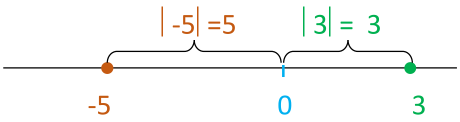
Výrazy s absolútnou hodnotou

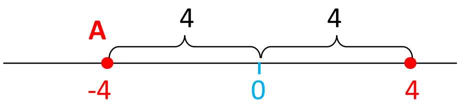
(teória + riešené príklady)

Definícia: Abs. hodnota reálneho čísla vyjadrená graficky je jeho **VZDIALENOSŤ** na číselnej osi od **NULY**.



Príklad 1: Nájdite prvky množiny **A** = **{x ∈ R; | x | = 4}**

Číslo má byť na číselnej osi vo vzdialenosti **4** od **NULY** a môže byť **vľavo** alebo **vpravo** od **NULY**. Keď teda hľadáme čísla, ktorých abs. hodnota je **4**, budú to práve dve čísla: **-4** aj **4**



t.j. množina **A** obsahuje práve dve čísla **A = {-4; 4}**

Odstránenie absolútnej hodnoty z výrazu:

Rozlišujeme 2 prípady:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ak } x \geq 0 \\ -x, \text{ak } x < 0 \end{cases}$$

abs. hodnota **nezáporného čísla** (kladného alebo nuly) je to isté číslo, napr. **| 3 | = 3**

abs. hodnota **záporného čísla** je číslo k nemu opačné, napr. **| -5 | = -(-5)**

Pozn.: Zápis –x neznamená, že výsledkom absolútnej hodnoty je záporné číslo, ale že v prípade absolútnej hodnoty zo záporného čísla hľadáme opačné k tomuto číslo. Mínus je teda znakom pre opačné číslo

Príklad 2: Odstráň absolútnu hodnotu z výrazu B(x)=| x +1| .

Rozlíšime 2 prípady:

1./ x +1 ≥ 0, t. j. $|x + 1| = x + 1, \quad \text{pre } x \geq -1$

2./ x +1 < 0 , t. j. $|x + 1| = -(x + 1) = -x - 1, \quad pre\ x < -1$

Výsledok zapisujeme:

$$|x+1| = \begin{Bmatrix} x+1, & pre\ x \in <-1, \infty) \\ -x-1, & pre\ x \in (-\infty, -1) \end{Bmatrix}$$

<u>Úloha 1:</u> Odstráňte absolútnu hodnotu a upravte výrazy:

a) <u>$A(x) = |x+2| - 2x + 3$</u>

1./ $x+2 >= 0$ ..... $|x+2| = x+2$ .... $A(x) = x + 2 - 2x + 3 = \underline{-x+5}$

$x >= -2$ .... $x \in <-2, \infty)$

2./ $x+2 < 0$ ...... $|x+2| = -(x+2) = -x-2$ ..... $A(x) = -x-2-2x+3 = \underline{-3x+1}$

$x < -2$ .... $x \in (-\infty, -2)$

$$A(x) = \begin{Bmatrix} -x+5, & pre\ x \in <-2, \infty) \\ -3x+1, & pre\ x \in (-\infty, -2) \end{Bmatrix}$$

b) <u>$B(x) = |2x-6| + 3x$</u> (D. ú)

c) <u>$C(x) = |x-5| + 3.(x+2)$</u> (D. ú.)

d) <u>$D(x) = |4-x| - 5x$</u>

<u>Príklad 2:</u> Uprav nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu

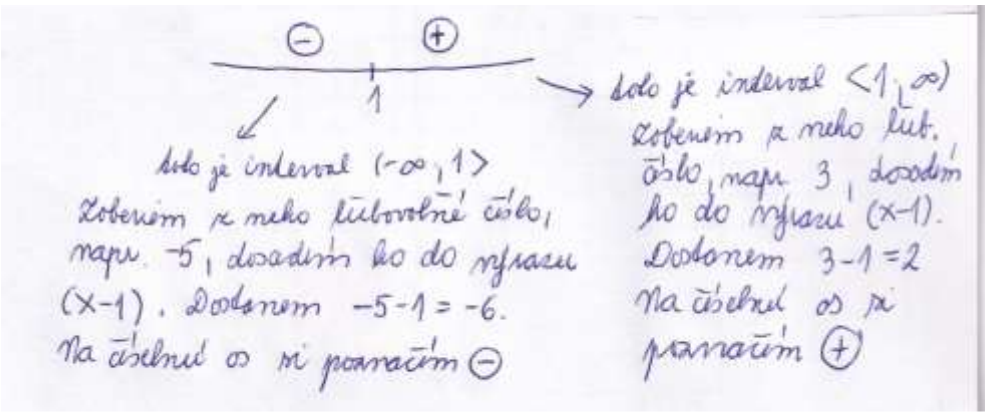
$C(x) = |x-1| - x$ (pomôž si číselnou osou, príp. tabuľkou)

