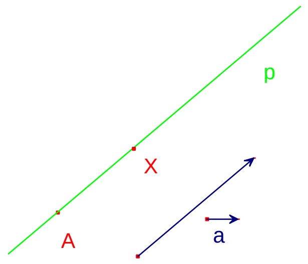
PARAMETRICKÉ VYJADRENIE PRIAMKY V ROVINE

Na určenie priamky potrebujeme poznať jeden jej bod a smer. Smer priamky sa dá definovať viacerými spôsobmi. Jeden z nich je pomocou vektora, s ktorým je priamka rovnobežná (smerového vektora priamky).

Označme:

$X[x;y]$ ... ľubovoľný bod priamky p

$A[x_0;y_0]$ ... bod, ktorý leží na priamke



$\vec{a}=(a_1;a_2)$ ... smerový vektor priamky (ľubovoľný nenulový vektor, ktorý je rovnobežný s priamkou)

Hľadáme vzťah, pomocou ktorého určíme súradnice každého bodu X priamky p.

Vektory $\overrightarrow{AX}$ a $\vec{a}$ sú rovnobežné, teda lineárne závislé, preto platí:

$$\overrightarrow{AX}=t.\vec{a}$$
$$X-A=t.\vec{a}$$
$$X=A+t.\vec{a}$$

Parametrické vyjadrenie priamky v rovine:

Každý bod $X[x;y]$ ležiaci na priamke p so smerovým vektorom $\vec{a}=(a_1;a_2)$ a bodom $A[x_0;y_0]$ ležiacim na priamke vieme zapísať pomocou parametrického vyjadrenia:

$$X=A+t.\vec{a}\,,\ t\in R \quad \text{(t je parameter)}$$

Parametrické rovnice priamky: $p:\ x=x_0+t.a_1$
$\qquad y=y_0+t.a_2$

Napríklad: $p:\ x=7+2t$
$\qquad y=3-t$

Príklad 1

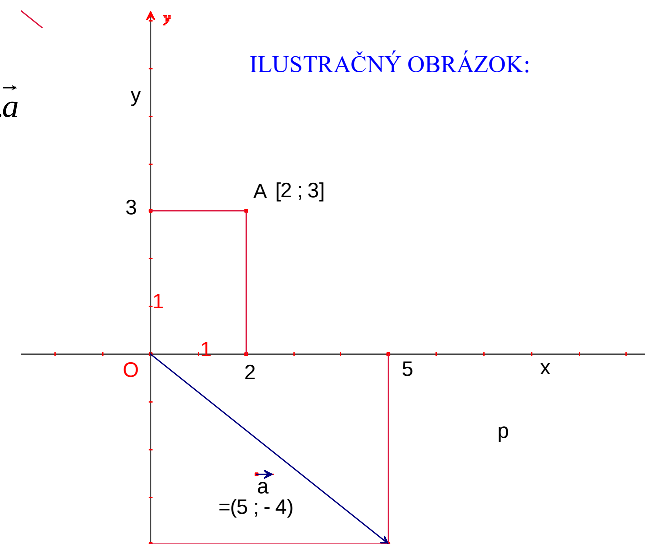
Napíšte parametrické rovnice priamky p, ktorá prechádza bodom $A[2;3]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a}=(5;-4)$

Riešenie:

Parametrické vyjadrenie priamky je: $X=A+t.\vec{a}$

Parametrické rovnice priamky p sú:

$$\boxed{\begin{aligned}p:\ x&=2+5t\\ y&=3-4t\end{aligned}}$$



Príklad 2

Napíšte parametrické rovnice priamky p, ktorá prechádza bodmi $A[-9;2]$ a $B[-1;5]$.

Riešenie:

K parametrickému vyjadreniu priamky potrebujeme poznať jeden bod ktorým priamka prechádza a jej smerový vektor. Bod poznáme. Nájdeme smerový vektor tejto priamky. Môže to byť napríklad $\overrightarrow{AB}$, pretože body A a B ležia na tejto priamke.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1-(-9);5-2) = (8;3)$

Parametrické rovnice priamky p sú:

$$\boxed{\begin{aligned} p:\ x &= -9+8t \\ y &= \ \ 2+3t \end{aligned}}$$

Príklad 3

Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $A[-4;7]$ a je rovnobežná s priamkou $\begin{aligned} p:\ x &= -2+\ t \\ y &= \ \ 5+2t \end{aligned}$.

