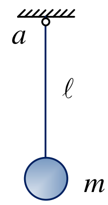
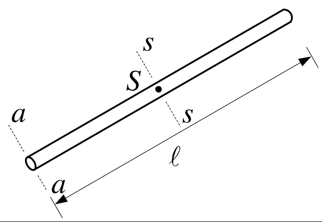
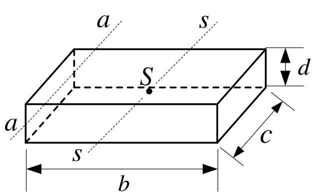
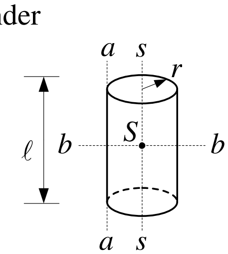
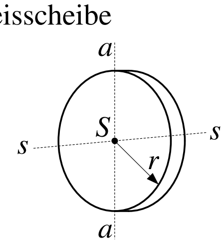
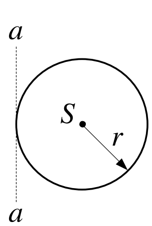
Bewegungssätze:	
Translatorisch	Rotatorisch
Kraft F $F = ma = p'$ $F = mx'' = \frac{d^2(mx)}{dt^2}$	(Dreh-)Moment M $M = \theta^{(s)}\omega' = L'$
Verhältnis zwischen Rot. und Trans. $M = FR$ Wobei R=Radius	
Impuls/Momentum $p = mv$ $p = mx' = \frac{d(mx)}{dt}$	Drehimpuls/Drall $L = \theta^{(s)}\omega'$
Verhältnis zwischen Rot. und Trans. $L = pR$ Wobei R=Radius	
Kinetische Energie $E_{kin} = \int mv dt$ $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetische Energie (Rotatorisch) $E_{kin,rotatorisch} = \int \theta\omega dt$ $E_{kin,rotatorisch} = \frac{1}{2}\theta^{(s)}\omega^2$
Arbeit $W = Fx$ Wobei x=Weg	Arbeit (Rotatorisch) $W = M\phi$ Wobei phi=Rotation in rad

Formeln für LaGrange Aufgabe	
Gravitationspotential $E_p = mgh$ Wobei h=höhe	Federpotential $E_p = \frac{1}{2}cx^2$ $E_p = \frac{1}{2}c\phi^2$ bei Drehfeder wobei phi=Rotation

Stoßbbedingung
Zwei Massen m_1 und m_2 mit Anfangsgeschwindigkeiten v_1 und v_2 stoßen, sodass die Endgeschwindigkeiten v_1‘ und v_2’ resultieren. Die Elastizität e kann wie folgt berechnet werden
$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} = \frac{RelativeTrennungsgeschwindigkeit}{RelativeAnnaeherungsgeschwindigkeit}$
Wenn Elastizität e=1, dann ist keine Energie zu Verformung geworden. Wenn Elastizität e=0, ist alle Energie in die Verformung der Massen gegangen. Der Stoß ist somit plastisch.
Gerader Zentrischer Stoß (basiert auf obige Formel) $v_1' = -\frac{m_1v_1 + m_2v_2 + em_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$ $v_2' = -\frac{m_1v_1 + m_2v_2 + em_1(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}$ Energieverlust ΔE_k $\Delta E_k = \frac{1-e^2}{2} \bullet \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \bullet (v_1 - v_2)^2$

Federschaltungen	
Die Ersatzfederkonstante c_k* von in Reihe geschalteten Federn kann mit $\frac{1}{c_k*} = \sum \frac{1}{c_k}$ berechnet werden.	Die Ersatzfederkonstante c_k* von in Reihe geschalteten Federn kann mit $c_k* = \sum c_k$ berechnet werden.

Massenträgheitsmomente

Geometrie	**Massenträgheitsmomente**
Punktmasse 	$\Theta_a = ml^2$
dünner Stab 	$\Theta_s = \frac{ml^2}{12}$ $\Theta_a = \frac{ml^2}{3}$
Quader 	$\Theta_s = \frac{1}{12} m \left(b^2 + d^2\right)$ $\Theta_a = m\left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{12}d^2\right)$
Kreiszylinder 	$\Theta_s = \frac{1}{2}mr^2$ $\Theta_a = \frac{3}{2}mr^2$ $\Theta_b = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
dünne Kreisscheibe 	$\Theta_s = \frac{1}{2}mr^2$ $\Theta_a = \frac{1}{4}mr^2$
Kugel 	$\Theta_s = \frac{2}{5}mr^2$ $\Theta_a = \frac{7}{5}mr^2$

	Probeklausur: Höhere Mechanik SS19: 04.06.2019 Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen	TM III 06-19 Zeit: 90 min.

Name: ______________________ Matr.-Nr.: ______________________________

Studienrichtung: ________________ Punktzahl (Prozent): (%) Note:

Vorab:

Nicht erlaubt sind:

- Elektronische Geräte **außer zugelassenem Taschenrechner (Casio fx991).**
- Andere Klausuren oder Teile davon. Verwendung gilt als Täuschungsversuch.
- Korrektur-Fluid, und rote Stifte. Keine Bewertung entsprechender Teillösungen.

Hilfsmittel sind:

- Stifte, Skripte, Vorlesungsunterlagen.
- Berechnen Sie stets 3 relevante Ziffern.
- Nur ausgeteiltes Papier verwenden. Rückseiten sind beschreibbar.

Aufgabe 1

a) Beim dynamischen Grundgesetz für den Massenpunkt ist der Normalanteil der Beschleunigung zu

☐ … $m\frac{v^2}{\rho}$, bzw. ☐ … $m\,\rho\omega^2$, bzw.

☐ … $\rho V g$ bzw. ☐ …gleich Null …

zu setzen?

b) Bei der Rotation um welche Körperachsen verschwinden die Deviationsmomente?

c) Wie werden Führungskräfte bei der Energiebilanz einer Bewegung berücksichtigt?

☐ …Nur der Normalanteil. ☐ …Nur der Tagentialanteil.

☐ …Nur der Krümmungsanteil. ☐ …Kein Anteil.

d) Bei einer Reihenschaltung von Federn werden die Einzelwerte der Federsteifigkeiten …?

☐ addiert. ☐ die Kehrwerte werden addiert.

☐ die Kehrwerte zum Kehrwert der Gesamtfederrate addiert. ☐ die Federsteifigkeiten zum zum Gesamtwert multipliziert.

Lösungen zu Theorie (Ankreuz) Fragen Aufgabe 1

a) Beim Dyn. Grundgesetz für den Massepunkt ist der Normalanteil der Beschleunigung
$= m \cdot \frac{v^2}{\rho}$; $= m \cdot \rho \cdot \omega^2$ → Beide Richtig

b) Bei Rotation um welche Körperachse verschwinden die Deviationsmomente?
A: Hauptachse

c) Wie werden Führungskräfte bei der Energiebilanz einer Bewegung berücksichtigt?
A: Kein Anteil

d) Bei einer Reihenschaltung von Federn werden die Einzelwerte der Federsteifigkeiten ...?
A: Die Kehrwerte zum Kehrwert der Gesamtfeder addiert.

Klausur: Höhere Mechanik

WS20/21: 14.06.2021

Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen

TM III
06-21
Zeit: 90 min.

Mit dem handschriftlichen Eintragung meines Namens erkläre ich an Eides statt, dass ich die Lösung der Prüfungsaufgabe selbstständig, also ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ______________________________

Studienrichtung: ____________________ Punktzahl (Prozent) (%) Note:

Nicht erlaubt sind:
- *Elektronische Geräte außer zugelassenem Taschenrechner (Casio fx991).*
- ***Andere Klausuren** oder Teile davon. Verwendung gilt als Täuschungsversuch.*
- *Korrektur-Fluid, und rote Stifte. Keine Bewertung entsprechender Teillösungen.*

Hilfsmittel sind:
- *Stifte, Skripte, Vorlesungsunterlagen.*
- *Berechnen Sie stets 3 relevante Ziffern.*
- *Nur ausgeteiltes Papier verwenden. Rückseiten sind beschreibbar.*

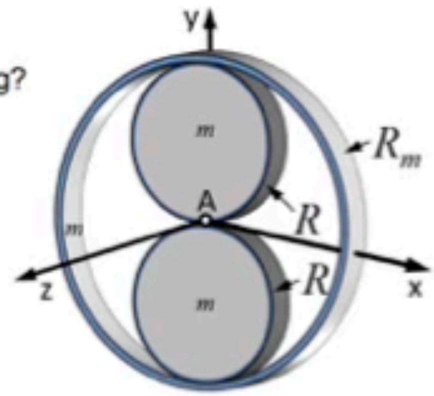
Individualisierungsfaktor (vorletzte Ziffer d. Matr.-Nr.): $\boldsymbol{k}=$
(Falls diese Ziffer Null ist ⇒ $\boldsymbol{k=10}$)

Aufgabe 1 [12 Punkte]

a) Das symmetrische Objekt rotiere um die z-Achse durch A. Wie lautet sein Massenträgheitsmoment für diese Drehung?

☐ ... $\theta_z^{(A)} = \frac{5}{4} mR^2$, ☐ ... $\theta_z^{(A)} = \frac{21}{8} mR^2$,

☐ ... $\theta_z^{(A)} = 13 mR^2$ bzw. ☐ ... $\theta_z^{(A)} = 7 mR^2$



b) Welche Trägheitseigenschaften hat ein Rotor ohne dynamische Unwucht?

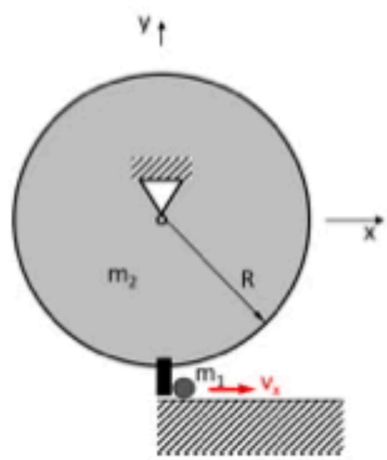
c) Wie schnell wird eine senkrecht startende Rakete im Erdschwerefeld mit der zweiten Stufe, wenn für sie gilt: Brennschluss nach 60s, Geschwindigkeit nach 1. Stufe: 680m/s, Ausstoß Verbrennungsgase: 800 m/s; Massenverhältnis $m_R/m_0 = 0{,}12$?

d) Eine homogene, mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 rotierende Scheibe m_2 trifft mit einem starren, masselosen Zahn auf eine Kugel m_1 und bleibt stehen (s. Abb.). Wie schnell bewegt sich die Kugel nach rechts? Gegeben:

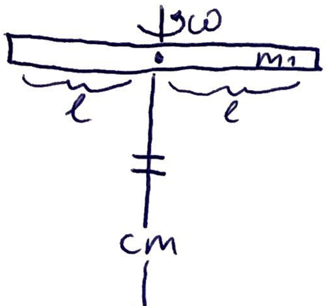
$$\omega_0 = \boldsymbol{k} \cdot 20 \frac{1}{s} \quad ; \quad m_2 = m_1/\boldsymbol{k} = m/\boldsymbol{k}\ ; \ R = 0{,}2\,m$$

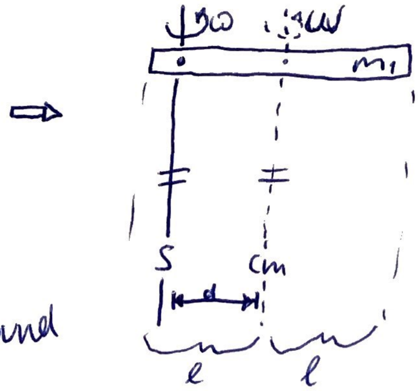
☐ $2\,m/s$ ☐ $5\,m/s$

☐ $10\,m/s$ ☐ $8\,m/s$.



Parallel Axis Theorem (Steiner Satz)



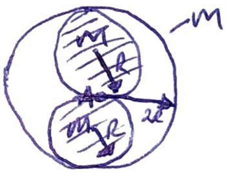


$I_{cm} = \Theta^{(cm)}$ = Inertia around centre axis

$I_S = \Theta^{(S)}$ = Inertia around Parallel (to cm) axis d cm away from centre axis.

$$I_S = I_{cm} + m_1 \cdot d^2$$

Mehrere Trägheiten um eine (gleiche) Achse können Addiert werden



Alles Rotiert um Achse A.
zwei Scheiben & ein Ring.

$\Theta^{(A)}_{ges} = 2\Theta^{(A)}_{Scheibe} + \Theta^{(A)}_{Ring}$

$\hookrightarrow \Theta^{(S)}_{Ring} = MR_s^2$

$\Rightarrow \Theta^{(A)} = m(2R)^2 = 4MR^2$

$\rightarrow \Theta^{(S)}_{Scheibe} = \frac{1}{2} mR^2$

Steiner Satz $\Rightarrow \Theta^{(A)}_{Scheibe} = \frac{1}{2} mR^2 + md^2$

$= \frac{1}{2} mR^2 + m \cdot (R)^2$

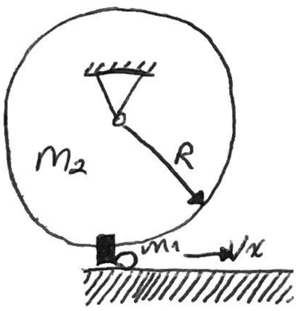
$\hookrightarrow \Theta^{(A)}_{ges} = \frac{4}{2} mR^2 + 2\left(\frac{1}{2} mR^2 + mR^2\right)$

Rakete startet senkrecht im Erdschwerefeld
gegeben: T, V_0, K, $\frac{m_r}{m_0}$

$\left(\frac{m_r}{m_0}\right)^{-1} = \frac{m_0}{m_r} \Leftarrow$ wichtig!

$V_{max} = V_0 + K \ln\left(\frac{m_0}{m_r}\right) - gT$

Allgemeines Vorgehen Rotierende Scheibe Stoß, vollständige Übertragung



Eine Homogene Scheibe der Masse m_2 rotiert mit ω_0. Der Zacken trifft Kugel und Scheibe bleibt nachher stehen.
Gegeben
ω_0, m_2, m_1, R

Ansatz:
Da sich die Kugel vorher nicht bewegt, und die Rotierende Scheibe nach dem Stoß stehen bleibt kann von eine vollständigen Übertragung der kinetischen Energie von Scheibe zu Kugel ausgegangen werden.

$$E_{kin\,m_2} = E_{kin\,m_1}$$

E_{kin} der Scheibe (vor Aufprall)

E_{kin} der Kugel (nach Aufprall)

Dazu können die jew. kinetischen Energien berechnet werden:

① $E_{kin\,m_2}$ der Scheibe vor dem Stoß
Da die Scheibe eine Rotierende Masse mit einer Trägheit darstellt kann ihre kinetische Energie als Drall beschrieben werden.
Die Formel für Drall ($=E_{kin\,m_2}$) lautet:

$$h_2^{(S)} = \Theta_Z \cdot \omega_0 \quad (= E_{kin\,m_2})$$

Wobei Θ_Z die Trägheit der Scheibe räpresentiert. Da es sich um ein Homogenes objekt handelt ist die Trägheit

$$\Theta_Z = \frac{1}{2} m_2 R^2$$

Und somit der Drall der Scheibe

$$h_2^{(S)} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \omega \quad [kg\, m^2 \tfrac{1}{s}]$$

② Bei der Kugel wird Drall mit einer anderen Formel berechnet:

$$h_1^{(S)} = R \cdot P_1$$

wobei

$$P_1 = m_1 \cdot V_x$$

somit ist der Drall der Kugel

$$h_1^{(S)} = R \cdot m_1 \cdot V_x \quad [m\, kg \tfrac{m}{s}] \Rightarrow \left[\frac{m^2 kg}{s}\right]$$

③ Jetzt kann durch auflösen nach V_x die Geschwindigkeit nach der, im Ansatz beschriebenen, ~~Formel~~ Gleichung berechnet werden:

$$E_{kin\,m_2} = E_{kin\,m_1}$$

$$h_2^{(S)} = h_1^{(S)}$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \omega = R m_1 V_x \Rightarrow \underline{\underline{V_x = \frac{\frac{1}{2} m_2 R_1^2 \omega}{m_1 R_1}}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}[kg][m^2][\frac{1}{s}]}{[kg][m]} = \left[\frac{m}{s}\right] ✓$$

Klausur: Höhere Mechanik

SS19: 06.01.2020

Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen

TM III
06-19
Zeit: 90 min.

