

Akadémia ozbrojených síl generála Milana Rastislava Štefánika

Liptovský Mikuláš

Katedra elektroniky

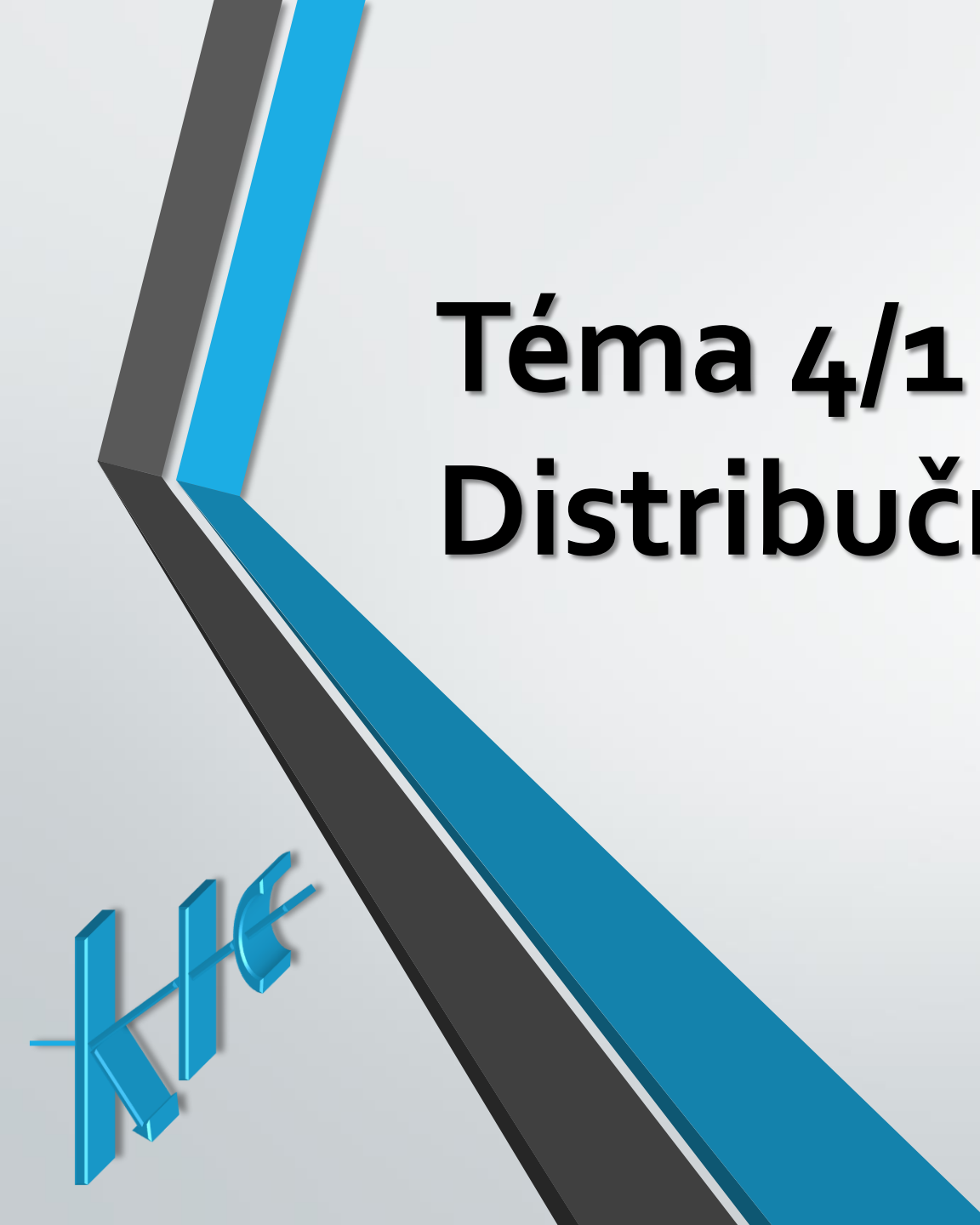
# OPERAČNÁ ANALÝZA

doc. Ing. Martin **MARKO**, CSc.

