FAKULTA PRÍRODNÝCH VIED
UNIVERZITA KONŠTANTÍNA FILOZOFA

DIDAKTICKÉ HRY A APLIKAČNÉ ÚLOHY VO VÝUČBE MATEMATIKY PRE 2. STUPEŇ ZŠ

zborník príspevkov z vedeckého seminára
organizovaného Katedrou matematiky
dňa 30. apríla 2008

NITRA 2008

Názov: Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. stupeň ZŠ

Zostavovatelia: prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
RNDr. Dušan Vallo, PhD

Recenzenti: doc. RNDr. Anna Tirpáková, CSc.
PaedDr. Tomáš Pechočiak, PhD.

Technická spolupráca: Vladimír Ondrejka

Edícia : Prírodovedec č. 311

Vydané s finančnou podporou grantu KEGA 3/4038/06 *„Učme matematiku na 2. stupni ZŠ zaujímavejšie, učme matematiku aplikovať"*.

Schválené: Vedením FPV UKF v Nitre dňa 16.6. 2008

Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-8094-346-2

OBSAH

ÚVOD

Veľa stanovísk bolo vyslovených o tom, či pre zvládnutie základov matematiky jedinec potrebuje zvláštne schopnosti alebo nie. Preto zastavme sa na okamih pri tejto otázke a venujme sa matematickým schopnostiam.

Pod matematickou schopnosťou sa rozumie „*schopnosť riešiť matematické úlohy, aké sa dávajú v škole*“, resp. „*schopnosť riešiť matematické testy a úlohy (a nielen také, aké sa dávajú v škole*)“; resp. „*vlastnosti, ktoré sú podmienkou úspešného štádia a uplatňovania matematiky*“ (Říčan, 1964).

Takto by sme mohli uvádzať ďalšie názory na matematické schopnosti. Uvedieme ešte jeden názov, ktorý rozlišuje dva typy matematických schopností:

a) schopnosť poznať alebo pamätať si vzorce, pravidlá a dôkazy
b) schopnosť uplatňovať isté postupy pri riešení úloh.

Nechceme vyčerpávajúco otázku matematických schopností rozvíjať, ide nám o to, aby sme si uvedomili, že od schopností závisí myslenie a nám ide o matematické myslenie, ktoré chceme rozvíjať, a preto pripomenieme, že každú „*intelektovú činnosť možno plne charakterizovať ako organizované riešenie úloh, opierajúce sa o logický program navzájom spätných operácií. Uskutočňuje sa s istým cieľom, sleduje istú otázku, rieši istú úlohu, na ktorú nie je možné odpovedať bezprostredne. Postupuje sa tu teda za istým cieľom, ktorý predstavuje determinujúcu tendenciu celého myšlienkového procesu a spočíva v odpovedi na otázku, na ktorú možno odpovedať len postupným riešením a vyriešením úlohy. Vyžaduje to najprv presnú orientáciu v podmienkach, ktoré sú dané ako východisko. Ďalej treba analyzovať dané a získané informácie, rozlíšiť, ktoré údaje sú známe, a ktoré neznáme, a všetko to uviesť do vzájomných vzťahov. To potom tvorí východisko utvorenia všeobecnej schémy (stratégie) riešenia úlohy a výberu adekvátnych postupov, ktoré majú s istou pravdepodobnosťou predpoklady viesť k dosiahnutiu cieľa, t.j. k vyriešeniu úlohy. Stratégia tu spočíva v uplatnení systému čiastkových operácií, ktoré vo väčšej alebo menšej miere zodpovedajú objektívnemu postupu riešenia úlohy, a ktoré majú podobu dlhej, postupnej reťaze úvah“.*

Často toto zdĺhavé reťazenie úvah odrádza mnohých učiacich sa matematiku, a tým ich odrádza aj od matematiky. Preto kolektív autorov tejto publikácie svojimi príspevkami sa snaží získať čitateľa zábavnou, zaujímavou i hravou činnosťou pri riešení úvah vedúcich k riešeniu matematických problémov.

Takáto činnosť môže motivovať čitateľa venovať sa matematickým úlohám, rozvíja myslenie (matematické myslenie) a úspešnosť v riešení môže spôsobovať radosť zo zvládnutia riešených problémov.

Prajeme čitateľom veľa úspechov.

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

HĽADAJME VO VYUČOVANÍ MATEMATIKY KRÁSU, ZÁBAVU A RADOSŤ

ONDREJ ŠEDIVÝ

ABSTRACT. The article presents some examples from nature displaying mathematical shapes as patterns and beauty. In the next part, certain reasons, explaining why mathematics is for some part of population uninteresting and difficult at the same time, are stated. The third part provides possibilities for teaching mathematics in an interesting and amusing way. Didactic games used within teaching mathematics serve this purpose very well.

1 Príroda a matematika[1)]

Každú noc sa na oblohe pohybujú hviezdy po kružniciach. Žiadne dve snehové vločky nie sú také isté, ale všetky sú šesťuholníkovo symetrické. Cez oceán putujú zložité sledy vĺn, obdobné sledy piesočných dún putujú púšťou. Z oblakov padajú okrúhle kvapky vody.

Žijeme vo vesmíre vzorov.

Na rozpoznávanie, klasifikáciu a využívanie vzorov vyvinula ľudská myseľ a kultúra formálny systém uvažovania, ktorý nazývame matematika. Použitím matematiky na usporadúvanie a systematizovanie našich myšlienok o vzoroch sme odkryli dôležité tajomstvo: prírodné vzory tu sú nielen preto, aby sme ich obdivovali; sú to životne dôležité kľúče k pravidlám, ktoré riadia prírodné procesy.

Pravidelný nočný pohyb hviezd je kľúčom, tentoraz k tomu, že Zem rotuje. Vlny a duny sú kľúčom k pravidlám, ktoré riadia prúdenie vody, piesku a vzduchu.

V kľúčoch k prírode je veľa krásneho a toto všetko si uvedomujeme aj bez akejkoľvek matematickej prípravy.

Krása je aj v matematických príbehoch, ktoré z týchto kľúčov vychádzajú a odvodzujú zákony a pravidlá nachádzajúce sa v ich pozadí. Je to krása iného druhu, týkajúca sa skôr myšlienok ako vecí.

Stále sa učíme spoznávať nové druhy vzorov. Len v priebehu posledných štyridsiatich rokov, ktoré sú dnes známe ako *fraktály a chaos.*

Fraktály sú geometrické útvary, ktoré svoju štruktúru opakujú na akýchkoľvek malých rozmeroch. Chaos je druh zdanlivej náhodnosti, ktorej pôvod je čisto deterministický. Príroda *„vedela"* o týchto vzoroch už pred miliardami rokov, pretože oblaky sú fraktály a počasie je chaotické. Ľudia však potrebovali istý čas, kým si ich uvedomili.

Najjednoduchšie matematické objekty sú čísla a najjednoduchšie prírodné vzory sú čísla. Fázy mesiaca absolvujú komplexný cyklus od *novu po spln* a zase späť každých dvadsaťosem dní. Rok trvá – približne – tristošesťdesiatpäť dní. Človek má dve nohy, mačka štyri, hmyz šesť a pavúk osem. Hviezdica má päť (alebo desať, jedenásť, ba dokonca sedemnásť – v závislosti od druhu) ramien. Normálne má ďatelina tri lístky: povera, že štvorlístok prináša šťastie, odráža hlboko zakorenené presvedčenie, že výnimka zo vzoru je niečo mimoriadne. Skutočne nezvyčajný vzor nachádzame pri okvetných lístkoch. Takmer pri všetkých kvetoch sa ich počet dá vyjadriť niektorým z čísel nachádzajúcich sa v zvláštnej postupnosti: 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89. Napríklad ľalie majú tri okvetné lístky, iskerníky päť, mnohé stračie nôžky osem, nechtík trinásť, astry dvadsaťjeden a väčšina sedmokrások tridsaťštyri, päťdesiatpäť alebo osemdesiatdeväť. Nijaké iné počty sa tak často nevyskytujú. Pre tieto čísla existuje určitý vzor. Tento vzor je: každé číslo postupnosti dostaneme sčítaním dvoch predchádzajúcich (3+5=8, 5+8=13,…,34+55=89). Tie isté čísla môžeme nájsť pri špirálovitých vzoroch semien v kvete slnečnice.

Navyše, okrem číselných vzorov existujú aj vzory geometrické. Až donedávna boli hlavné tvary priťahujúce matematikov veľmi jednoduché: trojuholníky, štvorce, päťuholníky, šesťuholníky, kružnice, elipsy, špirály, kocky, gule, kužele a podobne. Každý z týchto tvarov môžeme nájsť v prírode, hoci niektoré sú omnoho obvyklejšie alebo zjavnejšie než iné. Napríklad dúha je súbor kružníc – pre každú farbu jedna. Kružnice môžeme vidieť tiež v kruhoch na vode, v ľudskom oku a na motýlích krídlach.

