

Mocniny a odmocniny

Mocniny s prirodzeným exponentom

Definícia: Zápis a^n (čítame „ a na n -tú“), kde $a \in \mathbf{R}$, $n \in \mathbf{N}$, sa nazýva **n -tá mocnina čísla a** a platí: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, pričom $a^1 = a$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$$

Číslo a sa nazýva **základ** (mocnenec) mocniny, číslo n sa nazýva **exponent** (mocniteľ) mocniny.

Príklady: $2^1 = 2$, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

POZOR!!! $a^n \neq a \cdot n$, t.j. $3^2 \neq 3 \cdot 2$ ani $2 \cdot 3$!!!

Pravidlá pre počítanie s mocninami:

- a) $\forall n \in \mathbf{N}: a > 0 \Rightarrow a^n > 0$
- b) $\forall n \in \mathbf{N}: a = 0 \Rightarrow a^n = 0$
- c) $\forall n \in \mathbf{N}, n \text{ je párne}: a < 0 \Rightarrow a^n > 0$
- d) $\forall n \in \mathbf{N}, n \text{ je nepárne}: a < 0 \Rightarrow a^n < 0$
- e) $\forall n \in \mathbf{N}: 1^n = 1$
- f) $\forall r, s \in \mathbf{N}, \forall a, b \in \mathbf{R}: \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}$

D1: Podľa definície $a^r = a \cdot a \dots \cdot a$ a $a^s = a \cdot a \dots \cdot a$. Na pravej strane dostávame súčin $r+s$ čísel a , čo je spätne podľa definície a^{r+s}

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_r \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{r+s} = a^{r+s}$$

$$a^r : a^s = \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}, \quad a \neq 0, \quad r > s$$

D2: Podľa definície $a^r = a \cdot a \dots \cdot a$ a $a^s = a \cdot a \dots \cdot a$. Na pravej strane dostávame zlomok, kde v čitateli je súčin r čísel a a v menovateli súčin s čísel a , čo po vykrátení znamená, že zostane práve súčin $n-m$ čísel a a to je spätne podľa definície a^{r-s}

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}^r}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_s} = a^r : a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_r : \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_s = a^{r-s}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

D3: Podľa definície $a^r = a \cdot a \dots \cdot a$ a $a^s = a \cdot a \dots \cdot a$. Na pravej strane dostávame súčin s čísel a^r , čo je opäť súčin r čísel a , teda dohromady práve súčin $r \cdot s$ čísel a , čo je spätne podľa definície $a^{r \cdot s}$

$$(a^r)^s = \underbrace{a^r \cdot a^r \cdot a^r \dots a^r}_s = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \dots a)}_r \dots \underbrace{(a \cdot a \dots a)}_r}_s = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{r \cdot s} = a^{r \cdot s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

D4: Podľa definície $a^r = a \cdot a \dots \cdot a$ a $b^r = b \cdot b \dots \cdot b$. Na pravej strane dostávame súčin r čísel a krát súčin r čísel b . Platí komutatívnosť, takže môžeme súčin $a \cdot a \dots \cdot a \cdot b \cdot b \dots \cdot b$ preusporiadať tak, že dostaneme $a \cdot b \cdot a \cdot b \dots \cdot a \cdot b$, kde dvojíc $a \cdot b$ je práve r , čo je spätne podľa definície $(a \cdot b)^r$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \dots (a \cdot b)}_n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_n \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots b}_n = a^n \cdot b^n$$

$$a^r : b^r = \left(\frac{a}{b}\right)^r, \quad b \neq 0$$

D5: Podľa definície $a^r = a \cdot a \dots \cdot a$ a $b^r = b \cdot b \dots \cdot b$. Na pravej strane dostávame súčin r čísel a vydelených súčin r čísel b . Pre násobenie zlomkov platí, že násobíme čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom a pretože v čitateli i v menovateli máme len súčiny, tak môžeme zlomok rozdeliť na n zlomkov $\frac{a}{b}$, čo je spätne podľa definície $\left(\frac{a}{b}\right)^r$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \dots \left(\frac{a}{b}\right)}_n = \frac{\overbrace{a \cdot a \dots a}^n}{\underbrace{b \cdot b \dots b}_n} = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \quad b \neq 0$$

Príklady: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ (pravidlo a)
 $0^4 = 0$ (pravidlo b)
 $(-2)^4 = 16$ (pravidlo c)
 $(-2)^3 = -8$ (pravidlo d)
 $1^6 = 1$ (pravidlo e)

Príklady na pravidla f): $2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5 = 32$, $2^{10} : 2^8 = 2^{10-8} = 2^2 = 4$
 (keby neexistovalo toto pravidlo, museli by sme počítat' $2^{10} : 2^8 = 1024 : 256 = 4$)

$$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$$

$$2^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 5)^2 = 10^2 = 100$$

(bez tohto pravidla by sme museli počítat' $2^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 25 = 100$)

$$6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2 = 4$$

(bez tohto pravidla by sme museli počítat' $6^2 : 3^2 = 36 : 9 = 4$).