tel.: 42 2378

E-mail: martin.marko@aos.sk





# Téma 4/1

## Distribučné úlohy

1. Formulácia a riešenie úloh
2. Matematický model DÚ
3. Riešenie príkladu – rozvoz materiálu



# Obsah z informačného listu

- *Distribučné úlohy*
- *Zostrojenie matematického modelu dopravnej úlohy,*
- *Vybilancované dopravné úlohy a ich riešenie*
  - *metódy (severozápadného rohu, indexová, vogelova aproximačná, modifikovaná distribučná,...)*
- *Degenerácia v dopravnej úlohe (perturbačná metóda)*
- *Nevybalansovaný dopravný systém*
- *Prirad'ovacie úlohy*
- *Ďalšie distribučné úlohy*
- *Príklad aplikácie prepravy vojenského materiálu.*



# Distribučné úlohy



# Postup riešenia vybilancovaných úloh


## 1. Nájdenie východiskového základného riešenia

- Metóda severozápadného rohu
- Indexová metóda
- Vogelova aproximačná metóda

## 2. Test optimálnosti (je možné hodnotu účelovej funkcie znížiť)

- Modifikovaná distribučná metóda

## 3. Prechod na nové základné riešenie



$T_{4/1}$



# Dopravný problém

Dopravná úloha

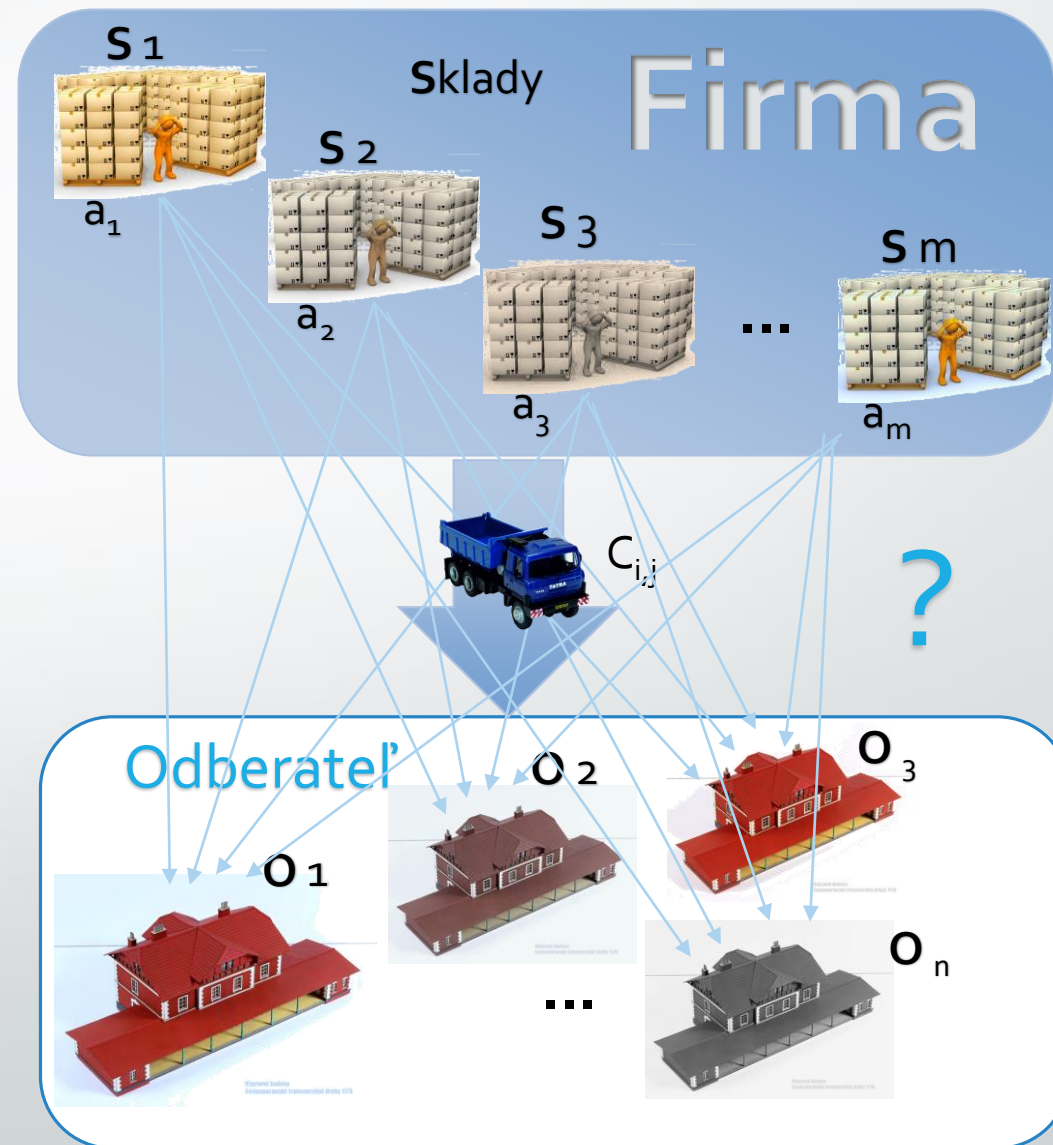
# Všeobecná formulácia úlohy

- Formulácia úlohy

- Firma má  $m$  **skladov**  $S_i$  s kapacitou  $a_i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) jednotiek tovaru rovnakého druhu.
- Firma prepravuje tovar zo skladov k  $n$  **odberateľom** (**spotrebiteľom**)  $O_j$ , ktorí požadujú  $b_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) jednotiek tovaru.
- Pritom sú známe  $c_{ij}$  **náklady na prepravu jednotkového množstva** tovaru zo skladu  $S$  k odberateľom (spotrebiteľom)  $O_{ij}$ .

- Otázka:

*Pri akom distribučnom pláne sú náklady na prepravu najnižšie?*





		spotrebitelia				kapacita
		$O_1$	$O_2$	...	$O_n$	
