1.2 Čísla, premenné a výrazy

Pojmy:

Konštanta – je stála veličina. Konštantou sa vo všeobecnosti myslí výsledok poznania relatívne stálych súvislostí alebo vlastností.

Premenná – je značka resp. označenie, ktoré zastupuje prvky určitého oboru variability.

Výraz – je zoskupenie matematických symbolov na vyjadrenie určitých vzťahov a operácií.

> **Algebraický výraz** je tvorený z konštánt („čísla“) a premenných („písmena“), ktoré sú dokopy spojené pomocou algebraických operácií (napr. sčítania, násobenia) a zátvoriek. Premenná zastupuje čísla z určitého oboru hodnôt. Pomocou algebraických výrazov môžeme vykonávať všeobecné výpočty.
>
> Matematický zápis, v ktorom po nahradení premenných konštantami dostaneme konštantu, nazývame algebraický výraz.
>
> Racionálny algebraický výraz neobsahuje odmocniny, napr. $\frac{x+5}{3} - \frac{3}{4}x$
>
> Iracionálny algebraický výraz obsahuje odmocniny, napr.$\sqrt{2x-7} + 3x$
>
> **Počtový výraz** je matematický zápis, ktorým vyjadrujeme počtové operácie s číslami a poradie v akom majú byť prevedené. Napr.: (2·(5–1,76)+5):0,4.
>
> Počtové výrazy sa pomenovávajú podľa počtových operácií – výkonov. napr. počtový výraz 3 + 2 je súčet, 6 - 4 je rozdiel, 2. 4 je súčin, 4 : 2 alebo 4/2 je podiel.

Obor definície výrazu – Definičný obor premenných algebraického výrazu je množina všetkých takých hodnôt premenných, pre ktoré je algebraický výraz definovaný – má zmysel. Zvyčajne ho označujeme D (D_f).

Rovnosť výrazov – Rovnosť v matematike znamená, že dve veličiny sú rovnaké, v prípade dvoch čísiel alebo počtových výrazov sa zapisuje: a = b, znak = sa nazýva znak rovnosti. 1+ 5 = 2 . 3

Hodnota výrazu – Výpočet hodnoty algebraického výrazu pre dané hodnoty premenných, vykonáme dosadením daných hodnôt premenných za jednotlivé premenné a určením hodnoty takto vzniknutého číselného výrazu.

Jednočlen – je výraz, ktorý sa dá zapísať ako:

> konštanta 5; -2.36; -1/3; π; e
>
> premenná a; x; y
>
> súčin, podiel konštánt, premenných a ich mocnín 5.x; $-7.a.b^2$

Mnohočlen - je výraz, ktorý sa dá zapísať ako súčet jednočlenov : $5k^2 + 3p^3 + 4\,pq + 56$

Názov mnohočlenu je odvodený od počtu jeho jednočlenov (sú oddelené znamienkami + alebo -)

- jednočlen	$2x^5$	- dvojčlen	$m + n^2$
- trojčlen	$a^2 - b^3 + 5$	- štvorčlen	$pq + p^2q - 5p + 2$

Stupeň mnohočlena – určuje najväčší stupeň jeho jednočlenov.

Napr.: $3a^7 - 5b^2 + 4a^3b^5$ je trojčlen 8. stupňa

Výraz typu $\mathbf{A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}$, pričom $\mathbf{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, x \in R, a_n \neq 0, n \in N}$ nazývame **polynómom** – mnohočlen n - tého stupňa s premennou x.

Stupeň polynómu je najvyšší exponent premennej. Číselnú hodnotu mnohočlena dostaneme ak do mnohočlena dosadíme za premennú niektoré číslo z oboru premennej.

Doplnenie do štvorca (pre kvadratický mnohočlen) – Doplnenie na štvorec alebo doplnenie do štvorca je úloha z oblasti matematickej analýzy, pri ktorej **podstatou je zmena polynómu 2. stupňa, teda kvadratického trojčlena na tvar štvorca.**

Využíva sa rovnosť: $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, ktorá platí za predpokladu, že $a \neq 0$ pre každé číslo x.

