1 ZÁKLADY MATEMATIKY

1.1 Logika a množiny

Pojmy:

Výrok – je oznamovacia veta o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá alebo nie. Označujú veľkými písmenami A, B, ..., V, ... Z.

Axióma – tvrdenie, ktoré sa nedokazuje, je bez pochybností pravdivé. Pomocou axióm zavádzame základné matematické pojmy.

Definícia – je jasné slovné vymedzenie (obsahu) pojmu, výklad významu slova (termínu, výrazu) uvedením jeho základných, typických znakov, jeho presný opis

Hypotéza – oznamovacia veta, ktorá má charakter výroku, o ktorom v danom okamihu nemožno jednoznačne určiť, či je pravdivý alebo nepravdivý. Jedna z týchto podmienok však musí nastať. Vedecky prijateľná domnienka umožňujúca vedecké vysvetlenie nejakých javov. predpoklad, domnienka

Tvrdenie – výrok, ktorým sa niečo dokazuje; téza

Pravdivostná hodnota – je priradenie jednej z pravdivostných hodnôt danému výroku. Symbolicky sa značí najčastejšie číslicami alebo písmenami. Pravda – 1 alebo p, nepravda – 0 alebo n.

Logické spojky – spojky (napr. a, alebo, ak..., potom..., je ekvivalentné, nie je pravda, že...), pomocou ktorých z jednoduchých výrokov vytvárame zložitejšie výroky. V matematických zápisoch sa používajú symboly na zápis týchto spojok: konjunktor – $\wedge$ disjunktor (nevylučujúci) – $\vee$ vylučújúci disjunktor - $\vee\vee$ implikátor $\Rightarrow$ ekvivalentor $\Leftrightarrow$

Negácia výroku – je presne to, čo ten výrok netvrdí. Mení pravdivostnú hodnotu výroku na opačnú. Teda 1 na 0 a naopak. Označuje sa: $A^{/}$ alebo $\neg A$, $(1)^{/} = 0$, $(A^{/})^{/} = A$

Konjunkcia – $A \wedge B$ – ,,a súčasne"/,,a" – Platia oba výroky A aj B.

Disjunkcia – = alternatíva – $A \vee B$ - ,,alebo" – Platí aspoň jeden z výrokov A,B.

Implikácia – $A \Rightarrow B$ **–**,,z toho vyplýva"/,,ak..., tak..." – Výrok B platí za predpokladu, že platí výrok A.

Obmena implikácie – $A \Rightarrow B$ platí vtedy, ak platí $A^{/} \Leftarrow B^{/}$ **–** Pri negovaní výrokov spojených s implikáciou sa implikácia obráti.

Obrátená implikácia – výrok $A \Rightarrow B$ platí, ak platí aj $A \Leftarrow B$ – Ak teda platí implikácia a k nej obrátená implikácia, sú výroky ekvivalentné.

Ekvivalencia – $A \Leftrightarrow B$ - ,,práve vtedy keď" – Z A vyplýva B a z B vyplýva A. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

Vyplýva – vyvíjať sa ako následok, dôsledok niečoho

Je ekvivalentné – ,,je rovné" – Dva ekvivalentné výroky hovoria to isté len inými slovami, logicky sa rovnajú.

Úsudok – je akt myslenia, ktorý má nasledujúci priebeh: 1. Poznáme pravdivostné hodnoty určitých výrokov – predpoklady úsudku , 2. Ďalším výrokom priraďujeme pravdivostné hodnoty – záver úsudku. Úsudok vyjadríme pomocou výrokových formúl. Pri kontrole správnosti úsudku vyplníme tabuľku pravdivostného ohodnotenia všetkých formúl, ktoré v úsudku vystupujú.

Platný úsudok – úsudok je logicky správny.

Tautológia – výrok, výraz alebo formula logického kalkulu, ktorá je pravdivá pri akýchkoľvek významoch pravdivosti ich premenných.

Kontradikcia – alebo protirečenie je tvrdenie obsahujúce vzájomne si odporujúce myšlienky, vzájomné pôsobenie protikladov. Je kontradikcia výroková forma, ktorá v každom dosadení nadobudne pravdivostnú hodnotu nepravda. Kontradikcia je negácia tautológie.

