Mocniny a odmocniny

Mocniny s prirodzeným exponentom

Definícia: Zápis a^n (čítame „a na n-tú“), kde $a \in$ **R**, $n \in$ **N**, sa nazýva ***n -tá mocnina čísla a*** a platí: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ činiteľov}}$, pričom $a^1 = a$

$$a^n = \underbrace{a.a.a.a.a.........a}_{n}$$

Číslo a sa nazýva ***základ*** (mocnenec) mocniny, číslo n sa nazýva ***exponent*** (mocniteľ) mocniny.

<u>*Príklady:*</u> $2^1 = 2$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

POZOR!!! $a^n \neq a \cdot n$, **t.j.** $3^2 \neq 3 \cdot 2$ **ani** $2 \cdot 3$**!!!**

<u>Pravidlá pre počítanie s mocninami:</u>

a) $\forall n \in \mathbf{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$
b) $\forall n \in \mathbf{N}: a = 0 \Rightarrow a^n = 0$
c) $\forall n \in \mathbf{N}$, n **je párne:** $a < 0 \Rightarrow a^n > 0$
d) $\forall n \in \mathbf{N}$, n **je nepárne:** $a < 0 \Rightarrow a^n < 0$
e) $\forall n \in \mathbf{N}: 1^n = 1$
f) $\forall r, s \in \mathbf{N}$, $\forall a, b \in \mathbf{R}$: $\quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

D1: Podľa definície $a^r = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $a^s = a \cdot a \ldots \cdot a$. Na pravej strane dostávame súčin $r+s$ čísel a, čo je spätne podľa definície a^{r+s}

$$a^r . a^s = \underbrace{a.a.a...a}_{r}\underbrace{.a.a.a....a}_{s} = \underbrace{a.a.a.a....a}_{r+s} = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad a \neq 0, \ r > s$$

D2: Podľa definície $a^r = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $a^s = a \cdot a \ldots \cdot a$. Na pravej strane dostávame zlomok, kde v čitateli je súčin r čísel a v menovateli súčin s čísel a, čo po vykrátení znamená, že zostane práve súčin ***n-m*** čísel a a to je spätne podľa definície a^{r-s}

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a.a.a...a}^{r}}{\underbrace{a.a....a}_{s}} = a^r : a^s = \underbrace{a.a.a..a}_{r} : \underbrace{a.a...a}_{s} = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r.s}$$

D3: Podľa definície $a^r = a \cdot a \ldots \cdot a$ a $c^s = c \cdot c \ldots \cdot c$. Na pravej strane dostávame súčin s čísel a^r , čo je opäť súčin r čísel a, teda dohromady práve súčin $r \cdot s$ čísel a, čo je spätne podľa definície $a^{r \cdot s}$

$$\left(a^r\right)^s = \underbrace{a^r.a^r.a^r\ldots.a^r}_{s} = \underbrace{\underbrace{(a.a\ldots a)}_{r}\ldots\underbrace{(a.a\ldots a)}_{r}}_{s} = \underbrace{a.a.a\ldots a}_{r.s} = a^{r.s}$$

$$\boldsymbol{a^r \cdot b^r = (ab)^r}$$

D4: Podľa definície $\boldsymbol{a^r = a \cdot a \ldots \cdot a}$ a $\boldsymbol{b^r = b \cdot b \ldots \cdot b}$. Na pravej strane dostávame súčin *r* čísel *a* krát súčin *r* čísel *b*. Platí komutatívnosť, takže môžeme súčin $a \cdot a \ldots \cdot a \cdot b \cdot b \ldots \cdot b$ preusporiadať tak, že dostaneme $a \cdot b \cdot a \cdot b \ldots \cdot a \cdot b$, kde dvojíc $a \cdot b$ je práve *r*, čo je spätne podľa definície $\boldsymbol{(a \cdot b)^r}$

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

$$(a.b)^n = \underbrace{(a.b).(a.b)\ldots.(a.b)}_{n} = \underbrace{a.a.a\ldots.a}_{n}.\underbrace{b.b.b\ldots.b}_{n} = a^n.b^n$$

$$\boldsymbol{a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r \quad , \quad b \neq 0}$$

D5: Podľa definície $\boldsymbol{a^r = a \cdot a \ldots \cdot a}$ a $\boldsymbol{b^r = b \cdot b \ldots \cdot b}$. Na pravej strane dostávame súčin *r* čísel *a* vydelených súčin *r* čísel *b*. Pre násobenie zlomkov platí, že násobíme čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom a pretože v čitateli i v menovateli máme len súčiny, tak môžeme zlomok rozdeliť na *n* zlomkov $\frac{a}{b}$, čo je spätne podľa definície $\left(\frac{a}{b}\right)^r$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right).\left(\frac{a}{b}\right)\ldots.\left(\frac{a}{b}\right)}_{n} = \frac{\overbrace{a.a\ldots.a}^{n}}{\underbrace{b.b\ldots.b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad , \quad \boldsymbol{b \neq 0}$$

.

