Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften Fakultät für Fahrzeugtechnik Prof. Dr.-Ing. Michael Kolbus	Modulprüfung Signale und Systeme BPO 2011 Wintersemester 2021 Probeklausur
Name: ______________________ Vorname: ______________________	Matr. Nr.: ____________________ Unterschrift: ____________________

Zugelassene Hilfsmittel handschriftliche Formelsammlung 2 Seiten DIN A4
Eine Seite DIN A4 Systemdarstellungen und Beziehungen
Nicht programmierbarer Taschenrechner

Zeit 90 min

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe:
Punkte:	16	10	23	14	16	10	10	99
Ergebnis:								

Bearbeitungshinweise

- Beschriften Sie die Deckblätter mit *Namen*, *Vornamen*, *Matrikel-Nr.* und *Unterschrift*.
- Verwenden Sie nur das *ausgeteilte Papier* für Ihre Rechnungen und Nebenrechnungen. Zusätzliches Papier erhalten Sie von den Aufsichtsführenden. Markieren Sie *deutlich* auf dem Klausurbogen, wenn die Lösung auf einem Zusatzzettel weitergeführt wurde.
  Sie sind dafür verantwortlich, dass Zusatzzettel beim Einsammeln an den Klausurbogen angeheftet werden, um einen Verlust zu verhindern.
- Existiert für eine Teilaufgabe mehr als ein Lösungsvorschlag, so wird diese Teilaufgabe mit 0 Punkten bewertet. Verworfene Lösungsansätze sind durch deutliches Durchstreichen kenntlich zu machen. *Schreiben Sie keine Lösungen in roter Farbe.*
- Ihre Lösung muss Schritt für Schritt nachvollziehbar sein. Geben Sie zu allen Lösungen, wenn möglich auch das zugehörige *Formelergebnis ohne Zahlenwerte* an (Punkte). Die schlichte Angabe des Zahlenergebnisses reicht i. allg. für die volle Punktzahl nicht aus.
- Lösen Sie die Heftklammern nicht.

Kleine Formelsammlung

Wertetabelle Sinus / Kosinus

$\alpha/\,\mathrm{rad}$	$\alpha/\,\mathrm{grad}$	$\sin(\alpha)$	$\cos(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0	0	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	0
$\frac{\pi}{6}$	30	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	45	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	60	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$1/\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	90	$\frac{\sqrt{4}}{2}=1$	$\frac{\sqrt{0}}{2}=0$	$\to\infty$

Geometrische Reihe

endliche Anzahl Summanden
$$\sum_{n=0}^{N} a^n = \frac{a^{N+1}-1}{a-1}, \qquad a \neq 1$$

unendliche Anzahl Summanden
$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}, \qquad |a| < 1$$

Aufgabe 1: Kurzfragen mit Rechnung .... (16 Punkte)

Skizzieren Sie auch den Rechenweg zur Lösung.

(a) (2 Punkte) Die Phase eines Kosinus-Signals $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ lässt sich in Beziehung setzen zur Zeitverschiebung des ersten Maximums. Bestimmen Sie den Wert für die Phase φ in rad für die Werte $f_0 = 10\,\mathrm{Hz}$ und den Zeitpunkt des ersten Maximums bei $t_m = 0{,}005\,\mathrm{s}$.

> **Lösung:** Das erste Maximum der Funktion liegt vor wenn das Argument des Kosinus Null ist
> $$2\pi f_0 t + \varphi = 0$$
> Umgestellt nach dem Winkel φ folgt
> $$\varphi = -2\pi f_0 t = -2\pi 10 \tfrac{1}{200} = -\tfrac{\pi}{10}$$

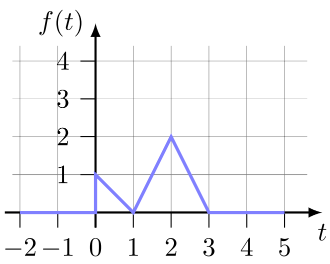
(b) (2 Punkte) Sei $x(t)$ sein Kosinus-Signal der Form $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ mit $\omega_0 \neq 0$, dann lässt sich das Signal $y(t) = (x(t))^2$ schreiben als $y(t) = A\,\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

