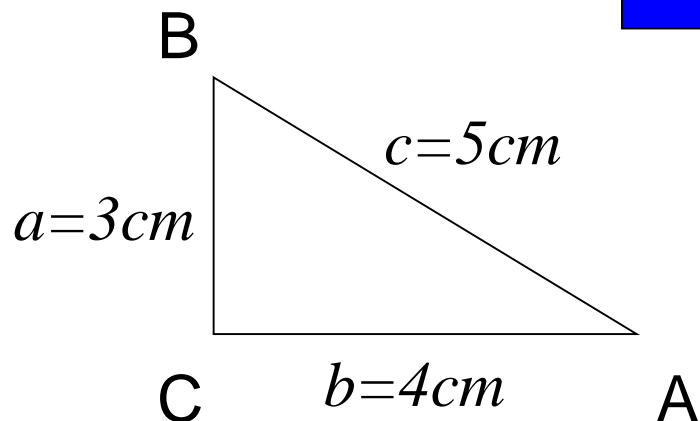


# PODOBNOST TROJUHOLNÍKOV

# Podobnosť geometrických útvarov

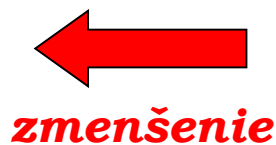
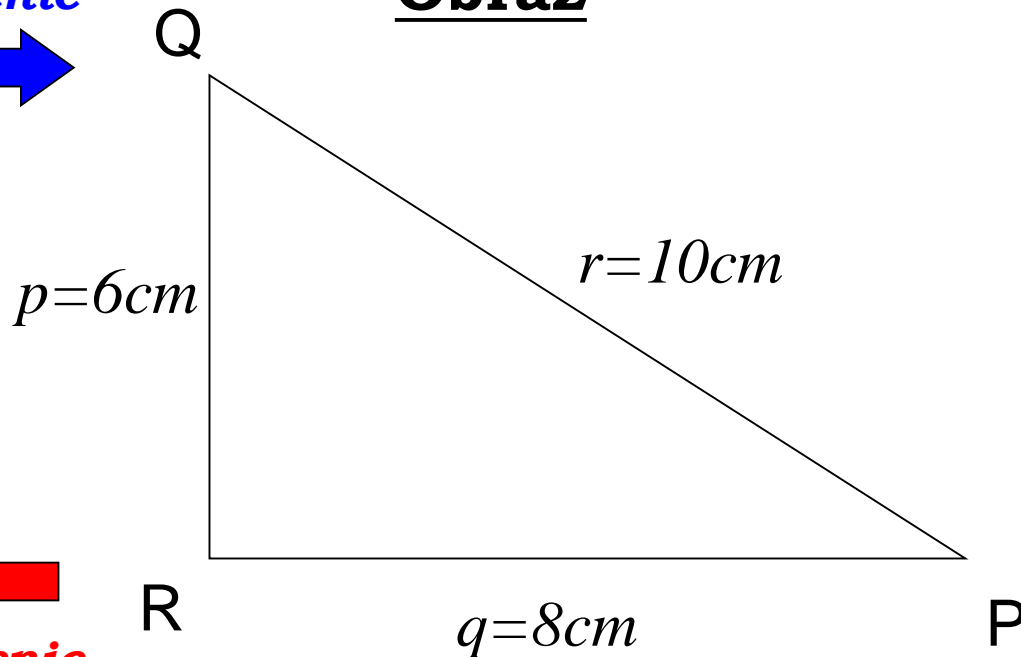
**Vzor**



*zväčšenie*



**Obraz**



*zmenšenie*

**Porovnávame strany:**

**najdlhšiu ( $c$ ) z  $\triangle ABC$  s najdlhšou ( $r$ ) z  $\triangle PQR$**

$$k = \frac{10}{5} = 2$$

**strednú ( $b$ ) z  $\triangle ABC$  so strednou ( $q$ ) z  $\triangle PQR$**

$$k = \frac{8}{4} = 2$$

**najkratšiu ( $a$ ) z  $\triangle ABC$  s najkratšou ( $p$ ) z  $\triangle PQR$**

$$k = \frac{6}{3} = 2$$

# Vlastnosti podobných útvarov

Podobných zobrazení môžeme definovať v rovine nekonečne veľa.

**Pre každé podobné zobrazenie platí :**

- Každá podobnosť je prosté zobrazenie
- Inverzným zobrazením k podobnému zobrazeniu  $P$  s koeficientom podobnosti  $k$  je podobné zobrazenie  $P^{-1}$  s koeficientom podobnosti  $k^{-1}$ .
- V každom podobnom zobrazení v rovine je obrazom úsečky je úsečka, obrazom priamky je priamka, obrazom kružnice je kružnica, obrazom pravidelného  $n$ -uholníka je pravidelný  $n$ -uholník atď.
- V každom podobnom zobrazení v rovine je obrazom uhla je uhol s ním zhodný.
- Zložením ľubovoľných dvoch podobností  $P_1$  a  $P_2$  s koeficientmi  $k_1$  a  $k_2$  je opäť podobnosť s koeficientom  $k = k_1 \cdot k_2$ .
- Každé zhodné zobrazenie v rovine je zároveň podobné zobrazenie s koeficientom podobnosti  $k = 1$ .

**Každá strana musí byť rovnako krát  
zväčšená (zmenšená).**

**k – koeficient podobnosti**

$$k = \frac{\textit{obraz}}{\textit{vzor}}$$

**Podobnosť je zväčšenie alebo zmenšenie.**

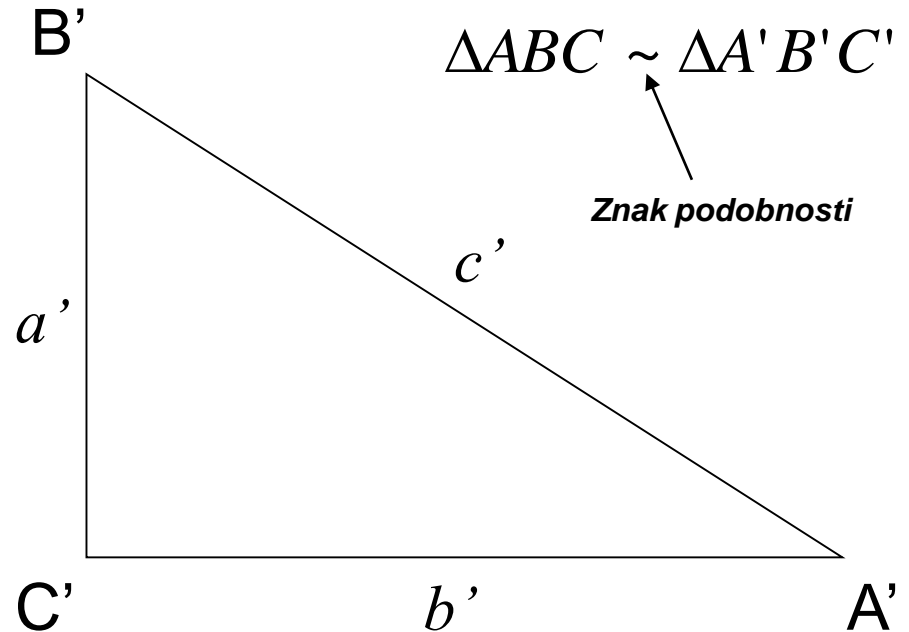
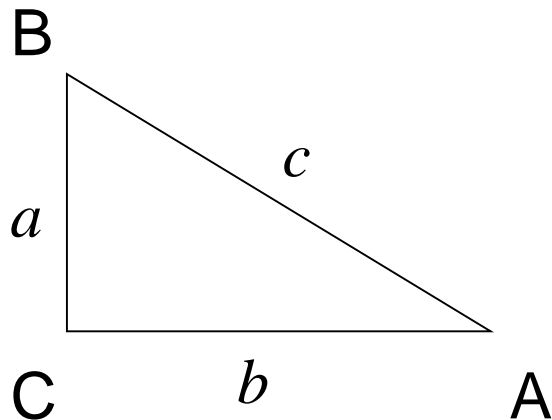
**Ak  $k > 1$ , potom ide o zväčšenie.**

