1. Čísla a operácie s nimi

Číselné obory:

N* – *prirodzené čísla: $\{1;2;3;4;...\}$

- Udávajú počet prvkov, prípadne poradie

***Z* – *celé čísla*:** $\{...;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$

- $Z^- = \{...;-3;-2;-1\}$ - záporné celé čísla
- $Z^+ = \{1;2;3;...\}$ - kladné celé čísla
- 0 – nie je ani kladné, ani záporné číslo

Q* – *racionálne čísla:

- Čísla, ktoré sa dajú vyjadriť zlomkom $\frac{p}{q}$; p – čitateľ (celé číslo)
  q – menovateľ (prirodzené číslo)

I* – *iracionálne čísla: napr. $\sqrt{2};\sqrt{5}$

- sú čísla, ktoré nevieme vyjadriť v tvare zlomku
- vyjadrujú sa nekonečným neperiodickým desatinným rozvojom

R* – *reálne čísla

- sú všetky racionálne a iracionálne čísla
- vypĺňajú celú číselnú os
- môžeme vyjadriť pomocou desatinného čísla s konečným alebo nekonečným desatinným rozvojom

<u>Konečný rozvoj:</u>

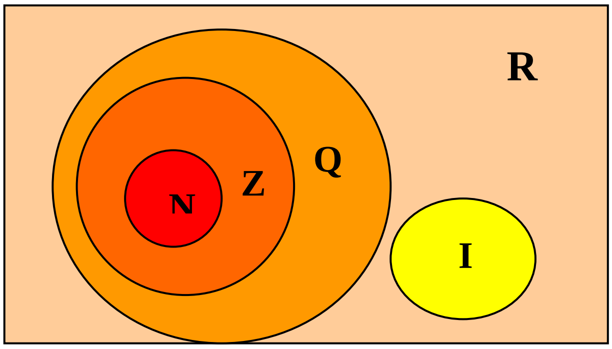
$\frac{1}{5} = 0{,}2$; $\frac{5}{100} = 0{,}05$

<u>Nekonečný rozvoj:</u>

- <u>periodický</u>: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}\overline{3}$; $\frac{169}{330} = 0{,}51212.. = 0{,}5\overline{12}$ (opakuje sa určitá skupina číslic)

- <u>neperiodický:</u> $\sqrt{2} = 1{,}41421...$; $\pi = 3{,}14159...$

Obor všetkých reálnych čísel obsahuje obory všetkých prirodzených, celých, racionálnych čísel a iracionálnych čísel



Príklad :

a) $\frac{3}{4} = 0{,}75$ *<u>Na kalkulačke:</u>* $\boxed{3} \rightarrow \boxed{a\,{}^{b}/_{c}} \rightarrow \boxed{4} \rightarrow$ $\boxed{\text{EXE}}$ $\rightarrow \boxed{a\,{}^{b}/_{c}} \rightarrow \boxed{0{,}75}$

b) $\frac{10}{9}=1,\bar{1}$ *Na kalkulačke:* $\boxed{10} \rightarrow \boxed{a\,{}^{b}/_{c}} \rightarrow \boxed{9} \rightarrow \boxed{\text{EXE}} \rightarrow \boxed{a\,{}^{b}/_{c}} \rightarrow \boxed{1,\bar{1}}$

Vlastnosti reálnych čísel

Počtové výkony (operácie):

- sčítanie a odčítanie malých čísel boli dlhé tisícročia jedinými počtovými operáciami
- znaky počtových operácii sa zapisovali slovom: sčítanie et, odčítanie mínus
- znamienka sa prvýkrát začali objavovať v 2. polovici 16. storočia v tlačených knihách

Názvy členov v počtových výkonoch

Počtový výkon	1.člen	znak	2. člen	Rovná sa	výsledok
sčítanie	sčítanec	+	sčítanec	=	súčet
odčítanie	menšenec	-	menšiteľ	=	rozdiel
násobenie	činiteľ	.	činiteľ	=	súčin
delenie	delenec	:	deliteľ	=	podiel

Prednosť počtových úkonov:

1. umocňovanie, odmocňovanie
2. zátvorky
3. násobenie, delenie
4. sčítanie, odčítanie

Vlastnosti reálnych čísel:

1. *komutatívnosť sčítania, násobenia* (zámena sčítancov, činiteľov)

Príklad: $3+2=5$; $2+3=5$ $\quad a+b=b+a$

$3.2=6$; $2.3=6$ $\quad a.b=b.a$

2. *asociatívnosť sčítania, násobenia* (združovanie sčítancov, činiteľov)

Príklad: $3+(2+4)=3+6=9$; $(3+2)+4=5+4=9$ $\quad a+(b+c)=(a+b)+c$

$3.(2.4)=3.8=24$; $(3.2).4=6.4=24$ $\quad a.(b.c)=(a.b).c$

3. *distributívnosť* (roznásobenie) *vzhľadom na sčítanie*

Príklad: $(2+3).4=5.4=20$; $2.4+3.4=8+12=20$ $\quad (a+b).c=a.c+b.c$

4. 0 – *neutrálny prvok sčítania*

Príklad: $3+0=3$ $\quad a+0=a$

5. 1 – *neutrálny prvok násobenia*

Príklad: $3.1=3$ $\quad a.1=a$

6. *Ak sa súčin rovná nule, tak aspoň jedno z čísel sa rovná nule*

Pri násobení a delení celých čísel platia tieto pravidlá:

Príklad:

$2.3=6$	$(+).(+)=+$	$(+):(+)=+$
$(-2).(-3)=6$	$(-).(-)=+$	$(-):(-)=+$
$2.(-3)=-6$	$(+).(-)=-$	$(+):(-)=-$
$(-2).3=-6$	$(-).(+)=-$	$(-):(+)=-$

Poznámka: platí aj pre delenie

Počítanie so zlomkami:

Príklad 1 Vypočítajte:

a) $\frac{1}{3}+\frac{4}{5}=\frac{5.1+3.4}{15}=\frac{17}{15}=1\frac{2}{15}=1,1\bar{3}$

$\frac{17}{15}$ - zlomok v základnom tvare; $1\frac{2}{15}$ - zmiešané číslo; $1,1\overline{3}$ - desatinné číslo

Sčítavanie zlomkov:

- dáme na spoločného menovateľa (najmenší spoločný násobok)
- čitatele rozšírime takým číslom, akým sme rozšírili menovateľov

<u>*Na kalkulačke:*</u>

1 → $a^b/_c$ → 3 → + → 4 → $a^b/_c$ → 5 → EXE → 1⌋2⌋15 → *shift* → $a^b/_c$ → 17⌋15 → → $a^b/_c$ → 1,133333333

Poznámka: žltou farbou sú vyznačené nové tlačidlá a zelenou farbou výsledky na displeji, EXE na kalkulačke je =.

b) $\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8} = \frac{1.3}{1.2} = \frac{3}{2}$

Násobenie zlomkov:

- ak sa dá tak najprv zlomky krátime
- potom násobíme čitateľa s čitateľom a menovateľa s menovateľom

<u>*Na kalkulačke:*</u>

4 → $a^b/_c$ → 3 → x → 9 → $a^b/_c$ → 8 → EXE → 1⌋1⌋2 → shift → $a^b/_c$ → 3⌋2

c) $\frac{2}{3}:\frac{8}{3} = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{4}$

Delenie zlomkov:

- delenie upravíme na násobenie prevráteným zlomkom
- postupujeme ako pri násobení

<u>*Na kalkulačke:*</u>

2 → $a^b/_c$ → 3 → ÷ → 8 → $a^b/_c$ → 3 → EXE → 1⌋4

d) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{3}{4}:\frac{7}{2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7} = \frac{3.1}{2.7} = \frac{3}{14}$ → 1.spôsob 2. spôsob: $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{2}} = \frac{3.2}{4.7} = \frac{3}{14}$

Zložený zlomok:

- 1. spôsob: delíme čitateľa s menovateľom a postupujeme ako pri delení
- 2. spôsob: vynásobíme vonkajšie čísla v čitateli a vnútorné čísla v menovateli

<u>*Na kalkulačke:*</u>

3 → $a^b/_c$ → 4 → ÷ → 7 → $a^b/_c$ → 2 → EXE → 3⌋14

Zaokrúhľovanie čísel :

Stotisícky Tisícky Desiatky Desatiny Tisíciny Stotisíciny

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1 2 3 4 5 6 7 , 8 9 0 1 2 3

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

Milióny Desaťtisícky Stovky Jednotky Stotiny Desaťtisíciny Milióntiny

- číslice 0, 1, 2, 3, 4 za daným rádom zaokrúhľujeme nadol, to znamená, že číslica na danom ráde sa nezmení a ostatné vpravo sa zmenia na 0
- číslice 5, 6, 7, 8, 9 za daným rádom zaokrúhľujeme nahor, to znamená, že číslica na danom ráde sa o 1 zvýši a ostatné vpravo sa zmenia na 0

Príklad : a) $124\underline{5}123 \doteq 1245000$

b) $25,\underline{8}79 \doteq 25,900$

Slovné úlohy

Postup pri riešení slovných úloh:

- pozorne si prečítať text
- zistiť, čo máme dané a čo potrebujeme vypočítať
- zistiť aký je vzťah medzi veličinami, ktoré sa v úlohe vyskytujú
- hľadanú veličinu označiť písmenom (x, y, z, ...) a pomocou nej opísať slovné vyjadrenie zadania použitím matematickej symboliky
- vyriešiť slovnú úlohu
- vykonať skúšku dosadením do textu
- napísať slovnú odpoveď

Slovnú úlohu môžeme riešiť:

- úsudkom
- trojčlenkou (priama a nepriama úmernosť, percentá)
- rovnicou alebo sústavou rovníc
- graficky

Poznámka: Slovná úloha sa často dá riešiť rôznym spôsobom a záleží na riešiteľovi, ktorý spôsob si zvolí.

Trojčlenka – zápis , ktorý umožňuje zmechanizovať riešenie úloh úmernosťami

Príklad 1:

Auto pri rovnakej rýchlosti prešlo 180 km za 3 hodiny.

Úloha 1:

Akou priemernou rýchlosťou išlo auto? Vypočítajte pomocou úsudku.

Úloha 2:

Aký je vzťah medzi časom jazdy a prejdeným úsekom cesty pri nezmenenej rýchlosti?

Úloha 3:

Za aký čas pri nezmenenej rýchlosti prejde 210 km?

Riešenie:

Úloha 1:

Auto prejde za 3 hodiny 180 km cesty. Za 1 hodinu prejde trikrát menej t.z. 60 kilometrov (180 : 3 = 60).

Úloha 2:

Medzi časom jazdy a prejdeným úsekom cesty je priama úmernosť.

Priama úmernosť – vzťah dvoch veličín, pri ktorom, ak sa zväčšuje (zmenšuje) jedna veličina, tak sa zväčšuje (zmenšuje) aj druhá veličina.

Úloha 3:

180 km .... 3 hodiny
210 km .... x hodín

$x = \frac{210}{180}.3 = 3{,}5 hodiny$

Skúška:
za 1 hodinu prejde auto 60 km
za 3,5 hodiny prejde 3,5 krát viac: 3,5 . 60 = 210
Odpoveď:
Auto prejde 210 kilometrov pri nezmenenej rýchlosti za 3,5 hodiny.

Príklad 2:
Pumpa čerpajúca 4 litre vody za sekundu vyčerpá stavebnú jamu za 10 hodín.
Úloha 1:
Aký je vzťah medzi časom čerpania vody a výkonnosťou pumpy pri nezmenenom objeme vody?
Úloha 2 :
Ako dlho bude to isté množstvo vody čerpať pumpa, ktorá má výkonnosť 6 litrov vody za sekundu?
Riešenie:
Úloha 1:
Medzi časom čerpania vody a výkonnosťou pumpy je nepriama úmernosť.
Nepriama úmernosť – vzťah dvoch veličín, pri ktorom, ak sa zväčšuje (zmenšuje) jedna veličina, tak sa zmenšuje (zväčšuje) druhá veličina.
Úloha 2:
↓ 4 l / sekundu .... 10 hodín ↑
6 l / sekundu .... x hodín

$x = \frac{4}{6}.10 = 6\frac{2}{3} hodín =$ 6 hodín 40 minút.

