Ostfalia Hochschule für angewandte Wissenschaften Fakultät für Fahrzeugtechnik Prof. Dr.-Ing. Michael Kolbus	Modulprüfung Signale und Systeme Probeklausur
Name: ______________________ Vorname: ______________________	Matr. Nr.: ______________________ Unterschrift: ______________________

Zugelassene Hilfsmittel Beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt
Nicht programmierbarer Taschenrechner

Zeit 90min

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	Summe:
Punkte:	7	12	14	23	10	11	10	87
Ergebnis:								

Aufgabe 1: Kurzfragen .... (7 Punkte)

Kreuzen Sie an, ob folgende Aussagen über LTI Systeme richtig oder falsch sind. *Falsche Antworten führen zu einem Punktabzug.*

(a) (1 Punkt) Das Ausgangssignal eine LTI Systems ergibt sich aus der Faltung des Eingangssignals mit der Impulsantwort.

$\surd$ **wahr** ◯ falsch

(b) (1 Punkt) Das Ausgangssignal eine LTI Systems ergibt sich aus der Faltung des Eingangssignals mit der Sprungantwort.

◯ wahr $\surd$ **falsch**

(c) (1 Punkt) Das neutrale Element der Faltung ist der Einheitssprung.

◯ wahr $\surd$ **falsch**

(d) (1 Punkt) Die Verdoppelung des Eingangssignals führt auch zu einer Verdoppelung des Ausgangssignals.

$\surd$ **wahr** ◯ falsch

(e) (1 Punkt) Die Antwort eines LTI Systems auf einen ewigen Sinus ist ein Sinus gleicher Frequenz, nur Amplitude und Phasenlage ist verändert.

$\surd$ **wahr** ◯ falsch

(f) (1 Punkt) IIR-Filter haben eine endliche Impulsantwort.

◯ wahr $\surd$ **falsch**

(g) (1 Punkt) Die Impulsantwort von IIR-Filtern ist stets konvergent.

◯ wahr $\surd$ **falsch**

Aufgabe 2: Kurzfragen 2 .... (12 Punkte)

(a) (2 Punkte) Die Phase eines Kosinus-Signals $x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ lässt sich in Beziehung setzen zur Zeitverschiebung des ersten Maximums. Bestimmen Sie den Wert für die Phase φ in rad für die Werte $f_0 = 10\,\text{Hz}$ und den Zeitpunkt des ersten Maximums bei $t_m = 0{,}005\,\text{s}$.

Lösung: Das erste Maximum der Funktion liegt vor wenn das Argument des Kosinus Null ist

$$2\pi f_0 t + \varphi = 0$$

Umgestellt nach dem Winkel φ folgt

$$\varphi = -2\pi f_0 t = -2\pi 10 \tfrac{1}{200} = -\tfrac{\pi}{10}$$

(b) (2 Punkte) Sei $x(t)$ sein Kosinus-Signal der Form $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ mit $\omega_0 \neq 0$, dann lässt sich das Signal $y(t) = (x(t))^2$ schreiben als $y(t) = A * \cos(\omega_0 t + \varphi)$.

○ wahr √ **falsch**

Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Der Sachverhalt kann am schnellsten mit der komplexen Schreibweise untersucht werden

$$\begin{aligned}(\cos(\omega_0 t))^2 &= \left(\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\jmath\omega_0 t} + \mathrm{e}^{-\jmath\omega_0 t}\right)\right)^2 \\ &= \tfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{\jmath 2\omega_0 t} + 2 + \mathrm{e}^{-\jmath 2\omega_0 t}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}(1 + \cos(2\omega_0 t))\end{aligned}$$

Es ensteht ein Kosinus mit der doppelten Frequenz.

(c) (2 Punkte) Ein zeitkontinuierliches System besitzt die Systemfunktion

$$H(s) = \frac{s-1}{s^2 + 5s + 4}.$$

Ist die Impulsantwort

√ **konvergent (das System ist stabil)** ○ divergent (das System ist instabil)

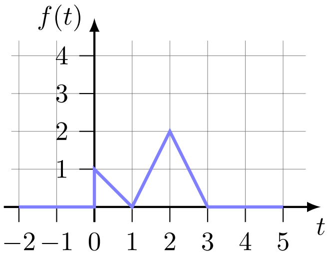
Begründen Sie ihre Anwort.

