27. TELESÁ

Teleso – uzavretá obmedzená časť priestoru

Mnohosten – je časť priestoru, ktorá je ohraničená mnohouholníkmi. Uhlopriečky, ktoré patria do niektorej steny sú stenové uhlopriečky, ostatné sú telesové.

Hranol – mnohosten, ktorého 2 steny sú navzájom zhodné mnohouholníky s rovnobežnými odpovedajúcimi hranami a so všetkými navzájom zostávajúcimi hranami navzájom rovnobežnými, sa nazýva hranol.

Kolmý a pravidelný hranol – ak je podstavou hranola pravidelný n – uholník a hranol ja kolmý, hovoríme o pravidelnom hranole.

Kváder – hranol, ktorého všetky steny sú pravouholníky, sa nazýva kváder.

Rovnobežnosten – hranol, ktorého všetky steny sú rovnobežníky.

Ihlan – je mnohosten, ktorého jedna stena – základňa – je n – uholník a všetky ostatné steny sú trojuholníky so spoločným vrcholom.

Kocka – je hranol, ktoré všetky steny sú pravidelné pravouholníky. Má 6 stien.

Kužeľ – ak je v priestore daná rovina ρ s kruhom K = (S, r) a bod V nepatrí ρ . Množina bodov všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom V a niektorým z bodov kruhu K, sa nazýva kužeľový priestor. Priamky, ktoré prechádzajú hraničnou kružnicou, tvoria kružnicovú kužeľovú plochu a nazývajú sa jej tvoriace priamky. Bod V sa nazýva vrchol kužeľového priestoru. Kruhový priestor (plášť) a kružnicová kužeľová plocha (podstava) tvoria kužeľ.

Štvorsten – má štyri steny a každá z nich utína všetky 3 osi v rovnakej konečnej vzdialenosti.

Pravidelný štvorsten – ktorého stenami sú rovnostranné trojuholníky.

Valec – časť priestoru, ktorá je ohraničená kružnicovou valcovou plochou a dvoma rovinami, ktoré sú navzájom rovnobežné a kolmé na všetky priamky prechádzajúcou kružnicovou valcovou plochou.

Guľa – je množina bodov v priestore, ktorých vzdialenosť od pevne zvoleného bodu S (stredu gule), je menšia alebo rovná r, kladne zvolenému číslu. (r = polomer gule)

Vrchol – je priesečníkom hrán v mnohouholníku (označuje sa veľkými tlačenými písmenami napr. A,B)

Hrana – je to priamka, ktorá je priesečnicou 2 stien a je ohraničená 2 bodmi – vrcholmi

Stena – plošný útvar, ktorý ohraničuje jednotlivé telesá

Podstava – je to n- hranný alebo zakrivený plošný útvar, ktorého bodmi prechádzajú všetky priamky, ktoré tvoria teleso. Je to časť telesa, jeho stena, na ktorej stojí.

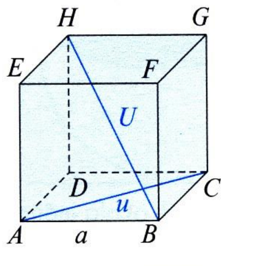
Sieť kocky – je to plošný útvar, obsahujúci pravidelné pravouholníky (štvorce), ktoré sú stenami kocky a je ich 6. Sieť je plocha ohraničujúca teleso, ktorá je rozvinutá do jednej roviny.

Výšky v štvorstene – výška v stene štvorstena (v jednom trojuholníku) je to kolmá vzdialenosť od vrcholu na protiľahlú hranu. Telesová výška je kolmá vzdialenosť spustená od vrcholu, na protiľahlú stenu (podstavu)

Objem telesa – kladná hodnota, ktorá sa priraďuje telesám v priestore. Je to priestor, ktorý ohraničujú steny telesa. Označuje sa V.

Povrch telesa – obsah plochy, ktorá teleso ohraničuje, jej povrch. Označuje sa S.

