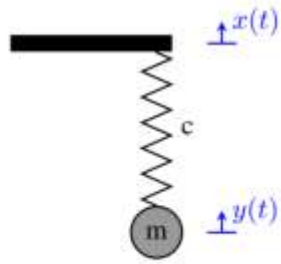


Abbildung 2: Feder-Masse System mit Weganregung

Die Feder Gleichung besagt dass die Federkraft F

$$F = kx$$

Ist. In diesem Fall stellt die an der Masse wirkende Erdanziehungskraft die kraft F dar, sodass

$$mg = kx$$

Daraus kann der Weg der Feder mit

$$x = \frac{mg}{k}$$

In der Aufgabenstellung ist der Weg mit

$$x = x(t) - y(t)$$

Gegeben, was nicht besonders sinnvoll ist.

$$x(t) - y(t) = \frac{mg}{k}$$

Da in der Aufgabenstellung gegeben ist dass m=k, können diese Variablen sich kürzen.

$$x(t) - y(t) = g$$

Zudem wird angenommen das die Erdanziehungskraft gleich der zweiten Ableitung von y“(t) ist, dies wird jedoch nicht begründet. Diese Annahme würde bedeuten dass y(t) eine zeitabhängige Gleichung beschreibt, welche mit genau der Erdanziehungskraft beschleunigt, da sich die Federkraft und die Masse ausgleichen.

$$x(t) - y(t) = \ddot{y}(t)$$

oder

$$x(t) = \ddot{y}(t) + y(t)$$

Es ist immer noch unklar weshalb x(t) eine Zeitabhängige Gleichung beschreibt, obwohl sie eigentlich nur den Anfangspunkt der Feder darstellen soll.

Um aus der Differentialgleichung das Systemfunktional zu bestimmen, muss zunächst Integriert werden, sodass die höchste Ableitung verschwindet:

$$\iint x(t)dt = \iint \ddot{y}(t)dt + \iint y(t)\,dt$$

$$\iint x(t)dt = y(t) + \iint y(t)\,dt$$

Jetzt können die Integrale durch den Buchstabe A ersetzt werden, da dieser Buchstabe im Systemfunktional die Ableitung darstellt. Zudem wird x(t)->X und y(t)->Y

$$AAX = Y + AAY$$
$$A^2X = Y + A^2Y$$

Die Gleichung muss nur noch nach Y/X aufgelöst werden

$$A^2 = \frac{Y}{X} + \frac{A^2Y}{X}$$
$$A^2 = \frac{Y}{X}(1 + A^2)$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{A^2}{(1 + A^2)}$$

Um die Pole zu finden, muss substituiert werden. Hierzu wird

$$A \to \frac{1}{S}$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{\frac{1}{S^2}}{1 + \frac{1}{S^2}}$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{S^2 + 1}$$

Dann muss der Nenner gleich 0 gesetzt werden, um S zu finden

$$S^2 + 1 = 0$$
$$S^2 = -1$$
$$S = \pm i$$

Das heißt wir haben Polstellen bei

$$p = i, p = -i$$

Im Folgenden soll die Gleichung ins Zeitdiskrete überführt werden. Dazu kann die Eulersche Rücktransformation angewendet werden. Diese besagt, dass S mit

$$S \to \frac{Z - 1}{t_s Z}$$

ersetzt werden soll. Daraus ergibt sich das Zeitdiskrete Systemfunktional

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{S^2 + 1} \to \frac{1}{(\frac{Z - 1}{t_s Z})^2 + 1}$$
$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{\frac{(Z - 1)^2}{{t_s}^2 Z^2} + 1}$$

Durch das Auflösen usw. ergeben sich die Polstellen und alles andere.

Kapitel 9 Faltung

Bei zeitdiskreten Systemen entsteht für jeden Einheitsimpuls $\delta[n]$ eine Impulsantwort h[n], als Ausgangssignal. Die Faltung basiert sich auf dem Prinzip, dass jedes Eingangssignal aus einer Summe einzelner Einheitsimpulse beschrieben werden kann. Das Ausgangssignal bildet dann die Summe der einzelnen Impulsantworten.

