DÔKAZOVÉ ÚLOHY O DELITEĽNOSTI

Zápis prirodzených čísel pomocou zvyšku pri delení

Prirodzené čísla môžeme zapísať aj pomocou zvyšku pri delení.

Zápis pomocou zvyškov po delení 2: Ak delíme prirodzené čísla dvoma, dostaneme výsledky:

1 = 2.0 + 1	Vidíme, že:
2 = 2.1	- **párne čísla** sú prirodzenými násobkami čísla 2 a ľubovoľné párne
3 = 2.1 + 1	číslo môžeme zapísať v tvare **2.k, keď k$\in$N;**
4 = 2.2	- **nepárne** čísla dávajú pri delení dvoma zvyšok 1 a ľubovoľné nepárne
5= 2.2 + 1	číslo môžeme zapísať v tvare **2k+1, pričom k je celé nezáporné číslo**
6 = 2.3	
7 = 2.3 + 1	

Zápis pomocou zvyškov po delení 3: Podobné výrazy nám poslúžia i v prípadoch, keď hovoríme o násobkoch čísla 3. Výrazy **3k, 3k+1, 3k+2** vyjadrujú ľubovoľné prirodzené čísla, ktoré dávajú pri delení tromi zvyšky 0, 1 alebo 2.

Všeobecný zápis pomocou zvyškov po delení „b“:

Každé prirodzené číslo n môžeme pomocou prirodzeného čísla b>1 vyjadriť jedným z výrazov k.b, k.b+1, k.b+2,....k.b+(b-1), pričom k = 0, 1, 2...

A. Priame dôkazy (vynímaním deliteľa pred zátvorku)

Súčin dvoch (troch, štyroch, piatich...) po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný dvoma, troma, štyrmi....

Súčet troch (piatich, siedmych, deviatich...) po sebe idúcich prirodzených čísel je deliteľný troma, piatimi, siedmimi....

Pr.1.

Dokážte, že číslo 7 delí súčet 7 po sebe idúcich prirodzených čísel :

Dôkaz :

$s_7 = n + (n+1) + (n+2) + (n+3) + (n+4) + (n+5) + (n+6) = 7.n + 21 = 7.(n+3)$

$\Rightarrow 7/\ 7.(n+3) \Rightarrow 7/\ s_7$

Pr.2.

Dokážte, že 3/ (n^3 + 2n).

Dôkaz :

$n = 3.k \Rightarrow n^3 + 2n = 27k^3 + 6k = 3.(9.k^3 + 3k) \Rightarrow 3/3.(9.k^3 + 3k)$

$n = 3.k+1 \Rightarrow n^3 + 2n = (3k+1)^3 + 2(3k+1) = 27.k^3 + 27.k^2 + 15.k + 1 =$

$= 3.(9.k^3 + 9.k^2 + 5k + 1) \Rightarrow 3/3.(9.k^3 + 9.k^2 + 5k + 1)$

$n = 3.k+2 \Rightarrow n^3 + 2n = (3k+2)^3 + 2(3k+2) = 27k^3 + 54.k^2 + 42.k + 12 =$

$= 3.(9.k^3 + 18.k^2 + 14k + 4) \Rightarrow 3/3.(9.k^3 + 18.k^2 + 14.k + 4)$

Dokázali sme pre všetky možné zápisy priro

Pr.3.

Dokážte že 6/ (n^3 – n).

Dôkaz : $6/\ (n^3 - n) \Leftrightarrow 2/\ (n^3 - n) \wedge 3/\ (n^3 - n)$ (kritérium deliteľnosti 6).

$n^3 - n = n.(n^2 - 1) = n.(n-1).(n+1) = (n-1).n.(n+1)$ $\Rightarrow$ súčin troch po sebe idúcich členov $\Rightarrow$ musí byť deliteľný 2 aj 3 (dokázali sme predtým) $\Rightarrow$ teda aj 6.

Príklady . Nech a,b,n $\in$ N. Dokážte :

1. **ak $2/a \wedge 2/b \Rightarrow 2/a+b$**

   Dôkaz:

   $2/a \Rightarrow a = 2.k,\ k\in N$ $\quad$ $a+b=2k+2m=2.(k+m) \Rightarrow 2 / a+b$ PLATÍ

   $2/b \Rightarrow b = 2.m,\ m\in N$ $\quad$ (ph=1)

2. **ak $3/a \wedge 3/b \Rightarrow 3/a+b$**

   Dôkaz:

   $3/a \Rightarrow a = 3.k,\ k\in N$ $\quad$ $a+b=3k+3n=3(k+n) \Rightarrow 3 / a+b$ PLATÍ

