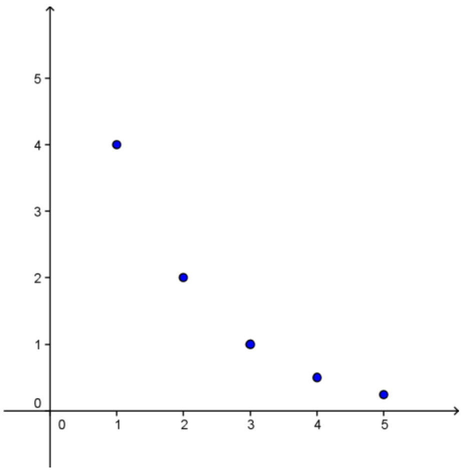
Postupnosti

Postupnosť je funkcia, ktorej definičný obor je množina prirodzených čísel $\{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$, alebo jej podmnožina typu $\{1; 2; 3; \ldots; n\}$ - podľa definičného oboru delíme postupnosti na konečné a nekonečné

- postupnosť môže byť daná:
  - vymenovaním prvkov
  - grafom
  - predpisom pre n-tý člen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$
  - rekurentne (= vyjadrenie nasledujúceho člena pomocou predchádzajúcich a prvého člena)

Pr. Zapíš danú postupnosť ostatnými spôsobmi: $\left\{4; 2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \ldots\right\}$ ← vymenovanie prvkov



← graf

predpis pre n-tý člen → $\left\{4.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}_{n=1}^{\infty}$

rekurentné určenie → $a_{n+1} = a_n.\frac{1}{2}$

$a_1 = 4$

Vlastnosti

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je:

- rastúca, ak $\forall n \in N;\ a_{n+1} > a_n$
- klesajúca, ak $\forall n \in N;\ a_{n+1} < a_n$
- nerastúca, ak $\forall n \in N;\ a_{n+1} \leq a_n$
- neklesajúca, ak $\forall n \in N;\ a_{n+1} \geq a_n$
- konštantná, ak $\forall n \in N;\ a_{n+1} = a_n$
- ohraničená zdola, ak existuje také reálne číslo b, že platí $a_n \geq b$ pre $\forall n \in N$
- ohraničená zhora, ak existuje také reálne číslo c, že platí $a_n \leq c$ pre $\forall n \in N$

- postupnosti sú ohraničené, ak sú ohraničené zhora aj zdola zároveň
- postupnosti nazývame monotónne, ak sú na celom definičnom obore rastúce alebo klesajúce, nerastúce alebo neklesajúce – ak sú rastúce alebo klesajúce, nazývame ich rýdzomonotónne

Aritmetická postupnosť

Postupnosť sa nazýva ***aritmetická*** (AP), ak existuje také reálne číslo d, že pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} = a_n + d$.

- číslo d nazývame ***diferencia*** postupnosti
- pre monotónnosť AP platí:

$$d < 0 \quad \Leftrightarrow \quad klesajúca\ AP$$

$$d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad konštantná\ AP$$

$$d > 0 \quad \Leftrightarrow \quad rastúca\ AP$$

- pre ohraničenosť AP platí:
  - klesajúca AP je ohraničená zhora a neohraničená zdola
  - rastúca AP je ohraničená zdola a neohraničená zhora
  - konštantná AP je ohraničená
- n-tý člen AP má hodnotu:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

- pre ľubovoľné dva členy AP platí:

$$a_r = a_s + (r-s)d$$

- súčet prvých n členov AP vypočítame:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

- súčet nekonečnej AP neexistuje

Geometrická postupnosť

Postupnosť sa nazýva ***geometrická*** (GP), ak existuje také reálne číslo q, že pre všetky prirodzené čísla n platí $a_{n+1} = a_n q$.

- číslo q nazývame ***kvocient*** postupnosti
- pre monotónnosť GP platí:
  - ak $a_1 > 0$

$$q > 1 \quad \Leftrightarrow \quad rastúca\ GP$$

$$q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad konštantná\ GP$$

$$q \in (0; 1) \quad \Leftrightarrow \quad klesajúca\ GP$$

$$q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad nerastúca\ GP$$

$$q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad GP\ nie\ je\ monotónna\ (alternatívne\ postupnosti = so\ striedavými\ znamienkami)$$

- ak $a_1 < 0$

$$q > 1 \quad \Leftrightarrow \quad klesajúca\ GP$$

$$q = 1 \quad \Leftrightarrow \quad konštantná\ GP$$

$$q \in (0; 1) \quad \Leftrightarrow \quad rastúca\ GP$$

$$q = 0 \quad \Leftrightarrow \quad neklesajúca\ GP$$

$$q < 0 \quad \Leftrightarrow \quad GP\ nie\ je\ monotónna\ (alternatívne\ postupnosti)$$

– pre ohraničenosť GP platí:
  - ak platí $|q| \leq 1$, GP je ohraničená
  - ak platí $|q| > 1$, GP je neohraničená

– n-tý člen GP má hodnotu:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

– pre ľubovoľné dva členy GP platí:

$$a_r = a_s q^{r-s}$$

– súčet prvých n členov GP vypočítame:

$$s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}; \quad q \neq 1$$

– súčet nekonečnej GP

$$s = \frac{a_1}{1 - q}; \quad pričom\ musí\ platiť \ \ |q| < 1$$