**Metódy dôkazov v matematike**

**1. Úvod**

Živý jazyk je príliš bohatý pre potreby matematiky. Význam jednotlivých slov je výsledkom dlhého historického vývoja. Jedno slovo môže mať rôzny význam ( napr. hlavička je časť klinca, ale aj o múdrom človeku môžeme povedať „ To je ale hlavička ! “ ), alebo jedna vec môže byť označená viacerými pojmami ( napr. chyba je omyl ). Niekedy závisí od situácie, ktorý pojem je vhodné použiť ( napr. väčšina domčekov je zároveň budovami, ale nie každá budova je domčekom ). Preto nie vždy rozumieme všetci to isté, keď počujeme nejaké slovo alebo vetu.

V matematike existuje spôsob, ako predísť takýmto nedorozumeniam – **celá mate-matika je postavená na niekoľkých základných pojmoch** ( množina, bod, číslo, ... ) a niekoľkých tvrdeniach ( výrokoch ) o nich. Tieto tvrdenia sa nazývajú **axiómy**. Všetky ostatné pojmy, ktoré sa v matematike používajú, je treba definovať, t.j. popísať pomocou základných pojmov alebo iných – predtým definovaných – pojmov. Rozlišujte pojmy **definí-cia** – definíciou sa popisuje nový pojem – a **matematická veta** – veta je tvrdenie o vlastnostiach pojmov. Všetky **tvrdenia v matematike treba dokázať** ( odvodiť ) pomocou axióm alebo iných predtým dokázaných tvrdení.

Pomocou tohto učebného textu sa dozviete, ktoré metódy sa používajú pri dokazovaní matematických tvrdení a ako treba pri dokazovaní postupovať.

**1. úloha :**

Zopakujte si, čo je výrok, pravdivostná hodnota výroku, negácia výroku, hypotéza, implikácia, obmena implikácie. Ako symbolicky zapíšeme *pre všetky*, *existuje*, *z toho vyplýva*, *číslo n je prirodzené*, *číslo 4 je deliteľom čísla n* ?

**2. úloha :**

Na základnej škole ste používali pojem *poučka*. Odôvodnite, či sú *poučky* definície alebo matematické vety.

**2. Priamy dôkaz**

Je to najjednoduchší spôsob dôkazu. **Dôkaz tvrdenia ( vety ) T pozostáva len z ko-nečného reťazca implikácií, T1 ⇒ T2 ⇒ T3 ⇒ ... ⇒ Tn ⇒ T, pričom prvý člen T1 je axióma, alebo už dokázané tvrdenie a každé ďalšie tvrdenie ( T2 až Tn ) logicky vyplýva z predchádzajúceho tvrdenia.**

**Príklad 1 :**

**Dokážte, že súčet ktorýchkoľvek piatich po sebe idúcich párnych prirodzených čísel je deliteľný číslom desať.**

Riešenie : Párne prirodzené číslo môžeme označiť *2n* ( prečo ? ) ⇒ päť po sebe idúcich pár-nych prirodzených čísel označíme 2n, 2n + 2, 2n + 4, 2n + 6 a 2n + 8 ⇒ ich súčet je potom   
2n + ( 2n + 2 ) + ( 2n + 4 ) + ( 2n + 6 ) +( 2n + 8 ) = 10n + 20 = 10.( n + 2 ) ⇒ súčet je 10-násobok čísla n + 2 ⇒ súčet je deliteľný číslom 10.

**3. úloha :**

Symbolicky zapíšte a dokážte nasledujúce tvrdenia :

1. Súčet troch za sebou idúcich prirodzených čísel je deliteľný číslom 3.

Riešenie: 3 za sebou idúce čísla ... 3.n, 3.n+1, 3.n+2

Súčet 3 za sebou: (3n)+(3n+1)+(3n+2) = 9n+3= 3.(3n+2)

3 / 3.(3n+2) ⇒ 3 / (3n)+(3n+1)+(3n+2) ⇒ 3 / súčet 3 za sebou idúcich čísel

1. Druhá mocnina nepárneho čísla je tiež nepárna.

Nepárne číslo: 2n+1, n∈N

Druhá mocnina: (2n+1)2 = (2n+1).(2n+1) = 4n2 + 2n + 2n +1 = 4n2 + 4n + 1 = 2(2n2 + 2n) + 1 = 2 k + 1 ...... 2n2 + 2n = k ∈N

⇒ 2 k + 1 je nepárne číslo, preto aj (2n+1)2  je nepárne číslo

c) Súčin troch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 6.

d) Súčin štyroch po sebe idúcich prirodzených je deliteľný číslom 24.

