

1.a Výroková logika

Vysvetli nasledujúce pojmy:

výrok, axióma, definícia, hypotéza, tvrdenie, pravdivostná hodnota, logické spojky, negácia, konjunkcia, disjunkcia, implikácia, obmena implikácie, obrátená implikácia, ekvivalencia, vyplýva, je ekvivalentné, kvantifikátor (existenčný, všeobecný, aspoň, najviac, práve)

Výrok – každá oznamovacia veta, ktorá zrozumiteľne niečo oznamuje a o ktorej má po obsahovej stránke zmysel hovoriť, že je pravdivá alebo nepravdivá. Výroky sa označujú veľkými písmenami A, B, \dots, V, \dots, Z .

Axióma – tvrdenie, ktoré sa nedokazuje, je bez pochybností pravdivé. Pomocou axióm zavádzame základné matematické pojmy.

Definícia – určuje názov nového pojmu a jeho charakteristické vlastnosti pomocou základných pojmov.

Hypotéza – oznamovacia veta, ktorá má charakter výroku, o ktorom v danom okamihu nemožno jednoznačne určiť, či je pravdivý alebo nepravdivý. Jedna z týchto podmienok však musí nastať.

Tvrdenie – výrok, ktorý má byť dokázaný.

Pravdivostná hodnota – je priradenie jednej z pravdivostných hodnôt danému výroku. Symbolicky sa značí najčastejšie číslami alebo písmenami. Pravda – 1 alebo p , nepravda – 0 alebo n .

Logické spojky – spojky (napr. a, alebo, ak..., potom..., je ekvivalentné, nie je pravda, že...), pomocou ktorých z jednoduchých výrokov vytvárame zložitejšie výroky. V matematických zápisoch sa používajú symboly na zápis týchto spojok: konjunktory \wedge , disjunktory (nevyučujúci) \vee , vylučujúci disjunktory $\vee\vee$, implikátory \Rightarrow , ekvivalentory \Leftrightarrow .

Zložený výrok – výrok, ktorý vznikol použitím logických spojok.

Konjunkcia výrokov A a B	$A \wedge B$ (A a B)	Konjunkcia $A \wedge B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak A, B sú obidva pravdivé výroky.
Disjunkcia výrokov A a B	$A \vee B$ (A alebo B)	Disjunkcia $A \vee B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak aspoň jeden z výrokov A, B je pravdivý.
Alternatíva výrokov A a B	$A \vee\vee B$ (Bud' A alebo B)	Alternatíva (ostrá disjunkcia) $A \vee\vee B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak práve jeden z výrokov A, B je pravdivý.
Implikácia výrokov A a B	$A \Rightarrow B$ (Ak A , tak B)	Implikácia $A \Rightarrow B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak nenastane situácia, že výrok A je pravdivý a súčasne výrok B je nepravdivý.
Ekvivalencia výrokov A a B	$A \Leftrightarrow B$ (A práve vtedy, keď B)	Ekvivalencia $A \Leftrightarrow B$ je pravdivý výrok práve vtedy, ak výroky A, B majú rovnakú pravdivostnú hodnotu. Výroky A, B sú ekvivalentné, ak platia obe implikácie $A \Rightarrow B, B \Rightarrow A$.

Negácia výroku – je výrok utvorený z daného výroku popierajúci jeho pravdivosť. Negáciu výroku A budeme označovať ako A' alebo $\neg A$. Negáciu výroku A tvoríme obvykle takto: Nie je pravda, že A , alebo k slovesnému tvaru pridáme zápor ne-.

Obmena implikácie – z implikácie $A \Rightarrow B$ ju vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov A a B a každý znegujeme: $B' \Rightarrow A'$. Implikácia a obmenená implikácia majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Obrátená implikácia – z implikácie $A \Rightarrow B$ ju vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov A a B : $B \Rightarrow A$. Implikácia a obrátená implikácia nemusia mať rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Tabuľka pravdivostných hodnôt negácie a zložených výrokov:

A	B	$B'(\neg B)$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \vee\vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1

Výraz zostavený z výrokových premenných, zátvoriek a logických spojok tak, že po dosadení ľubovoľných výrokov za výrokové premenné dostaneme výrok, sa v logike nazýva **výroková forma**.

Výroková forma, ktorá nadobúda hodnotu „pravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazýva **tautológia**.

Výroková forma, ktoré nadobúda hodnotu „nepravda“ pri všetkých kombináciách pravdivostných hodnôt svojich premenných sa nazývajú **kontradikcia**.

Splniteľná výroková forma je výroková forma, ktorá aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt svojich premenných nadobúda hodnotu „pravda“ a aspoň pre jednu kombináciu pravdivostných hodnôt nadobúda hodnotu „nepravda“.

Pravdivostné hodnoty výrokovej formy zisťujeme spravidla pomocou tabuľky s vhodným záhlavím, kde v jednotlivých stĺpcoch budú čiastkové výroky a ich pravdivostné hodnoty.