**Ak  $k < 1$ , potom ide o zmenšenie.**

**Ak  $k = 1$ , potom ide o zhodnosť.**

# Definícia

## Podobnosti trojuholníkov



**Dva trojuholníky sa podobné, ak majú rovnaký pomer dĺžok odpovedajúcich si strán a zhodné odpovedajúce si uhly.**

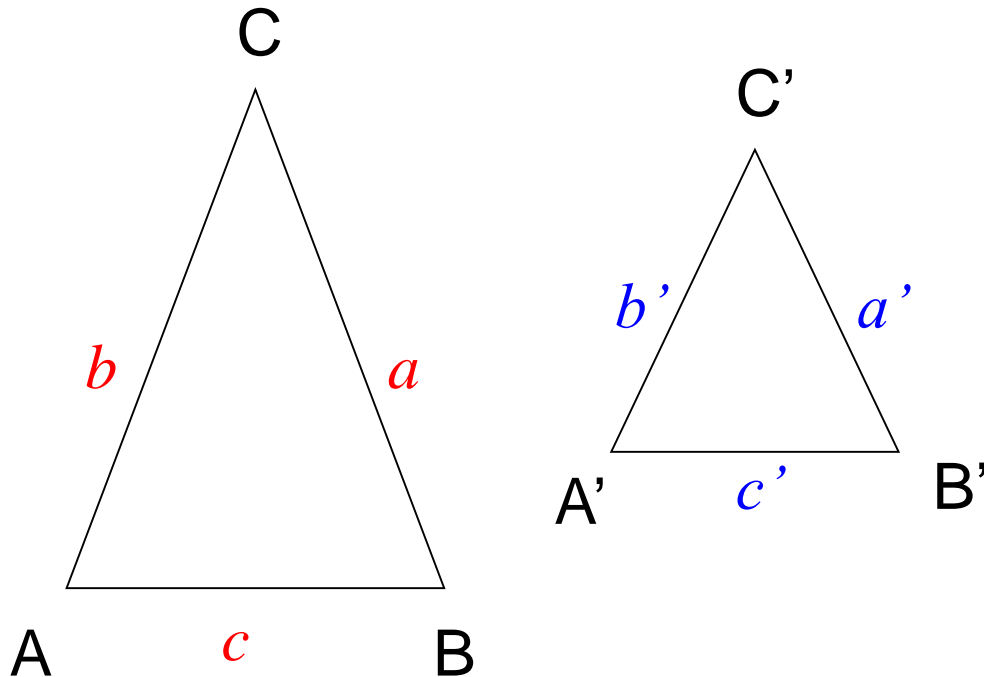
$$k = \frac{c'}{c} = \frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$$

$$\alpha \cong \alpha' \quad \beta \cong \beta' \quad \gamma \cong \gamma'$$

*Znak zhodnosti*

## VETA (sss)

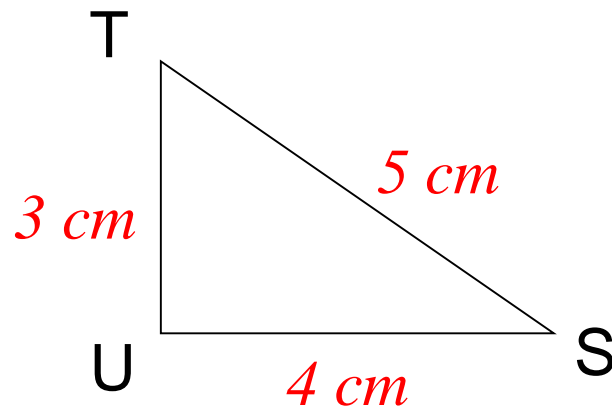
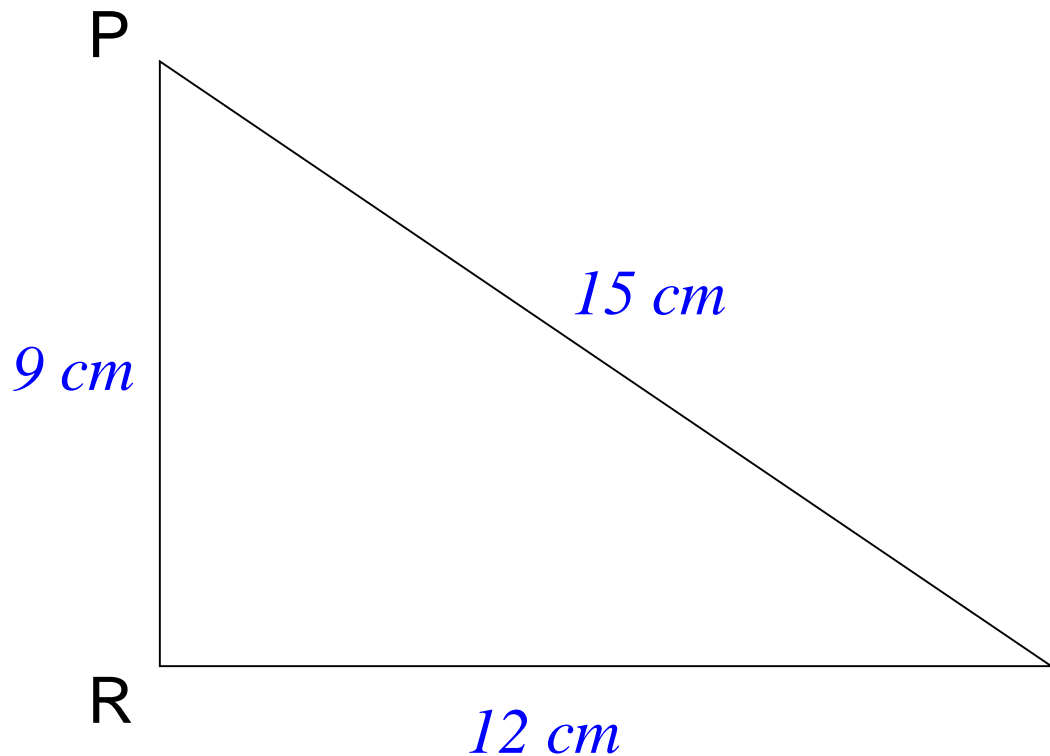
Dva trojuholníky sú podobné, ak pomery dĺžok každých dvoch odpovedajúcich si strán sa rovnajú.