Mocniny s celočíselným exponentom

Už vieme, že platí $a^r : a^s = a^{r-s}$, napr.: $2^5 : 2^3 = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

Čo keď ale bude prvý exponent menší než druhý? Potom nám podľa rovnakého pravidla vyjde napr. $2^3 : 2^5 = 2^{3-5} = 2^{-2}$

Keď ale nepoužijeme toto pravidlo, ale napíšeme si podiel v tvare zlomku, ktorý potom vykrátíme, dostaneme pre rovnaký príklad:

$$2^3 : 2^5 = \frac{2^3}{2^5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2^2}$$

Nakoľko oba postupy sú správne, musia sa rovnať aj výsledky, t.j. platí: $2^{-2} = \frac{1}{2^2}$

Podobne môžeme počítat' buď $2^3 : 2^3 = 8 : 8 = 1$ alebo $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^0$ odkiaľ dostávame $2^0 = 1$

Obecne sa definujú mocniny so záporným exponentom takto:

$$\forall k \in \mathbb{Z}, k < 0, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0: a^k = \frac{1}{a^{-k}}$$

Pre výpočty s mocninami so záporným exponentom platia rovnaké pravidla ako pre počítanie s mocninami s prirodzeným exponentom.

Podobne platí: $\forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0: a^0 = 1$

Príklady:

$$5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{2^4}{3^4}} = \frac{3^4}{2^4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4, \quad (-0,153)^0 = 1$$

Platí: $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\}: \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

POZOR: 0^0 nie je definované !

Mocniny s racionálnym exponentom

Nech $\sqrt[3]{a^6} = b$, t.j. podľa definície odmocniny platí $b^3 = a^6$ alebo $b.b.b = a^2.a^2.a^2$,

t.j. $b = a^2$ alebo $b = a^2 = a^{\frac{2}{1}} = a^{\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 3}} = a^{\frac{6}{3}}$

Záver: $\sqrt[3]{a^6} = a^{\frac{6}{3}}$

Definícia:

$$\forall a \in \mathbb{R}^+, \forall r \in \mathbb{Z}, \forall s \in \mathbb{N}: a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$$

Príklady: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^1} = 2$ alebo $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

$$243^{0,2} = 243^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{243} = \sqrt[5]{3^5} = 3$$

Úlohy – súhrn:

1) Vypočítajte spamäti:

a) 300^1

b) 0^7

c) 2^5

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

2) Vypočítajte:

a) $\frac{2^5 \cdot 2^7}{2^{10}}$

b) $\frac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^5 \cdot 3^2}$

c) $\frac{(2^3 \cdot 3^2)^3}{(2 \cdot 3)^5}$

3) Dané výrazy vyjadrite ako mocniny so základom 2 alebo 3 a vypočítajte :

a) $\frac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\frac{81}{64}\right)^3$

b) $\frac{9^5 \cdot 2^7}{27^2 \cdot 96} \cdot \frac{36}{6^3}$

4) Vypočítajte:

a) $\frac{2(ab)^3}{3a^2b} \cdot \frac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$

b) $\frac{5a^3b^7}{2ab^6} \cdot \left(\frac{2a^2b^3}{ab^2}\right)^3$

c) $\frac{2x^5y^4}{(2x^2y)^2} \cdot \left(\frac{xy}{2xy^2}\right)^3$

5) Vypočítajte:

a) $2^0, 2^2, -2^2, (-2)^2, \left(\frac{2}{3}\right)^3$; $0,05^2$; $(-0,2)^4$ b) $2^{12} \cdot 2^8 \cdot 2^{21}, (2^2)^3 \cdot (2^3)^2 \cdot (2^4)^3$

c) $5 \cdot 0,2^2 + (5 \cdot 0,2)^2$

6) Vypočítajte:

$$\text{a) } 2^0, 2^{-2}, -2^{-2}, (-2)^{-2}; 0,05^{-2}; (-0,2)^{-4} \quad \text{b) } 2^8 \cdot 2^{24} \cdot 2^{-36}, \frac{2^{-17} \cdot 2^{12}}{2^{-8}}, (2^{-2})^{-3} \cdot (2^2)^{-3} \cdot (2^{-4})^{-3}$$

$$\text{c) } -\left(\frac{10^{-15} \cdot 10^4}{10^{-13}}\right)^2 \quad \text{d) } \frac{1300^2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-20}}{(2 \cdot 10^{-5})^3}$$