---

[1] Spracované podľa knižky: Stewart, I.: Čísla prírody. Neskutočná skutočnosť matematickej predstavivosti. Majstri vied. Archa, Bratislava 1996, ISBN 80–7115–117–3

Keď hovoríme o kruhoch na vode, tečúca tekutina poskytuje nevyčerpateľný zdroj prírodných vzorov. Sú tu vlny mnohých rozličných druhov – ženúce sa na pobrežie v rovnobežných radoch, rozbiehajúce sa do tvaru $\vee$ za plávajúcou loďou, šíriace sa od epicentra podmorského zemetrasenia.. Väčšinou sú vlny spoločenské tvary (takmer vždy ich je viac), ale niektoré – ako napríklad prílivová vlna, ktorá sa ženie hore riekou, keď sa energia vzrastajúceho prílivu snaží vtesnať do úzkeho riečiska – sú samotárske. Nájdeme tu krúžiace špirálovité víry aj drobné víry. Podobné vzory sú aj v atmosfére – najpôsobivejším je obrovská špirála hurikánu, ktorú vidí astronaut z obežnej dráhy.

Vzory z vĺn existujú aj na súši. Najpútavejšími matematickými krajinami na Zemi sú veľké oceány piesku Arabskej a Saharskej púšte. Piesočné duny vznikajú dokonca aj vtedy, keď fúka stabilný vietor jedným smerom. Najjednoduchším vzorom sú piesočné duny, ktoré sa práve tak, ako oceánske vlny – usporadúvajú do rovnobežných priamych radov pod pravým uhlom k smeru prevládajúceho vetra.

Záľuba prírody v pruhoch a škvrnách sa s tigrami, leopardmi, zebrami a žirafami rozšírila aj na ostatnú ríšu zvierat. Tvary a vzory zvierat a rastlín sú zasľúbenými loviskami pre matematicky zmýšľajúcich ľudí. Prečo je napríklad väčšina ulít špirálovitá? Prečo sú hviezdice vybavené symetriou skupín ramien? Prečo je mnoho vírusov pravidelného geometrického tvaru, pričom najčastejším je dvadsaťsten – pravidelné teleso tvorené dvadsiatimi rovnostrannými trojuholníkmi? Prečo je toľko zvierat zrkadlovo symetrických? Prečo je táto súmernosť tak často nedokonalá, strácajúca sa pri detailnejšom pohľade – ako poloha ľudského srdca alebo rozdiely medzi dvoma hemisférami ľudského mozgu? Prečo je väčšina z nás pravákov, ale nie sme nimi všetci?

Navyše okrem vzorov tvarov existujú aj vzory pohybu. Pri ľudskej chôdzi sa nohy dotýkajú zeme v pravidelnom rytme: ľavá – pravá – ľavá – pravá. Keď štvornohý tvor, napr. kôň, ide o zložitejší, ale rovnako rytmický vzor.

Túto všeobecnú rozšírenosť vzorov pri pohybe nájdeme rovnako pri lezení hmyzu, lete vtákov, pulzáciách medúzy, ako aj vo vlnitých pohyboch rýb, červov a hadov. Drobné baktérie sa poháňajú pomocou mikroskopických skrutkovitých bičíkov, otáčajúcich sa presne ako lodná skrutka.

Nakoniec je tu ešte iná kategória prírodných vzorov – tá, ktorá zaujala ľudskú predstavivosť len veľmi nedávno. Pozostáva zo vzorov, ktoré sme spoznali len teraz – vzorov, ktoré existujú tam, kde sme si mysleli, že všetko je len náhodné a beztvaré. Je to tvar oblaku. Je pravda, že meteorológovia delia oblaky do niekoľkých morfologických skupín – *cirus, stuatus, cumulus*, a tak ďalej. Sú to však veľmi všeobecné typy tvarov, nie rozpoznateľné geometrické tvary vhodného matematického druhu. Guľovité oblaky, oblaky v tvare kocky či dvadsaťstenné oblaky neuvidíte. Oblaky sú beztvaré, nejasné rozmazané chuchvalce. Pritom pre oblaky existuje jasný viditeľný vzor, druh symetrie, ktorý je úzko spojený s fyzikálnymi zákonitosťami ich vzniku. V podstate ide o toto: len z toho, že sa pozeráte na oblak, nemôžete povedať nič o jeho veľkosti. Veľký oblak videný zďaleka si môžete celkom pokojne zameniť s malým oblakom videným zblízka. Zaiste sa tvarom líšia, ale nie takým spôsobom, ktorý by systematicky závisel od veľkosti. Nová veda nepravidelnosti – fraktálna geometria – sa prudko rozvinula v priebehu posledných tridsiatich rokov.

Záverom tejto časti uveďme ešte raz úvahu:

Prečo má toľko kvetov po päť alebo osem lupienkov, ale len zriedkavo po šesť? Prečo má snehová vločka šesťuholníkovú symetriu? Prečo sú tigre pruhované a leopardy škvrnité?

Matematika je číry produkt nášho myslenia. A napriek tomu je to ten najlepší nástroj na poznávanie sveta. Od okamihu, keď sme sa na svet zahľadeli očami matematiky, objavili sme veľké tajomstvo: prírodné modely nás vedú k podstatným princípom, podľa ktorých funguje celý vesmír.

Môže to byť snehová vločka, ale aj z nej sa dá odvodiť atomická štruktúra ľadových kryštálov. Od husľovej struny vedie cez matematiku cesta k objavu rádioaktívnych vĺn. Matematika má úžasnú moc odkryť štruktúru aj tam, kde vládne zdanlivo len chaos: v oblakoch či v tajomnom rytme počasia.

2 Matematika a mladý človek

Prof. Anton Kotzig vo svojej knižke MATEMATIKA A SPOLOČNOSŤ uvádza:„*Matematika záhadná a tajomná, údiv a úctu, ba svojou zložitosťou až hrôzu vzbudzujúca, má závery veľmi zrejmé, presvedčivé, priezračné, jasné a až prekvapujúco jednoduché. Matematika väčšinou spôsobuje pri štúdiu ťažkosti, a predsa je veľmi rozšírená; matematika je mnohým cudzia reč, a predsa je to takmer výhradná rokovacia reč na medzivedných stretnutiach; má mnohé tváre, a predsa je jednotná; matematika, ktorá preniká do mnohých vied, predsa sa v iných vedách nestráca...*“

Naučiť sa rozumieť matematickej reči a naučiť sa ňou hovoriť je oveľa ťažšie, než sa naučiť ktorýkoľvek cudzí jazyk. Ak chceme dôjsť k správnemu výsledku v matematike, nesmieme zabudnúť ani jedno slovo, nesmieme stratiť istotu v používaní gramatických pravidiel. Naproti tomu matematická reč sa ľahšie osvojuje než cudzia reč, pretože má menšie nároky na „myslenie pamäťou“. Stačí si zapamätať niektoré pravidlá a slová a všetky ostatné sa dajú odvodiť z niekoľkých základných slov a pravidiel (axióm). Treba však pripomenúť, že osvojenie si matematiky vyžaduje disciplinované myslenie. A práve táto požiadavka spôsobuje mnohé ťažkosti pri učení sa matematiky.

To, čo dnes rozumieme pod matematikou, sa vyvíjalo dlhé obdobie vývoja spoločnosti. Ak by sme chceli podrobne popísať odpoveď na otázku „Ako sa vyvíjala matematika?, to by si vyžiadalo tisíce knižných strán (túto úlohu by jediný autor fyzicky nestačil ani v celoživotnom diele). V rozvoji matematiky, ako v celom procese poznania, možno rozoznať zásadné, kvalitatívne zmeny, ktoré sa prejavujú vo forme nových teórií. Tieto teórie prevratne prehlbujú a zovšeobecňujú doterajšie poznatky, v dôsledku čoho sa prevládajúce črty matematiky v jednotlivých obdobiach podstatne líšia. Na základe toho možno rozdeliť rozvoj matematiky na isté obdobia, etapy. Presné časové ohraničenie týchto etáp nie je možné, pretože k zmenám dochádza neraz iba postupne, ale rôznosť jednotlivých etáp je očividná.

Najčastejšie sa uvádzajú štyri hlavné etapy:

Prvá etapa: ***Vznik matematiky ako samostatnej teoretickej vedy.***

Vznikom „čistej“ matematiky v antickom Grécku s jej logickým systémom poučiek a ich dôkazov sa končí táto etapa asi v 5. storočí pred naším letopočtom. Je to najdlhšia etapa. Formovanie sa aritmetiky a geometrie, ktoré je bezprostredne viazané s praxou, trvá tisícročia.

Druhá etapa: ***Epocha elementárnej matematiky***, t. j. matematika stálych veličín, trvá vyše 2 000 rokov – od vzniku matematiky až do začiatku 17. storočia, keď vzniká „vyššia matematika“.

Tretia etapa: ***Budovanie a rozvoj analýzy*** (matematiky premenných veličín.) Táto prebieha až 17. až 18. storočí.

Štvrtá etapa: ***Súčasná matematika.***

Na utvorenie predstavy o rozsahu matematiky uveďme: výsledky prvej etapy a začiatky druhej etapy tvoria obsah učiva základnej školy a nižších tried strednej školy. Výsledky druhej etapy tvoria aspoň v hlavných črtách náplň učiva vo vyšších triedach dnešných stredných škôl.