$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|C'A'|}{|CA|}$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

# Príklad na vetu (sss)



$$\triangle PQR \sim \triangle TSU$$

(sss)

$$k = \frac{1}{3}$$

$$\frac{u}{r} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

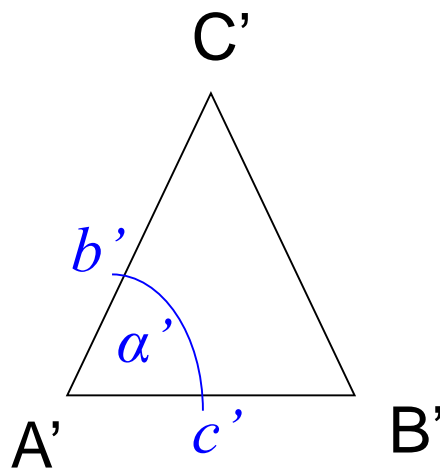
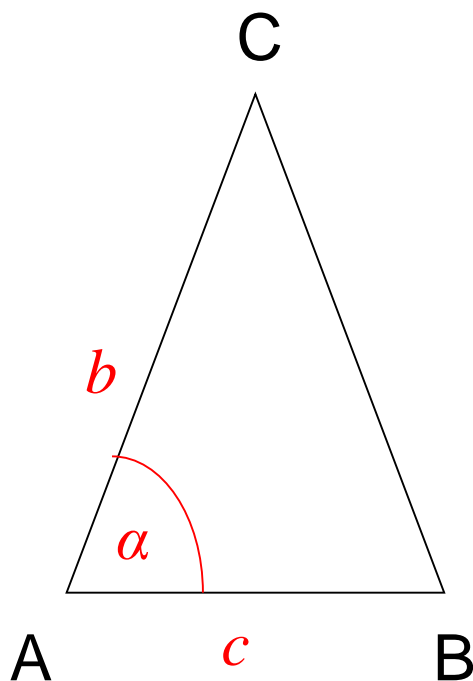
$$\frac{t}{p} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{s}{q} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

**Poznámka:** Koeficienty musia byť všetky tri rovnaké. Ak by boli len dva rovnaké, tak by trojuholníky neboli podobné.

## VETA (sus)

Každé dva trojuholníky, ktoré majú ten istý pomer dĺžok dvoch dvojíc odpovedajúcich si strán a zhodujú sa v uhle nimi určenom sú podobné.



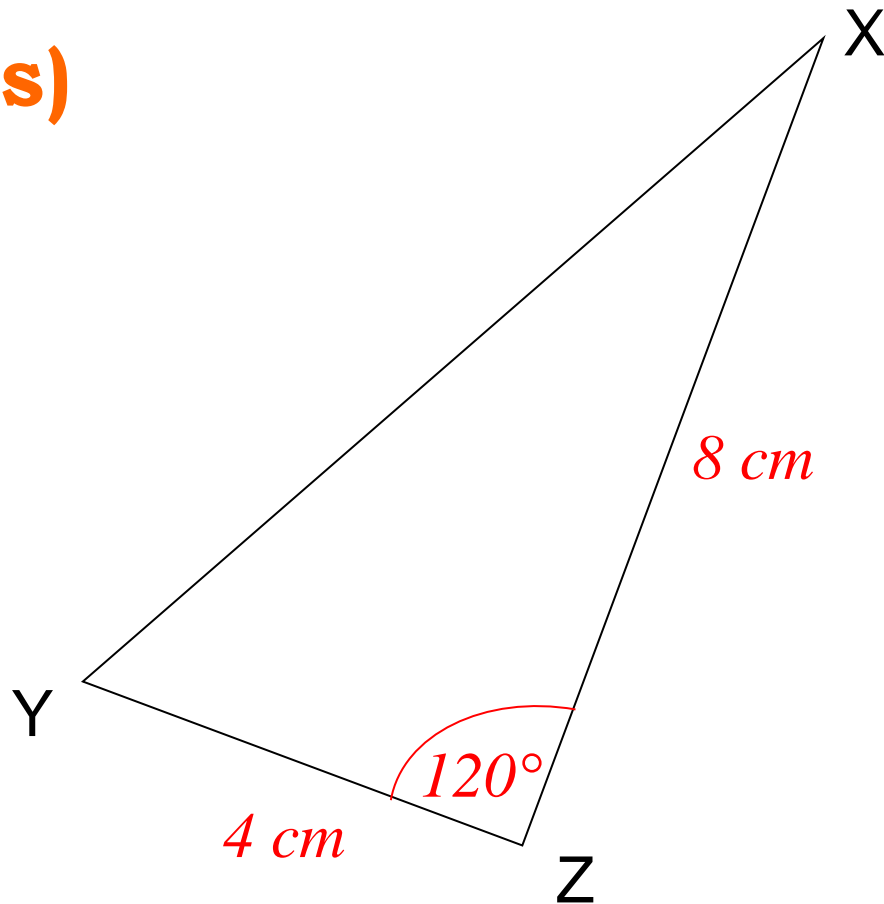
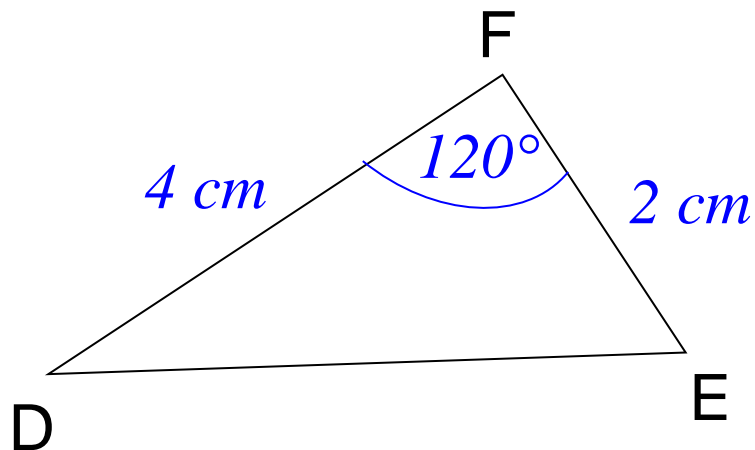
$$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|}$$

$$\angle BAC \cong \angle B'A'C'$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$