sklady	$S_1$	$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$	$a_1$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	$S_m$	$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$	$a_m$
požadované množstvo		$b_1$	$b_2$	...	$b_n$	
množstvo		$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1n}$	
		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
		$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mn}$	



# Matematický model dopravného systému

- Sformulujeme matematický model problému ako lineárnu optimalizačnú úlohu

$$c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{1n}x_{1n} + \dots + c_{mn}x_{mn} \rightarrow \min$$

$$x_{11} + x_{21} + \dots + x_{m1} = b_1$$

$$x_{12} + x_{22} + \dots + x_{m2} = b_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$x_{1n} + x_{2n} + \dots + x_{mn} = b_n$$

$$x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} \leq a_1$$

$$x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} \leq a_2$$

$$\vdots$$
$$\vdots$$

$$x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn} \leq a_m$$

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad \dots \quad x_{mn} \geq 0$$

# Príklad: 1

- Firma dodávajúca uhlie má svoje sklady v Komárne, Kolárove a Nových Zámkoch, s kapacitou 25, 15 a 35 t. Dvaja zákazníci si podali objednávky na 30 a 45 t uhlia. Prepravné náklady na 1 t uhlia zo skladov k zákazníkom sú uvedené v tabuľke. Navrhnite plán rozvozu uhlia tak, aby boli náklady prepravu čo najmenšie!

		zákazníci		kapacita
		O <sub>1</sub>	O <sub>2</sub>	
sklady	Komárno	15 EUR	30 EUR	25 t
	Kolárovo	25 EUR	20 EUR	35 t
	Nové Zámky	50 EUR	10 EUR	15 t
požadované množstvo		30 t	45 t	
množstvo		$x_{11}$	$x_{12}$	
		$x_{21}$	$x_{22}$	
		$x_{31}$	$x_{32}$	

