Goniometria VI

Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice

Goniometrické rovnice sú rovnice, ktoré okrem konštánt obsahujú neznámu x alebo výrazy s neznámou x ako argumentmi niektorej z goniometrických funkcií; **f(sin x, cos x, tg x, cotg x).**

Základnou goniometrickou rovnicou s neznámou x je rovnica v tvare ***f(x)= c***, kde f je goniometrická funkcia, c je reálne číslo.

Typy goniometrických rovníc

$$2sinx = -1$$

- jednoduché goniometrické rovnice (obsahujú len jednu goniometrickú funkciu s jednoduchým argumentom) v tvare **f(x) = d** ⇒ nájdeme základnú veľkosť uhla v tabuľke (kalkulačka) a všetky výsledky zapíšeme pomocou periódy
- goniometrické rovnice riešené substitúciou v argumente prechodom na jednoduchú goniometrickú rovnicu
- goniometrické rovnice riešené substitúciou prechodom na kvadratickú rovnicu ⇒ substitúciou za goniometrickú funkciu dostaneme kvadratickú rovnicu
- iné typy rovníc (obsahujú viac goniometrických funkcií, vzťahy, prípadne goniometrické vzorce, ktoré je potrebné využiť)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin^2x - 4sinx - 5 = 0$$

$$cos2x + cosx + 1 = 0$$

Jednoduché goniometrické rovnice

$$2sinx = -1$$
$$sinx = -\frac{1}{2}$$
$$x_0 = \frac{\pi}{6}$$
$$III.\, x_1 = \frac{7}{6}\pi + k.2\pi$$
$$IV.\, x_2 = \frac{11}{6}\pi + k.2\pi$$
$$k \in Z$$

Ekvivalentnými úpravami si osamostatníme goniometrickú funkciu na ĽS.

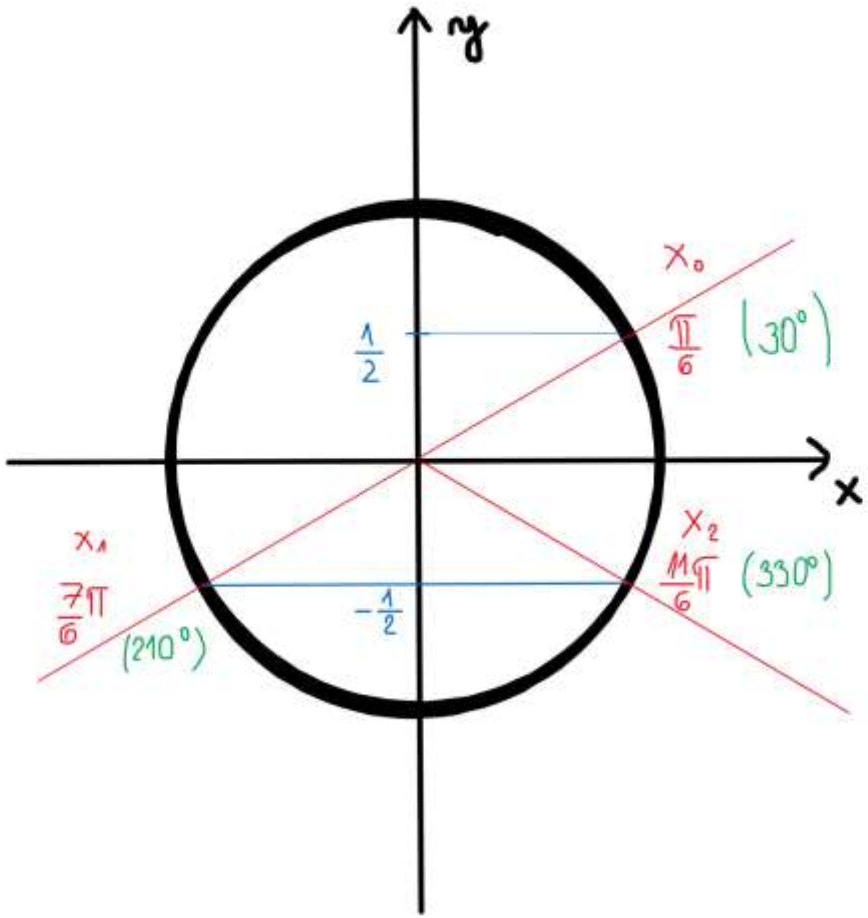
Nájdeme pomocný uhol (keďže naša funkcia má záporné znamienko) v tabuľke alebo na jednotkovej kružnici.

