

LINEÁRNE ROVNICE S ABSOLÚTNOU HODNOTOU

Lineárnou rovnicou s absolútnou hodnotou nazývame každú rovnicu (s neznámou $x \in \mathbb{R}$) tvaru
 $|a_1x + b_1| + |a_2x + b_2| + \dots + |a_nx + b_n| = |a_0x + b_0|,$

kde a_i, b_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) sú dané reálne čísla.

Metóda nulových bodov :

Rovnica sa rieši úpravou na lineárne rovnice bez absolútnej hodnoty v intervaloch, na ktoré je rozdelená množina \mathbb{R} nulovými bodmi. Nulové body sú čísla, pre ktoré sa $a_ix + b_i = 0$, teda sú to čísla $-b_i/a_i$, pre $i = 1, 2, \dots, n$. V týchto bodoch sa mení znamienko výrazu v absolútnej hodnote, preto aj úprava absolútnej hodnoty.

Príklad 1: Riešte v \mathbb{R} rovnicu : $|x + 2| + |x - 2| = 8$.

Riešenie:

Určíme nulové body výrazov $(x + 2)$ a $(x - 2)$. Teda zistíme, pre ktoré hodnoty premennej x sa rovnajú nule: $x + 2 = 0$ a $x - 2 = 0$. Označíme $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ ($x_1 < x_2$). Množina \mathbb{R} je nimi rozdelená na intervaly : $I_1 = (-\infty, -2)$, $I_2 = [-2, 2]$, $I_3 = (2, +\infty)$, na ktorých je možné danú rovnicu s absolútnymi hodnotami upraviť na rovnice bez absolútnych hodnôt. Stačí určiť znamienka ľubovoľných hodnôt dvojčlenov $x + 2$, $x - 2$ vo vnútri intervalov I_1, I_2, I_3 :

x	$I_1 = (-\infty, -2)$	$I_2 = [-2, 2]$	$I_3 = (2, +\infty)$
$ x + 2 $	$-x - 2$	$x + 2$	$x + 2$
$ x - 2 $	$-x + 2$	$-x + 2$	$x - 2$

$$I_1: -x - 2 - x + 2 = 8 \quad I_2: x + 2 - x + 2 = 8 \quad I_3: x + 2 + x - 2 = 8$$

$$x = -4 \in I_1 \quad 4 \neq 8 \quad x = 4 \in I_3$$

$$K_1 = \{-4\} \quad K_2 = \emptyset \quad K_3 = \{4\}$$

$$\text{Výsledok: } K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{-4, 4\}$$

Príklad 2. Riešte v \mathbb{R} rovnicu: $|2x + 1| - |3x + 2| - x = 0$.

Nulové body: $-1/2$; $-2/3$

	$I_1 = (-\infty; -2/3)$	$I_2 = [-2/3; -1/2)$	$I_3 = [-1/2; \infty)$
$ 2x + 1 $	$-2x - 1$	$-2x - 1$	$2x + 1$
$- 3x + 2 $	$3x + 2$	$-3x - 2$	$-3x - 2$
$-x$	$-x$	$-x$	$-x$

$$1 \neq 0 \quad -6x - 3 = 0 \quad -2x - 1 = 0$$

$$x = -1/2$$

$$x = -1/2$$

$$K_1 = \emptyset$$

$$K_2 = \{ \}$$

$$K_3 = \{-1/2\}$$

$$K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{-1/2\}$$

Príklad 3. Riešte v \mathbb{R} rovnicu: $|5 - x| = |x - 3| + 2|x + 1|$.

Rovnicu upravíme na tvar: $|5 - x| - |x - 3| - 2|x + 1| = 0$

Nulové body: 5, 3, -1

	$(-\infty; -1)$	$< -1; 3)$	$< 3; 5)$	$< 5; \infty)$
$ 5 - x $	$5 - x$	$5 - x$	$5 - x$	$x - 5$
$- x - 3 $	$x - 3$	$x - 3$	$-3 + x$	$-3 + x$
$-2 x + 1 $	$2x + 2$	$-2x - 2$	$-2x - 2$	$-2x - 2$

$$2x + 4 = 0$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$K_1 = \{-2\}$$

$$-2x + 0 = 0$$

$$x = 0$$

$$K_2 = \{0\}$$

$$-2x + 0 = 0$$

$$x = 0$$

$$K_3 = \emptyset$$

$$-10 = 0$$

$$K_4 = \emptyset$$

$$\underline{K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 \cup K_4 = \{-2, 0\}}$$

Úlohy:

1) V nasledovných úlohách riešte rovnice v \mathbb{R} :

a) $|x - 5| = 2$

NB: $x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$

	$I_1 = (-\infty; 5)$	$I_2 = < 5; \infty)$
$ x - 5 $	$-x + 5$	$x - 5$

$$-x + 5 = 2$$

$$-x = -3$$

$$x = 3 \in I_1$$

$$x - 5 = 2$$

$$x = 7 \in I_2$$

$$K_1 = \{3\}$$

$$K_2 = \{7\}$$

$$\underline{K = K_1 \cup K_2 = \{3, 7\}}$$

b) $|x - 1| = 7$ (D. ú.)

c) $|x + 3| = 6$

d) $|x + 5| = 2$

2) V nasledovných úlohách riešte rovnice v \mathbb{R} :

a) $|x + 3| = 2x + 3$

NB: $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

	$I_1 = (-\infty; -3)$	$I_2 = < -3; \infty)$
$ x + 3 $	$-x - 3$	$x + 3$

$$-x - 3 = 2x + 3 \quad /-2x/+3$$

$$-3x = 6 \quad /:(-3)$$

$$x = -2 \notin I_1$$

$$x + 3 = 2x + 3 \quad /-2x/-3$$

$$-x = 6 \quad /:(-1)$$

$$x = -6 \notin I_2$$

$$K_1 = \{ \}$$

$$K_2 = \{ \}$$

$$\underline{K = K_1 \cup K_2 = \{ \}}$$

b) $|2x+3|=4-x$ (D. ú.)

c) $|x-3|=1-x$

d) $|x+3|=2x-7$

3) V nasledovných úlohách riešte rovnice v R:

a) $|x-2|+|x+2|=2x+2$

NB1: $x=+2$ NB2: $x=-2$

	$I_1 = (-\infty; -2)$	$I_2 = (-2; 2)$	$I_3 = (2; \infty)$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$

$$-x+2-x-2=2x+2$$

$$-2x=2x+2 \quad /-2x$$

$$-4x=2$$

$$x=-1/2 \notin I_1$$

$$K_1 = \{ \}$$

$$-x+2+x+2=2x+2$$

$$4=2x+2 \quad /-2$$

$$2=2x$$

$$x=1 \in I_2$$

$$K_2 = \{1\}$$

$$x-2+x+2=2x+2$$

$$2x=2x+2 \quad /-2x$$

$$0x=2$$

Nemá riešenie

$$K_3 = \{ \}$$

$$\underline{K = K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \{1\}}$$

b) $|x+2|-2|1-x|+6=0$ (D. ú.)

c) $|2x+1|+|2x-1|-3=0$

4) V nasledovných úlohách riešte rovnice v R:

a) $|x+1|+3|x-1|=2|x|+x$,

b) $3|x-1|-2|x|+|x+1|+x-3=0$