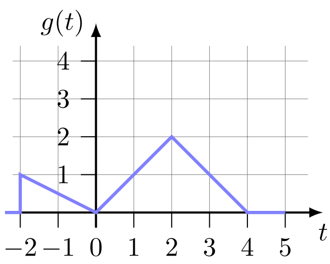
◯ wahr $\surd$ **falsch**

Begründen Sie Ihre Antwort.

> **Lösung:** Der Sachverhalt kann am schnellsten mit der komplexen Schreibweise untersucht werden
> $$\begin{aligned}(\cos(\omega_0 t))^2 &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\jmath\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\jmath\omega_0 t}\right)\right)^2\\ &= \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\jmath 2\omega_0 t} + 2 + \mathrm{e}^{-\jmath 2\omega_0 t}\right)\\ &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_0 t))\end{aligned}$$
> Es ensteht ein Kosinus mit der doppelten Frequenz.

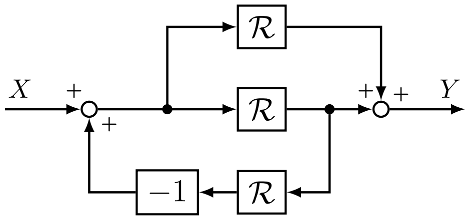
(c) (3 Punkte) Gegeben ist eine Funktion $f(t)$. Kann die Funktion $g(t)$ aus der Funktion $f(t)$ durch Skalierung, Zeitdehnung, Spiegelung und Verschiebung erzeugt werden? Falls ja geben Sie für $g(t) = M \cdot f(at+b)$ die Unbekannten a, b, M an.





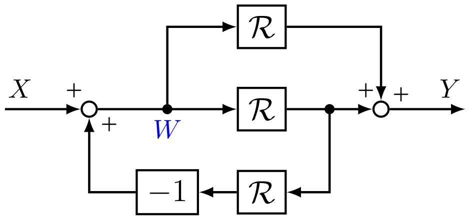
> **Lösung:** Die Funktion ist entlang der Zeitachse gedehnt und verschoben, eine Skalierung der Funktionswerte ist nicht erfolgt:
> $$M = 1 \qquad a = \tfrac{1}{2} \qquad b = 1 \qquad \Rightarrow g(t) = 1 \cdot f(\tfrac{1}{2}t + 1)$$

(d) (4 Punkte) Gegeben ist das folgende Blockschaltbild



Bestimmen Sie das Systemfunktional des oben darstellten Systems.

Lösung: Zur Lösungsfindung wird zunächst die Zwischengröße W im obigen Blockschaltbild eingeführt.



$$W = X - \mathcal{R}^2 W \Rightarrow (1+\mathcal{R}^2)W = X \Rightarrow W = \frac{1}{1+\mathcal{R}^2}X$$

$$Y = \underbrace{\mathcal{R}W}_{\text{roter Pfad}} + \underbrace{\mathcal{R}W}_{\text{grüner Pfad}} = 2\mathcal{R}W = 2\mathcal{R}\frac{1}{1+\mathcal{R}^2}X = \frac{2\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}^2}X$$

$$\frac{Y}{X} = \frac{2\mathcal{R}}{1+\mathcal{R}^2}$$

(e) (2 Punkte) Ein zeitkontinuierliches System besitzt die Systemfunktion

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2+5s+4}.$$

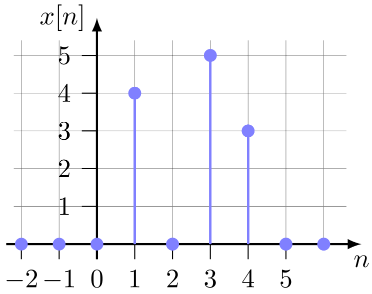
Analysieren Sie, ob das System stabil oder instalbil ist und begründen Sie ihre Anwort.