Poznámka: Pre rýchlejší výpočet nemusíte trojčlenku zapisovať pomocou pomeru, ale zapíšete ju pomocou šípok. Číslo na začiatku šípky dáte do čitateľa, číslo na konci šípky do menovateľa a vynásobíte číslom, ktoré je nad neznámou x.

Pri riešení praktických úloh sa často stretávate s **mierkou** mapy, plánu mesta, domu ap. Tieto úlohy sa riešia **pomocou priamej úmernosti**. Zopakujeme si čo predstavuje mierka.
Napríklad: Mierka 1 : 2 000 znamená, že 1 cm na mape predstavuje 2 000 cm v skutočnosti.

Príklad 3:
Na pláne urobenom v mierke 1 : 1 500 je priama cesta znázornená úsečkou dĺžky 4,8 cm. Aká je skutočná dĺžka cesty?
Riešenie:
plán skutočnosť
↑ 1cm ....1 500 cm ↑
4,8 cm .... x cm

$x = \frac{4{,}8}{1}.1500 = 7200$ cm = 72 m. Odpoveď: Cesta je v skutočnosti 72 m dlhá.

2. Výroková logika

Výrok je každá oznamovacia veta, o ktorej má zmysel uvažovať, či je pravdivá alebo nepravdivá.
Výroky označujeme veľkými tlačenými písmenami A, B, C, ...
Napríklad: A: Dnes prší. B: Prší dnes?

- A je výrok, pretože je to oznamovacia veta a vieme určiť jej pravdivosť
- B nie je výrok, lebo je to opytovacia veta.

Pracovný list – výroky, zložený výrok

Príklad 1.
Pozore si prečítajte dané vety:
A: Hlavné mesto Poľska je Varšava.
B: Choď po kriedu!
C: 3 . 5 = 10.
D: Súčet dvoch párnych čísel nie je párne číslo.
E: $2x + y \leq 0$.
Úloha 1:
Ktoré z daných viet sú výrok?

1. všetky
2. všetky, okrem A, C
3. všetky, okrem C, D
4. všetky, okrem B, E
5. A, D

Úloha 2:
Určte pravdivostnú hodnotu daných výrokov.
Úloha 3:
Dané výroky negujte.
Príklad 2.
Sú dané výroky:
A: Budem sa učiť.
B: Budem počúvať hudbu.
C: Kúpim jablká.
D: Kúpim pomaranče.
E: Budem sa dobre učiť.
F: Pôjdem na vysokú školu.
G: Zmaturujem s vyznamenaním.
H: Dostanem auto.
Úloha 1:
Z výrokov A, B utvorte konjunkciu. Určte pravdivosť konjunkcie pre všetky možnosti pravdivosti výrokov A, B.
Úloha 2:
Z výrokov C, D utvorte disjunkciu (alternatívu). Čo musíte doniesť domov, aby ste vraveli pravdu? Kedy sľub nesplníte?
Úloha 3:
Z výrokov E, F vytvorte implikáciu. Kedy budete klamať?
*Úloha 4:*Z výrokov G, H vytvorte ekvivalenciu. Určte pravdivostnú hodnotu pre všetky možnosti.

<u>*Pracovný list : Príklad 1, úloha 1*</u>

- Správna odpoveď: 4 (A, C, D – sú oznamovacie vety a vieme určiť ich pravdivosť)

Pravdivostná hodnota výroku: Každému výroku môžeme priradiť jedinú pravdivostnú hodnotu a označujeme

- ***pravdivý*** ph (V) = 1
- ***nepravdivý*** ph (V) = 0

<u>*Pracovný list : Príklad 1, úloha 2*</u>

- ph(A) = 1; ph(C) = 0; ph(D) = 0.

Negácia výroku je výrok, ktorý popiera to, čo tvrdí pôvodný výrok. *Má opačnú pravdivostnú hodnotu*.
Negáciu výroku označujeme: $\neg A$ alebo A'
Negáciu výroku tvoríme pomocou slovného spojenia:

- Nie je pravda, že ...
- Neplatí, že ...
- Znegujeme vlastnosť daného výroku

Napríklad: A: Dnes prší.
$\neg A$: Nie je pravda, že dnes prší.
Neplatí, že dnes prší.
Dnes neprší.

Pracovný list: Príklad 1, úloha 3

- $\neg A$: Hlavné mesto Poľska nie je Varšava.
- $\neg C: 3.5 \neq 10$.
- $\neg D$: Súčet dvoch párnych čísel je párne číslo.

Zložený výrok vznikne z jednoduchých výrokov pomocou logických spojok.
Logické spojky:

- $\wedge$ - čítame: a, a súčasne, i, ale, ani, napriek tomu, aj, ...
- $\vee$ - čítame: alebo
- $\Rightarrow$ - čítame: ak ... , tak .... ; keď ..., potom ...;
- $\Leftrightarrow$ - čítame: ... práve vtedy, ak ... ; ... práve vtedy, a len vtedy keď ...

Pracovný list : Príklad 2

- Na postupnom riešení úloh 1 – 4 vysvetlíme tvorbu zložených výrokov a určenie ich pravdivosti:

1. Konjunkcia : tvoríme pomocou logickej spojky $\wedge$
Úloha 1:
$A \wedge B$: *Budem sa učiť a počúvať hudbu.*

- Ak sa budem učiť a súčasne počúvať hudbu budem vravieť pravdu.
- Ak sa budem učiť a nebudem počúvať hudbu; nebudem sa učiť a budem počúvať hudbu; nebudem sa učiť a nebudem počúvať hudbu – vo všetkých prípadoch nebudem mať pravdu

Konjunkcia je pravdivá, ak sú obidva výroky pravdivé.

2. Disjunkcia (alternatíva): tvoríme pomocou logickej spojky $\vee$
Úloha 2:
$C \vee D$: *Kúpim jablká alebo pomaranče.*

- Pravdu budem mať ak domov donesiem jablká a pomaranče; ak domov donesiem jablká a pomaranče nie; ak domov donesiem pomaranče a jablká nie
- Sľub nesplním, ak domov nedonesiem ani jablká, ani pomaranče

Disjunkcia je pravdivá, ak aspoň jeden výrok je pravdivý (nepravdivá, ak sú oba výroky nepravdivé).

3. Implikácia: tvoríme pomocou logickej spojky $\Rightarrow$
Úloha 3:
$E \Rightarrow F$: *Ak sa budem dobre učiť, tak pôjdem na vysokú školu*.
Pri určovaní pravdivosti implikácie je chodenie na vysokú školu podmienené dobrým učením sa.

- Ak budú oba výroky pravdivé (budem sa dobre učiť a pôjdem na VŠ) budem vravieť pravdu

- Ak bude prvý výrok pravdivý (budem sa dobre učiť), ale druhý nepravdivý (nepôjdem na VŠ) nebudem mať pravdu, pretože nie je splnená podmienka, že ak sa budem dobre učiť pôjdem na VŠ.
- Ak je prvý výrok nepravdivý (nebudem sa dobre učiť) – takáto podmienka nie je zadaná , takže z tejto vety nemôžeme presne určiť, čo sa má stať, ak sa nebudem dobre učiť. Preto v tomto prípade je stále implikácia pravdivá a nezáleží na pravdivosti druhého výroku (môže byť pravdivý alebo nepravdivý).
- Klamať budem ak sa budem dobre učiť a nepôjdem na vysokú školu

Implikácia je nepravdivá, ak je prvý výrok pravdivý a druhý nepravdivý.

4. Ekvivalencia: tvoríme pomocou spojky $\Leftrightarrow$

- Je obojstranná implikácia

<u>Úloha 4</u> :

$G \Leftrightarrow H$: ***Zmaturujem s vyznamenaním práve vtedy, keď dostanem auto.***

- Pravdu budem mať, ak oba výroky budú pravdivé (zmaturujem s vyznamenaním a súčasne dostanem auto). Tiež aj keď oba výroky budú nepravdivé (nezmaturujem s vyznamenaním a nedostanem auto).
- Pravdu nebudem mať, ak výroky budú mať rôznu pravdivostnú hodnotu (nezmaturujem s vyznamenaním a dostanem auto; zmaturujem s vyznamenaním a nedostanem auto).

Ekvivalencia je pravdivá , ak oba výroky majú rovnakú pravdivostnú hodnotu (oba výroky sú pravdivé alebo nepravdivé)

Poznámka: ak chceme zistiť pravdivostnú hodnotu pre všetky možnosti je priehľadnejšie to zapisovať do tabuľky pravdivostných hodnôt:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1

Negácia zložených výrokov:

- poprieme pôvodný zložený výrok
- negujeme pomocou vzťahov:

1. Negácia konjunkcie: $\neg(A \wedge B) = (\neg A \vee \neg B)$

Príklad 1:

Máme jablká a hrušky. **A:** Máme jablká. **B:** Máme hrušky.

<u>Negácia</u> : Nemáme jablká alebo nemáme hrušky.

2. Negácia disjunkcie: $\neg(A \vee B) = (\neg A \wedge \neg B)$

Príklad 2:

Na raňajky si dám čaj alebo kávu. **A:** Na raňajky si dám čaj.
B: Na raňajky si dám kávu.

<u>Negácia:</u> Na raňajky si nedám čaj ani kávu.

3. Negácia implikácie: $\neg(A \Rightarrow B) = (A \wedge \neg B)$

Príklad 3:

Ak dostanem čerstvý chlieb, tak nekúpim rožky. **A:** Dostanem čerstvý chlieb.
B: Nekúpim rožky.

Negácia: Dostanem čerstvý chlieb a kúpim rožky.

4. Negácia ekvivalencie: $\neg(A \Leftrightarrow B) = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Príklad 4: Karol príde práve vtedy, keď príde Jozef. **A:** Príde Karol.
B: Príde Jozef.

Negácia: Karol príde a nepríde Jozef, alebo Karol nepríde a príde Jozef.

Kvantifikovaný výrok – výrok, ktorý udáva počet

$\forall$ - **všeobecný kvantifikátor** (čítame: každý, všetky, žiadny, ľubovoľný, ...)

- Vyjadruje, že každý uvažovaný objekt má požadovanú vlastnosť

Príklad 1:

$\forall x \in R; x^2 \geq 0$ (čítame: Pre všetky reálne čísla x platí, že druhá mocnina daného čísla je nezáporná)

$\exists$ - **existenčný kvantifikátor** (čítame: existuje aspoň jeden, ...)

- Vyjadruje, že aspoň jeden objekt má požadovanú vlastnosť.

Príklad 2:

$\exists x \in N; x < 0$ (čítame: existuje aspoň jedno prirodzené číslo, ktoré je záporné)

Negácia kvantifikovaného výroku:

- Negujeme kvantifikátor a výrokovú formu (vlastnosť)

Príklad 3: Negujte zápisy z príkladu 1 a 2.

$\neg[\forall x \in R; x^2 \geq 0] = [\exists x \in R; x^2 < 0]$ $\neg[\exists x \in N; x < 0] = [\forall x \in N; x \geq 0]$

Príklad 4: Negujte dané výroky:

A: Každý trojuholník *je* tupouhlý.

$\neg A$: Existuje aspoň jeden trojuholník, ktorý *nie je* tupouhlý.

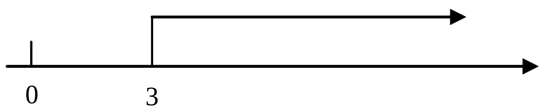
B: Aspoň jedno prvočíslo *je* párne.

$\neg B$: Každé prvočíslo *nie je* párne.

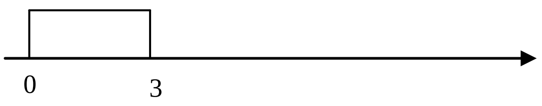
Okrem výrokov, v ktorých je všeobecný alebo existenčný kvantifikátor sú výroky, kde je aspoň n objektov, najviac n objektov, práve n objektov.

Napríklad:

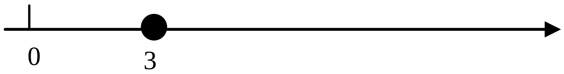
- **Aspoň 3** – znamená 3 a viac (3,4,5, ...)