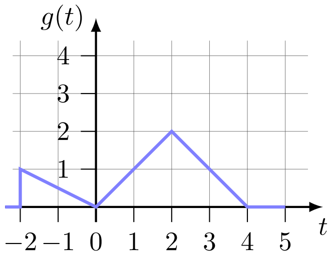
Lösung: Bestimmen der Eigenschaft durch Lage der Pole = Nullstellen des Nenners. Wenn alle Pole negativen Realteil besitzen ist das System stabil.

$$0 = s^2 + 5s + 4 = (s+4)(s+1) \Rightarrow s_1 = -4, s_2 = -1$$

Das System st also stabil da beide Pole einen Realteil kleiner Null besitzen,

(d) (3 Punkte) Gegeben ist eine Funktion $f(t)$. Kann die Funktion $g(t)$ aus der Funktion $f(t)$ durch Skalierung, Zeitdehnung, Spiegelung und Verschiebung erzeugt werden? Falls ja geben Sie für $g(t) = M \cdot f(at+b)$ die Unbekannten a, b, M an.

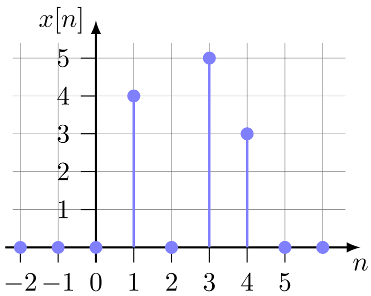




Lösung: Die Funktion ist entlang der Zeitachse gedehnt und verschoben, eine Skalierung der Funktionswerte ist nicht erfolgt:

$$M = 1 \qquad a = \frac{1}{2} \qquad b = 1 \qquad \Rightarrow g(t) = 1 \cdot f(\tfrac{1}{2}t + 1)$$

(e) (3 Punkte) Ein zeitdiskretes FIR System besitzt die allgemeine Differenzengleichung $y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$. Das System besitzt die folgende Impulsanwort $h[n]$



Wie lauten die Filterkoeffizienten b_k des Filters?

Lösung: Ausgehend von der allgemeinen Gleichung der Impulsantwort können die Filterkoeffizienten bestimmt werden:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \\ &= 4 \cdot \delta[n-1] + 0 \cdot \delta[n-2] + 5 \cdot \delta[n-3] + 3 \cdot \delta[n-4] + 0 \cdot \delta[n-5] \end{aligned}$$

Die Koeffizienten können nun abgelesen werden

$$b_1 = 4 \qquad b_2 = 0 \qquad b_3 = 5 \qquad b_4 = 3 \qquad b_5 = 0$$

Aufgabe 3: Zeitkontinuierliches System . . . . (14 Punkte)

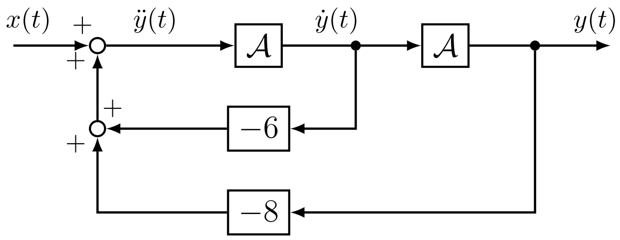
Ein kontinuierliches System 2. Ordnung ist durch die folgende Differentialgleichung beschrieben

$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = x(t).$$

(a) (4 Punkte) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems.