Určitá časť našej mládeže prijíma matematické vedomosti, ktoré jej základná a stredná škola dáva, celkom trpne a bez záujmu. Je to škoda nielen pre týchto mladých ľudí, ale zrejme aj pre celú našu spoločnosť. Keď sa približuje termín odovzdania prihlášky na vysokú školu, počuť často: *„Na tú a tú vysokú školu nepôjdem, tam je mnoho matematiky!“*

Mladý človek, ktorý orientuje svoju budúcnosť z uvedeného hľadiska spozná o niekoľko rokov, že sa zmýlil. Veď matematika nie sú samoúčelné knižné múdrosti, vymyslené len pre trápenie žiakov, ani to nie je len suchopárne počítanie, v ktorom má úspech ten, kto si lepšie osvojil nejakú zbierku vzorčekov. Matematika je mohutný nástroj, ktorý nám uľahčuje prácu pri najrozličnejších činnostiach a v poslednom čase preniká aj do tých odvetví spoločnosti, v ktorých by sme ju predtým nikdy nehľadali. Na otázku, prečo sa vlastne niektorí ľudia tak veľmi boja matematiky, je odpoveď ťažká. Panuje mylný názor, že na úspešné zvládnutie matematiky je potrebné mimoriadne nadanie vrodené len niektorým „šťastlivcom“.

Prameňom ťažkostí pri štúdiu matematiky je aj zvláštny spôsob vyjadrovania, ktorý nazývame matematickým jazykom. Aby bolo vyjadrovanie stručné a jasné, zaviedli matematici rad symbolov a skratiek. Treba osobitne zdôrazniť, že v slovnom vyjadrení, ktoré sprevádza túto matematickú symboliku, je spravidla podstatné každé slovo.

Často môže vzniknúť vážne skomolenie a nedorozumenie, ak vynecháme z textu jediné slovo alebo ho nevhodne použijeme. To však znamená, že matematický text treba čítať oveľa pomalšie, než ako sme si azda privykli. Pri čítaní matematického textu musíme porozumieť každému slovu a každému použitému vzťahu. Chceme ukázať, že matematika môže poskytnúť zábavu, získať u mladého človeka kladný vzťah k učeniu sa matematike. Domnievame sa, že najvhodnejšia cesta k tomu bude ***„rekreačná matematika“***. Matematická hra, zábava alebo hádanka pomôžu na ceste k úspechu pri štúdiu matematiky.

3 Didaktické hry

Začnime výrokom Jana Amosa Komenského:

Začiatkom a koncom našej didaktiky nech je hľadať a nachádzať spôsob, podľa ktorého by učitelia menej učili, ale žiaci sa viacej naučili, aby bolo v školách menej zhonu, nechuti a márnej práce, no viac voľného času, potešenia a zaručeného úspechu.

Je viacero definícií didaktických hier. Uveďme túto definíciu:

Pod didaktickou hrou rozumieme činnosť žiakov a učiteľa, ktorá sleduje isté didaktické ciele. Žiaci si spravidla tieto ciele neuvedomujú. Motiváciou ich činnosti je radosť z jej vyznávania, súťaživosť, možnosť práce pre prospech tímu, sebarealizácia... Didaktická hra má pravidlá, ktoré organizujú činnosť žiakov. Táto činnosť, jej obsah a pravidlá didaktickej hry vedú k realizácii edukačných cieľov hry. Charakteristické pre didaktickú hru je vysoká angažovanosť a motivácia žiakov, potešenie z priebehu hravej činnosti.

Didaktické hry v matematike:

§ poskytujú žiakom reálny kontext, v rámci ktorého sa môžu plne angažovať, čo podporuje konštruktívne vyučovanie,
§ zvyšujú subjektívnu hodnotu matematických vedomostí pre žiakov, keďže tieto vedomosti sú potrebné na účasť v hre, ktorá je žiadanou aktivitou,
§ pomáhajú žiakom konštruovať matematické koncepty prostredníctvom manipulácie s objektmi v rámci hry, verbalizáciou ich činností, myšlienok a postojov,
§ vyžadujú, aby žiaci rešpektovali pravidlá hry, čo je prospešné pre uvedomenie si na pravidlách založenej disciplíny matematiky,
§ sú účinnejšie, ak sú konštruované na matematických ideách a pre hru je potrebné pochopenie istých matematických pojmoch alebo ovládanie istých matematických zručností,
§ podporujú žiakov, aby tvorivo budovali nové idey, ktoré potom musia obhajovať pred ostatnými hráčmi,
§ dávajú podnety na kontrolu a overenie matematických postupov ostatných hráčov, v rámci tohto overenia sa žiaci spoliehajú na vlastné overovanie správnosti týchto postupov namiesto spoliehania sa na tvrdenia vonkajšej autority (učiteľa, učebnice a pod.),
§ zlepšujú sebaúctu a sebavedomie žiakov, keďže náhodné elementy hry umožňujú každému žiakovi víťazstvo,
§ umožňujú učiteľovi sústrediť sa na hodnotenie pravdivého obrazu schopností žiakov, namiesto hodnotenia ich výsledkov v umelých podmienkach.

Zaradenie didaktickej hry do vyučovania zvyšuje záujem žiakov o aktívnu prácu na hodinách matematiky a o matematiku celkovo a všeobecne zlepšuje priebeh vyučovacích hodín. Súčasne hry prispievajú k integrácii vedomostí z rôznych oblastí učiva matematiky, ale aj rôznych vyučovacích predmetov.

Požiadavky na vhodnú integráciu didaktickej hry do vyučovania sú podľa **E. Krejčovej** a **M. Volfovej** (1994) nasledovné:

o Hra má byť pre žiakov lákavá a príťažlivá.
o Hra by mala odpovedať vekovým zvláštnostiam a individuálnym schopnostiam detí. Mladší žiaci obľubujú najmä hry naplnené prvkami tajomnosti a záhadnosti, slabší žiaci preferujú skupinové hry a nadaní a starší žiaci majú radi hry individuálne.
o Každá hra má mať jasné a zrozumiteľné pravidlá, ktoré sú starostlivo dodržiavané. Za eventuálne porušenie pravidiel musia byť stanovené sankcie (napr. trestné body). Pravidlá nie je vhodné bezúčelne meniť.
o Samozrejmosťou musí byť dobré organizačné a materiálne zabezpečenie hernej činnosti.
o Nevhodné je tiež príliš časté zavádzanie novej hry.
o Hru nikdy nezaraďujeme do vyučovania náhodne. Každá hra musí slúžiť istému didaktickému cieľu, ktorý chceme v rámci vyučovania predmetu matematika realizovať.

- Snažíme sa, aby hravá činnosť aktivizovala čo najviac žiakov, ideálne celú triedu. Každý žiak by mal možnosť byť v rámci hry úspešný, či už individuálne alebo ako časť tímu. Za účelom diferenciácie podľa schopností žiakov je vhodné pripraviť si menej náročné prípadne viac náročné varianty danej hry.
- Pri výbere didaktickej hry preferujeme tú, čo zamestnáva čo najviac zmyslov žiakov, trénuje ich najrozmanitejšie schopnosti a vedomosti.

Jednou z najväčších pozitívnych vlastností hry je skutočnosť, že hra je prirodzeným prostriedkom vzdelávania detí. Tiež dôležité je, že deti považujú hru za žiadúcu aktivitu a obľubujú ju. Hra má pre deti blízky kontext, a tak pomáha prekonávať niektoré prekážky v procese učenia sa matematiky žiakmi. Uveďme tieto prekážky podrobnejšie.

Ontogenetické prekážky sú spojené s vyspelosťou žiakov. Možnosti rozvoja istých vedomostí a zručností závisí na mentálnom veku žiaka, teda na stave rozvoja jeho kognitívnych schopností. (Kognitívne schopnosti sú podmienené rozvojom mozgu, vzorom myslenia, egom, intelektom ...) (Spagnolo, 1998).

Didaktické prekážky sú spôsobené výberom metód edukácie a spracovaním obsahu vyučovania. Príkladom je napríklad formálne vyučovanie miery prostredníctvom vzorcov bez ich skutočného pochopenia.

Epistemologické prekážky pochádzajú z podstaty vyučovaného pojmu. Napríklad, ako vo vývoji istého matematického pojmu v rámci histórie matematiky objavíme isté nekontinuity, resp. radikálne zmeny, je pravdepodobné, že žiaci pri budovaní tohto pojmu budú čeliť epistemologickým prekážkam.

Tento teoretický vstup k didaktickým hrám ukončíme citátom[2)]:

Z hľadiska základného atribútu metódy môžeme hru chápať ako vyučovaciu metódu. Okrem toho, že vyvoláva aktivitu, plní aj základné funkcie metódy, a to vzdelávaciu, výchovnú a rozvíjaciu. Prostredníctvom nej žiaci nadobúdajú nielen vedomosti, ale formujú sa aj ich morálne a osobnostné vlastnosti. Pravidelnou aplikáciou hry sa vytvára priaznivá atmosféra na vyučovaní, pretože hra je deťom blízka. Prostredníctvom nej sa učia bez stresu. Popri učení pociťujú radosť, zabávajú sa a prežívajú príjemné citové zážitky nielen z hry, ale i z učenia. City a prežívanie v konkrétnych situáciách vo vyučovaní môžu byť pre život dieťaťa oveľa významnejšie a dôležitejšie ako jednostranné rozumové poznávanie. Veľkou prednosťou tejto metódy je aj to, že si nevyžaduje žiadnu zložitú sekundárnu motiváciu. A napokon je cennou devízou, že deti, do školy kde sa aj hrajú, prichádzajú každý deň s očakávaním a radosťou. Len máloktorá vyučovacia metóda má také presvedčivé predpoklady pre realizáciu jednoty výchovného a vzdelávacieho pôsobenia na dieťa ako hra.

V ďalšom uveďme niekoľko poznámok k výberu vhodných didaktických hier a k metodike ich používania.