Príklady: $2^3 = 2 . 2 . 2 = 8$ (pravidlo a)
$0^4 = 0$ (pravidlo b)
$(-2)^4 = 16$ (pravidlo c)
$(-2)^3 = -8$ (pravidlo d)
$1^6 = 1$ (pravidlo e)

Príklady na pravidlá f): $2^{\mathbf{3}} . 2^{\mathbf{2}} = 2^{\mathbf{3+2}} = 25$, $2^{\mathbf{10}} : 2^{\mathbf{8}} = 2^{\mathbf{10-8}} = 2^{\mathbf{2}} = 4$
(keby neexistovalo toto pravidlo, museli by sme počítať $2^{10} : 2^8 = 1024 : 256 = 4$)

$(2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 64$
$2^2 \,.\, 5^2 = (2\,.\,5)^2 = 10^2 = 100$
(bez tohto pravidla by sme museli počítať $2^2 \,.\, 5^2 = 4 \,.\, 25 = 100$)

$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2 = 4$
(bez tohto pravidla by sme museli počítať $6^2 : 3^2 = 36 : 9 = 4$).

Mocniny s celočíselným exponentom

Už vieme, že platí $a^r : a^s = a^{r-s}$, napr.: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$
Čo keď ale bude prvý exponent menší než druhý? Potom nám podľa rovnakého pravidla vyjde napr. $2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}$
Keď ale nepoužijeme toto pravidlo, ale napíšeme si podiel v tvare zlomku, ktorý potom vykrátime, dostaneme pre rovnaký príklad:

$$2^3 : 2^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2.2.2}{2.2.2.2.2} = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{2^2}$$

Nakoľko oba postupy sú správne, musia sa rovnať aj výsledky, t.j. platí: $2^{-2} = \dfrac{1}{2^2}$

Podobne môžeme počítať buď $2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$ alebo $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$ odkiaľ dostávame $\mathbf{2^0 = 1}$

Obecne sa definujú mocniny so záporným exponentom takto:

$$\forall\, k \in Z,\ k < 0,\ \forall\, a \in R,\ a \neq 0:\ a^k = \frac{1}{a^{-k}}$$

Pre výpočty s mocninami so záporným exponentom platia rovnaké pravidlá ako pre počítanie s mocninami s prirodzeným exponentom.

Podobne platí: $\forall a \in R,\ a \neq 0:\ a^0 = 1$

Príklady:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}\ ,\quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4\ ,\quad (-0{,}153)^0 = 1$$

Platí: $\forall n \in N,\ \forall a,b \in R - \{0\}:\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

POZOR: **0^0 *nie je definované !***

Mocniny s racionálnym exponentom

Nech $\sqrt[3]{a^6} = b$, t.j. podľa definície odmocniny platí $\boldsymbol{b^3 = a^6}$ alebo $\boldsymbol{b.b.b = a^2.a^2.a^2}$,

t.j. $\boldsymbol{b = a^2}$ alebo $b = a^2 = a^{\frac{2}{1}} = a^{\frac{2.3}{1.3}} = a^{\frac{6}{3}}$

Záver: $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$

Definícia:

$$\forall\, a \in \mathbf{R}^+, \forall\, r \in \mathbf{Z}, \forall\, s \in \mathbf{N}: \quad a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$$

Príklady: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = 2$ alebo $8^{\frac{1}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{3.\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

$\mathbf{243^{0,2}} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$

Úlohy – súhrn:

1) Vypočítajte spamäti:

a) 300^1 b) 0^7 c) 2^5 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

2) Vypočítajte:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 2^7}{2^{10}}$ b) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^5 \cdot 3^2}$ c) $\dfrac{(2^3 \cdot 3^2)^3}{(2 \cdot 3)^5}$

3) Dané výrazy vyjadrite ako mocniny so základom 2 alebo 3 a vypočítajte :

a) $\dfrac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\dfrac{81}{64}\right)^3$ b) $\dfrac{9^5 \cdot 2^7}{27^2 \cdot 96} \cdot \dfrac{36}{6^3}$