Lösung: Zum zeichnen des Blocksschaltbilds: Gleichung nach $\ddot{y}(t)$ umstellen (höchste Ableitung). Diese wird dann als Summe gebildet und die Ableitungen geringeren Grades als Kette von Integratoren

$$\ddot{y}(t) = x(t) - 6\dot{y}(t) - 8y(t)$$



(b) (3 Punkte) Bestimmen Sie das Systemfunktional des Systems

Lösung: Das Systemfunktional kann aus dem Blockschaltbild abgelesen werden. Setzt man für $\dot{y}(t) = z$, dann folgt

$$\begin{aligned} Z &= \mathcal{A}(X - 6Z - 8Z) \qquad\qquad Y = \mathcal{A}Z \\ \mathcal{A}Z &= \mathcal{A}^2X - 6\mathcal{A}^2Z - 8\mathcal{A}^2Y \\ Y &= \mathcal{A}^2X - 6\mathcal{A}Y - 8\mathcal{A}^2Y \\ (1 + 6\mathcal{A} + 8\mathcal{A}^2)Y &= \mathcal{A}^2X \\ \frac{Y}{X} &= \frac{\mathcal{A}^2}{1 + 6\mathcal{A} + 8\mathcal{A}^2} \end{aligned}$$

(c) (1 Punkt) Wie viele Integratoren brauchen Sie minimal?

Lösung: Es werden minimal 2 Integratoren benötigt siehe Blockschaltbild.

(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Pole des Systems und stellen Sie diese graphisch da. Verwenden Sie ein Kreuz zur Markierung der Polstellen im Diagramm.

Lösung: Die Pole folgen aus der Systemfunktion. Diese kann z.B. durch

Laplace-Transformation der Differentialgleichung bestimmt werden

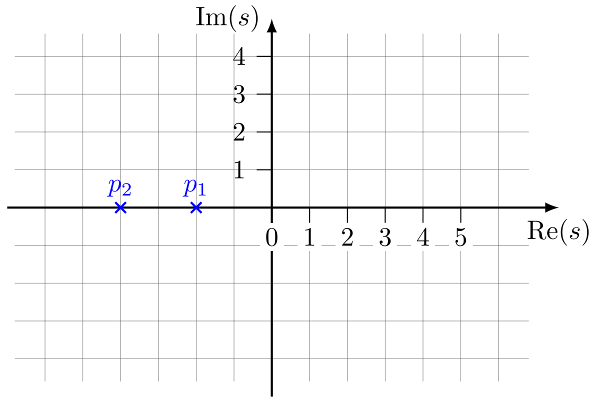
$$\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 8y(t) = x(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\; s^2Y(s) + 6sY(s) + 8Y(s) = X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 8}$$

$$\text{Polstellen: } s^2 + 6s + 8 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 - 8}$$

$$s_1 = -2 \quad s_2 = -4$$

Die Pole sind im folgenden Diagramm einzeichnet.



(e) (2 Punkte) Ist die Impulsantwort des Systems konvergent (=ist das System stabil)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Die Impulsantwort ist konvergent, da alle Pole des kontinuierlichen Systems einen negativen Realteil besitzen.

Aufgabe 4: Zeitdiskretes System: Fibonacci Folge .... (23 Punkte)
Die Fibonacci Folge ist ein einfaches Modell zur Beschreibung von Wachstum einer Population. Jedes Folgeglied ist die Summe seiner beiden Vorgänger. Dies kann als zeitdiskretes System besschrieben werden

$$y[n] = y[n-1] + y[n-2] + x[n]$$

(a) (3 Punkte) Berechnen Sie die Impulsantwort ($x[n] = \delta[n]$) des Systems $h[n]$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, 7$.

Lösung: Bei einer Differenzengleichung lassen sich Werte rekursiv berechnen. Es gilt das System ist in Ruhe: $y[n] = 0, \quad n < 0$. Die Werte sind in der Tabelle Eingetragen.

$$\begin{aligned} y[0] &= y[-1] + y[-2] + x[0] = 0 + 0 + 1 = 1 \\ y[1] &= y[0] + y[-1] + x[1] = 1 + 0 + 0 = 1 \\ y[2] &= y[1] + y[0] + x[2] = 1 + 1 + 0 = 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
$y[n]$	0	0	1	1	2	3	5	8	13	21

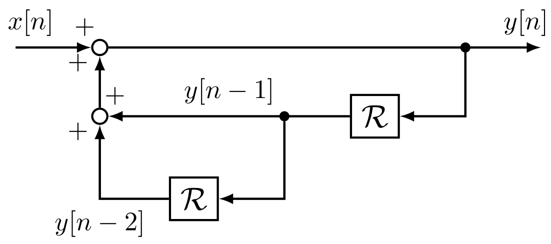
(b) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Systemfunktion des obigen Systems.