7) Vypočítajte:

$$\text{a) } 25^{\frac{1}{2}} \quad \text{b) } 8^{\frac{1}{3}} \quad \text{c) } 5 \cdot 16^{\frac{1}{4}} \quad \text{d) } 8^{\frac{2}{3}} \quad \text{e) } 2^{-2} \cdot 64^{-\frac{1}{2}} \quad \text{f) } 100^{-\frac{1}{2}}$$

8) Vypočítajte a uveďte podmienky, pri ktorých majú zmysel výrazy:

$$\text{a) } a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{5}} \cdot a^{\frac{3}{2}} \quad \text{b) } (x-y)^{\frac{2}{3}} \cdot (y-x)^{\frac{3}{4}}$$

$$\text{c) } \left(a^{\frac{7}{4}}\right)^{\frac{1}{9}} \cdot \left(a^{\frac{13}{12}}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(a^{\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{d) } 3 \cdot a^{\frac{7}{10}} \cdot a^{\frac{2}{5}} \cdot 2a^{\frac{15}{14}} : a^{\frac{9}{28}}$$

$$\text{e) } \left(a^{\frac{1}{2}} + 1\right)^2 - \left(a^{\frac{1}{2}} - 1\right)^2 \quad \text{f) } \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}+1} + \frac{a-1}{a^{\frac{1}{2}}-1}$$

9) Napíšte pomocou jednej odmocniny:

$$\text{a) } a^{\frac{1}{2}} \quad \text{b) } b^{-\frac{2}{3}} \quad \text{c) } 7^{-\frac{7}{2}} \quad \text{d) } y^{-0,13}$$

10) Zapište ako odmocniny

$$\text{1.) } 3^{0,5}, 5^{0,75}, 0,25^{\frac{2}{9}}, 1,75^{-\frac{1}{9}}, 15^{-\frac{4}{7}}$$

$$\text{2.) } x^{\frac{2}{3}}, y^{\frac{6}{11}}, x^{-0,25}, x^{-0,8}, y^{\frac{17}{6}}$$

11) Zapište v tvare mocniny s racionálnym exponentom:

$$\text{1.) } \sqrt{7}, \sqrt[3]{9^2}, \sqrt[5]{0,4^2}, \sqrt[5]{0,4^{-2}}, \sqrt[4]{\left(\frac{1}{3}\right)^5}, \sqrt[4]{\frac{1}{3^5}}, \sqrt[3]{6^{-2}}$$

$$\text{2.) } \sqrt[4]{x}, \sqrt[3]{x^2}, \sqrt[7]{\left(\frac{1}{x}\right)^3}, \sqrt[5]{\left(\frac{1}{x}\right)^{-3}}, \sqrt{x^{-3}}, \sqrt[6]{x^{-9}}$$

12) Upravte:

$$\text{1.) a) } 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{b) } 0,5^{\frac{6}{7}} \cdot 0,5^{-\frac{5}{14}} \quad \text{c) } 2^{-\frac{2}{15}} \cdot 2^{-\frac{9}{30}} \quad \text{d) } 5^{\frac{2}{3}} : 5^{\frac{1}{3}} \quad \text{e) } 11^{-\frac{3}{4}} : 11^{-\frac{5}{8}} \quad \text{f) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} : \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$$

$$2.) \quad a) \left(5^{\frac{3}{7}}\right)^2 \quad b) \left(3^{-\frac{1}{8}}\right)^{1,25} \quad c) \left(0,3^{-\frac{9}{5}}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad d) (2^{-7})^{-\frac{2}{3}} \quad e) \left(1,8^{-\frac{4}{7}}\right)^{\frac{8}{5}} \quad f) \left(6^{\frac{1}{27}}\right)^{-9}$$

$$3.) \quad a) 2^{\frac{3}{10}} \cdot 3^{\frac{3}{10}} \quad b) 5^{\frac{6}{7}} \cdot 3^{\frac{6}{7}} \quad c) 2^{\frac{1}{10}} \cdot 2^{\frac{1}{5}} \quad d) 4^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{4}{6}}$$

Odmocniny

Definícia odmocniny:

Ku každému nezápornému číslu „ a “ a každému prirodzenému číslu „ n “ existuje práve jedno nezáporné číslo „ b “ také, že platí: $b^n = a$ a zapisujeme $\sqrt[n]{a} = b$.