Člen mnohočlena – Jednotlivé sčítance mnohočlenu nazývame členmi mnohočlenu.

a_0 – absolútny člen, a_1x – lineárny člen, a_2x^2 – kvadratický člen, a_3x^3 – kubický člen,

a_4x^4 – člen 4. stupňa, a_5x^5 – člen 5. stupňa, . . . a_nx^n – člen n. stupňa

Vynímanie pred zátvorku – Vždy sa vyníma „maximálna hodnota“ , to znamená najväčší spoločný deliteľ jednotlivých členov vo výraze.

$$ab + a = a(b + 1) \qquad b - 2a = -(2a - b)$$

Úprava na súčin – Výraz môžeme upraviť na súčin:

A. Vyňatím jednočlena pred zátvorku:

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov mnohočlena (koeficienty aj premenné) napíšeme pred zátvorku. V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydelili. Hovoríme, že sme mnohočlen sme upravili na súčin.

B. Vyňatím dvojčlena pred zátvorku:

Ak sa v mnohočlene nachádzajú násobky toho istého dvojčlena, dvojčlen vyberieme pred zátvorku. V zátvorke zostanú členy, ktoré sme týmto dvojčlenom vydelili. Hovoríme, že sme mnohočlen upravili na súčin dvojčlena a mnohočlena.

C. Pomocou algebrických vzorcov:

V matematike pracujeme s rôznymi vzorcami. V algebre medzi základné vzorce patria:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = aa + ab + ba + bb$$

$$(a - b)^2 = (a + b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 = aa - ab - ba + bb$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = aa + ab - ba - bb$$

Zjednodušovanie výrazu – je taká úprava výrazu, ktorej výsledkom je výraz s menším počtom operátorov, funkcií, čísel a premenných s nenulovými koeficientmi.

Čísla prirodzené (N), celé (Z), nezáporné (N_0), záporné (Z^-), racionálne (Q), iracionálne (I), reálne (R)

Prirodzené čísla N = {1,2,3,4,5,6,....}

- na tejto množine sú definované operácie sčítania a násobenia (umocnenie)
- obor prirodzených čísel = množina + operácie: (N,+, .)
- veta o uzavretosti: (a+b)∈N ∧ (a.b) ∈N

Celé čísla Z = {...,-3,-2,-1,0,1,2,3,....}

- na tejto množine je definovaná operácia odčítania, sčítania, násobenia
- obor celých čísel: (Z, +, - , .)

Racionálne čísla Q

- množina všetkých čísel, ktoré sa dajú zapísať v tvare zlomku $\frac{p}{q}$; p∈Z, q∈N
- na tejto množine je definovaná operácia delenia, sčítania, násobenia, odčítania
- zlomky, zmiešané čísla, periodické čísla

Iracionálne čísla I = {...sin 25°; log 5,3; ... ;√2;√3;...; e; π;...}

- všetky čísla, ktoré sa nedajú zapísať do tvaru zlomku

Reálne čísla R (Q ∪ I)

- obor: (R, +, -, . , / ,$\sqrt{\ }$)

Komplexné čísla C

- zápis: [a,b]; C = R + R
- na tejto množine je definovaná operácia odmocnenia
- množina čísel tvaru: a + bi; pričom i^2 = -1; a – reálna zložka, bi – imaginárna zložka

n-ciferné číslo – číslo ktoré sa skladá z n-cifier

Zlomky (čitateľ, menovateľ, spoločný menovateľ, základný tvar zlomku, zložený zlomok, hlavná zlomková čiara)

Zlomok – je zápis čísla vyjadrený ako podiel dvoch celých čísel, pričom znamienko delenia je nahradené tzv. zlomkovou čiarou. Aby mal zlomok zmysel, musí platiť: b ≠ 0.

$$\frac{a}{b} \quad \frac{\text{čitateľ}}{\text{menovateľ}}$$

Spoločný menovateľ - Najmenší spoločný menovateľ, alebo spoločný menovateľ je najmenší spoločný násobok menovateľov zlomkov. Je najmenšie kladné celé číslo, ktoré je násobkom každého menovateľa.

Základný tvar zlomku - Zlomok $\frac{a}{b}$ je v základnom tvare, ak sú čísla a, b nesúdeliteľné (ich jediný kladný spoločný deliteľ je teda číslo 1).