**Príklad 2 :**

**Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí : 4⏐n4 + 3n2.**

Riešenie : Dôkaz rozdelíme na dve časti:

* Predpokladajme najskôr, že n je párne číslo, t.j.  
  n = 2k ⇒ n4 + 3n2 = n2( n2 + 3 ) = 4k2( 4k2 + 3 )⇒ výraz n4 + 3n2 je násobkom čísla 4.
* Ak n je nepárne číslo, t.j. n = 2k + 1 ⇒ n4 + 3n2 = n2( n2 + 3 ) = (2k + 1)2[(2k + 1)2 + 3 ] = (2k + 1)2( 4k2 + 4k + 4 ) ⇒ druhý činiteľ je násobkom čísla 4 ⇒ výraz n4 + 3n2 je násobkom čísla 4.
* Dokázali sme platnosť tvrdenia ⇒ PLATÍ

**4. úloha :**

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí :

a) 2⏐( n2 – 3n )

b) 3⏐( n3 + 2n2 )

Pomôcka : Rozoberte možnosti, že n je deliteľné 3, n dáva po delení tromi zvyšok 1,   
 n dáva po delení tromi zvyšok 2.

c) \* Súčet tretích mocnín troch za sebou idúcich prirodzených čísel je násobkom čísla deväť. Pomôcka : čísla zapíšte ako n –1, n a n + 1.

d) \* 36 ⏐2n6 – n4 – n2

Pomôcka : rozložte výraz 2n6 – n4 – n2 na súčin.

Pri dokazovaní implikácie A⇒B, postupujeme ako pri priamom dokazovaní tvrdenia, ibaže v tomto prípade si vezmeme za východisko tvrdenie A a snažíme sa logickými úvahami dospieť k tvrdeniu B.

**5. úloha :**

Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí :

a) Ak n nie je deliteľné troma, tak jeho druhá mocnina dáva po delení tromi zvyšok   
 jedna.

b) Ak prirodzené číslo končí číslicou 5, tak jeho druhá mocnina končí dvojčíslím 25.

**3. Nepriamy dôkaz**

Zložený **výrok B‘ ⇒ A‘ sa nazýva obmena implikácie A ⇒ B**. Obmenu implikácie vytvoríme tak, že vymeníme poradie výrokov v implikácii a výroky A a B nahradíme ich negáciami.

Daná implikácia : Ak je druhá mocnina čísla n **párna**, tak aj číslo n je **párne**.

Obmena implikácie : Ak je číslo n **nepárne**, tak aj jeho druhá mocnina je **nepárna**.

Nemýľte si negáciu implikácie s obmenou implikácie.

**6. úloha :**

Dokážte, že implikácia a jej obmena majú vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu.

Pomôcka : tabuľka pravdivostných hodnôt.

**7. úloha :**

Napíšte ( ak sa dá aj symbolicky ) obmeny implikácii :

a) Ak tretia mocnina prirodzeného čísla n je nepárna, tak aj číslo n je nepárne.

b) Ak číslo 3 nedelí číslo n, tak n2 nie je deliteľné číslom 9.

c) 10⏐( n – 1 )**.**( n + 1 ) ⇒ 5 nedelí n

**Princíp nepriameho dôkazu spočíva v tom, že namiesto implikácie ktorú chceme dokázať, dokážeme jej obmenu**. Nepriamy dôkaz používame vtedy, keď prvý výrok v im-plikácii je zložitejší ako druhá časť implikácie.