- **Najviac 3** – znamená 3 a menej (0,1,2,3)



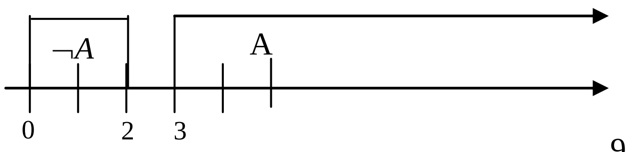
- **Práve 3** – znamená len 3 a nijaký iný počet



V tomto prípade negujeme počet objektov

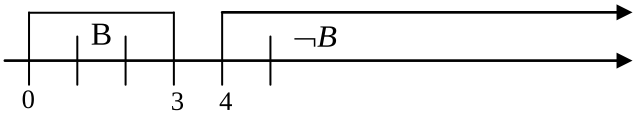
Príklad 5:

A: *Aspoň traja* žiaci tejto triedy budú vyznamenaní.



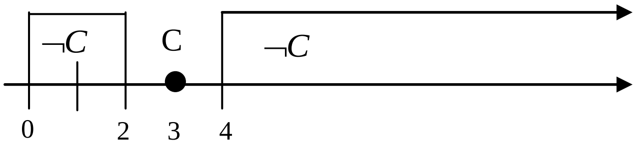
$\neg A$: <u>*Najviac dvaja*</u> žiaci tejto triedy budú vyznamenaní.

B: <u>*Najviac tri*</u> dni bude pršať.



$\neg B$: Pršať bude <u>*aspoň štyri*</u> dní.

C: <u>*Práve traja*</u> z nás pôjdu do kina.



$\neg C$: Do kina pôjdu <u>*najviac dvaja*</u> alebo <u>*aspoň štyria*</u> z nás.

3. Intervaly

Pojem množiny

Pracovný list – základné množinové pojmy

Príklad 1:
Pozorne si prečítajte text:
Na stole máte trojuholník, kruh, jablká, mobilný telefón, hrušky, štvorec, notebook, pomaranče, i Pod, kalkulačka, obdĺžnik.
Úloha 1:
Na stole si chcete upratať. Roztrieďte tieto predmety do troch skupín.
Úloha 2:
Prečo ste sa rozhodli pre tieto skupiny?
Úloha 3:
Patrí do niektorej zo skupín kalkulačka a myš?
Úloha 4:
Vypíšte jednotlivé množiny vymenovaním prvkov.
Úloha 5:
Zapíšte dané množiny charakteristickou vlastnosťou.
Úloha 6:
Rovnajú sa dané množiny, alebo je niektorá z nich podmnožinou ostatných?
Úloha 7:
Určte počet prvkov jednotlivých množín. Sú tieto množiny konečné, nekonečné alebo prázdne?

Príklad 2:
Je daná množina symbolov: {☺, ♥, *, ▲, □}
Úloha 1:
Utvorte a zapíšte všetky podmnožiny s dvoma prvkami.
Úloha 2:
Utvorte a zapíšte všetky podmnožiny s troma prvkami.
Úloha 3:
Je prázdna množina podmnožinou našej množiny symbolov? Svoje tvrdenie zdôvodnite.

Pracovný list príklad 1:
Úloha 1:
Predmety rozdelíme do troch skupín tak, že dáme spolu:

- geometrické útvary: trojuholník, kruh, štvorec a obdĺžnik
- ovocie: jablká, hrušky, pomaranče
- techniku: mobilný telefón, notebook, iPod, kalkulačka

Úloha 2:
Dané predmety sme rozdelili podľa spoločných znakov
Poznámka: takéto skupiny budeme nazývať množina – môžeme ju popísať intuitívne.

Množina je súbor predmetov (objektov), ktoré majú určitú vlastnosť, o ktorých vieme povedať, či patria alebo nepatria do daného súboru predmetov. (označenie: A, B, ...)
Úloha 3:

- kalkulačka patrí do množiny techniky
- myš nepatrí do žiadnej z daných množín (neleží na stole).

Prvok množiny: sú jednotlivé predmety (objekty) množiny (označenie: a, b, ...)
$a \in A$- čítame: prvok a patrí množine A

$b \notin A$ - čítame: prvok b nepatrí množine A

Množinu môžeme určiť :

a) <u>*vymenovaním prvkov*</u>: vymenujeme všetky prvky (prvok zapíšeme iba raz)
b) <u>*charakteristickou vlastnosťou*</u>: napíšeme vlastnosť, ktorá je charakteristická pre každý prvok

<u>*Pracovný list príklad 1:*</u>

Úloha 4:

- vymenujeme konkrétne predmety jednotlivých množín

Úloha 5:

- množina všetkých geometrických tvarov na stole
- množina ovocia, ktoré leží na stole
- množina všetkej techniky, ktorá je na stole

Poznámka: na zapísanie množiny používame zložené zátvorky: $\{\ \}$

Vzťahy medzi množinami

a) ***rovnosť množín*** A, B (označenie: $A = B$)

- množiny sa rovnajú, ak obsahujú tie isté prvky

napr. $A = \{1,2,3\}; B = \{1,2,3\}$ - majú tie isté prvky, preto $A = B$

$A = \{1,2,3\}; B = \{a,b,c\}$ - majú rovnaký počet prvkov, ale sú rôzne, preto $A \neq B$

b) množina A je ***podmnožinou*** množiny B (označenie: $A \subset B$)

- každý prvok množiny A je tiež prvkom množiny B

napr. $A = \{1,2,3\}; B = \{0,1,2,3,5\}$ - všetky prvky z A (1,2,3) sú v B, preto $A \subset B$

- v množine B sú aj prvky (0,5), ktoré nie sú v A, preto $B \not\subset A$

Pracovný list príklad 1:

Úloha 6:

- množiny sa nerovnajú, ani nie sú podmnožinami, pretože neobsahujú rovnaké prvky

Podľa počtu prvkov poznáme:

a) <u>*konečná množina:*</u>
  - vieme určiť počet prvkov; napr. $\{a,b,c\}$ - množina má 3 prvky

b) <u>*nekonečná množina:*</u>
  - nevieme určiť presný počet prvkov; napr. množina prirodzených čísel

c) <u>*prázdna množina:*</u>
  - neobsahuje žiaden prvok (označenie: $\emptyset alebo \{\ \}$)

zápis $\{\emptyset\}$ - označuje jednoprvkovú množinu, ktorej prvkom je prázdna množina

Úloha 7:

- všetky množiny sú konečné; technika a tvary – 4 prvky, ovocie – 3 prvky

Interval

Príklad 1:

Zapíšte množiny dané charakteristickou vlastnosťou výpisom prvkov:

a) $\{x \in N; -2 \leq x < 3\}$ **b)** $\{x \in Z; -2 \leq x < 3\}$ **c)** $\{x \in R; -2 \leq x < 3\}$

Riešenie:

a) $\{x \in N; -2 \leq x < 3\} = \{1,2\}$

- hľadáme všetky prirodzené čísla, ktoré sú väčšie alebo rovné -2 a menšie ako 3
- túto vlastnosť spĺňajú dve čísla 1, 2 (3 už do danej množiny nepatrí, pretože x je menšie ako 3)

b) $\{x \in Z; -2 \leq x < 3\} = \{-2,-1,0,1,2\}$

- hľadáme všetky celé čísla, ktoré sú väčšie alebo rovné -2 a menšie ako 3
- túto vlastnosť spĺňa 5 čísel (-2 do danej množiny patrí, pretože x sa rovná -2, ale 3 už nepatrí, pretože x je menšie ako 3)

c) $\{x \in R; -2 \leq x < 3\}$

- hľadáme všetky reálne čísla, ktoré ležia medzi -2 a 3
- túto množinu nemôžeme zapísať výpisom prvkov, pretože medzi týmito číslami leží nekonečne veľa reálnych čísel
- ak pracujeme s reálnymi číslami zapíšeme množinu danú charakteristickou vlastnosťou ako interval

Interval – vyjadrenie množiny reálnych čísel alebo jej časti

- graficky ich znázorňujeme úsečkou, polpriamkou alebo priamkou

Poznámka: na zapisovanie intervalov používame intervalové zátvorky:

- $\langle \ \rangle$ - krajné body úsečky patria intervalu
- $(\ )$ - krajné body nepatria intervalu

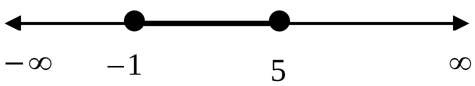
Na zapisovanie číselných množín používame množinové zátvorky: { , }

Rozdelenie intervalov:

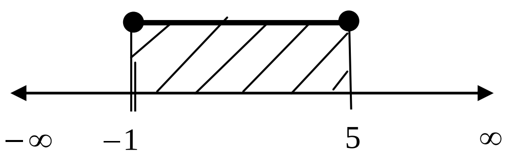
1.ohraničené – znázorňujeme ich úsečkou

a) *uzavreté:* $\{x \in R; -1 \leq x \leq 5\} = \langle -1; 5 \rangle$

- do intervalu patria všetky reálne čísla, ktoré ležia medzi -1 a 5 vrátane
- -1 a 5 danému intervalu patria, pretože x je aj rovné -1 a 5 – dávame lomené zátvorky
- Pri grafickom znázorňovaní krajné body znázorníme plným krúžkom, pretože do intervalu patria

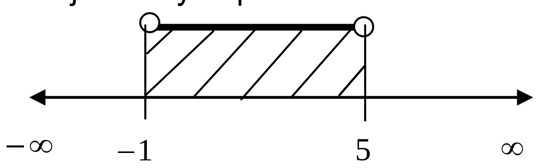


Dohoda: pre lepšiu prácu s intervalmi budeme znázorňovať intervaly nad číselnou osou a budeme ich šrafovať



b) *otvorené:* $\{x \in R; -1 < x < 5\} = (-1; 5)$

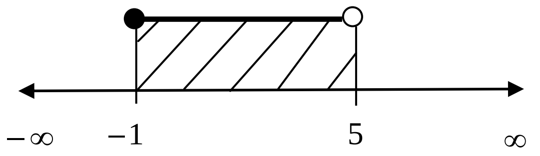
- Do intervalu patria všetky reálne čísla, ktoré ležia medzi -1 a 5
- -1 a 5 intervalu nepatria, pretože z oboch strán je ostrá nerovnosť (x sa nerovná krajným bodom) – dávame okrúhle zátvorky
- Pri grafickom znázornení krajné body znázorníme prázdnym krúžkom, pretože krajné body nepatria do intervalu



c) *polouzavreté:*

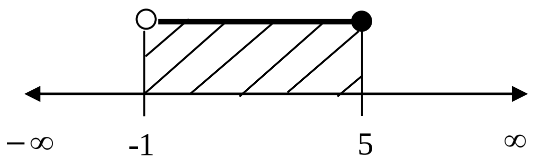
$\{x \in R; -1 \leq x < 5\} = \langle -1; 5)$

- Do intervalu patria všetky reálne čísla, ktoré ležia medzi -1 a 5
- Interval je zľava uzavretý (x sa rovná -1), sprava otvorený (x sa nerovná 5)
- -1 patrí intervalu – dáme lomenú zátvorku, 5 nepatrí intervalu dáme okrúhlu zátvorku
- Pri grafickom znázornení -1 znázorníme plným a 5 prázdnym krúžkom



$\{x \in R; -1 < x \leq 5\} = (-1; 5\rangle$

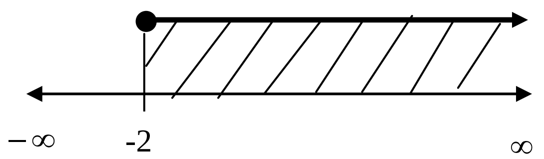
- Do intervalu patria všetky reálne čísla medzi -1 a 5
- Interval je zľava otvorený (x sa nerovná -1), sprava uzavretý (x sa rovná 5)
- Pri grafickom znázornení -1 znázorníme prázdnym a 5 plným krúžkom



