

# Metódy dôkazov v matematike

## 1. Úvod

Živý jazyk je príliš bohatý pre potreby matematiky. Význam jednotlivých slov je výsledkom dlhého historického vývoja. Jedno slovo môže mať rôzny význam ( napr. hlavička je časť klinca, ale aj o múdrom človeku môžeme povedať „ To je ale hlavička ! “ ), alebo jedna vec môže byť označená viacerými pojmami ( napr. chyba je omyl ). Niekedy závisí od situácie, ktorý pojem je vhodné použiť ( napr. väčšina domčekov je zároveň budovami, ale nie každá budova je domčekom ). Preto nie vždy rozumieme všetci to isté, keď počujeme nejaké slovo alebo vetu.

V matematike existuje spôsob, ako predísť takýmto nedorozumeniam – **celá matematika je postavená na niekoľkých základných pojmoch** ( množina, bod, číslo, ... ) a niekoľkých tvrdeniach ( výrokoch ) o nich. Tieto tvrdenia sa nazývajú **axiomy**. Všetky ostatné pojmy, ktoré sa v matematike používajú, je treba definovať, t.j. popísať pomocou základných pojmov alebo iných – predtým definovaných – pojmov. Rozlišujte pojmy **definícia** – definíciou sa popisuje nový pojem – a **matematická veta** – veta je tvrdenie o vlastnostiach pojmov. Všetky **tvrdenia v matematike treba dokázať** ( odvodiť ) pomocou axióm alebo iných predtým dokázaných tvrdení.

Pomocou tohto učebného textu sa dozvieme, ktoré metódy sa používajú pri dokazovaní matematických tvrdení a ako treba pri dokazovaní postupovať.

### 1. úloha :

Zopakujte si, čo je výrok, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku, hypotéza, implikácia, obmena implikácie. Ako symbolicky zapíšeme *pre všetky, existuje, z toho vyplýva, číslo  $n$  je prirodzené, číslo 4 je deliteľom čísla  $n$  ?*

### 2. úloha :

Na základnej škole ste používali pojem *poučka*. Odôvodnite, či sú *poučky* definície alebo matematické vety.

## 2. Priamy dôkaz

Je to najjednoduchší spôsob dôkazu. **Dôkaz tvrdenia ( vety )  $T$  pozostáva len z konečného reťazca implikácií,  $T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow \dots \Rightarrow T_n \Rightarrow T$ , pričom prvý člen  $T_1$  je axióma, alebo už dokázané tvrdenie a každé ďalšie tvrdenie (  $T_2$  až  $T_n$  ) logicky vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia.**

### Príklad 1 :

Dokážte, že súčet ktorýchkoľvek piatich po sebe idúcich párnych prirodzených čísel je deliteľný číslom desať.

**Riešenie :** Párne prirodzené číslo môžeme označiť  $2n$  ( prečo ? )  $\Rightarrow$  päť po sebe idúcich párnych prirodzených čísel označíme  $2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6$  a  $2n + 8 \Rightarrow$  ich súčet je potom  $2n + ( 2n + 2 ) + ( 2n + 4 ) + ( 2n + 6 ) + ( 2n + 8 ) = 10n + 20 = 10 \cdot ( n + 2 ) \Rightarrow$  súčet je 10-násobok čísla  $n + 2 \Rightarrow$  súčet je deliteľný číslom 10.

### 3. úloha :

Symbolicky zapíšte a dokážte nasledujúce tvrdenia :

a) **Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 3.**

**Riešenie:** 3 za sebou idúce čísla ...  $3 \cdot n, 3 \cdot n + 1, 3 \cdot n + 2$

Súčet 3 za sebou:  $(3n)+(3n+1)+(3n+2) = 9n+3 = 3 \cdot (3n+2)$

$3 / 3 \cdot (3n+2) \Rightarrow 3 / (3n)+(3n+1)+(3n+2) \Rightarrow 3 / \text{súčet 3 za sebou idúcich čísel}$

b) Druhá mocnina nepárneho čísla je tiež nepárna.