Lösung: Die Systemfunktion folgt aus der z-Transformation des Systems. Es ist

$$\begin{aligned} y[n] &= y[n-1] + y[n-2] + x[n] \\ Y(z) &= \tfrac{1}{z}Y(z) + \tfrac{1}{z^2}Y(z) + X(z) && |\text{Entfernen der Brüche in z} \\ z^2Y(z) &= zY(z) + Y(z) + z^2X(z) && |\text{Sortieren in Y, X} \\ (z^2 - z - 1)Y(z) &= z^2X(z) \\ \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{z^2}{z^2 - z - 1} \end{aligned}$$

(c) (4 Punkte) Zeichnen Sie ein Blockschaltbild des Systems.

Lösung: Das Blockschaltbild kann z.B. anhand der Differenzengleichung ermittelt werden



(d) (4 Punkte) Bestimmen Sie die Polstellen der Systemfunktion.

Lösung: Die Polstellen p_i sind die Nullstellen des Nennerspolynoms der Systemfunktion.

$$z^2 - z - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{1,2} = -\tfrac{-1}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-1}{2}\right)^2 - (-1)}$$
$$p_{1,2} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{\tfrac{5}{4}} = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

(e) (2 Punkte) Ist die Impulsantwort konvergent (=ist das System stabil)? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung: Die Impulsantwort ist dann konvergent, wenn bei zeitdiskreten Systemen alle Nullstellen im Einheitskreis liegen, also ihr Betrag kleiner 1 ist. Das ist hier nicht der Fall, da

$$\sqrt{5} > 1 \rightarrow 1 + \sqrt{5} > 2 \rightarrow p_1 = (1 + \sqrt{5})/2 > 1$$

Die Impulsantwort konvergiert nicht, das System ist instabil (vgl. berechnete Werte).

(f) (6 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort des Systems $y[n]$.

Lösung: Zur Bestimmung der Impulsantwort zerlegen wir die Systemfunktion in Terme, für die eine Rücktransformationvorschrift exisitert → Partialbruchzerlegung (PBZ)

$$\frac{z^2}{z^2 - z - 1} = z\frac{z}{(z-p_1)(z-p_2)} = z\left(\frac{a}{z-p_1} + \frac{b}{z-p_2}\right)$$

Ausklammern des einen z, damait ein echter Bruch entsteht, nur dann ist die PBZ erlaubt. Zur Verkürzung der Schreibweise sind hier die Pole p_1, p_2 noch nicht mit den Werten gefüllt. Bestimmen der a, b mittels „Zuhaltemethode“

$$a = \frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{p_1}{\sqrt{5}}$$

$$b = \frac{p_2}{p_2 - p_1} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}-1-\sqrt{5}} = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = -\frac{p_2}{\sqrt{5}}$$

Damit folgt für die Rücktransformation

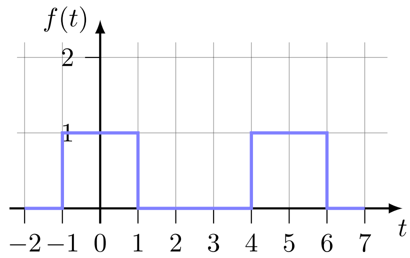
$$\text{Term 1}: \frac{az}{z-p_1} \bullet\!\!-\!\!\circ\; y_1[n] = a p_1^n = \tfrac{1}{\sqrt{5}} p_1^{n+1}$$

$$\text{Term 2}: \frac{bz}{z-p_2} \bullet\!\!-\!\!\circ\; y_2[n] = b p_2^n = -\tfrac{1}{\sqrt{5}} p_2^{n+1}$$

$$y[n] = y_1[n] + y_2[n] = \tfrac{1}{\sqrt{5}}\left(p_1^{n+1} - p_2^{n+1}\right)$$

Aufgabe 5: Fourier-Reihe .... (10 Punkte)

Gegeben ist das folgende periodische Signal $f(t)$ mit der Periodendauer $T = 5$.



(a) (8 Punkte) Bestimmen Sie die Fourierkoeffizienten des Signals.

