

### Zápočet z teoretickej mechaniky č. 2

RNDr. Tomáš Lučivjanský, PhD.

Zimný Semester 2016

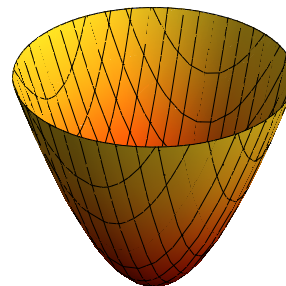
Predmet Teoretická Mechanika

Termín zápočtu: 20.12.16, 11,30-13,00 Uhr v miestnosti P18

## 1 Zabudnutá častica

Na parabolickej ploche sa nachádza častica s hmotnosťou  $m$  na ktorú pôsobí gravitačná sila pozdĺž osi symetrie parabolickej plochy. Jej rovnicu predpokladajte v kartézskych súradniciach v tvare  $z = A(x^2 + y^2)$ , kde  $A$  je nejaké kladné číslo.

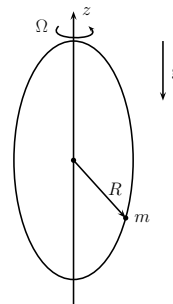
- Zvoľte vhodné zovšeobecnené súradnice na opis pohybu častice a získajte Lagrangeovu funkciu systému.
- Zaveďte pridružené kanonické hybnosti a vypočítajte Hamiltonovu funkciu.
- Z Hamiltonovej funkcie odvoďte Hamiltonove (pohybové) rovnice. Existuje vo vami zvolených súradniciach nejaká cyklická premenná?



## 2 Perla na otáčajúcom sa kruhu

Kruh s polomerom  $R$  sa otáča s konštantnou uhlovou rýchlosťou  $\Omega$  okolo osi  $z$ . Na obvode kruhu sa nachádza perla s hmotnosťou  $m$ , ktorá sa po ňom môže pohybovať (bez trenia). Na perlu pôsobí gravitačná sila.

- Zvoľte vhodné zovšeobecnené súradnice. Určte Lagrangeovu funkciu systému a vypočítajte pohybové rovnice.
- Zaveďte zovšeobecnené hybnosti a určte Hamiltonovu funkciu  $\mathcal{H}$  a tiež celkovú energiu systému  $E$ . Je  $\mathcal{H}$  integrálom pohybu? Je  $E$  zachovávaná sa veličina?
- Nájdite rovnovážne polohy perly a pomocou Newtonovho formalizmu (kvalitatívne) zdôvodnite, či sa jedná o stabilnú, resp. nestabilnú polohu.



### 3 Rock 'n' Roll 2

- a) Moment zotrvačnosti tuhého tělesa je daný vztahom

$$J_{ik} = \int_{\tau} \rho(\mathbf{r}^2 \delta_{ik} - x_i x_k) d\tau.$$

Vysvetlite fyzikálny zmysel veličín na pravej strane rovnice. Vlastnými slovami zdôvodnite, prečo takýto výraz nazývame “tenzorom”.

- b) Vypočítajte zložky tenzora momentu zotrvačnosti pre homogénnu guľu o hmotnosti  $M$  a polomere  $R$ .
- c) Vypočítajte zložky tenzora momentu zotrvačnosti pre dutú guľovú plochu o hmotnosti  $M$  a polomere  $R$ .
- d) Predstavte si teraz, že na naklonenú rovinu položíte dve telesá uvažované v častiach b) a c). Predpokladajte, že na telesá pôsobí gravitačná sila. Telesa postavíme do rovnakej začiatočnej polohy a v danom okamihu pustíme. Gule sa začnú odvažovať, pričom nedochádza k prešmykovaniu. Fyzikálne zdôvodnite, ktoré teleso dosiahne koniec roviny skôr.

### 4 Sen o Hamiltoniáne

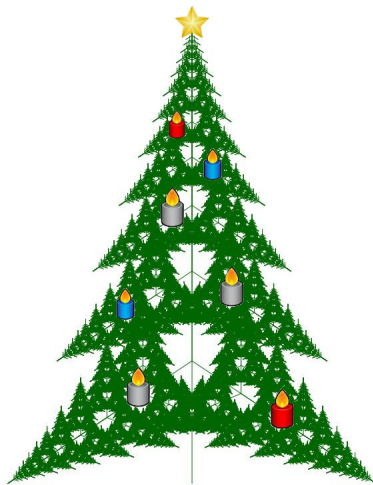
Tesne pred skúškou z teoretickej mechaniky sa vám v skorých ranných hodinách prisnil Hamiltonián systému s jedným stupňom voľnosti v nasledujúcom tvare

$$H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}q^{-2}.$$

Vaše podvedomie naplnené znalosťami celého semestra vám našepkáva, že funkcia

$$D(p, q, t) = \frac{1}{2}pq - Ht$$

sa zachováva v čase. Pokúste sa uľaviť vášmu svedomiu a dokázať, že toto tvrdenie naozaj platí.



Šťastné a veselé Vianoce v kruhu Vašich najbližších!