Name: ____________________ Matr.-Nr.: ______________________________

Studienrichtung: ____________________ Punktzahl (Prozent): (%) Note:

Vorab:

Nicht erlaubt sind:

- *Elektronische Geräte* ***außer zugelassenem Taschenrechner (Casio fx991).***
- ***Andere Klausuren*** *oder Teile davon. Verwendung gilt als Täuschungsversuch.*
- *Korrektur-Fluid, und rote Stifte. Keine Bewertung entsprechender Teillösungen.*

Hilfsmittel sind:

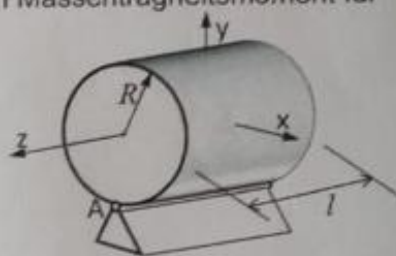
- *Stifte, Skripte, Vorlesungsunterlagen.*
- *Berechnen Sie stets 3 relevante Ziffern.*
- *Nur ausgeteiltes Papier verwenden. Rückseiten sind beschreibbar.*

Aufgabe 1 [13 Punkte]

a) Ein Zylinder rotiere um die Achse durch A. Wie lautet sein Massenträgheitsmoment für diese Drehung?

☐… $\theta^{(A)} = \frac{1}{2} mR^2$, ☐… $\theta^{(A)} = \frac{3}{2} mR^2$,

☐… $\theta^{(A)} = \frac{2}{3} mR^2$ bzw. ☐… $\theta^{(A)} = \frac{1}{2} m(x^2 + y^2)$



b) Was muss zur Beseitigung einer dynamischen Unwucht getan werden?

c) Wie schnell wird eine senkrecht startende Rakete im Erdschwerefeld mit der zweiten Stufe, wenn für sie gilt: Brennschluss nach 240s, Geschwindigkeit nach 1. Stufe: 500m/s, Ausstoß Verbrennungsgase: 2000 m/s; Massenverhältnis $m_R/m_0 = 0{,}2$?

d) Bei einem Stoß eines Körpers gegen eine Wand lautet die Stoßzahl $e = 0{,}7$.
Wie groß ist die x-Komponente der Geschwindigkeit nach dem Stoß, wenn sie zuvor $v_x = 2.4\,m/s$ betrug?

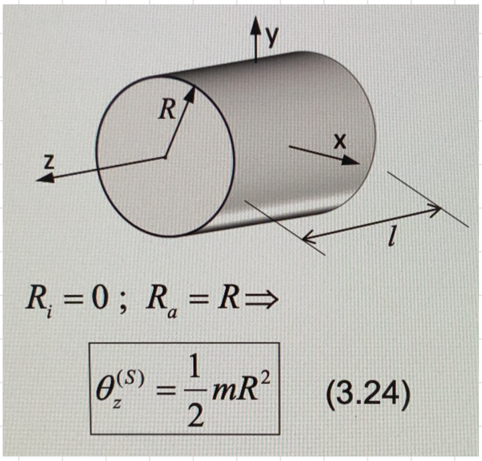
☐ $-3.43\,m/s$. ☐ $-2{,}4\,m/s$

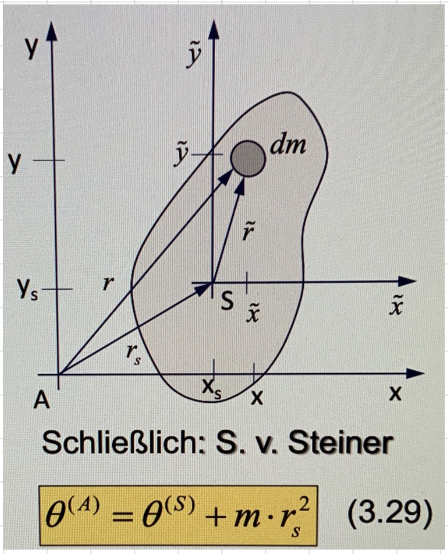
☐ $-1.68\,m/s$ ☐ $1.68\,m/s$.

① a) $\Theta_z^{(A)} = \Theta_z^{(S)} + m \cdot r_s^2$ — Steineranteil

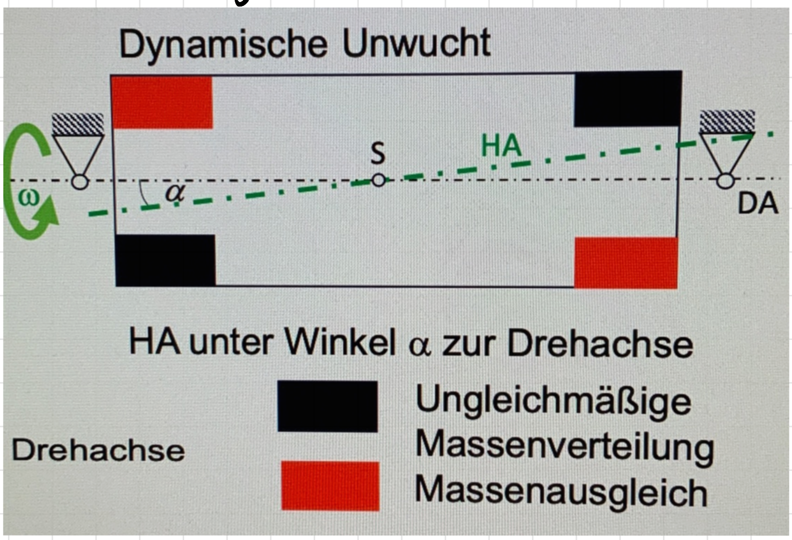
$= \frac{1}{2} m R^2 + m R^2$

$= \frac{3}{2} m R^2$





b) Massenausgleich (Material auf- oder abtragen)



c) geg: $T = 240\,s$, $V_0 = 500\,\frac{m}{s}$, $k = 2000\,\frac{m}{s}$

$\frac{m_r}{m_0} = 0{,}2 \Rightarrow \frac{m_0}{m_r} = \frac{1}{0{,}2} = 5$

$$\boxed{V_{max} = V_0 + k \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m_r}\right) - g \cdot T}$$

$= 500\,\frac{m}{s} + 2000\,\frac{m}{s} \cdot \ln(5) - 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot 240\,s$

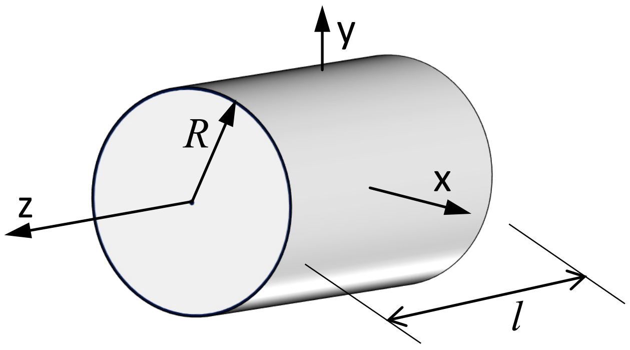
$= 1364{,}48\,\frac{m}{s}$

d) $\boxed{e = -\frac{V_2' - V_1'}{V_2 - V_1}}$ | $V_2' = 0$, $V_2 = 0$ (da Wand)

$e = -\frac{V_1'}{V_1} \Rightarrow V_1' = -e \cdot V_1 = -0{,}7 \cdot 2{,}4\,\frac{m}{s} = -1{,}68\,\frac{m}{s}$

Axiale Massenträgheitsmomente

Beziehung von (3.18)
zum Flächenträgheitsmoment



1) Homogene Köper $\rho = konst.$

$\Rightarrow$ Massedifferential: $dm = \rho dV$

$$\theta_z = \int_m r^2 dm = \rho \int_V r^2 dV$$

2) Gleichmäßige Geometrie, z. B Welle

$\Rightarrow$ Volumendifferential: $dV = l dA$

$$\theta_z = \rho \int_V r^2 dV = \rho l \cdot \int_A r^2 dA$$

3) Blaues Flächenintegral ≙
Polares Flächenträgheitsmoment I_p

$$\theta_z = \rho l \cdot I_p \qquad (3.28)$$

	Klausur: Höhere Mechanik **WS21/22: 17.01.2022** **Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen**	**TM III** 01-22 Zeit: 90 min.

Mit der handschriftlichen Eintragung meines Namens erkläre ich an Eides statt, dass ich die Lösung der Prüfungsaufgabe selbstständig, also ohne fremde Hilfe und ohne Benutzung anderer als der angegebenen Hilfsmittel angefertigt habe.

Name: [redacted] Matr.-Nr.: [redacted]

Studienrichtung: [redacted] Punktzahl (Prozent) (%) Note:

Nicht erlaubt sind:

- *Elektronische Geräte außer zugelassenem Taschenrechner (Casio fx991).*
- *Andere Klausuren* ...*ch.*
- *Korrektur-Fluid, unc* ...*en.*

Hilfsmittel sind:

- *Stifte, Skripte, Vorle*
- *Berechnen Sie stet.*
- *Nur ausgeteiltes Pa*

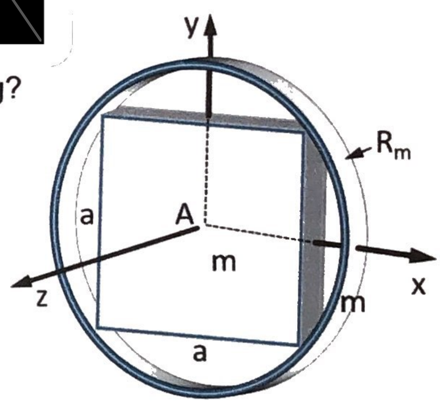
Ostfalia
Hochschule für angewandte Wissenschaften
[redacted]
STUDIERENDENAUSWEIS
- GUELTIG VOM 01.03.2021 BIS 28.02.2022
SEMESTERKARTE VRB
- GUELTIG VOM 01.03.2021 BIS 28.02.2022
SEMESTERTICKET
- GUELTIG VOM 01.03.2021 BIS 28.02.2022

Individualisieru
(Falls diese Zi

$k = 6$

Aufgabe 1 [12 Punkte]

a) Das symmetriscl
Wie lautet sein Massenträgheitsmoment für diese Drehung?



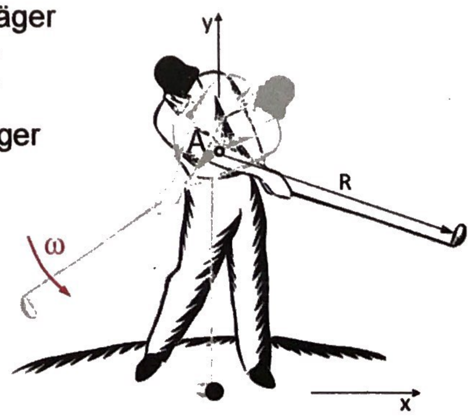
☐ ... $\theta_z^{(A)} = \frac{5}{4} m R_m^2$, ☐ ... $\theta_z^{(A)} = \frac{19}{8} m R_m^2$,

☐ ... $\theta_z^{(A)} = \frac{4}{3} m R_m^2$ bzw. ☐ ... $\theta_z^{(A)} = 3 m R_m^2$

b) Was ist zu tun für den Massenausgleich eines Rotors mit dynamische Unwucht?

c) Wie schnell wird eine senkrecht startende Rakete im Erdschwerefeld mit der zweiten Stufe, wenn für sie gilt: Brennschluss nach 48s, Geschwindigkeit nach 1. Stufe: 1200m/s, Ausstoß Verbrennungsgase: 1500 m/s; Massenverhältnis $m_R / m_0 = 0{,}24$?

d) Ein Golfspieler rotiert Oberkörper, Arme und Golfschläger (als homogener Stab der Masse m_2 gedacht!) mit der Winkelgeschwindigkeit ω um A. Als der Schlägerkopf auf den Golfball m_1 trifft, verharren Spieler und Schläger durch den Aufprall in dieser Lage.
Wie schnell bewegt sich die Kugel nach rechts?



Gegeben: $\omega = \boldsymbol{k} \cdot 20 \frac{1}{s}$; $m_2 = m_1 / \boldsymbol{k} = m / \boldsymbol{k}$; $R = 1{,}2\,m$

☐ $2\,m/s$ ☐ $5\,m/s$
☐ $10\,m/s$ ☐ $8\,m/s$.

Name [redacted] ARBEITSBLATT

Aufgabe 1

a) $\Theta_{ges}^{(A)} = \Theta_{quader}^{(A)} + \Theta_{ring}^{(A)}$

$\Theta_{qader}^{(A)} = \frac{1}{12} m l^2$ $\quad l =$ Seitenlänge d. quaders $= 2 \cdot Rm$

$= \frac{1}{12} m (2Rm)^2 = \frac{1}{12} m \, 4Rm^2$

$\Theta_{qua}^{(A)} = \frac{1}{3} m \cdot Rm^2$

$\Theta_{Ring}^{(A)} = \frac{1}{2} m Rm^2$

$\Theta_{ges}^{(A)} = \frac{1}{3} m Rm^2 + \frac{1}{2} m Rm^2$

$\Theta_{ges}^{(A)} = \frac{5}{6} m Rm^2$

b) Dynamische Unwucht kann mit Fixierung von Ausgleichsgewichten kompensiert bzw. ausgeglichen werden

c) $V_{max} = V_0 + K \ln\left(\frac{m_0}{m_r}\right) - gT$

$V_0 = 1200 \frac{m}{s}$, $K = 1500 \frac{m}{s}$

$\frac{m_0}{m_r} = \left(\frac{m_r}{m_0}\right)^{-1} = (0.24)^{-1} = 4.17$

$T = 48 s \quad g = 9.81 \frac{m}{s^2}$

$V_{max} = 1200 \frac{m}{s} + 1500 \frac{m}{s} \cdot \ln(4.17) - 9.81 \frac{m}{s^2} \cdot 48 s$

$V_{max} = 1200 \frac{m}{s} + 2141.87 \frac{m}{s} - 470.88 \frac{m}{s}$

$V_{max} = 2870.99 \frac{m}{s}$

d) Einspieler = Einball => da Einspieler Energie vollständig überträgt

$\Rightarrow \frac{1}{2} \Theta_{Schläger}^{(A)} \cdot \omega_0^2 = \frac{1}{2} \Theta_{golfball}^{(A)} \cdot \omega_{golfball}^2$

$\Theta_{Schläger}^{(A)} = \frac{M_s R^2}{3}$

$\Theta_{golfball}^{(A)} = M_b R^2$

→ nächste Seite

Name: [redacted]

ARBEITSBLATT

Aufgabe 1 d)

$$\frac{1}{2}\,\Theta^{(A)}_{Schläger}\cdot\omega_0^2 = \frac{1}{2}\,\Theta^{(A)}_{golfb.}\,\omega_{ball}^2$$

$$\omega_{ball}^2 = \frac{\Theta^{(A)}_{Schläger}\cdot\omega_0^2}{\Theta^{(A)}_{golfb.}} = \frac{\frac{m_S R^2}{3}(\omega_0^2)}{m_b R^2}$$

$m_S = \frac{m_b}{\cancel{2}} = \frac{m_b}{6}$

$m_{Schläger} = \frac{m}{6}$

$m_{ball} = m$

$$\omega_{Ball}^2 = \frac{\frac{\left(\frac{m}{6}\right)R^2}{3}\left(\omega_0 = \overset{6\cdot 20}{k\cdot 20\tfrac{1}{s}}\right)^2}{m R^2}$$

$$= \frac{\frac{\cancel{m R^2}}{18}(14400)}{\cancel{m R^2}} = \frac{14400}{18} = 800\frac{m}{s}?$$

Allgemeines Vorgehen Bestimmung Feder für Fundament einer unwuchtigen Maschine

Gegeben:

$\underline{m}$ der Maschine, $\underline{n}$ [U/min] der Maschine, $\underline{D \approx 0}$ (Elastisches Fund.)

