

Zápočet z teoretickej mechaniky č. 1

RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.

Zimný Semester 2017

Predmet Teoretická Mechanika

Termín zápočtu: 07.11.17, 08.50 v miestnosti P1

1 Vektorové operácie [5B]

Sú zadané tri vektory v explicitnom tvare

$$\mathbf{a} = (1, 2, -1), \quad \mathbf{b} = (3, -1, 1), \quad \mathbf{c} = (-2, 8, 14).$$

Postupne vypočítajte

a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$

d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

b) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

c) $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

e) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

2 Matematické kyvadlo [4B]

Na obrázku vidíme hmotný bod s hmotnosťou m , ktorý je nehmotným lankom pripevnený k pevnej stene. Po uvoľnení z počiatočnej polohy, označenej plným čiernym krúžkom začne hmotný bod pod vplyvom homogénneho gravitačného poľa vykonávať periodický pohyb. Ak polohu hmotného bodu popíšeme naznačeným uhlom θ , určte ktorá z nasledujúcich možností udáva veľkosť celkového zrýchlenia

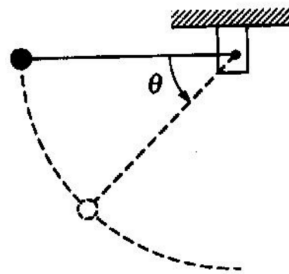
a) $g \sin \theta$

b) $2g \cos \theta$

c) $2g \sin \theta$

d) $g\sqrt{3 \cos^2 \theta + 1}$

e) $g\sqrt{3 \sin^2 \theta + 1}$

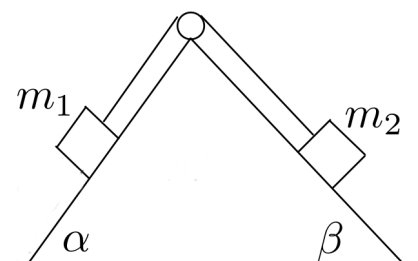


- a) Nájdite diferenciálnu rovnicu pre uhol θ .
b) Identifikujte zákon zachovania.
c) Váš výber jednej z možností **zdôvodnite** výpočtom.

3 Rovnováha na nehybnom kline [5B]

Na nehybnom kline sa nachádzajú v pokoji dve telesá o hmotnostiach m_1 a m_2 . Geometrické zobrazenie nájdete na obrázku vpravo. Na sústavu pôsobí vo vertikálnom smere homogénne gravitačné pole.

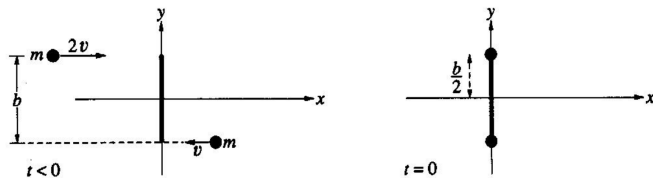
- a) Určte celkový počet stupňov voľnosti pre dve telesá a počet väzbových podmienok pre tento systém. Tie zapíšete v explicitnom tvare v kartézskych súradniciach a ďalej v nich pracujte. Vhodne pritom zvolte počiatok súradnicovej sústavy.
b) Odvoďte rovnice pre virtuálne posunutia telies vyplývajúcich z väzbových podmienok.
c) Zapíšete rovnicu odpovedajúcu princípu virtuálnych prác.
d) Určte podmienku rovnováhy v danom systéme a Vami získaný výsledok fyzikálne interpretujte. Použite na to známy Newtonov formalizmus.



4 Incident na zimáku [4B]

Po dlhom čase ste sa vybrali na zimný štadión, kde ste z ničoho nič stretli svojho fyzikálneho spolužiaka. Keďže ste v hĺbky duše stále neboli úplne stotožnený s momentom hybnosti, rozhodli ste sa overiť jeho zachovanie experimentom. Predpokladajte, že spolu so spolužiakom ste aproximatívni ako hmotné body s rovnakou hmotnosťou m . V strede ľadovej plochy ste si položili hokejku o celkovej dĺžke b .

V istom okamihu sa obaja začnete pohybovať smerom k hokejke rôznymi rýchlosťami ako je naznačené na obrázku. Predpokladajte, že v časovom okamihu $t = 0$ dorazíte naraz k hokejke a pevne ju uchopíte za opačné konce. Ktorý z nasledujúcich vzorcov pre $t > 0$ opisuje pohyb toho z Vás, ktorého počiatočná y -nová súradnica bola $+b/2$?

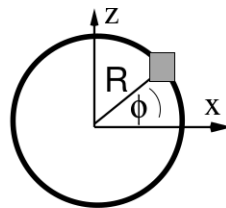


- a) $x = 2vt, y = b/2$ d) $x = vt + 0.5b \sin(6vt/b), y = 0.5b \cos(6vt/b)$
 b) $x = vt + 0.5b \sin(3vt/b), y = 0.5b \cos(3vt/b)$
 c) $x = 0.5vt + 0.5b \sin(3vt/b), y = 0.5b \cos(3vt/b)$ e) $x = 0.5vt + 0.5b \sin(6vt/b), y = 0.5b \cos(6vt/b)$

Váš výber **zdôvodnite** výpočtom.

5 HB na slučke [4B]

Uvažujte hmotný bod s hmotnosťou m , ktorý sa môže pohybovať v trojrozmernom priestore pozdĺž kružnice o polomere R , ktorá sa nachádza v rovine $y = 0$. Prítom je HB vystavený vplyvu gravitačnej sily, ktorá má záporný smer osi z .



- a) Nájdite všetky väzbové podmienky a vypočítajte ich infinitezimálny tvar. Viete ich geometricky interpretovať?
 b) Nájdite Lagrangeove rovnice 1. druhu a vypočítajte všeobecný tvar väzbovej sily \mathbf{R} .
 c) Nájdite väzbovú silu ako funkciu z a rýchlosti v .
 d) Zaveďte vhodnú zovšeobecnenú súradnicu. Za predpokladu, že v čase $t = 0$ mal HB polohu $(0, 0, R)$ určte hodnotu rýchlosti ako funkciu zvolenej súradnice. Nájdite potom bod na kružnici, kde má väzbová sila maximálnu hodnotu.

6 Dva kotúče [3B]

Uvažujte dva hmotné body o hmotnostiach m_1 a m_2 . Viete, že hmotný bod m_1 je viazaný na kružnicu o polomere a ležiacej v rovine $z = 0$ so stredom v $x = y = 0$. Ďalej hmotný bod m_2 je viazaný na kružnicu o polomere b ležiacej v rovine $z = c$ so stredom v $x = y = 0$. Tieto dva hmotné body sú spojené nehmotnou pružinou s tuhosťou k .

- a) Schématicky znázornite zadaný fyzikálny systém.
 b) Nájdite celkový počet stupňov voľnosti voľného aj viazaného systému. Vázbové podmienky uďte v explicitnom tvare.
 c) Zapište Lagrangeove rovnice prvého druhu a navrhните vhodné zovšeobecnené súradnice, ktoré by mohli uľahčiť analýzu problému.