Lösung: Bestimmen der Eigenschaft durch Lage der Pole = Nullstellen des Nenners. Wenn alle Pole negativen Realteil besitzen ist das System stabil.

$$0 = s^2 + 5s + 4 = (s+4)(s+1) \Rightarrow s_1 = -4, s_2 = -1$$

Das System st also stabil da beide Pole einen Realteil kleiner Null besitzen,

(f) (3 Punkte) Ein zeitdiskretes FIR System besitzt die allgemeine Differenzengleichung $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$. Das System besitzt die folgende Impulsanwort $h[n]$



Wie lauten die Filterkoeffizienten b_k des Filters?

Lösung: Ausgehend von der allgemeinen Gleichung der Impulsantwort können die Filterkoeffizienten bestimmt werden:

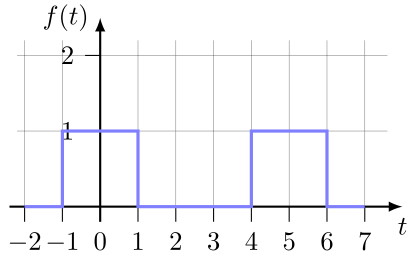
$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ &= 4 \cdot \delta[n-1] + 0 \cdot \delta[n-2] + 5 \cdot \delta[n-3] + 3 \cdot \delta[n-4] + 0 \cdot \delta[n-5] \end{aligned}$$

Die Koeffizienten können nun abgelesen werden

$$b_1 = 4 \qquad b_2 = 0 \qquad b_3 = 5 \qquad b_4 = 3 \qquad b_5 = 0$$

Aufgabe 2: Fourier-Reihe .... (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende periodische Signal $f(t)$ mit der Periodendauer $T = 5$.



(a) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des Signals.

Lösung: Die Grundkreisfrequenz des Signals ist laut Aufgabenstellung

$$T = 5 \qquad f = \tfrac{1}{5} \qquad \omega = 2\pi f = \tfrac{2\pi}{5}$$

Die Analysegleichung für die Fourierkoeffizienten lautet

$$b_k = \tfrac{1}{T}\int_T f(t)\mathrm{e}^{-\jmath k\omega t}\mathrm{d}t$$

Ausgewählt wird ein Fenster über eine Periode symmetrisch um Null: Intervall von -2.5 bis 2.5. Da die Funktion nur im Intervall $[-1; 1]$ einen Wert verschieden von Null hat, beschränken sich die Integrationsgrenzen

$$b_k = \frac{1}{\jmath 2\pi k} 2\jmath \sin(k\omega) = \frac{1}{\pi k}\sin\left(k\tfrac{2\pi}{5}\right)$$

(b) (2 Punkte) Wie lautet der Gleichanteil des Signals?

Lösung: Der Gleichanteil ist der Koeffizient bei $k = 0$. Die obige Rechenvorschrift läuft dann auf den Bruch 0/0 heraus. D.h. hier ist die Grenzwertbetrachtung mittels Regel von L'Hospital erforderlich. Es geht aber auch direkt:

$$\begin{aligned} b_0 &= \tfrac{1}{T}\int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\jmath 0\omega t}\mathrm{d}t = \tfrac{1}{T}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^0\mathrm{d}t = \tfrac{1}{T}\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{5}\left[t\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5}(1-(-1)) = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Der Mittelwert des Signals über eine Periode.

