2D-Transformationen

Skalierung

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = M_s \vec{x}$$

Spiegelung/Reflexion
(z.B. an x-Achse)

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = M_r \vec{x}$$

*

Translation

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = M_T \vec{x}$$

⇒ Aufgabe 3.1

Dadurch Hintereinanderschaltung der Transformationen möglich:

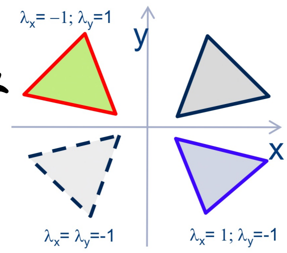
$$\vec{x}' = M_1 M_2 M_3 \ldots\ldots M_n \vec{x}$$

z. B. Skalierung eines Objektes an einem beliebigen Punkt P

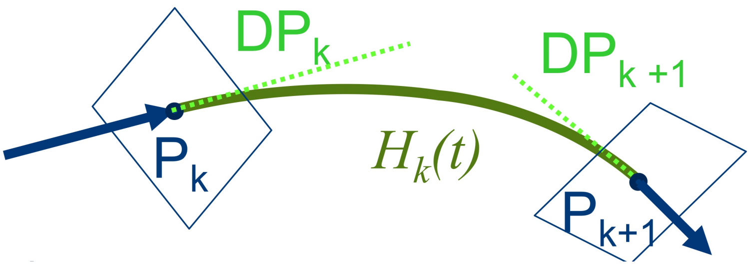
$$\vec{x}' = (\underset{③}{M_{+T}} \underset{②}{M_s} \underset{①}{M_{-T}}) \vec{x}$$

1. Translation in den Ursprung $\mathbf{M_{-T}}$
2. Skalierung im Ursprung $\mathbf{M_s}$
3. Rücktranslation $\mathbf{M_{+T}}$

*



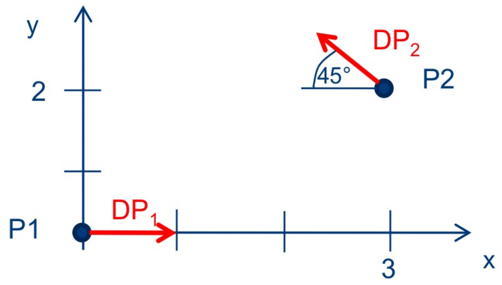
Hermite-Spline:



$$\vec{H}_k(t) = (t^3, t2, t, 1) \bullet \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) & y(0) & z(0) \\ x(1) & y(1) & z(1) \\ x'(0) & y'(0) & z'(0) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \end{pmatrix}$$

⇒ Aufgabe 3.2

a) Bestimmen Sie einen ebenen, kubischen Hermite-Spline durch die Punkte $P1(0,0,0)$ und $P2(3,2,0)$ mit den Steigungen $H(0)=DP_1=(x'(0),y'(0),z'(0))=(1,0,0)$ und $H(1)=DP_2$ mit $45°$ wie angegeben.



Punkte:

$\vec{P}_1^T=(0,0,0)$

$\vec{P}_2^T=(3,2,0)$

Richtungen:

$\vec{DP}_1^T=(1,0,0);\ |\vec{DP}_1|=1=S_1$

$\vec{DP}_2^T=(-1,1,0);\ |\vec{DP}_2|=\sqrt{2}=S_2$

„Tangentialspannungen"

Hermite-Spline:

$$H(t)^T=(t^3,t^2,t,1)\cdot\begin{pmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\vec{P}_1^T\\\vec{P}_2^T\\\vec{DP}_1^T\\\vec{DP}_2^T\end{pmatrix}$$

$$H(t)^T=(t^3,t^2,t,1)\cdot\begin{pmatrix}2&-2&1&1\\-3&3&-2&-1\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&0\\3&2&0\\1&0&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$H(t)^T=(t^3,t^2,t,1)\cdot\begin{pmatrix}-6&-3&0\\8&5&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$H(t)^T=(-6t^3+8t^2+t,\ -3t^3+5t^2,\ 0)$$

$$H(t)=\begin{pmatrix}-6t^3+8t^2+t\\-3t^3+5t^2\\0\end{pmatrix}$$