# Riešenie

- Potrebné údaje spracujeme do tabuľky Excel

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3			Lokalita	Zákazníci		Kapacita	
4				O1	O2		
5		Sklady	Komárno	15,00 €	30,00 €	25	
6			Kolárovo	25,00 €	20,00 €	35	
7			Nové Zámky	50,00 €	10,00 €	15	
8		Požadované množstvo		30	45		
9			Množstvo	1,00	1,00		
10				1,00	1,00		
11				1,00	1,00		
12							

Prepravné  
náklady

Ohraničujúce  
podmienky

Rozhodovacie  
premenné

# Matematický model úlohy

Matematický model úlohy teda môžeme zapísať v tvare:

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) = 15x_{11} + 30x_{12} + 25x_{21} + 20x_{22} + 50x_{31} + 10x_{32} \rightarrow \min$$

$$\text{za podmienok: } x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$$

Podmienky  
nezápornosti

$$x_{11} + x_{12} \leq 25$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 35$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 15$$

Podmienky od  
zákazníkov

Podmienky z kapacít  
skladov

$$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0.$$

Postavme sa bunkovým kurzorom na cieľovú bunku **H8** a spustíme doplnok **Riešiteľ**.  
Jednotlivé položky objavujúceho sa dialógového okna vyplníme nasledovne:

Rozhodovacie premenné  $x_{11}$ ,  $x_{12}$ ,  $x_{21}$ ,  $x_{22}$ ,  $x_{31}$  a  $x_{32}$  budú v oblasti **D9:E11** a do týchto buniek zapíšeme ľubovoľné počiatočné hodnoty, napr. 1.

Z požiadaviek zákazníkov dostávame nasledovné ohraničujúce podmienky:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$$

Ľavé strany týchto ohraničujúcich podmienok sformulujeme v bunkách **D13 a E13**.

Z kapacít, ktoré majú k dispozícii sklady, dostávame nasledovné ohraničujúce podmienky:

$$x_{11} + x_{12} \leq 25$$

$$x_{21} + x_{22} \leq 35$$

$$x_{31} + x_{32} \leq 15$$

	A	B	C	D	E	F	G
1			<b>DOPRAVNÁ ÚLOHA</b>				
2							
3			Lokalita	Zákazníci		Kapacita	
4				O1	O2		
5		Sklady	Komárno	50,00 €	30,00 €	25	
6			Kolárovo	25,00 €	20,00 €	35	
7			Nové Zámky	50,00 €	10,00 €	15	
8			Požadované množstvo	30	45		
9			Množstvo	0	0		
10				0	0		
11				0	0		
12				Rozhodovacie premenné			
13			Pomocné výpočty	0,00	0,00		
14							

V bunkách **H9:H11** sformulujeme ľavé strany týchto troch ohraničujúcich podmienok.

Je zrejmé, že firma nemôže dodávať záporný počet uhlia a preto k týmto podmienkam pridáme podmienky nezápornosti:

$$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0, \quad x_{31} \geq 0, \quad x_{32} \geq 0.$$

Minimalizovať budeme funkciu prepravných nákladov, kde premenná  $x_{ij}$  stanovuje množstvo uhlia, ktoré sa prepraví z  $i$ -tého skladu k  $j$ -tému zákazníkovi. Účelovú funkciu úlohy teda zapíšeme nasledovne:

$$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) = 15x_{11} + 30x_{12} + 25x_{21} + 20x_{22} + 50x_{31} + 10x_{32}$$

Táto funkcia je sformulovaná v cieľovej bunke **H5**

1

2

3

4

5

6

7

8

9

10

11

12

13

14

15

16

17

18

19

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

DOPRAVNÁ ÚLOHA

	Lokalita	Zákazníci		Kapacita
		O1	O2	
Sklady	Komárno	50,00 €	30,00 €	25
	Kolárovo	25,00 €	20,00 €	35
	Nové Zámky	50,00 €	10,00 €	15
Požadované množstvo		30	45	
Množstvo		0	0	
		0	0	
		0	0	
Pomocné výpočty		0,00	0,00	