2. neohraničené – znázorňujeme ich polpriamkou, priamkou

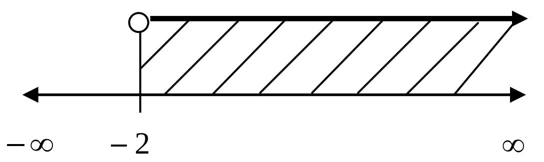
$\{x \in R; x \geq -2\} = \langle -2; \infty)$

- Do intervalu patria všetky čísla, ktoré sú väčšie alebo rovné -2, na číselnej osi ležia vpravo od -2
- Interval je zľava uzavretý od -2 do plus nekonečna
- Pri grafickom znázornení -2 znázorníme plným krúžkom; plus nekonečno znázorníme šípkou, pretože to nie je konkrétne číslo



$\{x \in R; x > -2\} = (-2; \infty)$

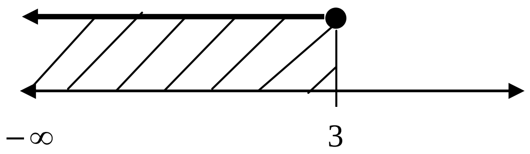
- Do intervalu patria všetky reálne čísla, ktoré sú väčšie ako -2
- Interval je zľava otvorený od -2 do plus nekonečna
- Pri grafickom znázornení -2 znázorníme prázdnym krúžkom a plus nekonečno šípkou



$\{x \in R; x \leq 3\} = (-\infty; 3\rangle$

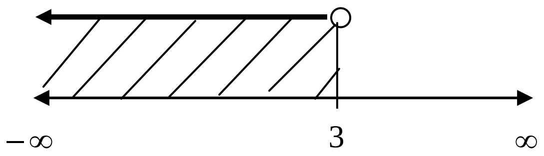
- Do intervalu patria všetky čísla, ktoré sú menšie alebo rovné 3, na číselnej osi ležia vľavo od čísla 3
- Interval je sprava uzavretý od mínus nekonečna po 3

- Pri grafickom znázornení znázorníme 3 plným krúžkom a k mínus nekonečnu bude smerovať šípka



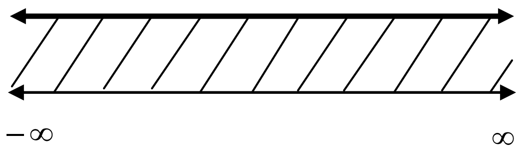
$\{x \in R; x < 3\} = (-\infty;3)$

- Do intervalu patria všetky čísla r ∞ ie ako 3
- Interval je sprava otvorený od mínus nekonečna po 3
- Pri grafickom znázornení znázorníme 3 prázdnym krúžkom a k mínus nekonečnu bude smerovať šípka



$R = (-\infty;\infty)$

- Do intervalu patria všetky reálne čísla t.z. je vyplnená celá číselna os
- Interval je od mínus nekonečna do plus nekonečna
- Pri grafickom znázornení ho znázorníme ako obojstrannú šípku



Operácie s intervalmi

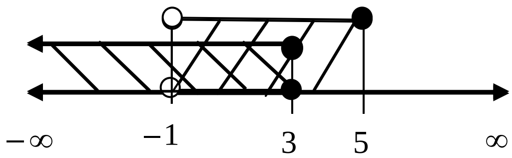
- Interval je množina reálnych čísel, preto s nimi môžeme vykonávať všetky operácie ako s číselnými množinami (prienik, zjednotenie, rozdiel, doplnok)

Príklad 2:
Určte prienik, zjednotenie, rozdiel a doplnok vzhľadom na množinu reálnych čísel intervalov: $A = (-\infty;3\rangle$, $B = (-1;5\rangle$

- Intervaly znázorníme na jednej číselnej osi

a) ***prienik intervalov***:

  - hľadáme spoločné prvky t.z. tie, ktoré patria do oboch intervalov súčasne (na obrázku je to mriežka)

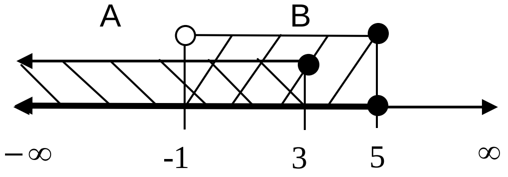


$A \cap B = (-1;3\rangle$

- -1 nepatrí intervalu B, nepatrí ani prieniku, preto je prázdny krúžok a okrúhla zátvorka
- 3 patrí intervalu A aj B, patrí aj prieniku, preto je plný krúžok a lomená zátvorka

b) ***zjednotenie intervalov:***

- hľadáme prvky, ktoré patria aspoň do jedného z intervalov (na obrázku je to časť, ktorá je vyšrafovaná)

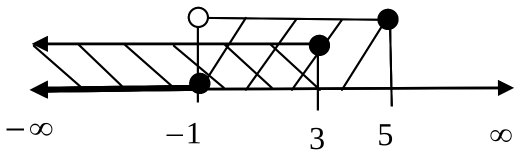


$A\cup B=(-\infty;5\rangle$

- 5 patrí intervalu B, patrí aj zjednoteniu, preto je plný krúžok a lomená zátvorka

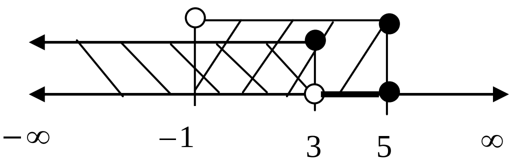
c) ***rozdiel intervalov:***

- $A-B$ - z intervalu A zoberieme všetko, čo patrí do intervalu B



$A-B=(-\infty;-1\rangle$

- -1 nepatrí intervalu B, patrí teda do rozdielu $A-B$, preto je plný krúžok a lomená zátvorka
- $B-A$ - z intervalu B zoberieme všetko, čo patrí do intervalu A

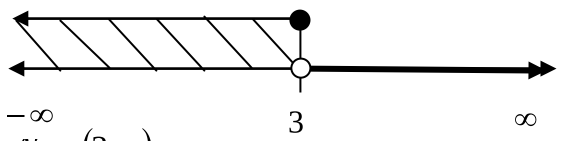


$B-A=(3;5\rangle$

- 3 patrí intervalu A, teda nepatrí do rozdielu $B-A$, preto meníme plný krúžok na prázdny a dávame okrúhlu zátvorku
- 5 patrí do intervalu B, teda patrí aj do rozdielu $B-A$, preto je plný krúžok

d) doplnok intervalov vzhľadom na množinu reálnych čísel:

- A'_R - z množiny reálnych čísel zoberieme interval A

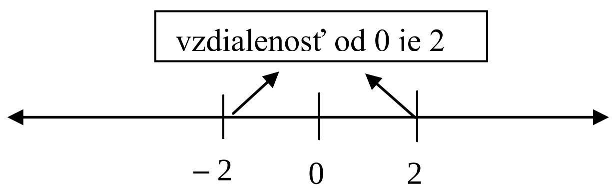


$A'_R=(3;\infty)$

- 3 patrí do intervalu A, nepatrí do doplnku intervalu A vzhľadom na množinu reálnych čísel, preto je prázdny krúžok a okrúhla zátvorka

Interval a absolútna hodnota

Absolútna hodnota je vzdialenosť ľubovoľného čísla od začiatku číselnej osi.



$|-2| = |2| = 2$

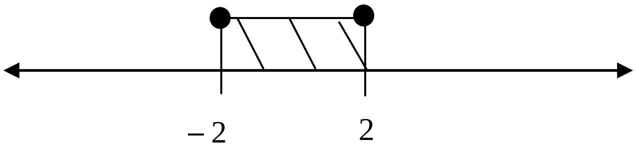
Poznámka: absolútna hodnota vyjadruje vzdialenosť čísla od nuly, preto je vždy kladné číslo.

- Pomocou absolútnej hodnoty môžeme definovať aj intervaly ako podmnožiny reálnych čísel

Príklad 1:

Dané množiny znázornite na číselnej osi a zapíšte ako interval:

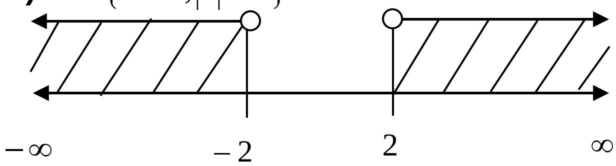
a) $A = \{x \in R; |x| \leq 2\}$



$A = \langle -2; 2\rangle$

- Hľadáme čísla, ktorých absolútna hodnota je menšia, alebo sa rovná 2
- Čísla, ktoré majú vzdialenosť menšiu ako dva ležia medzi číslami -2 a 2
- Krajné čísla patria do intervalu, pretože máme aj rovná sa, preto sú plné krúžky a lomené zátvorky

b) $B = \{x \in R; |x| > 2\}$

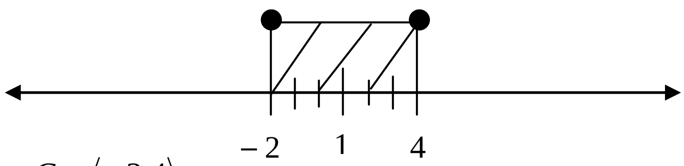


$B = (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

- Hľadáme čísla, ktorých absolútna hodnota je väčšia ako 2
- Čísla, ktoré majú vzdialenosť väčšiu ako dva ležia naľavo od čísla -2 a napravo od čísla 2
- Dostali sme dva intervaly, spojíme ich zjednotením
- Krajné čísla nepatria do intervalu, pretože je ostrá nerovnosť (chýba rovná sa), preto sú prázdne krúžky a okrúhle zátvorky

c) $C = \{x \in R; |x-1| \leq 3\}$

- V tomto prípade máme absolútnu hodnotu posunutú, preto musíme nájsť „stred intervalu" (t.z. číslo od ktorého budeme počítať danú vzdialenosť) – nulový bod: $x - 1 = 0$; $x = 1$
- Nájdeme krajné body intervalu – pripočítame a odčítame číslo 3 od čísla 1; vpravo $1 + 3 = 4$; vľavo $1 - 3 = -2$



$C = \langle -2; 4\rangle$

- Ďalej postupujeme ako v prípade a), b)

4. Mocniny a odmocniny

Definícia mocniny : $\boxed{a^n = a.a......a}$ (n činiteľov); $a \in R, n \in Z^+$

a – základ mocniny, n – exponent

$\boxed{a^0 = 1}$

Príklad :

a) $6^3 = 6.6.6 = 216$ *Na kalkulačke:* $\boxed{6} \to \boxed{x^3} \to \boxed{\text{EXE}} \to \boxed{216}$

b) $(-4)^4 = (-4).(-4).(-4).(-4) = 256$

Na kalkulačke: $\boxed{(} \to \boxed{-} \to \boxed{4} \to \boxed{)} \to \boxed{\wedge} \to \boxed{4} \to \boxed{\text{EXE}} \to \boxed{256}$

c) $\left(-12\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

Na kalkulačke: $\boxed{(} \to \boxed{-} \to \boxed{12} \to ab/c \to \boxed{2} \to \boxed{ab/c} \to \boxed{3} \to \boxed{)} \to \boxed{\wedge} \to \boxed{0} \to \boxed{\text{EXE}} \to \boxed{1}$

Poznámka:

- $\boxed{\wedge}$ - používame na výpočet akejkoľvek mocniny
- $\boxed{x^2}$, $\boxed{x^3}$, $\boxed{x^{-1}}$ – na výpočet druhej, tretej mocniny a prevráteného čísla

d) $5^{-\frac{2}{3}} = 0{,}341...$

Na kalkulačke: 5 → $\boxed{\wedge}$ → (→ $\boxed{-}$ → 2 → ab/c → 3 →) → $\boxed{\text{EXE}}$ → 0,341...