$\underline{G} = \_\%$ = (0.01·%)

Gefragt:

Feder konstante/auslenkung

① Gleichung aus Fol. 5.65 "5.2 Schwingung" aufstellen:

$$G = \frac{F_{Fundament}}{F_{Unwucht}} \Rightarrow G \overset{!}{=} \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$$

mit der Annahme dass $D \approx 0$:

$$G \overset{!}{=} \frac{\sqrt{1+4\cdot 0\cdot \eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4\cdot 0\cdot \eta^2}} \Rightarrow G \overset{!}{=} \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}}$$

$$\Rightarrow G \overset{!}{=} \pm \frac{1}{1-\eta^2}$$

② Aus der obigen Gleichung η berechnen, Einheiten hier ignorieren!

$$\pm G \overset{!}{=} \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$1 = \pm G(1-\eta^2)$$

— Nach η^2 Umformen, ± behalten liefert: —

$$\underset{\text{Einheitslos}}{\eta} = \sqrt{\frac{1 \pm G}{\pm G}} \Rightarrow$$ Daraus kann η berechnet werden, ob ± muss so gewählt sein dass $\eta \in \mathbb{R}$ ist (also meistens (Eig. immer) G +).

③ "Abstimmung" um ω_0 zu finden, Einheiten nicht ignorieren!

$$\eta = \frac{\Omega \leftarrow \text{Erregerunwucht}}{\omega_0 \leftarrow \text{Eigenkreisfreq. d. Fundaments (gesucht)}}$$

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{\eta \leftarrow \text{Bekannt}} \longrightarrow \Omega = 2\pi \cdot n/60, \quad 2\pi \cdot \left[\frac{U}{min}\right]\left[\frac{1}{60s}\right] = \left[\frac{1}{s}\right]$$

siehe oben "gegeben"

Daraus ω_0 in $[\frac{1}{s}]$ berechnen

④ "statische Federung" (x_0) bestimmen (oder c)

Dazu stat. GG.:

Federkraft des Fundamentes = Gewichtskraft d. Maschine

$$\Rightarrow c \cdot x_0 = m \cdot g, \quad \text{wobei } \frac{c}{m} = \omega_0^2$$

$$x_0 = \frac{m}{c} \cdot g = \frac{1}{\omega_0^2} \cdot g \left[\frac{1}{s^2} \cdot \frac{m}{s^2}\right] \rightarrow x_0\ [m]$$

Wenn nach Federkonstante c gefragt ist:

$$c = \frac{m \cdot g}{x_0} \Rightarrow \left[\frac{kg\,m}{m\,s^2}\right] = \left[\frac{N}{m}\right] = [N/m]$$

Aufgabe 2

Eine unwuchtige Maschine mit der Masse $m=100kg$ läuft mit der Drehzahl von 3000 U/min. Sie soll ein elastisches Fundament erhalten (D≈0), um ihre dynamischen Krafteintrag in den Boden gering zu halten.

Welche Federkonstante ist für die Lagerung zu wählen, wenn nur 10% der Unwuchtkraft in das Fundament übertragen werden sollen?

Aufgabe 2 ~~SS19~~ SS19

$m = 100kg$, $n = 3000 U/min$, $D \approx 0$, $G = 10\%$

① Aus Fol. 5.65

$$G \overset{!}{=} \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}$$

$D \approx 0$:

$$G \overset{!}{=} \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}}$$

$$G \overset{!}{=} \pm \frac{1}{(1-\eta^2)}$$

② η berechnen

$$\pm G \overset{!}{=} \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$1 = \pm G(1-\eta^2)$$

$$1 = \pm G \pm \eta^2$$

$$\eta^2 = 1 \pm G$$

$$\eta = +\sqrt{\frac{1 \pm G}{\pm G}}$$

$$\underline{\eta} = +\sqrt{\frac{1+G}{G}} = \sqrt{\frac{1,1}{0.1}} = \underline{3.32}$$

③ Abstimmung um ω_0 zu finden

$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} \Longrightarrow \omega_0 = \frac{\Omega}{\eta}$$

$$\Omega = 2\pi \cdot \frac{n}{60s} = 314.16 \frac{1}{s}$$

$$\Longrightarrow \omega_0 = \frac{314.16\frac{1}{s}}{3.32} = 94.63\frac{1}{s}$$

④ Statische Federung

Federkraft d. Fundaments = Gewichtskraft d. Maschine

$$c \cdot x_0 = m \cdot g \;; \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m} ~~\Rightarrow c = \omega_0^2 m~~$$

$$x_0 = \frac{m}{c} \cdot g = \omega_0^{-2} \cdot g \;\; \left[\left(\tfrac{1}{s}\right)^{-1} \tfrac{m}{s^2}\right] \; m[m]$$

$$x_0 = (94.63)^{-2} \cdot (9,81) \; m$$

$$x_0 = 1.095 \cdot 10^{-3} m$$

$$\underline{c} = \frac{m \cdot g}{x_0} = \frac{100kg \cdot 9.81\frac{m}{s^2}}{1.095 \cdot 10^{-3} m} = 895.89 k\frac{kg}{s^2} = \underline{895.89 kN/m}$$

Aufgabe 2 [14 Punkte]

Eine unwuchtige Maschine mit der Masse $m=125\ kg$ läuft mit der Drehzahl von 1200 U/min. Sie soll ein elastisches Fundament erhalten (D=0), um ihre dynamischen Krafteintrag in den Boden gering zu halten.

a) Welche Federkonstante ist für die Lagerung zu wählen, wenn nur 6,25% der Unwuchtkraft in das Fundament übertragen werden sollen?

b) Sie würden einen Dämpfer so wählen, dass D=0.05 beträgt. Ihr Vorgesetzter möchte, dass Sie einen Dämpfer mit höherem Dämpfungsmaß verwenden, damit die Kraft in den Boden stärker gedämpft wird. Hat er recht? (Begründung!)

Altklausur WS 20/21

e 2

Unwuchtige Maschine mit $m = 85 kg$ läuft mit 1200 U/min
soll ein elastisches Fundament erhalten mit $D \approx 0$

a) Welche Federkonstante ist für die Lagerung zu wählen wenn nur 6% der Unwuchtkraft ins Fundament übertragen werden soll?

① $G = 0.06 = \frac{F_{Fundament}}{F_{Unwucht}} \Rightarrow \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1 \mp \eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}} \stackrel{!}{=} 0.06$ Fol. 5.65 "5.2 Schwingungs

② $D = 0$, $\pm$

$G = \frac{\sqrt{1+0}}{\sqrt{(1 \mp \eta^2)^2 + 0}} = \pm \frac{1}{1 \mp \eta^2}$

↳ wegen $\sqrt{\ }$

③ η berechnen

$\pm \frac{1}{1-\eta^2} = 0.06$

$1 = \pm 0.06(1-\eta^2)$

$1 = \pm 0.06 \pm 0.06\eta^2$

$\pm 0.06\eta^2 = \pm 0.06 + 1$

$\eta^2 = \frac{1 \pm 0.06}{\pm 0.06}$

$\eta = +\sqrt{\frac{1 \pm 0.06}{\mp 0.06}}$ ⇒ hier muss entschieden werden ob + oder −, sodass $\eta \in \mathbb{R}$ ist

$\eta = +\sqrt{\frac{1+0.06}{0.06}} = 4.2$

④ "Abstimmung"

$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ ← Erregerunwucht $= 2\pi \cdot \frac{U}{min} \cdot 60 s$ ← geg.
← Eigenkreisfrequenz d. Fundamentes

~~④.1 $\omega_0 = \frac{\Omega}{60} = 1200 \cdot 2\pi$~~

$\underline{\omega_0} = \frac{\Omega}{\eta} = \frac{(2\pi \cdot 1200 \cdot \frac{1}{60})}{4.2} = \underline{29.92 \frac{1}{s}}$

⑤ "Statische Einfederung" (x_0 bestimmen)

stat. GG. Federkraft (des Fundamentes) = Gewichtskraft der Maschine

$c \cdot x_0 = m \cdot g$

$x_0 = \frac{m \cdot g}{c}$, wobei $\frac{m}{c} = \frac{1}{\omega_0^2}$

$x_0 = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9.81 \frac{m}{s^2} s^2}{(29.92)^2} = 0.0109 m$

$c = \frac{m \cdot g}{x_0} = \cancel{\frac{0.0107 m \cdot 9.81}{x_0}} = \frac{85 kg \cdot 9.81 \frac{m}{s^2}}{0.0109} = 76500 \frac{N}{m}$

$kg \frac{m}{s^2}$

Aufgabe 2 [13 Punkte]

Eine unwuchtige Maschine mit der Masse *m=90 kg* läuft mit der Drehzahl von

$$n=800\cdot\left(1+\frac{k}{5}\right)\text{ U/min.}$$

Sie soll ein elastisches Fundament erhalten (D≈0), um ihre dynamischen Krafteintrag in den Boden gering zu halten.

a) Welche Federkonstante ist für die Lagerung zu wählen, wenn nur 18 % der Unwuchtkraft in das Fundament übertragen werden sollen?

b) Sie würden einen Dämpfer so wählen, dass *D=0.04* beträgt. Ihr Vorgesetzter möchte, dass Sie einen Dämpfer mit höherem Dämpfungsmaß verwenden, damit die Kraft in den Boden stärker gedämpft wird. Hat er recht? (Begründung!)

a) Geg:
$m=90kg$; $n=800(1+\frac{6}{5})$ U/min $=1760$ U/min ; $D\approx 0$; $G=18\%$

Aus Folie 5.65

$$G\overset{!}{=}\frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1-\eta^2)^2+4D^2\eta^2}}$$

$D\approx 0$

$$G\overset{!}{=}\frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2}}$$

$$G\overset{!}{=}\pm\frac{1}{(1-\eta^2)}$$

$$\pm G=\frac{1}{(1-\eta^2)}$$

$$\pm G(1-\eta^2)=1$$

$$\pm G\pm G\eta^2=1$$

$$\pm G\eta^2=1\pm G$$

+ wählen da $\eta\in\mathbb{R}$

$$\eta=\sqrt{\frac{1\pm G}{\pm G}}=\sqrt{\frac{1+0.18}{0.18}}=2.56$$

Abstimmung mit:

$$\eta=\frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\omega_0=\frac{\Omega}{\eta}=\frac{n\cdot 2\pi/60s}{2.56}=72\frac{1}{s}$$

Statische Federung = Gewichtsk. d. Fund

$$m\cdot g=c\cdot x_0$$

$$x_0=\frac{m}{c}\cdot g\Rightarrow\omega_0^2=\frac{c}{m}$$

$$x_0=\omega_0^{-2}\cdot g\quad\left[s^2\cdot\frac{m}{s^2}\right]$$

$$x_0=(72)^{-2}(9.81)\ m$$

$$x_0=0.0019m$$

$$c=\frac{m\cdot g}{x_0}=\frac{90kg\cdot 9.81\frac{m}{s^2}}{0.0019m}$$

$$\underline{\underline{c=466{,}6\ \frac{kN}{m}}}$$

b)

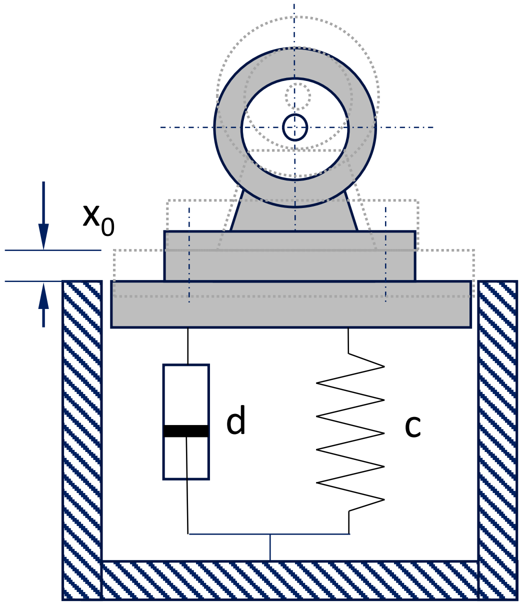
Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften

Beispiel 5.4

Aktivisolierung

Eine unwichtige Maschine läuft mit der Drehzahl von 1500 U/min, aktiv isoliert durch ein elastisches Fundament (D=0).

Wie groß muss die statische Verformung x_0 aufgrund des Maschinengewichtes eingestellt werden, wenn 5% der Unwuchtkraft in das Fundament übertragen werden soll?



TM III AKGV Isolierung

Unwuchtige Maschine läuft mit der Drehzahl 1500 U/min durch elastisches Fundament (D=0)

Wie groß muss statische Verformung x_0 aufgrund des Maschinengewichtes eingestellt werden, wenn 5% der Unwuchtkraft an Fundament übertragen werden soll

Güte der Isolierung: $G = \frac{F_{Fundament}}{F_{Unwucht}} = \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1+\eta^2)^2+4D^2\eta^2}} \overset{!}{=} 0.05$

$$G = \frac{F_{Fundament}}{F_{Unwucht}} = \frac{\sqrt{1+4D^2\eta^2}}{\sqrt{(1+\eta^2)^2+4 D^2 \eta^2}} \overset{!}{=} 0.05$$

Elastische Auslegung: $D=0 \Rightarrow$

$$G = \pm \frac{1}{1-\eta^2} \overset{!}{=} 0.05 \quad \text{bzw. da } \eta \in \mathbb{R}$$

$$1 = -0.05(1-\eta^2) = 0.05(\eta^2-1)$$

$$\frac{1+0.05}{0.05} = \eta^2 \Rightarrow \eta = \sqrt{\frac{1+0.05}{0.05}} = \underline{\underline{4.58}}$$

Abstimmung: $\eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$ ← Erregerunwucht, ← Eigenkreisfrequenz des Fundaments

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{\Omega}{\eta} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60s \cdot 4.58} = \underline{\underline{34.3 \tfrac{1}{s}}}$$

Statische Einfederung

Stat. GG: Federkraft $c \cdot x_0 = m \cdot g$

c: Fk des Fundaments; $m \cdot g$: Gewichtskraft d. Maschine

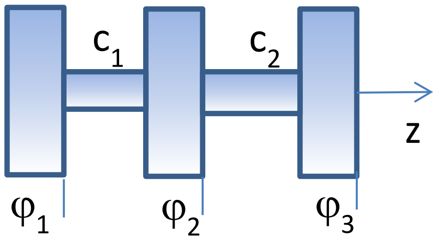
$$\Rightarrow x_0 = \frac{m}{c} g = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9.81}{(34.3)^2} \frac{m s^2}{s^2}$$

$$= 8.35 \cdot 10^{-3} m = \underline{\underline{8.35 mm}} \rightarrow \text{statische Einfederung}$$

Aufgabe 3

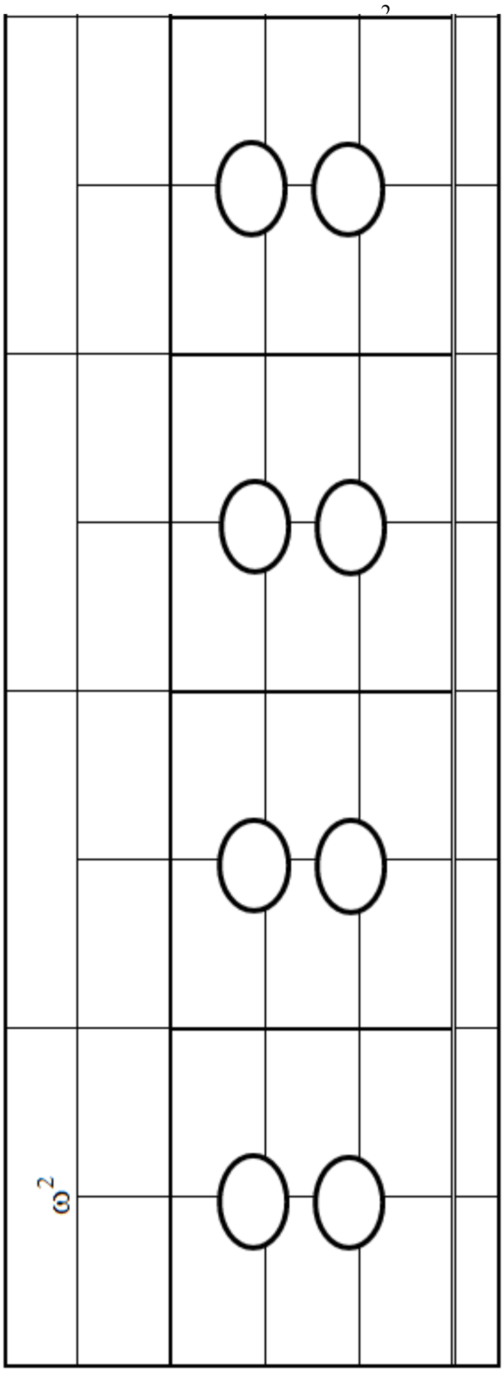
a) Bestimmen Sie die Koppelkreisfrequenzen für die dargestellte, freie Torsionsschwingerkette mit dem Restgrößenverfahren nach *Holzer-Tolle* für die angegebenen Schätzfrequenzen $\tilde{\omega}^2$.