Pri zaraďovaní didaktickej hry do vyučovacej jednotky pri vyučovaní matematiky je dôležitý výber didaktickej hry, ako aj vhodná metodika práce s touto hrou. Pred zaradením didaktickej hry do vyučovacieho procesu je nevyhnutné ***stanoviť si edukačný cieľ***, ktorý hrou chceme dosiahnuť. Na základe stanoveného cieľa vyberieme didaktickú hru.. Pri výbere dôsledne dbáme na jej primeranosť pre konkrétnych žiakov na základe ich veku, vyspelosti a záujmov. Prípadne si premyslíme tiež možné varianty danej hry za účelom diferencovania jej obťažnosti. Výber hry je ovplyvnený aj jej organizačnou a realizačnou náročnosťou.

Pri výbere treba zvážiť:

- Koľko žiakov aktivizuje didaktická hra a na akej úrovni poznávacieho procesu?
- Ktoré vedomosti, schopnosti, zručnosti a osobnostné črty rozvíja?
- Aký je očakávaný vplyv danej didaktickej hry na efektívnosť vyučovacieho procesu?

[2] Cejpeková, J.: Hra vo vyučovaní na I. stupni základnej školy. Banská Bystrica, UMB Pedagogická fakulta 1996

- Ako vplýva na postoje žiakov k učebnému procesu a predmetu?
- Aké sú motivačné a rozvíjajúce vplyvy danej hry na žiakov?

Didaktickú hru prezentujeme žiakom obvykle na vyučovacej hodine. Na úvod prezentácie didaktickej hry povieme žiakom názov, ktorý by mal byť výstižný a súčasne pre žiakov pútavý. Nasleduje ústne oboznámenie žiakov s pravidlami hry. Nasleduje samotná realizácia didaktickej hry. Učiteľ zabezpečí organizačné a realizačné činnosti.

Úlohou učiteľa počas didaktickej hry je spravidla kontrolovať dodržiavanie pravidiel a prípadne organizačne riadiť priebeh hry. Po ukončení hry je potrebné zhodnotiť jej priebeh a prácu jednotlivých hráčov. Pri tomto hodnotení treba zohľadniť nielen výsledky žiakov, ale aj ich snahu. V konečnom dôsledku každý žiak, ktorý aktívne počas hry aktívne pracoval, by mal byť morálne ohodnotený a povzbudený do ďalšej práce. Tým zvyšujeme motiváciu žiakov podieľať sa na aktivitách prostredníctvom didaktických hier.

V ďalšom uveďme ukážky

1. **Magické štvorce**

Ľudia verili (a niektorí veria dodnes), že v číslach sa ukrýva nejaké tajomstvo a skrytá moc. Štvorcom so zaujímavými vlastnosťami, napr. aké má aj štvorec **M**, sa hovorí **magické štvorce.**

M

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Ako sa zistí, či daný štvorec je magický?

Q

4	15	6	9
14	1	12	7
11	8	13	2
5	10	3	16

- Sčítame čísla v každom jeho riadku.
- Sčítame čísla v každom jeho stĺpci.
- Sčítame čísla v obidvoch uhlopriečkach.
- Porovnáme vo všetkých prípadoch, vidíme, že sme dostali číslo 34, preto štvorec **Q** je magický štvorec.

Hra „MAGICKÝ ŠTVOREC“ je vhodná pre matematické celky 5. - 9. ročníka *zaoberajúce sa sčitovaním a odčitovaním celých čísel alebo výrazov*, prípadne pre učivo 6. ročníka zaoberajúce sa *deliteľnosťou prirodzených čísel.*

Ukážka 1

1. Doplňte chýbajúce čísla

-1	0	7
	2	

2. Doplňte výrazy

$-2y$		
x^2	x^2-y	
		$2x^2$

3. Doplňte čísla tak, aby ich súčet vo všetkých riadkoch, stĺpcoch a uhlopriečkach bol deliteľný tromi.

10		7
	6	

Poznámka.

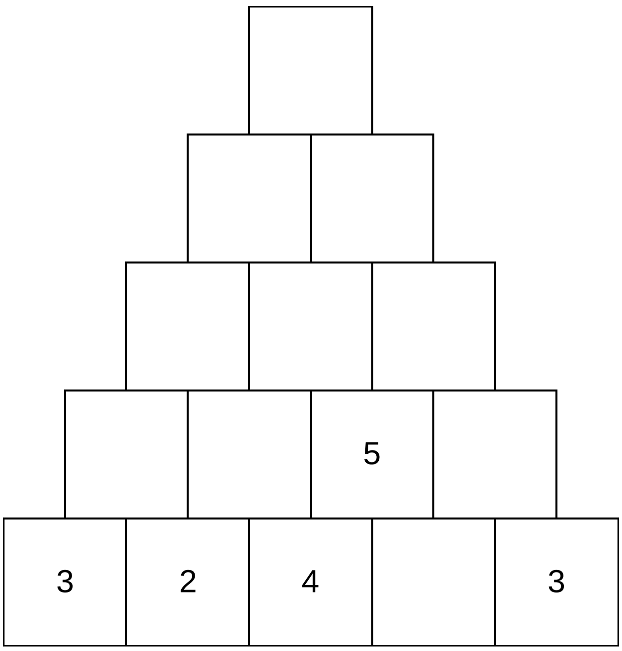
Pri konštrukcii magického štvorca rozmerov 3x3 pre sčítanie a odčítanie čísel alebo výrazov začíname stredným políčkom. Aby žiaci dokázali magický štvorec vyplniť, musíme ešte zadať tri hodnoty do niektorého z riadkov, resp. stĺpcov. Ďalšia možnosť je, že zadáme okrem stredného políčka ešte dve hodnoty v rámci jednej uhlopriečky a naviac jednu hodnotu do ľubovoľného riadku. V oboch prípadoch musíme splniť podmienku, aby súčet údajov súmerných podľa stredu magického štvorca bol dvojnásobkom hodnoty v strednom políčku; súčet celého riadku, resp. stĺpca trojnásobkom hodnoty stredného políčka.

2 Stavba pyramídy (Počtové trojuholníky)

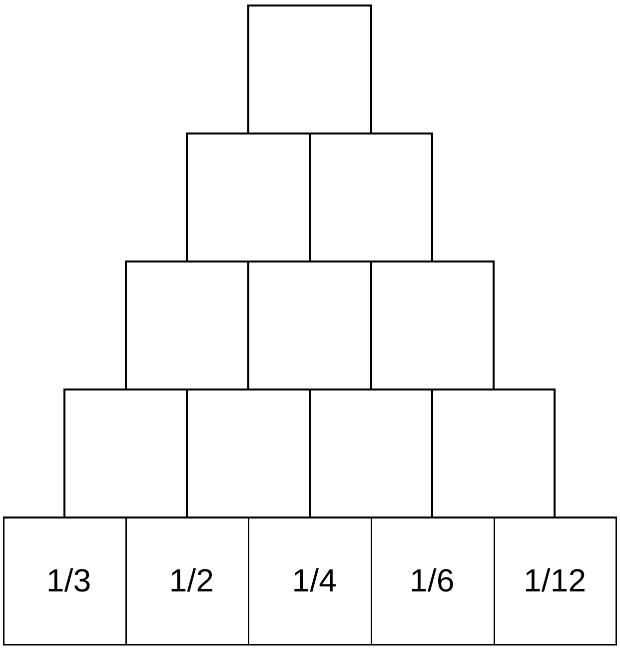
Ide o hru, v ktorej žiaci dostanú čiastočne vyplnenú schému pyramídy a oni majú doplniť voľné políčka. Spravidla sa vypĺňajú súčty dvojíc čísel, môžu byť aj súčiny alebo rozdiely dvojíc čísel.

Ukážka 2

1. Doplňte ostatné políčka v pyramíde. Použite sčítanie.



2. Schéma pyramídy na precvičovanie sčítania zlomkov.



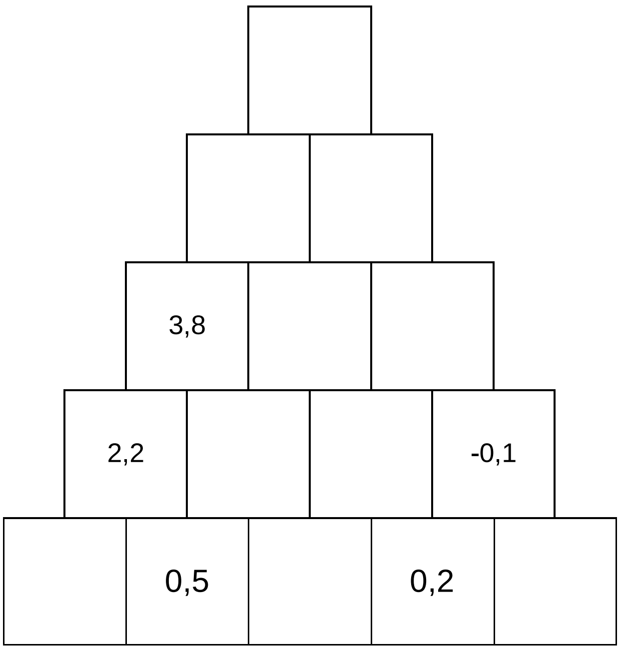
Pri vypĺňaní treba dodržať pravidlo, že údaj vo vyššom rade pyramídy je súčtom dvoch z radu pod ním.

V prípade, že zadáme všetky údaje v najspodnejšom rade (pyramída – počtový trojuholník môže byť aj otočený tak, že základňa tvorí prvý horný riadok), žiaci použijú len sčítanie.