KOCKA



8 vrcholov

12 hrán (rovnako dlhých), $a = |AB|$ dĺžka hrany kocky

6 stien (zhodné štvorce)

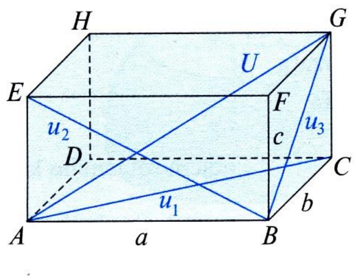
12 stenových uhlopriečok (rovnako dlhých), $u = a\sqrt{2} = |AC|$

4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé), $U = a\sqrt{3} = |BH|$

$V = a^3$ objem kocky

$S = 6a^2$ povrch kocky

KVÁDER



8 vrcholov

12 hrán (tri štvorice rovnako dlhých),

$a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CG|$ dĺžky rozdielnych hrán kvádra

6 stien (tri dvojice zhodných obdĺžnikov)

12 stenových uhlopriečok (tri štvorice rovnako dlhých),

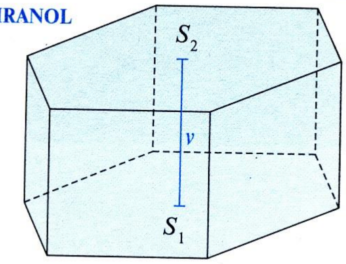
$u_1 = \sqrt{a^2 + b^2} = |AC|$, $u_2 = \sqrt{a^2 + c^2} = |BE|$, $u_3 = \sqrt{b^2 + c^2} = |BG|$

4 telesové uhlopriečky (rovnako dlhé), $U = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = |AG|$

$V = abc$ objem kvádra

$S = 2(ab + ac + bc)$ povrch kvádra

HRANOL

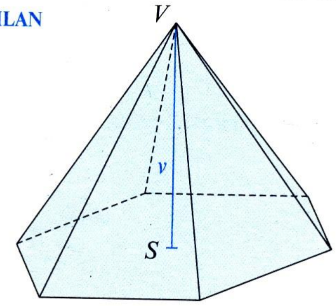


Ak je podstavou pravidelný mnohouholník a hranol je kolmý, hovoríme o **PRAVIDELNOM HRANOLE**.

Podstavou je mnohouholník $A_1 A_2 \dots A_n$.
$2n$ vrcholov, $2n$ podstavných hrán, n bočných hrán
2 podstavy, n bočných stien (obdĺžnikov, ak je kolmý)

S_p	obsah podstavy hranola
S_{pl}	obsah plášťa hranola (súčet obsahov všetkých bočných stien)
v	výška hranola (vzdialenosť rovín podstáv)
$V = S_p \cdot v$	objem hranola
$S = 2S_p + S_{pl}$	povrch hranola

IHLAN

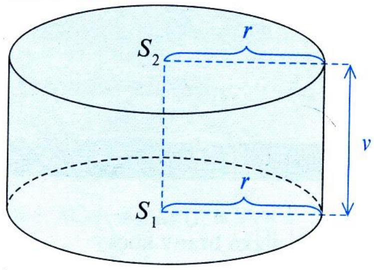


Ak je podstavou pravidelný mnohouholník a úsečka VS je kolmá na rovinu podstavy, hovoríme o **PRAVIDELNOM IHLANE**.

Podstavou je mnohouholník $A_1 A_2 \dots A_n$.
n vrcholov podstavy, n podstavných hrán, n bočných hrán
n bočných stien (trojuholníkov)

S_p	obsah podstavy ihlana
S_{pl}	obsah plášťa ihlana (súčet obsahov všetkých bočných stien)
V	vrchol ihlana
v	výška ihlana (vzdialenosť vrcholu od roviny podstavy)
$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$	objem ihlana
$S = S_p + S_{pl}$	povrch ihlana

ROTAČNÝ VALEC

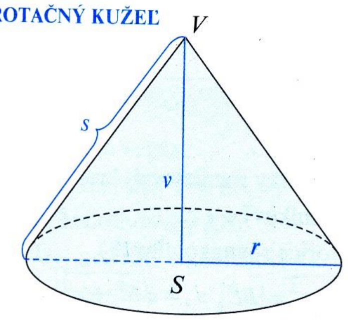


Ak je osovým rezom valca štvorec, t. j. $v = 2r$, hovoríme o **ROVNOSTRANNOM VALCI**.