Tabuľka pravdivostných hodnôt – ukazuje, kedy sú zložené výroky obsahujúce logické spojky pravdivé a kedy nie.

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

Kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve) –

Existenčný kvant. – $\exists$ – aspoň jeden existuje

Všeobecný kvant. – $\forall$ – pre všetky

Aspoň – minimálne, najmenej – výrok: Aspoň n je..., negácia: Najviac n - 1 je...

Najviac – maximálne, nanajvýš – výrok: Najviac n je..., negácia: Aspoň n + 1 je...

Práve – presne – výrok: Práve n je..., negácia: Najviac n – 1 alebo aspoň n +1 je...

Priamy a nepriamy dôkaz –

Priamy dôkaz implikácie A ⇒ B. Vychádzame z predpokladu implikácie A a priamym reťazcom implikácií B1, B2, B3, ..., B, kde B1, B2, B3, ..., B3 sú axiómy alebo dokázané tvrdenia a B je záver. Podstata priameho dôkazu, spočíva vo vytvorení akéhosi reťazca implikácií A ⇒ B1 , B1⇒ B2 , ... , Bk ⇒ B a následného logického záveru: A ⇒ B.

Príklad: **Veta:** Druhá mocnina nepárneho čísla je číslo nepárne.

Dôkaz: Preformulujme danú vetu - tvrdenie tak, aby malo tvar implikácie:

$\forall$ n $\in$ N: n je nepárne číslo ⇒ n^2 je nepárne číslo **[$\forall$ n $\in$ N: A(n) ⇒ B(n)]**

A(n) : n je nepárne číslo ⇒ $B_1(n)$: n=2k+1, k$\in N_0$ ⇒ $B_2(n)$: $n^2 = (2k+1)^2$ ⇒ $B_3(n)$: $n^2 = 4k^2 + 4k+1$ ⇒ $B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2 + 2k)+1$ ⇒ $B_5(n)$: $n^2 = 2k + 1$, k $\in N_0$ ⇒ **B(n): n^2 je nepárne číslo**

Nepriamy dôkaz používame najmä na dôkaz implikácie A ⇒ B. Postupujeme tak, že najskôr **vytvoríme obmenu implikácie B´⇒ A´** a túto dokazujeme priamo. B´⇒ B1⇒ B2⇒...→ Bn ⇒ A´. Využívame skutočnosť, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu, a preto namiesto implikácie môžeme dokazovať jej obmenu.

Príklad: **Veta:** Ak n^2 je párne číslo, tak aj n je párne číslo. **∼ $\forall$ n $\in$ N: 2| n^2 ⇒ 2| n**

Obmena vety: $\forall$ n $\in$ N: 2 nedelí n $\Rightarrow$ 2 nedelí n^2

Dôkaz: A(n) : 2 nedelí n $\Rightarrow B_1(n)$: n=2k+1, k$\in N_0 \Rightarrow B_2(n)$: $n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow B_3(n)$: $n^2 = 4k^2 +4k+1 \Rightarrow B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2 +2k)+1 \Rightarrow B_5(n)$: n^2 = 2k +1, k $\in N_0 \Rightarrow$ **B(n): 2 nedelí n2**

Dôkaz sporom – Dôkaz sporom vety A $\Rightarrow$ B sa robí tak, že sa **daná implikácia neguje a pomocou reťazca implikácií sa dospeje k logickému sporu**. Hovoríme, že sme prišli k sporu. Zo sporu vyplýva, že negované tvrdenie neplatí a teda musí platiť pôvodná veta.

Príklad: **Veta:** $\forall$ n $\in$ N: 2| n $\Rightarrow$ 2| n 2

Negácia vety: $\exists$ n $\in$ N: 2| n $\wedge$ 2 nedelí n2

Dôkaz: A(n) : 2|n $\Rightarrow B_1(n)$: n=2k, k $\in$ N $\Rightarrow B_2(n)$: $n^2 = (2k)^2 \Rightarrow B_3(n)$: $n^2 = 4k^2 \Rightarrow B_4(n)$: $n^2 = 2(2k^2) \Rightarrow B_5(n)$: n^2 = 2k , k $\in$ N $\Rightarrow$ **B(n): 2|n^2** – SPOR s predpokladom, že 2 nedelí n^2, t.j. negovaná veta je nepravdivá $\sim$ pôvodná veta je pravdivá.