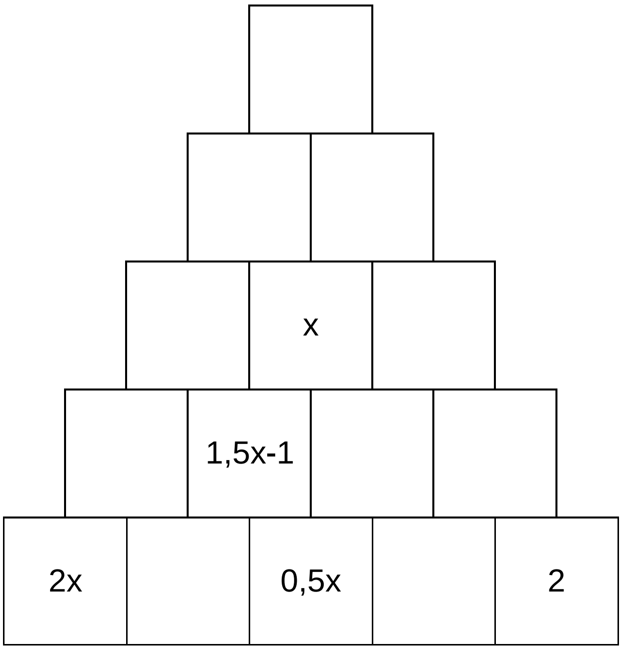
Ak zadáme neúplný riadok a nejaké údaje uvedieme aj vo vyšších riadkoch, žiaci musia aplikovať pri vypĺňaní pyramídy aj odčítanie.

Ukážka 3

1. Schéma na precvičovanie sčítania a odčítania desatinných čísel.



2. Schéma na precvičovanie sčítania a odčítania výrazov.



3. Šifrovaná

Na začiatku hry rozdáme žiakom sadu úloh a zašifrovanú správu spolu s nevyplneným kľúčom na jej odkódovanie. Pri každej úlohe v rámci sady je uvedené písmenko abecedy. Zašifrovaný text sa skladá z údajov oddelenými čiarami. Tieto údaje sú výsledkami úloh. Text odšifrujeme zámenou údajov za písmená napísané pri úlohách, pre ktoré sú zodpovedajúce údaje výsledkami. Dvojice žiakov riešia úlohy, čím získajú kľúč na riešenie šifry. Cieľom je odkódovať zašifrovaný odkaz.

Hra je vhodná na precvičovanie riešenia jednoduchších úloh zameraných na rozličné celky učiva.

Prednosť tejto hry spočíva v tom, že pracuje celá trieda, nevýhodou je čas trvania hry (takmer celá vyučovacia hodina).

Ukážka 4

Sada úloh použitých v hre *Šifrovaná* v rámci tematického celku *Obsah obrazca*[3)].

Vypočítaj obsah obdĺžnika, ak má rozmery:

a)	2,5 dm	a	20 cm	A
b)	3 m	a	25 dm	B
c)	5,5 cm	a	40 mm	C
d)	2,5 cm	a	50 mm	D

Vypočítaj obsah štvorca, ak má stranu dĺžky:

a)	1 m	E
b)	5 dm	F
c)	7 cm	G
d)	10 mm	H

[3] Vankúš, P.: Efektívnosť vyučovania predmetu matematika metódou didaktických hier. Dizertačná práca. FMFI UK, Bratislava, 2006

Poznáš obsah obdĺžnika a dĺžku jeho jednej strany. Vypočítaj dĺžku susednej strany.

a) 3 m^2 , 2 m I
b) 8 cm^2, 0,2 dm J
c) 6 m^2, 200 cm K
d) 50 m^2, 5 m L

Je daný obsah štvorca. Urči dĺžku jeho strany:

a) 36 mm^2 M
b) 64 m^2 N
c) 81 dm^2 O
d) 9 mm^2 P

Poznáš obvod štvorca. Urči jeho obsah.

a) 20 cm R
b) 12 cm S
c) 28 cm T
d) 24 m U

Je daný obsah obdĺžnika a dĺžka jeho jednej strany. Urči jeho obvod.

a) 30 cm^2, 10 cm V
b) 15 dm^2, 5 dm Z

Nevyplnený kľúč na odkódovanie:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K

L	M	N	O	P	R	S	T	U	V	Z

Zašifrovaná hádanka

4 cm 1 m^2 12,5 cm^2 8 m 9 dm || 49 dm^2 25 cm^2

1,5 m 22 cm^2 3 m 9 dm || 36 m^2 9 cm^2 22 cm^2

100 mm^2 8 m 1 m^2 || 16 dm 5 dm^2 ||

3 mm 1 m^2 49 dm^2 ||

6 mm 1,5 m 8 m 36 m^2 49 dm^2 || .

16 dm 5 dm^2 || 5 dm^2 3 m 9 dm ||

12,5 cm^2 10 m 100 mm^2 9 dm ||

36 m^2 9 cm^2 22 cm^2 100 mm^2 8 m 36 m^2 ||

12,5 dm^2 26 cm 1 m^2 ||

49 dm^2 25 cm2 1,5 m 22 cm^2 3 m 5 dm^2 || ?

Odpoveď na hádanku

...

...

...

Literatúra

[1] Cejpeková, J.: Hra vo vyučovaní na I. stupni základnej školy. Banská Bystrica, UMB Pedagogická fakulta 1996.

[2] Krejčová, E. – Volfová, M.: Didaktické hry v matematike. Hradec Králové, Gaudeamus 1994.

[3] Stewart, I.: Čísla prírody. Neskutočná skutočnosť matematickej predstavivosti. Majstri vied. Archa, Bratislava 1996, ISBN 80–7115–117–3.

[4] Šarounová, A.: Magické čtverce a další číselná schémata. Alfabetník 2. Prometheus 2005. ISBN 80–7196–315–1.

Prof. RNDr.Ondrej Šedivý, CSc.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: osedivy@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

JEDNA ELEMENTÁRNA ÚLOHA Z GEOMETRIE

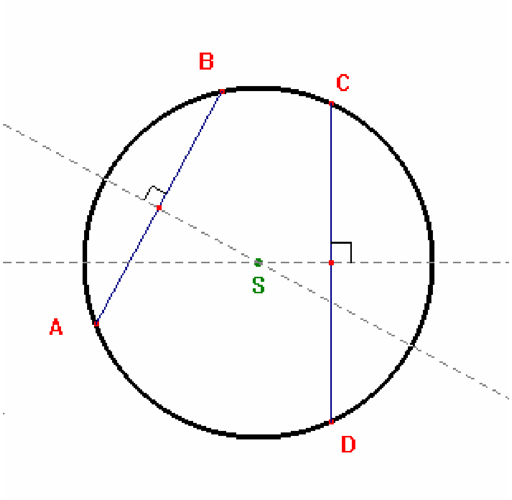
DUŠAN VALLO

ABSTRACT. In this paper we solve one elementary geometry problem by using several different methods. We demonstrate approaches based on skills and geometry knowledge the students off secondary school. In conclusion of the article we present two solutions, which are sophisticated and from this point of view not very suitable as solution for the children. These solutions open some possibilities for more educated readers.

Úvod

Geometria na našich základných školách má syntetický charakter. Žiaci sa vo výučbe matematiky sa v tematických celkoch o geometrii zaoberajú riešením konštrukčných úloh, ktoré, ako vieme, zastávajú dôležitú funkciu vo výchovno - vzdelávacom procese. Je zrejmé, že tieto úlohy sú osobitné najmä v tom smere, že nemajú univerzálny algoritmus riešenia. V mnohých prípadoch jedno nájdené vyhovujúce a úspešné riešenie úlohy uspokojí nielen žiaka, ale aj učiteľa Pochopiteľne, ak žiak úspešne vyrieši úlohu, je to chvályhodné, povzbudzujúce a motivačné pre ďalšie vzdelávanie. Niektoré úlohy je možné riešiť viacerými spôsobmi. Ak žiak vyrieši danú úlohu iným spôsobom, motivujúci účinok je výraznejší. V príspevku uvádzame niekoľko riešení jednej elementárnej úlohy, ktorú by mohli žiaci úspešne vyriešiť viacerými spôsobmi.

Príklad. *Je daná kružnica k, v ktorej nie je určený stred S. Určte niekoľko konštrukčných postupov, ako tento stred zostrojiť.*



Obr. 1

Riešenie 1.

Stred kružnice, bod S, je bodom rovnako vzdialeným od bodov kružnice.

Zvolíme na kružnici k dva navzájom rôzne body A, B. Zostrojíme tetivu AB. Stred S musí ležať na osi o_{AB} tejto tetivy.

Ak zostrojíme druhú tetivu CD, rôznobežnú s AB, stred S leží tiež na osi o_{CD} tetivy CD.

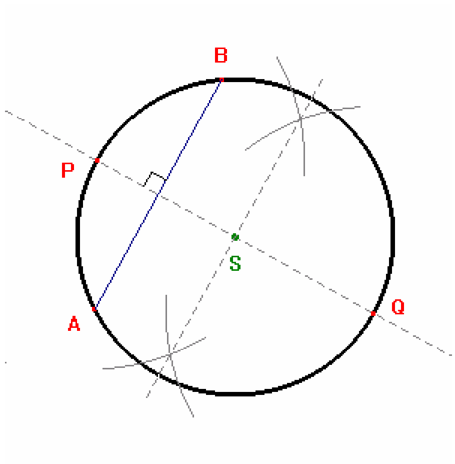
Bod S je spoločným priesečníkom osí.