Das heißt Linearitätssatz. Dieser besagt, dass die Summe der Eingangssignale, im Transformierten die Summe der dazugehörigen Ausgangssignale bildet. Somit können komplexe Signale besser verarbeitet und berechnet werden.

Der Verschiebungssatz besagt dass die Antwort auf ein verschobenen Einheitsimpuls entsprechend auch verschoben wird. Die Skalierung kann auch direkt übernommen werden.

Beispiel Faltung

Transformieren Sie die komplexen Eingangssignale in Summen aus gewichteten Einheitsimpulsen

$$x_1[n] = \begin{cases} \sin[n], & 0 \leq n \leq 3 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung kann das Signal vorerst in eine Tabelle überführt werden

n	n<0	0	1	2	3	n>3
x[n]	0	sin(0)=0	sin(1)=0.84	sin(2)=0.91	sin(3)=0.14	0

Daraus ist sichtlich dass es sich hier um drei gewichtete Einheitsimpulse handelt. Der erste geschieht bei n=0. Da sin(0)=0 ist, ist wird dieser Impuls mit 0 skaliert, und kann somit rausgelassen werden. Bei n=1 wird der um 1 verschobene Einheitsimpuls mit 0.84 skaliert. Dasselbe passiert bei den um 2 bzw. 3 verschobenen Einheitsimpuls bei n=2,n=3. Daraus kann für x[n] folgendes, vereinfachtes Eingangssignal gebildet werden:

$$x[n] = 0 + 0.84\delta[n-1] + 0.91\delta[n-2] + 0.14[n-3]$$

Beispiel 2 Faltung

Transformieren Sie die komplexen Eingangssignale in Summen aus gewichteten Einheitsimpulsen

$$x_2[n] = \begin{cases} n^2 + n, & -2 \leq n \leq 3 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Zur Veranschaulichung kann das Signal vorerst in eine Tabelle überführt werden

n	n<-2	-2	-1	0	1	2	3	n>3
x[n]	0	6	0	0	2	6	12	0

Hier ist wieder sichtlich dass es sich um 6 gewichtet und verschobene Einheitsimpulse handelt. Diese können nun wie folgt beschrieben werden

$$x[n] = 6\delta[n+2] + 0\delta[n+1] + 0\delta[n] + 2\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 12\delta[n-3]$$

Die mit null gewichteten Terme sind nur zur Veranschaulichung mitgeschrieben.

$$x[n] = 6\delta[n+2] + 2\delta[n-1] + 6\delta[n-2] + 12\delta[n-3]$$

Das Eingangssignal könnte auch mithilfe einer Summennotation beschrieben werden, als

$$\sum_{i=-2}^{3} (i^2 + i)\delta[n-i]$$

Beispiel Faltung diskreter Folgen

Gegeben sind zwei Impulsantworten

$$h_1[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 2 \\ 0, & sonst \end{cases} \; und \; h_2[n] = \begin{cases} n, & 2 \le n \le 4 \\ 0, & sonst \end{cases}$$

Berechnen Sie die Faltung der beiden Folgen wobei das Ausgangssignal

$$y[n] = (h_1 * h_2)[n]$$

ist.

Der Faltungssatz besagt dass die Faltung zweier Funktionen aus der Summe der gespiegelten, überlagerten Funktionen besteht. Um die Faltung du berechnen müssen folgende Schritte ausgeführt werden, bis keine Überlagerung mehr vorhanden ist.

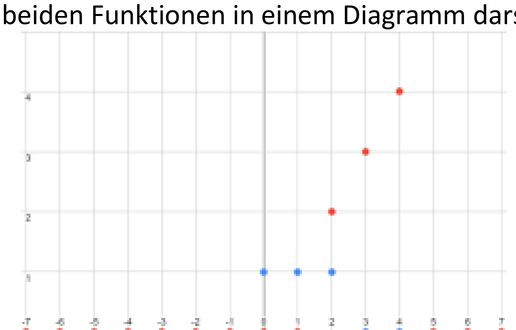
①Spiegelung

②Berechnung der Summe der Produkte von Punkten

③Verschiebung

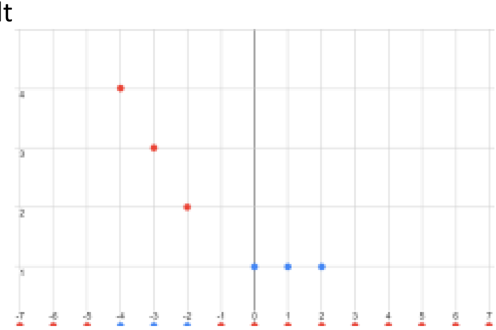
④Schritt 2 und 3 wiederholen, bis keine Überlagerung mehr ist

