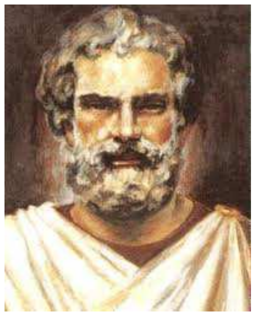
Geometria



Geometria (z gréckych slov Geo = zem a metro = miera, t.j. zememeračstvo) je disciplína matematiky prvýkrát spopularizovaná medzi starovekými grékmi ***Tálesom*** (okolo 624-547 pred Kr.), ktorý sa zaoberal vzťahmi v priestore. Najstaršie známky geometrie sa dajú sledovať už v starovekom Egypte.
Rindský papyrus popisuje zarážajúco presný spôsob výpočtu aproximácie čísla **π**, s chybou menšou ako jedna stotina.

Teraz je geometria chápaná ako časť matematiky, ktorá sa zaoberá štúdiom geometrických útvarov - objektov.

Základné rozdelenie geometrie: ***planimetria*** - študuje geometrické útvary v rovine

stereometria - študuje geometrické útvary v priestore.

Aby bolo štúdium geometrie ľahšie, vytvárame si pre geometrické útvary rôzne modely.

Abstraktným geometrickým modelom sveta, v ktorom žijeme, t.j. priestoru, ktorý nás obklopuje, je euklidovský trojrozmerný **priestor** (označuje sa E_3). Skladá sa z **bodov**, **priamok** a **rovín**. Ľudia zo skúsenosti alebo možno intuitívne charakterizujú priestor tými istými základnými vlastnosťami, ktoré sú zachytené ***axiómami geometrie***. Z týchto ***axióm*** a ***definícií*** bodu, priamky, roviny, krivky, povrchov a telies sa potom odvádzajú ***vety***, ktoré tvoria teóriu geometrie.

Základné útvary v rovine

Bod, ***priamku*** a ***rovinu*** považujeme za ***<u>základné geometrické pojmy</u>***, ktoré nedefinujeme, ale pomocou nich definujeme ostatné geometrické útvary.

Uvedené tri typy (neprázdnych) množín bodov zároveň predstavujú **základné geometrické útvary v rovine (priestore)**.

Označovanie: body: ***A, B, C, …, P, Q, R, …,***

priamky: **a, b, c, …, p, q, r, …,** alebo pomocou bodov: $\underset{AB}{\longleftrightarrow}$, $\underset{PQ}{\longleftrightarrow}$, ...

roviny: **α, β, γ, …, π, ν, μ, ρ, …** alebo pomocou bodov: $\underset{ABC}{\longleftrightarrow}$, $\underset{PQR}{\longleftrightarrow}$, ...

Základné vzťahy medzi všetkými tromi základnými útvarmi - bodmi, priamkami a rovinami možno opísať nasledovne:

"*bod leží na priamke*", alebo "*priamka prechádza bodom*" („*priamka obsahuje bod*"),
"*bod leží v rovine*", alebo "*rovina prechádza bodom*" („*rovina obsahuje bod*"),
"*priamka leží v rovine*", alebo "*rovina prechádza priamkou*" („*rovina obsahuje priamku*").

Tieto vzťahy možno vyjadriť pomocou pojmu ***incidencia***, napr. jeden útvar inciduje s druhým alebo útvary navzájom incidujú.

Uvedené vzťahy zapisujeme pomocou symbolov: $\in$, $\notin$, $\subset$, $\not\subset$, $=$, $\neq$,

napr. $A \in a$, $B \notin b$, $p \subset \rho$, $q \not\subset \sigma$, $\alpha = \beta$, $A \neq B$.

Poznámka: Píšeme $p \subset \rho$ a <u>nie</u> $p \notin \rho$, nakoľko priamka p je **množina** bodov a nie prvok.

Štyri základné axiómy incidencie:

A1. Pre ***<u>každé dva rôzne body</u> existuje práve jedna priamka***, ktorá nimi prechádza.

A2. Pre ***<u>každé tri rôzne body neležiace na jednej priamke</u>*** (tri nekolineárne body) ***existuje práve jedna rovina***, ktorá ich obsahuje.

A3. Ak ***<u>dva rôzne body priamky ležia v rovine</u>***, tak ***každý bod priamky leží v rovine***.

A4. Ak ***<u>dve rôzne roviny majú spoločný bod</u>, tak majú spoločný ešte aspoň jeden ďalší bod rôzny od tohto bodu*** (teda aspoň jednu priamku určenú týmito dvoma bodmi).

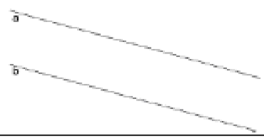
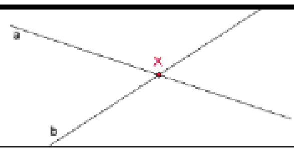
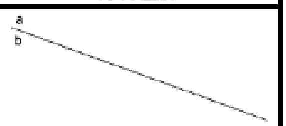
Úsečka je časť priamky ohraničená – vymedzená dvomi bodmi   Označenie: **AB**

Každý bod ležiaci na priamke ju delí na dve <u>opačné</u> ***polpriamky***

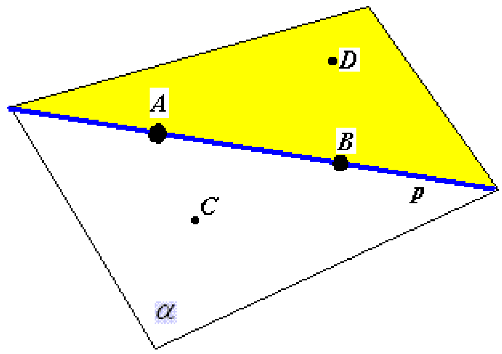
Polpriamka je časť priamky ohraničená - vymedzená jedným bodom   Označenie: $\overrightarrow{XY}$

Úsečka **AB** – ***prienik*** dvoch polpriamok $\overrightarrow{AB} \cap \overleftarrow{AB}$

<u>Vzájomné polohy priamok v rovine:</u>

vzájomné polohy	rovnobežné rôzne	rôznobežné	rovnobežné totožné
náčrt			
spoločné body	$a \cap b = \emptyset$	$a \cap b = \{X\}$	$a = b; a \cap b = a$
slovne	priamky nemajú spoločný bod	priamky majú jeden spoločný bod (=priesečník)	priamky majú nekonečne veľa spoločných bodov

Každá priamka ležiaca v rovine ju delí na dve <u>opačné</u> ***polroviny***



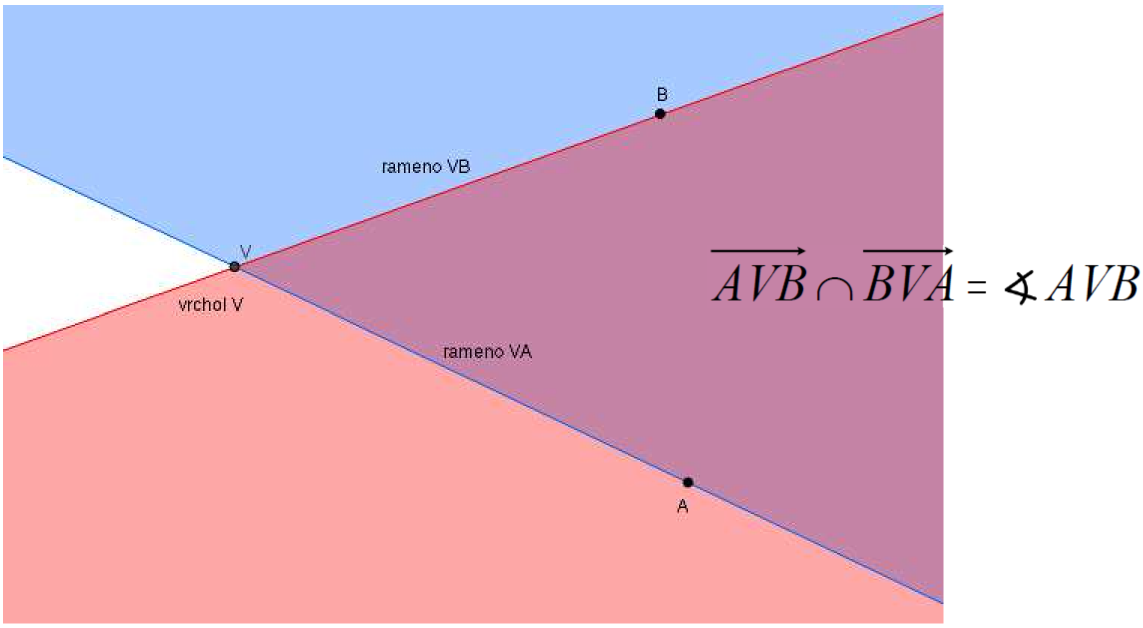
Označenie: $\overrightarrow{pD}$ alebo $\overrightarrow{ABD}$

Uhol môžeme zadefinovať ako:

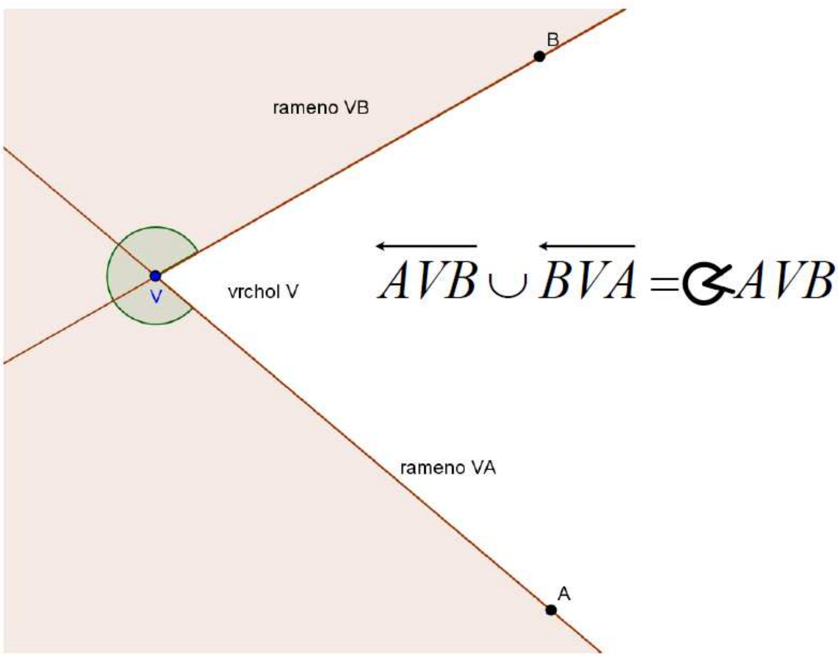
1. ***prienik dvoch polrovín***
2. ***časť roviny ohraničená dvomi polpriamkami so spoločným začiatkom***

<u>Polpriamky</u> nazývame ***ramená uhla***; <u>spoločný začiatok</u> polpriamok je ***vrchol uhla.***

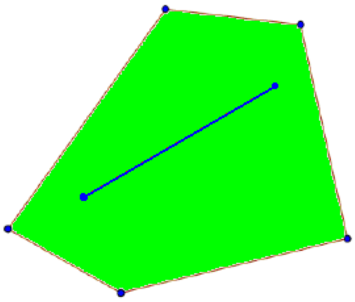
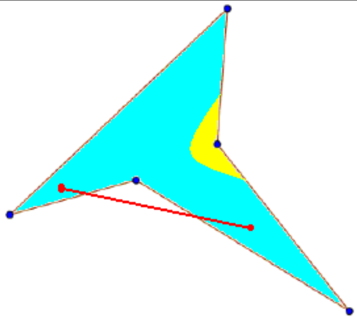
Konvexný uhol AVB – prienik polrovín AVB a BVA:



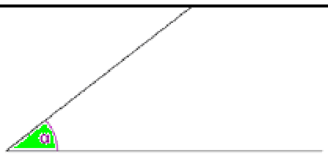
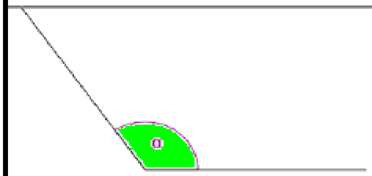
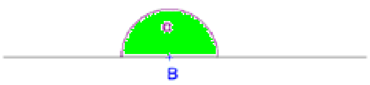
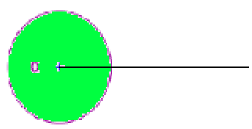
Nekonvexný uhol AVB – zjednotenie polrovín opačných k polrovinám AVB, BVA.



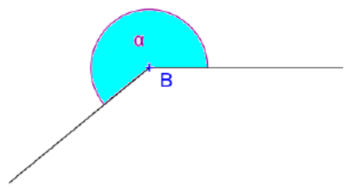
Geometrický útvar ***je konvexný*** práve vtedy, keď spojnica ***jeho ľubovoľných dvoch rôznych bodov*** je ***podmnožinou*** daného útvaru (celá je súčasťou daného útvaru).

konvexné	***nekonvexné***
	
Ak spojíme ľubovoľné dva body útvaru, celá úsečka sa nachádza vo vnútornej oblasti útvaru.	Ak spájame dvojice bodov patriacich útvaru, nachádzajú sa medzi úsečkami také, ktoré majú body nachádzajúce sa mimo útvaru.
Jeho vnútorné uhly sú z intervalu $(0^\circ; 180^\circ)$	Jeho vnútorné uhly sú z intervalu $(0^\circ; 360^\circ)$

<u>Rozdelenie uhlov:</u>

náčrt		***názov***	***vlastnosti***
	KONVEXNÉ	ostrý ***dutý***	$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$
		pravý ***dutý***	$\alpha = 90^\circ$
		tupý ***dutý***	$\alpha \in (90^\circ; 180^\circ)$
		priamy	$\alpha = 180^\circ$
		plný	$\alpha = 360^\circ$

Dutý uhol: **$\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$**

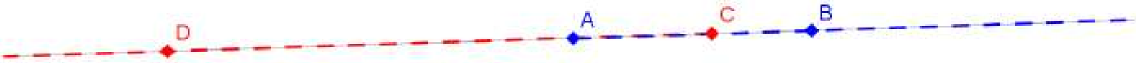
	NEKONVEXNÉ	vypuklý	$\alpha \in (180°; 360°)$

Dvojice uhlov:

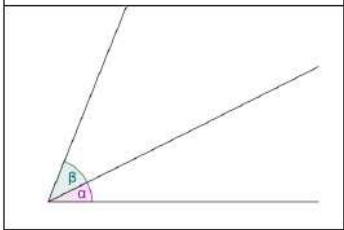
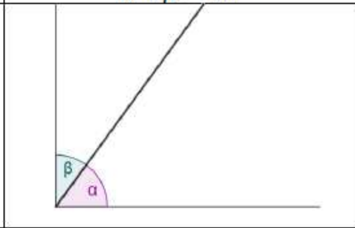
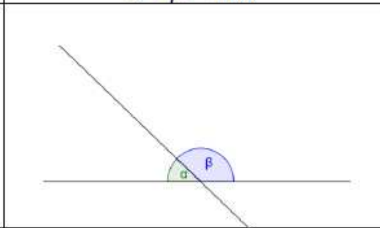
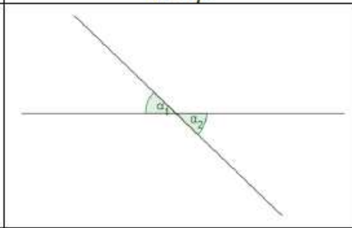
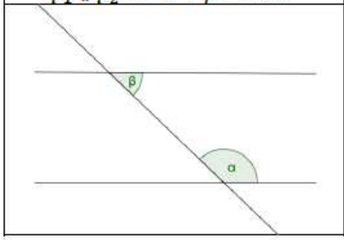
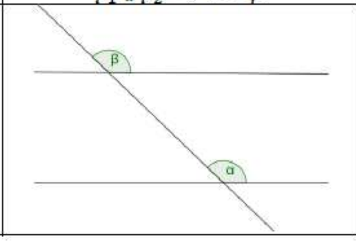
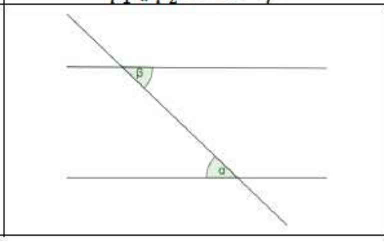
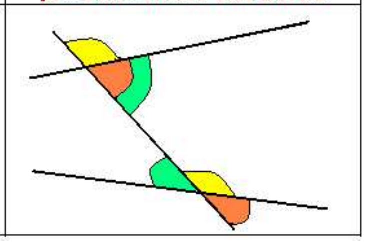
Pre jednoduché vyjadrenie vlastností dvojíc uhlov potrebujeme pomocné pojmy o vzájomnej polohe dvoch polpriamok na tej istej priamke:

polpriamky súhlasne rovnobežné – aspoň jedna je časťou druhej,

polpriamky nesúhlasne rovnobežné – ani jedna z nich nie je časťou druhej.