Aufgabe 3: Zeitdiskretes System: Fibonacci Folge .... (23 Punkte)
Die Fibonacci Folge ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von Wachstum einer Population. Jedes Folgeglied ist die Summe seiner beiden Vorgänger. Dies kann als zeitdiskretes System beschrieben werden

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Impulsantwort ($x[n] = \delta[n]$) des Systems $h[n]$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Lösung: Bei einer Differenzengleichung lassen sich Werte rekursiv berechnen. Es gilt das System ist in Ruhe: $y[n] = 0, \quad n < 0$. Die Werte sind in der Tabelle Eingetragen.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	0	0	1	1	2	3	5	8	13	21

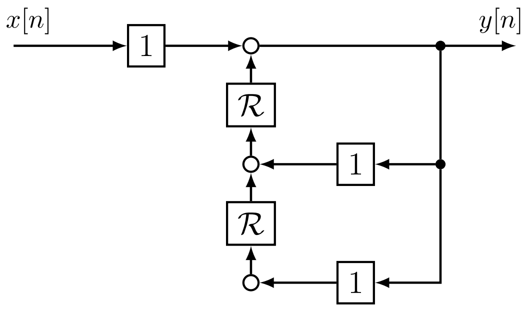
(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktion des obigen Systems.

Lösung: Die Systemfunktion folgt aus der z-Transformation des Systems. Es ist

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^2}{z^2 - z - 1}$$

(c) (4 Punkte) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems.

Lösung: Das Blockschaltbild kann z.B. anhand der Differenzengleichung ermittelt werden



(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Polstellen der Systemfunktion.

Lösung: Die Polstellen p_i sind die Nullstellen des Nennerspolynoms der

Systemfunktion.

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\tfrac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 - (-1)}$$
$$p_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

(e) (2 Punkte) Ist die Impulsantwort konvergent (=ist das System stabil)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Die Impulsantwort ist dann konvergent, wenn bei zeitdiskreten Systemen alle Nullstellen im Einheitskreis liegen, also ihr Betrag kleiner 1 ist. Das ist hier nicht der Fall, da

$$\sqrt{5} > 1 \rightarrow 1 + \sqrt{5} > 2 \rightarrow p_1 = (1 + \sqrt{5})/2 > 1$$

Die Impulsantwort konvergiert nicht, das System ist instabil (vgl. berechnete Werte).

(f) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems $y[n]$.

Lösung: Zur Bestimmung der Impulsantwort zerlegen wir die Systemfunktion in Terme, für die eine Rücktransformationvorschrift existiert → Partialbruchzerlegung (PBZ)

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = z\frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = z\left(\frac{a}{z-p_1} + \frac{b}{z-p_2}\right)$$

$$y[n] = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right), \quad p_{1,2} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

Aufgabe 4: Zeitkontinuierliches System ....(14 Punkte)

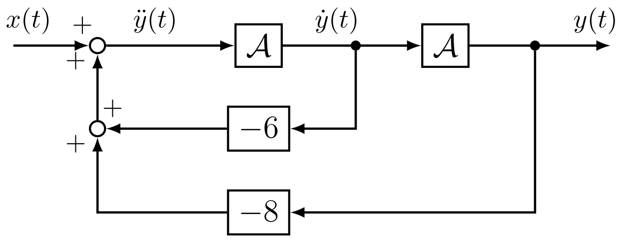
Ein kontinuierliches System 2. Ordnung ist durch die folgende Differentialgleichung beschrieben

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = x(t).$$

(a) (4 Punkte) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems.

Lösung: Zum zeichnen des Blocksschaltbilds: Gleichung nach $\ddot{y}(t)$ umstellen (höchste Ableitung). Diese wird dann als Summe gebildet und die Ableitungen geringeren Grades als Kette von Integratoren

$$\ddot{y}(t) = x(t) - 6\dot{y}(t) - 8y(t)$$



(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie das Systemfunktional des Systems

Lösung: Das Systemfunktional kann aus dem Blockschaltbild abgelesen werden. Setzt man für $\dot{y}(t) = z$, dann folgt

$$\begin{aligned}
Z &= \mathcal{A}(X - 6Z - 8Z) & \qquad Y = \mathcal{A}Z \\
\mathcal{A}Z &= \mathcal{A}^2X - 6\mathcal{A}^2Z - 8\mathcal{A}^2Y \\
Y &= \mathcal{A}^2X - 6\mathcal{A}Y - 8\mathcal{A}^2Y \\
(1 + 6\mathcal{A} + 8\mathcal{A}^2)Y &= \mathcal{A}^2X \\
\frac{Y}{X} &= \frac{\mathcal{A}^2}{1 + 6\mathcal{A} + 8\mathcal{A}^2}
\end{aligned}$$

(c) (1 Punkt) Wie viele Integratoren brauchen Sie minimal?