**Príklad 3 :**

**Dokážte, že pre všetky prirodzené čísla n platí : ak 5 nedelí n3 − 6n2 + 2n − 10, tak n nie je deliteľné 5.**

Riešenie : Obmenou danej implikácie je výrok 5⏐n ⇒ 5⏐ n3 − 6n2 + 2n − 10.

5⏐n ⇒ n = 5k ⇒ po dosadení n3 − 6n2 + 2n − 10 = ... pokračovanie už zvládnete sami ☺.

**8. úloha :**

Dokážte, že tvrdenia z predchádzajúcej úlohy platia pre všetky prirodzené čísla n.

**4. Dôkaz sporom**

Z predchádzajúcej kapitoly už iste viete ☺, aký je vzťah medzi nasledujúcimi dvoma výrokmi : Ak je výrok ( tvrdenie ) T pravdivý, tak každý z neho odvodený výrok je pravdivý.

**Ak existuje nepravdivý výrok odvodený z tvrdenia T, tak aj tvrdenie T je nepravdivé.** Druhý výrok popisuje základný princíp dôkazu sporom.

Postup pri dôkaze sporom :

1. Vyslovíme negáciu výroku, ktorý máme dokázať.

2. Z negácie odvodíme výrok, ktorý je nepravdivý ( je v rozpore s niektorým predpokladom ).

3. Ak sa dá z negácie odvodiť nepravdivý výrok, tak negácia je nepravdivá a pôvodný výrok   
 ( ktorý sme mali dokázať ) je pravdivý.

**Príklad 4 :**

**Dokážte, že geometrický priemer dvoch ľubovoľných kladných reálnych čísel je menší alebo rovný ich aritmetickému priemeru.**

Riešenie : Máme dokázať pravdivosť nerovnosti ∀a,b∈R+ : . Vytvoríme najskôr jej negáciu : ∃ a,b∈R+:  ⇒ ⇒ po umocnení 4ab > ( a + b )2 ⇒  
⇒ 4ab > a2 + 2ab + b2 ⇒ 0 > a2 – 2ab + b2 ⇒ 0 >( a – b )2 ← táto nerovnosť je určite neprav-divá, pretože druhá mocnina každého reálneho čísla je nezáporná ⇒ neplatí nerovnosť   
∃ a,b∈R+: ⇒ musí platiť tvrdenie ∀a,b∈R+ : , ktoré sme mali dokázať.

**9. úloha :**

Bez použitia kalkulačky dokážte, že platí :

a) 5 + √5 < √55

b) .

**10. úloha :**

a) Dokážte, že pre každé kladné reálne číslo a platí : 

b) Dokážte, že pre každé reálne číslo x platí : 

c) \*Dokážte, že pre všetky kladné reálne čísla a,b platí : 

d) \*Dokážte, že najmenší spoločný násobok n(a,b) a najväčší spoločný deliteľ D(a,b)   
 prirodzených čísel a,b spĺňajú nerovnosť a**.**D(a,b) + b**.**n(a,b)≥ 2ab. Zistite, pre ktoré   
 čísla a,b sa táto nerovnosť zmení na rovnosť.

**5. riešený príklad :**

**Dokážte, že číslo √2 nie je racionálne.**

Riešenie : Použijeme dôkaz sporom – predpokladajme, že √2 je racionálne číslo ⇒ √2 môžeme napísať v tvare zlomku , kde p a q sú nesúdeliteľné čísla, p∈Z a q∈N ⇒

po úprave a umocnení 2q2 = p2 ⇒ druhá mocnina čísla p je párne číslo ⇒ aj p je párne číslo, t.j. p = 2k, kde k∈Z ⇒ po dosadení 2q2 = 4k2 ⇒ q2 = 2k2 ⇒ aj druhá mocnina čísla q je párne číslo ⇒ q je párne číslo ⇒ čísla p a q sú deliteľné dvoma ⇒ spor ( rozpor ) s predpokladom, že p a q sú nesúdeliteľné čísla ⇒ tvrdenie, že √2 je racionálne číslo, je nepravdivé.

11. úloha\* :

Dokážte, že čísla √3 a √5 nie sú racionálne čísla.