Jednoducho povedané súhlasne rovnobežné polpriamky smerujú rovnakým smerom, nesúhlasne rovnobežné polpriamky smerujú opačným smerom.

styčné uhly	*doplnkové uhly*	*susedné uhly*	*vrcholové uhly*
Dvojica uhlov má spoločný vrchol a jedno rameno.	Špeciálny prípad styčných uhlov – kedy ramená uhlov, ktoré nie sú spoločné, sú na seba kolmé.	Špeciálny prípad styčných uhlov – kedy ramená uhlov, ktoré nie sú spoločné, sú navzájom opačné polpriamky.	Dvojica uhlov, ktoré majú spoločný vrchol a ich ramená sú opačné polpriamky.
	$\alpha + \beta = 90°$	$\alpha + \beta = 180°$	$\alpha = \beta$
			
priľahlé uhly	*súhlasné uhly*	*striedavé uhly*	*Ak $p_1 \nparallel p_2$, potom ROVNOSTI NEPLATIA.*
$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow \alpha + \beta = 180°$	$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow \alpha = \beta$	$p_1 \parallel p_2 \Rightarrow \alpha = \beta$	
			

Množina všetkých bodov danej vlastnosti v rovine - MBDV

Definícia:

Množina všetkých bodov s danou vlastnosťou **V** v rovine je množina **M** všetkých bodov v rovine, ktoré spĺňajú tieto dve požiadavky:

1) každý bod množiny **M** má požadovanú vlastnosť **V**,

2) každý bod roviny, ktorý má danú vlastnosť **V**, patrí do množiny **M**.

Poznámka:

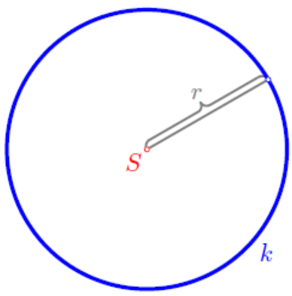
Množinami všetkých bodov s danou vlastnosťou môžu byť priamky, kružnice, rôzne iné útvary, ich časti alebo zoskupenia, môžu to byť aj súbory izolovaných bodov a v niektorých prípadoch sa môže stať, že v hľadanej množine bodov nie je ani jeden bod.

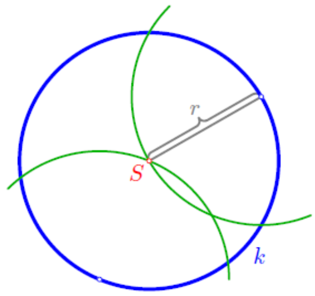
Najznámejšie a najčastejšie využívané množiny bodov s danou vlastnosťou v rovine:

Kružnica - množina ***všetkých*** bodov X v rovine, ktoré majú od daného bodu (***stredu*** kružnice) ***rovnakú*** vzdialenosť nazývanú ***polomer*** kružnice.

Kružnicu so stredom S a polomerom r označujeme **k (S, r)**.

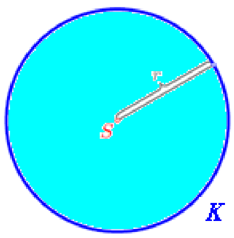
$$\mathbf{k\ (S, r) = \{ X \in E_2 ,\ |SX| = r\}}$$





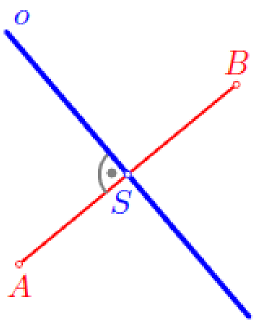
Táto kružnica je taktiež množinou všetkých stredov kružníc, ktorých polomer je r a prechádzajú daným bodom S.

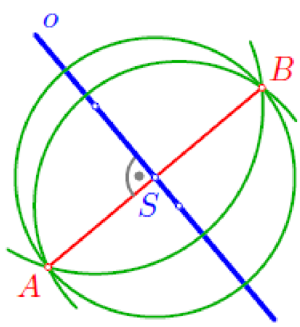
Kruh (so stredom S a polomerom r) - množina všetkých bodov X , pre ktoré platí $|SX| \leq r$. Označujeme ***K (S, r)***.



Os úsečky - množina ***všetkých*** bodov X v rovine, pre ktoré platí, že majú ***rovnakú*** vzdialenosť od ***dvoch rôznych bodov A, B*** je ***os úsečky AB***, ktorá je na úsečku AB ***kolmá*** a prechádza jej stredom, t. j. pre ktoré platí $|AX| = |BX|$.

$$\mathbf{os - \{ X \in E_2 , |AX| = |BX| \}}$$

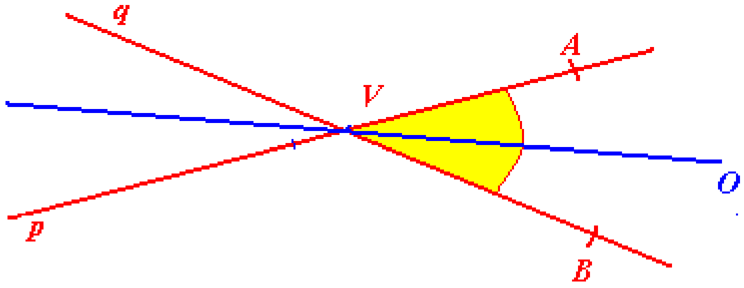


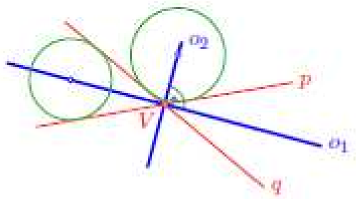


Iná definícia - ***os úsečky AB*** je ***množina stredov S všetkých kružníc***, ktoré prechádzajú bodmi A, B.

Os uhla - množina ***všetkých*** bodov X v rovine, pre ktoré platí, že majú ***rovnakú*** vzdialenosť od ***ramien uhla AVB***. Platí **│X, → VA│=│X, → VB│**.

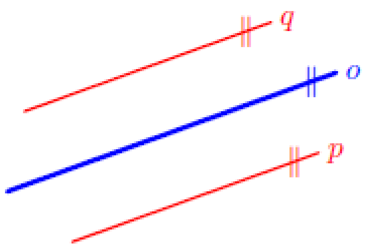
os - { X є E$_2$, │X, → VA│=│X, → VB│}

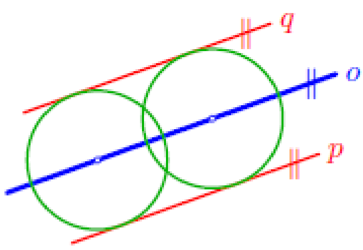




Iná definícia - ***množina stredov S všetkých kružníc*** , ktoré sa ***dotýkajú ramien uhla AVB***, okrem bodu V)

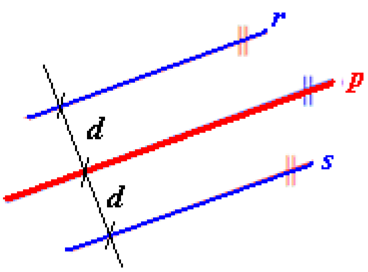
Os pásu - množina ***všetkých*** bodov X v rovine ***rovnako*** vzdialených od ***dvoch rovnobežných priamok*** ; je to priamka s nimi rovnobežná v rovnakej vzdialenosti od oboch priamok.



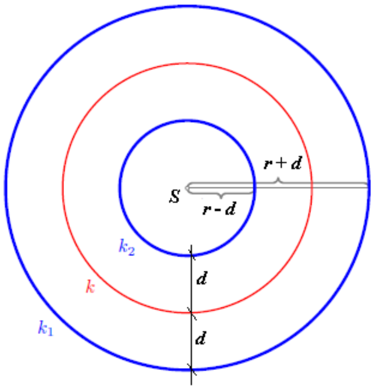


Táto os pásu je tiež množinou ***všetkých stredov kružníc***, ktoré sa ***dotýkajú*** daných rovnobežiek p, q.

Ekvidištanty priamky p - množina ***všetkých*** bodov X roviny, ktoré majú ***od priamky p vzdialenosť d*** ; je to dvojica s ňou ***rovnobežných priamok*** vo vzdialenosti d.



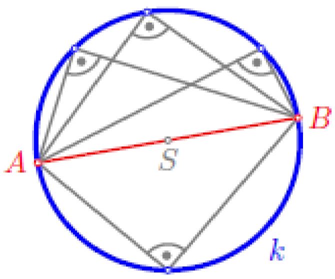
Ekvidištanta kružnice k - množina ***všetkých*** bodov X roviny , ktoré majú ***od kružnice k (S, r) vzdialenosť d*** ; je to dvojica s ňou ***sústredných kružníc*** s polomermi r + d a r - d.



Talesova kružnica- množina ***všetkých vrcholov X pravých uhlov nad úsečkou AB***, čiže množina všetkých bodov v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod pravým uhlom.

Je to kružnica s priemerom AB, so stredom v strede úsečky AB a s polomerom $|AS|$, ***bez krajných bodov úsečky A, B***.