Riešenie 2.

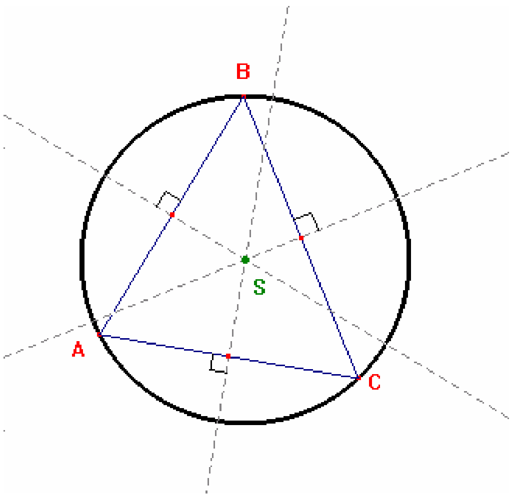
Opäť zvolíme na kružnici *k* dva navzájom rôzne body *A, B.*

Zostrojíme tetivu *AB*, ktorá pretne kružnicu *k* v dvoch bodoch *P, Q.*

Úsečka *PQ* je priemerom kružnice, a preto stred *S* je stredom úsečky *PQ*.



Obr. 2



Obr. 3

Riešenie 3.

Myšlienka tohto riešenia je založená na tom, že každej kružnici možno vpísať trojuholník.

Vpíšeme teda do kružnice *k* trojuholník *ABC*.

Tým sa kružnica *k* stáva opísanou kružnicou trojuholníku *ABC* a jej stred kružnice bude ležať na priesečníku osí strán *AB, BC, AC*.

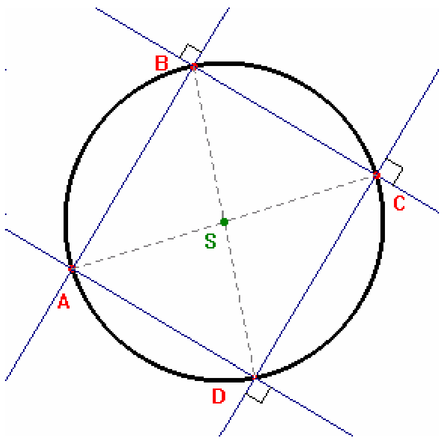
Riešenie 4.

Vieme, že uhlopriečky obdĺžnika sa rozpoľujú.

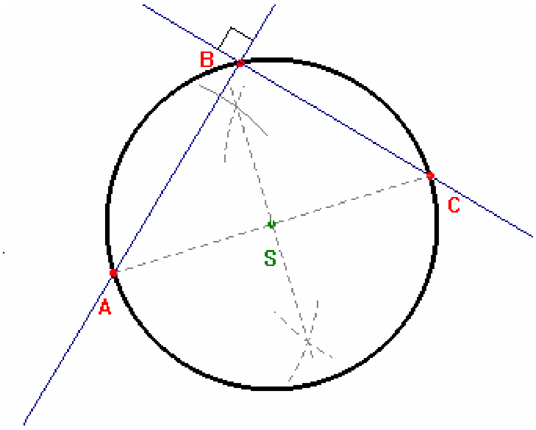
Vpíšeme do kružnice *k* obdĺžnik *ABCD* tak, že najprv zostrojíme ľubovoľnú sečnicu *AB.*

V bode *B* zostrojíme kolmicu na priamku *AB* a druhý priesečník tejto priamky s kružnicou *k* označíme *C*. Opäť v bode *C* zostrojíme kolmicu na priamku *BC*, ktorá pretne kružnicu *k* v bode *D.*

Štvoruholník *ABCD* je obdĺžnikom, ktorého uhlopriečky *AC, BD* sa pretínajú v strede *S.*



Obr. 4



Obr. 5

Riešenie 5.

Predchádzajúce riešenie mierne modifikujeme.

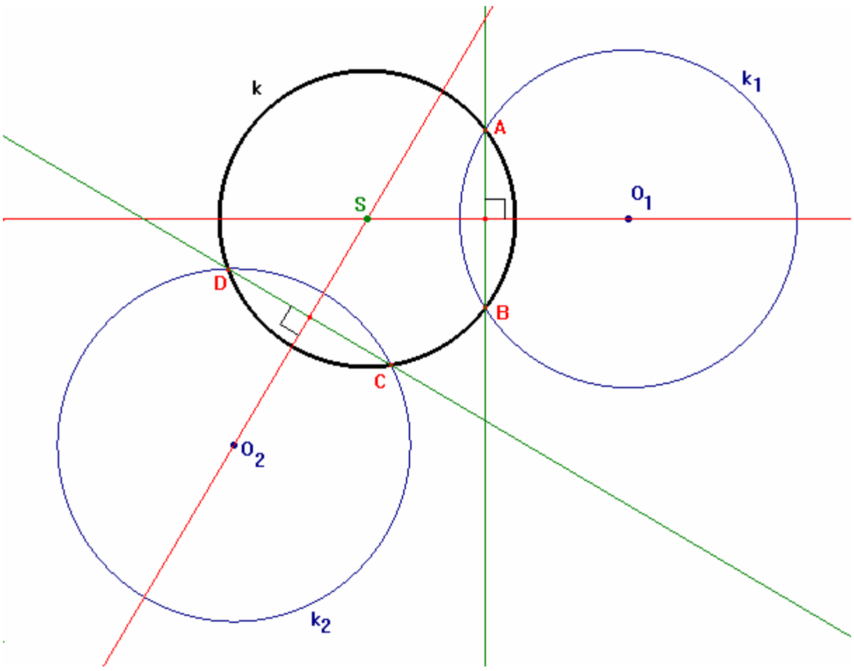
Ak zostrojíme ľubovoľnú sečnicu *AB*, v bode *B* zostrojíme kolmicu na priamku *AB* a druhý priesečník tejto priamky s kružnicou *k* označíme *C*, potom trojuholník *ABC* je pravouhlým trojuholníkom s pravým uhlom pri vrchole *B* a kružnica *k* je Tálesovou kružnicou, kde úsečka *AC* predstavuje priemer kružnice.

Stred úsečky *AC* je stredom *S* kružnice *k.*

Riešenie 6.

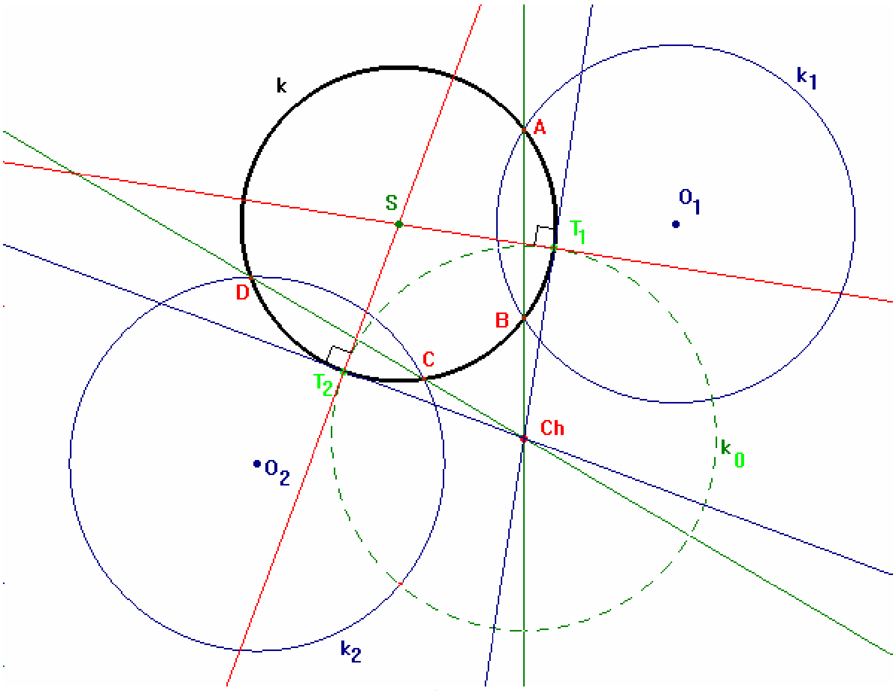
Ak sa dve kružnice pretínajú, ich spoločná sečnica je kolmá na priamku určenú stredmi týchto kružníc.

Zostrojíme teda pomocnú kružnicu $k_1(O_1, r_1)$ tak, aby pretínala kružnicu *k* v dvoch bodoch *A, B.* Stred *S* musí ležať na kolmici zostrojenej z bodu O_1 na priamku *AB.* Analogicky, ak zostrojíme druhú pomocnú kružnicu $k_2(O_2, r_2), O_1 \neq O_2$, pretínajúcu kružnicu *k* v bodoch *C, D,* leží hľadaný stred *S* na kolmici zostrojenej z bodu O_2 na priamku *CD*. Priesečník oboch kolmíc je stred *S*.



Obr. 6

Všetky doteraz uvedené riešenia sú pomerne jednoduché a pochopiteľné aj žiakmi základnej školy. V nasledujúcich riadkoch ukážeme ešte iné riešenia, ktoré svojou náročnosťou na vedomosti miestami značne prekračujú úroveň základnej i strednej školy, avšak doplnením do textu ponúkajú ucelenejší pohľad na problematiku riešení tejto úlohy.