Lösung: Die Grundkreisfrequenz des Signals ist laut Aufgabenstellung

$$T = 5 \qquad f = \tfrac{1}{5} \qquad \omega = 2\pi f = \tfrac{2\pi}{5}$$

Die analysegleichung für die Fourierkoeffizienten lautet

$$b_k = \tfrac{1}{T} \int_T f(t) \mathrm{e}^{-\jmath k\omega t} \mathrm{d}t$$

Ausgewählt wird ein Fenster über eine Periode symmetrisch um Null: Intervall von -2.5 bis 2.5. Da die Funktion nur im Intervall $[-1; 1]$ einen Wert verschieden von Null hat, beschränken sich die Integrationsgrenzen

$$\begin{aligned}
b_k &= \tfrac{1}{T} \int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\jmath k\omega t} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T} \left[\frac{1}{-\jmath k\omega} \mathrm{e}^{-\jmath k\omega t} \right]_{-1}^{1} = \frac{1}{-\jmath T k\omega} (\mathrm{e}^{-\jmath k\omega} - \mathrm{e}^{\jmath k\omega}) \\
&\quad \text{Verwenden von } \omega T = \tfrac{2\pi}{T} T = 2\pi \\
&= \frac{1}{\jmath 2\pi k} (\mathrm{e}^{\jmath k\omega} - \mathrm{e}^{-\jmath k\omega}) \\
&\quad \text{Umwandlung komplexe e-Funktion in Sinus} \\
&= \frac{1}{\jmath 2\pi k} 2\jmath \sin(k\omega) = \frac{1}{\pi k} \sin\left(k \tfrac{2\pi}{5}\right)
\end{aligned}$$

(b) (2 Punkte) Wie lautet der Gleichanteil des Signals?

Lösung: Der Gleichanteil ist der Koeffizient bei $k = 0$. Die obige Rechenvorschrift läuft dann auf den Bruch $0/0$ heraus. D.h. hier ist die Grenzwertbetrachtung mittels Regel von L'Hospital erforderlich. Es geht aber auch direkt:

$$\begin{aligned}
b_0 &= \tfrac{1}{T} \int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\jmath 0\omega t} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{T} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{0} \mathrm{d}t = \tfrac{1}{T} \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5} [t]_{-1}^{1} = \frac{1}{5}(1 - (-1)) = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Der Mittelwert des Signals über eine Periode.

Aufgabe 6: Frequenzantwort eines Systems .... (11 Punkte)

Gegeben ist die folgende Systemfunktion

$$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}}$$

(a) (4 Punkte) Bestimmen Sie sämtliche Polestellen und Nullstellen von $H(z)$.

Lösung: Umformung auf positive Exponenten

$$H(z) = \frac{1+z^{-2}}{1-\frac{3}{4}z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{z^2+1}{z^2-\frac{3}{4}z}$$

Nullstellen Für die Nullstellen reicht die Betrachtung des Zählers: $z^2+1 = 0 \Leftrightarrow z_{1,2} = \pm \jmath$

Polstellen Nullstellen des Nenners: $z^2 - \frac{3}{4}z = 0 \Leftrightarrow z(z-\frac{3}{4}) = 0 \Leftrightarrow p_1 = 0, p_2 = \frac{3}{4}$

(b) (1 Punkt) Ist die Impulsantwort des Systems konvergent (ist das System stabil)?

Lösung: Das System ist stabil, da alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises liegen.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.

Lösung: Betrachten der Systemfunktion

$$H(z) = \frac{z^2+1}{z^2-\frac{3}{4}z} = \frac{z^2}{z^2-\frac{3}{4}z} + \frac{1}{z^2-\frac{3}{4}z} = \frac{z}{z-\frac{3}{4}} + \frac{1}{z^2}\frac{z}{z-\frac{3}{4}}$$

Die beiden Teilterme können einzeln mit der Tabelle transformiert werden, z^{-2} bewirkt eine Verschiebung um zwei Abtastschritte

$$h[n] = \left(\frac{3}{4}\right)^n \sigma[n] + \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2} \sigma[n-2]$$

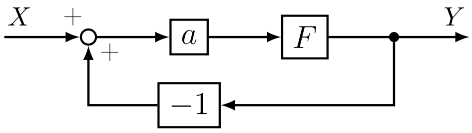
(d) (3 Punkte) Bestimmen Sie allgemein den Betrag der Frequenzantwort $|H(e^{\jmath\hat{\omega}})|$.