Množina – je istý súbor prvkov, ktorými môžu byť čísla, ľudia, veci,..., ktoré spĺňajú určitú vlastnosť. Je jednoznačne určená, keď o každom prvku viem povedať, či danú vlastnosť má alebo nemá, t.j. či do množiny patrí alebo nepatrí.

Prvok x patrí do množiny A zapisujeme: x $\in$ A, prvok x nepatrí do množiny A zapisujeme: x $\notin$ A, označenie: množiny: A, B, R ... prvky: a, b, 1, 2, ...

Môžeme ich rozdeliť podľa počtu prvkov na **konečné, nekonečné a prázdne**. Môžeme ich určiť **vymenovaním prvkov, určením charakteristickej vlastnosti**.

Prvky množiny – objekty množiny

Podmnožina – Majme dve množiny A a B. Ak je každý prvok množiny A tiež prvkom množiny B, pričom nie každý prvok množiny B je tiež prvkom množiny A, potom hovoríme, že množina A je podmnožinou B a označujeme A $\subset$ B.

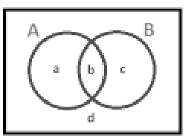
Nadmnožina – Množina *A* je časťou (podmnožinou) množiny *B* (A $\subset$ B), ak každý prvok množiny *A* je súčasne prvkom množiny *B*.Uvedený vzťah sa dá vyjadriť aj pomocou pojmu **nadmnožina**. Množina *B* je nadmnožinou množiny *A* (B$\supset$A), ak každý prvok množiny *A* je súčasne prvkom množiny *B.*

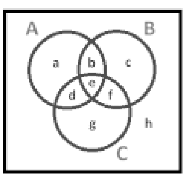
Prienik – A $\cap$ B – Prienik množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A **a súčastne** do množiny B.

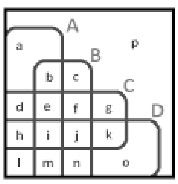
Zjednotenie – A $\cup$ B – Zjednotenie množín A,B je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do množiny A, alebo do množiny B.

Rozdiel množín – A - B – Rozdiel množín A,B (v tomto poradí) je množina, ktorá obsahuje prvky patriace do A a súčastne nepatriace do B.

Vennove diagramy – zaviedol ich John Venn, sú to jednoduché grafické objekty na znázornenie množín.







Disjunktné množiny – Ak je prienikom dvoch množín A,B prázdna množina, tak sú tieto množiny disjunktné.

Prázdna množina – $\varnothing$ – množina, ktorá neobsahuje žiaden prvok.

Doplnok množiny – A'_B – Doplnok množiny A vzhľadom na množinu B je rozdiel množín B – A ak platí, že $A \subset B$.

Konečná a nekonečná množina – Konečná množina obsahuje konečný počet prvkov – napr. všetky dvojciferné párne čísla. **Nekonečná množina** obsahuje nekonečný počet prvkov – napr. všetky párne čísla.

Počet prvkov množiny – je konečný, nekonečný alebo prázdny.

Vlastnosti a vzťahy:

- Implikácia (výrok) $A \Rightarrow B$ je ekvivalentná s implikáciou (výrokom) $B' \Rightarrow A'$ (výrok z A vyplýva B platí práve vtedy, keď platí výrok z negácie B vyplýva negácia A)
- výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$
- negácia konjunkcie (disjunkcie) je disjunkcia (konjunkcia) negácií
- implikácia $A \Rightarrow B$ je nepravdivá práve vtedy, keď je pravdivý výrok A a nepravdivý výrok B
- pravdivostná hodnota zložených výrokov a negácie („tabuľka pravdivostných hodnôt")
- negácia výroku $\forall\ x \in M$ platí V(x) je $\exists\ x \in M$, pre ktoré neplatí V(x)
- negácia výroku $\exists x \in M$, pre ktoré platí V(x) je $\forall x \in M$ neplatí V(x)
- $A = B$ práve vtedy, keď súčasne platí $A \subset B$, $B \subset A$
- pre počty prvkov zjednotenia dvoch množín platí $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- $(A \cap B)' = A' \cup B'$, $(A \cup B)' = A' \cap B'$