Ohraničujúce podmienky z kapacít skladov

Náklady: 0,00 €

$x_{11} + x_{12} \leq 25$

$x_{21} + x_{22} \leq 35$

$x_{31} + x_{32} \leq 15$

0,00

0,00

0,00

Ohraničujúce podmienky od zákazníkov

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$

Podmienky nezápornosti

$x_{11} \geq 0, \quad x_{12} \geq 0, \quad x_{21} \geq 0, \quad x_{22} \geq 0, \quad x_{31} \geq 0, \quad x_{32} \geq 0$



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3			Lokalita	Zákazníci		Kapacita		Ohraničujúce podmienky z kapacít skladov					
4				O1	O2					$x_{11} + x_{12} \leq 25$			
5		Sklady	Komárno	15,00 €	30,00 €	25				$x_{21} + x_{22} \leq 35$			
6			Kolárovo	25,00 €	20,00 €	35				$x_{31} + x_{32} \leq 15$			
7			Nové Zámky	50,00 €	10,00 €	15							
8			Požadované množstvo	30	45								
9			Množstvo	0,00	0,00			0,00					
10				0,00	0,00			0,00					
11				0,00	0,00			0,00					
12				Rozhodovacie premenné									
13				0,00	0,00								
14								Ohraničujúce podmienky od zákazníkov					
15								$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$					
16								$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$					
17													
18								Podmienky nezápornosti					
19								$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0$					
20													
21													

Cieľová bunka

Parametre doplnku Riešiteľ

Nastaviť cieľ: SHS5

Do: ☐ Maximum ☒ Minimum ☐ Hodnota: 0

Zmenou premenných buniek: SD\$9:SE\$11

Podlieha obmedzeniam:

SD\$13 = 30  
SD\$9:SE\$11 >= 0  
SE\$13 = 45  
SH\$10 <= 35  
SH\$11 <= 15  
SH\$9 <= 25

Pridať  
Zmeniť  
Odstrániť  
Obnoviť všetko  
Načítať/Uložiť

☒ Vytvorte nezápornú hodnotu premenných, ktoré sú bez obmedzeni

Vybrať metódu riešenia: Simplex LP algoritmus

Možnosti

Metóda riešenia

Ak chcete v doplnku Riešiteľ riešiť spoj. nelineárne problémy, vyberte nástroj Nelineárny algoritmus GRG. Ak chcete riešiť lineárne problémy, vyberte nástroj Simplex LP algoritmus. Ak chcete riešiť nespojité problémy, vyberte nástroj Evolučný algoritmus.

Pomocník Riešiť Zavrieť





	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1													
2													
3			Lokalita	Zákazníci		Kapacita	Ohraničujúce podmienky z kapacít skladov						
4				O1	O2								
5		Sklady	Komárno	15,00 €	30,00 €	25		1250			$x_{11} + x_{12} \leq 25$		
6			Kolárovo	25,00 €	20,00 €	35					$x_{21} + x_{22} \leq 35$		
7			Nové Zámky	50,00 €	10,00 €	15					$x_{31} + x_{32} \leq 15$		
8		Požadované množstvo		30	45								
9			Množstvo	25,00	0,00			25,00					
10				5,00	30,00			35,00					
11				0,00	15,00			15,00					
12			Rozhodovacie premmené										
13				30,00	45,00								
14			Minimalizovať budeme funkciu prepravných nákladov, kde premenná $x_{ij}$ stanovuje množstvo							Ohraničujúce podmienky od zákazníkov			
15			uhlia, ktoré sa prepraví z $i$ -tého skladu k $j$ -tému zákazníkovi. Účelovú funkciu úlohy teda							$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$			
16			zapišeme nasledovne:							$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 45$			
17			$f(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32}) = 15x_{11} + 30x_{12} + 25x_{31} + 20x_{22} + 50x_{31} + 10x_{32}$							Podmienky nezápornosti			
18			Táto funkcia je sformulovaná v cieľovej bunke										
19			H5							$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{31} \geq 0, x_{32} \geq 0$			
20													