   $3/b \Rightarrow b = 3.n,\ n\in N$

3. **ak $4/a \wedge 6/a \Rightarrow 24/a$**

4. **$\forall\ n\in N;\ 2/n.(n+1)$**

   1.prípad: $n = 2.k$ (párne) $\Rightarrow n.(n+1) = 2.k.(2k+1) \Rightarrow 2 / n.(n+1)$

   2.prípad: $n = 2.k+1$ (nepárne) $\Rightarrow n.(n+1) = (2.k+1)(2.k+1+1) = =$

   $(2.k+1)(2.k+2) = 2. (2.k+1).(k+1) \Rightarrow 2 / n.(n+1)$

   $\Rightarrow$ PLATÍ

5. **$\forall\ n\in N;\ 3/n.(n+1).(n+2)$**

   1.prípad: $n = 3.k \Rightarrow n.(n+1)(n+2) = 3 . k(3k+1)(3k+2) \Rightarrow 3/n(n+1)(n+2)$

   2.prípad: $n = 3.k+1 \Rightarrow n.(n+1)(n+2) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) =$

   $3. (3k+1)(3k+2)(k+1) \Rightarrow 3/n(n+1)(n+2)$

   3.prípad: $n = 3.k+2 \Rightarrow n.(n+1)(n+2) = (3k+2)(3k+)(3k+3) =$

6. **$\forall\ n\in N;\ 4/n.(n+1).(n+2).(n+3)$**

7. **$\forall\ n\in N;\ 2/n^3 + 11n$**

   1.prípad: $n = 2.k$ (párne) $\Rightarrow n^3 + 11n = n^2.(n+11) = (2.k)^2.(2k+11) = 2 (2k^2)$

   $.(2k+11) \Rightarrow 2 / n^3 + 11n$ pre tento prípad platí

   2.prípad: $n = 2.k+1$ (nepárne) $\Rightarrow n^3 + 11n = n^2.(n+11) = (2.k+1)^2.(2k+12)=$

   $2.(2.k+1)^2.(k+6) \Rightarrow 2 / n^3 + 11n$ pre tento prípad platí

   VETA PLATÍ

8. **$\forall\ n\in N;\ 3/n^3 + 11n = n^2. (n+11)$**

   1.prípad: $n = 3.k \Rightarrow n^2. (n+11) = (3k)^2 .(3k+11) = 3.3.k^2 .(3k+11)\Rightarrow 3/ n^2.$

   $(n+1)$ pre tento prípad platí

   2.prípad: $n = 3.k+1 \Rightarrow n^2. (n+11) = (3k+1)^2 .(3k+1+11) =$

   $(3k+1)^2.(3k+12)= 3. (3k+1)^2 .(k+4) \Rightarrow 3/ n^2. (n+1)$ pre tento prípad platí

   3.prípad: $n = 3.k+2 \Rightarrow n^2. (n+11) = (3k+2)^2 .(3k+2+11) =$

   $(9k^2+12k+4).(3k+13) \Rightarrow$ ani z jednej zátvorky sa nedá vybrať 3 pred

   zátvorku $\Rightarrow$ **pre tento prípad neplatí**

   VETA NEPLATÍ

9. $\forall$ n$\in$N; $6/n^3 + 11n$ (d.ú.)

Pomôcka: stačí dokázať, že je deliteľné 2 (n=2k a n=2k+1) a 3 (n=3k, n=3k+1, n=3k+2) zároveň podobne ako v úlohe 13

10. $\forall$ n$\in$N; $4/n^4 + 3n^2$

1.prípad: $n = 2.k \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2 .(n^2 + 3) = (2k)^2. (4k^2+3) = 4.k^2. (4k^2+3) \Rightarrow 4/n^4 + 3n^2$

2.prípad: $n = 2.k+1 \Rightarrow n^4 + 3n^2 = n^2 .(n^2 + 3) = (2k+1)^2. [(2k+1)^2 + 3] = (4k^2+2.2k.1+1^2).[(4k^2+4k+1)+3] = (4k^2+4k+1).[4k^2+4k+4] = 4. (4k^2+4k+1) [k^2+k+1] \Rightarrow 4/n^4 + 3n^2$

VETA PLATÍ

Vzorce pre druhú mocninu dvojčlena:
$(a+b)^2 = (a^2 + 2ab + b^2)$
$(a-b)^2 = (a^2 - 2ab + b^2)$
Odvodenie: $(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = a.a+a.b+b.a+b.b = a^2+2.a.b+b^2$