Podľa výrazu vnútri absolútnej hodnoty rozlišujem dva prípady :

1./ $x-1 \geq 0$, t.j. $x \geq 1$ => $x \in <1, \infty)$

2./ $x-1 < 0$, t.j. $x < 1$ => $x \in (-\infty, 1)$

Vzniknú teda dva intervaly a číselná os sa nám rozdelí na dve časti v bode 1 (tzv. nulový bod):



1. Ak $x \in (-\infty, -1\rangle$ budem absolútnu hodnotu odstraňovať znamienkom ⊖

   $C(x) = |x-1| - x = -(x-1) - x = -x + 1 - x = \underline{\underline{-2x+1}}$

2. Ak $x \in \langle -1, \infty)$ budem absolútnu hodnotu odstraňovať znamienkom ⊕

   $C(x) = |x-1| - x = +(x-1) - x = x - 1 - x = \underline{-1}$

Prehľad do tabuľky:

x	$(-\infty, 1\rangle$	$\langle 1, \infty)$
$\lvert x-1 \rvert$	$-(x-1)$	$x-1$
$C(x)$	$-2x+1$	-1

Odpoveď:

$$C(x) = |x-1| - x = \begin{cases} -2x+1 & pre\ x \in (-\infty, 1\rangle, \\ -1 & pre\ x \in (1, \infty). \end{cases}$$

<u>Úloha 2:</u> Odstráňte absolútnu hodnotu z výrazu a zjednodušte ho (pomôžte si tabuľkou):

a) A(x) = | x + 5 | - 5. x
b) B(x) = | 2x – 4 | + 2x – 3
c) C(x) = | 5 – x | + 5. (x – 3)
d) D(x) = 8x – | x + 5 |

<u>Príklad 3:</u> Uprav nasledujúci výraz tak, aby neobsahoval absolútnu hodnotu

E(x) = | x –3| + | x + 4| (pomôž si číselnou osou, príp. tabuľkou)

Riešenie: Tentokrát mám dve absolútne hodnoty preto budú dva nulové body:

x –3 = 0, t. j. x = 3

x + 4 = 0, t. j. x = – 4

Preto sa nám číselná os rozdelí na 3 intervaly:

Modrou sú znamienka pre $|x-3|$
Červenou sú znamienka pre $|x+4|$

1) $x \in (-\infty, -4\rangle \Rightarrow E(x) = -(x-3) - (x+4) = -x+3-x-4 =$
$= \underline{-2x-1}$

2) $x \in \langle -4, -3) \Rightarrow E(x) = -(x-3) + (x+4) = -x+3+x+4 = \underline{+7}$

3) $x \in \langle 3, \infty) \Rightarrow E(x) = +(x-3) + (x+4) = x-3+x+4 = \underline{2x+1}$

x	$(-\infty, -4\rangle$	$\langle -4, 3)$	$\langle 3, \infty)$
$\lvert x-3\rvert$	$-(x-3)$	$-(x-3)$	$x-3$
$\lvert x+4\rvert$	$-(x+4)$	$x+4$	$x+4$
$E(x)$	$-2x-1$	7	$2x+1$

$$E(x) = |x-3| + |x+4| = \begin{cases} -2x-1 & \text{pre } x \in (-\infty, -4\rangle, \\ 7 & \text{pre } x \in \langle -4, 3), \\ 2x+1 & \text{pre } x \in \langle 3, \infty). \end{cases}$$

Úloha 3: Odstráňte všetky absolútne hodnoty z výrazu a zjednodušte ho (pomôžte si tabuľkou):

a) $A(x) = | x + 3 | - 2 . | x - 5 |$
b) $B(x) = | 3x - 9 | + | 2x | - 3$
c) $C(x) = | x - 4 | + 3 . | x + 4 |$
d) $D(x) = | 2 - x | + | x | + 2x$
e) $E(x) = | 5 - x | + 4 . | x - 5 |$
f) $F(x) = 4x - | x + 7 | - | x - 1 |$