H5



# Záver

- Lineárne optimalizačné úlohy patria do rozširujúceho učiva matematiky, ktoré je možné zaradiť po tematickom celku **Riešenie lineárnych rovníc, nerovníc a ich sústav**
- Jedným z argumentov pre zavedenie optimalizačných úloh do vyučovania matematiky je ich nenáročnosť – aplikácia takýchto úloh totiž **nevyžaduje náročný matematický aparát** (ak nechceme pochopiť podstatu)
- Doplnok **Riešiteľ tabuľkového kalkulátora MS Excel** je vhodným nástrojom pre študentov s užívateľskými zručnosťami v ovládaní tohto programu, ktorý umožňuje riešenie lineárnych optimalizačných úloh s viac premennými aj bez používania diferenciálneho počtu a hľadania maxima alebo minima funkcie.
- Počítačom podporovaným riešením takýchto úloh je možné zefektívniť vyučovanie matematiky a ukázať študentom **aplikovateľnosť matematiky v bežnom živote aj vojenskej praxi**



# Literatúra

- [1] Berežný, Š., Kravecová, D.: Lineárne programovanie. Technická univerzita v Košiciach, Košice, 2012. ISBN 978-80-553-0910-1
- [2] Kolman, B., Beck, R. E.: Elementary Linear Programming with Applications. Academic Press, San Diego, CA, 1995. ISBN 978-0-12-417910-3
- [3] Máca, J., Leitner, B.: Operačná analýza I. Žilinská univerzita, Žilina, 1999. ISBN 978-80- 888-2939-3
- [4] Molokáčová, M.: Optimalizačné problémy. Metodicko-pedagogické centrum, Prešov, 2012
- RNDr. Štefan Gubo, PhD. Univerzita J. Selyeho, Ekonomická fakulta, Katedra matematiky a informatiky, Bratislavská cesta 3322, SK-94501 Komárno guboi@ujs.sk



# Zadanie dopravnej úlohy

Príklad na samostatné riešenie doma T<sub>4</sub>/1

# Zadanie dopravného problému

Na základe nárazových a predbežných objednávok od bojových útvarov, sa musí zabezpečiť dodanie munície **9 útvarom** na území celého Slovenska v požadovanom množstve podľa objednávok útvarov (odberateľov):

Útvar	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9
Ks	12903	7837	1525	1845	2425	1500	2725	1890	670

a to tak, aby bola munícia na správnom mieste a v určenom počte a v dodržanom časovom limite.

Predbežná kalkulácia nákladov na dopravu je **1000 Euro**.

**Úlohou** je zistiť či máme v hlavných zásobách a v pomocných skladoch uskladnené potrebné množstvo munície, aby bola splnená objednávka a navrhnúť čo najoptimálnejšie rozvoz munície.



# Analýza daného problému

Logisticko-informačný systém OS SR (SAP) nám umožňuje okamžite zistiť stav zásob na skladoch:.

Disponujeme **1 hlavným skladom** spolu s výrobou

**S<sub>1</sub>** so zásobou na sklade 5185 ks,

s **5 pobočkami:**

**S<sub>2</sub>** so zásobou na sklade 2652 ks,

**S<sub>3</sub>** so zásobou na sklade 8472 ks,

**S<sub>4</sub>** so zásobou na sklade 2543 ks,

**S<sub>5</sub>** so zásobou na sklade 5968 ks,

**S<sub>6</sub>** so zásobou na sklade 8500 ks.

Máme dostatočnú kapacitu danej munície vo svojich skladoch pretože stavy zásob na skladoch sa predbežne kalkulovali podľa tabuliek počtu profesionálnych vojakov aj s rezervou na daný kvartál výcvikového obdobia.