# Príklad na vetu (sus)



$$\frac{y}{e} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\frac{x}{d} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\gamma = \gamma'$$
$$120^\circ = 120^\circ$$

$$\triangle DEF \sim \triangle XYZ$$

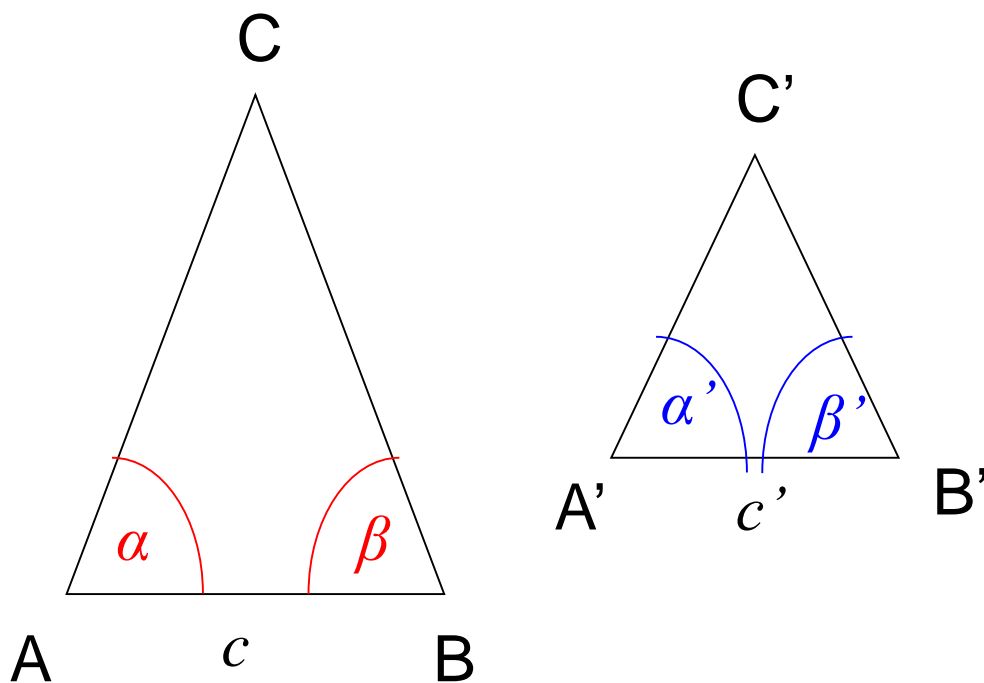
(sus)

$$k = 2$$

**Poznámka:** Koeficienty musia byť obidva rovnaké a uhly rovnaké. Inak by trojuholníky neboli podobné.

## VETA (uu)

Každé dva trojuholníky, ktoré sa zhodujú v dvoch vnútorných uhloch sú podobné.

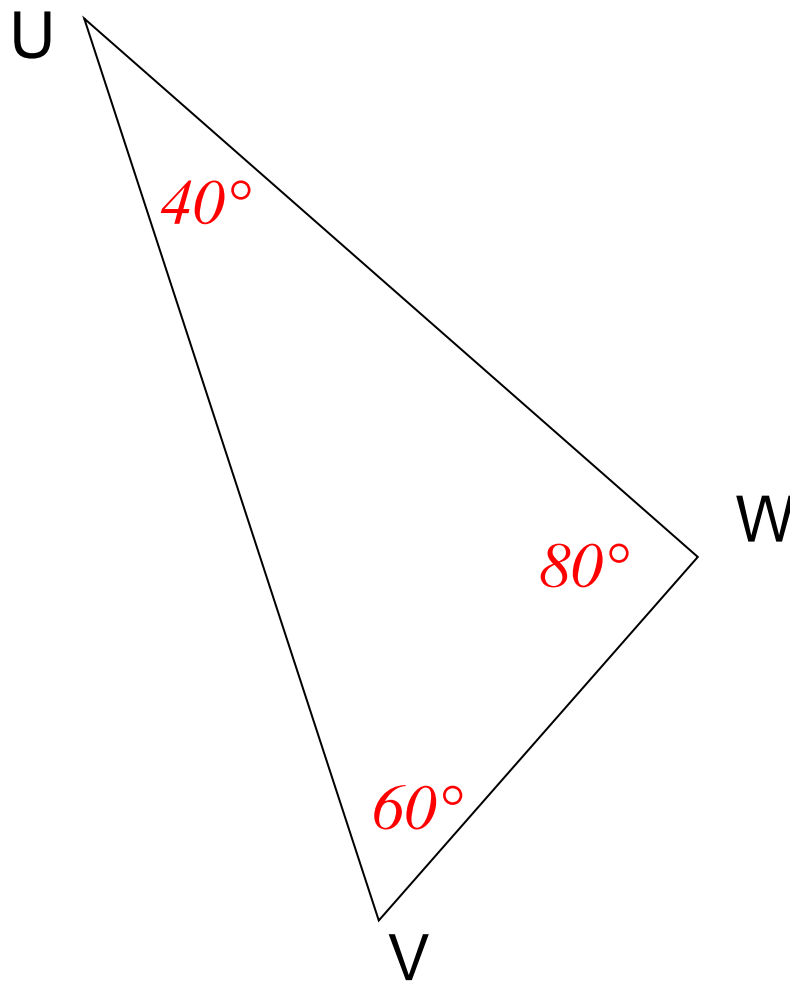
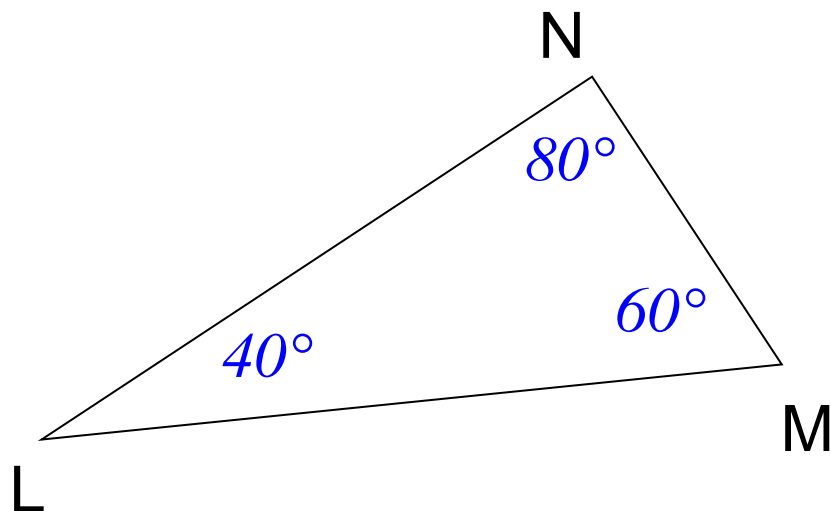


$$\angle BAC \cong \angle B' A' C'$$

$$\angle ABC \cong \angle A' B' C'$$

$$\triangle ABC \sim \triangle A' B' C'$$

# Príklad na vetu (uu)



$$\alpha = \alpha'$$

$$40^\circ = 40^\circ$$

$$\beta = \beta'$$

$$60^\circ = 60^\circ$$

$$\gamma = \gamma'$$

$$80^\circ = 80^\circ$$

$$\triangle LMN \sim \triangle UVW$$

(uu)

$$k = ?$$

**Poznámka:** Stačí zistiť dve dvojice uhlov. Ak sú dve dvojice rovnaké, tak potom bude aj tretia dvojica rovnaká. Pri tejto vete nevieme určiť koeficient.