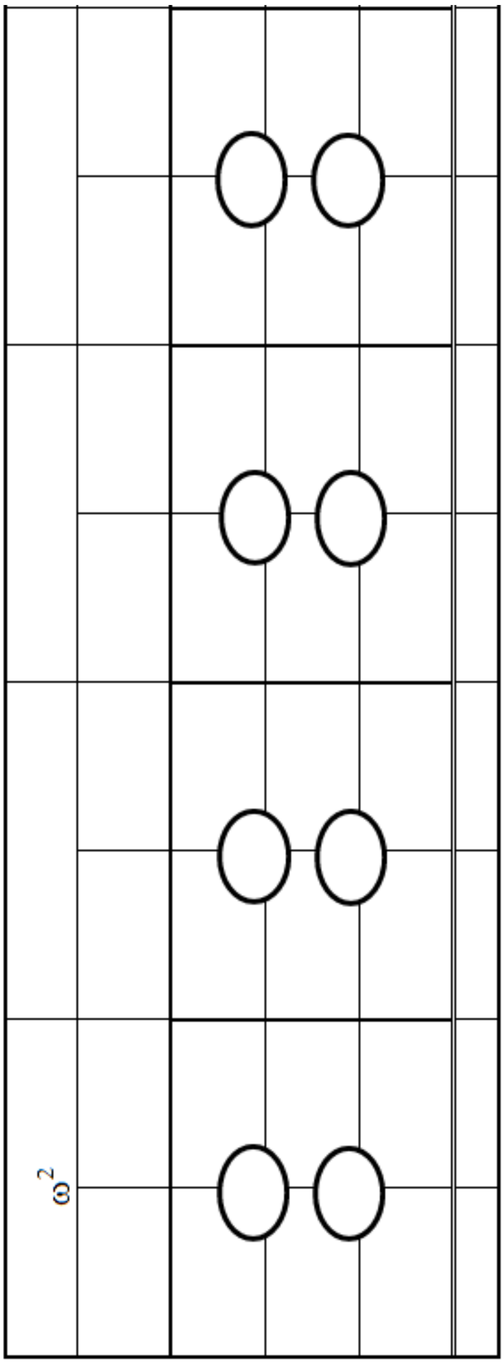
b) Skizzieren Sie die sich ergebenden Eigenformen.



Gegeben: $\tilde{\omega}^2 = \{0;\ 50;\ 200;\ 230\}$

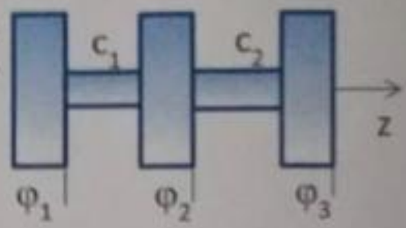
$$\theta_1 = 80\,kgm^2\,;\ \theta_2 = 80\,kgm^2\,;\theta_3 = 120\,kgm^2;c_1 = 8000\,Nm;\ c_2 = 4000\,Nm$$





Aufgabe 3 [20 Punkte]

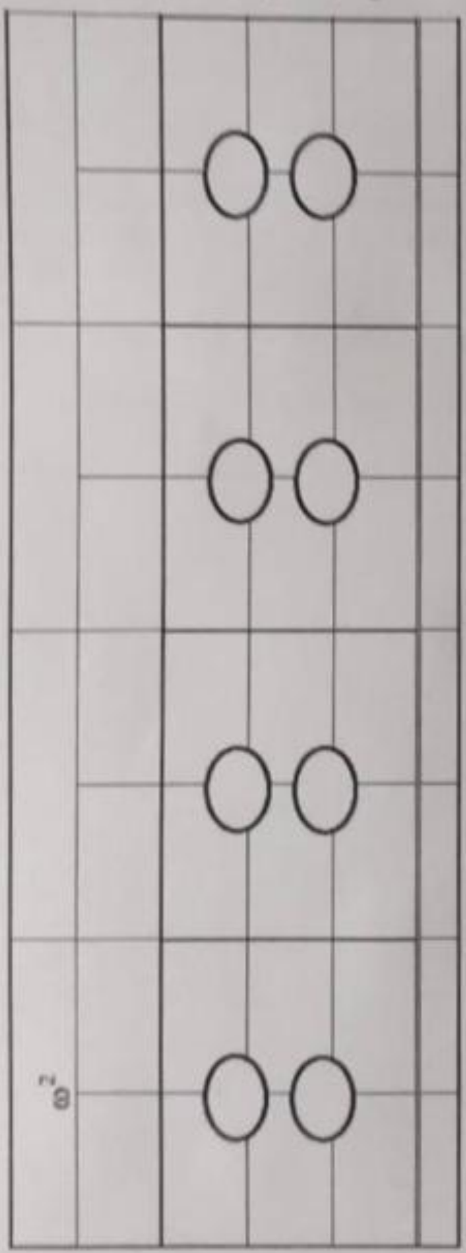
a) Bestimmen Sie die Koppelkreisfrequenzen für die dargestellte, freie Torsionsschwingerkette mit dem Restgrößenverfahren nach *Holzer-Tolle* für die angegebenen Schätzfrequenzen $\bar{\omega}^2$.

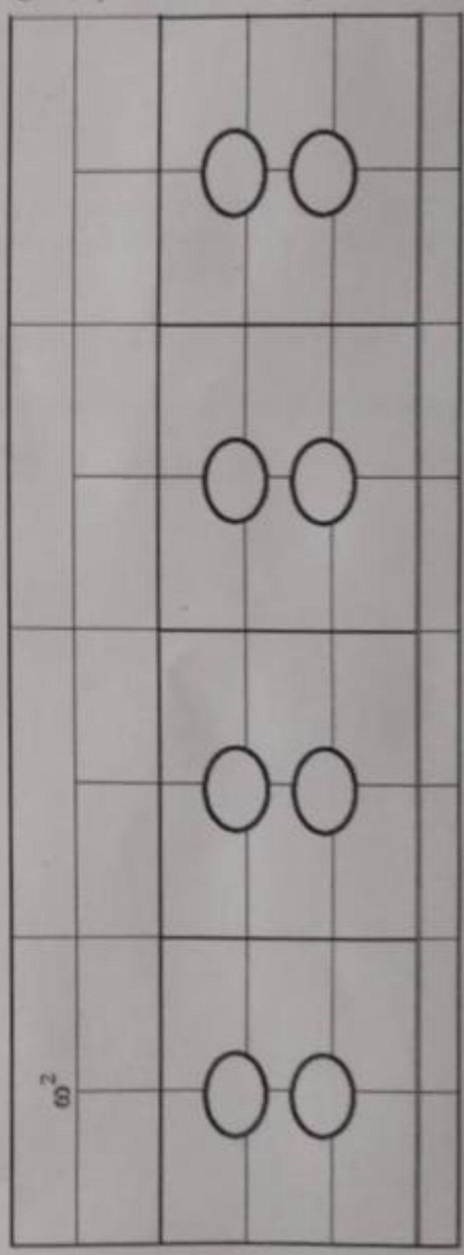


b) Skizzieren Sie die sich ergebenden Eigenformen.

Gegeben: $\bar{\omega}^2 = \{0;\ 80;\ 160;\ 250\}$

$$\theta_1 = 180\,kgm^2;\ \theta_2 = 360\,kgm^2;\ \theta_1 = 240\,kgm^2;\ c_1 = 12000\,Nm;\ c_2 = 33000\,Nm$$





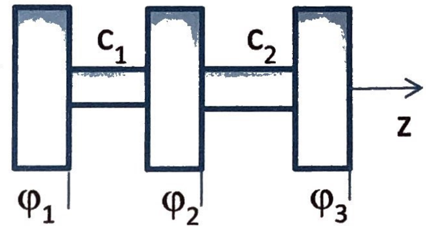
Klausur: Höhere Mechanik

WS21/22: 17.01.2022

Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen

TM III
01-22
Zeit: 90 min.

Aufgabe 3 [20 Punkte]



a) Bestimmen Sie die Koppelkreisfrequenzen für die dargestellte, freie Torsionsschwingerkette mit dem Restgrößenverfahren nach *Holzer-Tolle* für die angegebenen Schätzfrequenzen $\tilde{\omega}^2$.

b) Skizzieren Sie die sich ergebenden Eigenformen.

Gegeben: $\tilde{\omega}^2 = \{0;\ 500;\ 1000;\ 1250\}\frac{1}{s^2}$

$$\theta_1 = 40\,kgm^2\ ;\ \theta_2 = 80\,kgm^2\ ;\theta_3 = 80\,kgm^2;\ c_1 = 20000\,Nm;\ c_2 = 40000\,Nm$$

$\omega^2=0$		$\omega^2=500$		$\omega^2=1000$		$\omega^2=1250$	
$\hat\varphi_i$	$\theta_i\hat\varphi_i$	$\hat\varphi_i$	$\theta_i\hat\varphi_i$	$\hat\varphi_i$	$\theta_i\hat\varphi_i$	$\hat\varphi_i$	$\theta_i\hat\varphi_i$
1	40	1	40	1	40	1	40
1	80	0	0	-1	-80	-1.5	-120
1	80	-0.5	-40	0	0	1	80
$\Delta\omega^2$	200	$\Delta\omega^2$	0	$\Delta\omega^2$	-40	$\Delta\omega^2$	0

$\varphi_{i+1} = 1 - \frac{0}{c_1}(\ldots$

$\varphi_{i+1} = 1 - \frac{500}{20000}(40) =$
$\varphi_{i+1} = 0 - \frac{500}{40000}(0)$

$\varphi_{i+1} = 1 - \frac{1000}{20000}(40)$
$\varphi_{i+1} = -1 - \frac{1000}{40000}(-80)$

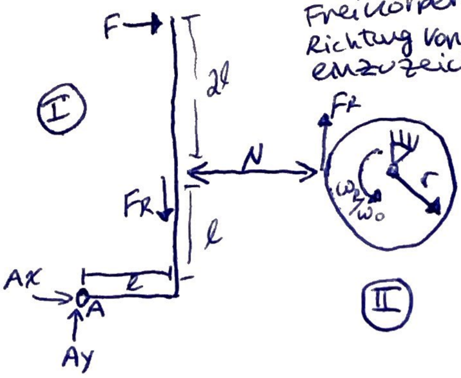
$\varphi_{i+1} = 1 - \frac{1250}{20000}(40)$
$\varphi_{i+1} = -1.5 - \frac{1250}{40000}(-120+40)$

ω^2				

Allgemeines Vorgehen Trommelbremse mit Hebel

① Freikörperbild

z.B.:



Wichtig beim Freikörperbild ist Richtung von F_R richtig einzuzeichnen!

Gegeben:

Längen, F, μ, r, $\Theta^{(S)}$, ω_R/ω_0

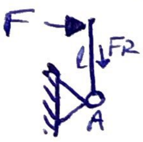
Gesucht:

Anzahl d. Umdrehungen bis zum Stillstand des Rades

② Statisches Gleichgewicht um A

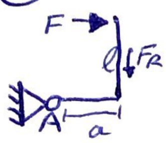
- Wichtig hierbei ist dass Kräfte die direkt auf A zeigen/wirken nicht in die Gleichung kommen.

z.B.: (I) F_R wirkt direkt auf A



$\overset{\curvearrowright}{M_A}: 0 = \underline{0 \cdot F_R} + l \cdot F \ldots$

(II) F_R wirkt indirekt auf A



$\overset{\curvearrowright}{M_A}: 0 = \underline{a \cdot F_R} + l \cdot F$

- Die Formel sollte ungefähr so aussehen:

$$\overset{\curvearrowright}{M_A}: \quad 0 = F \cdot 3l + F_R \cdot l - N \cdot l$$ → von Freikörperbild ①

da F_R (Reibkraft) $= \mu \cdot N$

$$0 = F \cdot 3l + \mu \cdot N \cdot l - N \cdot l$$

durch Umformen kann N berechnet werden

$N =$

③ Arbeitssatz anwenden um Anzahl der Umdrehungen zu berechnen

Aus Fol. 3.31:

$$\frac{1}{2}\Theta^{(S)} \cdot \underbrace{(\omega_1)^2}_{=0} - \frac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^{(S)}\, d\varphi$$

Wobei:
- $\Theta^{(S)}$ gegeben
- ω_1 = Endgeschwindigkeit $= 0$
  - ↳ "Bis zum Stillstand d. Rades"
- ω_0 gegeben
- φ_1 = Endlage des Rades in rad
- φ_0 = Anfangslage des Rades $= 0$

$\varphi_0 = 0$

$\cancel{\frac{1}{2}}$

$$-\frac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} F_R \cdot R\, d\varphi$$

VZ. pos. (nicht sehr wichtig)

$$+\frac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0=0}^{\varphi_1} \overset{\text{geg.}}{\mu} \cdot \overset{\text{Bekannt}}{N} \cdot R\, d\varphi$$

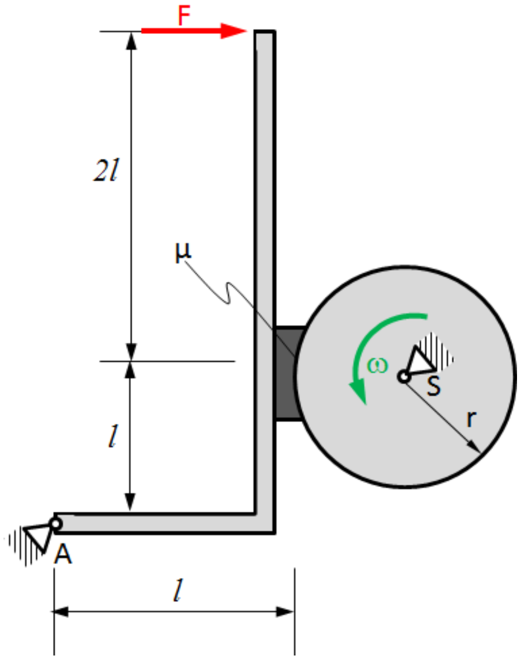
– Umformen, Lösen nach φ_1 gibt –

$\varphi_1 = \ldots$

$$\underline{\underline{z = \frac{\varphi_1}{2\pi}}}$$

Aufgabe 4

Die dargestellt Trommelbremse rotiere mit ω_0 um ihren Schwerpunkt. Dann wird Sie über den Bremshebel mit der Kraft F bis zum Stillstand ausgebremst.



a) Wie viele Umdrehungen vollführt Sie bis zum Stillstand?

b) Wie groß ist die Reibarbeit für diesen Vorgang?