Pomenovanie: a – základ odmocniny = **odmocnenec**, n – stupeň odmocniny = **exponent**,
 b – hodnota odmocniny = **odmocniteľ**.

$$\forall a \in R_0^+, \forall n \in N, \exists b \in R_0^+ : \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

t.j. n - tá odmocnina z určitého nezáporného čísla je nezáporné číslo, ktoré keď umocníme na n - tú, dostaneme pôvodné číslo.

Príklady:

a) $\sqrt{16} = \sqrt[2]{16} = 4$, lebo $4^2 = 16$ (pokiaľ neuvedieme exponent, ide o druhú odmocninu)

b) $\sqrt[3]{8} = 2$, lebo $2^3 = 8$

c) Nech $\sqrt{-9} = x$ ($x \in R$), potom $x^2 = -9$, t.j. $x \in \emptyset$ $\sqrt{-9}$ neexistuje v R .

d) Nech $\sqrt{25} = 5$, lebo $5^2 = 25$ a $\sqrt{25} = -5$, lebo $(-5)^2 = 25$.

Potom platí: $-5 = \sqrt{25} = 5$, t.j. $-5 = 5$ - **spor**

Poznámky:

1) $\forall R$ je odmocnina definovaná len pre nezáporné čísla a výsledkom odmocniny je tiež len nezáporné číslo.

2) Znamienko odmocniny má tiež aj funkciu zátvoriek – ak máme pod odmocninou výraz, obvykle postupujeme tak, že najskôr vypočítame výraz pod odmocninou a až potom odmocníme.

Pravidlá pre počítanie s odmocninami:

$$b) \forall n \in N: \sqrt[n]{0} = 0$$

$$e) \forall n \in N: \sqrt[n]{1} = 1$$

$$f) \forall n, p \in N, \forall m \in Z, \forall a, b \in R^+:$$

$$1. \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \quad 2. \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}; b \neq 0 \quad 3. (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad 4. \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

$$5. \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Poznámky:

- Pri počítaní s odmocninami je potrebné robiť podmienky, nakoľko výraz pod odmocninou v množine reálnych čísel nemôže nadobudnúť zápornú hodnotu.
- Taktiež je potrebné dávať pozor na zlomky pod odmocninami, vtedy sa menovateľ nesmie rovnať nule.
- Pri riešení úloh s odmocninami je niekedy výhodné tieto odmocniny podľa vzorca $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ zapísať ako mocniny s racionálnym exponentom, vykonať riešenie s týmito mocninami a podľa potreby výsledok znova zapísať v tvare odmocnín.

P.S.: Poriadne ovládať vzorce aspoň pre mocniny !!!

Napr.:

$$\sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{x^{-5}}}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x}}}} = \frac{x^{\frac{3}{3}} \cdot (x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot ((x^{-\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}}{(x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} \cdot ((x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}}} = \frac{x \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{-\frac{5}{12}}}{x^{\frac{1}{12}} \cdot x^{\frac{1}{18}}} = x^{1 + \frac{1}{6} - \frac{5}{12} - \frac{1}{12} - \frac{1}{18}} = x^{\frac{36+6-15-3-2}{36}} =$$
$$= x^{\frac{22}{36}} = x^{\frac{11}{18}} = \sqrt[18]{x^{11}}$$

Príklady:

1) Rozložte **odmocnenca** na súčin prvočísel a potom odmocnite $\sqrt{2450}$ aj použitím pravidiel.

$$\sqrt{2450} = \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{7^2} = 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{2} = 35\sqrt{2}$$

Poznámka: Zápis odmocniny čísla ako **súčin racionálneho čísla a odmocniny s čo najmenším odmocnencom – argumentom** nazývame **čiasťočné odmocnenie**.

2) Vypočítajte bez použitia kalkulačky $\frac{1}{\sqrt{2}}$ na 6 desatinných miest a výsledok zaokrúhlite na 5 desatinných miest, ak $\sqrt{2} \sim 1,41421$.

$$1 : \sqrt{2} \sim 1 : 1,41421 = \begin{array}{r} 1000000 : 1,41421 = 0,707108 \\ \hline 1000000 \\ 989947 \\ \hline 1005300 \\ 989947 \\ \hline 153530 \\ 141421 \\ \hline 1210900 \\ 1131368 \\ \hline 79532 \end{array}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \sqrt{2} : 2 \sim \begin{array}{r} 1,41421 : 2 \\ \underline{14} \\ 14 \\ \underline{14} \\ 2 \\ 2 \\ \underline{20} \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array} = 0,707105$$

Poznámka: Druhý výpočet, keď v menovateli nie je odmocnina, je pre určenie hodnoty bez použitia kalkulačky jednoduchší.