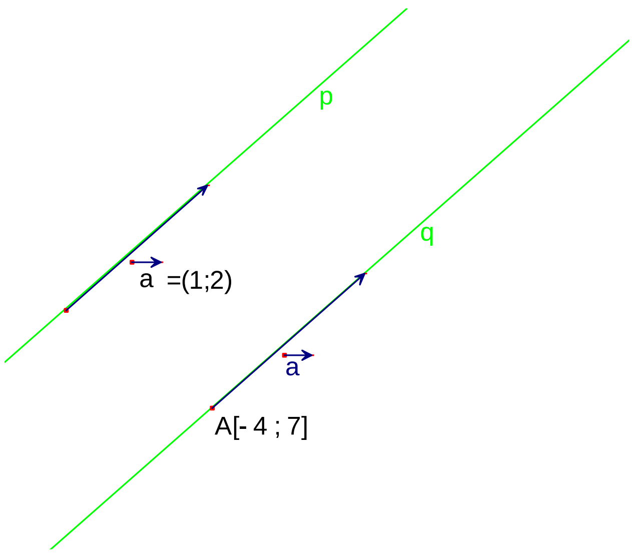
Riešenie:

Keďže priamky p a q sú rovnobežné, majú rovnaké smerové vektory:

$\overrightarrow{a_p} = \overrightarrow{a_q} = (1;2)$

Výsledok: Parametrické rovnice priamky „q“ sú: $\boxed{\begin{aligned} q:\ x &= -4+\ t \\ y &= \ \ 7+2t \end{aligned}}$

ILUSTRAČNÝ OBRÁZOK:



Príklad 4

Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá prechádza bodom $A[3;-1]$ a je kolmá na priamku $\begin{aligned} p:\ x &= \ \ 5+2t \\ y &= -4+\ \ t \end{aligned}$.

Riešenie:

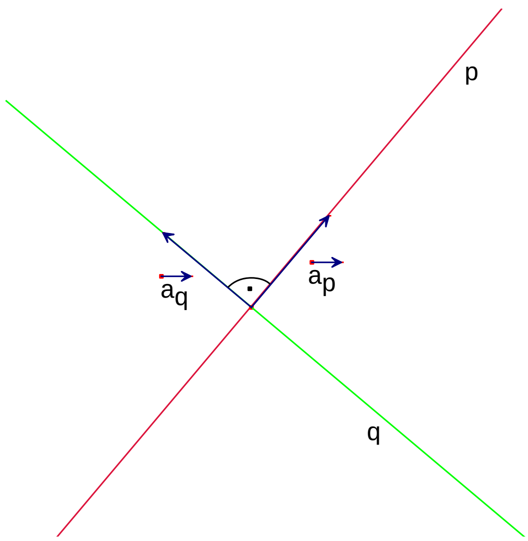
Keďže priamky p a q sú na seba kolmé, skalárny súčin ich smerových vektorov sa rovná nule. Nájdeme smerový vektor priamky q.

$\overrightarrow{a_p} = (2;\ 1)$

$\overrightarrow{a_q} = (1;-2)$ (súradnice $\overrightarrow{a_q}$ doplníme tak, aby platilo: 2 . 1 + 1 . (-2) = 0)

Výsledok: Parametrické rovnice priamky „q“ sú: $\boxed{\begin{aligned} q:\ x &= \ \ 3+\ t \\ y &= -1-2t \end{aligned}}$

ILUSTRAČNÝ OBRÁZOK:



Príklad 5

Nájdite dva body K, L, ktoré ležia na priamke $\begin{aligned} p:\ x &= \ \ 4+3t \\ y &= -1+\ 5t \end{aligned}$

Riešenie:

Súradnice každého bodu priamky p dostaneme tak, že si za „t“ zvolíme ľubovoľné reálne číslo. Napríklad:

t = 2

$\begin{aligned} p:\ x &= \ \ 4+3.2 = 4+6 = 10 \\ y &= -1+\ 5.2 = -1+10 = 9 \end{aligned}$ $\boxed{K[10;9]}$

t = -1

$$p: \; x = 4 + 3.(-1) = 4 - 3 = 1$$
$$y = -1 + 5.(-1) = -1 - 5 = -6$$

$$\boxed{L[1;-6]}$$

Príklad 6

Zistite, či body $M[3;-2]$ a $N[-4;6]$ ležia na priamke $p: \; x = 1 - 5t, \; y = 2 + 4t$