Gegeben: $l = 0{,}2\,m;\; F = 100N;\; \mu = 0.3;\; r = 0{,}3\,m;$
$\theta^{(S)} = 28\,kgm^2;\; \omega_0 = 5/s$

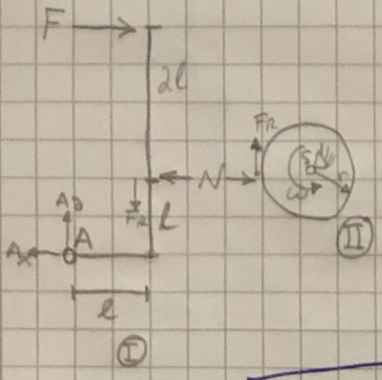
Aufgabe 4 Trommelbremse

Trommelbremse rotiert mit ω_0 um ihren Schwerpunkt
wird mit der Kraft F bis zum Stillstand ausgebremst

a) wie viele Umdrehungen bis Stillstand

b) Reibarbeit

① Freikörperbild



2l müsste eig. 3l sein, daher ist Aufgabe falsch (sonst richtig)

② Statisches Gleichgewicht um A

$$\text{M}: \; -F\cdot 2l + N\cdot l - F_R = 0$$
$$-F\cdot 2l + N\cdot l - \mu\cdot N = 0$$
$$N(l-\mu) = F\cdot 2l$$
$$N = \frac{F\cdot 2l}{l-\mu} \quad (1)$$

③ Arbeitssatz

$$\underbrace{\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_1)^2}_{=0} - \tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^{(S)}\, d\varphi$$

weil die Ausgangssituation bei Stillstand ist

$$-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^{(S)}\, d\varphi \rightarrow M^{(S)} = \mu\cdot N\cdot R$$

$$-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mu\cdot N\cdot r\, d\varphi$$

$$-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \mu\cdot N\cdot r\,(\varphi_1 - \varphi_0)$$

φ_0 → Anfangspos. $=0$

φ_1 → Endpos. (gesucht)

$$-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2 = \mu N r\,(\varphi_1)$$

$$\varphi_1 = \frac{-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2}{\mu\cdot N\cdot r} = \frac{-\tfrac{1}{2}\Theta^{(S)}(\omega_0)^2}{\mu\left(\frac{F\cdot 2l}{l-\mu}\right)r} \Rightarrow N = \frac{F\cdot 2l}{l-\mu} = \frac{100N\cdot 2\cdot 0{,}2m}{0{,}2m-0{,}3} = -400$$

$$\varphi_1 = \frac{-\tfrac{1}{2}(28\,kgm^2)(5\,\tfrac{1}{s})^2}{0{,}3(-400N)(0{,}3m)} = 9{,}72\,rad$$

$$\frac{9{,}72\,rad}{2\pi\,rad/U} = \underline{\underline{1{,}55\,U}}$$

Trommelbremse

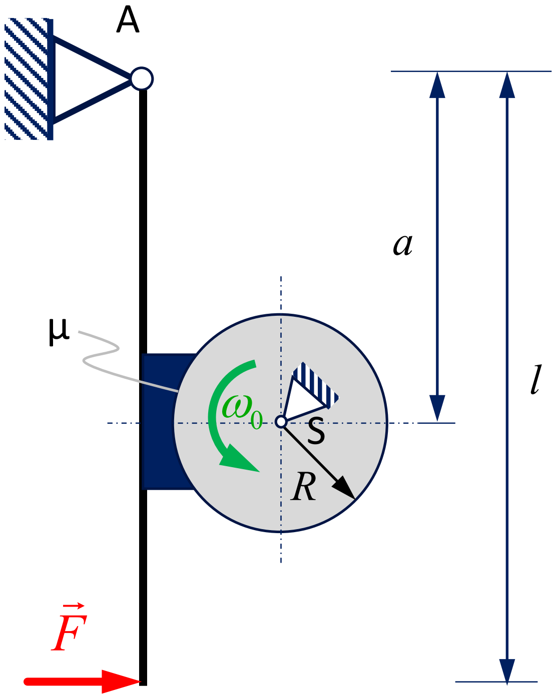
Beispiel 3.4

Eine schwere Trommel ($\theta^{(S)}$) rotiere mit ω_0 um ihre Zentralachse durch S und werde über einen Bremshebel gemäß Abbildung mit der Kraft F bis zum Stillstand gebremst.

a) Wieviel Umdrehungen vollführt die Trommel während des Bremsens?

b) Wie lautet die Reibleistung als Funktion der Zeit?

Gegeben: $a\,;l\,;\ \theta^{(S)}\,;\ \omega_0\ ;\ F\ ;\ \mu$



TM 3 Kap 3 Trommelbremse

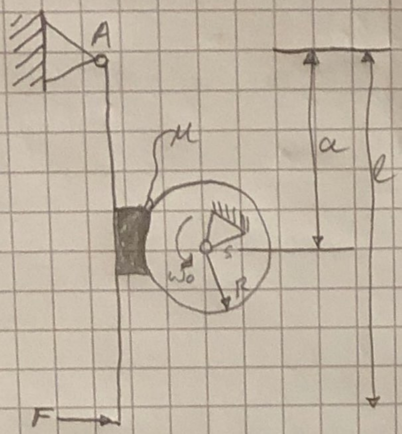
Trommel $\Theta^{(S)}$ rotiere mit ω_0 um Zentralachse S, wird mit Bremshebel mit Kraft F zum Stillstand gebracht.

Gegeben:

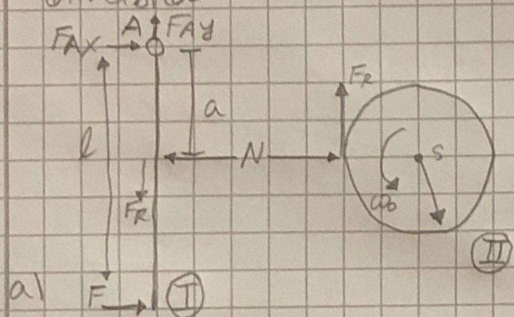
$a, \ell, \Theta^{(S)}, \omega_0, F, \mu$

Gefragt:

wieviel Umdrehungen bis zum Stillstand?



① Freibild



a)

Methode #1:

WICHTIG!

F_R spielt keine Rolle weil es durch A zeigt. Nicht immer der Fall!

↳ Deswegen kein F_{Ax}

② Statische Gleichgewicht bei Drehung um A:

$\textcircled{A}: F \cdot \ell - \underset{\text{Normalkraft}}{\hat{N}} \cdot a = 0 \Rightarrow \boxed{N = \frac{\ell}{a} F}$ (1)

③ Lösung über den Arbeitssatz (3.31)

$\frac{1}{2}\Theta^{(S)} \underbrace{\omega_1^2}_{=0} - \frac{1}{2}\Theta^{(S)}\omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M^{(S)} d\varphi$

weil zum Stillstand gebremst wird

$-\frac{1}{2}\Theta^{(S)}\omega_0^2 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \mu N R \, d\varphi = -\mu \frac{\ell}{a} F R(\varphi_1 - \underbrace{\varphi_0}_{=0 \text{ (Anfangspunkt)}})$

$= -\frac{\mu \ell}{a} F R \varphi_1$

Winkel:

$\varphi_1 = \frac{\Theta^{(S)} \cdot \omega_0^2 \cdot a}{2 \cdot \mu \cdot \ell \cdot R \cdot F}$

Zahl der Umdrehungen $\underline{\underline{z = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Theta^{(S)}\omega_0^2 a}{\mu \ell R F}}}$

Methode #2 Momentengleichgewicht

$\Rightarrow \alpha_0 = -\mu \frac{R \ell}{a \Theta^{(S)}} \cdot F = \text{konst.}$

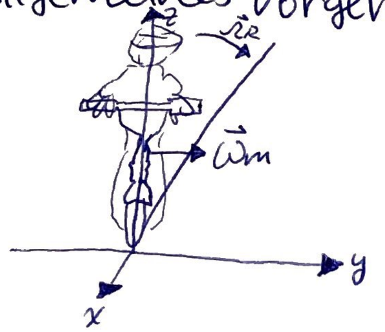
$\Rightarrow$ Gleichmäßig Beschl. Bewegung

b) Reibleistung (3.32)

$P = \Theta^{(S)} \cdot \alpha_0 \cdot \omega = \Theta^{(S)} \alpha_0 (\alpha_0 \cdot t + \omega_0)$

$\underline{\underline{P = \Theta^{(S)}\left(-\mu \frac{R \ell F}{a \Theta^{(S)}}\right)\omega_0 - \frac{(\mu R \ell F)^2}{a^2 \Theta^{(S)}} \cdot t}}$

Allgemeines Vorgehen Motorrad Aufgabe:



Gegeben:

Motor rotiert mit $\omega_m =$ [illegible] $\left[\frac{1}{s}\right]$

↳ Richtung der Rotation, bzw. um welche Achse (In dieser Abbildung $\omega_m = \omega_y$)

Fahrer bringt Motorrad in Rollbewegung $\vec{\Omega}_R = \left[\frac{1}{s}\right]$

↳ Richtung der Rollbewegung (In dieser Abbildung $\Omega_R = \Omega_x$

① ω_y, ω_x & ω_z sowie Ω_y, Ω_x & Ω_z bestimmen.

In diesem Fall ist $\omega_m = \omega_y$, $\Omega_x = \Omega_R$

$\omega_x = \omega_z = \Omega_y = \Omega_z = 0$ (keine Rot. um diese Achsen geg.)

② Eulersche Gleichungen, "Kreiselgleichungen"

$$\begin{pmatrix} \Theta^{(x)}\dot{\omega}_x - \Theta^{(y)}\Omega_z\omega_y + \Theta^{(z)}\Omega_y\omega_z \\ \Theta^{(y)}\dot{\omega}_y - \Theta^{(z)}\Omega_x\omega_z + \Theta^{(x)}\Omega_z\omega_x \\ \Theta^{(z)}\dot{\omega}_z - \Theta^{(x)}\Omega_y\omega_x + \Theta^{(y)}\Omega_x\omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{pmatrix}$$

→ Werte einsetzen, das Meiste wird 0 sodass eine einfach zu lösende Gleichung für Moment in x / y oder z resultiert

Zusätzlich:

Bei längseingebautem Motor:

$\omega_R = \omega_x$, $\omega_y = 0 \Rightarrow$ Kreiselgleichung $\Rightarrow M_x = M_y = M_z = 0$

Bei quereingebautem Motor:

$\omega_R = \omega_y$, $\omega_x = 0 \Rightarrow$ Liefert einfach zu lösende Gleichung

Aufgabe 4 [17 Punkte]

Ein Motorrad mit quer eingebautem Reihen-vierzylinder-Motor fährt auf gerader Strecke. Der Motor rotiert mit $\omega_M = 500\frac{1}{s}$. Um zu überhohlen versetzt der Fahren das Motorrad in eine Rollbewegung mit $\Omega_R = 2\frac{1}{s}$.

a) Berechnen Sie das Moment auf die Motorlager. (Darum verspürt der Fahrer einen „Widerstand" gegen die Rollbewegung!).

b) Welchen Wiederstand gegen die Rollbewegung würde der Fahrer eines Motorrads mit längs eingebautem Boxer-Motor verspüren? (Begründung!)

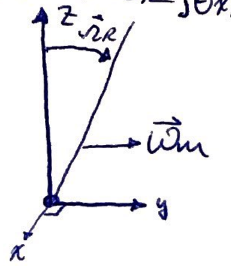
Gegeben: Axiale Massenträgheiten,

$$\theta_x = \theta_0 \; ; \; \theta_y = 2\theta_0 \; ; \; \theta_z = 2\theta_0 ; \;\; \theta_0 = \frac{8}{k} kgm^2$$

Aufgabe 4 Motorrad mit quer eingebauten Motor

a)

Geg: $\omega_m, \Omega_R, \theta_x, \theta_y, \theta_z$



① $\Rightarrow$ $\omega_x = 0$ $\quad \Omega_x = \Omega_R$

$\omega_y = \vec{\omega}_m$ $\quad \Omega_y = 0$

$\omega_z = 0$ $\quad \Omega_z = 0$

② Eulersche Kreiselgleichungen

$M_x = \theta^{(x)} \dot{\omega}_x - \theta^{(y)} \Omega_z \omega_y + \theta^{(z)} \Omega_y \omega_z$

$M_y = \theta^{(y)} \dot{\omega}_y - \theta^{(z)} \Omega_x \omega_z + \theta^{(x)} \Omega_z \omega_x$

$M_z = \theta^{(z)} \dot{\omega}_z - \theta^{(x)} \Omega_y \omega_x + \theta^{(y)} \Omega_x \omega_y$

$M_x = 0$

$M_y = 0$

$\underline{M_z} = \theta^{(y)} \Omega_x \omega_y = \underline{2\theta_0 \cdot \Omega_R \cdot \omega_m}$

$M_z = 2\left(\frac{8}{k} \text{kgm}^2\right)\left(2\,\frac{1}{s}\right)\left(500\,\frac{1}{s}\right)$

$M_z = \frac{16000}{k} \, \frac{\text{kgm}^2}{s^2}$

$\underline{\underline{M_z = \frac{16000}{k} \, \text{Nm}}}$

b) Längseingebaut

$\omega_R = \omega_x \quad \Omega_x = \Omega_R$

Eulersche Kreiselgleichungen

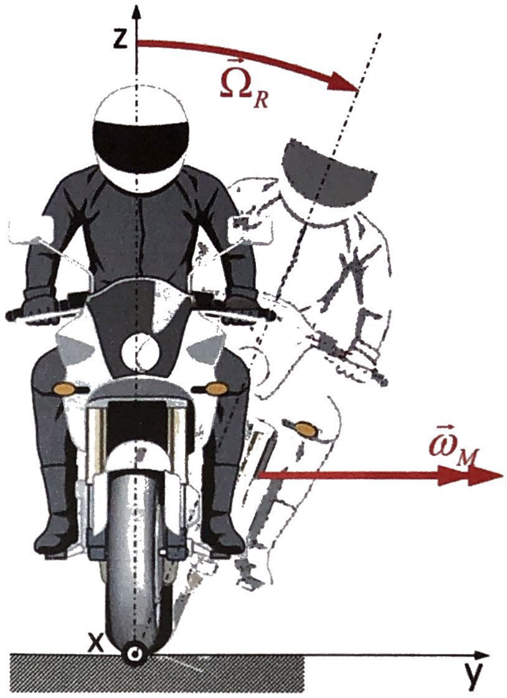
$M_x = \ldots = 0$

$M_y = \ldots = 0$

$M_z = \ldots = 0$

$\Rightarrow$ Kein Widerstand gegen Rollbewegung!

Aufgabe 4 [17 Punkte]



Ein Motorrad mit quer eingebautem Reihen-vierzylinder-Motor fährt auf gerader Strecke. Der Motor rotiert mit $\omega_M = 800\frac{1}{s}$. Um zu überhohlen versetzt der Fahrer das Motorrad in eine Rollbewegung mit $\Omega_R = 2\frac{1}{s}$.

a) Berechnen Sie das Moment auf die Motorlager. (Darum verspürt der Fahrer einen „Widerstand" gegen die Rollbewegung!).

b) Welchen Wiederstand gegen die Rollbewegung würde der Fahrer eines Motorrads mit längs eingebautem Boxer-Motor verspüren? (Begründung!)

Gegeben: Axiale Massenträgheiten der Kurbelwellen-rotation:

$$\theta_x = \theta_0 \; ; \theta_y = 2\theta_0 \; ; \theta_z = 2\theta_0 ; \; \theta_0 = 2 \cdot k \, kgm^2$$

Klausur: Höhere Mechanik

WS21/22: 17.01.2022

Dynamik, Methoden der Mechanik, Schwingungen

TM III
01-22
Zeit: 90 min.

