Dôkazy

1. Dokážte, že výrok je tautológia:
   a. $(\boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{B})' \Leftrightarrow (\boldsymbol{A}' \vee \boldsymbol{B}')$:
   b. $A \Leftrightarrow \left[A' \Rightarrow (B \wedge B')\right]$
2. Nepriamo dokážte tvrdenie: Pre každé prirodzené číslo n platí, ak 3 delí $n^2 + 2$, tak 3 nedelí n.
3. Dokážte nepriamo pravdivosť daného tvrdenia$\forall n \in N: 5/(n^2+1) \Rightarrow 5 \not| n$
4. Dokážte sporom:
   a. pre všetky $a, b \in R^+$platí: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a.b}$
   b. $\forall$a,b$\in$R$^+$: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
   c. pre každé kladné reálne číslo a platí : $a + \frac{1}{a} > 2$
5. Dokážte sporom, že číslo:
   a. $\sqrt{2}$ nie je racionálne
   b. $\sqrt{3}$ nie je racionálne
6. Dokážte , že pre každé prirodzené číslo n platí:
   a. ak n je párne, potom aj n^2 je párne;
   b. 3 nedelí (n^4-1) potom 3 delí n.
   c. číslo n^3 - n je deliteľné štyrmi (Pomôcka: Nutné overiť pre všetky prípady, t.j. n= 4k, n=4k+1, n=4k+2, n=4k+3)
   d. $\forall\, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}: \boldsymbol{3}/(\boldsymbol{n^3} - \boldsymbol{n})$.
7. Dokážte, že rozdiel štvorcov dvoch za sebou idúcich nepárnych čísel je deliteľný číslom 8. (Pozn.: 2 za sebou idúce nepárne sú napr. 2k+1 a 2k+3, kde k $\in$ N)
8. **Dokážte:**
   a. Súčin 2 nepárnych čísel je nepárne číslo (nepárne čísla sú napr. 2k+1, k $\in$ N a 2m+1, kde m $\in$ N).
   b. Súčet dvoch párnych čísel je párne číslo**.**
   c. Súčet 2 nepárnych čísel je párne číslo.
   d. Súčet párneho a nepárneho čísla je nepárne číslo.
9. Dokážte rovnosť množín:
   a. $A \cap (B \cup A') = A \cap B$ b) $A \cap (B \cap C)' = (A \cap B') \cup (A \cap C')$
10. Dokážte, že pre všetky prípustné $n \in N$ platí:
   a. $\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4.\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9.\frac{n!}{(n-1)!} = n(n-2)^2$
   b. n$[n! + (n-1)!]$+n^2(n-1)!+(n+1)!=(3n+2)n!
   c. $\frac{\boldsymbol{n^2-16}}{(\boldsymbol{n+4})!} - \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{n+3})!} - \frac{\boldsymbol{1}}{(\boldsymbol{n+2})!} = \boldsymbol{0}$
11. Dokážte, že pre všetky k, n∈N, n>k platí: $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k+1}} = \binom{\boldsymbol{n+1}}{\boldsymbol{k+1}}$

12. Dokážte, že rozdiel čísel (2+r+ 1/r) a (1 + r) sa rovná ich podielu a rozhodnite, za akých podmienok táto rovnosť platí.

13. Dokážte platnosť výroku: $\sqrt{13+\sqrt{12}} < 1+\sqrt{13-\sqrt{12}}$.

---

14. Dané sú body A [3,2], B[4,1], C[2,1]. Dokážte, že tieto body sú vrcholy trojuholníka. Dokážte, že platí trojuholníková nerovnosť. Overte, či nie je pravouhlý.

15. Dokážte,, že trojuholník PQR, kde P [2, -2, -2], Q[0, -1, -4], R[2, 1, -5] je rovnoramenný a pravouhlý.

16. Dokážte, že rovnica $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 29 = 0$ je všeobecnou rovnicou kružnice, určte súradnice stredu a jej polomer.

17. Dokážte, že spojnica bodov, ktoré na ciferníku označujú 3 a 6, je kolmá na spojnicu 4 a 11.

18. Dokážte tvrdenie, že stredový uhol je dvojnásobkom ľubovoľného obvodového uhla patriacemu tomu istému oblúku.
19. Daná je funkcia f: $y = 3x^2 + 12x + 13$. Dokážte, že táto funkcia je na množine M = $(\mathbf{1}, \infty)$ rastúca.
20. Dokážte, že pre prístupné hodnoty α, β sa výraz $\frac{\sin\ (\alpha-\beta)}{\cos\ (\alpha-\beta)}$ rovná výrazu $\frac{tg\ \alpha\ -\ tg\ \beta}{1\ + tg\ \alpha\ .\ tg\ \beta}$.

21. Dokážte vzťah pre sínus a kosínus dvojnásobného uhla.

22. Dokážte, že pre goniometrické funkcie platia dané vzťahy:

a) *tg x . cotg x = 1*

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

23. Dokážte, že pre všetky x, pre ktoré sú výrazy definované, platí:

$$\mathbf{1 - \frac{\sin^2 x}{1 + cot\,g\ \ x} - \frac{\cos^2 x}{1 + tg\ x} = \sin x \,.\, \cos x}$$

24. Dokážte, že funkcia f: y = (x + 3)/(x - 2) je klesajúca na svojom definičnom obore.
25. Dokážte, že funkcia f je na intervale (5;∞)rastúca f :$y = \frac{-3}{x-5} + 1$
26. Dokážte, že postupnosť $\left\{\frac{\mathbf{2n-1}}{\mathbf{3+n}}\right\}_{\mathbf{n=1}}^{\infty}$ nie je aritmetická.
27. Dokážte, že postupnosť $\{\mathbf{5^{2n+1}}\}_{\mathbf{n=1}}^{\infty}$ je geometrická a rastúca.
28.