Vznikne otáčaním obdĺžnika okolo jednej jeho strany.

v	výška valca
r	polomer podstavy valca
S_p	obsah podstavy valca
S_{pl}	obsah plášťa valca
$V = S_p \cdot v = \pi r^2 v$	objem rotačného valca
$S = 2S_p + S_{pl} = 2\pi r^2 + 2\pi r v = 2\pi r(r+v)$	povrch rotačného valca

ROTAČNÝ KUŽEĽ

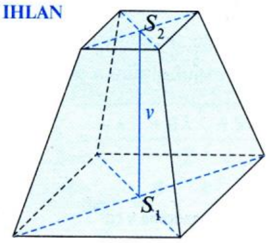


Ak je osovým rezom kužeľa rovnostranný trojuholník, t. j. $s = 2r$, $v = r\sqrt{3}$, hovoríme o **ROVNOSTRANNOM KUŽELI**.

Vznikne otáčaním pravouhlého trojuholníka okolo jednej jeho odvesny.

v	výška kužeľa
r	polomer podstavy kužeľa
s	dĺžka strany kužeľa, $s = \sqrt{r^2 + v^2}$
S_p	obsah podstavy kužeľa
S_{pl}	obsah plášťa kužeľa
$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v = \frac{1}{3}\pi r^2 v$	objem rotačného kužeľa
$S = S_p + S_{pl} = \pi r^2 + \pi r s = \pi r(r+s)$	povrch rotačného kužeľa

ZREZANÝ IHLAN



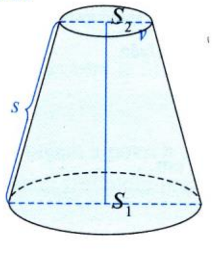
Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku ihlana, rozdelí daný ihlan na menší ihlan a zrezaný ihlan.

v	výška zrezaného ihlana (vzdialenosť rovín podstáv)
S_{p1}, S_{p2}	obsah dolnej a hornej podstavy
S_{pl}	obsah plášťa

$V = \frac{v}{3} \cdot \left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} S_{p2}} + S_{p2}\right)$ objem zrezaného ihlana

$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$ povrch zrezaného ihlana

ZREZANÝ KUŽEĽ



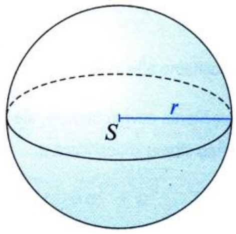
Rovina rovnobežná s rovinou podstavy, ktorá pretína výšku kužeľa, rozdelí daný kužeľ na menší kužeľ a zrezaný kužeľ.

v	výška zrezaného kužeľa (vzdialenosť rovín podstáv)
s	dĺžka strany
S_{p1}, S_{p2}	obsah dolnej a hornej podstavy
S_{pl}	obsah plášťa

$V = \frac{\pi v}{3} \cdot \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$ objem zrezaného kužeľa

$S = \pi r_1^2 + \pi r_2^2 + \pi(r_1 + r_2)s$ povrch zrezaného kužeľa

GUĽA



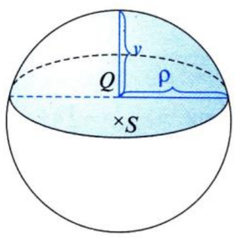
Vznikne otáčaním polkruhu okolo jeho priemeru.

r	polomer gule
S	stred gule

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ objem gule

$S = 4\pi r^2$ povrch gule

GUĽOVÝ ODSEK



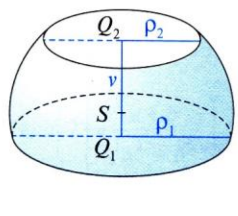
Rovina prechádzajúca vnútorným bodom priemeru gule rozdelí guľu na dva guľové odseky.