Lösung: Es werden minimal 2 Integratoren benötigt siehe Blockschaltbild.

(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Pole des Systems und stellen Sie diese graphisch da. Verwenden Sie ein Kreuz zur Markierung der Polstellen im Diagramm.

Lösung: Die Pole folgen aus der Systemfunktion. Diese kann z.B. durch

Laplace-Transformation der Differentialgleichung bestimmt werden

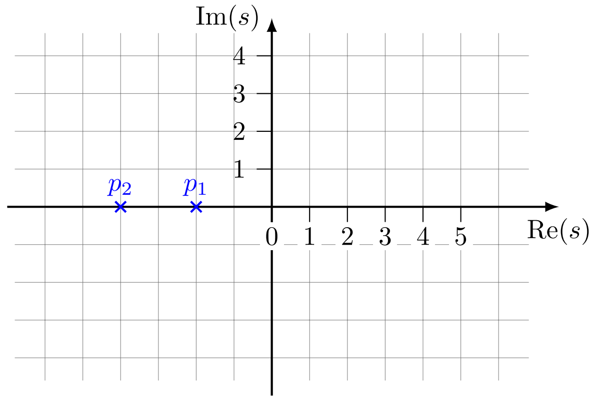
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s^2Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\text{Polstellen: } s^2 + 6s + 8 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$s_1 = -2 \quad s_2 = -4$$

Die Pole sind im folgenden Diagramm einzeichnet.

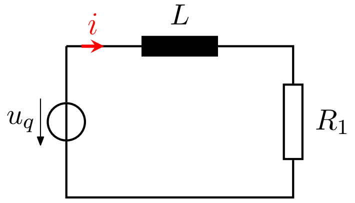


(e) (2 Punkte) Ist die Impulsantwort des Systems konvergent (=ist das System stabil)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Die Impulsantwort ist konvergent, da alle Pole des kontinuierlichen Systems einen negativen Realteil besitzen.

Aufgabe 5: Diskretisierung eines Systems .... (16 Punkte)

Gegeben ist der folgende Schaltkreis.



Eingang: $u_q(t)$

Ausgang: $u_R(t)$

(a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Differentialgleichung des Systems.

$$\text{Hinweis} \qquad u_R(t) = R_1 i_R(t) \qquad u_L = L\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t)$$

Lösung: Bei dem System existiert nur eine Masche.

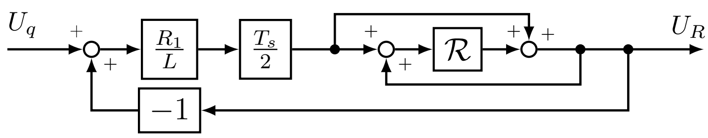
$$M : u_q(t) = L\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i_L(t) + u_R(t) = \tfrac{L}{R}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u_R(t) + u_R(t)$$
$$u_q(t) = \tfrac{L}{R_1}\dot{u}_R(t) + u_R(t)$$

(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte des Systems, die Polstelle der Systemfunktion und die Impulsantwort.

Lösung: Die Laplace-Transformation der DGL: Für Die Impulsantwort ist keine PBZ notwendig, da das System bereits in der Standardform vorliegt

$$H(s) = \frac{1}{\frac{L}{R_1}s + 1} = \frac{\frac{R_1}{L}}{s + \frac{R_1}{L}}$$
$$y(t) = \tfrac{R_1}{L}\mathrm{e}^{-\jmath\frac{R_1}{L}t} 1(t)$$

Das System soll nun mit der Abtastzeit T_s diskretisiert werden. Es wird das Trapezverfahren gewählt. Es gilt die Ersetzung $s \rightarrow \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$. Damit ergibt sich das folgende Blockschaltbild



(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktion des diskretisieren Systems in z. Hinweis: Beachten Sie den Verzögerungsoperator $\mathcal{R}$ nicht mit dem Widerstand R_1 zu vermischen.