Úprava zlomku, pri ktorej z menovateľa odstránime odmocniny sa nazýva **usmernenie zlomku**. Robí sa **metódou rozšírenia zlomku**:

a) **pre menovateľa** \sqrt{a} :

$$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{(\sqrt{a})^2} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a^2}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$$

napr.: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

pre menovateľa $\sqrt[n]{a^k}$, ak $n > k$ rozšírime zlomok číslom $\sqrt[n]{a^{n-k}}$

napr.: $\frac{1}{\sqrt[5]{8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{2^{5-3=2}}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^{5-3=2}}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3} \cdot \sqrt[5]{2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^3 \cdot 2^2}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}} = \frac{\sqrt[5]{2^2}}{2}$

b) **pre menovateľa** $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ - využíva sa vzorec $(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$:

$$\frac{R}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{R}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{R \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{R \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2} = \frac{R \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a - b}$$

Napr.:

$$\frac{6}{\sqrt{15} - \sqrt{12}} = \frac{6}{\sqrt{15} - \sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{15} + \sqrt{12}}{\sqrt{15} + \sqrt{12}} = \frac{6(\sqrt{15} + \sqrt{12})}{(\sqrt{15} - \sqrt{12})(\sqrt{15} + \sqrt{12})} = \frac{6(\sqrt{15} + \sqrt{12})}{\sqrt{15^2} - \sqrt{12^2}} = \frac{6(\sqrt{15} + \sqrt{12})}{15 - 12} =$$

$$= \frac{6(\sqrt{15} + \sqrt{12})}{3} = 2(\sqrt{15} + \sqrt{12})$$

3) Rozhodnite *bez použitia kalkulačky*, ktoré z čísel má *väčšiu hodnotu*:

a) $3\sqrt{5} \dots a \dots 5\sqrt{3}$: $3\sqrt{5} = \sqrt{9 \cdot 5} = \sqrt{45}$ a $5\sqrt{3} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{75}$

Záver: $45 < 75$, preto $\sqrt{45} < \sqrt{75}$, t.j. $3\sqrt{5} < 5\sqrt{3}$

b) $\sqrt{180} + \sqrt{245} \dots a \dots 29$:

$$\sqrt{180} + \sqrt{245} = \sqrt{36 \cdot 5} + \sqrt{49 \cdot 5} = 6\sqrt{5} + 7\sqrt{5} = 13\sqrt{5} = \sqrt{169 \cdot 5} = \sqrt{845} \text{ a } 29 = \sqrt{841}$$

Záver: ... $\sqrt{180} + \sqrt{245} > 29$

c) $2\sqrt[3]{4} \dots a \dots 4\sqrt{3}$: $2\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8 \cdot 4} = \sqrt[3]{32} = \sqrt[6]{32^2} = \sqrt[6]{1024}$ a

$$4\sqrt{3} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{48} = \sqrt[6]{48^3} = \sqrt[6]{110592}$$

Záver: ... $2\sqrt[3]{4} < 4\sqrt{3}$

Poznámka: Odmocniny *porovnávame* tak, že ich vyjadríme pomocou odmocnín s rovnakým exponentom a potom porovnáme základy odmocnín.

Úlohy – súhrn:

I. Vypočítajte:

- | | | | | |
|--|--|------------------------------|---|---|
| 1. $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$ | 5. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{32}$ | 9. $\sqrt{\frac{16}{25}}$ | 13. $\sqrt{20} \cdot \sqrt{24} \cdot \sqrt{30}$ | 17. $\sqrt[3]{96} : \sqrt[3]{12}$ |
| 2. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{225}$ | 6. $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9}$ | 10. $\sqrt{1\frac{9}{16}}$ | 14. $\sqrt[3]{13\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{11\frac{1}{9}} \cdot \sqrt[3]{2}$ | 18. $\sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{64}$ |
| 3. $\sqrt[3]{\frac{125}{8}}$ | 7. $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$ | 11. $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ | 15. $\sqrt{45} : \sqrt{5}$ | 19. $(\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27}) \cdot \sqrt[5]{32}$ |
| 4. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ | 8. $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$ | 12. $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}$ | 16. $\sqrt{56} : \sqrt{7}$ | 20. $\sqrt{81} \cdot \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[4]{256}}$ |

