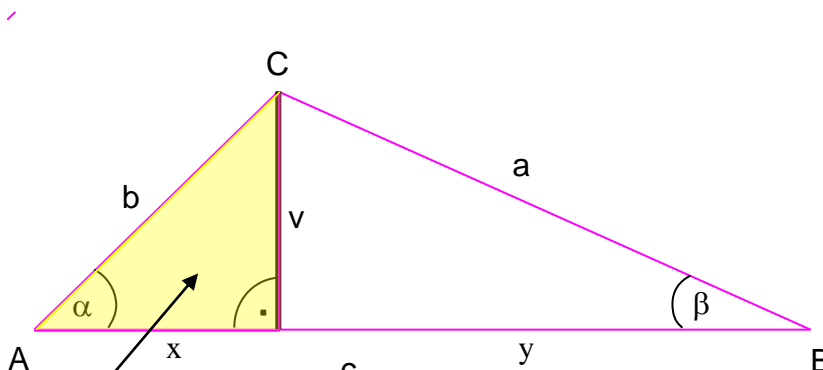


Kosínusová veta pre všeobecný trojuholník

Kosínusová veta je vzťah medzi stranami a vnútornými uhlami všeobecného trojuholníka. Na riešenie trojuholníka ju môžeme použiť vtedy, ak v ňom poznáme všetky tri strany (sss), alebo dve strany a uhol nimi zovretý (sus).



Odvodenie:

$$\cos \alpha = \frac{x}{b}$$

$$x + y = c$$

$$y = c - x$$

$$y^2 = (c - x)^2$$

$$x = b \cdot \cos \alpha$$

$$y^2 = c^2 - 2cx + x^2$$

$$b^2 = x^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = b^2 - x^2$$

$$a^2 = y^2 + v^2 \Rightarrow v^2 = a^2 - y^2$$

$$\Rightarrow b^2 - x^2 = a^2 - y^2$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c^2 - 2cx + x^2)$$

$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 + 2cx - x^2$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx$$

$$b^2 = a^2 - c^2 + 2c \cdot b \cos \alpha$$

$$b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = a^2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

Analogicky cyklickou zámenou strán a uhlov dostaneme ďalšie časti kosínusovej vety.

Kosínusová veta - vzorce

- Nech ABC je ľubovoľný trojuholník s veľkosťami vnútorných uhlov α , β , γ a dĺžkou strán a , b , c . Potom platí:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Kosínusová veta – slovne (nezvykne sa používať)

- Obsah štvorca zostrojeného nad stranou ľubovoľného trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad zvyšnými stranami, ktorý je zmenšený o dvojnásobok súčinu týchto strán a kosínusu uhla medzi nimi.

Príklad číslo 1

$\triangle ABC$

$$a = 8 \text{ cm}$$

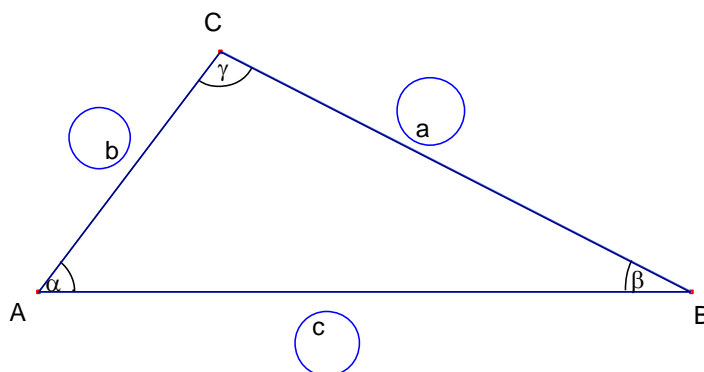
$$b = 7 \text{ cm}$$

$$c = 11 \text{ cm}$$

$$\alpha = ?$$

$$\beta = ?$$

$$\gamma = ?$$



Riešenie:

V trojuholníku poznáme všetky tri strany.

Trojuholník je určený podľa vety sss a budeme ho riešiť kosínusovou vetou.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma = 180^\circ - (46^\circ 30' 12,19'' + 39^\circ 24' 2,05'')$$

$$\gamma = 94^\circ 5' 45,76''$$

$$2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{7^2 + 11^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 11}$$

$$\alpha = 46^\circ 30' 12,19''$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$2ac \cdot \cos \beta = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos \beta = \frac{8^2 + 11^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 11}$$

$$\beta = 39^\circ 24' 2,05''$$

Príklad číslo 2

$\triangle ABC$

$$a = 10 \text{ cm}$$

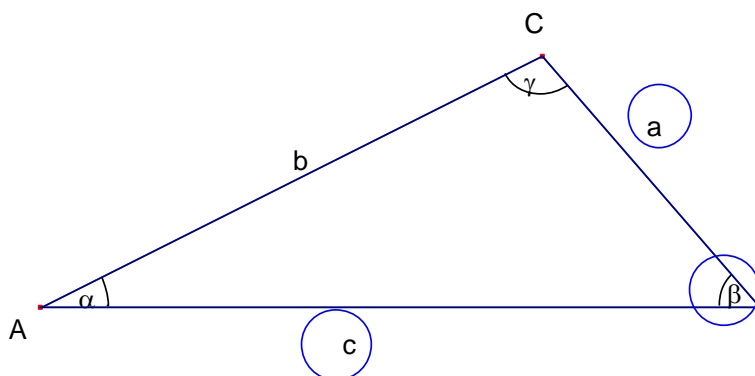
$$c = 16 \text{ cm}$$

$$\beta = 41^\circ$$

$$b = ?$$

$$\alpha = ?$$

$$\gamma = ?$$



Riešenie:

V trojuholníku poznáme dve strany a uhol nimi zovretý.

Trojuholník je určený podľa vety sus a budeme ho riešiť kosínusovou vetou.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$$

$$b^2 = 10^2 + 16^2 - 2 \cdot 10 \cdot 16 \cdot \cos 41^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (37^\circ 48' 58,58'' + 41^\circ)$$

$$b^2 = 100 + 256 - 320 \cdot 0,75470958$$

$$\gamma = 101^\circ 11' 1,42''$$

$$b^2 = 356 - 241,5070657$$

$$b^2 = 114,4929343$$

$$b = \sqrt{114,4929343}$$

$$b = 10,70013712 \text{ cm}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$2bc \cdot \cos \alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos \alpha = \frac{114,4929343 + 16^2 - 10^2}{2 \cdot 10,70013712 \cdot 16}$$

$$\alpha = 37^\circ 48' 58,58''$$

Úlohy:

Určte dĺžky zvyšných strán a veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku ABC, ak je dané:

- 1) $a = 16,9$; $b = 21,8$; $c = 19,4$
- 2) $a = 2,4$; $b = 2,4$; $c = 1,8$
- 3) $b = 64,1$; $c = 29,3$; $\alpha = 48^{\circ}20'$
- 4) $a = 0,15$; $c = 0,27$; $\beta = 64^{\circ}35'$