4) Vypočítajte:

a) $\dfrac{2(ab)^3}{3a^2b} \cdot \dfrac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$ b) $\dfrac{5a^3b^7}{2ab^6} \cdot \left(\dfrac{2a^2b^3}{ab^2}\right)^3$ c) $\dfrac{2x^5y^4}{(2x^2y)^2} : \left(\dfrac{xy}{2xy^2}\right)^3$

5) Vypočítajte:

a) $2^0, 2^2, -2^2, (-2)^2, \left(\dfrac{2}{3}\right)^3; 0{,}05^2; (-0{,}2)^4$ b) $2^{12} \,.\, 2^8 \,.\, 2^{21}, (2^2)^3 \,.\, (2^3)^2 \,.\, (2^4)^3$

c) $5 \,.\, 0{,}2^2 + (5 \,.\, 0{,}2)^2$

6) Vypočítajte:

a) 2^0, 2^{-2}, -2^{-2}, $(-2)^{-2}$; $0{,}05^{-2}$; $(-0{,}2)^{-4}$ b) $2^8 \,.\, 2^{24} \,.\, 2^{-36}$, $\dfrac{2^{-17}\cdot 2^{12}}{2^{-8}}$, $(2^{-2})^{-3} \,.\, (2^2)^{-3} \,.\, (2^{-4})^{-3}$

c) $-\left(\dfrac{10^{-15}\cdot 10^4}{10^{-13}}\right)^2$ d) $\dfrac{1300^2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-20}}{(2\cdot 10^{-5})^3}$

7) Vypočítajte:

a) $25^{\frac{1}{2}}$ b) $8^{\frac{1}{3}}$ c) $5\cdot 16^{\frac{1}{4}}$ d) $8^{\frac{2}{3}}$ e) $2^{-2}\cdot 64^{-\frac{1}{2}}$ f) $100^{-\frac{1}{2}}$

8) Vypočítajte a uveďte podmienky, pri ktorých majú zmysel výrazy:

a) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{5}}\cdot a^{\frac{3}{2}}$ b) $(x-y)^{\frac{2}{3}}\cdot(y-x)^{\frac{3}{4}}$

c) $\left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{9}}\cdot\left(a^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{3}}:\left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{6}}$ d) $3\cdot a^{\frac{7}{10}}\cdot a^{\frac{2}{5}}\cdot 2a^{\frac{15}{14}}:a^{\frac{9}{28}}$

e) $\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^2-\left(a^{\frac{1}{2}}-1\right)^2$ f) $\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}+\dfrac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$

9) Napíšte pomocou jednej odmocniny:

a) $a^{\frac{1}{2}}$ b) $b^{-\frac{2}{3}}$ c) $7^{-\frac{7}{2}}$ d) $y^{-0{,}13}$

10) Zapíšte ako odmocniny

1.) $3^{0{,}5}$ **,** $5^{0{,}75}$ **,** $0{,}25^{\frac{2}{9}}$ **,** $1{,}75^{-\frac{1}{9}}$ **,** $15^{-\frac{4}{7}}$

2.) $x^{\frac{2}{3}}$ **,** $y^{\frac{6}{11}}$ **,** $x^{-0{,}25}$ **,** $x^{-0{,}8}$ **,** $y^{\frac{17}{6}}$

11) Zapíšte v tvare mocniny s racionálnym exponentom:

1.) $\sqrt{7}$ **,** $\sqrt[3]{9^2}$ **,** $\sqrt[5]{0{,}4^2}$ **,** $\sqrt[5]{0{,}4^{-2}}$ **,** $\sqrt[4]{\left(\dfrac{1}{3}\right)^5}$ **,** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{3^5}}$ **,** $\sqrt[3]{6^{-2}}$

2.) $\sqrt[4]{x}$ **,** $\sqrt[3]{x^2}$ **,** $\sqrt[7]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^3}$ **,** $\sqrt[5]{\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-3}}$ **,** $\sqrt{x^{-3}}$ **,** $\sqrt[6]{x^{-9}}$

12) Upravte:

1.) **a)** $5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}$ **b)** $0{,}5^{\frac{6}{7}}\cdot 0{,}5^{-\frac{5}{14}}$ **c)** $2^{-\frac{2}{15}}\cdot 2^{-\frac{9}{30}}$ **d)** $5^{\frac{2}{3}}:5^{\frac{1}{3}}$ **e)** $11^{-\frac{3}{4}}:11^{-\frac{5}{8}}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2}:\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