II. Upravte výraz na tvar súčinu racionálneho čísla a odmocniny čo z najmenšieho prirodzeného čísla (Čiastočne odmocnite):

- | | | | | |
|-----------------|--------------------------|-----------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\sqrt{125}$ | 8. $\sqrt{960}$ | 15. $\sqrt[3]{48}$ | 22. $\sqrt[4]{128}$ | 29. $\sqrt[3]{ab^{10}}$ |
| 2. $\sqrt{240}$ | 9. $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ | 16. $\sqrt[3]{250}$ | 23. $\sqrt[4]{21\,000}$ | 30. $\sqrt[4]{x^5y^4z}$ |
| 3. $\sqrt{315}$ | 10. $\sqrt[3]{16}$ | 17. $\sqrt[3]{x^5}$ | 24. $\sqrt[11]{x^{45}}$ | 31. $\sqrt[4]{81s^4r^8p^{12}}$ |
| 4. $\sqrt{12}$ | 11. $\sqrt[3]{128}$ | 18. $\sqrt[3]{54}$ | 25. $\sqrt{9a^3b}$ | 32. $\sqrt[10]{x^{20}y^{10}z}$ |
| 5. $\sqrt{50}$ | 12. $\sqrt[3]{320}$ | 19. $\sqrt[3]{\frac{3}{8}}$ | 26. $\sqrt{4a^5b^3}$ | 33. $\sqrt[3]{625a^6b^7}$ |
| 6. $\sqrt{128}$ | 13. $\sqrt[3]{500}$ | 20. $\sqrt[4]{162}$ | 27. $\sqrt{27a^9b^{11}c^{21}}$ | 34. $\sqrt[3]{1000}$ |
| 7. $\sqrt{72}$ | 14. $\sqrt[3]{80}$ | 21. $\sqrt[4]{0,012}$ | 28. $\sqrt[3]{8a^7b^8}$ | 35. $\sqrt[3]{10\,000}$ |

III. Vyjadrite pomocou jednej odmocniny

- | | | | |
|-----------------------------|---|--|---|
| 1. $\sqrt{\sqrt{2}}$ | 6. $\sqrt{\frac{a}{b}}\sqrt{\frac{a}{b}}$ | 11. $\sqrt[3]{s^3\sqrt{s}}$ | 16. $\sqrt{\sqrt{a}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ |
| 2. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$ | 7. $\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$ | 12. $\sqrt[3]{x^3\sqrt{x^3\sqrt{x}}}$ | 17. $\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}}{\sqrt[6]{a^5}}$ |
| 3. $\sqrt{2\sqrt{2}}$ | 8. $a^3\sqrt{\frac{b^2}{a\sqrt{ab}}}$ | 13. $\sqrt{\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{ab}}$ | 18. $\sqrt{\frac{3}{5}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{5}}\sqrt[5]{5\cdot\frac{1}{3}}$ |
| 4. $\sqrt{2\sqrt[3]{5}}$ | 9. $\sqrt{\frac{c}{d}}\sqrt[3]{\left(\frac{d}{c}\right)^5}$ | 14. $\sqrt{a^4\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}}$ | 19. $\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}$ |
| 5. $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$ | 10. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$ | 15. $\sqrt{\frac{1}{m^2}}\sqrt{\frac{1}{m}}\sqrt{m}$ | 20. $\sqrt{x^2}:\sqrt[9]{x^5}$ |

IV. Odstráňte odmocninu z menovateľa:

- | | | | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|---|--|-----------------------------------|
| 1. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 5. $\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{12}}$ | 9. $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ | 13. $\frac{5\sqrt{3}-2\sqrt{6}}{2\sqrt{12}}$ | 17. $\frac{4}{\sqrt{2ab}}$ |
| 2. $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ | 6. $\frac{\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[4]{5}}$ | 10. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$ | 14. $\frac{3}{2\sqrt{11}+5\sqrt{2}}$ | 18. $\frac{4x^2}{\sqrt{8xy^3}}$ |
| 3. $\frac{3}{\sqrt{5}}$ | 7. $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ | 11. $\frac{1}{2-3\sqrt{7}}$ | 15. $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{27}-\sqrt{12}}$ | 19. $\sqrt{\frac{1}{5}}$ |
| 4. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ | 8. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ | 12. $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$ | 16. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2\sqrt{10}-\sqrt{3}}$ | 20. $\sqrt{\frac{4}{1-\sqrt{2}}}$ |

