

# Dôkazy matematických viet

## Priamy dôkaz

Dokazujeme vety tvaru  $A \Rightarrow B$  pomocou reťazca pravdivých implikácií.

Princíp:  $A \Rightarrow A_1$ ,  $A_1 \Rightarrow A_2$ ,  $A_2 \Rightarrow A_3$ , .....  $A_n \Rightarrow B$

A je buď axiómy alebo už dokázaná veta

**Napríklad:**

Veta:

Súčet dvoch párných prirodzených čísel je párne prirodzené číslo.

$\forall x, y \in \mathbb{N}$ : ak  $x = 2n \wedge y = 2k \Rightarrow x+y = 2v$ , ( $n, k, v \in \mathbb{N}$ ).

Dôkaz:

$x = 2n \wedge y = 2k \Rightarrow x+y = 2n+2k = 2(n+k) = 2v$  a keďže  $2v$  je určite párne číslo, tak veta platí.

**Alebo:**

Veta:

$\forall n \in \mathbb{N}$ :  $2|n \Rightarrow 2|n^2$  ( $2|n$  znamená, že číslo  $n$  je deliteľné číslom 2)

Dôkaz:

$2|n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ :  $n = 2k \Rightarrow n^2 = (2k)^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2 \cdot 2k^2 \Rightarrow 2|n^2$

## Nepriamy dôkaz

Namiesto implikácie  $A \Rightarrow B$  dokazujeme obmenenú vetu  $B' \Rightarrow A'$ .

Napríklad:

Veta:

Ak  $x^2$  je párne číslo, tak aj  $x$  je párne číslo.

$\forall x \in \mathbb{N}$ :  $2|x^2 \Rightarrow 2|x$

Dôkaz:

Dokážeme priamo obmenenú vetu:  $\forall x \in \mathbb{N}$ :  $2 \nmid x \Rightarrow 2 \nmid x^2$ .  $2 \nmid x \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}$ :

$x=2k+1 \Rightarrow x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=2(2k^2+2k)+1=2m+1$  (nepárne č.)  $\Rightarrow 2 \nmid x^2$

## Dôkaz sporom

Princíp: najprv urobíme negáciu výroku A. Potom reťazcom implikácii  $A \Rightarrow A_1$ ,  $A_1 \Rightarrow A_2$ ,  $A_2 \Rightarrow A_3$ , ....  $A_n \Rightarrow T$  dospejeme k tvrdeniu T, ktoré neplatí. Ak T neplatí, tak neplatí A', teda platí A.

Napríklad: Veta:  $\forall n \in \mathbb{N}: 3|n \Rightarrow 3|n^2$

Dôkaz:

$$V': \forall n \in \mathbb{N}: 3|n \wedge 3 \nmid n^2$$

$\forall n \in \mathbb{N}: 3|n \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}: n = 3k \Rightarrow n^2 = 9k^2 \Rightarrow 3|n^2$  spor. Z toho vyplýva, že negácia vety neplatí, teda platí pôvodná veta.