Nájdeme riešenia v III. a IV. kvadrante, kde funkcia sínus nadobúda záporné hodnoty.

$$III.\, x_1 = 210° + k.360°$$
$$IV.\, x_2 = 330° + k.360°$$
$$k \in Z$$

Riešenia v stupňovej miere.

$$K = \left\{\frac{7\pi}{6} + k.2\pi; \frac{11\pi}{6} + k.2\pi\right\}$$



Substitúcia v argumente

Substitúcia argumentu
(zložený za jednoduchý)

$$\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Substitúcia:

$$\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = a$$

$$cosa = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$I.\ a_1 = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$

$$IV.\ a_2 = \frac{11}{6}\pi + k.2\pi$$

$$k \in Z$$

Nájdeme riešenia v I. a IV. kvadrante, kde funkcia kosínus nadobúda kladné hodnoty.

Návrat k substitúcii:

Substitúcia:

$$2x - \frac{\pi}{4} = a$$

$$a_1: 2x_1 - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} + k.2\pi$$

$$a_2: 2x_2 - \frac{\pi}{4} = \frac{11}{6}\pi + k.2\pi; k \in Z$$

Osamostatníme si x_1; x_2:

$$2x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k.2\pi$$

$$2x_1 = \frac{5\pi}{12} + k.2\pi /:2$$

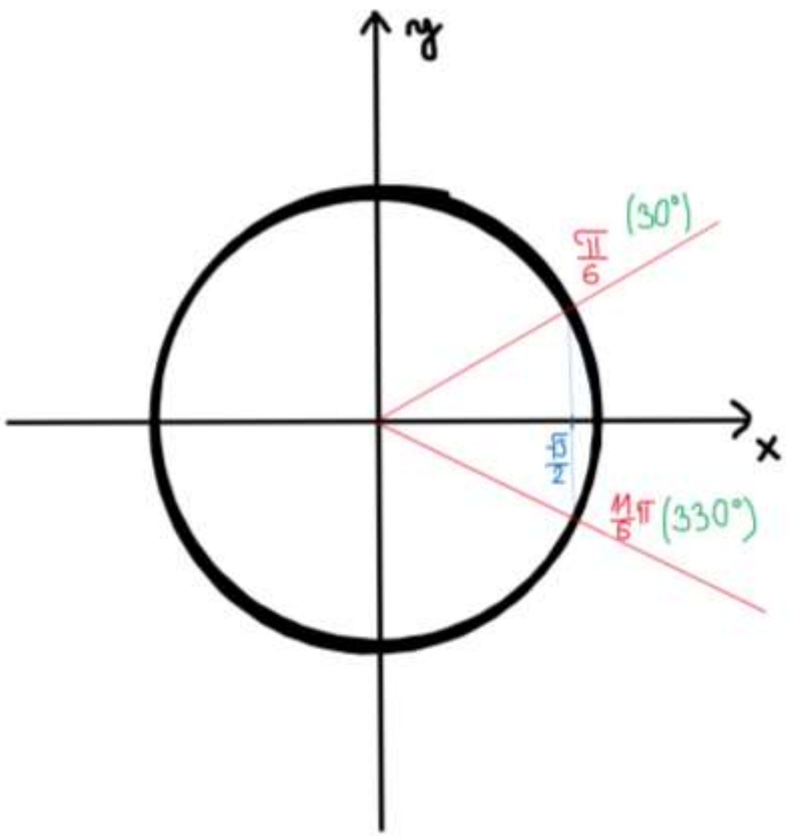
$$x_1 = \frac{5\pi}{24} + k.\pi; k \in Z$$

$$2x_2 = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{4} + k.2\pi$$

$$2x_2 = \frac{25\pi}{12} + k.2\pi /:2$$

$$x_2 = \frac{25\pi}{24} + k.\pi; k \in Z$$

$$\boldsymbol{K = \left\{\frac{5\pi}{24} + k.\pi; \frac{25\pi}{24} + k.\pi\right\}}$$