Zložený zlomok - Zlomok, ktorý má v čitateli alebo v menovateli opäť zlomok, alebo má zlomok aj v čitateli, aj v menovateli. $\frac{\frac{4}{7}}{\frac{3}{8}} = \frac{4}{7} : \frac{3}{8} = \frac{4}{7} . \frac{8}{3} = \frac{32}{21}$

Desatinný rozvoj/dekadický zápis (konečný, nekonečný a periodický)

Desatinný rozvoj – sú všetky čísla za desatinnou čiarkou. Racionálne čísla môžeme zapísať nielen v tvare zlomku aj v tvare desatinného čísla. Desatinné číslo môže mať **ukončený desatinný rozvoj (konečný desatinný rozvoj)**. Napríklad: $\frac{15}{60} = 15: 60 = 0,25$

Periodické čísla sa dajú zapísať v tvare zlomku, alebo v tvare **nedokončeného desatinného rozvoja** s vyznačenou periódou **(nekonečný periodický desatinný rozvoj)**.

Napríklad: $\frac{1}{3} = 1: 3 \ = \ 0,3333 \ \ldots . = \ 0,\overline{3}$

Každé číslo, ktoré má nekonečný neperiodický desatinný rozvoj je iracionálne číslo.

Dekadický zápis – je zápis čísla v desiatkovej sústave. Každý dekadický zápis predstavuje práve jedno číslo a to číslo je nezáporné a celé. Napríklad číslo 451 v desiatkovej sústave znamená $4.10^2 + 5.10^1 + 1.10^0 = 4.10^2 + 5.10 + 1$

Desatinné číslo – Desatinné číslo je spôsob zápisu čísla pomocou celej časti a desatinnej časti, ktorá je oddelená desatinnou čiarkou. Napríklad v zápise 154,28 je 154 celá časť a 28 desatinná časť. Na prvom mieste za desatinou čiarkou sú desatiny, na druhom stotiny, na treťom tisíciny.

Číslo π – 3,141592654..., Ludolfovo číslo je matematická konštanta definovaná ako pomer obvodu kruhu k jeho priemeru. Často sa používa jeho zaokrúhlená hodnota 3,14, prípadne zlomok $\frac{22}{7}$. Veľa matematických, vedeckých, fyzikálnych a inžinierskych rovníc obsahuje π, čo z neho robí jednu z najdôležitejších matematických konštánt. Ludolfovo číslo je iracionálne. Pomenované je podľa nemecko-holandského matematika Ludolph van Ceulena.

Nekonečno – je to, čo nemá medze, buď ako presahujúce akúkoľvek danú kvantitu istej povahy alebo smerujúce k takému stavu. Nekonečno je abstraktný pojem, ktorý si v podstate ani nemôžeme predstaviť. V matematike sa "nekonečno" často používa v kontexte, kde sa s ním narába ako s číslom (teda počíta alebo meria veci: "nekonečný počet termínov").

Číselná os – súradnicová sústava na priamke, so zvoleným začiatkom osi a jednotkou dĺžky. Čísla na nej znázorňujeme ako body.

Znázorňovanie čísel – číslo vieme znázorniť na číselnej osi

Interval (uzavretý, otvorený, ohraničený, neohraničený) - sú podmnožiny množiny reálnych čísel, ktoré ležia medzi dvoma určenými bodmi označovanými ako hraničné body intervalu.

Napr.: (2; 7) – je množina reálnych čísel nachádzajúcich sa na číselnej osi medzi číslami 2 a 7, ale bez týchto čísel.

⟨2; 7⟩ – je množina reálnych čísel nachádzajúcich sa na číselnej osi medzi číslami 2 a 7, ale vrátane týchto čísel.

Druhy intervalov: (intervaly 1, 2, 3 sú ohraničené, intervaly 4, 5 sú neohraničené – aspoň jeden z koncových bodov je nekonečno)

1. Otvorený interval $(a, b) = \{x \in R;\ a < x < b\}$

2. Uzavretý interval $\langle a, b\rangle = \{x \in R;\ a \leq x \leq b\}$

3. Polootvorený/polouzavretý interval $\langle a; b) = \{x \in R;\ a \leq x < b\}$ $(a; b\rangle = \{x \in R;\ a < x \leq b\}$