# **Príklady na podobnosť trojuholníkov**

- 1) Zisťovanie, či sú dané trojuholníky podobné.**
- 2) Zväčšovanie alebo zmenšovanie trojuholníka daným koeficientom.**
- 3) Slovné úlohy na podobnosť**

# Príklad 1

Zistite, či trojuholník GHJ so stranami  $g=16\text{cm}$ ,  $h=24\text{cm}$ ,  $j=14\text{cm}$  je podobný s trojuholníkom MNO so stranami  $m=7\text{cm}$ ,  $n=8\text{cm}$ ,  $o=12\text{cm}$ .

---

**najdlhšie strany:**

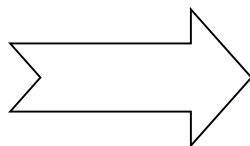
$$k = \frac{o}{h} = \frac{12}{24} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

**stredné strany:**

$$k = \frac{n}{g} = \frac{8}{16} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

**najkratšie strany:**

$$k = \frac{m}{j} = \frac{7}{14} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$



$$\Delta GHK \sim \Delta MNO$$

(sss)

$$k = \frac{1}{2}$$

## Príklad 2

Daný je trojuholník ABC, ktorého strany majú dĺžky  $a=6\text{cm}$ ,  $b=4\text{cm}$ ,  $c=8\text{cm}$ . Vypočítajte dĺžky strán trojuholníka DEF, ktorý je podobný s trojuholníkom ABC, ak koeficient

podobnosti je  $k = \frac{3}{4}$

---

$$a = 6\text{cm}$$

$$d = k \cdot a = \frac{3}{4} \cdot 6 = \frac{18}{4} = \underline{\underline{4,5\text{cm}}}$$

$$b = 4\text{cm} \quad k = \frac{3}{4}$$

$$e = k \cdot b = \frac{3}{4} \cdot 4 = \frac{12}{4} = \underline{\underline{3\text{cm}}}$$

$$c = 8\text{cm}$$

$$f = k \cdot c = \frac{3}{4} \cdot 8 = \frac{24}{4} = \underline{\underline{6\text{cm}}}$$

## Príklad 3

Daný je trojuholník PQR, ktorého strany majú dĺžky  $p=3\text{cm}$ ,  $q=4\text{cm}$ ,  $r=5\text{cm}$ . Vypočítajte dĺžky strán, obvod a obsah trojuholníka STU, ktorý je podobný s trojuholníkom PQR, ak koeficient podobnosti je  $k=3$ .

$$p = 3\text{cm}$$

$$q = 4\text{cm}$$

$$r = 5\text{cm}$$

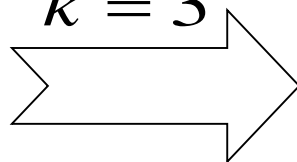
$$o = 3 + 4 + 5$$

$$o = 12\text{cm}$$

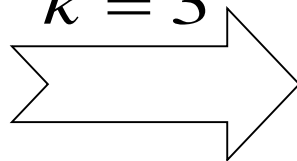
$$S = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$S = 6\text{cm}^{(2)}$$

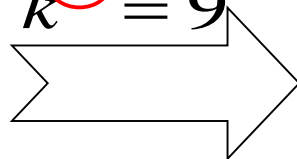
$$k = 3$$



$$k = 3$$



$$k^{(2)} = 9$$



$$s = 3 \cdot 3 = 9\text{cm}$$

$$t = 3 \cdot 4 = 12\text{cm}$$

$$u = 3 \cdot 5 = 15\text{cm}$$

$$o = 9 + 12 + 15$$

$$o = 36\text{cm}$$

$$S = \frac{9 \cdot 12}{2}$$

$$S = 36\text{cm}^{(2)}$$

## Podobnosť obvodov trojuholníkov

$$o' = k \cdot o$$

*o* – obvod vzoru

*o'* – obvod obrazu

## Podobnosť obsahov trojuholníkov

$$S' = k^2 \cdot S$$

*S* – obsah vzoru

*S'* – obsah obrazu



## Príklad 4

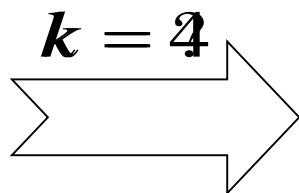
Strany trojuholníka ABC majú veľkosť 6 m, 7 m, 8 m. Akú veľkosť majú strany trojuholníka A'B'C' podobného s trojuholníkom ABC, keď obvod trojuholníka A'B'C' je 84 m.