11. $\forall$ n$\in$N; $4/n^4 – n^2$

12. $\forall$ n$\in$N; $12/n^4 – n^2$

13. $\forall$ n$\in$N; $12/n^5 – n^3$ <=> $\forall$ n$\in$N; $3/n^5 – n^3$ a $4/n^5 – n^3$

Č. je del. 12 práve vtedy, keď je deliteľné 3 a 4

A) dokazujem, že platí $3/(n^5 – n^3) = n^3.(n^2 – 1)$

Prípad A1: n = 3k => $n^3.(n^2 – 1) = (3k)^3.[(3k)^2-1]=27k^3. [9k^2-1]=3.9.k^3. [9k^2-1]$ => $3/(n^5 – n^3)$

Prípad A2: n = 3k+1 => $n^3.(n^2 – 1) = (3k+1)^3.[(3k+1)^2-1] = =(3k+1)^3.[9k^2 + 6k +1 -1] = (3k+1)^3.[9k^2 + 6k] = 3.(3k+1)^3.[3k^2 + 2k]$ => $3/(n^5 – n^3)$

Prípad A3: n = 3k+2 => $n^3.(n^2 – 1) = (3k+2)^3.[(3k+2)^2-1] = =(3k+2)^3.[9k^2 + 12k +4 -1] = (3k+2)^3.[9k^2 + 12k + 3] = 3.(3k+1)^3.[3k^2 + 6k + 1]$ => $3/(n^5 – n^3)$

Dokázali sme deliteľnosť číslom 3.

B) dokazujem, že platí $4/(n^5 – n^3) = n^3.(n^2 – 1)$

Prípad B1: n = 2k => $n^3.(n^2 – 1) = (2k)^3.[(2k)^2-1]=8k^3. [4k^2-1]=4.2.k^3. [4k^2-1]$ => $4/(n^5 – n^3)$

Prípad B2: n = 2k+1 => $n^3.(n^2 – 1) = (2k+1)^3.[(2k+1)^2-1] = =(2k+1)^3.[4k^2 + 4k +1 -1] = (2k+1)^3.[4k^2 + 4k] = 4.(3k+1)^3.[k^2 + 1]$ => $4/(n^5 – n^3)$

Dokázali sme deliteľnosť číslom 4.

Keďže je deliteľné č. 3 aj 4, je deliteľné aj číslom 12. => VETA PLATÍ

14. $\forall\ n \in N;\ 2/n^2 - n$
15. $\forall\ n \in N;\ 3/n^3 - n$
16. $\forall\ n \in N;\ 5/n^5 - n$
17. $\forall\ n \in N;\ 30/n^5 - n$
18. $\forall\ n \in N;\ 2/n^2 - 3n$
19. $\forall\ n \in N;\ 3/n^3 + 11n$
20. $\forall\ n \in N;\ 15/n^6 - n^2$
21. $\forall\ n \in N;\ 2/(n-2).(n-1).n.(n+1).(n+2)$
22. $\forall\ n \in N;\ 3/(n-2).(n-1).n.(n+1).(n+2)$
23. $\forall\ n \in N;\ 4/(n-2).(n-1).n.(n+1).(n+2)$
24. $\forall\ n \in N;\ 5/(n-2).(n-1).n.(n+1).(n+2)$
25. $\forall\ n \in N;\ 10/(n-2).(n-1).n.(n+1).(n+2)$

B. Nepriame dôkazy viet

Pri dôkazoch nepriamo využijeme obmenu implikácie $A \Rightarrow B$ teda $B' \Rightarrow A'$. Implikácia aj obmena implikácie majú rovnaké pravdivostné hodnoty.

Pr.1.
Ak $5/(n^2+1) \Rightarrow 5 \dagger n$.
Obmena : Ak $5/n \Rightarrow 5 \dagger (n^2+1)$
Dôkaz : $n = 5.k \Rightarrow n^2 = 25.k^2 \Rightarrow n^2 + 1 = 25.k^2 + 1 \Rightarrow 5 \dagger (25k^2+1) \Rightarrow 5 \dagger (n^2+1) \Rightarrow$ obmena platí $\Rightarrow$ platí aj pôvodná veta.
Priamo dokázať pôvodnú vetu je oveľa ťažšie.

