

1.4 Rovnice, nerovnice, sústavy – vzory teoretických zadaní

Úpravy rovníc a nerovníc

Vysvetlite pojmy: rovnica, nerovnica, koreň rovnice. Vysvetlite rozdiel medzi ekvivalentnými a dôsledkovými úpravami rovníc a nerovníc. Objasnite, načo slúži skúška správnosti a pri ktorých úpravách je nutné ju používať.

Rovnica - je vzťah rovnosti medzi dvoma algebrickými výrazmi, dá sa do nej dosadiť len niekoľko špecifických hodnôt.

Nerovnica - je vzťah nerovnosti medzi dvoma algebrickými výrazmi, pri ktorých sa hľadajú všetky čísla danej množiny, ktoré spĺňajú danú nerovnosť.

Koreň - je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za neznámu/neznáme rovnice a rovnica sa bude skutočne rovnať. Označuje sa ako „ $K = \{...\}$ “.

1. Ekvivalentné = medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.; $x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8$

sú napríklad:

- Výmena strán rovnice
- Pripočítanie reálneho čísla k oboj stranám rovnice
- Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k oboj stranám rovnice
- Vynásobenie oboj strán rovnice nenulovým reálnym číslom

2. Neekvivalentné = medzi rovnicami platí iba implikácia. Napr.; $x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$

sú napríklad:

- Umocnenie oboj strán rovnice
- Vynásobenie (vydelenie) oboj strán rovnice výrazom, ktorý obsahuje neznámu

Kontrola/skúška riešenia - je keď koreň rovnice dosadíme do rovnice a zistujeme či sa ľavá strana rovná pravej. Výsledok skúšky nám ukazuje správnosť nášho výsledku. Používa sa pri dôsledkových úpravách.

Lineárna rovnica

Definujte pojem lineárna rovnica, ekvivalentné úpravy, obor premennej, definičný obor, obor koreňov. Diskutujte o možnom počte riešení lineárnej funkcie. Vysvetlite čo znamená riešiť lineárnu rovnicu graficky (súvis medzi lineárnou rovnicou a lineárnou rovnicou).

Lineárna rovnica je rovnica, ktorá obsahuje na oboch stranách iba sumu konštant a prvú mocninu premennej. Lineárna rovnica reprezentuje v sústave karteziánskych súradníc priamku.

Ekvivalentné úpravy = medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.; $x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8$

sú napríklad:

- Výmena strán rovnice
- Pripočítanie reálneho čísla k oboom stranám rovnice
- Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k oboom stranám rovnice
- Vynásobenie oboch strán rovnice nenulovým reálnym číslom

Obor premennej sú všetky čísla, ktoré môžeme za premennú dosadiť bez ohľadu na to, či bude mať výraz zmysel. Obor premennej vymedzuje zadávateľ úlohy a ak tak neurobí, tak je to množina všetkých reálnych čísel.

Premenná môže byť z oboru:

N- prirodzené čísla $\{1,2,3,\dots\}$

Z- celé čísla $\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$

Q- racionálne čísla- dajú sa zapísať v tvare zlomku...

I- iracionálne čísla

R- reálne čísla $\{Q+I\}$

C- komplexné čísla

Definičný obor alebo **obor definície zobrazenia** sú všetky prvky množiny, z ktorej sa zobrazuje. Ak použijeme terminológiu funkcií, je to množina všetkých nezávisle premenných, pre ktoré je funkcia definovaná.

Množinu všetkých riešení rovnice (nerovnice) nazývame **množina koreňov** alebo obor pravdivosti a túto množinu označujeme **K**.

Lineárnou rovnicou s neznámou x nazývame každú rovnicu tvaru $ax + b = 0$, kde a, b sú reálne čísla a $a \neq 0$.

Pri riešení môžu nastať 3 prípady:

- ak $a \neq 0$, potom $ax = -b$ a rovnica má práve jeden koreň $x = -b/a$;
- ak $a = b = 0$, po úprave dostaneme $0 = 0$ a to je pravdivý výrok (rovnosť), takže pôvodná rovnica má nekonečne veľa riešení resp. koreňom tejto rovnice je každé reálne číslo;
- ak $a = 0, b \neq 0$, po úprave dostaneme $0 = -b$, a keďže $b \neq 0$, tak sme dostali nepravdivú rovnosť – pôvodná rovnica nemá žiadne riešenie.

