MOCNINY S RACIONÁLNYM EXPONENTOM (ODMOCNINY)

Mocniny s racionálnym exponentom sú také mocniny x^q, kde **exponent q je racionálne číslo,** t.j. kde q môže byť nielen celé číslo, ale aj je zlomok.

$$\text{Pr.: } x^{-\frac{125}{10}};\ x^{-\frac{125}{100}}; x^{\frac{125}{100}}; x^{\frac{125}{10}}$$

Odmocniny: Každú mocninu s racionálnym mocniteľom môžeme previesť na odmocninu, kde odmocniteľ bude menovateľ racionálneho mocniteľa a čitateľ ostáva mocniteľom pôvodného základu v základe odmocniny.

$$\text{Pr. } x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2}\,,\ x^{\frac{3}{7}} = \sqrt[7]{x^3},\ \ x^{\frac{13}{6}} = \sqrt[6]{x^{13}}$$

Mocnina s racionálnym exponentom je teda číslo $\boldsymbol{x^{\frac{m}{n}}}$; kde $x \in R$; $m \in Z, n \in N$ a platí:

$$\boxed{\boldsymbol{x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}}}$$

Pravidlá pre mocniny s racionálnym exponentom sú analogické vlastnostiam mocnín s prirodzeným a celočíselným exponentom.

Pravidlá pre počítanie s odmocninami: Pre $n \in N, a \in R_0^+$ platí:

1) $\sqrt[n]{1} = 1$

2) $\sqrt[n]{0} = 0$

3) $\sqrt[n]{a^s} = (\sqrt[n]{a})^s$

4) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

5) $\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n]{a^m}$ *(tzv. krátenie mocniny a odmocniny)*

6) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

7) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

Podmienky pri odmocninách

Párne odmocniny zo záporných čísel neexistujú, preto je potrebné zapisovať podmienky aj pri týchto typoch odmocnín, napr.

$$\sqrt[4]{x};\ \ P: x \geq 0$$

Nepárne odmocniny zo záporných čísel existujú, preto nie je potrebné zapisovať podmienky, napr.

$$\sqrt[3]{x};\ \ x \in R$$

Špeciálne úpravy odmocnín

Pozn. č. 1: Čiastočné odmocnenie – ak nie je možné odmocniť celú odmocninu, odmocnine len jej časť,

MOCNINY S RACIONÁLNYM EXPONENTOM (ODMOCNINY)

Pr.: $\sqrt{50}= \sqrt{25.2} = \sqrt{25}.\sqrt{2} = 5.\sqrt{2}$

Pozn. č. 2: Usmernenie zlomku – odstránenie odmocniny z menovateľa,

Pr.: usmernite zlomok $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

riešenie: V menovateli máme $\sqrt{2}$, preto celý zlomok vynásobíme $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Dostávame: $\frac{1}{\sqrt{2}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1.\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}\ \frac{\sqrt{2}}{2}$

ÚLOHY:

1. Vypočítajte spamäti odmocniny daných čísel:

a) $\sqrt{900} = \sqrt{9.100} = \sqrt{9}.\sqrt{100} = 3.10 = 30$

b) $\sqrt{0,25} = \sqrt{(0,5)^2} = 0,5$

c) $\sqrt[3]{64\,000} = \sqrt[3]{64.1000} = \sqrt[3]{64}.\sqrt[3]{1000} = 4.10 = 40$

d) $\sqrt[3]{125000} = \sqrt[3]{125.1000} = \sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{1000} = 5.10 = 50 =$

e) $\sqrt{0,0049} = \sqrt{(0,07)^2} = 0,07 =$

f) $\sqrt{250000} = \sqrt{25.10000} = 5.100 = 500$

h) $\sqrt[3]{0,000\,008} = \sqrt[3]{0,02^3} = 0,02$

i) $\sqrt{16900} =$

j) $\sqrt[3]{0,027} =$

g) $\sqrt[3]{8000000} =$

2. Čiastočne odmocnite

a) $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = \sqrt{9}\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
b) $\sqrt{98} = \sqrt{49.2} = 7.\sqrt{2}$
c) $\sqrt{48} = \sqrt{16.3} = 4\sqrt{3}$
d) $\sqrt{200} = \sqrt{100.2} = 10.\sqrt{2}$
e) $\sqrt{128} = \sqrt{2.64} = 8.\sqrt{2}$

3. Usmernite zlomky

a) $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3.\sqrt{3}}{\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{3.\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

b) $\frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}.\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$

MOCNINY S RACIONÁLNYM EXPONENTOM (ODMOCNINY)

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$

d) $\frac{2.\sqrt{10}}{\sqrt{5}} = \frac{2.\sqrt{10}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2.\sqrt{50}}{\sqrt{5}^2} = \frac{2.\sqrt{25.2}}{5} = \frac{2.5\sqrt{2}}{5} = 2\sqrt{2}$

e) $\frac{2}{3-\sqrt{5}} = \frac{2}{(3-\sqrt{5})} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = \frac{2.(3+\sqrt{5})}{3^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{2.(3+\sqrt{5})}{4} = \frac{(3+\sqrt{5})}{2}$

f) $\frac{14}{3+\sqrt{2}} = \frac{14}{(3+\sqrt{2})} \cdot \frac{(3-\sqrt{2})}{(3-\sqrt{2})} = \frac{14.(3-\sqrt{2})}{3^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{14.(3-\sqrt{2})}{9-2} = \frac{14.(3-\sqrt{2})}{7} = 2.(3-\sqrt{2})$