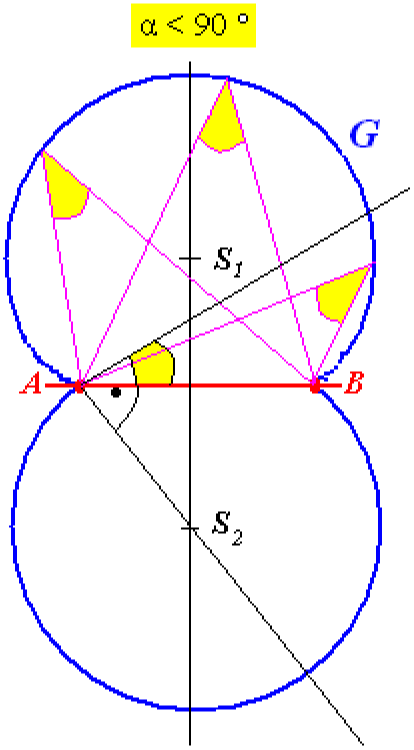
$$\tau_{AB} = \{ X \in E_2 ,\ |\sphericalangle AXB| = 90°\}$$

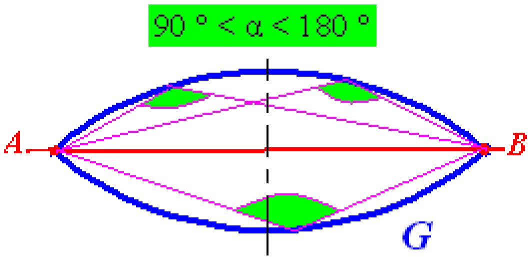


Množina bodov, z ktorých vidíme úsečku pod daným uhlom (***množina G***)

Množina všetkých vrcholov uhlov s veľkosťou α v rovine, ktorých ramená prechádzajú bodmi A, B (A ≠ B), čiže množina všetkých bodov v rovine, z ktorých vidíme úsečku AB pod uhlom α, sú dva kružnicové oblúky k_1, k_2 s krajnými bodmi A, B, ktoré do množiny G nepatria.

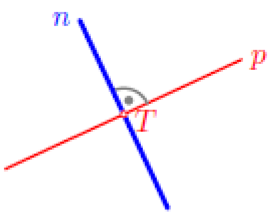
$$G = \{ X \in E^2 ,\ |\sphericalangle AXB| = \alpha \}$$

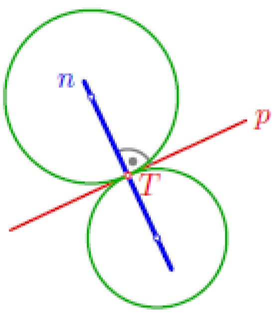




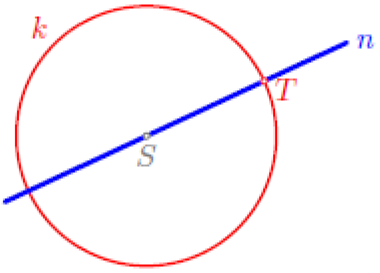
$$|\angle BAS_2| = 90° - \alpha$$

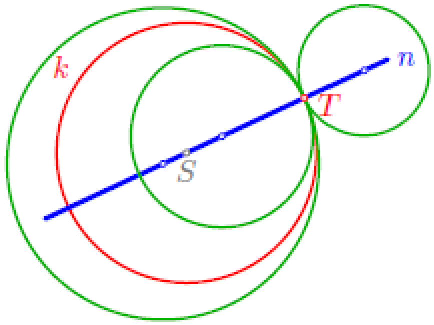
Množina ***všetkých stredov kružníc***, ktoré sa ***dotýkajú danej priamky p*** v jej danom ***bode T***, je priamka **n** idúca daným bodom T kolmo k danej priamke p (**normála priamky p v bode T;** $T \in n$, $\mathbf{n} \perp \mathbf{p}$) mimo bodu T.



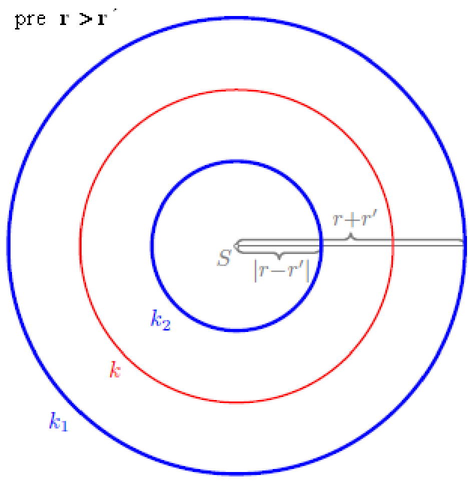


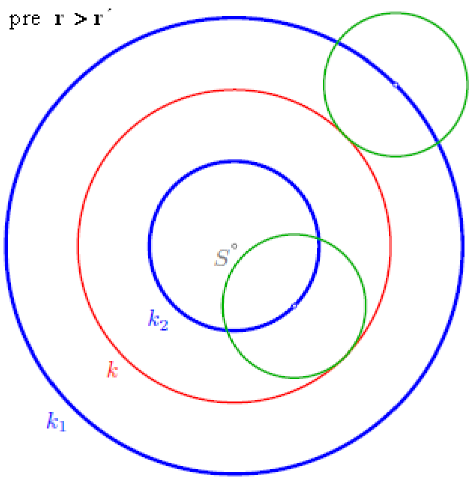
Množina ***všetkých stredov kružníc***, ktoré sa ***dotýkajú danej kružnice k***(S, r = |ST|) v jej ***danom bode T***, je priamka **n = *ST*** (**normála kružnice k v bode T**) ***<u>vyjmúc body S, T</u>***.

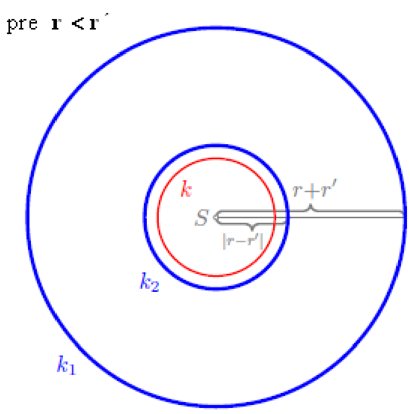


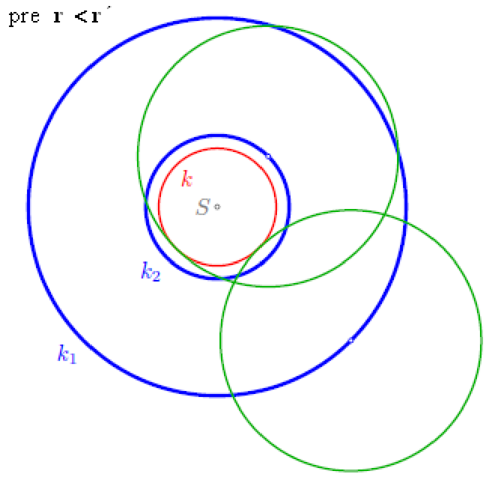


Množina ***všetkých stredov kružníc***, ktoré sa ***dotýkajú danej kružnice k***(S, r) a majú ***daný polomer*** r_0, sú ***sústredné*** kružnice **$k_1(S, r + r_0)$** (pre vonkajší dotyk s k) a **k_2 (S, $|r - r_0|$)** (pre vnútorný dotyk s k).



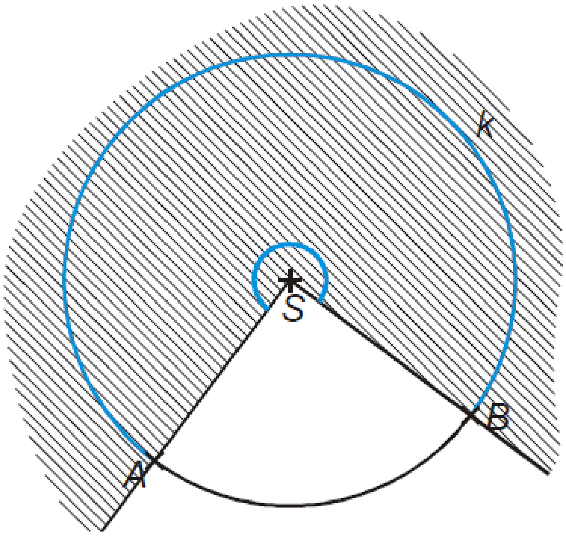




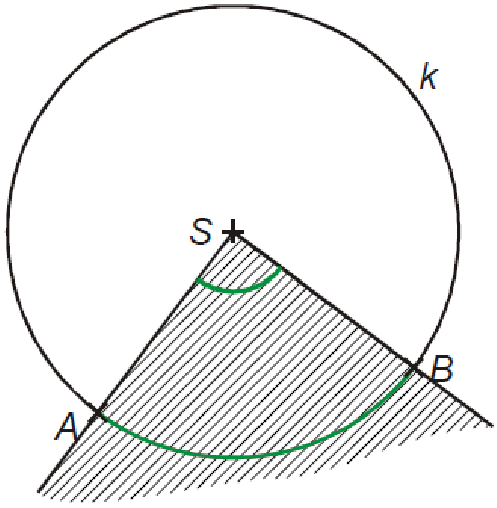


Uhly v kružnici – stredový a obvodový uhol

Nech A, B sú dva rôzne body ležiace na kružnici k. Body *A*, *B* rozdeľujú kružnicu *k* na dve časti, ktoré nazývame kružnicové oblúky. Polpriamky *SA* a *SB* potom rozdeľujú rovinu na dva uhly. Vrcholy oboch uhlov ležia v strede kružnice k. Nazývame ich **stredové uhly prislúchajúce oblúku *AB***.