Príklady :
Dokážte nepriamo :

1. **$\forall\ n \in N;\ 2/n^2 \Rightarrow 2/n$**
   Obmena: $\forall\ n \in N;\ 2 \dagger n \Rightarrow 2 \dagger n^2$
   Dôkaz: $2 \dagger n \Rightarrow n = 2k+1 \Rightarrow n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2+2k) + 1 = 2m+1 \Rightarrow 2 \dagger n^2$ PLATÍ

   $\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$

2. **$\forall\ n \in N;\ 3/n^2 + 2 \Rightarrow 3 \dagger n$**
   Obmena: $\forall\ n \in N;\ 3/n \Rightarrow 3 \dagger n^2+2$
   Dôkaz: $3/n \Rightarrow n = 3k \Rightarrow n^2+2 = (3k)^2+2 = 9k^2 + 2 = 3.k^2 + 2 \Rightarrow 3 \dagger n^2+2 \Rightarrow$
   Obmena je pravdivá $\Rightarrow$ VETA PLATÍ

3. **$\forall\ n \in N;\ 3 \dagger (n^4 - 1) \Rightarrow 3/n$**

4. **$\forall\ n \in N;\ 3 \dagger (n^4 + 2) \Rightarrow 3/n$**
   Obmena: $\forall\ n \in N;\ 3 \dagger n \Rightarrow 3 / (n^4 + 2)$

Dôkaz: $3 \dagger n \Rightarrow$

a) $\underline{n=3k+1} \Rightarrow n^4 + 2 = (3k+1)^4+2 = [(3k+1)^2]^2 + 2 = [9k^2+6k+1]^2 + 2=$
$= [9k^2+6k+1] .[9k^2+6k+1] + 2 = 81k^4+54k^3+9k^2+54k^3+36k^2+6k+9k^2+$
$+6k+1 + 2 = 81k^4 + 108k^3 +54k^2 +12k + 3 = 3.(27k^4+36k^3 +18k^2 +4k$
$+ 1) \Rightarrow 3 / (n^4 +2)$ pre tento prípad

b) $\underline{n=3k+2} \Rightarrow n^4 + 2 = (3k+2)^4+2 = [(3k+2)^2]^2 + 2 = [9k^2+12k+4]^2 + 2=$
$= [9k^2+12k+4] .[9k^2+12k+4] + 2 = 81k^4 + 108k^3 + 36k^2 + 108k^3 +$
$144k^2 + 48k + 36k^2 + 48k + 16 + 2 = 81k^4 + 216k^3 +216k^2 +96k + 18$
$= 3.(27k^4+72k^3 +72k^2 +32k + 6) \Rightarrow 3 / (n^4 +2)$ pre tento prípad
PLATÍ

5. $\forall n\in N;\ 10/(n^2 + 6) \Rightarrow 5 \dagger n$

6. $\forall n\in N;\ 5/n^2 +1 \Rightarrow 10 \dagger n$ (D.ú.)
Pomôcka: Po vytvorení obmeny stačí dokázať pre n=10k

7. $\forall n\in N;\ 10 \dagger n \Rightarrow 20 \dagger n$ (D.ú.)
Pomôcka: Po vytvorení obmeny stačí dokázať pre n=20k

8. $\forall n\in N;\ 3/n^2 +1 \Rightarrow 6 \dagger n$
Obmena: $\forall n\in N;\ 6 / n \Rightarrow 3 \dagger (n^2 +1)$
Dôkaz: $6 / n \Rightarrow n = 6.k,\ k\in N \Rightarrow n^2 +1 = (6k)^2 + 1=36k^2 +1= 3.12k^2 + 1 \Rightarrow$
$3 \dagger (n^2 +1) \Rightarrow$ Obmena platí $\Rightarrow$ VETA PLATÍ

9. $\forall n\in N;\ 4/n^2 \Rightarrow 2/n$
10. $\forall n\in N;\ 3 \dagger n \Rightarrow 9 \dagger n^2$
11. $\forall n\in N;\ 2|n^2 \Rightarrow 2|n$

12. $\forall n\in N;\ 3|n \Rightarrow 3|(n^2 + 6)$

13. $\forall n\in N;\ 2|n \Rightarrow 2/n^2$

14. $\forall n\in N;\ 2|(n^2 + 5) \Rightarrow (2|n)'$

15. $\forall k \in N : 16|(k^2 + 4k) \Rightarrow 2|k$

C. Dôkazy sporom

Dôkazy sporom sa využívajú pri dôkazoch implikácie.
Pri dôkazoch sporom využijeme negáciu implikácie $A \Rightarrow B$ teda $A' \wedge B'$.
Implikácia a negácia implikácie majú opačné pravdivostné hodnoty.

Príklad : Dokážte sporom : ak $2/n^2 \Rightarrow 2/n$

Negácia implikácie : $2/n^2 \wedge 2 \dagger n \Rightarrow n \neq 2.k, \ n = 2k + 1 \Rightarrow$
$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 \Rightarrow 2 \dagger (4k^2 + 4k + 1) \Rightarrow 2 \dagger n^2$ spor , negácia neplatí $\Rightarrow$
platí pôvodná implikácia .