2.) **a)** $\left(5^{\frac{3}{7}}\right)^{2}$ **b)** $\left(3^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,25}$ **c)** $\left(0,3^{-\frac{9}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **d)** $\left(2^{-7}\right)^{-\frac{2}{3}}$ **e)** $\left(1,8^{-\frac{4}{7}}\right)^{\frac{8}{5}}$ **f)** $\left(6^{\frac{1}{27}}\right)^{-9}$

3.) **a)** $2^{\frac{3}{10}} \cdot 3^{\frac{3}{10}}$ **b)** $5^{\frac{6}{7}} \cdot 3^{\frac{6}{7}}$ **c)** $2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ **d)** $4^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{6}}$

Odmocniny

Definícia odmocniny:

Ku ***každému nezápornému číslu „a“*** a ***každému prirodzenému číslu „n“ existuje práve jedno nezáporné číslo „b“*** také, že platí: $b^n = a$ a zapisujeme $\sqrt[n]{a} = b$.

Pomenovanie: **a** – základ odmocniny = ***odmocnenec***, **n** – stupeň odmocniny = ***exponent***,
b – hodnota odmocniny = ***odmocniteľ*** .

$$\forall a \in R_0^+, \forall n \in \mathbf{N}, \exists b \in R_0^+ : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

t.j. *n* - tá odmocnina z určitého nezáporného čísla je nezáporné číslo, ktoré keď umocníme na *n* - tú, dostaneme pôvodné číslo.

Príklady:

a) $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$, lebo $4^2 = 16$ (pokiaľ neuvedieme exponent, ide o druhú odmocninu)
b) $\sqrt[3]{8} = 2$, lebo $2^3 = 8$
c) Nech $\sqrt{-9}$ = **x** (x∈R), potom $\mathbf{x^2 = -9}$, t.j. $\mathbf{x \in \varnothing}$ ..... $\sqrt{-9}$ ***neexistuje v R***.
d) Nech $\sqrt{25}$ = **5**, lebo $\mathbf{5^2 = 25}$ a $\sqrt{25}$ = **-5**, lebo $\mathbf{(-5)^2 = 25}$.
Potom platí: **- 5 =** $\sqrt{25}$ **= 5**, t.j. **– 5 = 5 - spor**

Poznámky:
1) V **R** je ***odmocnina definovaná len pre nezáporné čísla*** a ***výsledkom odmocniny je tiež len nezáporné číslo***.
2) Znamienko odmocniny má tiež aj funkciu zátvoriek – ak máme pod odmocninou výraz, obvykle postupujeme tak, že najskôr vypočítame výraz pod odmocninou a až potom odmocníme.

Pravidlá pre počítanie s odmocninami:

b) $\forall n \in \mathbf{N}$: $\sqrt[n]{0} = 0$
e) $\forall n \in \mathbf{N}$: $\sqrt[n]{1} = 1$
f) $\forall n, p \in \mathbf{N}, \forall m \in \mathbf{Z}, \forall a, b \in \mathbf{R}^+$:

1. $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$ **2.** $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}; b \neq 0$ **3.** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ **4.** $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

5. $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n.p]{a^p}$

Poznámky:

- Pri počítaní s odmocninami je potrebné robiť podmienky, nakoľko **výraz pod odmocninou v množine reálnych čísel** **nemôže nadobudnúť zápornú hodnotu**.

- Taktiež je potrebné dávať pozor na zlomky pod odmocninami, vtedy sa **menovateľ nesmie rovnať nule**.

- Pri riešení úloh **s odmocninami je niekedy výhodné tieto odmocniny podľa vzorca** $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ **zapísať ako mocniny s racionálnym exponentom**, vykonať riešenie s týmito mocninami a podľa potreby výsledok znova zapísať v tvare odmocnín.

P.S.: Poriadne ovládať vzorce aspoň pre mocniny !!!