---

$$a = 6m$$

$$b = 7m$$

$$c = 8m$$



$$a' = 4 \cdot 6 = \underline{\underline{24m}}$$

$$b' = 4 \cdot 7 = \underline{\underline{28m}}$$

$$c' = 4 \cdot 8 = \underline{\underline{32m}}$$

---

$$o = a + b + c$$

$$o = 6 + 7 + 8$$

$$o = 21m$$

---

$$o' = 84m$$

$$o' = k \cdot o$$

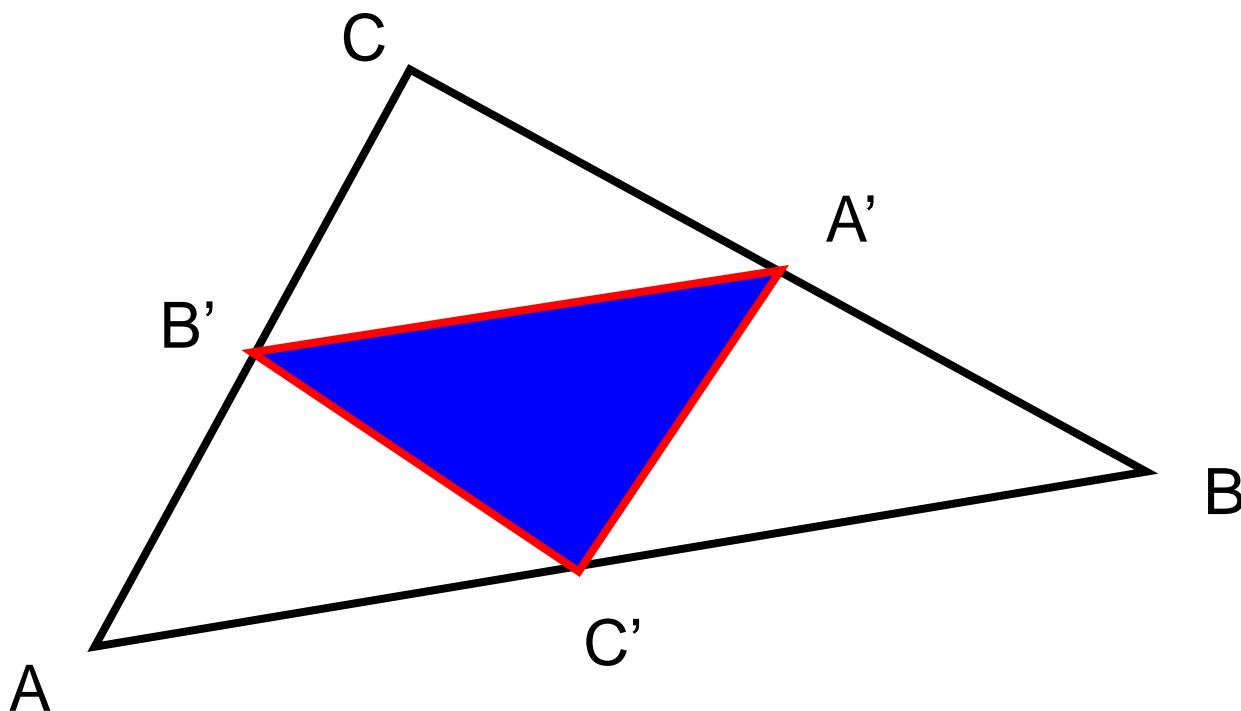
$$84 = k \cdot 21$$

$$k = 84 : 21$$

$$k = 4$$

## Príklad 5

Vypočítajte obvod a obsah trojuholníka, ak trojuholník vzniknutý zo stredných priečok tohto trojuholníka má obvod 13cm a obsah 10 cm<sup>2</sup>.



$$o = 13 \text{ cm}$$
$$S = 10 \text{ cm}^2$$

$$o' = k \cdot o$$

$$o' = 2 \cdot 13$$

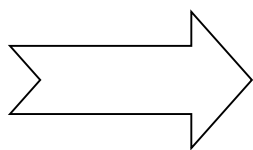
$$\underline{\underline{o' = 26 \text{ cm}}}$$

$$S' = k^2 \cdot S$$

$$S' = 2^2 \cdot 10$$

$$\underline{\underline{S' = 40 \text{ cm}^2}}$$

stredná priečka  
má polovičnú dĺžku  
z protíľahlej strany

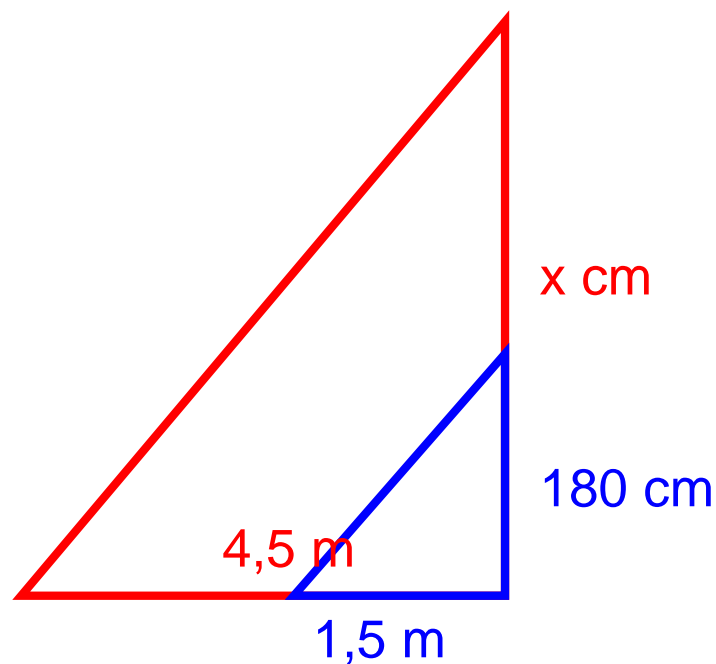
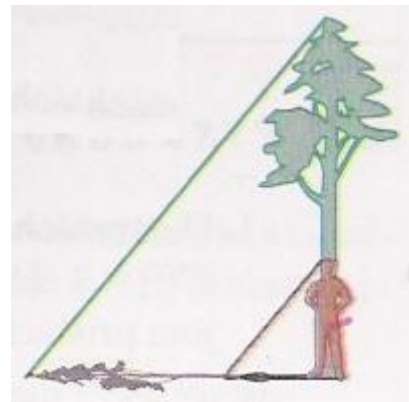


$$\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$$

$$k = 2$$

## Príklad 6

Pod stromom stojí chlapec a pozoruje svoj tieň a tieň stromu. Chlapec je vysoký 180 cm a jeho tieň má dĺžku 1,5 m. Tieň stromu má dĺžku 4,5 m. Aký vysoký je strom?



Podľa vety (uu) sú trojuholníky podobné

$$k = \frac{4,5}{1,5} = 3$$

$$x = 3 \cdot 180$$

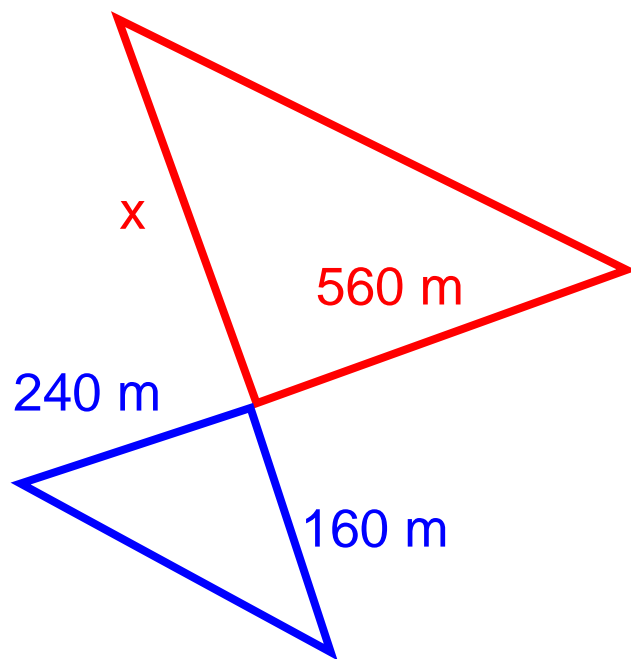
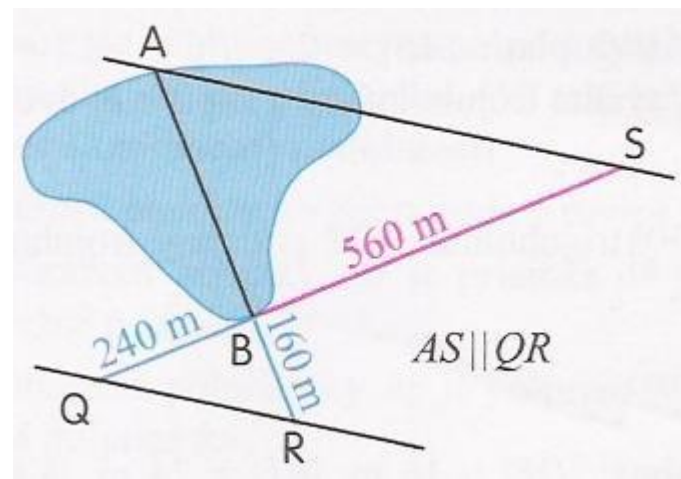
$$x = 540 \text{ cm}$$

$$\underline{\underline{x = 5,4 \text{ m}}}$$

**Strom je vysoký 5,4 m.**

## Príklad 7

Na obrázku je znázornený rybník a na jeho brehu sú vyznačené dva body A, B. Vypočítajte vzdialenosť bodov A, B z údajov vyznačených na obrázku.



