Beispielaufgabe zu Komplexitätsklassen ($\mathcal{O}$-Kalkül)

Untersuchen Sie, ob für folgende Funktionen gilt:

- $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$
- $f(n) \in \Omega(g(n))$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$

Es gelten dabei die Definitionen (mit $n, n_0 \in \mathbb{N}$ und $c, c_1, c_2 \in \mathbb{R}^+$)

- $\mathcal{O}(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)\}$
- $\Omega(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)\}$
- $\Theta(g(n)) = \{f(n) \mid \exists\, c_1, c_2 > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : 0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)\}$

Außerdem dürfen Sie als bekannt voraussetzen:

- $f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \wedge f \in \Omega(g)$
- $f \in \mathcal{O}(g) \Leftrightarrow g \in \Omega(f)$

$f(n) = 3n + 5$

$g(n) = \frac{\sqrt{n}}{2} + 3$

0) Behauptung: $f(n) \in \Omega(g(n))$, $f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$, $f(n) \notin \Theta(g(n))$

Beweis : $f(n) \in \Omega(g(n))$:

1) Definition anwenden:

$$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : 0 \leq c \cdot g(n) \leq f(n)$$

(mit $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}^+$)

$$0 \leq c \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{2} + 3\right) \leq 3n + 5$$

$$0 \leq \frac{c \cdot \sqrt{n}}{2} + 3c \leq 3n + 5$$

$$0 \leq c \cdot \sqrt{n} + 6c \leq 6n + 10$$

$$0 \leq \frac{c}{\sqrt{n}} + \frac{6c}{n} \leq 6 + \frac{10}{n}$$

2) Wähle $n_0 = 100$ und $c = 1$:

3) Einsetzen:

$$0 \leq \frac{1}{10} + \frac{6}{100} \leq 6 + \frac{10}{100} \checkmark$$

4) Zeige, dass die Aussage auch für alle $n > n_0$ gilt!

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{6}{n} \leq 6 + \frac{10}{n}$$

geht für große n jeweils gegen 0!

□

Beweis: $f(n) \notin \mathcal{O}(g(n))$

1) Definition anwenden:

$$f(n) \in \mathcal{O}(g(n)) \Leftrightarrow \exists\, c > 0, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n > n_0 : 0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$$

(mit $n \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}^+$)

$$0 \leq 3n + 5 \leq c \cdot \left(\frac{\sqrt{n}}{2} + 3\right)$$
$$0 \leq 3n + 5 \leq \frac{c \cdot \sqrt{n}}{2} + 3c$$
$$0 \leq 6n + 10 \leq c \cdot \sqrt{n} + 6c$$
$$0 \leq 6 + \frac{10}{n} \leq \frac{c}{\sqrt{n}} + \frac{6c}{n}$$

2) Wähle $n_0 = 1$ und $c = 10$:
3) Einsetzen:

$$0 \leq 6 + \frac{10}{1} \leq \frac{10}{\sqrt{1}} + \frac{60}{1} \quad \checkmark$$

4) Zeige, dass die Aussage <u>nicht</u> für alle $n > n_0$ gelten kann!

$$0 \leq 6 + \frac{10}{n} \leq \frac{10}{\sqrt{n}} + \frac{60}{n}$$

geht für größere n jeweils gegen 0!

Die Ungleichung ist für große n <u>nicht</u> erfüllt!

$\square$

Beweis: $f(n) \notin \Theta(g(n))$

Damit $f(n) \in \Theta(g(n))$ gilt, muss gem. Satz

$$f \in \Theta(g) \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g) \land f \in \Omega(g)$$

auch $f(n) \in \mathcal{O}(g(n))$ gelten. Dies ist aber hier nicht der Fall (siehe vorheriger Beweis). Daher gilt: $f(n) \notin \Theta(g(n))$

$\square$