Substitúcia na kvadratickú rovnicu

Substitúcia goniometrickej funkcie

$$\sin^2 x - 4\sin x - 5 = 0$$

Substitúcia:

$$\sin x = a$$

$$a^2 - 4a - 5 = 0$$

$$(a - 5).(a + 1) = 0$$

$$a_1 = 5$$

$$a_2 = -1$$

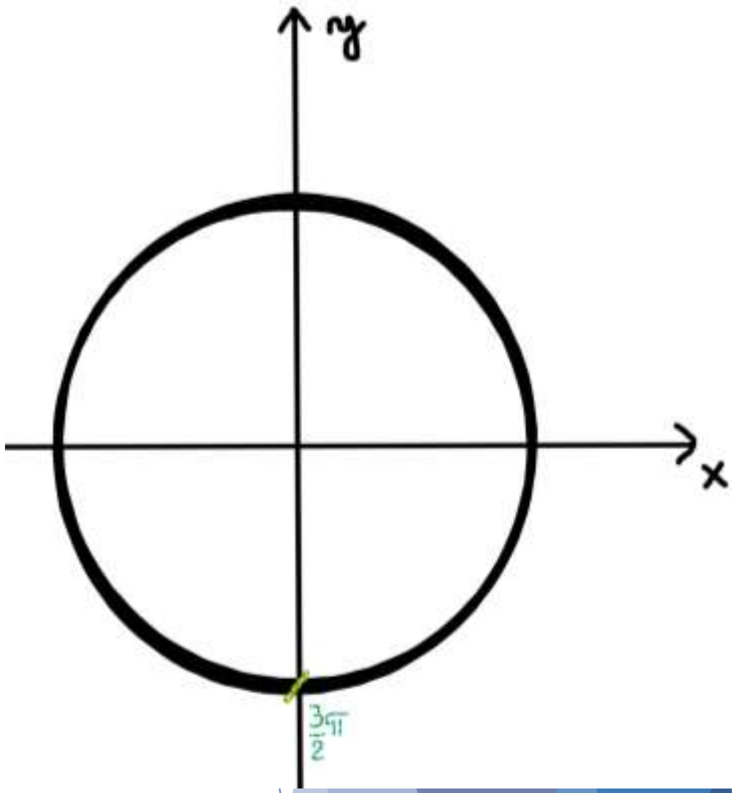
Návrat k substitúcii:

Substitúcia:

$$\sin x = a$$

$$a_1 : \sin x = 5$$

$$a_2 : \sin x = -1$$



Vyriešime jednoduché goniometrické rovnice:

$$\sin x = 5 \Rightarrow K = \emptyset$$

$$\sin x = -1$$

Nájdeme riešenia pomocou tabuľky.

$$x = \frac{3\pi}{2} + k.2\pi$$

$$\boldsymbol{K = \left\{\frac{3\pi}{2} + k.2\pi\right\}}$$

Iné typy rovníc

$$\cos 2x + \cos x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x - \sin^2 x + \cos x + 1 = 0$$
$$\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$$
$$2\cos^2 x + \cos x = 0$$
$$\cos x(2\cos x + 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \lor 2\cos x + 1 = 0$$
$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k.\pi \lor 2\cos x = -1$$
$$\cos x = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{2\pi}{3} + k.2\pi$$
$$x_3 = \frac{4\pi}{3} + k.2\pi$$
$$\boldsymbol{K = \left\{\frac{\pi}{2} + k.\pi; \frac{2\pi}{3} + k.2\pi; \frac{4\pi}{3} + k.2\pi\right\}}$$

Na úpravu použijeme vzorec pre cos2x a vzťah medzi funkciou sínus a kosínus.

Goniometrickú rovnicu zapísanú ako súčin vyriešime ako dve samostatné rovnice.

Ak je potrebné, osamostatníme si goniometrickú funkciu na ľavej strane a ďalej riešime ako jednoduchú goniometrickú rovnicu.

Nájdeme riešenia pomocou tabuľky.