- ak je exponent zlomok musíme ho dať vždy do zátvorky

Pravidlá pre počítanie s mocninami :

- $\boxed{a^r.a^s = a^{r+s}}$

Príklad : $\left(-\frac{1}{2}\right)^1.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right)^{1+3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = 0{,}0625 = \frac{1}{16}$

- $\boxed{a^r : a^s = a^{r-s}}$

Príklad : $(-3)^8 : (-3)^3 = (-3)^{8-3} = (-3)^5 = -243$

- $\boxed{(a^r)^s = a^{r.s}}$

Príklad : $\left[(-3)^3\right]^3 = (-3)^{3.3} = (-3)^9 = -19683$

- $\boxed{(a.b)^r = a^r.b^r}$

Príklad : $(4.5)^3 = 4^3.5^3 = 64.125 = 8000$

- $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}}$

Príklad : $\left(2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{5^3}{2^3} = \frac{125}{8} = 15\frac{5}{8}$

Pri počítaní s mocninami na kalkulačke nesmieme zabúdať na zátvorky!
Prepočítaj si tieto príklady na kalkulačke.

- $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-r}=\left(\frac{b}{a}\right)^{r}}$

Príklad: $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{2}\right)^{2}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$

Poznámky :

- záporné číslo umocnené na párnu mocninu je kladné; umocnené na nepárnu mocninu je záporné

Príklad : **a)** $(-2)^4=(-2).(-2).(-2).(-2)=16$

b) $(-2)^5=(-2).(-2).(-2).(-2).(-2)=-32$

Definícia odmocniny : $\boxed{\sqrt[n]{a}=b \Leftrightarrow b^n=a}$; $a\geq 0, b\geq 0, n\in Z^+$

Príklad : **a)** $\sqrt{100}=10 \Leftrightarrow 10^2=100$ **b)** $\sqrt[3]{216}=6 \Leftrightarrow 6^3=216$

c) $\sqrt[4]{5{,}0625}=1{,}5 \Leftrightarrow 1{,}5^4=5{,}0625$ **d)** $\sqrt[5]{58769}\doteq 8{,}9914 \Leftrightarrow 8{,}9914^5\approx 58769$

Na kalkulačke:

a) $\boxed{\sqrt{\ }}$ → $\boxed{100}$ → $\boxed{\text{EXE}}$ → $\boxed{10}$

b) $\boxed{\text{SHIFT}}$ → $\boxed{x^3}$ → $\boxed{216}$ → $\boxed{\text{EXE}}$ → $\boxed{6}$

c) $\boxed{4}$ → $\boxed{\text{SHIFT}}$ → $\boxed{\wedge}$ → $\boxed{5{,}0625}$ → $\boxed{\text{EXE}}$ → $\boxed{1{,}5}$

d) $\boxed{5}$ → $\boxed{\text{SHIFT}}$ → $\boxed{\wedge}$ → $\boxed{58769}$ → $\boxed{\text{EXE}}$ → $\boxed{8{,}9914}$

Pravidlá pre počítanie s odmocninami :

- $\boxed{\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}}$

Príklad : $\sqrt[3]{20}.\sqrt[3]{50}=\sqrt[3]{1000}=10$

- $\boxed{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$

Príklad : $\frac{\sqrt[4]{160}}{\sqrt[4]{10}}=\sqrt[4]{\frac{160}{10}}=2$

Prevod mocniny na odmocninu:

- $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}$ - výhodné je tento prevod použiť, ak počítame s rôznymi odmocninami, využijeme počítanie s mocninami a v závere premeníme na odmocninu

Príklad: $\sqrt[3]{5^4}.\sqrt[4]{5^3}=5^{\frac{4}{3}}.5^{\frac{3}{4}}=5^{\frac{4}{3}+\frac{3}{4}}=5^{\frac{25}{12}}=\sqrt[12]{5^{25}}$

Počítanie s veľkými (malými číslami) na kalkulačke:

Príklad: $3.10^{12}+7.10^8=3{,}0007.10^{12}$

Na kalkulačke: $\boxed{3}$ → $\boxed{\text{EXP}}$ → $\boxed{12}$ → $\boxed{+}$ → $\boxed{7}$ → $\boxed{\text{EXP}}$ → $\boxed{8}$ → $\boxed{\text{EXE}}$ → $\boxed{3.0007\quad ^{12}}$ – do zošita prepíšeme $3{,}0007.10^{12}$.

$\boxed{\text{EXP}}$ – pomocou tohto tlačidla zapisujeme veľké (malé) čísla bez rozpisovania píšeme len exponent

5. Výrazy

1. <u>počtové</u> = zápis, ktorý tvoria čísla, ktoré sú spojené znakmi operácií, prípadne zátvorkami

   Príklad : $\left[\left(\frac{5}{6}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\right)\right].\frac{\frac{3}{8}-\frac{7}{12}}{\frac{3}{4}-\frac{7}{8}}=$

2. <u>algebrické</u> = zápis, ktorý tvoria čísla a písmená označujúce premenné, ktoré sú spojené znakmi operácií, prípadne zátvorkami

   Príklad : $5y\left(\frac{1}{5}y-10\right)-4y+y(30-y)=$

3. <u>lomené</u> = zápis v tvare zlomku, ktorý tvoria čísla a písmená označujúce premenné, ktoré sú spojené znakmi operácií, prípadne zátvorkami, pričom premenné musia byť umiestnené aj v menovateli zlomku

   Príklad : $\frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=$

Úprava výrazu : nahradenie výrazu iným výrazom požadovaného tvaru, ktorý sa danému výrazu rovná

Mnohočlen n-tého stupňa s premennou x :

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 ,$$

kde $a_0, a_1, ..., a_n$ sa nazývajú koeficienty; $x \in R, a_n \neq 0, n \in N$; $a_n x^n, a_{n-1}x^{n-1}, a_1 x, a_0$ sa nazývajú členy mnohočlena

Príklad : $-2x^4 + 0{,}5x^2 - 6x + 8$

$-2;0{,}5;-6;8$ = koeficienty mnohočlena

$-2x^4;0{,}5x^2;-6x;8$ = členy mnohočlena

Operácie s mnohočlenmi :

- *sčítanie mnohočlenov* (sčítavame a odčítavame členy s rovnakým exponentom tej istej premennej)

Príklad : $(2x^2-3x^3)+(4x^3-5x^2)=2x^2-3x^3+4x^3-5x^2=x^3-3x^2$

- *odčítanie mnohočlenov* (pripočítanie mnohočlena navzájom opačného k prvému mnohočlenu)

Príklad : $(2x^2-3x^3)-(4x^3-5x^2)=2x^2-3x^3-4x^3+5x^2=-7x^3+7x^2$

- znamienko – pred zátvorkou mení znamienka pred každým členom v zátvorke

- *násobenie mnohočlenov* (násobíme každý člen prvého mnohočlena každým členom druhého mnohočlena)

Príklad : $(2x^2-3x^3).(4x^3-5x^2)=8x^5-10x^4-12x^6+15x^5=-12x^6+23x^5-10x^4$

- *delenie mnohočlena jednočlenom* (delíme každý člen mnohočlena jednočlenom)

Príklad : $(7a^3bc-3ab^2c-5abc):(-4abc)=-1{,}75a^2+0{,}75b+1{,}25$

6. Lineárne rovnice a ich sústavy

Úloha 1:

Pozorne sa pozri na dané zápisy a vyber z nich tie, ktoré sú zápisom rovnice.

A: $3x^2 + 7x = 2 - 5x^2$

B: $7(y+4) - 3 = 5y + \frac{7y}{2}$

C: $5x + 4 \geq 7x + 3$

D: $2^x + 4^{x+1} = 8$

E: $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x-1)} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

F: $\log(x+3) \leq \log x$

G: $x^2 - 3x - 4 > 0$

H: $\sqrt{x+3} < \sqrt{2x-5}$

I: $\ln(2x+7) - \ln(3x+2) = 0$

Riešenie:

- A, B, D, E, I sú zápisom rovnice, pretože je tam len znak rovnosti.

Rovnica je vzťah $f(x) = g(x)$.

$f(x)$ - ľavá strana rovnice; $g(x)$ - pravá strana rovnice

Riešiť rovnicu znamená určiť všetky neznáme z definičného oboru ($\forall x \in D$), pre ktoré sa z rovnice stane pravdivá rovnosť. Všetky riešenia (korene rovnice) tvoria obor pravdivosti.

Obory rovníc:

O – obor premennej: je to množina, v ktorej danú rovnicu riešime; je daný.

D – definičný obor: je množina, ktorú dostaneme, ak od oboru premennej odčítame podmienky riešenia rovnice.

P – obor pravdivosti: je množina všetkých riešení.

Úloha 2:

Ktoré z rovníc z _úlohy 1_ sú zápisom lineárnej rovnice?

Riešenie:

- B, E sú zápisy lineárnej rovnice, pretože je tam len neznáma (x, y), ktorá má exponent rovnajúci sa jednej.

Lineárna rovnica (s neznámou x) je každá rovnica, ktorú môžeme upraviť na tvar:

$\boxed{ax + b = 0;}$ $a \in R, b \in R$

Pri riešení lineárnych rovníc používame **ekvivalentné úpravy:**

- Môžeme vymeniť ľavú a pravú stranu rovnice
- K obidvom stranám rovnice môžeme pripočítať (odčítať) rovnaký výraz
- Obidve strany rovnice môžeme vynásobiť (vydeliť) rovnakým výrazom rôznym od nuly

Poznámka:

- Ekvivalentnými úpravami sa obor pravdivosti novovzniknutej rovnice nezmení, preto nie je *skúška správnosti nutná.*
- Ak ju urobíme tak len preto, aby sme overili správnosť úprav danej rovnice.

Postup riešenia:

1. *odstránime zlomok* – vynásobíme rovnicu spoločným menovateľom
2. *odstránime zátvorky* – roznásobíme zátvorky
3. *upravíme ľavú a pravú stranu rovnice* – sčítame spoločné prvky (čísla spolu a neznáme spolu)
4. *neznáme dáme na jednu a známe (čísla) na druhú stranu* – použijeme ekvivalentné úpravy
5. *vyjadríme neznámu* – vydelíme číslom pri neznámej

Poznámka:

- zopakujte si označenie číselných oborov: **N** – prirodzené čísla; **Z** – celé čísla; **Q** – racionálne čísla; **R** – reálne čísla.

Príklad 1:
Riešte v daných množinách:

a) $\frac{3x+7}{5}+1=x+\frac{8-x}{3}$ v R, (N) **b)** $\frac{r-3}{2}+r=1\frac{1}{2}r+1$ v Z

c) $\frac{x}{3}-\frac{x}{8}=\frac{x}{12}+\frac{x}{8}$ v Q.

Riešenie:

- pri riešení použijeme ekvivalentné úpravy a postup riešenia:

a) $\frac{3x+7}{5}+1=x+\frac{8-x}{3}$

- určíme definičný obor: $D=R \vee D=N$ (riešime vo viacerých číselných množinách, tak môžeme mať rôzne obory pravdivosti)
- podmienky nemáme žiadne, pretože v menovateli sú iba čísla

$\frac{3x+7}{5}+1=x+\frac{8-x}{3}$ $\quad /.15 \rightarrow$ vynásobíme rovnicu spoločným menovateľom (15)

$3(3x+7)+15=15x+5(8-x) \rightarrow$ roznásobíme zátvorky

$9x+21+15=15x+40-5x \rightarrow$ upravíme ľavú a pravú stranu rovnice - sčítame neznáme a čísla

$9x+36=10x+40$ $\quad /-9x-40 \rightarrow$ neznáme dáme na ľavú a čísla na pravú stranu

$-4=x \rightarrow$ vymeníme strany rovnice

$x=-4$

- pri určení oboru pravdivosti je dôležitý definičný obor (množina v ktorej riešime, okrem podmienok)

Obor pravdivosti v množine reálnych čísel: $D=R$; $-4\in R \Rightarrow P=\{-4\}$

- zistili sme, že -4 je reálne číslo, patrí do definičného oboru a preto je koreň rovnice oborom pravdivosti

Obor pravdivosti v množine prirodzených čísel: $D=N$; $-4\notin N \Rightarrow P=\phi$

- -4 nie je prirodzené číslo, nepatrí do definičného oboru a teda rovnica nemá riešenie tzn. obor pravdivosti je prázdna množina

b) $\frac{r-3}{2}+r=1\frac{1}{2}r+1$

- Určíme definičný obor: $D=Z$

$\frac{r-3}{2}+r=1\frac{1}{2}r+1$ → zmiešané číslo premeníme na zlomok

$\frac{r-3}{2}+r=\frac{3}{2}r+1 \quad /.2$ → vynásobíme spoločným menovateľom

$r-3+2r=3r+2$ → upravíme ľavú stranu rovnice

$3r-3=3r+2 \quad /-3r$ → neznáme dáme na jednu stranu

$-3\neq 2$ → nepravdivý výrok

Obor pravdivosti: $P=\phi$.

