

OPAKOVANIE PRAVDEPODOBNOSTI (TEÓRIA A RIEŠENÉ ÚLOHY)

PRIKLADY.EU

1. Definujte a charakterizujte pravdepodobnosť.

a) Klasická definícia pravdepodobnosti

Nech náhodný pokus spĺňa predpoklady

- počet všetkých výsledkov je konečný
- všetky výsledky sú rovnako možné
- žiadne dva výsledky nemôžu nastať súčasne

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Pravdepodobnosť javu A je číslo $\frac{m}{n}$, kde n je počet všetkých možných výsledkov náhodného pokusu a m je počet všetkých priaznivých výsledkov, t.j. výsledkov, pri ktorých nastane jav A.

Platí: $0 \leq P(A) \leq 1$

Pravdepodobnosť nemožného javu: $P(A) = 0$

Pravdepodobnosť istého javu: $P(A) = 1$

b) Pravdepodobnosť nezávislých javov:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

c) Pravdepodobnosť nezlučiteľných javov (nemajú prienik):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

d) Pravdepodobnosť zlučiteľných javov (majú prienik):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

e) Binomické rozdelenie pravdepodobnosti (Bernoulliho schéma):

Nech A je jav s pravdepodobnosťou P. Potom pravdepodobnosť, že pri n-násobnom opakovaní pokusu, jav A nastane práve k-krát je číslo:

$$P(k, n) = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$$

f) Geometrická definícia pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť javu A, že náhodne zvolený bod geometrického útvaru Ω patrí do geometrického útvaru A; $A \subset \Omega$ je číslo $P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$, kde m je geometrická miera (dĺžka, obsah, objem) daného geometrického útvaru.

2. Z osemnástich lístkov očíslovaných 1 - 18 vytiahneme náhodne jeden lístok. Aká je pravdepodobnosť, že na vytiahnutom lístku bude:

- a) párne číslo
- b) číslo deliteľné 3
- c) prvočíslo
- d) deliteľné 6

Riešenie:

$$a) n = 18, m = 9, \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$$

$$P(A) = \frac{9}{18} = 0,5 = 50\%$$

$$b) n = 18, m = 6, \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$$

$$P(A) = \frac{6}{18} = 0,33 = 33\%$$

$$c) n = 18, m = 7, \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

$$P(A) = \frac{7}{18} = 0,389 = 38,9\%$$

$$d) n = 18, m = 3, \{6, 12, 18\}$$

$$P(A) = \frac{3}{18} = 0,166 = 16,6\%$$

3. Aká je pravdepodobnosť že pri hode dvoma kockami (červenej a modrej) padne:

- a) súčet 8
- b) súčet, ktorý je deliteľný piatimi
- c) súčet, ktorý bude párny

Riešenie:

$$a) n = V^*(2,6) = 6^2 = 36, m = 5, \{[2,6][6,2][3,5][5,3][4,4]\}$$

$$P(A) = \frac{5}{36} = 0,139 = 13,9\%$$

$$b) n = 36, m = 7, \{[1,4][4,1][3,2][2,3][5,5][4,6][6,4]\}$$

$$P(A) = \frac{7}{36} = 0,194 = 19,4\%$$

$$c) n = 36, m = 18, \{[1,5][5,1] \dots [4,4][5,5][6,6]\}$$

$$P(A) = \frac{18}{36} = 0,5 = 50\%$$

4. Hazardný hráč hádzuci tromi kockami, položil G. Galileiovi otázku : „Mám stavať na súčet 11 alebo súčet 12?“ Čo mu Galilei odpovedal?

Riešenie:

a) Súčet 11

$$n = V^*(3,6) = 6^3 = 216$$

$$[6,4,1] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$[6,3,2] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$[4,5,2] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$[5,5,1] \dots P_{2,1}^*(3) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$[3,3,5] \dots P_{2,1}^*(3) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$m = 27, \quad [4,4,3] \dots P_{2,1}^*(3) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$P(A) = \frac{27}{216} = 0,125 = 12,5\%$$

b) Súčet 12

$$n = V^*(3,6) = 6^3 = 216$$

$$[6,5,1] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$[6,4,2] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$[5,4,3] \dots P(3) = 3! = 6$$

$$m = 25, \quad [3,3,6] \dots P_{2,1}^*(3) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$[5,5,2] \dots P_{2,1}^*(3) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$$[4,4,4] \dots P_3^*(3) = \frac{3!}{3!} = 1$$

$$P(B) = \frac{25}{216} = 0,116 = 11,6\%$$

G. Galilei doporučil vsadiť na súčet 11, lebo $P(11) > P(12)$.

6. V meste sú štyri križovatky so svetelnými semaforami. Každý z nich uvoľňuje alebo uzatvára dopravu s rovnakou pravdepodobnosťou 0,5. Aká je pravdepodobnosť, že auto:

- prejde prvou križovatkou bez zdržania
- prejde prvými dvomi križovatkami bez zdržania
- prejde všetkými štyrmi križovatkami bez zdržania

Riešenie:

$$a) P(A) = 0,5 = 50\%$$

$$b) P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25 = 25\%$$

$$c) P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A)P(B)P(C)P(D)$$

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,0625 = 6,25\%$$

7. V 32 hracích kartách sú 4 esá a 12 figúr (4 kráľi, 4 horníci a 4 dolníci). Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vytiahnutá jedna karta bude eso alebo figúra?

Riešenie:

Ide o pravdepodobnosť nezlučiteľných javov

$$A - \text{vytiahnutá karta je eso} \quad P(A) = \frac{4}{32}$$

$$B - \text{vytiahnutá karta je figúra} \quad P(B) = \frac{12}{32}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = \frac{4}{32} + \frac{12}{32}$$

$$P(A \cup B) = \frac{16}{32} = 0,5 = 50\%$$

Pravdepodobnosť, že vytiahnutá karta bude eso alebo figúra je 50%.

8. Otcovia sú šťastní, keď sa im narodí syn. Z dlhodobých štatistík je známe, že pravdepodobnosť narodenia chlapca je $P(A) = 0,51$.

Otec si naplánoval 5 detí. Aká je pravdepodobnosť, že z týchto detí budú práve 3 synovia.

Riešenie:

Ide o binomické rozdelenie pravdepodobnosti.

$$n = 5, k = 3, P = 0,51$$

$$P(k, n) = \binom{n}{k} P^k (1 - P)^{n-k}$$

$$P(3, 5) = \binom{5}{3} 0,51^3 \cdot 0,49^2$$

$$P(3, 5) = 10 \cdot 0,1326 \cdot 0,2401$$

$$P(3, 5) = 0,318 = 31,8\%$$

Otcovi sa pranie splní s pravdepodobnosťou 31,8 %.

9. V šiestnástich fľašiach sú minerálky. Vieme, že v 10 fľašiach je Slatina a v 6 fľašiach je Baldovská. Aká je pravdepodobnosť, že medzi 4 náhodne vybratými fľašami sú 2 Slatiny a 2 Baldovské?

Riešenie:

$N = 16$ (počet všetkých fliaš)

$V = 10$ (počet fliaš Slatiny)

$N - V = 6$ (počet fliaš Baldovskej)

$n = 4$ (počet náhodne vybratých fliaš)

$k = 2$ (vybraté Slatiny)

$n - k = 2$ (vybraté Baldovské)

$$P(A) = \frac{\binom{V}{k} \binom{N-V}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2} \binom{16-10}{4-2}}{\binom{16}{4}} = \frac{\binom{10}{2} \binom{6}{2}}{\binom{16}{4}} = \frac{45 \cdot 15}{1820} = \frac{675}{1820} = 0,37 = 37\%$$

Predpoklad bude splnený s pravdepodobnosťou $P(A) = 37\%$.

10. V hazardnej číselnej hre sa losuje 6 čísiel zo 49 čísiel. Aká je pravdepodobnosť získať:

a) štvrté poradie

b) tretie poradie

c) druhé poradie

d) prvé poradie

SKRY RIEŠENIESKRY VŠETKY RIEŠENIA

Riešenie:

a) Štvrté poradie (uhádnuť 3 čísla zo 6 vylosovaných)

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3} \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = 0,01765 = 1,765\%$$

b) Tretie poradie (uhádnuť 4 čísla zo 6 vylosovaných)

$$P(B) = \frac{\binom{6}{4} \binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = 0,0009686 = 0,09686\%$$

c) Druhé poradie (uhádnuť 5 čísiel zo 6 vylosovaných)

$$P(C) = \frac{\binom{6}{5} \binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = 0,000018449 = 0,0018449\%$$

d) Prvé poradie (uhádnuť 6 čísiel zo 6 vylosovaných)

$$P(D) = \frac{\binom{6}{6} \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = 0,0000000715 = 0,00000715\%$$