Dazu können wir erstmal die beiden Funktionen in einem Diagramm darstellen



Welche Funktion gespiegelt und verschoben werden soll ist egal, wichtig ist nur das die gewählte Funktion erst gespiegelt, dann

①Zuerst wird $h_2[n]$ gespiegelt



②Dann werden die beiden Funktionen miteinander multipliziert. Da keine Überlagerung existiert, sind alle Produkte gleich 0:

$$h_1[n < -4] = 0, \qquad h_2[n < -4] = 0$$
$$h_1[n < -4] \cdot h_2[n < -4] = 0$$

$$h_1[-4] = 0, \qquad h_2[-4] = 4$$
$$h_1[-4] \cdot h_2[-4] = 0$$

$$h_1[-3] = 0, \qquad h_2[-3] = 3$$
$$h_1[-3] \cdot h_2[-3] = 0$$

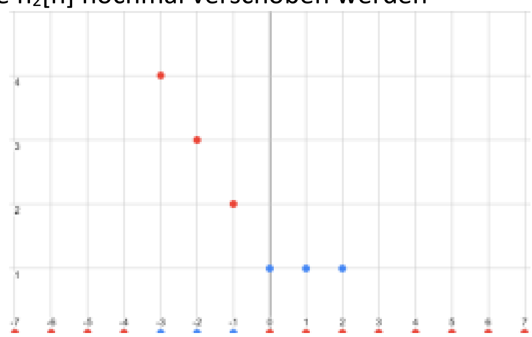
$$h_1[-2] = 0, \qquad h_2[-2] = 2$$
$$h_1[-2] \cdot h_2[-2] = 0$$

…

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 0$$

Das heißt y[0]= $(h_1 * h_2)[0]$=0

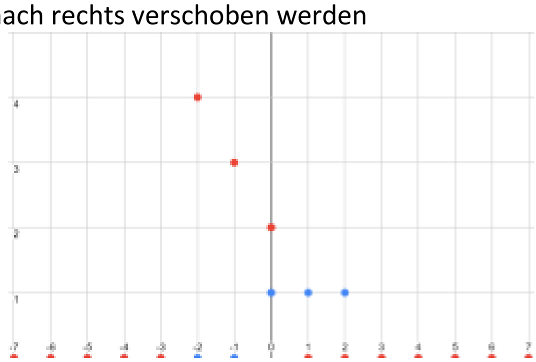
③Jetzt kann das gespiegelte $h_2[n]$ nochmal verschoben werden



②Hier sind wieder die Produkte aller Punkte der Signale gleich 0, ähnlich wie beim vorherigen schritt.

Das heißt y[1]= $(h_1 * h_2)[1]$=0.

③Daher kann h_2 nochmal nach rechts verschoben werden



②Jetzt ist bei n=0 eine Überlagerung vorhanden, sodass das Produkt der beiden Punkte berechnet werden kann.

$$h_1[n < 0] = 0,$$
$$h_1[n < 0] \cdot h_2[n < 0] = 0$$

$$h_1[0] = 1, \qquad h_2[0] = 2$$
$$h_1[0] \cdot h_2[0] = 2$$

$$h_1[1] = 1, \qquad h_2[1] = 0$$
$$h_1[1] \cdot h_2[1] = 0$$

$$h_2[n > 0] = 0$$
$$h_1[n > 0] \cdot h_2[n > 0] = 0$$

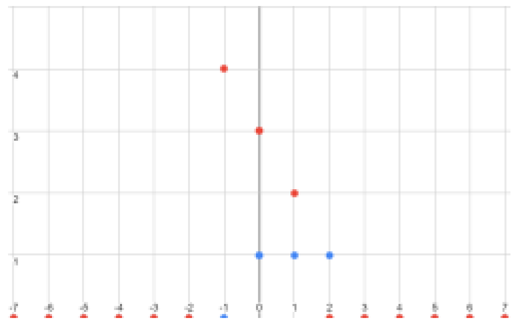
…

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 2$$

Das heißt y[2]= $(h_1 * h_2)[2]$=2

Die Funktion wird immer weiter nach rechts verschoben

③y[3]:

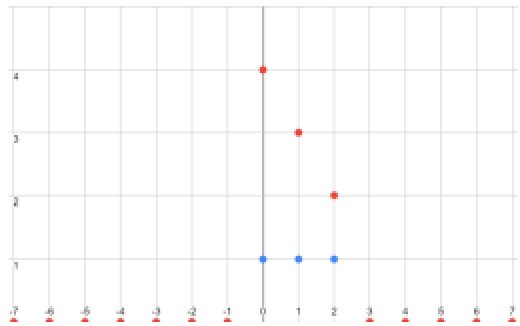


②

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$y[3] = 5$$

③y[4]:

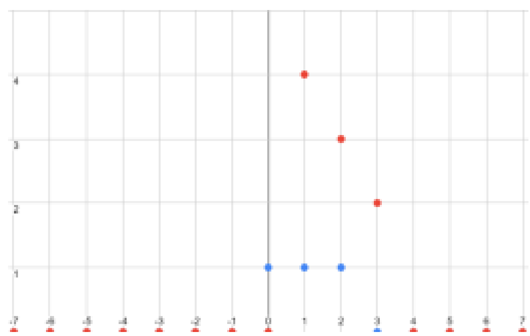


②

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 9$$

$$y[4] = 9$$

③y[5]:

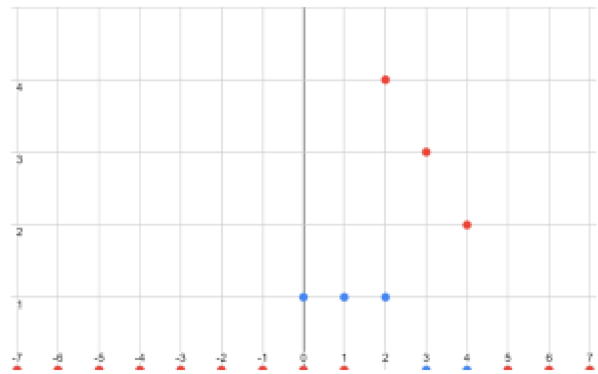


②

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 7$$

$$y[5] = 7$$

③y[6]:

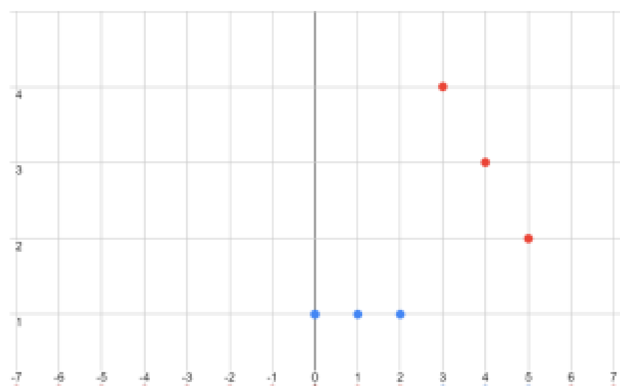


②

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 4$$

$$y[6] = 4$$

③y[n>6]:



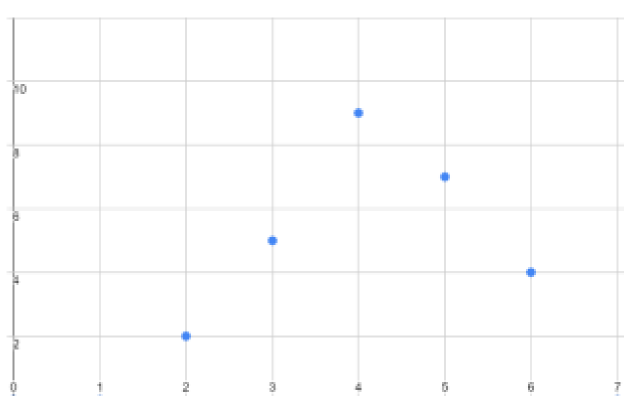
②

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h_1[n] \cdot h_2[n] = 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 0$$

$$y[n > 6] = 0$$

④Da wir nun so weit verschoben haben dass keine weiteren Überlagerungen passieren können, egal wie weit nach rechts verschoben wird, werden alle folgenden Werte=0 sein. Damit sind die Punkte des Ausgangssignal berechnet. Diese sind im unterliegenden Diagramm dargestellt:

$y[n]=(h_1*h_2)[n]$:



Es gibt allerdings zusätzlich zum visuellen, einen rechnerischen Weg zur Berechnung des Faltungssignales.
Dieser besteht aus folgenden Schritten:
Um die Faltung $y[n]=(h_1*h_2)[n]$
Mit $h_1 = \begin{cases} \neq 0, & a \leq n \leq b \\ 0, & sonst \end{cases}$, $h_2 = \begin{cases} \neq 0, & c \leq n \leq d \\ 0, & sonst \end{cases}$
können die beiden Operatoren Gleichungen miteinander multipliziert. Vorerst sollen jedoch die Grenzen berechnet werden, wo die Faltung ungleich 0 ist.
Einschränkung der Grenzen:
1)Hierzu wird k als der Bereich wo $h_1 \neq 0$ ist definiert. Das heißt $k_{min}=a$ und $k_{max}=b$
2)Zunächst wird das k in den Bereich von $h_2[n]$ eingesetzt:
$$c \leq n-k \leq d$$
sodass
$$c+k \leq n \leq d+k$$
Dieses Eingeschränkte Intervall beinhaltet alle $y[n]\neq0$, sodass nur die Werte in diesem Bereich berechnet werden müssen.
Multiplikation der Systemfunktionale:
Dazu müssen für die beiden Eingangssignale die Systemfunktionale bestimmt werden, wie in der vorherigen Beispielaufgabe. Danach können die einfach multipliziert werden.

Kapitel 10 Frequenzgang

In diesem Kapitel geht es darum die Eigenfunktion eines Systems zu finden. Ähnlich wie bei Eigenvektoren bei Matrizen, besitzen Systeme ein Eingangssignal welcher von dem System nur skaliert wird, und sonst nicht geändert wird.
Um die Eigenfunktion zu bestimmen müssen folgende Schritte durchgeführt werden
①Z-Transformation
Diese geschieht durch das Einsetzen von R→ $\frac{1}{Z}$ in die Systemgleichung
$$\frac{X}{Y} \rightarrow H(Z) = \frac{X(Z)}{Y(Z)}$$
②Frequenzgang
Der Frequenzgang wird durch das Einsetzen von $Z \rightarrow e^{j\hat{\omega}}$ erstellt
$$H(Z)|_{Z=e^{j\hat{\omega}}} \rightarrow H(e^{j\hat{\omega}})$$
③Durch umformen und ausklammern kann das Euler verfahren angewendet werden sodass ein Sinus rauskommt.
$$re^{j\alpha} = rcos(\alpha) + j * rsin(\alpha)$$
$$e^{j\alpha} + e^{j(-\alpha)} = \big(cos(\alpha) + j * sin(\alpha)\big) + (cos(-\alpha) + j * sin(-\alpha))$$
Da
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$
ist und
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$
verschwinden die Imaginären Terme mit sinus, sodass nur noch 2cos(a) überbleibt.
$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2\cos(\alpha)$$
④Nun soll der Betrag von H berechnet werden. Da folgende Regeln angeblich gelten, kann eine vereinfachte Funktion erhalten werden
$$|H(e^{j\hat{\omega}})|$$
$$\left|e^{c*j*\hat{\omega}}\right| = 1$$
$$|i| = 1$$

Beispielaufgabe
Gegeben ist das System

$$y[n] = x[n-1]$$

und gesucht ist die Z-Transformierte sowie der Frequenzgang H. Anschließend sollen Betrag und Phase auf dem Intervall [-∏,∏] gezeichnet werden.
Dazu kann das oben erklärte Verfahren angewendet werden:
①Z-Transformation
Dazu muss aus y[n] die dazugehörige Systemgleichung gebildet werden

$$Y = RX$$
$$\frac{Y}{X} = R$$
$$R \rightarrow \frac{1}{Z}$$
$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = H(Z) = \frac{1}{Z}$$