Negácia zložených výrokov (de Morganove pravidlá):

$(A \wedge B)' \Leftrightarrow A' \vee B'$	$(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow A \wedge B'$
$(A \vee B)' \Leftrightarrow A' \wedge B'$	$(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$

Jednoduché kvantifikované výroky – za kvantifikované výroky považujeme tie oznamovacie vety, ktoré udávajú presný počet alebo určitý odhad počtu predmetov, osôb a pod., ktoré majú uvedenú vlastnosť.

Kvantifikátor – slovo alebo krátke slovné spojenie, ktoré vyjadruje vo vete údaj o počte objektov, osôb a podobne. Je to číslovka a slová, resp. slovné spojenie: žiadny, každý, práve jeden, existuje aspoň jedno,...

Všeobecný (veľký) kvantifikátor \forall – vyjadruje, že každý uvažovaný objekt má alebo žiadny nemá vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov „každý, žiadny“ sa na tento účel používajú aj slová „všetky, ľubovoľný, ktorýkoľvek, ani jeden“ a pod.

Existenčný (malý) kvantifikátor \exists – vyjadruje, že aspoň jeden uvažovaný objekt má alebo nemá vlastnosť, o ktorú ide. Okrem slov „aspoň jeden“ sa používajú slová „niektorý, možno nájsť, existuje“ a pod.

Negovanie kvantifikovaných výrokov – možno uskutočniť predradením slov „Nie je pravda, že...“ výroku, ktorý negujeme. Stručnejšie negáciu výroku častejšie formulujeme tak, že zmeníme kvantifikátor.

Výrok	Negácia výroku
aspoň n... je...	najviac n-1... je...
najviac n... je...	aspoň n+1... je...
práve n... je...	najviac n-1 alebo aspoň n+1... je...
každý... je...	aspoň jeden... nie je...
aspoň jeden... je...	ani jeden... nie je...

Príklady:

- Dané sú vety. Určte, ktorá je výrok, výroková forma, hypotéza, kvantifikovaný výrok.
 - Graf funkcie $f: y = 2x^2$ prechádza bodom $X[1; 2]$.
 - Otec osôb a, b.
 - x je synom y.
 - $\forall x \in R: x^2 > 4$
 - $(m + n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$
 - Číslo 5 vyhovuje rovnici $x + 7 = 12$.
 - $x + 7 = 12$
 - Riešte v Z rovnicu!
 - Mám ostrý nôž.
 - Susedné strany pravouholníka sú zhodné.
 - Na Marse existuje život.
 - $\exists x \in R$ tak, že $x^3 = 8$.
 - $6x - 2 \leq 9$
- Vytvorte negáciu výrokov (bez použitia: „Nie je pravda, že...“)
 - Každý trojuholník má jeden tupý uhol.
 - Aspoň jedno prirodzené číslo je menšie ako 6.
 - Žiadne prvočíslo nie je párne.
 - Mám najviac troch kamarátov.
 - Prší.
 - Každý mlčal.
 - $\forall x \in R: |x| > 0$
 - $\exists x \in R: x^2 = 0$
 - Mám jednu sestru a jedného brata.
 - Kvadratická rovnica nemá koreň, alebo má dva korene.
 - Keď nehovorím, pracujem.
 - Na futbal pôjdem práve vtedy, keď nebude pršať.
 - Nikto neodišiel.

3. Dané sú výroky: A : V sobotu pôjdeme do lesa. B : V nedeľu pôjdeme na návštevu.
Z výrokov A a B utvorte:
- Negáciu
 - Konjunkciu
 - Disjunkciu
 - Alternatívu
 - Implikáciu
 - Ekvivalenciu
4. Dané sú výroky: X : Kúpim mäso. Y : Budem robiť rezne. Z výrokov X a Y utvorte:
- Implikáciu
 - Obrátenú implikáciu
 - Obmenenú implikáciu
 - Negáciu implikácie
5. Určte pravdivostnú hodnotu daných výrokov:
- $(-5 < -4 < -2) \Leftrightarrow 15 \leq 8$
 - $(0,5 \leq 2) \Rightarrow (2 \mid 13 \vee 2 \mid 12)$
 - $[\sqrt{25} = -5 \wedge (-5)^2 = 25] \Leftrightarrow [(2 \neq 8 \vee 3 \mid 9) \Rightarrow 5 \leq 9]$
 - $\forall x \in R: x^2 \geq 0$
6. Určte, či je daný výrok tautológia. Ak nie, určte jeho typ:
- $[(A \wedge B) \Rightarrow C] \Leftrightarrow [(A \wedge C') \Rightarrow B']$
 - $A \Leftrightarrow [A' \Rightarrow (B \wedge B')]$
 - $[(A \Rightarrow B) \wedge A'] \vee (B \Rightarrow A)$
 - $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow [(A \wedge B) \vee (A \wedge B)]$
 - $(A \wedge B') \Rightarrow (A' \wedge B')$
 - $[A \Rightarrow (B \vee C)] \Leftrightarrow [(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C)]$
7. Ak dostane Peter lístky na zápas, pôjde s ním Pavol. Peter však lístky nedostal. Vyplýva z toho, že Pavol nie je na zápase?
8. Ak kúpi Jana lístky, pôjde s ňou Eva do kina. Evu sme stretli v kine. Vyplýva z toho, že Jana kúpila lístky?
9. Rodina Cestovateľov sa rozhoduje o tom, kde pôjdu tento rok na dovolenku. Členovia rodiny navrhovali. Matka: Ja som za Španielsko alebo Taliansko. Syn: Ja som za Nórsko alebo Španielsko. Dcéra: Ja som za Nórsko alebo Taliansko. Otec chcel vyhovieť všetkým a preto navštívili všetky tri štáty. Splnil skutočne ich želania? Museli navštíviť tri štáty, aby im vyhovel?
10. Spolužiačky Oľga, Petra, Radka, Slávka a Táňa boli pozvané na oslavu Janiných narodenín. Sľúbili, že prídu, a ich účasť na oslave možno vyjadriť výrokmi: Príde Oľga a príde aj Petra. Príde Petra, alebo príde Táňa. Ak príde Táňa, tak príde aj Radka. Slávka príde vtedy, ak príde