Uvažujme o sústave dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktorú môžeme v základnom tvare zapísať napríklad takto:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

pričom $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sú reálne koeficienty. Z každej z týchto rovníc vyjadrí y .

V prvej rovnici, dostanem vyjadrenie:

$$y = \frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$$

Z druhej rovnice dostanem:

$$y = \frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$$

- vyzerá to ako rovnica lineárnej funkcie
- dokážeme sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi prepísať do tvaru sústavy dvoch lineárnych funkcií
- **grafom lineárnej funkcie je priamka**
- **$y = c$** je rovnica konštantnej funkcie. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x
- **$x = c$** všetky body, ktoré majú rovnakú x -ovú súradnicu ležia na priamke rovnobežnej s osou y . Lenže tá nepredstavuje graf funkcie
- každej rovnici vieme priradiť priamku, teda na obrázku nám vzniknú dve priamky – jednoducho sa pozrieme, kde sa tie dve priamky pretáli a budeme mať výsledok
- **priesečník** - bod, ktorý leží na oboch grafoch, teda **jeho súradnice vyhovujú obom daným rovniciam**

Kvadratická rovnica a nerovnica 1

Vysvetlite, čo znamená riešiť kvadratickú rovnicu a kvadratickú nerovnicu. Vysvetlite aký je vzťah medzi koreňmi a koeficientami v kvadratickej rovnici. Demonštrujte na konkrétnom príklade.

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 - \text{KVARO}$$

Typy kvadratických rovníc:

rýdzo kvadratická rovnica má tvar

$$ax^2 + c = 0$$

kvadratická rovnica bez absolútneho člena

$$ax^2 + bx = 0$$

normovaný tvar kvadratickej rovnice

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Riešenie kvadratickej rovnice : $D = b^2 - 4ac$ D - diskriminant kvadratickej rovnice

Ak $D < 0$ rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel

Ak sa $D = 0$ má rovnica 1 riešenie (dvojnásobný koreň)

Ak $D > 0$ kvadratická rovnica má 2 reálne riešenia

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Vzťah koreň a koeficient:

Ak má kvadratická rovnica $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, ($a \neq 0$), korene x_1, x_2 , tak pre ne platí:

$$x_1 + x_2 = -b/a, \quad (\text{Vietove vzorce})$$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a$$

$$2x^2 + 4b - 6 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 16 + 48 = 64$$

$$\sqrt{64} = 8$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 8}{4}$$

$$x_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$x_2 = \frac{-12}{4} = -3$$

$$K = \{-3, 1\}$$

$$1 + (-3) = -\frac{4}{2}$$

$$-2 = -2$$

$$1 \cdot (-3) = -\frac{6}{2}$$

$$-3 = -3$$

Kvadratická rovnica a nerovnica 2

Vysvetlite pojmy: kvadratická rovnica a kvadratická nerovnica. Popíšte riešenie úplnej a neúplnej kvadratickej rovnice. Vysvetlite, ako postupujeme pri riešení kvadratickej nerovnice.

Kvadratická rovnica alebo **algebraická rovnica druhého stupňa** je matematická rovnica, ktorá má nasledujúci všeobecný tvar: $ax^2 + bx + c = 0$

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + c = 0$$

Kvadratická rovnica v užšom zmysle je kvadratická rovnica len s jednou neznámou.

neúplná kvadratická rovnica

- bez lineárneho člena $ax^2 + c = 0$

$$x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

- bez absolútneho člena $ax^2 + bx = 0$

V množine reálnych čísel \mathbb{R} riešte:

$$3x^2 - 7x + 4 \leq 0$$

^ SKRY RIEŠENIE v ZOBRAZ VŠETKY RIEŠENIA

Riešenie:

$$3x^2 - 7x + 4 \leq 0$$

$$3(x-1)(x-\frac{4}{3}) \leq 0$$

$$(x-1)(x-\frac{4}{3}) \leq 0$$

$$\left[x-1 \leq 0 \wedge x-\frac{4}{3} \geq 0 \right] \vee \left[x-1 \geq 0 \wedge x-\frac{4}{3} \leq 0 \right]$$

$$\left(x \leq 1 \wedge x \geq \frac{4}{3} \right) \vee \left(x \geq 1 \wedge x \leq \frac{4}{3} \right)$$

$$I_1 = \emptyset \dots \dots \dots I_2 = \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

$$K = \left\langle 1, \frac{4}{3} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x &= 0 \\
 x(x-4) &= 0 \\
 x = 0 \quad x-4 &= 0 \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