Lösung: Es gibt zwei Möglichkeiten zur Lösung zu gelangen.

Lösungsvariante 1: Basierend auf der Lösung der vorigen Aufgabe

$$H(s) = \frac{1}{\frac{L}{R_1}s + 1}, \quad \text{mit} \quad s \to \frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1}$$

$$H(z) = \frac{1}{\frac{L}{R_1}\frac{2}{T_s}\frac{z-1}{z+1} + 1} \quad |\text{Doppelbruch eleminieren: Erweitern}$$

$$= \frac{R_1 T_s(z+1)}{L2(z-1) + R_1 T_s(z+1)} = \frac{R_1 T_s(z+1)}{(R_1 T_s + 2L)z + (R_1 T_s - 2L)}$$

Lösungsvariane 2: Aus dem Blockschaltbild

(d) (2 Punkte) Wie wird bei der Diskretisierung nach Trapezregel die linke s-Halbebene in z-Ebene abgebildet? Ist die Stabilität des nach Trapezregel diskretisierten Systems abhängig von der Abtastzeit?

Lösung: Die Linke s-HE wird in den Einheitskreis der z-Ebene abgebildet, daher bleiben stabile Systeme stets stabil unabhängig von der Abtastzeit.

(e) (4 Punkte) Für welche Abtastzeiten ist der Realteil des zeitdiskreten Pols größer als Null? Was bedeutet ein negativer Realteil?

Lösung: Der zeitdiskrete Pol eines Systems ist die Nullstelle des Nennerpolynoms. Hier ist das Polynom vom Grad 1. Das Polynom ist

$$(T_s R_1 - 2L) + (T_s R_1 + 2L)z = 0 \;\Rightarrow\; z = -\frac{(T_s R_1 - 2L)}{(T_s R_1 + 2L)} = \frac{(-T_s R_1 + 2L)}{(T_s R_1 + 2L)}$$

D.h. der Realteil ist größer Null, wenn der Zähler größer Null ist (der Zähler kann bei positiven Werten von T_s, L, R nicht negativ werden)

$$-T_s R_1 + 2L > 0 \;\Rightarrow\; T_s < \tfrac{2L}{R_1}$$

Ein negativer Realteil führt zu einer alternierenden Impulsantwort.

Aufgabe 6: Frequenzgang eines Systems .... (10 Punkte)

Gegeben ist die folgende Differenzengleichung eines digitalen Filters

$$y[n] = x[n] - x[n-1] + x[n-2].$$

Dieses soll zum Filtern von diskretisierten Signalen verwendet werden. Die kontinuierlichen Signale werden mit einer Abtastfrequenz von $f_s = 900\,\text{Hz}$ in das zeitdiskrete überführt.

(a) (5 Punkte) Das obige System ist ein FIR Filter. Bestimmen Sie die Frequenz eines zeitkontinuierlichen Signals, die blockiert wird.

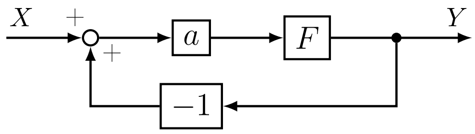
> **Lösung:** Sperrfrequenzen: Nullstellen bestimmen
>
> $$H(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^2} \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \mathrm{e}^{\pm \jmath\pi/3}$$
> $$\hat{\omega} = \omega/f_s \Leftrightarrow \omega = \hat{\omega} f_s = \tfrac{\pi}{3}900 \rightarrow f_{\text{sperr}} = 150\,\text{Hz}$$

(b) (5 Punkte) Zusätzlich zur obigen Frequenz soll das Filter nun auch Signale mit der Frequenz von $f_2 = 100\,\text{Hz}$ blockiert werden. Geben Sie an, wie das Filter erweitert werden muss (Systemfunktion).