Táňa. Pre nepriaznivé počasie na oslavu neprišla ani jedna spolužiačka. Určte, ktorá z pozvaných sľub dodržala.

11. Vierka sa chystá na ples. Jej radcami sú 2 tety a matka. Prvá teta: Ak si dáš náramok, daj si i retiazku. Druhá teta: Daj si retiazku alebo brošňu. Matka: Keď si nedáš náramok, nedaj si ani brošňu. Aké má Vierka možnosti, aby splnila všetky tri podmienky?
12. Auto stojí na vozovke neschopné ďalšej jazdy. Traja motoristi hľadajú chybu. Prvý tvrdí: Chyba je v karburátore alebo v rýchlostnej skrini, ale určite nie v zapalovaní. Druhý si myslí: Chyba nie je ani v karburátore, ani v rýchlostnej skrini. Tretí hovorí: Chyba je zapalovanie, a nie v karburátore. Ukázalo sa, že prvý motorista nemal pravdu, ale mali ju druhý a tretí motorista. V čom bola chyba?
13. V podniku nastala situácia, ktorú riešil technik vydaním pokynu. Nesmie nastať prípad: ak je v činnosti stroj A, tak je v činnosti stroj B a súčasne stroj B pracuje práve vtedy, keď je stroj C v pokoji. Aké sú možnosti činnosti týchto strojov?

Výsledky:

1. a. výrok, b. nie je výrok, c. výroková forma, d. kvantifikovaný výrok, e. výrok, f. výrok, g. výroková forma, h. nie je výrok, i. výrok, j. nie je výrok, k. hypotéza, l. kvantifikovaný výrok, m. výroková forma
2. a. Aspoň jeden trojuholník, nemá jeden tupý uhol., b. Neexistuje prirodzené číslo menšie ako 6., c. Existuje párne prvočíslo., d. Mám aspoň štyroch kamarátov., e. Neprší., f. Aspoň niekto nemlčal., g. $\exists x \in R: |x| \leq 0$, h. $\forall x \in R: x^2 \neq 0$, i. Nemám jednu sestru alebo nemám jedného brata., j. Kvadratická rovnica má aspoň jeden koreň a súčasne nemá dva korene., k. Nehovorím a nepracujem., l. Pôjdem na futbal a bude pršať, alebo nepôjdem na futbal a nebude pršať., m. Niekto odišiel.
3. a. A' : V sobotu nepôjdeme do lesa. B' : V nedeľu nepôjdeme na návštevu., b. V sobotu pôjdeme do lesa a nedeľu pôjdeme na návštevu., c. V sobotu pôjdeme do lesa, alebo v nedeľu pôjdeme na návštevu., d. Buď pôjdeme v sobotu do lesa alebo pôjdeme v nedeľu na návštevu., e. Ak v sobotu pôjdeme do lesa, tak v nedeľu pôjdeme na návštevu., f. V sobotu pôjdeme do lesa práve vtedy, ak v nedeľu pôjdeme na návštevu.
4. a. Ak kúpim mäso, tak budem robiť rezne., b. Ak budem robiť rezne, tak kúpim mäso., c. Ak nebudem robiť rezne, tak nekúpim mäso., d. Kúpim mäso, a nebudem robiť rezne.
5. a. 0, b. 1, c. 0, d. 1
6. a. tautológia, b. tautológia, c. tautológia, d. splniteľná formula, e. nie, f. tautológia
7. Nie, môže tam byť a nemusí, pozri tabuľku pravdivostných hodnôt pre implikáciu.
8. Nie, mohla a nemusela, pozri tabuľku pravdivostných hodnôt pre implikáciu.
9. Splnil, stačilo navštíviť ľubovoľné dva štáty.
10. Sľub dodržali Radka a Slávka.
11. Môže si dať náramok, retiazku a brošňu, alebo náramok a retiazku, alebo len retiazku.
12. Chyba bola v zapalovaní.
13. Všetky tri stroje sú v činnosti., V činnosti sú stroje A a C, stroj B je v pokoji., V činnosti je stroj A, stroje B a C sú v pokoji., V činnosti sú stroje B a C, stroj A je v pokoji., Všetky tri stroje sú v pokoji.