Kvadratickou nerovnici môžeme zapísať v obecnom tvare takto: $ax^2 + bx + c > 0$ alebo $ax^2 + bx + c < 0$, kde a, b, c jsou libovolná reálná čísla, $a \neq 0$. Namísto „větší než“ a „menší než“ samozřejmě můžeme použít „větší nebo rovno“ a „menší nebo rovno“.

$$2x^2 - 7x + 3 < 0$$

$$D = 25 \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} \quad x_1 = 1/2, \quad x_2 = 3$$

Tyto dva kořeny nám rozdělují graf funkce $2x^2 - 7x + 3$ na tři intervaly:

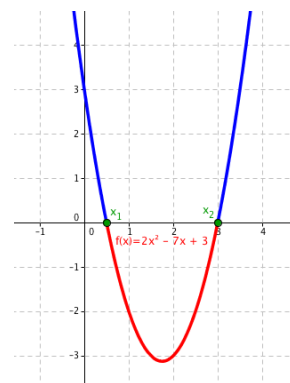
$(-\infty, \frac{1}{2})$ v tomto intervalu jsou hodnoty kladné (graf je „nad“ osou x)

$(\frac{1}{2}, 3)$ v tomto intervalu jsou hodnoty záporné (graf je „pod“ osou x)

$(3, \infty)$ v tomto intervalu jsou opět hodnoty kladné

Všimněte si, že v intervalech používáme kulaté závorky, které značí otevřený

interval. To znamená, že čísla 3 ani $1/2$ nejsou obsaženy v intervalu $(\frac{1}{2}, 3)$. Je to proto, že v bodě $x = 3$ má funkce hodnotu nula, a my jsme chtěli vyjádřit interval, ve kterém jsou hodnoty menší než nula.



Nyní už známe všechny potřebné informace k tomu, abychom určili výsledek nerovnice $2x^2 - 7x + 3 < 0$.

Ptáme se, kdy jsou hodnoty funkce $2x^2 - 7x + 3$ menší než nula? Jsou menší než nula v intervalu $(\frac{1}{2}, 3)$.

Kvadratická rovnice a kvadratická funkce

Vysvetlite obsah pojmov kvadratická rovnice, kořeny rovnice, úprava rovnice na sčítan, diskriminant. Urobte diskusiu o závislosti veľkosti diskriminantu a počtu kořenů kvadratickej rovnice od grafu kvadratickej funkcie na konkrétnom prípade.

Kvadratická rovnice alebo **algebraická rovnice druhého stupňa** je matematická rovnice, ktorá má nasledujúci všeobecný tvar: $ax^2 + bx + c = 0$

Koreň - je množina všetkých čísel, ktoré môžeme dosadiť za neznámu/neznáme rovnice a rovnice sa bude skutočne rovnáť. Označuje sa ako „ $K = \{...\}$ “.

Úprava na sčítan - je rozloženie výrazov na sčítan.

1. Vyňatím člena (jednočlena alebo dvojčlena) pred zátvorku

Najväčšieho spoločného deliteľa všetkých členov mnohočlena (koeficienty aj premenné) napíšeme pred zátvorku. V zátvorke ostanú členy, ktoré sme týmto deliteľom vydělili.

Hovoríme že sme mnohočlen upravili na sčítan.

2. Pomocou algebrických výrazov

V matematike pracujeme s rôznymi vzorcami. V algebre medzi základné vzorce patria:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2 = aa + ab + ba + bb$$

$$(a - b)^2 = (a + b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2 = aa - ab - ba + bb$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) = aa + ab - ba - bb$$

Diskriminant prislúchajúci polynómu je číslo, ktoré je súčasťou riešenia, respektíve hľadania koreňov polynómu. Diskriminantom sa zväčša myslí diskriminant kvadratickej rovnice. Diskriminanty polynómov vyšších rádov než kvadratických sú obtiažnejšie zapamätateľné pre svoj zložitý predpis.

Ak $D < 0$ rovnica nemá riešenie v množine reálnych čísel

Ak sa $D = 0$ má rovnica 1 riešenie (dvojnásobný koreň)

Ak $D > 0$ kvadratická rovnica má 2 reálne riešenia

Sústavy lineárnych rovníc 1

Vysvetlite pojem sústava lineárnych rovníc. Uvedte a demonštrujte základné metódy algebrického riešenia sústavy dvoch rovníc s dvomi neznámymi. Vysvetlite, čo znamená riešiť sústavu graficky.