Napr.:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3.\sqrt{x.\sqrt{x^{-5}}}}{\sqrt[4]{x}.\sqrt[3]{\sqrt{x}}}} = \frac{x^{\frac{3}{3}}.(x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}.((x^{-\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}.((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{x.x^{\frac{1}{6}}.x^{-\frac{5}{12}}}{x^{\frac{1}{12}}.x^{\frac{1}{18}}} = x^{1+\frac{1}{6}-\frac{5}{12}-\frac{1}{12}-\frac{1}{18}} = x^{\frac{36+6-15-3-2}{36}} =$$

$$= x^{\frac{22}{36}} = x^{\frac{11}{18}} = \sqrt[18]{x^{11}}$$

Príklady:

1) Rozložte ***odmocnenca*** na súčin prvočísel a potom odmocnite $\sqrt{2450}$ aj použitím pravidiel.

$$\sqrt{2450}=\sqrt{2.5^2.7^2}=\sqrt{2}.\sqrt{5^2}.\sqrt{7^2}=5.7.\sqrt{2}=35\sqrt{2}$$

Poznámka: Zápis odmocniny čísla ako ***súčin racionálneho čísla a odmocniny s čo najmenším odmocnencom – argumentom*** nazývame ***čiastočné odmocnenie***.

2) Vypočítajte bez použitia kalkulačky $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ na 6 desatinných miest a výsledok zaokrúhlite na 5 desatinných miest, ak $\sqrt{2}$ ~ ***1,41421***.

```
1 : √2  ~  1 : 1,41421  =  100000 : 1,41421  =  0,707108
                           1000000
                            989947
                            1005300
                             989947
                              153530
                              141421
                               121090 0
                               113136 8
                                 79532
```

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{2} : 2 \sim 1{,}41421 : 2 = 0{,}707105$$

$$\begin{array}{l} 1{,}41421 : 2 \\ \underline{14} \\ \;\;14 \\ \underline{\;\;14} \\ \;\;\;\;2 \\ \underline{\;\;\;\;2} \\ \;\;\;\;\;\;10 \\ \underline{\;\;\;\;\;\;10} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;0 \end{array}$$

<u>Poznámka:</u> Druhý výpočet, keď v menovateli nie je odmocnina, je pre určenie hodnoty bez použitia kalkulačky jednoduchší.
Úprava zlomku, pri ktorej z menovateľa odstránime odmocniny sa nazýva ***usmernenie zlomku***.
Robí sa ***metódou rozšírenia zlomku***:

a) **<u>pre menovateľa</u>** $\sqrt{a}$:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\left(\sqrt{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

napr.: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

pre menovateľa $\sqrt[n]{a^k}$, ak **n > k** rozšírime zlomok číslom $\sqrt[n]{a^{n-k}}$

napr.: $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^{5-3=2}}}{\sqrt[5]{2^3}\,.\sqrt[5]{2^{5-3=2}}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3}\,.\sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3.2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{2}$

b) **<u>pre menovateľa</u>** $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ - využíva sa vzorec ***(a-b).(a+b) = a²* – *b²***:

$$\frac{R}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{R}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{R.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)} = \frac{R.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\left(\sqrt{a}\right)^2-\left(\sqrt{b}\right)^2} = \frac{R.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a^2}-\sqrt{b^2}} = \frac{R.\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{a-b}$$

Napr.:

$$\frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{15}-\sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{15}+\sqrt{12}}{\sqrt{15}+\sqrt{12}} = \frac{6\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)}{\left(\sqrt{15}-\sqrt{12}\right)\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)} = \frac{6\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)}{\sqrt{15^2}-\sqrt{12^2}} = \frac{6\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)}{15-12} =$$

$$= \frac{6\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)}{3} = 2\left(\sqrt{15}+\sqrt{12}\right)$$

3) Rozhodnite ***bez použitia kalkulačky***, ktoré z čísel má ***väčšiu hodnotu***:

a) $3\sqrt{5}\ldots a\ldots 5\sqrt{3}$: $3\sqrt{5} = \sqrt{9.5} = \sqrt{45}$ a $5\sqrt{3} = \sqrt{25.3} = \sqrt{75}$

Záver: 45 < 75, preto $\sqrt{45} < \sqrt{75}$, t.j. $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{180}+\sqrt{245}\ldots a\ldots 29$:

$$\sqrt{180}+\sqrt{245} = \sqrt{36.5}+\sqrt{49.5} = 6\sqrt{5}+7\sqrt{5} = 13\sqrt{5} = \sqrt{169.5} = \sqrt{845} \text{ a } 29 = \sqrt{841}$$

Záver: ... $\sqrt{180}+\sqrt{245} > 29$

c) $2\sqrt[3]{4}\ldots a\ldots 4\sqrt{3}$: $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8.4} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[6]{32^2} = \sqrt[6]{1024}$ a

$4\sqrt{3} = \sqrt{16.3} = \sqrt{48} = \sqrt[6]{48^3} = \sqrt[6]{110592}$

Záver: ... $2\sqrt[3]{4} < 4\sqrt{3}$

Poznámka: Odmocniny ***porovnávame*** tak, že ich vyjadríme pomocou odmocnín s rovnakým exponentom a potom porovnáme základy odmocnín.