# Riešenie daného problému

Vypracujeme si tabuľku vzdialeností v km od jednotlivých skladov k daným odberateľom, zobrazenie v tabuľke 1

	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9
S1	318	83	76	47	410	397	34	171	80
S2	318	83	76	47	410	397	34	167	80
S3	309	109	47	60	400	378	5	133	56
S4	143	175	331	305	167	180	284	225	338
S5	365	163	25	33	456	434	56	189	5
S6	50	285	96	409	51	29	349	216	405

# Prepočet nákladov na dopravu od dodávateľa k odberateľovi

Cena za dopravu za 1 km	0,986
Náklade na 1 km celkom (doprava, mzdové náklady a stravné)	1,627

$$\text{náklady } x_{i,j} = \frac{\text{náklady na 1 km celkom} \times \text{vzdialenosť v km}}{\text{celkový počet kusov}}$$

	Tabuľka 2: Náklady dodávateľa na 1 kus materiálu (jednotkového množstva) podľa vzdialenosti dodávky a celkovej objednávky odberateľa									
	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	
S1	0,040	0,017	0,081	0,041	0,275	0,431	0,020	0,147	0,194	5185
S2	0,040	0,017	0,081	0,041	0,275	0,431	0,020	0,144	0,194	2652
S3	0,039	0,023	0,050	0,053	0,268	0,410	0,003	0,114	0,136	8472
S4	0,018	0,036	0,353	0,269	0,112	0,195	0,170	0,194	0,821	2543
S5	0,046	0,034	0,027	0,029	0,306	0,471	0,033	0,163	0,012	5968
S6	0,006	0,059	0,422	0,361	0,034	0,031	0,208	0,186	0,983	8500
	12903	7837	1525	1845	2425	1500	2725	1890	670	



# Prepočet nákladov na dopravu od dodávateľa k odberateľovi

Cena za dopravu za 1 km	0,986
Náklade na 1 km celkom (doprava, mzdové náklady a stravné)	1,627

$$\text{náklady } x_{i,j} = \frac{\text{náklady na 1 km celkom} \times \text{vzdialenosť v km}}{\text{celkový počet kusov}}$$

	Tabuľka 2:		Náklady dodávateľa na 1 kus materiálu (jednotkového množstva) podľa vzdialenosti dodávky a celkovej objednávky odberateľa							
	O1	O2	O3	O4	O5	O6	O7	O8	O9	
S1	0,040	0,017	0,081	0,041	0,275	0,431	0,020	0,147	0,194	5185
S2	0,040	0,017	0,081	0,041	0,275	0,431	0,020	0,144	0,194	2652
S3	0,039	0,023	0,050	0,053	0,268	0,410	0,003	0,114	0,136	8472
S4	0,018	0,036	0,353	0,269	0,112	0,195	0,170	0,194	0,821	2543
S5	0,046	0,034	0,027	0,029	0,306	0,471	0,033	0,163	0,012	5968
S6	0,006	0,059	0,422	0,361	0,034	0,031	0,208	0,186	0,983	8500
	12903	7837	1525	1845	2425	1500	2725	1890	670	



# Úloha

Navrhnuť čo najoptimálnejší rozvoz munície s minimalizáciou nákladov !!!

Riešiť - samostatne

Dodať riešenie s  
využitím programu  
Excel

**10**  
**bodov**

V textovej podobe ako  
protokol,  
alebo elektronicky ako  
súbor  
(v tabuľke Excel)



Úlohu spracovať a zaslať riešenie  
elektronicky do **15. apríla 2020**

Formát: Zošit Excel

Využiť riešiteľa

<http://docplayer.cz/48001765-Riesenie-niektorych-uloh-linearnej-algebry-v-prostredi-ms-excel-1-zadame-prvky-matice-a-a-b-do-buniek-pracovneho-harku-zosita-ms-excel.html>

<https://exceltown.com/navody/resitel-a-jeho-vyuziti/resitel-zakladni-pouziti/>

<http://ivit.sk/kurzy/excel-pre-ekonomov/>

<https://support.office.com/sk-sk/article/zoznam-funkci%C3%AD-excelu-pod%C4%BEa-kateg%C3%B3rie-5f91f4e9-7b42-46d2-9bd1-63f26a86coe8>

<https://www.youtube.com/watch?v=u1ewZGvcIQE>

[www.excelentnitriky.com](http://www.excelentnitriky.com)

[http://www.fem.uniag.sk/ACADEMIC/depart/ksov/predmety/optimalne\\_programovanie/index.html](http://www.fem.uniag.sk/ACADEMIC/depart/ksov/predmety/optimalne_programovanie/index.html)