V. Určte, kedy majú dané výrazy zmysel a potom ich zjednodušte:

1. $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{18x} + 4\sqrt{50x}$
2. $\sqrt{7y} + \sqrt{28y} - \sqrt{63y} + 2\sqrt{7}$
3. $\sqrt[3]{y} + 2\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{27y} + 2\sqrt[3]{y} - \sqrt[4]{81x}$
4. $\sqrt{4+4x^2} + 2\sqrt{+9x^2} - 5\sqrt{1+x^2}$

1. Rozhodnite, ktoré z daných čísel sú prirodzené a ktoré iracionálne čísla:

- a) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{12}$ b) $\sqrt{361}, \sqrt{444}, \sqrt{225}$

2. Pre ktoré x majú zmysel výrazy:

- a) $\sqrt{2x-1}$ b) $\sqrt{1-3x}$ c) $\sqrt{-x}$
d) $\sqrt{7x-4}$ e) $\sqrt{x^2-1}$ f) $\sqrt{9-25x^2}$

3. Čiastočne odmocnite:

- a) $\sqrt{50}$ b) $\sqrt{112}$ c) $\sqrt{35,2}$ d) $\sqrt[3]{54}$
e) $\sqrt[3]{9000}$ f) $\sqrt[3]{162}$ g) $\sqrt[3]{243}$ h) $\sqrt[3]{46208}$
i) $\sqrt[3]{500000}$ j) $\sqrt{0,125}$ k) $\sqrt[3]{0,125}$ l) $\sqrt{0,8}$
m) $\sqrt[3]{0,008}$ n) $\sqrt[3]{625}$ o) $\sqrt{52272}$

4. Upravte podľa viet o počítaní s odmocninami a uveďte, kedy majú zmysel:

- a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{125}$ b) $\sqrt{72} \cdot \sqrt{2}$ c) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{180} \cdot \sqrt{40}$
d) $\sqrt[3]{1,6} \cdot \sqrt[3]{8,8} \cdot \sqrt[3]{0,66} \cdot \sqrt[3]{25}$ e) $\sqrt{3\frac{1}{7}} \cdot \sqrt{2,4} \cdot \sqrt{7,6}$ f) $\sqrt[3]{a^{r-1}} \cdot \sqrt[3]{a^{4-r}} \cdot \sqrt[3]{a^{3 \cdot (r-1)}}$
g) $\sqrt[4]{x^7} \cdot \sqrt[4]{27x^3} \cdot \sqrt[4]{27x}$ h) $\sqrt[3]{a^{2n+1}}$

5. Vypočítajte:

- a) $\sqrt{49,64}$ b) $\sqrt[3]{0,5} \cdot \sqrt[3]{0,25}$ c) $\sqrt{\frac{81}{7}}$ d) $\frac{\sqrt[3]{72}}{\sqrt[3]{9}}$
e) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{27}}$ f) $(\sqrt[3]{a^4})^5$ g) $\sqrt[9]{a^6 b^3}$

6. Vypočítajte a uveďte kedy majú výrazy zmysel:

- a) $\sqrt[3]{(25a^4 b^5)^2}$ b) $(\sqrt{2x^2} \cdot \sqrt[3]{5x^4} \cdot \sqrt{4x^5})^6$ c) $\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[12]{a^{13}}$
d) $\sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{100} \cdot \sqrt[3]{0,0001}$ e) $\sqrt[3]{x^2 - y^2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2}$ f) $\sqrt[3]{9a} \cdot \sqrt{\frac{a^2}{16}} \cdot \sqrt{81a^4}$
g) $\sqrt{\frac{a}{b}} \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2}{b^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{a^3}{b^3}}$ h) $\sqrt[9]{\frac{(xy+y^2)^6}{(x^2-xy)^4}} : \sqrt[6]{\frac{(xy-y^2)^4}{(x^2+xy)^3}}$ i) $\sqrt[9]{\frac{625a^{13}b^9}{5c^5}} : \sqrt{\frac{5a^{11}b^7}{c^3}}$
j) $\sqrt{\frac{2a^3}{3b^2}} : \left(\sqrt[3]{\frac{3a^4}{4b^5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{6a}{b^5}} \right)$

7. Upravte podľa viet o počítaní s mocninami a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

- a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[6]{2} \cdot \sqrt[12]{2}$ b) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[12]{16}$ c) $\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[5]{16} \cdot \sqrt[15]{32}$
d) $2\sqrt{6} \cdot \sqrt[4]{12} \cdot \sqrt[8]{24}$ e) $\sqrt[18]{x^{2n+6}} \cdot \sqrt[12]{x^{2n+3}}$ f) $\sqrt[15]{a^{2x+3y}} : \sqrt[12]{a^{2y-3x}}$
g) $\sqrt[n]{a^{1-2n}} \cdot \sqrt[n+1]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}} \cdot \sqrt[n+1]{a^{1+2n}}$ h) $\sqrt[3]{x^{2n-5}} : \sqrt[5]{x^{4n-5}}$