Úlohy – súhrn:

I. Vypočítajte:

1. $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{8}$

2. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{225}$

3. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$

4. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$

5. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$

6. $\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$

7. $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{16}$

8. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$

9. $\sqrt{\frac{16}{25}}$

10. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

11. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

12. $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$

13. $\sqrt{20}\cdot\sqrt{24}\cdot\sqrt{30}$

14. $\sqrt[3]{13\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[3]{11\frac{1}{9}}\cdot\sqrt[3]{2}$

15. $\sqrt{45}:\sqrt{5}$

16. $\sqrt{56}:\sqrt{7}$

17. $\sqrt[3]{96}:\sqrt[3]{12}$

18. $\sqrt[3]{1}:\sqrt[3]{64}$

19. $\left(\sqrt[3]{8}:\sqrt[3]{27}\right)\cdot\sqrt[5]{32}$

20. $\sqrt{81}\cdot\frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[4]{256}}$

II. Upravte výraz na tvar súčinu racionálneho čísla a odmocniny čo z najmenšieho prirodzeného čísla (Čiastočne odmocnite):

1. $\sqrt{125}$
2. $\sqrt{240}$
3. $\sqrt{315}$
4. $\sqrt{12}$
5. $\sqrt{50}$
6. $\sqrt{128}$
7. $\sqrt{72}$
8. $\sqrt{960}$
9. $\sqrt{2\frac{7}{9}}$
10. $\sqrt[3]{16}$
11. $\sqrt[3]{128}$
12. $\sqrt[3]{320}$
13. $\sqrt[3]{500}$
14. $\sqrt[3]{80}$
15. $\sqrt[3]{48}$
16. $\sqrt[3]{250}$
17. $\sqrt[3]{x^5}$
18. $\sqrt[3]{54}$
19. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$
20. $\sqrt[4]{162}$
21. $\sqrt[4]{0{,}012}$
22. $\sqrt[4]{128}$
23. $\sqrt[4]{21\,000}$
24. $\sqrt[11]{x^{45}}$
25. $\sqrt{9a^3b}$
26. $\sqrt{4a^5b^3}$
27. $\sqrt{27a^9b^{11}c^{21}}$
28. $\sqrt[3]{8a^7b^8}$
29. $\sqrt[3]{ab^{10}}$
30. $\sqrt[4]{x^5y^4z}$
31. $\sqrt[4]{81s^4r^8p^{12}}$
32. $\sqrt[10]{x^{20}y^{10}z}$
33. $\sqrt[3]{625a^6b^7}$
34. $\sqrt[3]{1000}$
35. $\sqrt[3]{10\,000}$

III. Vyjadrite pomocou jednej odmocniny

1. $\sqrt{\sqrt{2}}$
2. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$
3. $\sqrt{2\sqrt{2}}$
4. $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$
5. $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$
6. $\sqrt{\frac{a}{b}\sqrt{\frac{a}{b}}}$
7. $\sqrt{\frac{x}{y}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$
8. $a\sqrt[3]{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$
9. $\sqrt{\frac{c}{d}\sqrt[3]{\left(\frac{d}{c}\right)^5}}$
10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$
11. $\sqrt[3]{s\sqrt[3]{s}}$
12. $\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}}$
13. $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab}}$
14. $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}$
15. $\sqrt{\frac{1}{m^2}\sqrt{\frac{1}{m}\sqrt{m}}}$
16. $\sqrt{\sqrt{a}}\,.\sqrt{\sqrt[3]{a}}$
17. $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$
18. $\sqrt{\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{5}\sqrt{5\cdot\frac{1}{3}}}}$
19. $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{3}}}$
20. $\sqrt{x^2}:\sqrt[9]{x^5}$

IV. Odstráňte odmocninu z menovateľa:

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
2. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
3. $\frac{3}{\sqrt{5}}$
4. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$
5. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{12}}$
6. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[4]{5}}$
7. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$
8. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$
9. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$
10. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$
11. $\frac{1}{2-3\sqrt{7}}$
12. $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$
13. $\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{12}}$
14. $\frac{3}{2\sqrt{11}+5\sqrt{2}}$
15. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27}-\sqrt{12}}$
16. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}-\sqrt{3}}$
17. $\frac{4}{\sqrt{2ab}}$
18. $\frac{4x^2}{\sqrt{8xy^3}}$
19. $\sqrt{\frac{1}{5}}$
20. $\sqrt{\frac{4}{1-\sqrt{2}}}$