4. Neohraničený interval $(a; \infty) = \{x \in R;\ a < x\}$ $\langle a; \infty) = \{x \in R;\ a \leq x\}$ $(-\infty; b) = \{x \in R;\ x < b\}$ $(-\infty; b\rangle = \{x \in R;\ x \leq b\}$

5. Obojstranne neohraničený interval $(-\infty; \infty) = \{x \in R\}$

Komutatívny, asociatívny a distributívny zákon

Komutatívny zákon – zákon zameniteľnosti: $a + b = b + a$; $a.\ b = b.\ a$

Asociatívny zákon – zákon združovania: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a.\ b).\ c = a.\ (b.\ c)$

Distributívny zákon – zákon roznásobenia súčtu: $a.\ (b + c) = a.\ b + a.\ c$

Odmocnina (druhá) – $\sqrt{a}$ - je špeciálnym typom všeobecnej odmocniny. Ide o najbežnejší typ odmocniny, preto sa často označuje iba ako odmocnina. Pre ľubovoľný matematický objekt s definovanou operáciou umocňovania (číslo, maticu, funkciu...) je druhá odmocnina z *a*, označovaná ako $\sqrt{a}$ definovaná ako objekt *b*, pre ktorý platí $b^2 = a$

n-tá odmocnina – z čísla x ($\sqrt[n]{x}$) je také číslo y, pre ktoré platí, že *y . y . … . y = x*, kde y sa v súčine vyskytuje n-krát. Odmocnina je inverznou funkciou k mocnine. Platí, že n-tá odmocnina čísla x sa rovná 1/n-tej mocnine čísla x: $\sqrt{9} = 9^{\frac{1}{2}} = 3$ Mocnina = Výsledok Umocňovania

Mocnina (s prirodzeným, celočíselným, racionálnym exponentom)

Mocniny s prirodzeným exponentom - Zapisujeme ju a^n, kde a je reálne číslo, n prirodzené číslo; a nazývame základ mocniny, n mocniteľ. Výraz a^n nazývame n-tá mocnina čísla a môžeme ho rozpísať ako súčin n základov, $a^2 = a\ .\ a$, $a^3 = a\ .\ a\ .\ a$, ...

Mocniny s celočíselným exponentom - pre každé reálne číslo a (a ≠ 0) a pre každé celé číslo n definujeme nasledujúce mocniny: $a^0 = 1$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Mocnina s racionálnym exponentom - Nech reálne číslo *a* je kladné a nech $n = \frac{r}{s}$ je racionálny exponent , kde *r* je celé číslo a *s* je kladné celé číslo. Potom je možné robiť úpravy typu: $a^{\frac{r}{s}} = (a^r)^{\frac{1}{s}} = \sqrt[s]{a^r} = (\sqrt[s]{a})^r = (a^{\frac{1}{s}})^r$

Exponent a základ mocniny

Exponent (mocniteľ) je číslo ktoré určuje, koľkokrát sa základ násobí.

Základ mocniny (mocnenec) je číslo, ktoré sa opakovane násobí.

Základ logaritmu – Logaritmom kladného reálneho čísla *u* pri základe $a \in R^+ - \{1\}$ nazývame také reálne číslo *v*, pre ktoré platí: $a^v = u$. Zapisujeme: $\log_a u = v$.

***a* - základ logaritmu** ***u* - logaritmované číslo** ***v* - logaritmus**

Absolútna hodnota čísla – Absolútna hodnota čísla je jeho vzdialenosť od nuly. Absolútnu hodnotu čísla x značíme pomocou zvislých čiar: | x | , | 5 |= 5, | -5 | = 5

Úmera (priama a nepriama)

priama: funkcia s predpisom $y = k.\,x$ (lineárna funkcia), grafom je priamka, k – smernica priamky

nepriama: funkcia s predpisom $y = k\ x$ (nepriama úmernosť, špeciálny prípad lineárnej lomenej funkcie), grafom je hyperbola Pomer je hodnota určená vo vzťahu k inému množstvu, veľkosti, hodnote.

Pomer - je hodnota určená vo vzťahu k inému množstvu, veľkosti, hodnote.