- Neznáma nám vypadla ($a=0$) a vyšiel nám nepravdivý výrok ($b\neq 0$) , tak rovnica nemá riešenie tzn. obor pravdivosti je prázdna množina.

c) $\frac{x}{3}-\frac{x}{8}=\frac{x}{12}+\frac{x}{8}$

- Určíme definičný obor: $D=Q$

$\frac{x}{3}-\frac{x}{8}=\frac{x}{12}+\frac{x}{8} \quad /.24$ → vynásobíme spoločným menovateľom

$8x-3x=2x+3x$ → upravíme ľavú a pravú stranu rovnice

$5x=5x \quad /-5x$ → neznáme dáme na jednu stranu

$0=0$ → pravdivý výrok

Obor pravdivosti: $P=Q$

- neznáma nám vypadla ($a=0$) a vyšiel nám pravdivý výrok ($b=0$), tak rovnici vyhovuje ľubovoľné racionálne číslo (definičný obor)

Obor pravdivosti:

- Pri riešení rovnice je dôležité urobiť záver tzn. určiť obor pravdivosti.
- Jeho určenie závisí od definičného oboru (množiny, v ktorej riešime a podmienok riešenia).

1. $\boxed{P=\left\{-\frac{b}{a}\right\}}$

- Rovnica má jediné riešenie – jeden koreň (viď Pr.1a)

2. $\boxed{P=\phi}$

- Ak pri riešení sa neznáma zruší a dostaneme nepravdivý výrok, rovnica nemá riešenie (viď Pr.1b)

3. $\boxed{P=D}$

- Ak pri riešení sa neznáma zruší a dostaneme pravdivý výrok, rovnica má nekonečne veľa riešení (viď Pr.1c)

Lineárna rovnica s neznámou v menovateli

Úloha 3

Pozorne si pozri dané zápisy a vyber tie, ktoré sú zápisom rovnice s neznámou v menovateli.

A: $3x^2 + 7x = 2 - 5x^2$

B: $7(y+4) - 3 = 5y + \frac{7y}{2}$

C: $\frac{5x+4}{x+2} \geq \frac{2-3x}{x+2}$

D: $2^x + 4^{x+1} = 8$

E: $\frac{3}{x+1} - \frac{5}{(x-1)} = \frac{x-3}{(x+1)(x-1)}$

F: $\log(x+3) \leq \log x$

G: $\ln(2x+7) - \ln(3x+2) = 0$

H: $\sqrt{x+3} < \sqrt{2x-5}$

Riešenie

- E je zápisom rovnice s neznámou v menovateli
-

Príklad 2

Riešte v množine reálnych čísel rovnicu:

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1$$

Riešenie:

- Pri riešení rovníc s neznámou v menovateli **určíme definičný obor** rovnice (podmienky riešenia).
- Po vyriešení zistíme, či korene rovnice patria do definičného oboru.
- **Ak neurčíme definičný obor je nutná skúška správnosti** (pri odstraňovaní zlomkov používame neekvivalentnú úpravu, lebo nie je zaručené, že výraz v menovateli je rôzny od nuly)

$$\frac{1}{x^2+x} + \frac{1}{x^2-x} + \frac{x^2-2}{x^2-1} = 1 \longrightarrow$$ menovateľ rozložíme na súčin (ak sa dá)

$$\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x-1)} + \frac{x^2-2}{(x+1)(x-1)} = 1 \qquad /.x(x-1)(x+1)$$

podmienky:

$$x-1+x+1+x(x^2-2) = x(x-1)(x+1) \qquad x \neq 0 \wedge x+1 \neq 0 \wedge x-1 \neq 0$$

$$x-1+x+1+x^3-2x = x^3-x \qquad x \neq 0 \wedge x \neq -1 \wedge x \neq 1$$

$$x^3 = x^3 - x \qquad /-x^3+x \qquad D = R - \{-1;0;1\}$$

$$x = 0$$

$0 \notin D \Rightarrow P = \phi$

Poznámka:

- Aby sme ľahšie určili podmienky a spoločného menovateľa najprv si menovateľa upravíme (zlomok má zmysel, ak sa menovateľ nerovná nule).
- Pri riešení rovnice využijem známy postup riešenia (Pojem lineárnej rovnice).
- Koreň nevyhovuje podmienke riešenia, preto obor pravdivosti je prázdna množina (rovnica nemá riešenie).

Sústava dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi

Sústavou dvoch lineárnych rovníc s dvoma neznámymi nazývame dvojicu lineárnych rovníc s dvoma neznámymi, ktoré spolu súvisia.

Napríklad: $3x + 2y = 8 \wedge x - 5y = -3$

Riešiť sústavu znamená nájsť x, y tak, aby po dosadení do oboch rovníc vyhovovali obom rovniciam.

- Riešenie zapíšeme ako usporiadanú dvojicu $[x, y]$
- Pri úprave rovníc používame ekvivalentné úpravy

Metódy riešenia:

1. **výpočtom** – môžeme využiť rôzne metódy
   - **Sčítacia** (adičná) **metóda:** jednu alebo obidve rovnice vynásobíme vhodnými číslami tak, že po sčítaní oboch rovní sa jedna neznáma ruší a dostaneme jednu rovnicu o jednej neznámej.

Príklad:

$$2x-8y=-1/.3 \Rightarrow 6x-24y=-3$$
$$3x-5y=2/.(-2) \Rightarrow -6x+10y=-4$$
$$spolu: -14y=-7$$

1. rovnicu vynásobíme 3, druhú rovnicu vynásobíme (-2); koeficienty pri x sú vzájomne opačné čísla; po sčítaní rovníc nám x vypadne

   - **Dosadzovacia** (substitučná) **metóda:** z jednej rovnice vyjadríme jednu neznámu a dosadíme do druhej rovnice – dostaneme jednu rovnicu o jednej neznámej

Príklad:

$$2x-8y=-1$$
$$x-3y=6 \Rightarrow x=6+3y$$
$$1.rovnica: 2.(6+3y)-8y=-1$$

Z druhej rovnice vyjadríme x a dosadíme do 1. rovnice, z nej vypočítame y a dosadíme do vzťahu kde sme si vyjadrili x

   - **Porovnávacia** (komparačná) **metóda:** z oboch rovníc vyjadríme tú istú neznámu a dáme do rovnosti – dostaneme jednu rovnicu o jednej neznámej

Príklad:

$$x-8y=-1 \Rightarrow x=-1+8y$$
$$2x-5y=3 \Rightarrow x=\frac{3+5y}{2}$$
$$Teda: -1+8y=\frac{3+5y}{2}$$

Z oboch rovníc sme vyjadrili x a dali sme do rovnosti

2. **graficky** – nevýhodou tejto metódy je, že často máme len približný výsledok

- Sústavu rovníc s dvoma neznámymi riešime graficky tak, že zostrojíme grafy lineárnych funkcií do jedného súradnicového systému

Lineárne nerovnice a ich sústavy

Úloha 1:

Pozorne sa pozri na dané zápisy a vyber z nich tie, ktoré sú zápisom nerovnice.

A: $3x^2+7x=2-5x^2$

B: $7(y+4)-3=5y+\frac{7y}{2}$

C: $5x+4\geq 7x+3$

D: $2^x+4^{x+1}=8$

E: $\frac{3}{x+1}\geq\frac{5}{(x-1)}$

F: $\log(x+3)\leq\log x$

G: $x^2-3x-4>0$

H: $\sqrt{x+3}<\sqrt{2x-5}$

I: $\ln(2x+7)-\ln(3x+2)=0$

Riešenie:

- C, E, F, G, H – sú zápisom nerovnice, pretože je tam znak nerovnosti.

<u>*Úloha 2:*</u>
Ktoré z daných zápisov nerovností je zápisom lineárnej nerovnice?
Riešenie:

- Zápisom lineárnej nerovnice je len C, E.

Lineárna nerovnica (s neznámou x) je každá rovnica, ktorú môžeme upraviť na jeden z tvarov:
$ax+b<0$; $ax+b>0$
$ax+b\leq 0$; $ax+b\geq 0$
Riešiť nerovnicu znamená určiť všetky neznáme z definičného oboru ($\forall x \in D$), pre ktoré sa z nerovnice stane pravdivá nerovnosť.

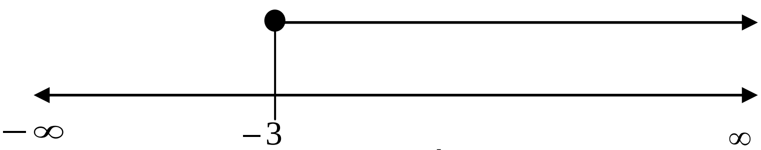
- Pri riešení lineárnej nerovnice používame ekvivalentné úpravy

Poznámka:

- Pri určovaní oboru pravdivosti potrebujeme vedieť znázorniť na číselnej osi a zapísať intervaly (učivo 1. ročníka – zopakujte si to)

Príklad 1: Riešte v množine reálnych čísel, celých čísel a prirodzených čísel:
$$\frac{4u-3}{5}+\frac{4u-9}{6}\leq\frac{3u-4}{2}$$
Riešenie:
Lineárne nerovnice riešime tak isto ako lineárne rovnice, len miesto znaku rovnosti píšeme znak nerovnosti danej nerovnice.
$$\frac{4u-3}{2}+\frac{4u-9}{6}\leq\frac{3u-4}{2} \qquad /.30$$
$$6(4u-3)+5(4u-9)\leq 15(3u-4)$$
$$24u-18+20u-45\leq 45u-60$$
$$44u-63\leq 45u-60 \qquad /-63-45u$$
$$-u\leq 3 \qquad /.(-1)$$ <u>*Ak násobíme nerovnicu záporným číslom*</u>
$$u\geq -3$$ <u>*musíme **zmeniť znamienko** nerovnosti*</u>

- Výslednú nerovnosť znázorníme na číselnej osi



Obr. 1

- Pri určovaní oboru pravdivosti je dôležitá množina, v ktorej danú nerovnicu riešime (definičný obor); robíme prienik riešenia a definičného oboru

Obor pravdivosti v množine reálnych čísel: $D=R$ **;** $P=\langle -3;\infty)$

- Riešením lineárnej nerovnice v R je interval. Číslo -3 patrí do riešenia, pretože máme neostrú nerovnosť

Obor pravdivosti v množine celých čísel: $D=Z$ **;** $P=\{-3,-2,-1,0,1,...\}$

- Z daného intervalu znázorneného na číselnej osi (obr.1) vyberieme a zapíšeme len celé čísla

Obor pravdivosti v množine prirodzených čísel: $D=N$ **;** $P=N$

- Z daného intervalu znázorneného na číselnej osi (obr.1) vyberieme len prirodzené čísla (vidíme, že je to celá množina prirodzených čísel)
- Obor pravdivosti môžeme zapísať aj výpisom prvkov $P=\{1,2,3,...\}$

Príklad 2: Riešte v množine reálnych čísel:

a) $\frac{x-3}{2}+x \geq \frac{3}{2}x+1$ **b)** $\frac{a}{3}-\frac{a}{12}<\frac{a}{4}+1$

Riešenie:

a) $\frac{x-3}{2}+x \geq \frac{3}{2}x+1 \qquad /.2$

$x-3+2x \geq 3x+2$

$3x-3 \geq 3x+2 \qquad /-3x$

$-3 \geq 2$ ⟶ nepravdivý výrok $\Rightarrow$ $P=\phi$

b) $\frac{a}{3}-\frac{a}{12}<\frac{a}{4}+1 \qquad /.12$

$4a-a<3a+12$

$3a<3a+12 \qquad /-3a$

$0<12$ ⟶ pravdivý výrok $\Rightarrow$ $P=R$

Zapamätaj si:

- Lineárne nerovnice riešime ako lineárne rovnice (rovnaký postup)
- Ak násobíme (delíme) záporným číslom zmeníme znamienko nerovnosti
- Výsledok znázorníme na číselnej osi
- Obor pravdivosti určíme podľa toho, v akej množine danú nerovnicu riešime
- Ak riešime v množine reálnych čísel obor pravdivosti je interval
- Ak riešime v číselnej množine (Z, N) výsledok je číselná množina a nie interval
- Ak sa nám neznáma zruší a dostaneme nepravdivý výrok (viď Pr.2 a) oborom pravdivosti je prázdna množina (nerovnica nemá riešenie)
- Ak sa nám neznáma zruší a dostaneme pravdivý výrok (viď Pr.2 b) oborom pravdivosti je definičný obor (nerovnica má nekonečne veľa riešení)

Sústava lineárnych nerovníc s jednou neznámou

Sústava lineárnych nerovníc s jednou neznámou – je viacero nerovníc s tou istou neznámou.