Lösung: Es ist

$$\begin{aligned} |H(e^{\jmath\hat{\omega}})| &= \sqrt{H(e^{\jmath\hat{\omega}}) \cdot H^*(e^{\jmath\hat{\omega}})} = \sqrt{H(e^{\jmath\hat{\omega}}) \cdot H(e^{-\jmath\hat{\omega}})} \\ &= \sqrt{\frac{1+e^{-2\jmath\hat{\omega}}}{1-\frac{3}{4}e^{-\jmath\hat{\omega}}}\frac{1+e^{2\jmath\hat{\omega}}}{1-\frac{3}{4}e^{\jmath\hat{\omega}}}} = \sqrt{\frac{2+2\cos(2\hat{\omega})}{(1+\frac{3^2}{4^2})-\frac{3}{2}\cos(\hat{\omega})}} \end{aligned}$$

Aufgabe 7: Unbekannte Funktion im System ....(10 Punkte)

Gegeben ist das folgende Blockschaltbild eines rückgekoppelten Systems. Das Untersystem F besteht selbst nur aus Summationsstellen, Verstärkungen und Integratoren.



Das Systemfunktional des System für den Fall $a = 10$ ist bekannt und lautet

$$H|_{a=10} = \left.\frac{Y}{X}\right|_{a=10} = \frac{10\mathcal{A}}{1+12\mathcal{A}}$$

Bestimmen Sie aus diesen Informationen das Systemfunktional für den Fall $a = 20$.

$$H|_{a=20} = \left.\frac{Y}{X}\right|_{a=20}$$

Lösung: Zur Lösung wird zunächst das allgemeine Systemfunktional aufgestellt (Operatorschreibweise)

$$Y = a \cdot F \cdot (X - Y) \Rightarrow Y + a \cdot F \cdot Y = a \cdot F \cdot X \Rightarrow (1 + a \cdot F)Y = a \cdot F \cdot X$$
$$\Rightarrow \frac{Y}{X} = \frac{a \cdot F}{1 + a \cdot F}$$

Nun kann der gegebene Fall für $a = 10$ betrachtet werden

$$\left.\frac{Y}{X}\right|_{a=10} = \frac{10 \cdot F}{1 + 10 \cdot F}$$

Dies wird mit der Vorgabe der Aufgabenstellung verglichen

$$\underbrace{\frac{10 \cdot F}{1 + 10 \cdot F}}_{\text{aus obiger Gleichung}} = \underbrace{\frac{10\mathcal{A}}{1 + 12\mathcal{A}}}_{\text{Ausgabenstellung}}$$

Auflösen nach F

$$\begin{aligned}
10F(1+12\mathcal{A}) &= 10\mathcal{A}(1+10F) && |10 \text{ kürzen und ausmultiplizieren} \\
F + 12\mathcal{A}F &= \mathcal{A} + 10\mathcal{A}F && | - 10\mathcal{A}F \\
F + 2\mathcal{A}F &= \mathcal{A} && |F \text{ ausklammern} \\
(1+2\mathcal{A})F &= \mathcal{A} && | : (1+2\mathcal{A}) \\
F &= \frac{\mathcal{A}}{1+2\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Mit diesem Ergebnis kann dann der Fall $a = 20$ berechnet werden

$$\left.\frac{Y}{X}\right|_{a=20} = \frac{20 \cdot F}{1 + 20 \cdot F} = \frac{20 \cdot \frac{\mathcal{A}}{1+2\mathcal{A}}}{1 + 20 \cdot \frac{\mathcal{A}}{1+2\mathcal{A}}}$$

Auflösen der Doppelbrüche

$$= \frac{20\mathcal{A}}{1 + 2\mathcal{A} + 20\mathcal{A}} = \frac{20\mathcal{A}}{1 + 22\mathcal{A}}$$