V. Určte, kedy majú dané výrazy zmysel a potom ich zjednodušte:

1. $3\sqrt{2x}-5\sqrt{18x}+4\sqrt{50x}$

2. $\sqrt{7y}+\sqrt{28y}-\sqrt{63y}+2\sqrt{7}$

3. $\sqrt[3]{y}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{27y}+2\sqrt[3]{y}-\sqrt[4]{81x}$

4. $\sqrt{4+4x^2}+2\sqrt{+9x^2}-5\sqrt{1+x^2}$

1. Rozhodnite, ktoré z daných čísel sú prirodzené a ktoré iracionálne čísla:

a) $\sqrt{3},\sqrt{5},\sqrt{12}$ b) $\sqrt{361},\sqrt{444},\sqrt{225}$

2. Pre ktoré *x* majú zmysel výrazy:

a) $\sqrt{2x-1}$ b) $\sqrt{1-3x}$ c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{7x-4}$ e) $\sqrt{x^2-1}$ f) $\sqrt{9-25x^2}$

3. Čiastočne odmocnite:

a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{112}$ c) $\sqrt{35{,}2}$ d) $\sqrt[3]{54}$

e) $\sqrt[3]{9000}$ f) $\sqrt[3]{162}$ g) $\sqrt[3]{243}$ h) $\sqrt[3]{46208}$

i) $\sqrt[3]{500000}$ j) $\sqrt{0{,}125}$ k) $\sqrt[3]{0{,}125}$ l) $\sqrt{0{,}8}$

m) $\sqrt[3]{0{,}008}$ n) $\sqrt[3]{625}$ o) $\sqrt{52272}$

4. Upravte podľa viet o počítaní s odmocninami a uveďte, kedy majú zmysel:

a) $\sqrt{5}.\sqrt{125}$ b) $\sqrt{72}.\sqrt{2}$ c) $\sqrt{5}.\sqrt{10}.\sqrt{180}.\sqrt{40}$

d) $\sqrt[3]{1{,}6}.\sqrt[3]{8{,}8}.\sqrt[3]{0{,}66}.\sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt{3\frac{1}{7}}.\sqrt{2{,}4}.\sqrt{7{,}6}$ f) $\sqrt[3]{a^{r-1}}\cdot\sqrt[3]{a^{4-r}}\cdot\sqrt[3]{a^{3.(r-1)}}$

g) $\sqrt[4]{x^7}\cdot\sqrt[4]{27x^3}\cdot\sqrt[4]{27x}$ h) $\sqrt{\sqrt[3]{a^{2n+1}}}$

5. Vypočítajte:

a) $\sqrt{49.64}$ b) $\sqrt[3]{0{,}5}\cdot\sqrt[3]{0{,}25}$ c) $\sqrt{\frac{81}{7}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$

e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ f) $\left(\sqrt[3]{a^4}\right)^5$ g) $\sqrt[9]{a^6b^3}$

6. Vypočítajte a uveďte kedy majú výrazy zmysel:

a) $\sqrt[3]{\left(25a^4b^5\right)^2}$ b) $\left(\sqrt{2x^2}\cdot\sqrt[3]{5x^4}\cdot\sqrt{4x^5}\right)^6$ c) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[12]{a^{13}}$

d) $\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{100}\cdot\sqrt[3]{0{,}0001}$ e) $\sqrt[3]{x^2-y^2}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}$ f) $\sqrt[3]{9a\cdot\sqrt{\frac{a^2}{16}\cdot\sqrt{81a^4}}}$

g) $\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}$ h) $\sqrt[9]{\frac{\left(xy+y^2\right)^6}{\left(x^2-xy\right)^4}}:\sqrt[6]{\frac{\left(xy-y^2\right)^4}{\left(x^2+xy\right)^3}}$ i) $\sqrt[9]{\frac{625a^{13}b^9}{5c^5}}:\sqrt{\frac{5a^{11}b^7}{c^3}}$

j) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}}:\left(\sqrt[3]{\frac{3a^4}{4b^5}}\cdot\sqrt[6]{\frac{6a}{b^5}}\right)$