②Frequenzgang
Für den Frequenzgang muss für Z substituiert werden.

$$H(Z) \rightarrow H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)$$
$$\frac{1}{Z} \rightarrow \frac{1}{e^{j\hat{\omega}}}$$
$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{1}{e^{j\hat{\omega}}}$$

③Jetzt kann umgeformt werden

$$H\left(e^{j\hat{\omega}}\right) = \frac{1}{e^{j\hat{\omega}}}$$
$$= e^{-j\hat{\omega}}$$

④Nun kann der Betrag genommen werden

$$\left|H\left(e^{j\hat{\omega}}\right)\right| = \left|e^{-j\hat{\omega}}\right| = 1$$

Beispielaufgabe

Gegeben ist das System

$$y[n] = \frac{1}{5}\sum_{l=0}^{4} x[n-l]$$

$$y[n] = \frac{1}{5}(x[n-4] + x[n-3] + x[n-2] + x[n-1] + x[n])$$

①Z-Transformation

$$Y = \frac{1}{5}(R^4X + R^3X + R^2X + RX + X)$$

$$R \to \frac{1}{Z}$$

$$Y(Z) = \frac{1}{5}(Z^{-4}X(Z) + Z^{-3}X(Z) + Z^{-2}X(Z) + Z^{-1}X(Z) + X(Z))$$

$$\frac{Y(Z)}{X(Z)} = H(Z) = \frac{1}{5}(Z^{-4} + Z^{-3} + Z^{-2} + Z^{-1} + 1)$$

②Frequenzgang

$$H(Z) \to H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-4j\widehat{\omega}} + e^{-3j\widehat{\omega}} + e^{-2j\widehat{\omega}} + e^{-j\widehat{\omega}} + 1)$$

③ Jetzt kann umgeformt werden um das Eulerverfahren anwenden zu können

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-4j\widehat{\omega}}(1 + e^{j\widehat{\omega}}) + e^{-2j\widehat{\omega}}(1 + e^{j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-4j\widehat{\omega}}e^{0.5j\widehat{\omega}}(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + e^{-2j\widehat{\omega}}e^{0.5j\widehat{\omega}}(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-3.5j\widehat{\omega}}(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + e^{-1.5j\widehat{\omega}}(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}((e^{-3.5j\widehat{\omega}} + e^{-1.5j\widehat{\omega}})(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-1.5j\widehat{\omega}}(e^{-2j\widehat{\omega}} + 1)(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-1.5j\widehat{\omega}}e^{-j\widehat{\omega}}(e^{-j\widehat{\omega}} + e^{j\widehat{\omega}})(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-2.5j\widehat{\omega}}(e^{-j\widehat{\omega}} + e^{j\widehat{\omega}})(e^{-0.5j\widehat{\omega}} + e^{0.5j\widehat{\omega}}) + 1)$$

Euler Verfahren

$$e^{j\alpha} + e^{-j\alpha} = 2\cos(\alpha)$$

Also kann aus der Obigen gleichung

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-2.5j\widehat{\omega}}(2\cos(\alpha))(2\cos(0.5\alpha)) + 1)$$

Wenn wir alles ausmultiplizieren, erhalten wir

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{1}{5}(e^{-2.5j\widehat{\omega}}(2\cos(\alpha))(2\cos(0.5\alpha)) + 1)$$

$$H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right) = \frac{4}{5}e^{-2.5j\widehat{\omega}}\cos(\alpha)\cos(0.5\alpha) + \frac{1}{5}$$

④Nun soll der Betrag von H berechnet werden

$$|H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right)| = |\frac{4}{5}||e^{-2.5j\widehat{\omega}}||\cos(\alpha)||\cos(0.5\alpha)| + |\frac{1}{5}|$$

$$\left|H\left(e^{j\widehat{\omega}}\right)\right| = \frac{4}{5}|\cos(\alpha)\cos(0.5\alpha)| + \frac{1}{5}$$

*WICHTIG:

Abbildungen (Just for copy paste)