Nepárne číslo:  $2n+1, n \in \mathbb{N}$

Druhá mocnina:  $(2n+1)^2 = (2n+1) \cdot (2n+1) = 4n^2 + 2n + 2n + 1 = 4n^2 + 4n + 1 =$

$2(2n^2 + 2n) + 1 = 2k + 1 \dots\dots 2n^2 + 2n = k \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow 2k + 1$  je nepárne číslo, preto aj  $(2n+1)^2$  je nepárne číslo

c) Súčin troch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 6.

d) Súčin štyroch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 24.

### Príklad 2 :

**Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla  $n$  platí :  $4 \mid n^4 + 3n^2$ .**

Riešenie : Dôkaz rozdelíme na dve časti:

- Predpokladajme najskôr, že  $n$  je párne číslo, t.j.  
 $n = 2k \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3) = 4k^2(4k^2 + 3) \Rightarrow$  výraz  $n^4 + 3n^2$  je násobkom čísla 4.
- Ak  $n$  je nepárne číslo, t.j.  $n = 2k + 1 \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2(n^2 + 3) = (2k + 1)^2[(2k + 1)^2 + 3] = (2k + 1)^2(4k^2 + 4k + 4) \Rightarrow$  druhý činiteľ je násobkom čísla 4  $\Rightarrow$  výraz  $n^4 + 3n^2$  je násobkom čísla 4.
- Dokázali sme platnosť tvrdenia  $\Rightarrow$  PLATÍ

### 4. úloha :

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla  $n$  platí :

a)  $2 \mid (n^2 - 3n)$

b)  $3 \mid (n^3 + 2n^2)$

Pomôcka : Rozoberte možnosti, že  $n$  je deliteľné 3,  $n$  dáva po delení tromi zvyšok 1,  $n$  dáva po delení tromi zvyšok 2.

c) \* Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich prirodzených čísel je násobkom čísla deväť. Pomôcka : čísla zapíšte ako  $n-1$ ,  $n$  a  $n+1$ .

d) \*  $36 \mid 2n^6 - n^4 - n^2$

Pomôcka : rozložte výraz  $2n^6 - n^4 - n^2$  na súčin.

Pri dokazovaní implikácie  $A \Rightarrow B$ , postupujeme ako pri priamom dokazovaní tvrdenia, ibaže v tomto prípade si vezmeme za východisko tvrdenie  $A$  a snažíme sa logickými úvahami dospieť k tvrdeniu  $B$ .

### 5. úloha :

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla  $n$  platí :

a) Ak  $n$  nie je deliteľné tromi, tak jeho druhá mocnina dáva po delení tromi zvyšok jedna.

b) Ak prirodzené číslo končí číslicou 5, tak jeho druhá mocnina končí dvojčíslím 25.

### 3. Nepriamy dôkaz

Zložený výrok  $B' \Rightarrow A'$  sa nazýva **obmena implikácie**  $A \Rightarrow B$ . Obmenu implikácie vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov v implikácii a výroky A a B nahradíme ich negáciami.

Daná implikácia : Ak je druhá mocnina čísla n **párna**, tak aj číslo n je **párne**.

Obmena implikácie : Ak je číslo n **nepárne**, tak aj jeho druhá mocnina je **nepárna**.

Nemýľte si negáciu implikácie s obmenou implikácie.

### 6. úloha :

Dokážte, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Pomôcka : tabuľka pravdivostných hodnôt.

### 7. úloha :

Napište ( ak sa dá aj symbolicky ) obmeny implikácii :

- Ak tretia mocnina prirodzeného čísla n je nepárna, tak aj číslo n je nepárne.
- Ak číslo 3 nedelí číslo n, tak  $n^2$  nie je deliteľné číslom 9.
- $10 \mid (n-1) \cdot (n+1) \Rightarrow 5 \mid n$

**Princíp nepriameho dôkazu spočíva v tom, že namiesto implikácie ktorú chceme dokázať, dokážeme jej obmenu.** Nepriamy dôkaz používame vtedy, keď prvý výrok v implikácii je zložitejší ako druhá časť implikácie.

### Príklad 3 :

**Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí : ak 5 nedelí  $n^3 - 6n^2 + 2n - 10$ , tak n nie je deliteľné 5.**

**Riešenie :** Obmenou danej implikácie je výrok  $5 \mid n \Rightarrow 5 \mid n^3 - 6n^2 + 2n - 10$ .

$5 \mid n \Rightarrow n = 5k \Rightarrow$  po dosadení  $n^3 - 6n^2 + 2n - 10 = \dots$  pokračovanie už zvládnete sami ☺.