Príklad 3

Riešte sústavu nerovníc v množine reálnych čísel:

$\frac{4x-5}{7}<x+3$ ($I.$ nerovnica)

$\frac{3x+8}{4} \geq 2x-5$ ($II.$ nerovnica)

Úloha1:

Ako budeme riešiť túto sústavu?

Riešenie:

- Nájsť riešenie tejto sústavy znamená nájsť také čísla, ktoré vyhovujú súčasne obidvom nerovniciam
- Zistíme obor pravdivosti každej nerovnice zvlášť
- Urobíme prienik jednotlivých riešení

$I: \frac{4x-5}{7}<x+3 \qquad /.7$

$4x-5<7x+21 \qquad /-4x-21$

$-26<3x \qquad /:3$

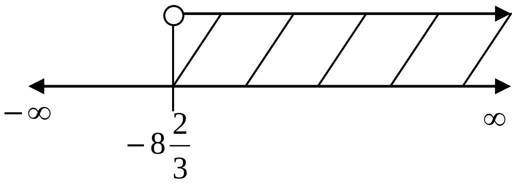
$II: \frac{3x+8}{4} \geq 2x-5 \qquad /.4$

$3x+8 \geq 8x-20 \qquad /-3x+20$

$28 \geq 5x \qquad /:5$

$-\frac{26}{3} < x$

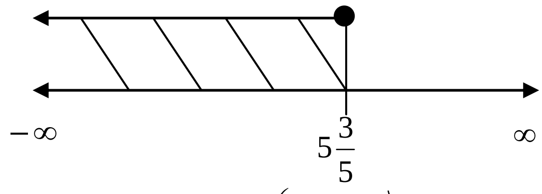
$x > -8\frac{2}{3}$



$P_1 = \left(-8\frac{2}{3};\infty\right)$

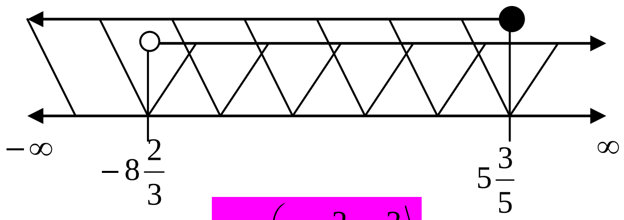
$\frac{28}{5} \geq x$

$x \leq 5\frac{3}{5}$



$P_2 = \left(-\infty;5\frac{3}{5}\right\rangle$

$P = P_1 \cap P_2$:



$P = \left(-8\frac{2}{3};5\frac{3}{5}\right\rangle$

Postup riešenia sústavy lineárnych nerovníc:

1. označíme si jednotlivé nerovnice
2. vyriešime ich samostatne
3. riešenie jednotlivých nerovníc znázorníme na jednej číselnej osi
4. určíme prienik intervalov
5. zapíšeme obor pravdivosti

Poznámka:

- ak budeš riešiť v inej číselnej množine ako v reálnych číslach postup je rovnaký, len z intervalu vypíšeš čísla, ktoré patria do oboru v ktorom riešiš.

Nerovnice v súčinovom a podielovom tvare

Príklad 4:

Riešte nerovnicu $(2x-3)(7-3x) \leq 0$ v množine reálnych čísel.

Riešenie:

- je to nerovnica v súčinovom tvare, ktorú nemôžeme riešiť tak, že ju roznásobíme, pretože dostaneme $-6x^2+23x-21 \leq 0$ - je to kvadratická nerovnica, ktorú ešte nevieme vyriešiť
- Tieto nerovnice môžeme riešiť dvoma spôsobmi

1. spôsob: Riešenie pomocou sústavy nerovníc:

- Pri tejto metóde uvažuje o tom, kedy je súčin menší alebo rovný nule
- Využijeme pri tom vlastnosti násobenia reálnych čísel
- *Súčin dvoch čísel je kladný, ak sú obidve čísla kladné alebo sú obidve záporné*
- *Súčin dvoch čísel je záporný, ak prvé číslo je kladné a druhé záporné alebo prvé číslo je záporné a druhé kladné*
- Danú nerovnicu rozpíšeme na sústavu jednoduchších nerovníc
- Nevýhodou tejto metódy je jej zdĺhavosť, preto sa ňou nebudeme zaoberať

2. spôsob: Metóda nulových bodov

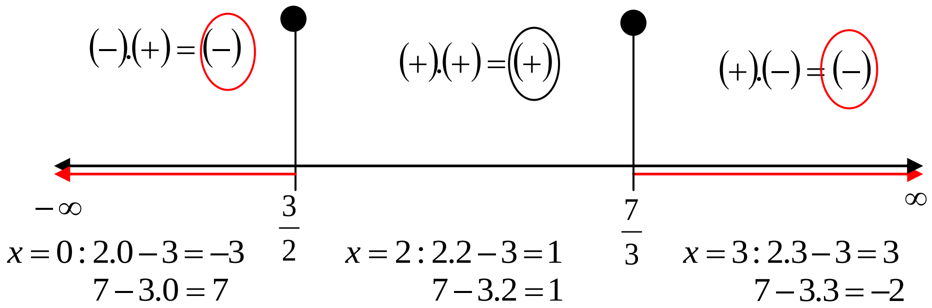
Nulové body:

- Využijeme vlastnosť reálnych čísel: súčin sa rovná nule, ak sa aspoň jeden činiteľ rovná nule
- Jednotlivé zátvorky dáme do rovnosti s nulou a vyjadríme x

$2x-3=0$ $\qquad\qquad$ $7-3x=0$

$x=\frac{3}{2}$ $\qquad\qquad$ $x=\frac{7}{3}$

- Nulové body znázorníme na číselnej osi. Rozdelia nám číselnú os na tri intervaly
- Budeme zisťovať v ktorom intervale sú jednotlivé zátvorky a súčin kladné a v ktorom záporné
- Nulové body budú patriť do riešenia, teda dáme plné krúžky (máme neostrú nerovnosť)



$$P=\left(-\infty;\frac{3}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{7}{3};\infty\right)$$

- Hľadáme súčin menší ako nula tzn. (-), vyberieme interval, kde je výsledok (-)

Poznámka:

- Metóda nulových bodov je efektívnejšia

Postup riešenia metódou nulových bodov:

1. *určíme nulové body* - postavíme jednotlivé zátvorky rovné nule a vyjadríme neznámu (x)

2. *vyznačíme nulové body na číselnej osi*

3. *určíme, či nulové body patria do riešenia* (plný alebo prázdny krúžok) – závisí to od danej nerovnice

4. *zistíme v jednotlivých intervaloch, či zátvorky sú kladné alebo záporné* – z každého intervalu si vyberieme jedno číslo, dosadíme do jednotlivých zátvoriek a zistíme, či daná zátvorka je kladná alebo záporná. Tak zistíme znamienko celého súčinu

5. *určíme obor pravdivosti* – vyberieme si tie intervaly, ktoré vyhovujú nerovnici (ak má byť súčin záporný, vyberieme intervaly, kde je výsledok (-), ak má byť súčin kladný vyberieme intervaly, kde je výsledok (+)).

Príklad 5:

Riešte v množine reálnych čísel $\frac{2x-3}{3x+6}\le 0$.

Riešenie:

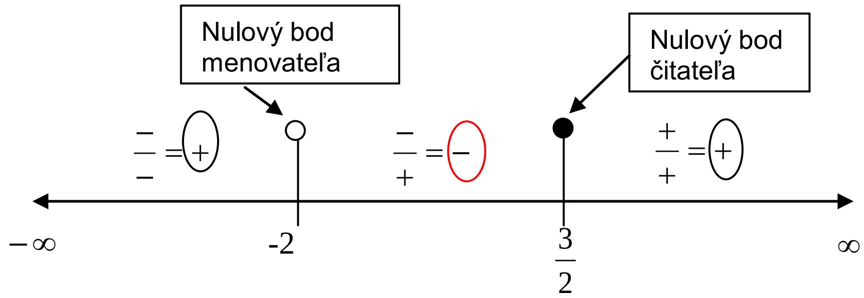
- Ak je neznáma v menovateli nerovnice nemôžeme nerovnicu násobiť menovateľom, pretože nevieme, či je menovateľ kladné alebo záporné číslo
- Nerovnicu budeme riešiť ako nerovnice v súčinovom tvare

Metóda nulových bodov:

Nulové body:

$2x-3=0$ $\qquad$ $3x+6=0$

$x=\frac{3}{2}$ $\qquad$ $x=-2$



Obr.3

Poznámka:

- Nesmieme zabudnúť na podmienku – menovateľ sa nesmie rovnať nule
- Nulový bod menovateľa nemôže patriť do oboru pravdivosti aj keď máme neostrú nerovnosť, preto *nulový bod menovateľa je vždy prázdny krúžok (obr.3)*

Obor pravdivosti:

Podiel má byť menší alebo rovný nule (záporné číslo), preto si vyberieme interval, kde výsledok je (-) - $P=\left(-2;\frac{3}{2}\right\rangle$ (obr.3)

Príklad 6:

Riešte v množine celých čísel $\frac{x+2}{2x-3}<2$

Riešenie:

- Porovnávať zlomok, či je kladný (záporný) môžeme iba z nulou, preto si musíme nerovnicu upraviť tak, aby na jednej strane bola nula
- Ďalší postup je rovnaký ako v predchádzajúcom príklade (Pr.5)

$$\frac{x+2}{2x-3}<2 \qquad /-2$$

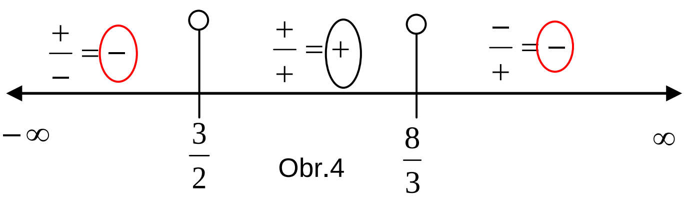
$$\frac{x+2-4x+6}{2x-3}<0$$

$$\frac{8-3x}{2x-3}<0$$

Nulové body:

$8-3x=0$ $\qquad$ $2x-3=0$

$x=\frac{8}{3}$ $\qquad$ $x=\frac{3}{2}$



Obr.4

Obor pravdivosti: $D=Z$; $P=\{\ldots,-1,0,1,3,4,\ldots\}$

- Zlomok má byť menší ako nula, preto si vyberieme interval, kde je výsledok (-)
- Z intervalov si vypíšeme len celé čísla, pretože riešime nerovnicu v množine celých čísel

Slovné úlohy (riešené rovnicou alebo sústavou)

Postup pri riešení slovných úloh:

- Postup riešenia a metódy sú rozpísané v 1. Kapitole, tu sa zameriame na riešenie úsudkom, rovnicou alebo sústavou

Príklad :
Po dvore behali zajace a sliepky. Spolu mali 17 hláv a 44 nôh. Koľko bolo na dvore zajacov a koľko sliepok?