7. Upravte podľa viet o počítaní s mocninami a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[12]{2}$ b) $\sqrt{2}\cdot\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[12]{16}$ c) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[15]{32}$

d) $2\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{12}\cdot\sqrt[8]{24}$ e) $\sqrt[18]{x^{2n+6}}\cdot\sqrt[12]{x^{2n+3}}$ f) $\sqrt[15]{a^{2x+3y}} : \sqrt[12]{a^{2y-3x}}$

g) $\sqrt[n]{a^{1-2n}}\cdot\sqrt[n+1]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}\cdot\sqrt[n+1]{a^{1+2n}}$ h) $\sqrt[3]{x^{2n-5}} : \sqrt[5]{x^{4n-5}}$

8. Vypočítajte:

a) $2\sqrt{5}-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+4\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\sqrt{27}+\sqrt{12}$

c) $\sqrt{2}-7\sqrt{2}+\sqrt[4]{4}+5\sqrt{18}$ d) $\left(4+\sqrt{3}\right)\left(4-\sqrt{3}\right)$

e) $\sqrt{75}+2\sqrt{5}-2\sqrt{12}$ f) $\sqrt[3]{2}-3\sqrt[3]{2^4}+\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{64.2}$

9. Vypočítajte a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

a) $2\sqrt{2x^3}+\sqrt{18x^3}+x\sqrt{8x}$ b) $\left(1-\sqrt[3]{x^2}\right)\cdot\sqrt[3]{x}-1$

c) $\left(\sqrt{1+a}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{2}-\sqrt{1+a}\right)$ d) $6\sqrt{2a}+\sqrt[4]{64a^2}-\sqrt{18a^3}$

10. Vypočítajte a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

a) $\sqrt[3]{16x^2y}+\sqrt{4x^2z}-\sqrt{x^2y}-\sqrt[3]{54x^2y}-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{125x^3y}{9}}$

b) $5\sqrt[3]{a^2b^5}+2b^2\sqrt[3]{\dfrac{a^2}{b}}+\dfrac{4b}{a^2}\sqrt[3]{a^8b^2}-6ab\sqrt[3]{\dfrac{b^2}{a}}-\dfrac{3}{2}ab^2\sqrt[3]{\dfrac{8}{ab}}$

c) $\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\sqrt{\dfrac{1}{y}}-\sqrt{\dfrac{1}{xy}}\right)\cdot\sqrt{xy}$

d) $3\sqrt[3]{54}+4\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{128}$

e) $\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{6}\right)+\sqrt{5}\left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)-\sqrt{6}\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

11. Odstráňte odmocninu z menovateľa:

a) $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{3-\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{5+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-4}$ f) $\dfrac{6}{\sqrt{11}-\sqrt{10}}$ g) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}-5\sqrt{5}}$ h) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+3}$

i) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ j) $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ k) $\sqrt[3]{\dfrac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}}$ l) $\sqrt[4]{\dfrac{2}{5}}$

m) $\dfrac{\sqrt[3]{45}}{\sqrt[4]{5\sqrt[3]{3^2.5}}}$ n) $\dfrac{1}{5-\sqrt{2}}$ o) $\dfrac{26}{\sqrt{3}-4}$

12. Upravte lomené výrazy a uveďte, kedy majú zmysel:

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ b) $\dfrac{1-a}{1+\sqrt{a}}$ c) $\dfrac{a}{a-\sqrt{a}}$ d) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

e) $\dfrac{ab\sqrt{a}}{\sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}}}$ f) $\dfrac{b-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

13. Vypočítajte a výsledné zlomky upravte. Uveďte, kedy majú dané lomené výrazy zmysel:

a) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ b) $\dfrac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ c) $\dfrac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}-\dfrac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

d) $\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\dfrac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\dfrac{3+\sqrt{x}}{1-x}$

14. Vypočítajte:

a) $\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}$ b) $\dfrac{6}{\sqrt{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}$ c) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

15. Napíšte pomocou jednej mocniny:

a) $\sqrt[3]{a}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$ c) $\left(\sqrt[4]{c}\right)^7$ d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$

16. Upravte na jednu mocninu:

a) $\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$ b) $\left(\dfrac{x^{-\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{7}{6}}}\right)^{-2}$ c) $\dfrac{\sqrt{x\sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}}}{\sqrt[4]{x\sqrt[3]{x\sqrt{x}}}}$

17. Upravte na odmocninu z čo najmenšieho prirodzeného čísla:

a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt[3]{50625}$ c) $\sqrt[6]{216}$