Obr. 7

Riešenie 7.

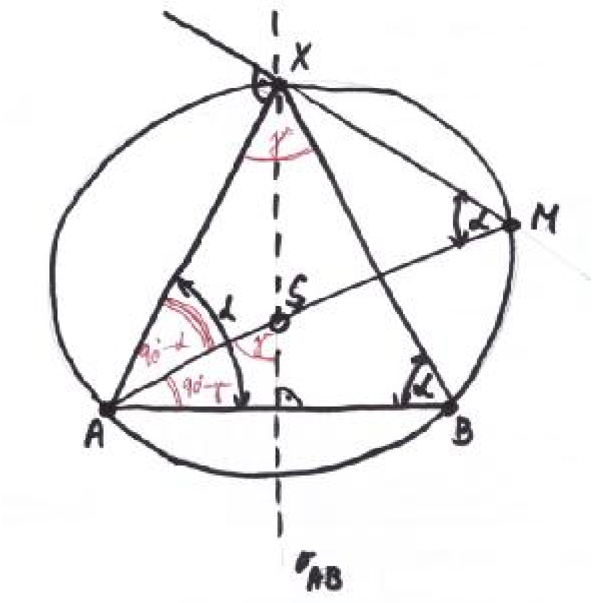
Na obr. 6 sa sečnice *AB*, *CD* pretínajú. Ich priesečník sa nazýva chordálny bod kružníc k, k_1, k_2. Chordálny bod *Ch* je súčasne stredom kružnice k_0, ktorá je kolmá na všetky tri dané kružnice k, k_1, k_2 (za uhol dvoch kružníc sa považuje uhol ich dotyčníc v niektorom spoločnom bode).

Zostrojíme kružnicu k_0 so stredom v *Ch*, ktorá pretne kružnicu k v bodoch T_1, T_2. Body T_1, T_2 sú súčasne dotykovými bodmi dotyčníc t_1, t_2 ku kružnici k_0 zostrojených z bodu *Ch*. V bode T_1 zostrojíme kolmicu na priamku T_1Ch; v bode T_2 zase kolmicu na priamku T_2Ch.

Obe kolmice sa pretnú v hľadanom bode *S*, lebo dotyčnica ku kružnici je kolmá na polomer.

Riešenie 8.

Poznatok, že geometrickým miestom bodov, z ktorého vidno danú úsečku pod daným uhlom je kružnicový oblúk., využijeme pri konštrukcii hľadaného stredu kružnice *k*.

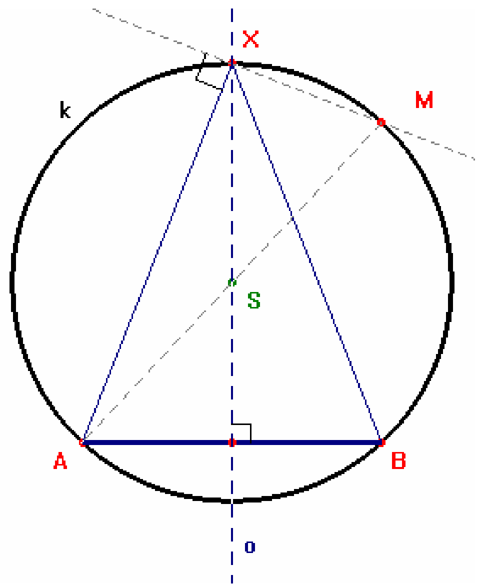


Obr. 8a

Do kružnice vpíšeme rovnoramenný trojuholník *ABX*, ktorého základňa je *AB* (Zostrojíme ľubovoľnú tetivu *AB*. Os *o* tetivy *AB* pretne kružnicu v dvoch bodoch, jeden z nich označíme *X*.) Ak označíme $g = |\angle AXB|$, potom (zo vzťahu pre veľkosti obvodového a stredového uhla) platí $90^\circ - g = |\angle BAS|$, kde *S* je hľadaný stred kružnice. Ak v bode *X* zostrojíme kolmicu *p* na stranu *AX*, pretne priamka *p* kružnicu *k* v bode *M* a platí $|\angle AMX| = |ABX| = a$, kde a je uhol pri základni *AB*.

V trojuholníku *AMX* zo vzťahu pre súčet veľkostí vnútorných uhlov platí $|\angle XAM| = 90^\circ - a$ a teda veľkosť uhla $\angle MAB$ je potom

$$|\angle XAB| - |\angle MAB| = a - \left(90^\circ - a\right) = 2a - 90^\circ = \dots = 90^\circ - g\ ,$$



Obr. 8b

pretože v trojuholníku *ABX* platí $2a + g = 180^{o}$ (obr. 8a). Výpočet ukázal, že uhol

$$|\angle BAM| = |\angle BAS|,$$

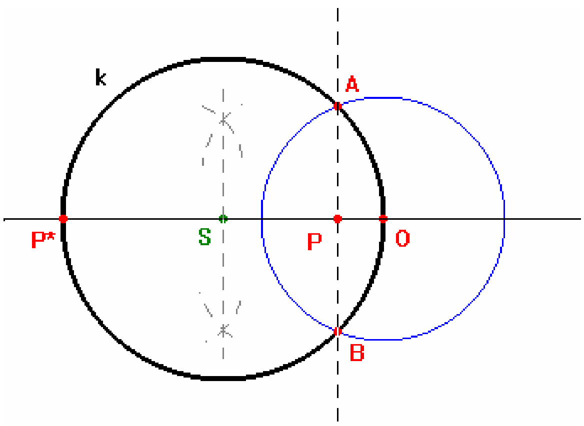
a preto leží bod *S* na úsečke *AM.*

Hľadaný stred *S* je priesečník osi *o* s úsečkou *AM.*

Poznámka. Jednoduchšie zdôvodnenie je takéto. Vzhľadom k tomu, že trojuholník *AMX* je pravouhlý, leží stred *S* na jeho prepone *AM.* Súčasne je stred *S* rovnako vzdialený od bodov *A, B,* preto leží na osi *o* úsečky *AB* .

Riešenie 9.

Obrazom kružnice k v kružnicovej inverzii K_i môže byť buď priamka, alebo kružnica.



Obr. 9

Ak kružnica prechádza stredom O určujúcej kružnice w kružnicovej inverzie, potom jej obrazom je priamka. Vzhľadom k tomu, že kružnicová inverzia je involutorné zobrazenie, obrazom priamky neprechádzajúcej stredom *O* je kružnica, ktorá stredom *O* prechádza, pričom päta *P* kolmice zostrojenej z bodu *O* na priamku sa zobrazí do bodu P^* a platí, že úsečka OP^* je priemerom kružnice.

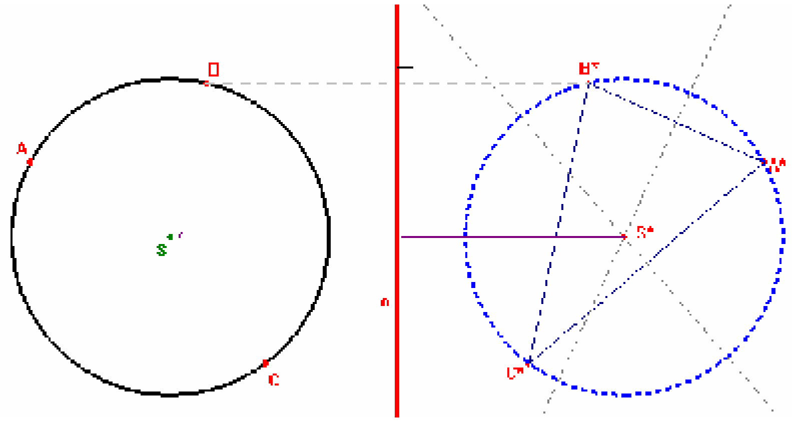
Zvolíme teda na danej kružnici bod *O*. Polomer kružnice w zvolíme tak, aby sa kružnice k, w pretínali v bodoch *A, B.* Obrazom kružnice *k* v inverzii je priamka *AB*. Kolmica zostrojená z bodu *O* na priamku *AB,* pretne kružnicu *k* v ďalšom bode P^* a podľa vyššie uvedeného platí, že OP^* je priemer kružnice, ktorému určíme stred *S*.

Toto riešenie je technickým prevedením zhodné s riešením 2, dokonca možno povedať, že konštrukciou osi úsečky *AB* aj jednoduchšie.

Záver.

V článku sme poukázali na riešenie jednej úlohy. Predložené riešenia mali názorne ilustrovať fakt, že jednu úlohu možno riešiť viacerými spôsobmi. Rovnako dôležitá sa zdá byť myšlienka, že ide o istý test geometrických vedomostí a rozvoj tvorivého myslenia jedinca, ktorý úlohu rieši.

Záverom poznamenáme, že našu úlohu bolo možné riešiť ešte inými spôsobmi, napr. sme



Obr. 10

mohli zvoliť priamku *o*, ktorú by sme prehlásili za os súmernosti, zobrazili tri ľubovoľné body *A, B, C* kružnice *k* do odpovedajúcich bodov *A*, B*, C**, trojuholníku *A*B*C** opísali kružnicu *k**, čím by sme určili stred *S** a ten spätne v osovej súmernosti zobrazili do bodu *S*.

Myslíme si, že takéto riešenie, pokiaľ ho nájde žiak, je tiež hodnotným riešením. Spomínané riešenie však považujeme za riešenie „strácajúce eleganciu". Obsahuje v sebe totiž konštrukciu, ktorú bolo možné vykonať na pôvodne danej kružnici *k*.