Podľa vety (uu) sú trojuholníky podobné

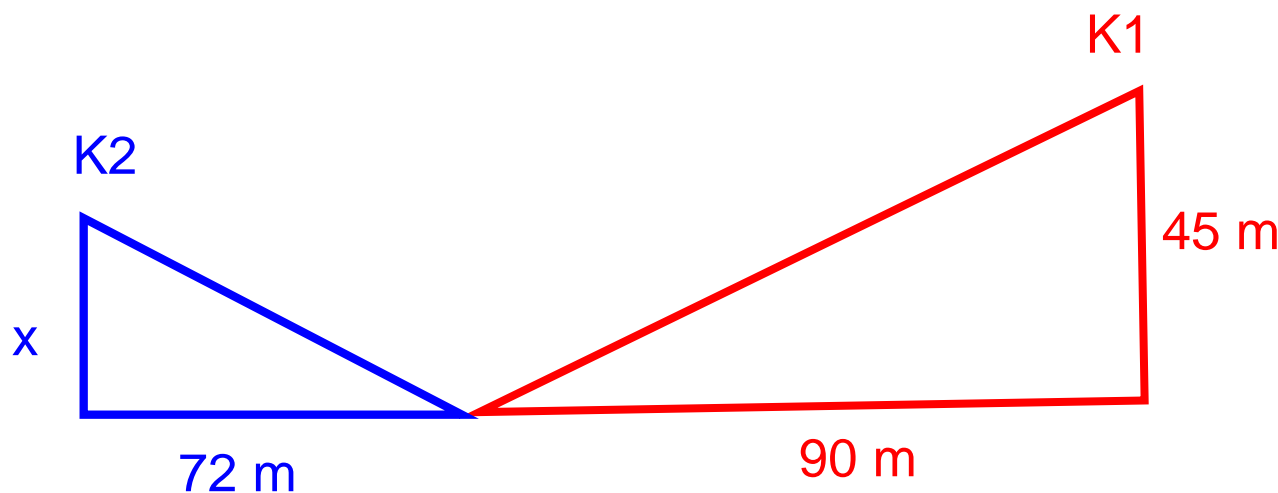
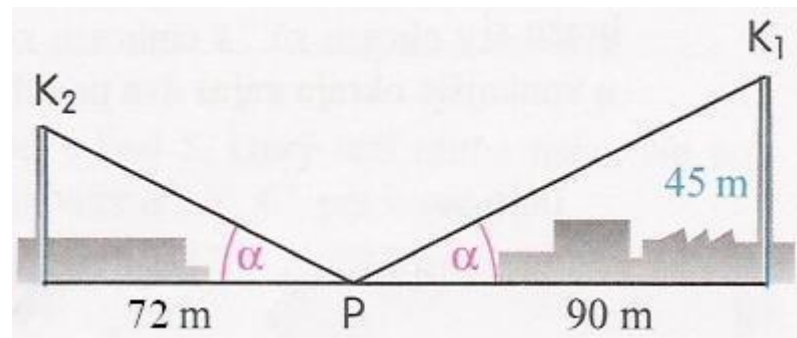
$$k = \frac{560}{240} = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3} \cdot 160 = \frac{1120}{3} = \underline{\underline{373,\bar{3}m}}$$

Vzdialenosť medzi bodmi A, B je približne 373 m.

## Príklad 8

Pozorovateľ vidí dva komíny K1, K2 v rovnakom zornom uhle  $\alpha$ . Od komína K1 je vzdialený 90 m a od komína K2 72 m. Komín K1 má výšku 45 m. Akú výšku má komín K2?



$$k = \frac{90}{72} = 1,25$$

$$x \cdot 1,25 = 45$$

$$x = 45 : 1,25$$

$$\underline{\underline{x = 36m}}$$

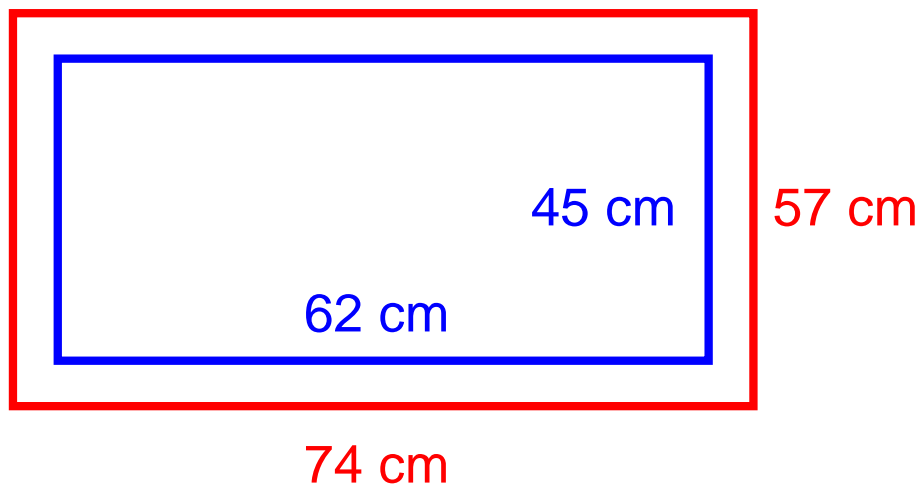
Podľa vety (uu) sú  
trojuholníky podobné

**Komín K2 je vysoký 34 m.**

## Príklad 9

Rám obrazu je zhotovený z lišty širokej 6 cm. Rozmery obrazu sú 74 cm a 57 cm. Sú vnútorné a vonkajšie okraje rámu dva podobné obdĺžniky?