### 8. úloha :

Dokážte, že tvrdenia z predchádzajúcej úlohy platia pre všetky prirodzené čísla n.

### 4. Dôkaz sporom

Z predchádzajúcej kapitoly už iste viete ☺, aký je vzťah medzi nasledujúcimi dvoma výrokmi : Ak je výrok ( tvrdenie ) T pravdivý, tak každý z neho odvodený výrok je pravdivý.

**Ak existuje nepravdivý výrok odvodený z tvrdenia T, tak aj tvrdenie T je nepravdivé.**

Druhý výrok popisuje základný princíp dôkazu sporom.

Postup pri dôkaze sporom :

- Vyslovíme negáciu výroku, ktorý máme dokázať.
- Z negácie odvodíme výrok, ktorý je nepravdivý ( je v rozpore s niektorým predpokladom ).
- Ak sa dá z negácie odvodiť nepravdivý výrok, tak negácia je nepravdivá a pôvodný výrok ( ktorý sme mali dokázať ) je pravdivý.

### Príklad 4 :

**Dokážte, že geometrický priemer dvoch ľubovoľných kladných reálnych čísel je menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru.**

**Riešenie :** Máme dokázať pravdivosť nerovnosti  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ . Vytvoríme najskôr

jej negáciu :  $\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\sqrt{ab} > a+b \Rightarrow$  po umocnení  $4ab > (a+b)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4ab > a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 0 > a^2 - 2ab + b^2 \Rightarrow 0 > (a-b)^2 \leftarrow$  táto nerovnosť je určite nepravdivá, pretože druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná  $\Rightarrow$  neplatí nerovnosť

$\exists a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} > \frac{a+b}{2} \Rightarrow$  musí platiť tvrdenie  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ , ktoré sme mali dokázať.

### **9. úloha :**

Bez použitia kalkulačky dokážte, že platí :

a)  $5 + \sqrt{5} < \sqrt{55}$

b)  $\sqrt{11} + \sqrt{10} < 1 + \sqrt{11 - \sqrt{10}}$ .

### **10. úloha :**

a) Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo  $a$  platí :  $a + \frac{1}{a} > 2$

b) Dokážte, že pre každé reálne číslo  $x$  platí :  $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$

c) \*Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla  $a, b$  platí :  $\frac{a+b}{2} < \frac{2(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}$

d) \*Dokážte, že najmenší spoločný násobok  $n(a, b)$  a najväčší spoločný deliteľ  $D(a, b)$  prirodzených čísel  $a, b$  spĺňajú nerovnosť  $a \cdot D(a, b) + b \cdot n(a, b) \geq 2ab$ . Zistite, pre ktoré čísla  $a, b$  sa táto nerovnosť zmení na rovnosť.

### **5. riešený príklad :**

**Dokážte, že číslo  $\sqrt{2}$  nie je racionálne.**

**Riešenie :** Použijeme dôkaz sporom – predpokladajme, že  $\sqrt{2}$  je racionálne číslo  $\Rightarrow \sqrt{2}$

môžeme napísať v tvare zlomku  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , kde  $p$  a  $q$  sú nesúdeliteľné čísla,  $p \in \mathbb{Z}$  a  $q \in \mathbb{N} \Rightarrow$

po úprave a umocnení  $2q^2 = p^2 \Rightarrow$  druhá mocnina čísla  $p$  je párne číslo  $\Rightarrow$  aj  $p$  je párne číslo, t.j.  $p = 2k$ , kde  $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  po dosadení  $2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow$  aj druhá mocnina čísla  $q$  je párne číslo  $\Rightarrow$   $q$  je párne číslo  $\Rightarrow$  čísla  $p$  a  $q$  sú deliteľné dvoma  $\Rightarrow$  spor (rozpor) s predpokladom, že  $p$  a  $q$  sú nesúdeliteľné čísla  $\Rightarrow$  tvrdenie, že  $\sqrt{2}$  je racionálne číslo, je nepravdivé.

### **11. úloha\* :**

Dokážte, že čísla  $\sqrt{3}$  a  $\sqrt{5}$  nie sú racionálne čísla.