Name [redacted] Matr.-N[redacted] ARBEITSBLATT

Aufgabe 4

a) Gegeben: $\omega_m = 800\frac{1}{s} = \omega_y \Rightarrow$ der Motor rotiert um y-Achse

$\Omega_R = 2\frac{1}{s} = \Omega_x \Rightarrow$ Fahrer rotiert um x-Achse

$\Rightarrow \omega_x = 0, \ \omega_y = \omega_m, \ \omega_z = 0 \qquad \dot{\omega}_y = 0$

$\Omega_x = \Omega_R, \ \Omega_y = 0, \ \Omega_z = 0 \qquad \dot{\Omega}_x = 0$

Eulersche Kreiselgleichungen

$$\cancel{\Theta^{(x)}\dot{\omega}_x} - \cancel{\Theta^{(y)}\cdot\Omega_z\cdot\omega_y} + \cancel{\Theta^{(z)}\cdot\Omega_y\cdot\omega_z} = M_x = 0$$
$$\cancel{\Theta^{(y)}\dot{\omega}_y} - \cancel{\Theta^{(z)}\cdot\Omega_x\cdot\omega_z} + \cancel{\Theta^{(x)}\cdot\Omega_z\cdot\omega_x} = M_y = 0$$
$$\cancel{\Theta^{(z)}\dot{\omega}_z} - \cancel{\Theta^{(x)}\cdot\Omega_y\cdot\omega_x} + \Theta^{(y)}\cdot\Omega_x\cdot\omega_y = M_z$$

$\Rightarrow M_z = \Theta^{(y)}\cdot\Omega_x\cdot\omega_y$

$M_z = 2\Theta_0\cdot\Omega_x\cdot\omega_y = 2\Theta_0\cdot\Omega_R\cdot\omega_m$

$M_z = 2(2\cdot K \ kgm^2)(2\frac{1}{s})(800\frac{1}{s})$

$K = 6$

$\underline{\underline{M_z}} = 38400 \frac{kgm^2}{s^2} = \underline{\underline{38400 \ Nm}}$

b) Längseingebaut bedeutet: $\omega_m = \omega_x \rightarrow$ Motor rotiert um x-Achse

$\Omega_R = \Omega_x$

Kreiselgleichungen:

$$\cancel{\Theta^{(x)}\dot{\omega}_x} - \cancel{\Theta^{(y)}\Omega_z\omega_y} + \cancel{\Theta^{(z)}\Omega_y\omega_z} = M_x = 0$$
$$\cancel{\Theta^{(y)}\dot{\omega}_y} - \cancel{\Theta^{(z)}\Omega_x\omega_z} + \cancel{\Theta^{(x)}\Omega_z\omega_x} = M_y = 0$$
$$\cancel{\Theta^{(z)}\dot{\omega}_z} - \cancel{\Theta^{(x)}\Omega_y\omega_x} + \cancel{\Theta^{(y)}\Omega_x\omega_y} = M_z = 0$$

$\Longrightarrow$ Lager verspürt kein Rollwiderstand gegen Bewegung wenn Motor längseingebaut

3.8 Kinetik der räumlichen Bewegung

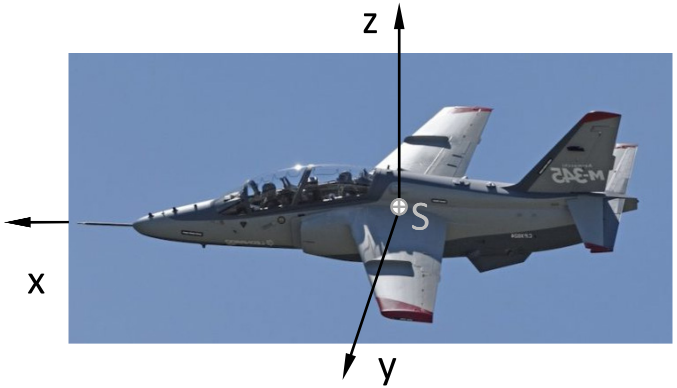
Einstrahliger Jet

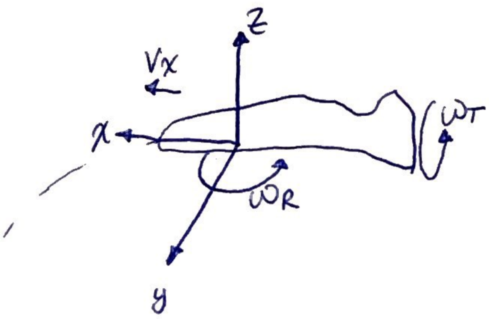
Beispiel 3.13

Das Triebwerk mit zentrischem Schwerpunkt eines einstrahligen Jets rotiert mit ω_T =20000/s. Der Jet fliegt mit $v_x = 400\ m/s$ und wird dabei auf einer Kreisbahn mit dem Radius $R = 300$ m geführt.

Bestimmen Sie das dynamische Moment auf die Turbinenwellenlager.

Gegeben: $\theta_x^S = 4\theta_0$; $\theta_y^S = 2\theta_0$; $\theta_z^S = 2\theta_0$; $\theta_0 = 5000 kgm^2$





① ω_R resultiert von Kreisbahn Radius R

kleinbuchstabe ↓ weil es nicht lager ist

$$\omega_R = \frac{V_x}{R} = \omega_z \Rightarrow \Omega_R = \frac{V_x}{R} = \Omega_z$$

$\omega_t = \omega_y \leftarrow$ Wellenlager

$\Omega_x = 0$ $\quad \omega_x = 0$

$\Omega_y = 0$ $\quad \omega_y = \omega_t$ $\quad \dot{\omega}_y = 0$

$\Omega_z = \Omega_R$ $\quad \omega_z = 0$

$\dot{\Omega}_z = 0$

② Euler Kreisel gleichungen

$$M_x = \cancel{\Theta^{(x)} \dot{\omega}_x}^{0} - \Theta^{(y)} \Omega_z \omega_y + \cancel{\Theta^{(z)} \Omega_y \omega_z}^{0}$$

$$M_y = \cancel{\Theta^{(y)} \dot{\omega}_y}^{0} - \cancel{\Theta^{(z)} \Omega_x \omega_z}^{0} + \cancel{\Theta^{(x)} \Omega_z \omega_x}^{0}$$

$$M_z = \cancel{\Theta^{(z)} \dot{\omega}_z}^{0} - \cancel{\Theta^{(x)} \Omega_y \omega_x}^{0} + \cancel{\Theta^{(y)} \Omega_x \omega_y}^{0}$$

$$M_x = -\Theta^{(y)} \Omega_z \omega_y$$

$$M_y = 0$$

$$M_z = 0$$

$$M_x = 2 \cdot 5000 kgm^2 \cdot \Omega_R \cdot \omega_T$$

$$= 2 \cdot 5000 kgm^2 \cdot \frac{V_x}{R} \cdot 20000 \frac{1}{s}$$

$$= 2 \cdot 5000 kgm^2 \cdot \frac{400 \frac{m}{s}}{300 m} \cdot 20000 \frac{1}{s}$$

$$= 2 \cdot 5000 kgm^2 \cdot \frac{4}{3} \frac{1}{s} \cdot 20000 \frac{1}{s}$$

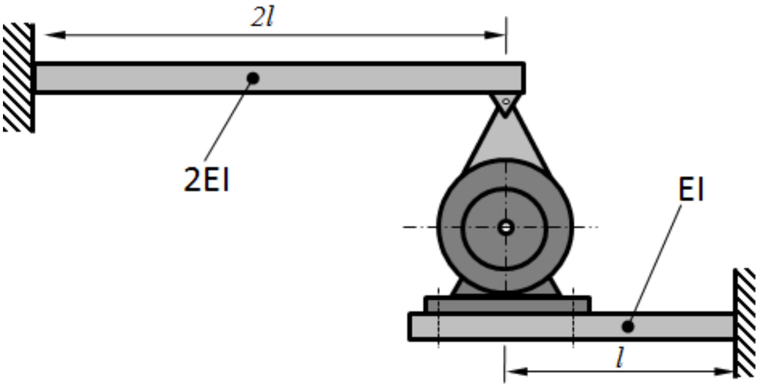
$$= 267 \text{ millionen } \frac{kgm^2}{s^2}$$

$$= 267 \text{ millionen } Nm$$

$$= \underline{\underline{266,667 \, kNm}}$$

Aufgabe 5

Ein unwuchtiger Motor ist über massefreie Träger wie dargestellt aufgehangen.



a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenz des Systems.

b) Der Motor wird bei $U=1500\ U/min$ betrieben und soll durch eine Zusatzmasse von $m_Z = 0.5\ kg$ zur Ruhe gebracht werden. Mit welcher Federkonstanten muss die Masse dazu angebunden werden.

Gegeben: $l = 0{,}5\,m;\ m = 50\,kg;\ EI = 1800\,Nm^2 \quad ; c_i = \dfrac{3EI}{l^3}$

Aufgabe 5

a) $\frac{c}{m} = \omega_0^2 \qquad c = c_i = \frac{3EI}{\ell^3}$

$$\omega_0^2 = \frac{c_i}{m} = \frac{3EI}{\ell^3} \cdot \frac{1}{m} = \frac{3\,(1800\,Nm^2)}{(0.5m)^3\,(50kg)}$$

$$\omega_0^2 = \frac{3\,(1800)}{0{,}5^3 \cdot 50} \quad \frac{[\frac{kg\,m}{s^2}][m^2]}{[m^3][kg]} = \frac{1}{s^2}$$

$$\underline{\underline{\omega_0}} = \sqrt{\frac{3\,(1800)}{0.5^3 \cdot 50}\frac{1}{s^2}} = \underline{\underline{29.4\frac{1}{s}}}$$

b) $m_z = 0.5kg$

$$\omega_0 = \frac{\Omega}{\eta}$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$G \overset{!}{=} 0 = \frac{1}{1-\eta^2}$$

$$\Rightarrow \eta^2 = 0$$

$$\eta = 0 = \frac{\Omega}{\omega_0}$$

$$\Rightarrow \Omega = 0$$

$$\Omega = 0 = \sqrt{\frac{c_{ers}}{m}}$$

$m \neq 0$

$\Rightarrow c_{ers} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c_{neu} = c_i}}$??? Falsch

LaGrange Formalismus / Gleichung bestimmen

① Generalisierte Koordinaten bestimmen
- q ist der Zusammenhang zwischen der Rotatorischen und Translatorischen Bewegung des Objektes

  z.B.: $q = \varphi = \frac{x}{r}$ bei einer Kreisbewegung
- q vereinfacht die Berechnung des Gleichungssystems da 2 Variablen in eine zusammen gefasst werden können

② Energien bestimmen

2.1 Kinetische Energie
- $E_{kin} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$
- q einsetzen sodass möglichst zusammen gefasst werden kann

2.2 Potentielle ~~Energ~~ Energie
- $E_{pot} = E_{pot\,feder} + E_{pot\,grav.}$

  $E_{pot\,feder} = E_{pot\,c} + E_{pot\,drehfeder}$ ← siehe Formelsammlung
- q einsetzen um zusammenzufassen
- ggf. ~~ebenso~~ alle Konstanten in eine neue Konstante C zusammen fassen

③ LaGrange Hilfsfunktion aufstellen mit

$$L = E_{kin} - E_{pot}$$

④ Gleichung aufstellen mit

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)$$

⑤ Vergleichen (umstellen) mit Standardform

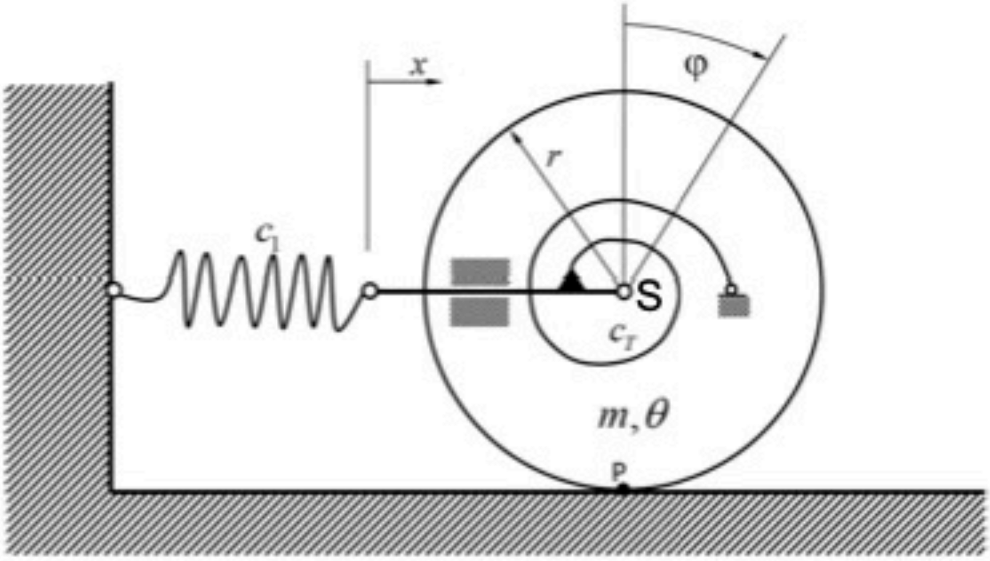
$$0 = \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x$$

wobei

Dämpfungsgrad $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ ← Eigenkreisfrequenz

Aufgabe 5 [16 Punkte]

Eine über eine Feder c_1 an der Wand befestigte Walze rollt schlupffrei auf einer Unterlage. Die Walze ist wiederum mit einer Drehfeder c_T gegen die Horizontale gefesselt.



a) Bestimmen Sie *eine* generalisierten Koordinate q.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismus.

c) Wie lautet die Eigenkreisfrequenz des Systems?

Gegeben: r, m, c_1, c_T

Aufgabe 5 WS/SS / 20/21

a) Generalisierte Koordinate (Schritt ①)

① $q = x = \varphi \cdot r$, x = Weg in x Richtung, φ = Rotation , r = Radius

b) Bewegungsgleichung

② Energien bestimmen

②.1 Kinetische Energie

$E_{kin} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$

$E_{kin\,trans} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$E_{kin\,rot} = \frac{1}{2} \Theta^{(s)} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \Theta^{(s)} \cdot \dot{\varphi}^2$ ← Formelsammlung

$\Theta^{(s)} = \frac{1}{2} m r^2$ ← Formelsammlung

$E_{kin\,rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m r^2\right) \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2$

$E_{kin} = \frac{1}{4} m r^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

Gen. Koord. einsetzen $q = x = \varphi \cdot r \Rightarrow \dot{q} = \dot{x} = \dot{\varphi} r$

$E_{kin} = \frac{1}{4} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \dot{q}^2$

$E_{kin} = \frac{3}{4} m \dot{q}^2$

②.2 Potentielle Energie

$E_{pot} = E_{pot\,Feder} + E_{pot\,grav}$

$E_{pot\,grav} = 0$ da Scheibe auf Erdoberfläche liegt

$E_{pot\,Feder} = E_{pot\,c_1} + E_{pot\,c_T}$

$E_{pot\,c_T} = \frac{1}{2} c_T \varphi^2$ ← Formelsammlung → Drehfeder

$E_{pot\,c_1} = \frac{1}{2} c_1 x^2$ ← Formelsammlung → Feder

$\Rightarrow E_{pot} = E_{pot\,Feder} = \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_T \varphi^2$

Gen. Koordinaten einsetzen $q = x = \varphi \cdot r$

$\varphi = \frac{q}{r}$

$\Rightarrow E_{pot} = \frac{1}{2} c_1 q^2 + \frac{1}{2} c_T \frac{q^2}{r^2}$

$= q^2 \cdot \frac{c_1}{2} + \frac{q^2 c_T}{2 r^2}$

$E_{pot} = q^2 \underbrace{\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_T}{2 r^2}\right)}_{= c}$ ← Konstanten zusammenfassen

$E_{pot} = c \cdot q^2$

③ Lagrange Hilfsfunktion

$L = E_{kin} - E_{pot} = \frac{3}{4} m \dot{q}^2 - c q^2$

Aufgabe 5 contid

④ DGL aufstellen

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{3}{4}m\dot{q}^2 - cq^2\right) = 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot m \cdot \dot{q} = \frac{3}{2}m\dot{q}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{3}{2}m\dot{q}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{q}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{3}{4}m\dot{q}^2 - cq^2\right) = -2cq$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{3}{2}m\ddot{q} + 2cq \rightarrow \text{mit } c = \frac{c_1}{2} + \frac{c_T}{2r^2}$$

⑤ Vergleichen mit Standardform

$$0 = \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x$$

$$0 = \ddot{q} + 0 \cdot \dot{q} + \left(\frac{2c}{\frac{3}{2}m}\right)q$$

$$c = \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_T}{2r^2}\right)$$

$$0 = \ddot{q} + 0\dot{q} + \left(\frac{4}{3}\frac{c}{m}\right)q$$

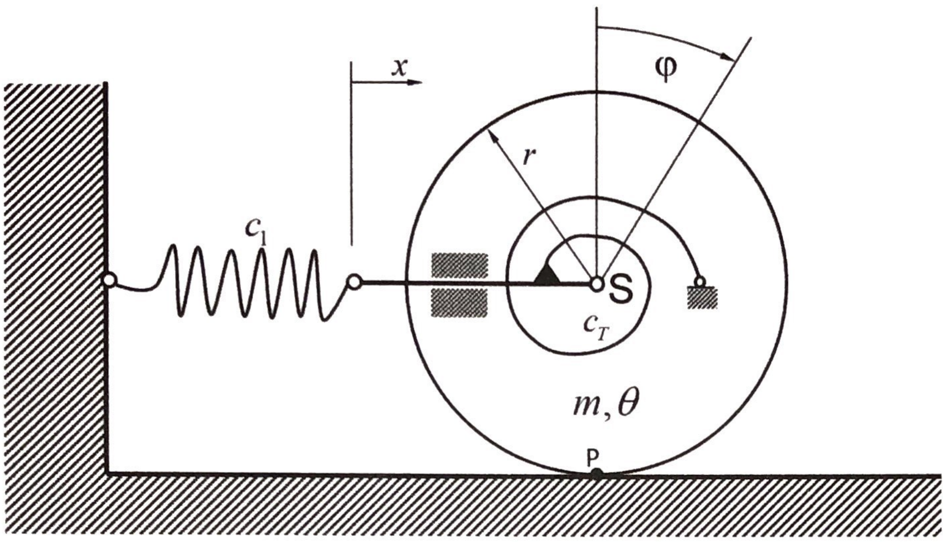
$$\hookrightarrow \omega_0^2 = \frac{4}{3}\frac{c}{m} = \frac{4}{3m} \cdot \left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_T}{2r^2}\right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4}{3m}\left(\frac{c_1}{2} + \frac{c_T}{2r^2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{3m}\left(c_1 + \frac{c_T}{r^2}\right)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{c_1 \cdot r^2 + c_T}{mr^2}\right)}$$

Aufgabe 5 [16 Punkte]

Eine über eine Feder c_1 an der Wand befestigte Walze rollt schlupffrei auf einer Unterlage. Die Walze ist wiederum mit einer Drehfeder c_T gegen die Horizontale gefesselt.



a) Bestimmen Sie *eine* generalisierte Koordinate q.

b) Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung mit dem Lagrange-Formalismus.

c) Wie lautet die Eigenkreisfrequenz des Systems?