---



$$k_a = \frac{74}{62} = \frac{37}{31} \doteq 1,19$$

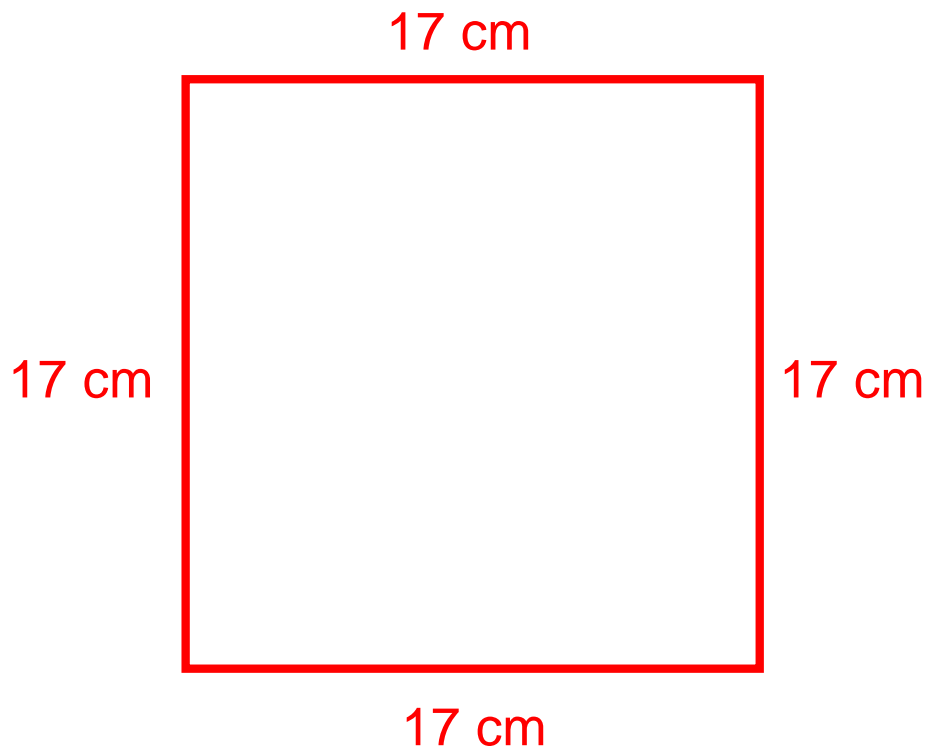
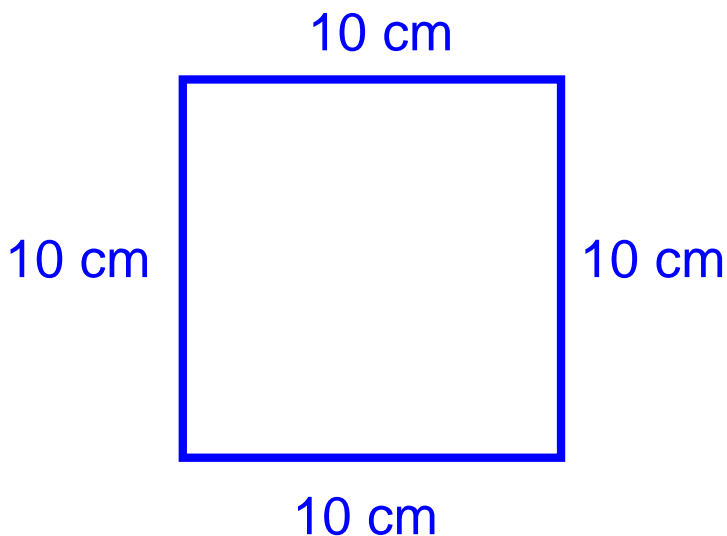
$$k_b = \frac{57}{45} = \frac{19}{15} \doteq 1,27$$

**Vnútorné a vonkajšie okraje rámu nie sú dva podobné obdĺžniky.**

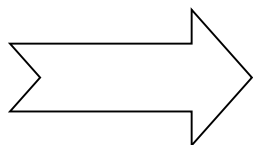
## Príklad 10

Je štvorec so stranou dlhou 10 cm podobný so štvorcom so stranou dlhou 17 cm ?

---

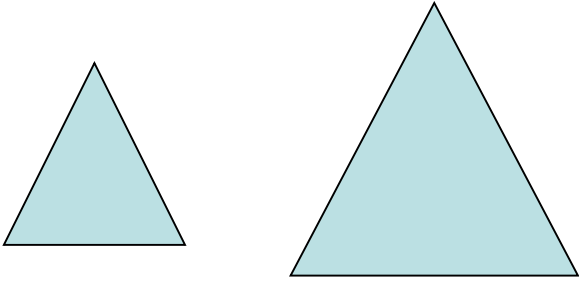


$$k = \frac{17}{10} = 1,7$$

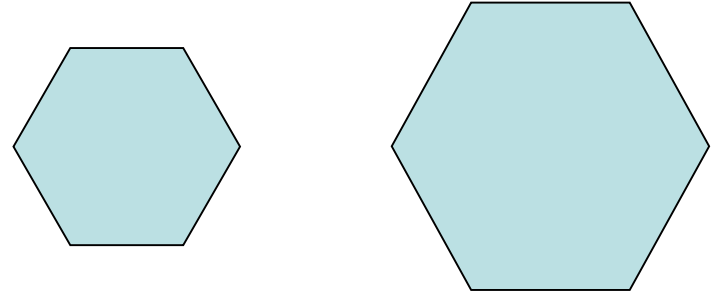


**Geometrické útvary, ktoré sú dané jedným údajom sú vždy podobné.**

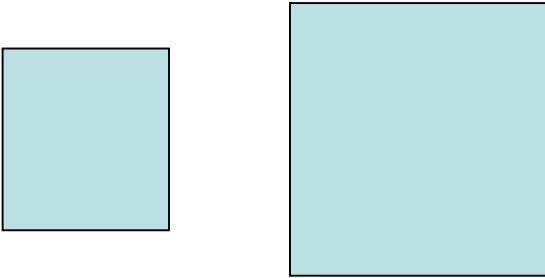
# Podobné geometrické útvary sú každé dva:



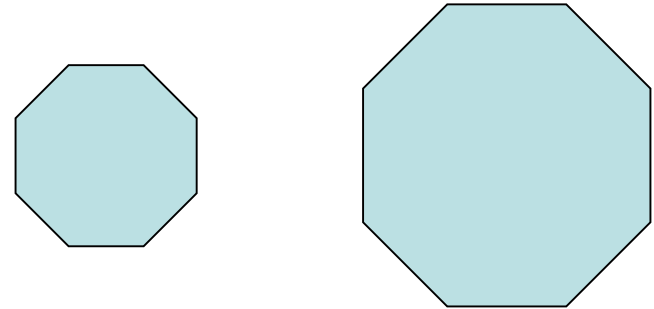
**Rovnostranné trojuholníky**



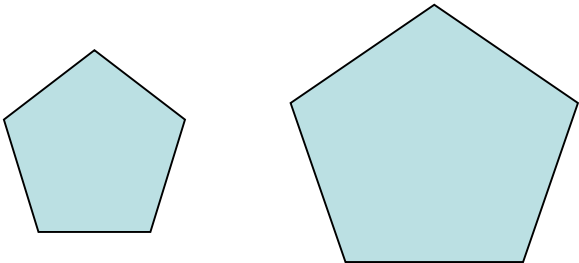
**Pravidelné šesťuholníky**



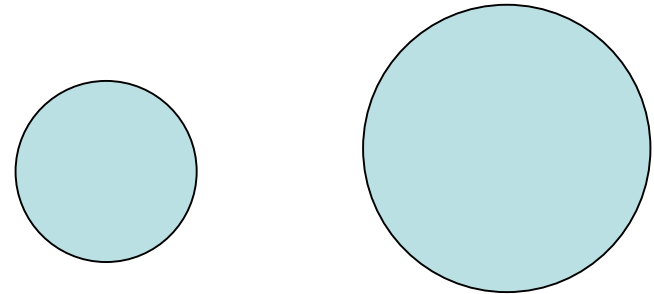
**Štvorce**



**Pravidelné n-uholníky**



**Pravidelné päťuholníky**



**Kruhy**



# Zväčšenie geometrických útvarov s koeficientom $k=2$ na štvorcovej sieti