Percento - jedna stotina z celku: 1% = $\frac{1}{100}$ celku

Promile - jedna tisícina z celku: 1% = $\frac{1}{1000}$ celku

Základ (pre počítanie s percentami) – je celok 100%

Faktoriál – faktoriál čísla n, n ∈ N_0 je súčin všetkých prirodzených čísel menších alebo rovných n. Zapisuje sa n! a číta sa „n faktoriál“. Napríklad 5! = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120

Kombinačné číslo – udáva počet kombinícií, teda spôsobov, ako vybrať k prvkov z n prvkovej množiny. Kombinačné čísla sa vyskytujú veľmi často v kombinatorických výpočtoch, a preto majú špeciálne značenie $\binom{n}{k}$ (čítame „n nad k“).

Pozičná číselná sústava a jej základ – V tomto spôsobe zápisu čísel je hodnota každej číslice daná jej pozíciou v sekvencii symbolov. Každá číslica má touto pozíciou danú svoju váhu na výpočet celkovej hodnoty čísla. **Základom** je zvyčajne prirodzené číslo väčšie ako jedna. Váhy jednotlivých číslic sú potom mocninami tohto základu. Zároveň základ určuje počet symbolov pre číslice používané v danej sústave. Základ zvyčajne značíme *z.*

Dvojková a desiatková sústava

Dvojková číselná sústava, novšie tiež binárna číselná sústava (z lat. bis – dvakrát) je číselná sústava, ktorá zapisuje hodnoty pomocou dvoch symbolov 0 a 1. Konkrétnejšie hovoríme o pozičnej číselnej sústave so základom dva. Vďaka jednoduchej implementácii v elektronických obvodoch (vypnuté a zapnuté) používajú dvojkovú sústavu prakticky všetky súčasné číslicové počítače. Jednotlivé cifry (0, 1) sa nazývajú bit, čo je základná jednotka informácie.

Desiatková (dekadická) sústava, nazývaná tiež arabská, je pozično – hodnotový systém (place – value system), v ktorom rozhoduje pozícia symbolu v zápise čísla; hodnota, ktorú symbol reprezentuje závisí na mieste, ktoré zaberá. V desiatkovej sústave sa jedná o jednotky, desiatky, stovky,... milióny,... naľavo od desatinnej čiarky, ale aj desatiny, stotiny, tisíciny,... na pravo od desatinnej čiarky. Sú to mocniny čísla 10. Číslo 37 má tri desiatky a sedem jednotiek; ale číslo 73 má sedem desiatok a tri jednotky.

Približné číslo – zaokrúhlené číslo, nie presné

Platná číslica – Platné číslice sú tie číslice v čísle, ktoré sú relevantné pre presnosť daného čísla. Sú to všetky číslice okrem počiatočných núl. Koncové nuly sa počítajú. Príklady: 123 má 3 platné číslice 1230 má 4 platné číslice 0,001230 má 4 platné číslice 1,23 .105 má 3 platné číslice 1,2300 .105 má 5 platných číslic.

Absolútna chyba približného čísla – Absolútna chyba približného čísla je vzdialenosť medzi približným číslom a presným číslom. Absolútna chyba je vždy nezáporná.

Vlastnosti a vzťahy:

- $x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$, $x^2 \pm 2xy + y^2 = (x \pm y)^2$, $ax^2 + bx + c = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$,
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, $(a^x)^y = a^{xy}$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $(ab)^x = a^x \cdot b^x$, $c^0 = 1$, $a, b \geq 0, c > 0, x, y \in Z$, Q,
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$, $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$, pre $x, y \geq 0$, $m, n \in N$,
- $\sqrt{a^2} = |a|$,
- $|x-a|$ je vzdialenosť obrazov čísel x a a na číselnej osi,
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$,
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$,
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,
  $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
- $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$, $a^{\log_a x} = x$, pre $a > 0, a \neq 1, x > 0$, $b > 0$,
- $\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$, $\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y > 0$,
- $\log_a(x^y) = y \cdot \log_a x$, pre $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$,
- $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, pre prirodzené čísla n, $0! = 1$,
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!.(n-k)!}$, pre prirodzené čísla n a nezáporné celé čísla k, nie väčšie ako n,
- práve racionálne čísla majú desatinný periodický rozvoj,
- $R = Q \cup I$, $Q \cap I = \{\ \}$, $Z = N \cup Z^- \cup \{0\}$, $N \subset Z \subset Q \subset R$.