Gegeben: r, m, c_1, c_T

a) Generalisierte Koordinate $\underline{\underline{q = x = \varphi \cdot r}}$

b) Bewegungsgleichung

Energien bestimmen:

$E_{kin} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$

$E_{kin\,trans} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \qquad q = x$

$E_{kin\,rot} = \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \cdot \dot{q}^2 : r^2 \qquad \frac{q}{r} = \varphi$

$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \Theta^{(S)} \cdot \frac{\dot{q}^2}{r^2} \qquad \Theta^{(S)} = \frac{1}{2} m r^2$

$= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \cancel{r^2}\right) \frac{\dot{q}^2}{\cancel{r^2}}$

$= \frac{1}{2} m \dot{q}^2 + \frac{1}{4} m \dot{q}^2$

$E_{kin} = \frac{3}{4} m \dot{q}^2$

→ nächste Seite

Name: [redacted] Matr.-Nr.: [redacted] ARBEITSBLATT

$E_{pot} = E_{pot\,Feder}$ → keine $E_{pot\,grav.}$

$E_{pot\,Feder} = E_{pot\,c_1} + E_{pot\,c_T}$ → Beide Federkräfte wirken in selbe Richtung also +

$E_{pot\,c_1} = \frac{1}{2} c_1 x^2$

$E_{pot\,c_T} = \frac{1}{2} c_T \varphi^2$ → Drehfeder

$E_{pot} = \frac{1}{2} c_1 x^2 + \frac{1}{2} c_T \varphi^2$ $\qquad x^2 = q^2$

$E_{pot} = \frac{1}{2} c_1 q^2 + \frac{1}{2} c_T \frac{q^2}{r^2}$ $\qquad (\varphi)^2 = \left(\frac{q}{r}\right)^2$

$E_{pot} = q^2 \left(\underbrace{\frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} \frac{c_T}{r^2}}_{= S} \right)$ (in konst. zusammengefasst)

$E_{pot} = S \cdot q^2$

LaGrange Funktion Aufstellen mit:

$L = E_{kin} - E_{pot}$

$L = \frac{3}{4} m \dot{q}^2 - S q^2$

Gleichung Aufstellen mit

$0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{3}{2} m \dot{q}$

$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{q}$

$\frac{\partial L}{\partial q} = -2Sq$

$0 = \frac{3}{2} m \ddot{q} - 2Sq$

↳ nächste Seite

Name: [redacted] Matr.-Nr.: [redacted] ARBEITSBLATT

vergleichen mit Standardform:

$$0 = \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \underline{\omega_0^2}\,x \,.$$

$$0 = \frac{3}{2}m\ddot{q} - 2Sq$$

$$0 = \ddot{q} - 0\cdot\dot{q} - \left(\frac{2S}{\frac{3}{2}m}\right)q$$

$$\omega_0^2 = \frac{2S}{\frac{3}{2}m} = \frac{2\left(\frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{2}\frac{c_T}{r^2}\right)}{\frac{3}{2}m}$$

$$\omega_0^2 = \frac{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}(c_1 + c_T/r^2\right)2}{3m}$$

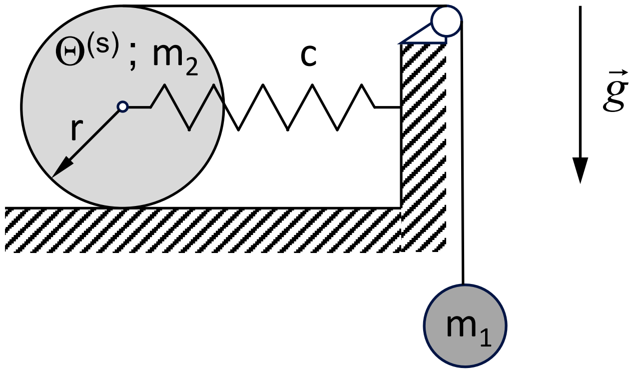
$$\omega_0^2 = \frac{2\left(c_1 + \frac{c_T}{r^2}\right)}{3\cdot m}$$

$$\omega_0 = \boxed{\sqrt{\frac{2\left(c_1 + \frac{c_T}{r^2}\right)}{3m}}}$$

Walze an Feder

Beispiel 3.6

Eine Walze $(m_2\,;\ \theta^{(S)})$ rollt auf einer Ebene und ist durch eine Feder (c) an einer Wand gefesselt. Sie wird durch ein an einem Seil befestigtes Gewicht $F_G = m_1 g$ beschleunigt. Das Seil wird dabei um eine masselose Rolle geführt.



Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Gewicht m_1 nach unten, wenn ihr vertikaler Weg x_1 gegeben ist
(Wie lautet $\dot{x} = f(x_1)$?)
(Nutzen Sie den Energiesatz!)

Gegeben: $m_1 = m\ ;\ m_2 = 4m\,;\ \theta^{(S)}\ ;\ c\ ;\ r$

Aufgabe aus VL

① ~~Ersatzbild~~ Generalisierte Koordinate

$$q = x = \frac{\varphi}{r} \leftarrow \text{Rot. der Kugel}$$

$\uparrow$ Weg der Masse

② Energien

2.1 Kinetische Energie

$$E_{kin} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$$

$$E_{kin\,rot} = \frac{1}{2}\theta^{(S)}\omega^2$$

$$E_{kin\,trans} = \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2}\theta^{(S)}\omega^2 + \frac{1}{2}m_2 v^2 + \frac{1}{2}m_1 v^2$$

2.2 Potentielle Energie

$$E_{pot} = E_{pot\,Feder} + E_{pot\,masse}$$

$$E_{pot\,Feder} = \frac{1}{2}cx^2$$

$$E_{pot\,Masse} = m \cdot g \cdot x$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2}cx^2 + m \cdot g \cdot x$$

$$\frac{1}{2}\theta^{(S)}\omega^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 = \frac{1}{2}x^2 + m \cdot g \cdot x$$

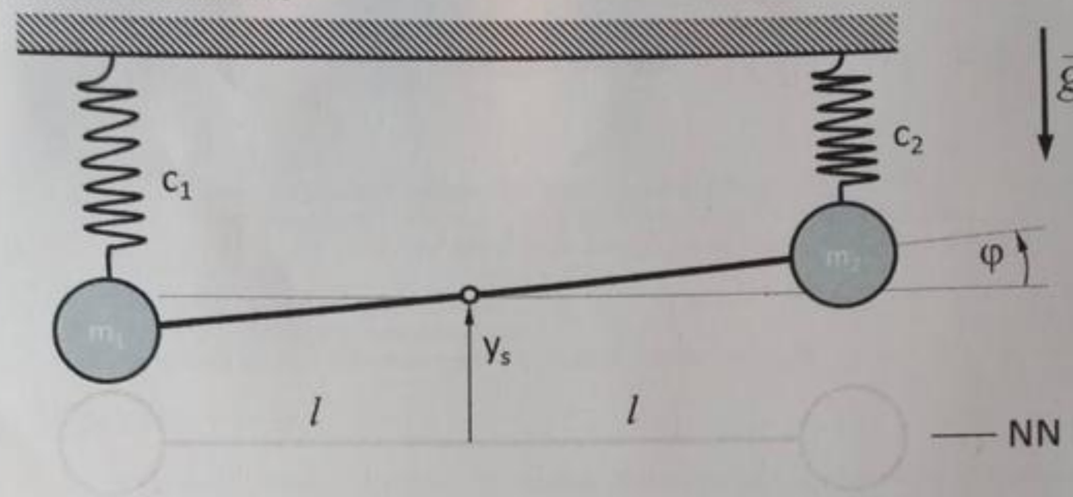
$$\omega = \dot{\varphi}, \quad \dot{q} \cdot r = \dot{\varphi} = \omega$$

$$\frac{1}{2}\theta^{(S)}\dot{q}^2 \cdot r^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{q}^2 + \frac{1}{2}m_1\dot{q}^2 = \frac{1}{2}q^2 + m \cdot g \cdot q$$

$$\dot{q}^2\left(\frac{1}{2}\theta^{(S)}r^2 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_1\right) = \frac{1}{2}q^2 + m \cdot g \cdot q$$

$$\dot{q} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}q^2 + m \cdot g \cdot q}{\frac{1}{2}\theta^{(S)}r^2 + \frac{1}{2}m_2 + \frac{1}{2}m_1}}$$

Aufgabe 5 [25 Punkte]



Ein masseloser Stab verbindet zwei Einzelmassen, die über Federn an einer Decke aufgehangen sind.

a) Bestimmen Sie die Lagrange-Funktion in den generalisierten Koordinaten $q_1 = y_s$ und $q_2 = \varphi$ für kleine Auslenkungen.

b) Bestimmen Sie die Bewegungs-Differentialgleichungen mit dem Lagrange-Formalismus.

Gegeben: $m_1 = m_2 = m$; $c_1 = c_2 = c$; l

SS19 Aufgabe 5

① $q_1 = y_s$, $q_2 = \varphi$

② Energien bestimmen

(I) Für Vertikalbewegung y_s:

$E_{kin_I} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$

↳ $=0$ kein rotatorische Anteil in (I)

↳ $E_{kin\,trans} = E_{kin\,m_1} + E_{kin\,m_2}$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{y}_s^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}_s^2$

$= \frac{1}{2} m_{ges} \cdot \dot{y}_s^2$; $m_{ges} = m_1 + m_2$

$E_{kin_I} = \frac{1}{2} m_{ges} \dot{y}_s^2$

$E_{pot_I} = E_{pot\,Feder} + E_{pot\,masse}$

↳ $E_{pot\,masse} = E_{pot\,m_1} + E_{pot\,m_2}$

$= m_1 \cdot g \cdot y_s + m_2 \cdot g \cdot y_s$

$E_{pot\,masse} = m_{ges} \cdot g \cdot y_s$

↳ $E_{pot\,Feder} = \frac{1}{2} c_1 \cdot y_s^2 + \frac{1}{2} c_2 y_s^2$

$E_{pot_I} = \frac{1}{2}(c_1 + c_2) y_s^2 + m_{ges} \cdot g \cdot y_s$

(II) Für Rotatorische Bewegung φ

$E_{kin_{II}} = E_{kin\,rot} + E_{kin\,trans}$

↳ $E_{kin\,trans} = E_{kin\,m_1} + E_{kin\,m_2} = 0$ weil Rotatorisch

$= \frac{1}{2} m_1 v^2 - \frac{1}{2} m_2 v^2$

$= \frac{1}{2}(m_1 - m_2) v^2 = 0$

$E_{kin\,rot} =$

↳ $\frac{1}{2}\theta^{(s)}\omega^2$ $\quad \omega = \dot{\varphi}$

$\theta^{(s)} = m_1 \cdot l^2 + m_2 \cdot l^2 = m_{ges} \cdot l^2$

$E_{kin\,rot} = \frac{1}{2}(m_{ges} l^2)\dot{\varphi}^2$

$E_{pot_{II}} = E_{pot\,Feder} + E_{pot\,grav.}$

↳ $E_{pot\,masse} = -m_1 \cdot g \cdot h + m_2 \cdot g \cdot h$ → h ist die von φ resultierende änderung bzw Auslenkung d. Feder

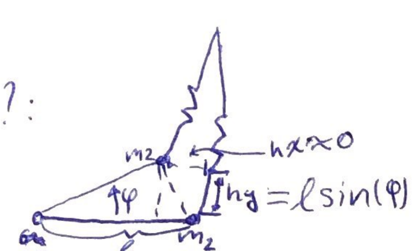
$E_{pot\,masse} = (m_2 - m_1) g h$

↳ $E_{pot\,Feder} = -\frac{1}{2} c_1 h^2 + \frac{1}{2} c_2 h^2$

$= \frac{1}{2} h^2 (c_2 - c_1)$

$E_{pot_{II}} = \frac{1}{2} h^2 (c_2 - c_1) + gh(m_2 - m_1)$

$E_{pot_{II}} = \frac{1}{2} h^2 (c_2 - c_1) + g h (m_2 - m_1)$ ⇒ Was ist h???:



⇒ $h_y = l\sin(\varphi)$

da $\varphi \ll \pi$

$\sin(\varphi) \approx \varphi$

$E_{pot_{II}} = \frac{1}{2}\varphi^2 (c_2 - c_1) + g\varphi(m_2 - m_1)$

⇒ E_{ges}:

$$\underbrace{\frac{1}{2} m_{ges} \dot{y}_s^2 + \frac{1}{2}(m_{ges} l^2)\dot{\varphi}^2}_{E_{kin}} - \underbrace{\frac{1}{2}(c_1 + c_2) y_s^2 + m_{ges} \cdot g \cdot y_s + \frac{1}{2}\varphi^2 (c_2 - c_1) + g\varphi(m_2 - m_1)}_{E_{pot}}$$

$L = E_{kin} - E_{pot} \ldots$

Der Rest ist mühsam aber machbar...