> **Lösung:** Soll $f_2 = 100\,\text{Hz}$ blockiert werden:
>
> $$f_2 = 100\,\text{Hz} \rightarrow \omega_2 = 200\pi\,\text{Hz} \rightarrow \hat{\omega} = \tfrac{200\pi}{900} = \tfrac{2\pi}{9}$$
> $$\text{Nullstellen bei: } \mathrm{e}^{\pm\jmath\frac{2\pi}{9}} \Rightarrow \frac{(z - \mathrm{e}^{\jmath\frac{2\pi}{9}})(z - \mathrm{e}^{-\jmath\frac{2\pi}{9}})}{z^2} = \frac{z^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{9}) + 1}{z^2}$$
> $$H_2(z) = \frac{z^2 - z + 1}{z^2}\frac{z^2 - 2\cos(\frac{2\pi}{9}) + 1}{z^2}$$

Aufgabe 7: Unbekannte Funktion im System ....(10 Punkte)

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild eines rückgekoppelten Systems. Das Untersystem F besteht selbst nur aus Summationsstellen, Verstärkungen und Verzögerungen.



Das Systemfunktional des System für den Fall $a = 10$ ist bekannt und lautet

$$H|_{a=10} = \left.\frac{Y}{X}\right|_{a=10} = \frac{20\mathcal{R}}{2+19\mathcal{R}}$$

Bestimmen Sie aus diesen Informationen das Systemfunktional für den Fall $a = 20$.

$$H|_{a=20} = \left.\frac{Y}{X}\right|_{a=20}$$

Lösung: Zur Lösung wird zunächst das allgemeine Systemfunktional aufgestellt (Operatorschreibweise)

$$Y = a \cdot F \cdot (X - Y) \Rightarrow Y + a \cdot F \cdot Y = a \cdot F \cdot X \Rightarrow (1 + a \cdot F)Y = a \cdot F \cdot X$$
$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{a \cdot F}{1 + a \cdot F}$$

Nun kann der gegebene Fall $a = 10$ betrachtet werden

$$\left.\frac{Y}{X}\right|_{a=10} = \frac{10 \cdot F}{1 + 10 \cdot F}$$

Dies wird mit der Vorgabe der Aufgabenstellung verglichen

$$\underbrace{\frac{10 \cdot F}{1 + 10 \cdot F}}_{\text{aus obiger Gleichung}} = \underbrace{\frac{20\mathcal{R}}{2 + 19\mathcal{R}}}_{\text{Ausgabenstellung}}$$

Auflösen nach F

$$\begin{aligned}
10F(2 + 19\mathcal{R}) &= 10\mathcal{R}(1 + 10F) && |10 \text{ kürzen und ausmultiplizieren} \\
20\,F + 190\mathcal{R}F &= 20\mathcal{R} + 200\mathcal{R}F && |-200\mathcal{R}F \\
20F - 10\mathcal{R}F &= 20\mathcal{R} && |F \text{ ausklammern} \\
(20 - 10\mathcal{R})F &= 20\mathcal{R} && |:(20 - 10\mathcal{R}) \\
F &= \frac{20\mathcal{R}}{20 - 10\mathcal{R}}
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis kann dann der Fall $a = 20$ berechnet werden

$$\left.\frac{Y}{X}\right|_{a=20} = \frac{20 \cdot F}{1 + 20 \cdot F} = \frac{20 \cdot \frac{20\mathcal{R}}{20-10\mathcal{R}}}{1 + 20 \cdot \frac{20\mathcal{R}}{20-10\mathcal{R}}}$$

$$\text{Auflösen der Doppelbrüche}$$

$$= \frac{400\mathcal{R}}{20 + 390\mathcal{R}}$$