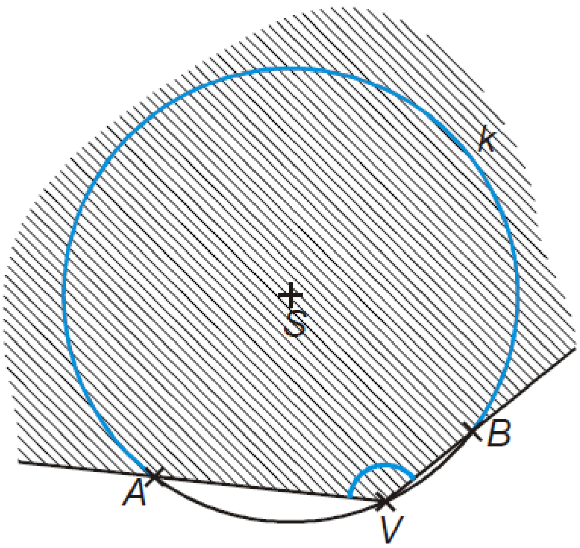
Väčšiemu oblúku AB prislúcha ***nekonvexný*** ***<u>stredový</u>*** uhol.



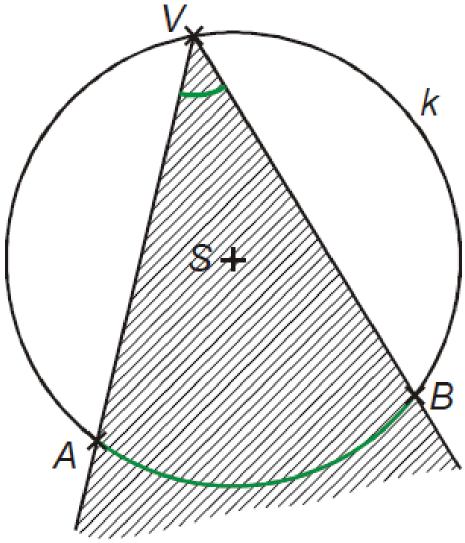
Menšiemu oblúku AB prislúcha ***konvexný*** ***<u>stredový</u>*** uhol.

Definícia: Uhol, ktorého vrcholom je ***stred S kružnice k*** a <u>ramená prechádzajú krajnými bodmi oblúka *AB* kružnice *k*</u>, sa nazýva **stredový uhol prislúchajúci** k tomu **oblúku *AB***, ktorý v tomto uhle leží.

Okrem stredového uhla môžeme k obom oblúkom nájsť aj uhly, ktorých vrcholy ležia na „obvode“ kružnice (správne obvode kruhu). Takéto uhly nazývame ***obvodové***.



Obvodový uhol prislúchajúci ***väčšiemu oblúku AB***.



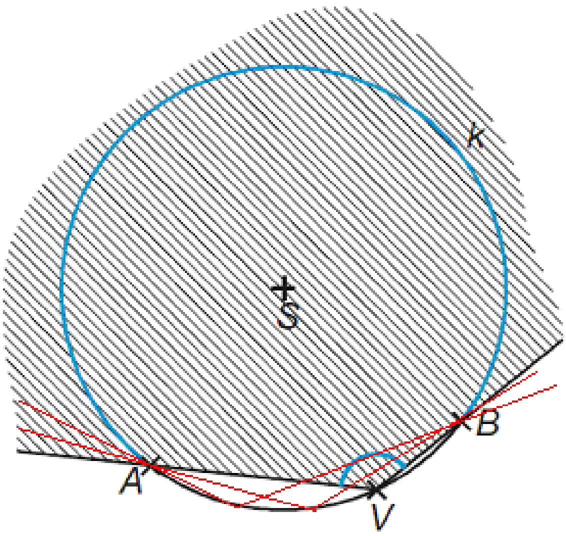
Obvodový uhol prislúchajúci ***menšiemu oblúku AB***.

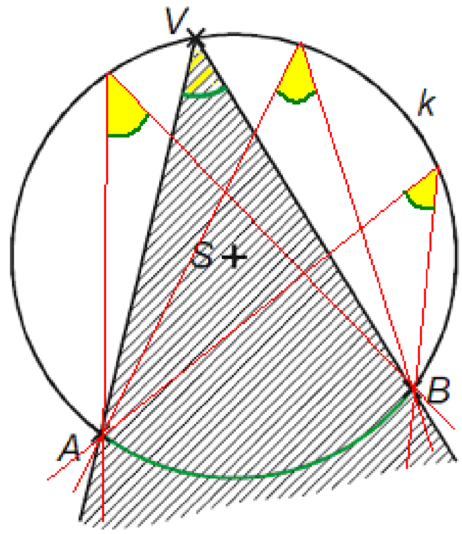
Definícia: Uhol, ktorého vrchol ***V*** je ***bodom kružnice k*** a ramená prechádzajú ***krajnými bodmi oblúka AB kružnice k*** ($V \neq A$, $V \neq B$), sa nazýva **obvodový uhol prislúchajúci** k tomu **oblúku *AB***, ktorý v tomto uhlu leží.

<u>*Poznámky:*</u>

1. ***Vrchol obvodového uhla*** prislúchajúceho kružnicovému oblúku AB leží vždy na „protiľahlom" oblúku AB danej kružnice.

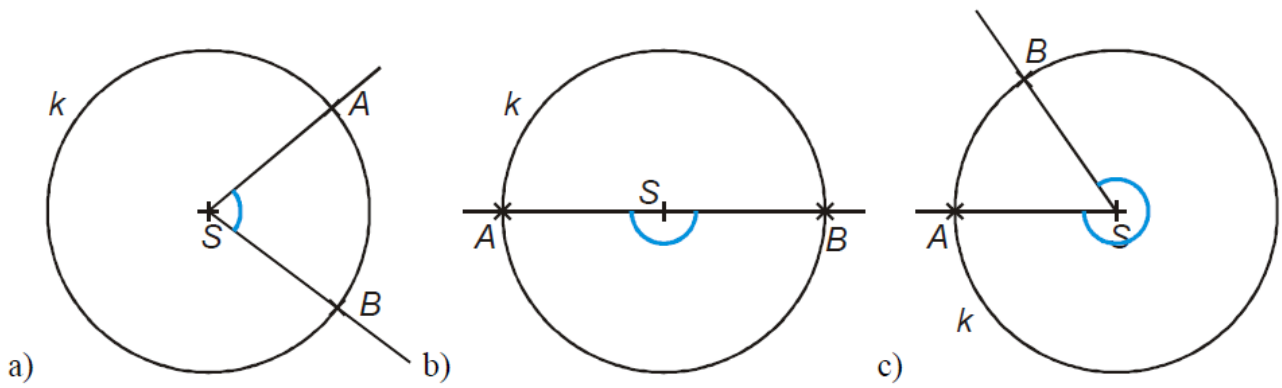
2. ***Stredový*** uhol je ***určený jednoznačne*** (kružnice má len jeden stred), ***Obvodových*** uhlov je ***nekonečne veľa*** (druhý oblúk má nekonečne veľa bodov).



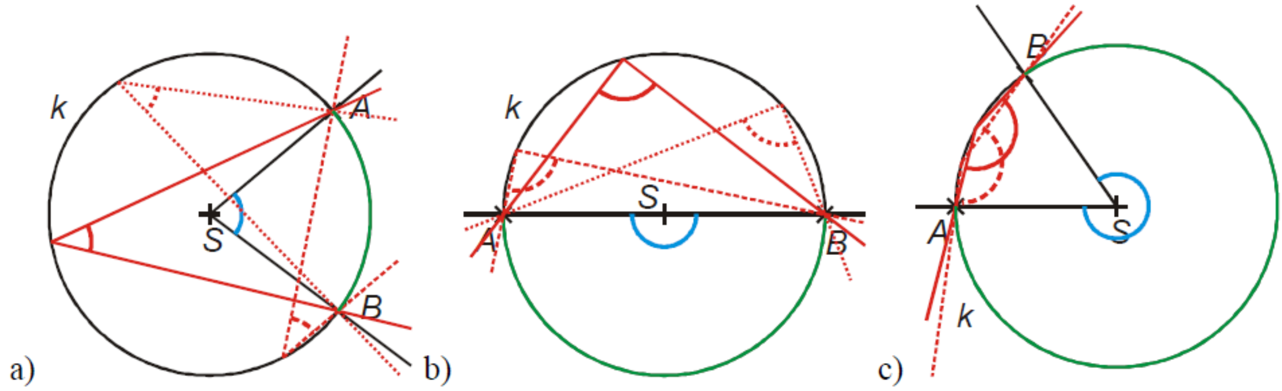


<u>**Príklad 1:**</u>

K zobrazeným stredovým uhlom doplniť obvodové uhly:

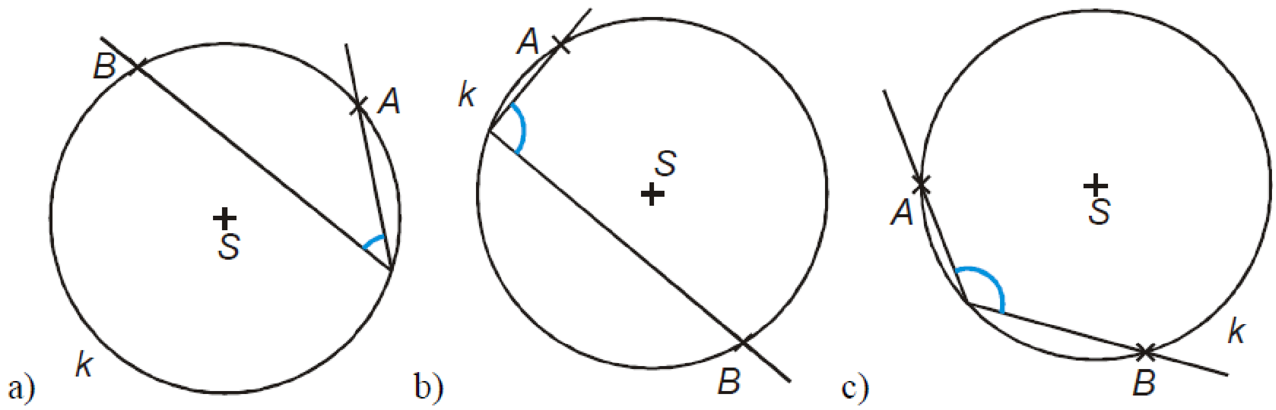


Možné riešenie:

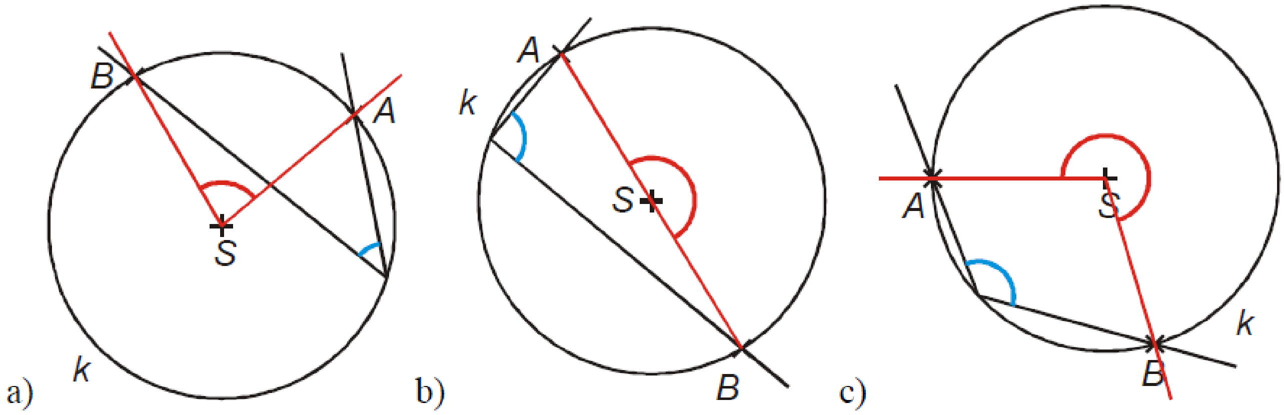


<u>Príklad 2:</u>

K zobrazeným obvodovým uhlom doplniť stredové uhly:



Riešenie:



Príklad 3:

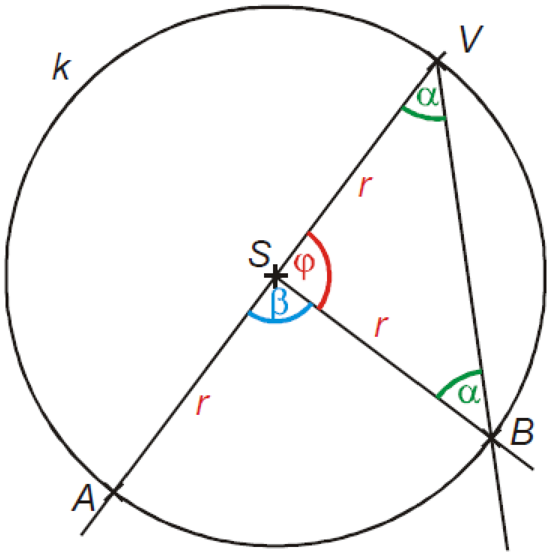
Každý žiak narysuje kružnicu k, vyznačí na nej dva navzájom rôzne body A, B a dvojicu stredový a obvodový uhol pre jeden z oblúkov, ktorý body A, B na kružnici vymedzia.
Potom určia zmeraním veľkosť oboch vyznačených uhlov a nájdu vzťah medzi nimi.

Záver: Zdá sa, že stredový uhol je dvakrát väčší než príslušný uhol obvodový.

Tvrdenie: Veľkosť stredového uhla sa rovná ***dvojnásobku*** veľkosti obvodového uhla prislúchajúceho k tomu istému oblúku.

Dôkaz:

1. stred kružnice leží na jednom z ramien obvodového uhlu *AVB*:

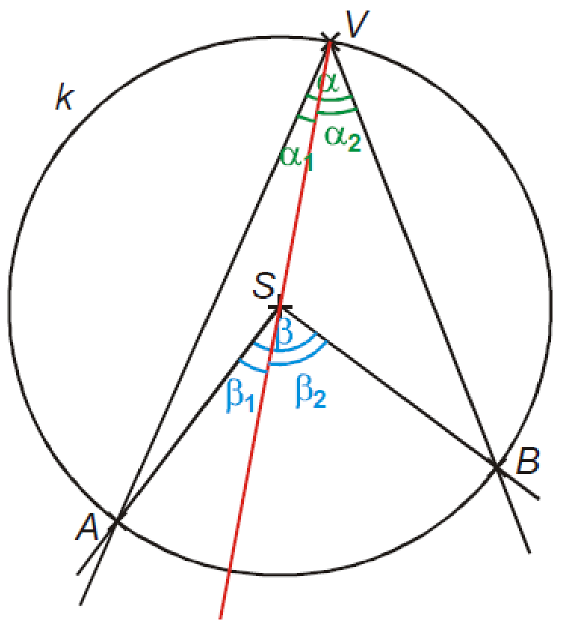


Δ SBV je rovnoramenný,
t.j. uhly SVB a VBS sú zhodné,
t.j. pre uhol φ platí: $\varphi = 180° - 2\alpha$.

Uhol ASV je priamy,
t.j. platí: $\beta = 180° - \varphi = 180° - (180° - 2\alpha) = 2\alpha$

Záver: $\beta = 2\alpha$

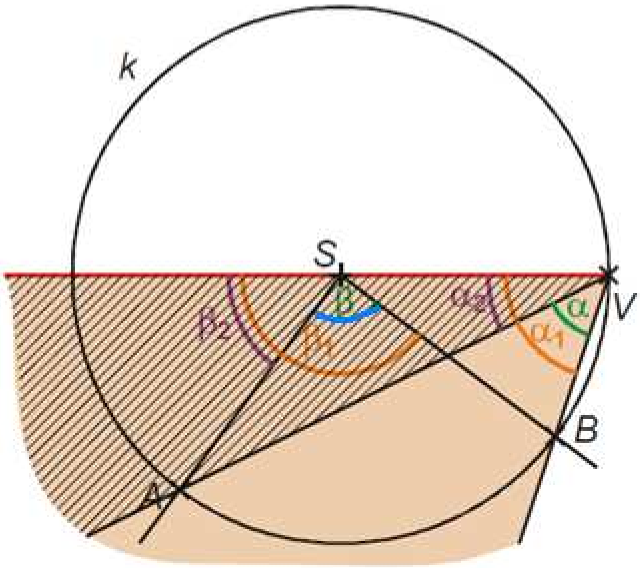
2. stred kružnice leží vnútri obvodového uhlu *AVB*:



Polpriamka VS rozdelí oba uhly na 2 časti a nakoľko stred kružnice S leží na spoločnom ramene VS oboch vzniknutých obvodových uhlov, na základe dôkazu 1 platí:
$\beta_1 = 2\alpha_1 \ \wedge \ \beta_2 = 2\alpha_2 \ \Rightarrow$
$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$

Záver: $\beta = 2\alpha$

3. stred kružnice leží vo vonkajšej časti obvodového uhlu *AVB*:



Polpriamka VS vytvorí v obrázku ďalšie dve dvojice stredových a obvodových uhlov, pričom stred kružnice S leží na spoločnom ramene VS oboch vzniknutých obvodových uhlov, na základe dôkazu 1 platí:

$\beta_1 = 2\alpha_1 \;\wedge\; \beta_2 = 2\alpha_2 \;\Rightarrow$

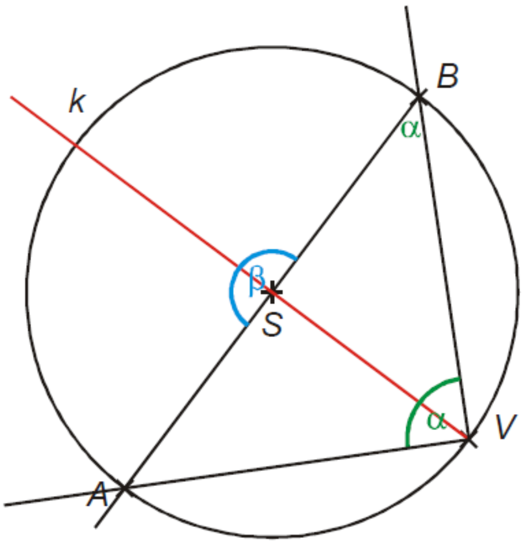
$\beta = \beta_1 - \beta_2 = 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 - \alpha_2) = 2\alpha$

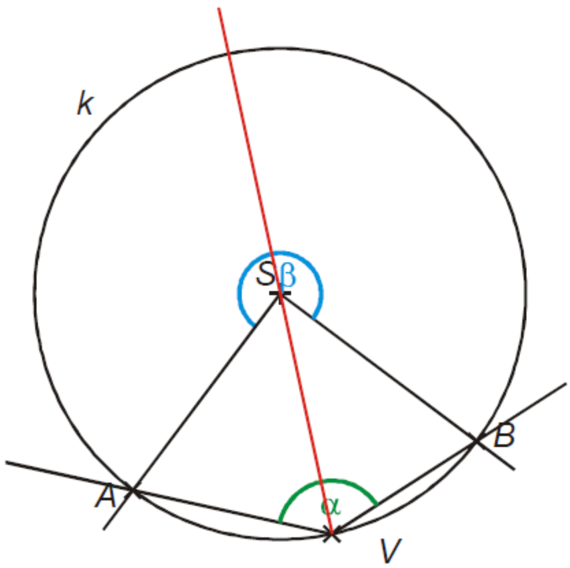
Záver: $\boldsymbol{\beta = 2\alpha}$

<u>Príklad 4:</u>

Návrh dôkazu vety o obvodovom a stredovom uhle pre väčší oblúk a polkružnicu.

V oboch prípadoch môžeme postupovať rovnako ako v kroku 2. pri dôkaze pre menší oblúk.





Dôsledky vety o obvodovom a stredovom uhle:

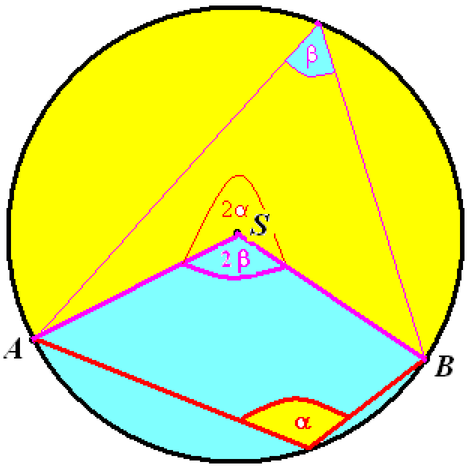
- ***Všetky obvodové*** uhly prislúchajúce ***tomu istému oblúku*** sú ***zhodné***.
- ***Obvodový*** uhol prislúchajúci ***menšiemu oblúku*** je ***ostrý***.
- ***Obvodový*** uhol prislúchajúci ***väčšiemu oblúku*** je ***tupý***.
- ***Obvodový*** uhol prislúchajúci k ***polkružnici*** je ***pravý*** ~ **Tálesova veta:**

Všetky uhly nad priemerom kružnice sú pravé.

Príklad 5:

Kružnica je rozdelená na dva oblúky tak, že veľkosť obvodového uhla prislúchajúceho k väčšiemu oblúku sa rovná veľkosti stredového uhla prislúchajúceho k menšiemu oblúku.
Určte veľkosti obvodových uhlov prislúchajúcich k obom oblúkom.
Riešenie:
Nech pre väčší oblúk platí: obvodový uhol α , stredový uhol 2α ,
pre menší oblúk platí: obvodový uhol β , stredový uhol 2β .
Potom platí: $\alpha = 2\beta$.
Nakoľko oba stredové uhly sa rovnajú plnému uhlu, platí: $2\alpha + 2\beta = 360°$, t.j.

$2\alpha + 2\beta = 2(2\beta) + 2\beta = 360°$ ..... $6\beta = 360°$ ..... $\beta = 60° \Rightarrow \alpha = 120°$

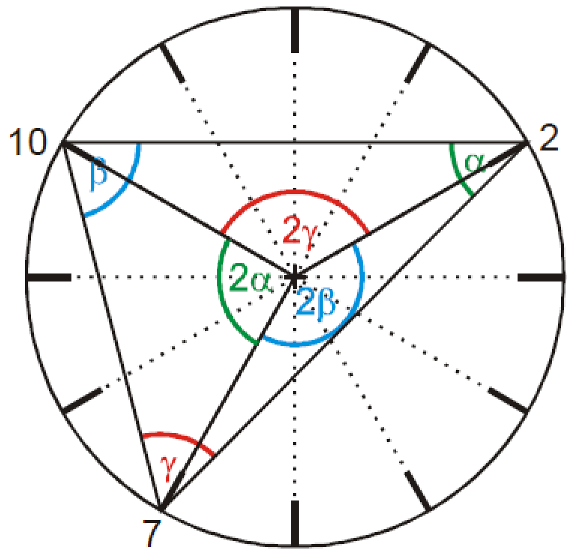


Príklad 6:

Vypočítajte veľkosti vnútorných uhlov v trojuholníku, ktorého vrcholmi sú body vyznačujúce čísla 2, 7, 10 na kruhovom ciferníku hodín.

Riešenie:

Stačí si uvedomiť, že všetky vyznačené uhly sú uhly obvodové, ktorých veľkosť ľahko určíme prostredníctvom k ním prislúchajúcich uhlov stredových.



Veľkosť stredového uhla prislúchajúceho oblúku medzi „dvoma hodinami“ je

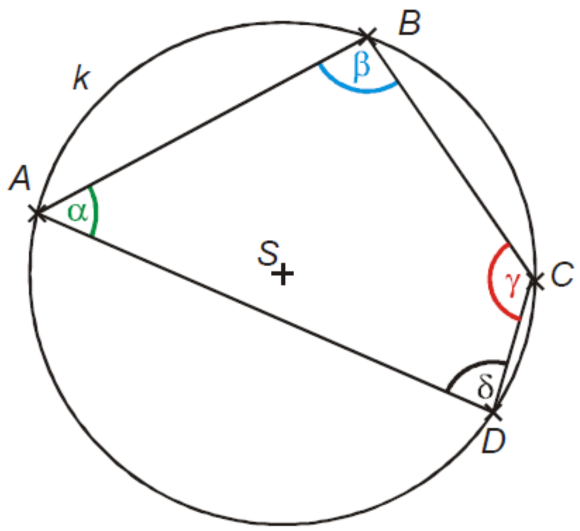
$$\frac{360°}{12} = 30°.$$

$2\alpha \sim 3$ dieliky $\Rightarrow 2\alpha = 3.30° = 90° \Rightarrow$ $\boldsymbol{\alpha = 45°}$
$2\beta \sim 5$ dielikov $\Rightarrow 2\beta = 5.30° = 150° \Rightarrow$ $\beta = 75°$
$2\gamma \sim 4$ dieliky $\Rightarrow 2\gamma = 4.30° = 120° \Rightarrow$ $\boldsymbol{\gamma = 60°}$

Príklad 7:

V ***tetivovom štvoruholníku ABCD*** (vrcholy ležia na kružnici ~ každá strana štvoruholníka je tetivou kružnice) platí: $\boldsymbol{\alpha = 52°}$, $\boldsymbol{\beta = 96°}$.

Určte veľkosti zvyšných vnútorných uhlov tohto štvoruholníka.