v	výška odseku	r	polomer gule
ρ	polomer podstavy odseku		
Q	stred podstavy odseku		
S_p	obsah podstavy odseku		
S_{pl}	obsah guľového vrchlíka, $S_{pl} = 2\pi rv$		

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho^2 + v^2)$ objem guľového odseku

$S = S_p + S_{pl} = \pi\rho^2 + 2\pi rv$ povrch guľového odseku

GUĽOVÁ VRSTVA



Guľová vrstva je prienik gule a vrstvy ohraničenej dvoma rovnobežnými rovinami.

v	výška guľovej vrstvy	r	polomer gule
ρ_1, ρ_2	polomer dolnej a hornej podstavy vrstvy		
Q_1, Q_2	stred dolnej a hornej podstavy vrstvy		
S_{p1}, S_{p2}	obsah dolnej a hornej podstavy vrstvy		
S_{pl}	obsah guľového pásu, $S_{pl} = 2\pi rv$		

$V = \frac{\pi v}{6}(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2)$ objem guľovej vrstvy

$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl} = \pi(\rho_1^2 + \rho_2^2) + 2\pi rv$ povrch guľovej vrstvy

Príklady:

1. Rozmery kvádra sú v pomere *2 : 3 : 6*. Vypočítajte jeho povrch a objem, ak telesová uhlopriečka kvádra má veľkosť *14*. [$S = 288; V = 288$]

2. Pravidelný štvorboký ihlan má veľkosť bočnej hrany $s = 2a$ a strana jeho štvorcovej podstavy má veľkosť a. Vypočítajte jeho objem a povrch. [$V = \frac{\sqrt{14}}{6}a^3; S = a^2\left(1+\sqrt{15}\right)$]

3. Podstavu kolmého hranola tvorí pravouhlý trojuholník, ktorého odvesny majú dĺžky v pomere *3 : 4*. Výška hranola má dĺžku o *2 cm* menšiu ako väčšia odvesna trojuholníkovej podstavy. Určte objem hranola, ak jeho povrch je $468\ cm^2$. [$V = 540\ cm^3$]

4. Vyjadrite v litroch objem koša na papier, ktorý má tvar pravidelného štvorbokého zrezaného ihlana. Hrany podstáv majú dĺžky $a = 28\ cm$, $b = 20\ cm$ a bočná hrana má dĺžku $c = 36\ cm$. [$V = 20{,}6\ l$]

5. Kocka a guľa majú rovnaké objemy. V akom pomere sú ich povrchy ? [$\sqrt[3]{6} : \sqrt[3]{\pi}$]

6. Výsek smrekového kmeňa má tvar rotačného valca s polomerom $r = 40\ cm$ a výškou $v = 8\ m$. Objem kôry sú *2%* z celkového objemu výseku. Určte: a) objem výseku bez kôry. [$V = 3{,}941\ m^3$]
   b) hrúbku kôry, ak je všade rovnaká. [$h = 4\ mm$]

7. Pomer obsahu podstavy rotačného kužeľa k jeho plášťu je *3 : 5*. Vypočítajte povrch a objem kužeľa, ak jeho výška $v = 4\ cm$. [$V = 12\pi\ cm^3; S = 24\pi\ cm^2$]

8. Do kocky s hranou a je vpísaný rotačný kužeľ, pričom jeho podstava je vpísaná do podstavy kocky. Vypočítajte povrch kužeľa. [$S = \frac{\pi a^2}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$]

9. V pravidelnom trojbokom ihlane ABCV označme dĺžku podstavnej hrany a, telesovú výšku v, uhol bočnej hrany a roviny podstavy α, uhol bočnej steny a roviny podstavy β. Dokážte, že platí: $tg\beta = 2.tg\alpha$.

10. Pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky $c = 5cm$ a obsahom $S = 6cm^2$ sa otáča okolo prepony. Vypočítajte objem vzniknutého rotačného telesa? Aký bude povrch vzniknutého rotačného telesa, ak prepona bude dlhá 10 cm a obsah trojuholníka sa štvornásobne zväčší?

    (V = 30,16 cm^3, S = 211,1 cm^2)

11. Do gule s polomerom *x* vpíšeme valec tak, aby polomer jeho podstavy bol o 2 cm a jeho výška o 1 cm menšia ako polomer gule.
    Vypočítajte: a) polomer gule
    b) polomer gule, ak do gule vpíšeme rovnostranný valec (výška valca sa rovná priemeru podstavy) s polomerom $\sqrt{2}cm$.
    (17 cm, 2 cm)

12. Valcová nádoba polomeru 3 cm je celkom naplnená vodou.
    a) Koľko vody z nej vytlačí guľa o polomere 5 cm položená na valec ?
    b) Aký je povrch zmáčanej časti gule ?
    c) Ako by sa zmenilo riešenie v prípade, že guľa bude mať polomer 2 cm ?

    (14/3π cm^3, 10π cm^2, ponorí sa celá)

13. Ako ďaleko sú od seba konce ôsmich povrazov, ktorými je k zemi pripevnený stožiar 30 m vysoký. Povrazy sú dlhé 25 m a sú upevnené v polovici výšky stožiara.
    (15,3 m)

14. Tri olovené gule s polomermi $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm zliali do jednej gule. Vypočítajte jej polomer a povrch.

($V = 904\ cm^3$, $S = 452\ cm^2$)

15. Podstavu ihlana tvorí pravouhlý trojuholník s preponou dĺžky c a s ostrým uhlom 30° . Bočné hrany ihlana zvierajú s rovinou podstavy uhol 45° . Určte objem ihlana.

$$\left[V = \frac{\sqrt{3}c^3}{48}\right]$$

16. Uhlopriečny rez kvádra je štvorec obsahu 4225 cm^2. Jedna hrana a podstavy je o 23 cm dlhšia ako strana b. Určte povrch a objem kvádra. [$S = 1526\ cm^2$, $V = 120120\ cm^3$]

17. Hmotnosť železnej kocky je 60 kg. Vypočítajte veľkosť jej hrany, $\rho = 7{,}5\ kg.dm^{-3}$. [*2 dm*]

18. Určte objem pravidelného osemstena vpísaného do gule s polomerom r. ($4/3r^3$)

19. Podstavou kolmého hranola je pravouhlý trojuholník, ktorého dĺžky odvesien sú v pomere 3:4. Výška hranola je o 2 cm menšia ako dlhšia z odvesien podstavy. Povrch hranola je 468 cm^2. Vypočítajte jeho objem. [$V = 560\ cm^3$]

20. Stred hornej podstavy pravidelného štvorbokého hranola a stredy hrán dolnej podstavy tvoria vrcholy ihlana s objemom **V**. Určte objem hranola. [*6V*]

21. Dĺžka telesovej uhlopriečky kocky je $3.\sqrt{6}$ (druhá odmocnina zo 6) cm. Vypočítajte:
a) dĺžku hrany kocky b) objem kocky c) povrch kocky

/$3\sqrt{2}$ cm, $54\sqrt{2}\ cm^3$, $108\ cm^2$/

22. Hranu kocky zväčšíme dvakrát. Koľkokrát sa zväčší: a) objem kocky b) povrch kocky ? /8x,4x/

23. Objem pravidelného 4 – bokého hranola je 64 cm^3. Odchýlka telesovej uhlopriečky AG od roviny podstavy je 45^o. Vypočítajte jeho povrch.