Riešenie:
Do parametrických rovníc priamky p dosadíme súradnice bodu M (za x = 3, za y = –2) a z každej rovnice vypočítame t. Ak sa vypočítané čísla budú rovnať, bod M leží na priamke p, ak budú rôzne, bod M na priamke p neleží. To isté urobíme aj s bodom N.

M:

$3 = 1 - 5t$ $\qquad$ $-2 = 2 + 4t$

$2 = -5t$ $\qquad$ $-4 = 4t$

$t = -\frac{2}{5}$ $\qquad$ $t = -1$

$$\boxed{-\frac{2}{5} \neq -1 \quad \Rightarrow \quad M \notin p}$$

N:

$-4 = 1 - 5t$ $\qquad$ $6 = 2 + 4t$

$-5 = -5t$ $\qquad$ $4 = 4t$

$t = 1$ $\qquad$ $t = 1$

$$\boxed{1 = 1 \quad \Rightarrow \quad N \in p}$$

CVIČENIE

1) Napíšte parametrické rovnice priamky p, ktorá:

a) prechádza bodom $A[1;-3]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a} = (3;-1)$

b) prechádza bodom $A[6;4]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a} = (-5;2)$

c) prechádza bodom $A[-1;1]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a} = (-1;-4)$

d) prechádza bodom $A[8;0]$ a je rovnobežná s vektorom $\vec{a} = (9;0)$

2) Napíšte parametrické rovnice priamky p, ktorá prechádza bodmi

a) $A[-5;-2]$ a $B[9;2]$

b) $C[4;-5]$ a $D[-2;2]$

c) $E[-1;4]$ a $F[-5;-3]$

d) $G[0;2]$ a $H[-5;0]$

3) Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá:

a) prechádza bodom $A[4;-1]$ a je rovnobežná s priamkou $p:\ \begin{aligned} x &= 3+2t \\ y &= -1+4t \end{aligned}$

b) prechádza bodom $A[0;7]$ a je rovnobežná s priamkou $p:\ \begin{aligned} x &= -2+t \\ y &= 5+2t \end{aligned}$

c) prechádza bodom $A[1;-2]$ a je rovnobežná s priamkou $p:\ \begin{aligned} x &= -5+t \\ y &= 5 \end{aligned}$

d) prechádza bodom $A[4;-3]$ a je rovnobežná s priamkou $p:\ \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2+2t \end{aligned}$

4) Napíšte parametrické rovnice priamky q, ktorá:

a) prechádza bodom $A[3;-2]$ a je kolmá na priamku $p:\ \begin{aligned} x &= 2+5t \\ y &= -8+t \end{aligned}$

b) prechádza bodom $A[6;0]$ a je kolmá na priamku $p:\ \begin{aligned} x &= 2+5t \\ y &= -2+3t \end{aligned}$

c) prechádza bodom $A[1;-2]$ a je kolmá na priamku $p:\ \begin{aligned} x &= t \\ y &= 1 \end{aligned}$

d) prechádza bodom $A[4;-3]$ a je kolmá na priamku $p:\ \begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 2-t \end{aligned}$

5) Nájdite štyri body K, L, M, N, ktoré ležia na priamke:

$$p:\ \begin{aligned} x &= 6+3t \\ y &= -2-2t \end{aligned}$$

6) Zistite, či body $A[2;-7]$; $B[-3;5]$; $C[5;8]$ a $D[3;1]$ ležia na priamke

$$p:\ \begin{aligned} x &= 3-t \\ y &= -2-5t \end{aligned}$$

7) Napíšte parametrické vyjadrenie priamok (v priestore), na ktorých ležia strany trojuholníka ABC, keď A[0; 4; 1], B[2; 7; 0] a C[5; 1; 2]. (D.ú.)
Pomôcka: Hľadáme vlastne parametrické vyjadrenia 3 priamok AB, AC a BC.