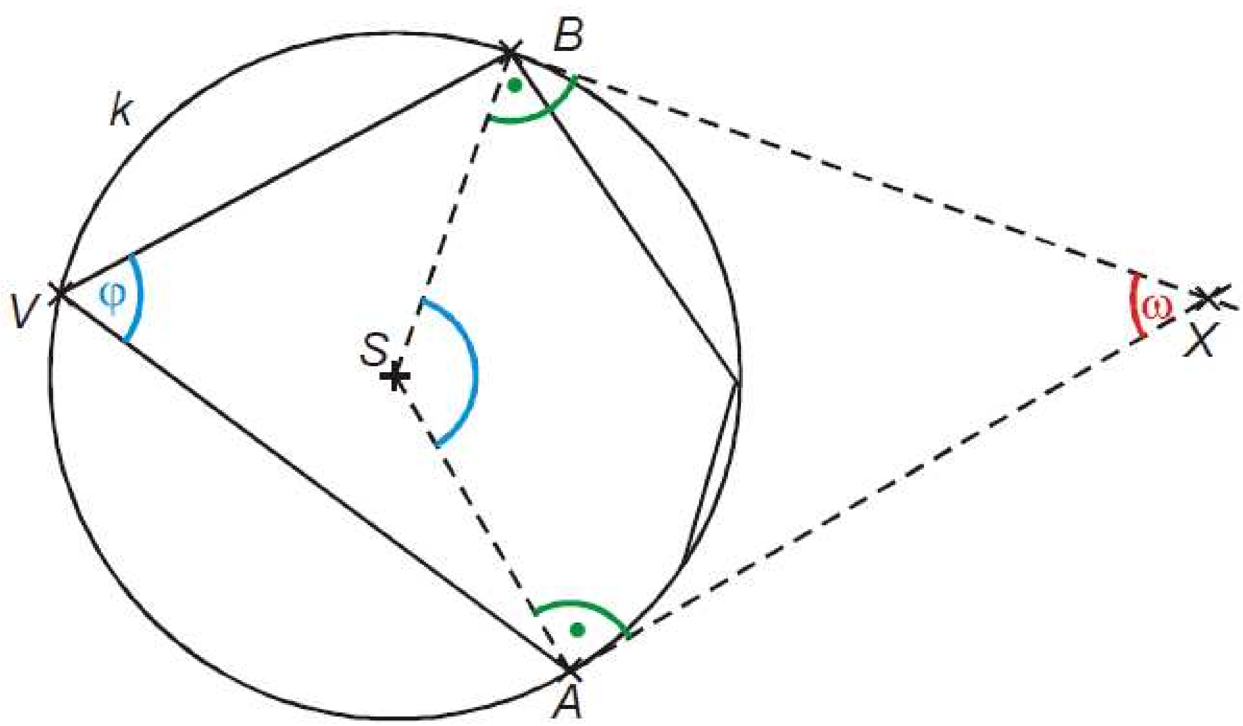
Uhol α je ***obvodový*** uhol k ***menšiemu oblúku BD***,
uhol γ je ***obvodový*** uhol k ***väčšiemu oblúku BD***,
preto $\alpha + \gamma$ **= 1/2.360° = 180°** $\Rightarrow$
$\gamma = 180° - \alpha = 180° - 52° =$ **128°**

Podobne pre uhly $\boldsymbol{\beta, \delta}$: $\boldsymbol{\delta = 84°}$

Príklad 8:

AB je ***menší*** oblúk kružnice k, ktorému prislúcha ***obvodový*** uhol 65° . V bodoch *A*, *B* sú zostrojené ***dotyčnice*** kružnice k a bod *X* je ich ***priesečník***.

Vypočítajte veľkosť uhla AXB.



<u>Riešenie:</u>

Hľadaný uhol *AXB* je jedným z vnútorných uhlov ***štvoruholníka ASBX***.

Pre uhly ***štvoruholníka ASBX*** platí:

- uhly *ASX* a *SBX* sú pravé (dotyčnica je kolmá na polomer)
- uhol *ASB* je ***stredový*** uhol prislúchajúci k obvodovému uhlu ***AVB*** $\Rightarrow |\sphericalangle ASB| = 2\varphi =$ **130°**

$\boldsymbol{\omega} = 360° - 2 \cdot 90° - 130° =$ **50°**

Uhol *AXB* má veľkosť **50°** .

Konštrukcia Množiny "G"

Nech A, B sú dva rôzne body roviny ρ. Množina "G" je množina ***všetkých bodov X roviny*** ρ, pre ktoré platí, že veľkosť uhla AXB je α: **G = { X ∈ E^2; |∢AXB| = α}**

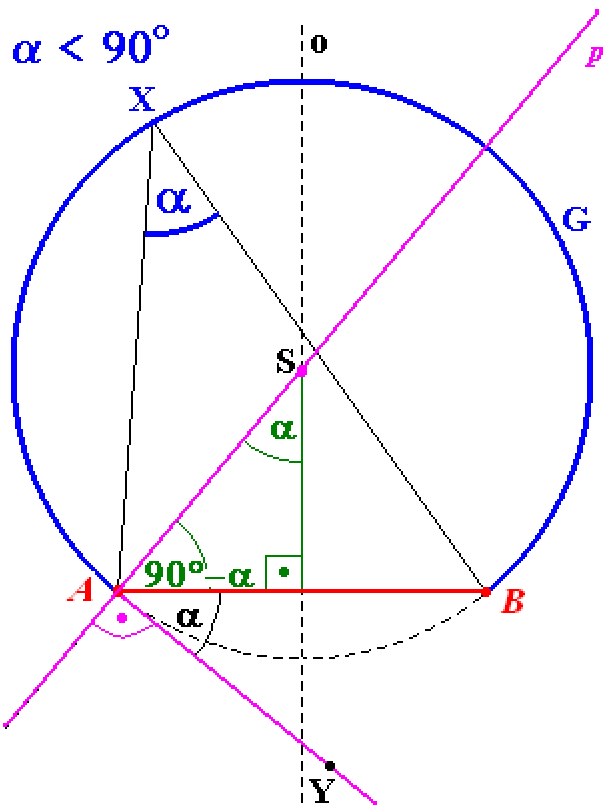
Rozbor:

△ ASB
|SA| = |SB| ⟶S ∈os AB

BAX; | ∢BAY| = α
* S ∈p; p ⊥ AY; A ∈ p
* S ∈o; o - os AB
* S ∈o ∩ p

Postup konštrukcie:

1. **AB**
2. **os** AB = o
3. **∢BAY**; |∢ BAY| = α
4. **p**; p ⊥ AY; A ∈p
5. **S** ∈ o ∩ p
6. **k**; k(S; r = |AS| = |AB|)
7. **oblúk** nad AB = G
8. dokončiť aj oblúk „pod úsečkou AB“



Úlohy – súhrn:

1. Dana je úsečka AB. Zostrojte množinu M všetkých bodov X v rovine: $|XA| = |XB|$
2. Daná je úsečka AB. Zostrojte množinu M, všetkých takých bodov X, pre ktoré platí, že uhol AXB je zhodný s pravým!
3. Určte množinu všetkých bodov X roviny, z ktorých každý ma od priamky p vzdialenosť $d = 3cm$.
4. Daná je priamka p. Zostrojte množinu stredov všetkých kružníc, ktoré sa dotýkajú priamky p a majú polomer r.
5. Daná je kružnica k(S, r). Zostrojte množinu všetkých stredov kružníc, ktoré majú daný polomer w a dotýkajú sa kružnice k:

   a) $w < r$ b) $w > r$
6. Dané sú body A,B. Nech Bod C je vrcholom ľubovoľného pravouhlého trojuholníka s preponou AB. Určte množinu ťažísk týchto trojuholníkov.
7. Daná je kružnica k(C, 3 cm) a taká priamka p , že /Cp/ = 1 cm. Zostrojte všetky kružnice s polomerom $r = 1$ cm, ktoré sa dotýkajú priamky p a kružnice k.
8. Daná je úsečka AB. Zostrojte množinu bodov, z ktorých vidieť úsečku AB pod uhlom:
9. a) 40° b) 90° c) 130°
10. Dané sú dve priamky p, q. Nakreslite $\{X \in \rho,\ |Xp| = |Xq|\}$.

    Uvažujte : a) p,q sú rovnobežky b) p,q sú rôznobežky
11. Úsečka AB má dĺžku 6 cm. Narysujte množiny bodov X daných vlastností v rovine ρ :

    a) $M_1 = \{X \in \rho,\ |\angle ABX| = 90^o\}$

    b) $M_2 = \{X \in \rho,\ |\angle AXB| = 90^o\}$

    c) $M_3 = \{X \in \rho,\ |\angle ABX| = 60^o\}$

    d) $M_4 = \{X \in \rho,\ |\angle AXB| = 60^o\}$

    e) $M_5 = \{X \in \rho,\ |\angle AXB| = 150^o\}$

    f) $M_6 = \{X \in \rho,\ |\angle AXB| \geq 45^o\}$

    g) $M_7 = \{X \in \rho,\ |\angle AXB| < 120^o\}$

    h) $M_8 = \{X \in \rho,\ 135^o \geq |\angle AXB| \geq 45^o\}$
12. Úsečka AB má dĺžku 6 cm. Narysujte množiny bodov daných vlastností v rovine ρ :

    a) $M_1 = \{X \in \rho,\ |AX| = 2 \text{ cm}\}$

    b) $M_2 = \{X \in \rho,\ |AX| \leq 4 \text{ cm} \wedge |BX| \geq 4 \text{ cm}\}$

    c) $M_3 = \{X \in \rho,\ |AX| = |BX|\}$

    d) $M_3 = \{X \in \rho,\ |AX| \leq |BX|\}$

13. Daná je úsečka AB. Určte množinu všetkých bodov X, ktorých vzdialenosť od priamky AB je rovná dĺžke úsečky AB a z ktorých je vidieť úsečku AB pod uhlom 45^o.