g) $\frac{26}{4-\sqrt{3}} = \frac{26}{4-\sqrt{3}} \cdot \frac{4+\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}} = \frac{26.(4+\sqrt{3})}{4^2-\sqrt{3}^2} = \frac{26.(4+\sqrt{3})}{13} = 2.(4+\sqrt{3})$

h) $\frac{2}{\sqrt{2}} =$

i) $\frac{1}{2.\sqrt{7}} =$

j) $\frac{4}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} =$

4: Zjednodušte súčiny/podiely

a) $\sqrt{3}.\sqrt{12} = \sqrt{12.3} = \sqrt{36} = 6$ $\qquad \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$

b) $\sqrt{6}.\sqrt{12} = \sqrt{72} = \sqrt{36.2} = \sqrt{36}.\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$ $\qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

d) $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{125}} = \sqrt{\frac{15}{125}} = \sqrt{\frac{3}{25}} = \frac{\sqrt{3}}{5}$

e) $\sqrt{5}.\sqrt{10} = \sqrt{50} = \sqrt{25.2} = 5\sqrt{2}$

f) $\frac{\sqrt{245}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{245}{5}} = \sqrt{49} = 7$

5. Určte pre ktoré a,b má daný výraz zmysel a zjednodušte ho pomocou pravidiel:

a) $\sqrt[9]{x^5} \cdot \sqrt[9]{x^2} = \sqrt[9]{x^2.x^5} = \sqrt[9]{x^7}$ (bez podmienok)

b) $\sqrt[7]{x^5} : \sqrt[7]{x^2} = \frac{\sqrt[7]{x^5}}{\sqrt[7]{x^2}} = \sqrt[7]{\frac{x^5}{x^2}} = \sqrt[7]{x^3}$ P: <u>x ≠ 0</u>

c) $\frac{\sqrt[6]{a^5b^4}}{\sqrt[6]{(ab)^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^5.b^4}{a^3.b^3}} = \sqrt[6]{\frac{a^2.b}{a^0.b^0}} = \sqrt[6]{a^2.b}$ P1: a ≠ 0 a a>=0 P2: b ≠ 0 a b>=0

<u>P1: a>0 P2: b>0</u>

d) $\frac{\sqrt{x^5} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x^6}{x^2}} = \sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$ P: x ≠ 0 a x>=0 => P: <u>x>0</u>

MOCNINY S RACIONÁLNYM EXPONENTOM (ODMOCNINY)

e) $\frac{\sqrt[4]{x^2}\cdot\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[4]{x^3}} = 1$ P.: <u>x>0</u>

f) $\frac{\sqrt[3]{a^5}\cdot\sqrt[3]{b^5}}{\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a^5}{a^3}}.\sqrt[3]{\frac{b^5}{b}} = \sqrt[3]{a^2.b^4}$ P1: <u>a≠0</u> P2: <u>b≠0</u>

5. Zapíšte odmocninu v tvare mocniny s racionálnym exponentom (ak je nutné napíšte podmienky) a ak sa to dá, zjednodušte:

a) $\sqrt{a} =$

b) $\sqrt[3]{c^2} =$

c) $\sqrt{x^2.y^3} =$

d) $\sqrt[5]{x^4.y^5.z^6} =$

e) $\sqrt{x}\,.\,x^{\frac{1}{4}}.\,\sqrt[5]{x^2} =$

6. Vypočítajte s využitím mocnín s racionálnym exponentom. Ak je to nutné zapíšte podmienky.

a) $\sqrt[9]{x^5}\cdot\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{5}{9}}.x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{9}+\frac{2}{3}} = x^{\frac{5+6}{9}} = x^{\frac{11}{9}} = \sqrt[9]{x^{11}}$ (nie sú podmienky, lebo sú všade nepárne odmocniny a tie existujú aj zo záporných čísel)

b) $\sqrt[7]{x^5}:\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{5}{7}}:x^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{5}{7}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{15-14}{21}} = x^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{x}$ P: x ≠ 0 (lebo sa delí 3. odmocninou z x)

c) $\sqrt{a\cdot\sqrt{a}}:a^{\frac{1}{4}} = (a.a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}:a^{\frac{1}{4}} = \frac{a^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$ P: a ≠ 0 a a>=0 => <u>P: a >0</u>

d) $x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[6]{x} = x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{1}{4}}.x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{4+3+2}{12}} = x^{\frac{9}{12}} = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$ P.: <u>x>=0</u>

e) $\sqrt[4]{x^3}:\left(x^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[6]{x}\right) = x^{\frac{4}{3}}:\left(x^{\frac{1}{3}}.x^{\frac{1}{6}}\right) = x^{\frac{8-2-1}{6}} = x^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{x^5}$ P.: <u>x>0</u>

f) $a^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{-5}{3}} =$

g) $\sqrt{x}\cdot x^{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt[5]{x^2} =$

h) $\frac{\sqrt[6]{x^5}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} =$

MOCNINY S RACIONÁLNYM EXPONENTOM (ODMOCNINY)

i) $\dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[6]{x}}{\sqrt[4]{x^3}} =$

j) $\sqrt[5]{\left(\dfrac{\sqrt{a} \cdot a^{-1}}{\sqrt[3]{a}} \right)^{-3}} =$

k) $\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{b^3}}} \cdot \sqrt{\dfrac{b}{\sqrt[3]{a}}} =$