Riešenie:
1. Úsudkom
Predpokladajme, že sú na dvore len sliepky. Potom by mali 17 hláv a 34 nôh (sliepka má dve nohy). Pretože sú na dvore aj zajace, ktoré majú o dve nohy viac ako sliepky musí 10 zvyšných nôh patriť zajacom. Teda po dvore behá 5 zajacov (10 : 2 = 5) .
Skúška
Správnosť výsledku overíme dosadením do textu úlohy.
 5 zajacov......................... 5 hláv............................5 . 4 = 20 nôh
12 sliepok.........................12 hláv..........................12 . 2 = 24 nôh

---

Spolu.................................17 hláv...44 nôh, čo zodpovedá podmienkam úlohy.
Odpoveď
Na dvore bolo 5 zajacov a 12 sliepok.

2. Rovnicou s jednou neznámou
- za neznámu budeme považovať počet zajacov
Zajace ....x kusov .... počet nôh zajacov 4x
Sliepky ....(17 – x) kusov .... počet nôh sliepok ....2 . (17 – x)

Zostavíme rovnicu a vyriešime:
$4x + 2.(17 - x) = 44$
Riešením rovnice je x = 5. Teda zajacov je 5 a sliepok 17 – 5 = 12.
Skúška a odpoveď je ako pri riešení úsudkom.

3. Sústavou dvoch rovníc s dvoma neznámymi
- za neznámu považujeme počet zajacov a sliepok

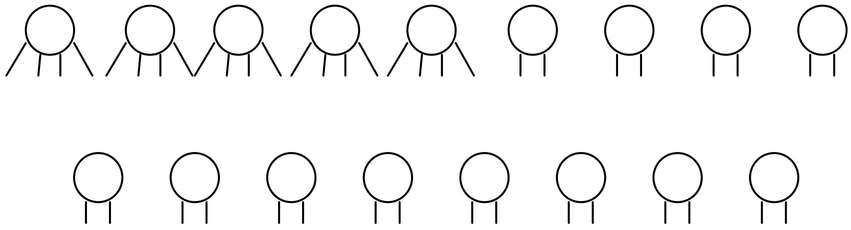
Zajace .... x kusov .... počet nôh zajacov 4x
Sliepky .... y kusov .... počet nôh sliepok 2x

---

Zostavíme dve rovnice:
Jedná rovnica bude sčítavať počet kusov hláv a druhá počet kusov nôh zvierat:
$x + y = 17$
$4x + 2y = 44$
Riešením tejto sústavy je x = 5 a y = 12.
Skúška a odpoveď je ako pri riešení úsudkom.

4. Graficky
- najprv si vyznačíme počet 17 hláv (krúžkom)

- predpokladáme, že sú tam len sliepky a preto vyznačeným hlavám dokreslíme po dvoch nohách (zostáva 10 nôh)
- zajace majú 4 nohy a tak dokresľujeme po dvoch nohách až do vyčerpania zvyšných nôh
- z nákresu prečítame, že je 5 zajacov a 12 sliepok



Skúška a odpoveď je ako pri riešení úsudkom.

7. Planimetria

Základné pojmy v planimetrii:

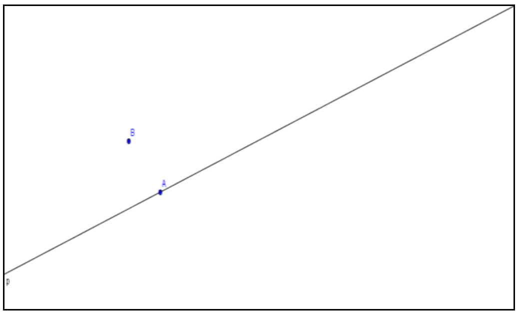
- bod (označenie veľkými písmenami latinskej abecedy $A, B, C, \ldots$)
- priamka (označenie malými písmenami latinskej abecedy $p, q, r, \ldots$)

Každú priamku môžeme považovať za nekonečnú množinu bodov.

1. *Každými dvoma rôznymi bodmi A, B prechádza práve jedna priamka p.*
   - praktické vysvetlenie : Napr. aby napnuté lano malo v priestore určitú polohu, musí byť upevnené v dvoch miestach; hriadeľ musí byť uložený v dvoch ložiskách; latka na skok do výšky je podopretá v dvoch bodoch.
2. *Priamka p je jednoznačne určená každými dvoma rôznymi bodmi A, B, ktoré na nej ležia.*

Vzájomná poloha bodu a priamky p :

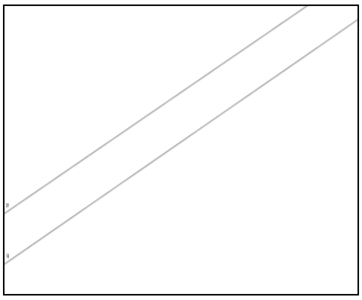
- bod A leží na priamke p $(A \in p)$
- bod B neleží na priamke p $(B \notin p)$, viď obrázok 1.



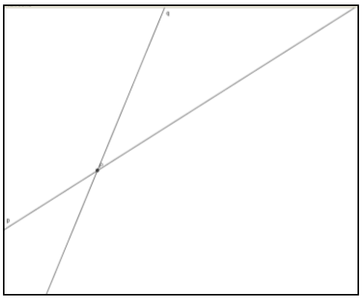
Obrázok 1.

Vzájomná poloha dvoch priamok p, q:

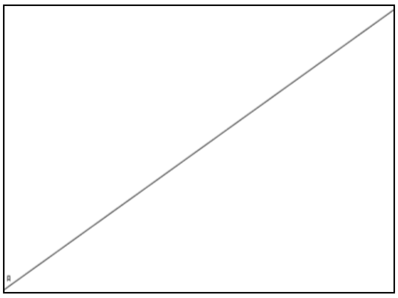
- *ležia v jednej rovine*
  - rovnobežné $(p \cap q = \phi)$, viď obrázok 2.
  - rôznobežné $(p \cap q = \{P\})$, viď obrázok 3.
  - totožné $(p \cap q = p)$, viď obrázok 4.



Obrázok 2



Obrázok 3.



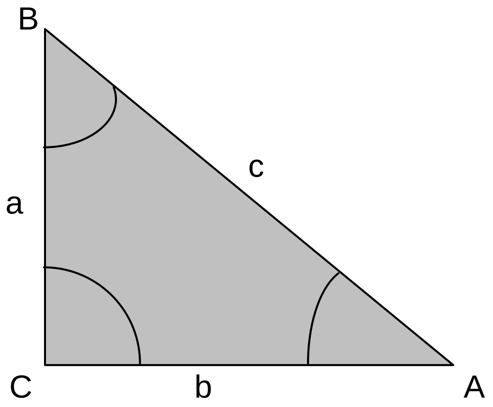
Obrázok 4

Riešenie pravouhlého trojuholníka

Pravouhlý trojuholník :

- trojuholník, ktorý má jeden vnútorný uhol pravý $(90°)$ a zvyšné dva uhly ostré

Označenie :

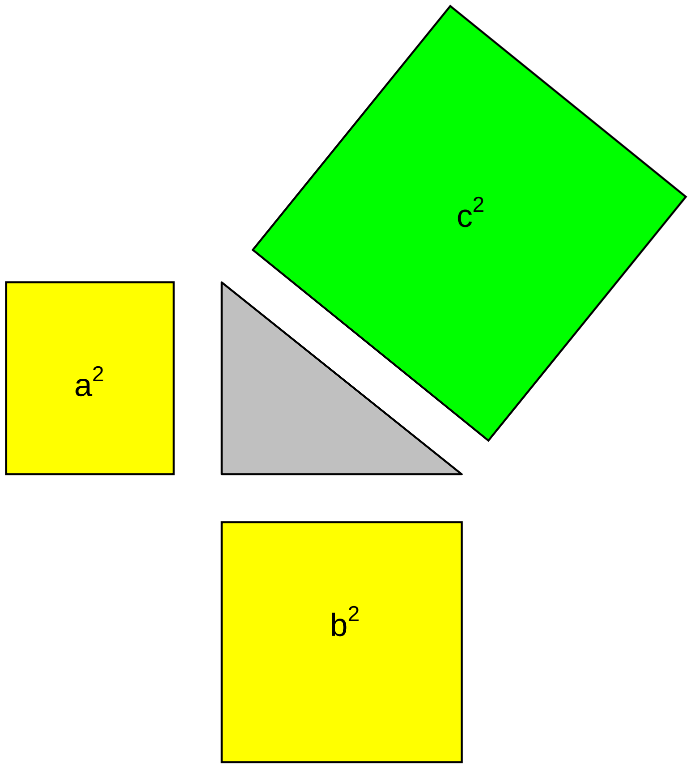


a, b – odvesny
c – prepona

Pytagorova veta :

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- *obsah štvorca zostrojeného nad preponou pravouhlého trojuholníka sa rovná súčtu obsahov štvorcov zostrojených nad obidvoma odvesnami*



Goniometrické funkcie ostrého uhla :

- *sin ostrého uhla = protiľahlá odvesna / prepona*

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{a}{c}} \qquad \boxed{\sin\beta = \frac{b}{c}}$$

- *cos ostrého uhla = priľahlá odvesna / prepona*

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b}{c}} \qquad \boxed{\cos\beta = \frac{a}{c}}$$

- tg ostrého uhla = protiľahlá odvesna / priľahlá odvesna

$$tg\alpha = \frac{a}{b} \qquad tg\beta = \frac{b}{a}$$

- cotg ostrého uhla = priľahlá odvesna / protiľahlá odvesna

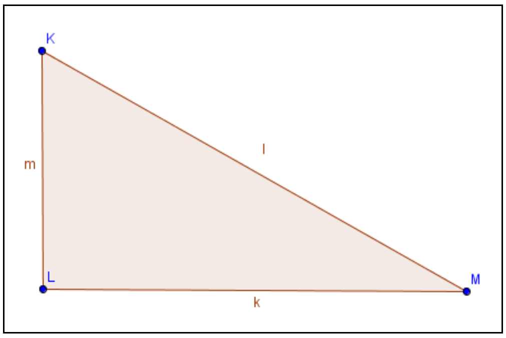
$$\cot g\alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot g\beta = \frac{a}{b}$$

Príklad :

Daný je pravouhlý trojuholník KLM s pravým uhlom pri vrchole L.

a) Zapíšte symbolicky všetky goniometrické funkcie oboch ostrých uhlov,

b) Riešte pravouhlý trojuholník, ak $|\angle LMK| = 30°25';k = 6{,}2cm.$



a) Označenie : $\angle LMK = \varphi; \angle MKL = \lambda; \angle KLM = \omega.$

$$\sin\varphi = \frac{m}{l} \qquad \cos\varphi = \frac{k}{l} \qquad tg\varphi = \frac{m}{k} \qquad \cot g\varphi = \frac{k}{m}$$

$$\sin\lambda = \frac{k}{l} \qquad \cos\lambda = \frac{m}{l} \qquad tg\lambda = \frac{k}{m} \qquad \cot g\lambda = \frac{m}{k}.$$

b) Z obrázka vyplýva :

- $\cos\varphi = \dfrac{k}{l} \Rightarrow l = \dfrac{k}{\cos\varphi} = \dfrac{6{,}2cm}{\cos 30°25'} \doteq 7{,}19cm$

Na kalkulačke: 6,2 → ÷ → cos → 30 → .°′″ → 25 → .°′″ → EXE → 7,18951...

- $\sin\lambda = \dfrac{k}{l} = \dfrac{6{,}2cm}{7{,}19cm} = 0{,}8623 \Rightarrow \lambda \doteq 59°35'$

Na kalkulačke: SHIFT → sin → 6,2 → ab/c → 7,19 → EXE → 59,57680... →
→ SHIFT → .°′″ → 59°34°36,51 po zaokrúhlení: 59°35′

- $l^2 = m^2 + k^2 \Rightarrow m^2 = l^2 - k^2 \Rightarrow m = \sqrt{l^2 - k^2} = \sqrt{7{,}19^2 - 6{,}2^2} \doteq 3{,}64cm$

Na kalkulačke:
√ → (→ 7,19 → x² → - → 6,2 → x² →) → EXE → 3,640...

Poznámka: Pod odmocninou je rozdiel, preto keď chceme počítať na kalkulačke výraz musíme dať do zátvorky.

OBSAH

Pripravili: PaedDr. Zlata Marcinková
RNDr. Hedviga Rusinková