8. Vypočítajte:

- a) $2\sqrt{5} - \sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} - \sqrt{27} + \sqrt{12}$
c) $\sqrt{2} - 7\sqrt{2} + \sqrt[4]{4} + 5\sqrt{18}$ d) $(4 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$
e) $\sqrt{75} + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{12}$ f) $\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2^4} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{64.2}$

9. Vypočítajte a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

- a) $2\sqrt{2x^3} + \sqrt{18x^3} + x\sqrt{8x}$ b) $(1 - \sqrt[3]{x^2}) \cdot \sqrt[3]{x} - 1$
c) $(\sqrt{1+a} + \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{1+a})$ d) $6\sqrt{2a} + \sqrt[4]{64a^2} - \sqrt{18a^3}$

10. Vypočítajte a uveďte, kedy majú výrazy zmysel:

- a) $\sqrt[3]{16x^2y} + \sqrt{4x^2z} - \sqrt{x^2y} - \sqrt[3]{54x^2y} - \frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{125x^3y}{9}}$
b) $5\sqrt[3]{a^2b^5} + 2b^2\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}} + \frac{4b}{a^2}\sqrt[3]{a^8b^2} - 6ab\sqrt[3]{\frac{b^2}{a}} - \frac{3}{2}ab^2\sqrt[3]{\frac{8}{ab}}$
c) $\left(\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{y}} - \sqrt{\frac{1}{xy}}\right) \cdot \sqrt{xy}$
d) $3\sqrt[3]{54} + 4\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2} + 6\sqrt[3]{128}$
e) $\sqrt{3}(\sqrt{5} + \sqrt{6}) + \sqrt{5}(\sqrt{3} + \sqrt{6}) - \sqrt{6}(\sqrt{3} + \sqrt{5})$

11. Odstráňte odmocninu z menovateľa:

- a) $\frac{8}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{15}{\sqrt{3}}$ c) $\frac{3 - \sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ d) $\frac{5 + \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 4}$ f) $\frac{6}{\sqrt{11} - \sqrt{10}}$ g) $\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} - 5\sqrt{5}}$ h) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 3}$
i) $\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}}$ j) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ k) $\sqrt[3]{\frac{6\sqrt{5}}{5\sqrt{3}}}$ l) $\sqrt[4]{\frac{2}{5}}$
m) $\frac{\sqrt[3]{45}}{\sqrt[4]{5^3\sqrt{3^2.5}}}$ n) $\frac{1}{5 - \sqrt{2}}$ o) $\frac{26}{\sqrt{3} - 4}$

12. Upravte lomené výrazy a uveďte, kedy majú zmysel:

- a) $\frac{x}{\sqrt{x}}$ b) $\frac{1-a}{1+\sqrt{a}}$ c) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$ d) $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$
e) $\frac{ab\sqrt{a}}{\sqrt{a^3\sqrt{ab^2}}}$ f) $\frac{b-a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$

13. Vypočítajte a výsledné zlomky upravte. Uveďte, kedy majú dané lomené výrazy zmysel:

a) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

b) $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

c) $\frac{a+\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}}-\frac{a-\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}}$

d) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}+\frac{3\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}-\frac{3+\sqrt{x}}{1-x}$

14. Vypočítajte:

a) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}}$

b) $\frac{6}{\sqrt{\sqrt{10}-2\sqrt{2}}}$

c) $\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$

d) $\left(\sqrt{8+\sqrt{15}}-\sqrt{8-\sqrt{15}}\right)^2$

15. Napíšte pomocou jednej mocniny:

a) $\sqrt[3]{a}$

b) $\sqrt[4]{a^3}$

c) $\left(\sqrt[4]{c}\right)^7$

d) $\sqrt[4]{a^{-5}}$

16. Upravte na jednu mocninu:

a) $\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}}$

b) $\left(\frac{x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{7}{6}}}\right)^{-2}$

c) $\frac{\sqrt{x^3\sqrt{x^4x}}}{\sqrt[4]{x^3\sqrt{x\sqrt{x}}}}$

17. Upravte na odmocninu z čo najmenšieho prirodzeného čísla:

a) $\sqrt{8}$

b) $\sqrt[3]{50625}$

c) $\sqrt[5]{216}$