/$16\sqrt[3]{4}\,(1+2\sqrt{2})cm^2$/

24. Vypočítajte objem a povrch pravidelného 6 – bokého hranola. Dĺžka podstavnej hrany je 4 cm, výška hranola je 6 cm. /$144\sqrt{3}\ cm^3$, $(48\sqrt{3}+144)\ cm^2$/

25. Vypočítajte objem a povrch pravidelného 6 – bokého ihlana, ktorého podstavná hrana meria 3 cm a dĺžka bočnej hrany je 6 cm. / $27/2(\sqrt{3}+\sqrt{15})cm^2$; $40{,}5\ cm^3$/

26. Vypočítajte objem a povrch pravidelného 4 – bokého ihlana, ktorého podstavná hrana má 4 cm. Odchýlka bočnej hrany od roviny podstavy je 60^o.

/ $32/3\sqrt{6}\ cm^3$; $16(1+\sqrt{7})cm^2$/

27. Vypočítajte objem a povrch rotačného kužeľa s výškou 10 cm, ktorého strana má od roviny podstavy odchýlku 30^o. / $1000\pi\ cm^3$; $100\pi(3+2\sqrt{3})cm^2$/

28. Vypočítajte polomer podstavy a objem rotačného kužeľa, ak rozvinutý plášť je kruhový výsek s polomerom 3 cm a so stredovým uhlom 120^o. / r = 1 cm, $2/3\pi\sqrt{2}\ cm^3$/

29. Nálevka má tvar rovnostranného kužeľa. Vypočítajte obsah plochy zmáčanej vodou, ak do nálevky nalejeme 3 litre vody. / $6\sqrt[3]{\pi}\ dm^2$/

30. Určte rozmery valcovej nádoby s objemom 5 litrov, ak výška nádoby sa rovná polovici priemeru podstavy. / $\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$ dm/

31. Osovým rezom valca je obdĺžnik s uhlopriečkou dĺžky 20 cm. Výška valca je dvakrát väčšia než priemer podstavy. Vypočítajte objem valca v litroch. / 1,1 litra/

32. Aká je približne dĺžka vlny, ktorá je namotaná na klbku tvaru gule s polomerom 8 cm, ak je priemer vlny 1 mm ? / 2730 m/

33. Pravidelný 4 – boký zrezaný ihlan má podstavné hrany dĺžok 6 cm a 4 cm. Bočná stena zviera s podstavou uhol 60^o. Vypočítajte objem a povrch zrezaného ihlana.
/ $76/3\sqrt{3}$;92/

34. Pravidelný 4 – boký zrezaný ihlan má podstavné hrany dĺžok 6 cm a 4 cm. Bočná hrana zviera s podstavou uhol 60^o. Vypočítajte objem a povrch zrezaného ihlana. / $76/3\sqrt{6}$; $(52+20\sqrt{7})$

35. Zrezaný kužeľ (r_1 = 4 cm, r_2 = 2 cm, v = 6 cm) je rozdelený rovinou rovnobežnou s podstavou na dve časti rovnakého objemu. Vypočítajte: a) polomer kružnice, ktorá je rezom b) pomer, v ktorom rovina rezu delí výšku / 3,3 cm; 1,185/

36. Kocke opíšte a vpíšte guľu. Vypočítajte pomer objemov gule opísanej, kocky a gule vpísanej. / $3\pi\sqrt{3}:6:\pi$ /

37. Akú časť zemského povrchu vidíme z výšky 350 km nad Zemou? / 13 300 000 km^2/

38. Vypočítajte objem a povrch šošovky, ktorá vznikne prienikom dvoch gulí s polomermi 8 cm a 4 cm. Vzdialenosť stredov gulí je 10 cm. / 61,2 cm^3, 65,3 cm^2/

39. Do krabice tvaru kvádra so štvorcovou podstavou s hranou a = 6 cm a výškou v = 4 cm dáme guľu s polomerom 3 cm. Vypočítajte obsah guľového vrchlíka, ktorý leží mimo kvádra. /12π cm^2/

40. Vypočítajte polomer gule vpísanej do kužeľa, ktorého výška je v = 6 cm a polomer podstavy je r = 2 cm. Potom vypočítajte, koľkokrát je objem kužeľa väčší ako objem gule vpísanej. / $2(\sqrt{10}-1)/3$; $V_{kužeľa}$ = asi 2. V_{gule} /