Allgemeines Vorgehen Bestimmung der Linearisierten DGL ~~Feder Dämpfer System~~

① Ersatzbild um Lagerung zeichnen
- Feder und Dämpfer mit Kräften ersetzen
- Richtungen/Koordinaten Festlegen

② Moment "M" um Lagerung berechnen wobei

$M_L = \Theta^{(L)} \cdot \ddot{\varphi}$ L = Lagerung; $\Theta^{(L)} = \sum \Theta$ um L; $\ddot{\varphi}$ = unbekannt

$M_L = (\sum \Theta) \cdot \ddot{\varphi}$ M ist unbekannt, wird im Folgeschritt ersetzt:

③ Zweite Gleichung "M" mit

$M_L = \sum F \cdot l$ → Dreh-Moment um L ist Summe aller Drehmomente die auf L wirken
Diese Momente resultieren u.a. aus Feder/Dämpfer Kräfte

④ Feder bzw. Dämpfer Kräfte bestimmen

Federkraft $= F_c = c \cdot \Delta x_c$ wobei Δx_c = Auslenkung

Dämpferkraft $= F_d = d \cdot \dot{x}_d$ wobei $\dot{x}_d$ die Auslenkung nach Zeit ist

↳ Die Auslenkungen Δx_c & $\dot{x}_d$ können durch Dreiecksatz berechnet werden (siehe Anhang)

↳ Es wird die Annahme gemacht:

$\varphi << \pi$; $\sin(\varphi) \approx \varphi$; $\cos(\varphi) \approx 1$

⑤ Die beiden Formeln für M_L gleichsetzen und auflösen, sodass diese Form erhalten ist:

$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0$ Wobei gilt:

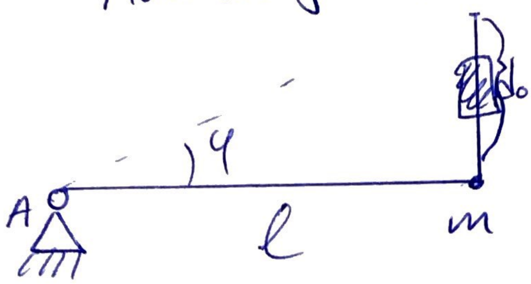
Bei Ungedämpft ($d=0$):

$\omega = \omega_d = \sqrt{\omega_0^2}$

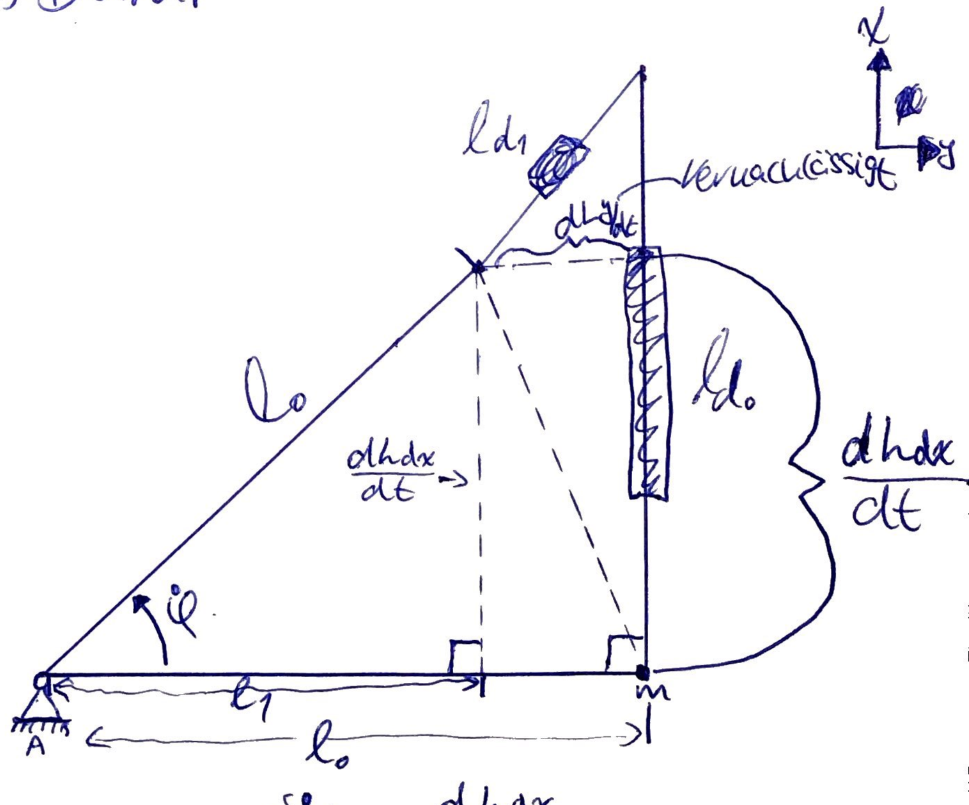
Bei gedämpft ($d \neq 0$):

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \approx \omega_d$, da δ sehr klein ist

Anfangslage:



Herleitung Auslenkung des Dämpfers



$$\Longrightarrow \sin(\dot{\varphi}) = \frac{dhdx}{l_0}$$

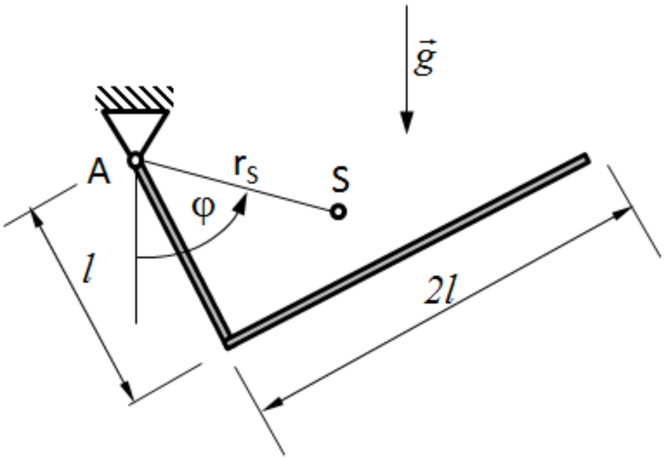
$dhdx$ = Auslenkung = $l_0 \sin(\varphi)$

Aufgabe 6

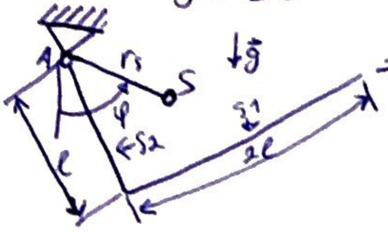
Ein in A gelagerter Winkel aus homogenen Stäben vom Gewicht $F_G=mg$ wird aus ausgelenkter Lage losgelassen.

a) Wie lautet die um die Ruhelage linearisierte Bewegungs-DGL.?

b) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenz ($l=1m$)!

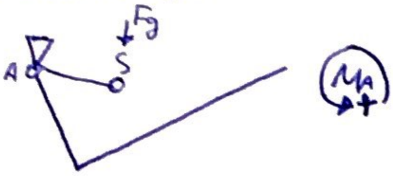


SS19 Aufgabe 6



Stäbe Homogen vom Gewicht $F_G = m \cdot g$

① Ersatzbild



② Moment "M" um A berechnen

$M_A = \Theta^{(A)} \cdot \ddot{\varphi}$ $\qquad \Theta^{(A)} \neq m \cdot r_s^2$, kein Fadenpendel da Stäbe homogen....

$\Theta^{(A)}$ muss mit Steiner-Satz berechnet werden

$\Theta^{(A)} = \Theta_{S_1}^{(S)\to A} + \Theta_{S_2}^{(A)}$

$\Theta^{(A)} = \Theta_{S_2}^{(A)} + \Theta_{S_1}^{(S)} + m_{S1} \cdot d_{SA}^{\,2}$, wobei $d_{SA} = l_{S2} = l$

$\Theta^{(A)} = \Theta_{S_2}^{(A)} + \Theta_{S_1}^{(S)} + m_{S1} \cdot l^2$, $m_{S1} = m \quad m_{S2} = \frac{1}{2} m_{S1} = \frac{m}{2}$

$\Theta^{(A)} = \frac{\frac{m}{2} l^2}{3} + \frac{m(2l)^2}{3} + m l^2$

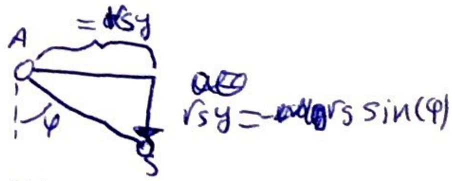
$\Theta^{(A)} = \frac{m l^2}{6} + \frac{4 m l^2}{3} + m l^2$

$\Theta^{(A)} = m l^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{4}{3} + 1\right)$

$\Theta^{(A)} = \frac{5}{2} m l^2$

$M_A = \frac{5}{2} m l^2 \cdot \ddot{\varphi}$

③ Moment F_g berechnen



$M_A = F_g \cdot r_s = m_{ges} \cdot g \cdot r_{sy} = \left(\frac{m}{2} + m\right) g \cdot r_{sy} = \frac{3}{2} m g r_{sy}$

$= \frac{3}{2} m \cdot g \cdot r_s \sin(\varphi)$

④ keine Feder/Dämpfer Kräfte ...

⑤ Gleichsetzen:

$\frac{5}{2} m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} m \cdot g \cdot r_{sy}$

$\frac{5}{2} m l^2 \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} m \cdot g \cdot r_s \cdot \sin(\varphi)$

Für $\varphi \ll \pi$ ist $\sin(\varphi) \approx \varphi$

$\frac{5}{2} \cancel{m} l^2 \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \cancel{m} \cdot g \cdot r_s \cdot \varphi$

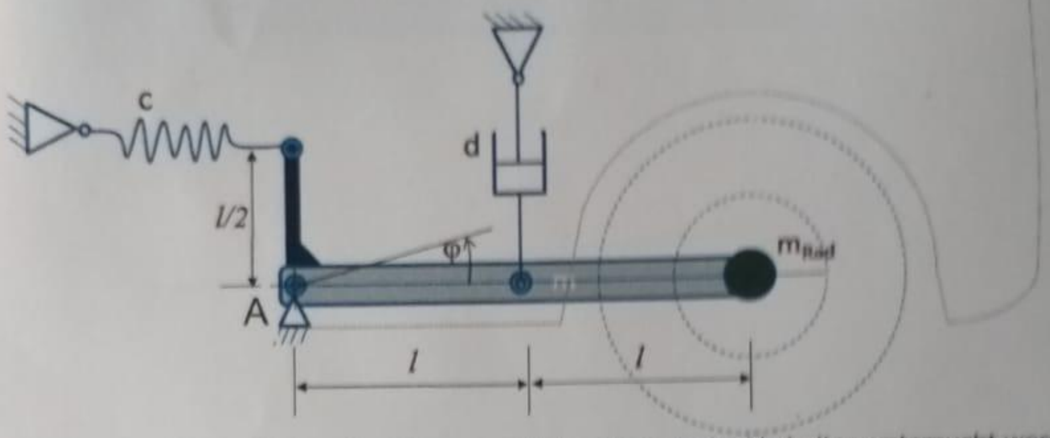
$\ddot{\varphi} = \frac{\cancel{2}}{10} \frac{3}{\cancel{2}} \frac{g r_s \varphi}{l^2}$

$\ddot{\varphi} = \frac{3}{5} \frac{\varphi g r_s}{l^2}$

$\ddot{\varphi} = \underbrace{\frac{3 g r_s}{5 l^2}}_{\omega} \cdot \varphi$

$\omega_0 \overset{!}{=} \boxed{\sqrt{\frac{3 \cdot g \cdot r_s}{5 l^2}}}$

Aufgabe 4 [22 Punkte]



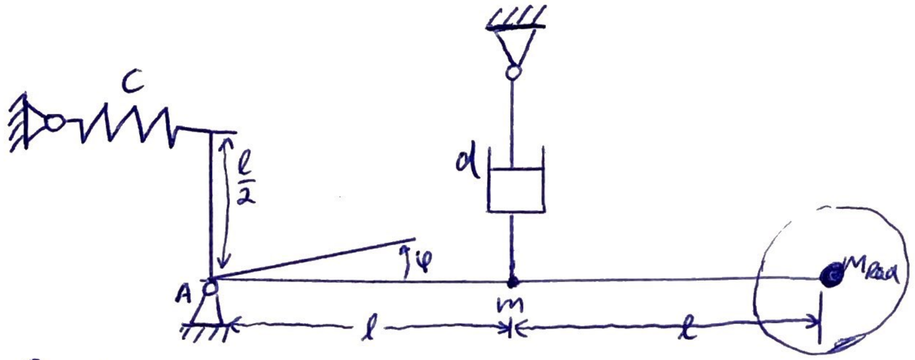
Für die abgebildete Hinterradaufhängung soll das dynamische Verhalten untersucht werden. Der Längslenker ist als ein massebehafteter Stab zu betrachten, der Feder-Hebel ist masselos.

a) Bestimmen Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für kleine Auslenkungen.

b) Wie groß ist Eigenkreisfrequenz der gedämpften und der ungedämpften Schwingung?

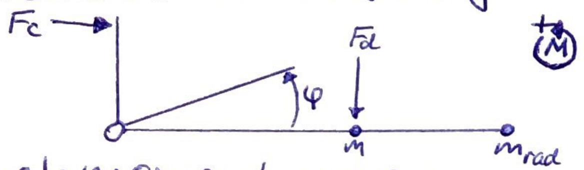
Gegeben: $m = 4kg;\ \ m_{Rad} = 4 \cdot m;\ \ c = 136\frac{kg}{s^2};\ l = 0.3m;\ d = 20\frac{Ns}{m}$

Klausur SS19 Aufgabe 4 Feder-Dämpfer-System



Bestimmen Sie die Bewegungs diff. Gleichung

① Ersatzbild um Lagerung A:



② Drehmoment um A berechnen:

$M_A = \Theta^{(A)} \cdot \ddot{\varphi}$; $\Theta^{(A)} = \sum m\ell^2$ "Flächenträgheitsmoment einer Punktmasse"

$\Theta^{(A)} = m\ell^2 + m_{rad} \cdot (2\ell)^2$

$\Theta^{(A)} = m\ell^2 + (4m)(4\ell^2)$

$M_A = \Theta^{(A)} \cdot \ddot{\varphi}$ $\quad \Theta^{(A)} = 17m\ell^2$

$= (17m\ell^2)\ddot{\varphi}$

③ zweite Gleichung für Moment

$M_A = \sum F \cdot \ell = -F_c \cdot \frac{\ell}{2} - F_d \cdot \ell$ wobei F_c = Federkraft, F_d = Dämpferkraft.

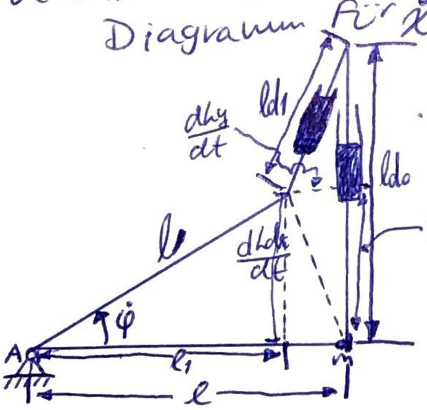
$F_c = c \cdot x_c$, $F_d = d \cdot \dot{x}_d = d \cdot \frac{dx_d}{dt}$

$M_A = -c \cdot x_c \cdot \frac{\ell}{2} - d \cdot \dot{x}_d \cdot \ell$

$M_A = -\ell\left(\frac{c}{2} x_c + d\,\dot{x}_d\right) \Longrightarrow x_c \,\&\, \dot{x}_d$???

④ Feder/dämpfer Auslenkung

Diagramm für $\dot{x}_d$ (x_c ist ähnlich lösbar)



ℓ_{d0} = Ursprüngliche Länge des Dämpfers

ℓ_{d1} = Endlänge des Dämpfers

$\ell_{d1} = \ell_{d0} - \frac{dh_{dx}}{dt}$

x-y Achse anders (Fehler)

$\Longrightarrow \ell\sin(\dot{\varphi}) = \dot{x}_d = \frac{dh_{dx}}{dt}$ (ungünstige benennung der variablen)

$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}_d &= \ell\sin(\dot{\varphi}) \\ x_c &= \tfrac{1}{2}\ell\sin(\varphi)\end{aligned}}$

$M_A = -\ell\left(\frac{c}{4} \cdot \ell\sin(\varphi) + d \cdot \ell\sin(\dot{\varphi})\right)$

$= -\ell^2\left(\frac{c}{4}\sin(\varphi) + d\sin(\dot{\varphi})\right)$ > cos(φ) wird vernachlässigt

Annahme:

$\varphi \ll \pi \rightarrow \sin(\varphi) \approx \varphi$; $\cos(\varphi) \approx 1$

$M_A \approx -\ell^2\left(\frac{1}{4}c(\varphi) + d(\dot{\varphi})\right)$

⑤ $M_A = 17m\ell^2\ddot{\varphi} = -\ell^2(c \cdot \frac{1}{4}\varphi + d \cdot \dot{\varphi}) \rightarrow$ umformen

$0 = \ddot{\varphi} + \frac{c}{4 \cdot 17m}\varphi + \frac{d}{17m}\dot{\varphi}$