V matematike a v lineárnej algebre sa ako **Sústava lineárnych rovníc** označuje množina lineárnych rovníc. Napríklad

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -2$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

Úlohou pri riešení je nájsť také hodnoty x_1 , x_2 a x_3 pre ktoré platia všetky rovnice zároveň.

Pri riešení sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi využívame 3 metódy:

- dosadzovaciu (substitučnú) metódu
- sčítaciu (adičnú) metódu
- porovnávaciu (komparačnú) metódu

Dosadzovacia (substitučná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z jednej rovnice si vyjadríme jednu neznámu a výraz ktorý takto dostaneme, dosadíme za túto neznámu do druhej rovnice.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Sčítacia (adičná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že každú rovnicu po úprave na základný tvar napr. $2x+3y=4$ vhodne násobíme tak, aby po sčítaní oboch rovníc jedna neznáma „vypadla“.

Takto dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Pri „čistej“ sčítacej metóde to isté vykonáme i s druhou neznámou. V praxi je často využívaná kombinácia sčítacej a dosadzovacej metódy, čiže jednu neznámu určíme sčítacou metódou a druhú dosadením už známej hodnoty do niektorej z rovníc.

Porovnávací (komparačná) metóda:

Táto metóda spočíva v tom, že z oboch rovníc si vyjadríme tú istú neznámu. Získané výrazy porovnáme a tak dostaneme rovnicu s jednou neznámou, ktorú vyriešime. Následne dosadením vypočítame i druhú neznámu.

Sústavy lineárnych rovníc 2

Vysvetlite pojem sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi, úpravy rovníc, skúška rovníc, zápis riešenia sústavy rovníc. Uveďte metódy riešenia sústav rovníc, ktoré objasnite na uvedenom príklade.

Uvažujme o sústave **dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi**, ktorú môžeme v základnom tvare zapísať napríklad takto:

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

pričom $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ sú reálne koeficienty. Z každej z týchto rovníc vyjadrí y .

V prvej rovnici, dostanem vyjadrenie:

$$y = \frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1}$$

Z druhej rovnice dostanem:

$$y = \frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}$$

- vyzerá to ako rovnica lineárnej funkcie
- dokážeme sústavu dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi prepísať do tvaru sústavy dvoch lineárnych funkcií
- **grafom lineárnej funkcie je priamka**
- **$y = c$** je rovnica konštantnej funkcie. Jej grafom je priamka rovnobežná s osou x
- **$x = c$** všetky body, ktoré majú rovnakú x -ovú súradnicu ležia na priamke rovnobežnej s osou y . Lenže tá nepredstavuje graf funkcie
- každej rovnici vieme priradiť priamku, teda na obrázku nám vzniknú dve priamky – jednoducho sa pozrieme, kde sa tie dve priamky preťali a budeme mať výsledok

- **priesečník** - bod, ktorý leží na oboch grafoch, teda **jeho súradnice vyhovujú obom daným rovniciam**

Pri riešení sústavy dvoch rovníc s dvoma neznámymi využívame 3 metódy:

- dosadzovaci (substitučnú) metódu
- sčítaci (adičnú) metódu
- porovnávaciu (komparačnú) metódu

1. Ekvivalentné úpravy = medzi rovnicami platí ekvivalencia. Napr.; $x + 3 = 11 \Leftrightarrow x = 8$

sú napríklad:

- Výmena strán rovnice
- Pripočítanie reálneho čísla k oboch stranám rovnice
- Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na definičnom obore rovnice k oboch stranám rovnice
- Vynásobenie oboch strán rovnice nenulovým reálnym číslom

2. Neekvivalentné úpravy = medzi rovnicami platí iba implikácia. Napr.; $x = 6 \Rightarrow x^2 = 36$

sú napríklad:

- Umocnenie oboch strán rovnice
- Vynásobenie (vydelenie) oboch strán rovnice výrazom, ktorý obsahuje neznámu

Kontrola/skúška riešenia - je keď koreň rovnice dosadíme do rovnice a zisťujeme či sa ľavá strana rovná pravej. Výsledok skúšky nám ukazuje správnosť nášho výsledku. Používa sa pri dôsledkových úpravách.

zápis riešenia sústavy rovníc: $K = \{[x_1, y_1], [x_2, y_2]\}$