RNDr, Dušan Vallo, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: dvallo@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

TRH S GEOMETRICKÝMI „NEPODARKAMI"

GABRIELA PAVLOVIČOVÁ, LUCIA RUMANOVÁ

ABSTRACT. Curriculum of geometry cultivates imagination, initiative, activity and creativity. We should teach geometry naturally, we should come out from tasks which denote necessity of learn geometry and we must reach the conclusions on the ground of own pupils´ experiences. In this paper we deal with didactical games which should persuade the pupils about helpfulness of drawing precise in framework geometrical constructions.

Úvod

Možnosti zvyšovania motivácie žiakov k učeniu sú mnohostranné. Je na učiteľovi, ktoré metódy bude využívať a uplatňovať vo svojej praxi, do akej miery a akým spôsobom.

Jednými z možných spôsobov a metód rozvíjania motivácie žiakov sú:

1. Problémové vyučovanie – vyvolanie záujmu o problém, alternatívne riešenie, tvorenie hypotéz, aktivita a spätná väzba.
2. Vyučovanie hrou – didaktické hry, kde sa motivačne využíva súťaživosť, radosť z hry, uvoľnená atmosféra.
3. Zaujímavé úlohy – uvedenie úloh, v ktorých žiak nachádza dramatickosť, tajuplnosť, vedecké objavovanie.
4. Súťaže – súťažiť by malo dieťa s približne rovnocennými partnermi alebo by mali súťažiť vyrovnané heterogénne tými. Za úspech celého tímu potom môže učiteľ odmeniť každého člena, a tak i menej nadaní žiaci majú možnosť získať dobrú známku a pod. To ich bude pozitívne motivovať.

My sa zameriame na hru ako jeden z prostriedkov motivácie, ktorý pomôže u žiaka vzbudiť záujem o vyučovací predmet a o učenie vôbec. Hrou sa podporí aktivita, tvorivosť a fantázia žiakov. Aj tí – tzv. neaktívni žiaci sa usilujú prejaviť svoje schopnosti. V neposlednom rade hra ako motivačný prostriedok nenásilne pomáha učiteľovi pri upevňovaní jeho prirodzenej autority a obľúbenosti. Keďže žiaci počas hry komunikujú nielen s učiteľom, ale aj medzi sebou, tým sa rozvíja ich slovná zásoba, logické myslenie, ale aj prosociálne vzťahy a postoje. Závisí však od učiteľa, aký didaktický cieľ si vytýči, či popri verbálnej komunikácii bude rozvíjať aj komunikáciu neverbálnu. Po prebratí učiva môže učiteľ hru využiť na precvičovanie učiva, pričom získa spätné informácie, ako žiaci učivo pochopili, ale zároveň zábavnou formou núti žiakov zmobilizovať všetky svoje schopnosti a demonštrovať, čo si zapamätali. Hra môže poslúžiť aj ako prostriedok upevňovania učiva, keď žiak logicky spája poznatky, kombinuje ich a zatrieďuje do systému.

Jednou z foriem hier je aj didaktická hra. Didaktickou hrou rozumieme takú činnosť, ktorej zmyslom a cieľom je poskytnúť žiakom určité poznatky a vedomosti pomocou hry. Didaktické hry sú teda hry, ktoré spĺňajú úlohy rozumovej výchovy. Cieľom didaktických hier je učiť žiakov, cvičiť, ako aj rozvíjať ich rozumové schopnosti. Sú to hotové hry, ktoré žiaci už ako hotové preberajú a uskutočňujú. Didaktická hra kladie veľké nároky na prípravu zo strany učiteľa. Na tom závisí aj jej úspech. Učiteľ si pri projektovaní musí premyslieť výber hry, cieľ, motiváciu, pravidlá, mal by vytvoriť adekvátne podmienky a premyslieť si organizáciu a realizáciu v súlade s cieľmi. Musí si premyslieť, ktoré vedomosti a návyky sa v priebehu hry budú formovať. Pri hrách je potrebné rešpektovať vekové zvláštnosti žiakov, ich návrhy na zmenu pravidiel, oživovať hry novými prvkami, orientovať sa na záujmy žiakov, vedieť hru ukončiť včas a správne ju vyhodnotiť.

Didaktické hry vo vyučovaní geometrických konštrukcií

Geometria má nezastupiteľnú úlohu aj vo výchove a vzdelávaní dieťaťa. Na základnej škole na hodinách geometrie si žiak navyká na pravidelnú a presnú prácu, čo si od neho vyžaduje zvýšenú pozornosť a sústredenosť. Učivo geometrie rozvíja predstavivosť, iniciatívu, aktivitu a tvorivosť. Preto by sme mali geometriu vyučovať prirodzene, vychádzať z úloh, ktoré ukazujú potrebu učiť sa geometriu a k výsledkom dospieť na základe vlastných skúseností žiakov. Geometriu žiaci mali by prežívať, a tak učenie tohto predmetu musí byť práca zaujímavá a povzbudzujúca.

Rysovanie v rámci vyučovania geometrie vyžaduje od žiakov väčšie nasadenie a geometrické zručnosti, ktoré musí učiteľ s nimi neustále precvičovať. Žiaci by mali byť vedení k tomu, že presné rysovanie je potrebné a užitočné aj v reálnom živote. Na geometrické konštrukcie by si mali žiaci, ale aj učitelia zabezpečiť rysovacie pomôcky a používať ich. V súčasnosti existujú mnohé geometrické softvéry, ktoré umožňujú robiť presné geometrické konštrukcie, čo by nemalo byť na úkor manuálnych zručností žiakov. Používanie rysovacích pomôcok nie je potrebné žiakom nútiť, ale vysvetliť im potrebu ich používania.

Podľa Vyšína (Vyšín,1962) planimetrické konštrukcie:

1. poskytujú krásne motivačné úlohy, ktoré podnecujú zvedavosť žiakov a vedú ich k samostatnému objavovaniu zákonitostí
2. ukazujú žiakovi jasný cieľ – treba zostrojiť! – na rozdiel od viet a dôkazov, ktorých význam a zmysel býva často žiakovi nejasný
3. sú prirodzeným mostom, po ktorom môžu predchádzajúce manuálne skúsenosti žiaka prejsť do jeho geometrickej poznatkovej štruktúry , na druhej strane
4. ukazujú ako možno teoretické poznatky zužitkovať v praxi, a tým jednak
5. prispievajú k interiorizácii pojmov a viet, a jednak
6. rozvíjajú schopnosť dialektického videnia vzťahu teórie a praxe, a konečne
7. sú vhodným testovacím prostriedkom, pomocou ktorého môže učiteľ diagnostikovať kvalitu neformálnych znalostí žiaka.

My v našom článku chceme ukázať, prečo je potrebné používať rysovacie potreby a presne rysovať.

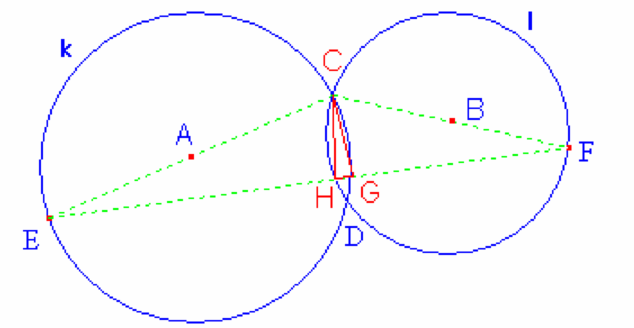
Na zvýšenie motivácie pri vyučovaní si učiteľ môže pripraviť hru s názvom „Trh s geometrickými nepodarkami“. Túto hru je vhodné zaradiť či už v rámci vyučovacej hodiny alebo v rámci matematického seminára. Na tomto trhu by si každý žiak, ale aj učiteľ pripravil stánok s ľubovoľným geometrickým tovarom, napríklad s rôznymi telesami alebo útvarmi. Učiteľ si pripraví stánok s geometrickými nepodarkami, to znamená s geometrickými konštrukciami, ktoré sú založené na nepresnosti v obrázku. Môže ponúkať kružnicu s dvoma stredmi, trojuholník a dvoma pravými uhlami a podobne.

Žiaci si potom vyberajú niektoré ponúkané výrobky, prezentujú ich pre ostatných a následne sa o nich diskutuje. Keď si žiaci vyberú výrobok od učiteľa, učiteľ na tabuli predvedie, že požadovaný tovar má sľubované vlastnosti. Učiteľ by si mal vopred nacvičiť a vyskúšať náčrtky, aby presvedčivo a výrazne dosiahol potrebné skreslenie na konštrukcii a popritom slovne popisuje danú konštrukciu.

My uvedieme tri geometrické „nepodarky“, ktoré by mohol učiteľ zaradiť ako svoj výrobok na trh.

TROJUHOLNÍK S DVOMA PRAVÝMI UHLAMI

Narysujeme kružnicu k so stredom v bode A a druhú menšiu kružnicu l so stredom v B tak, aby sa pretínali v bodoch C a D. Potom vedieme priamku $\overleftrightarrow{CA}$, ktorá pretne kružnicu k v bode E a priamku $\overleftrightarrow{CB}$, ktorá pretne zase kružnicu l v bode F. Priamka $\overleftrightarrow{EF}$ pretne kružnicu k v bode G a kružnicu l v bode H.

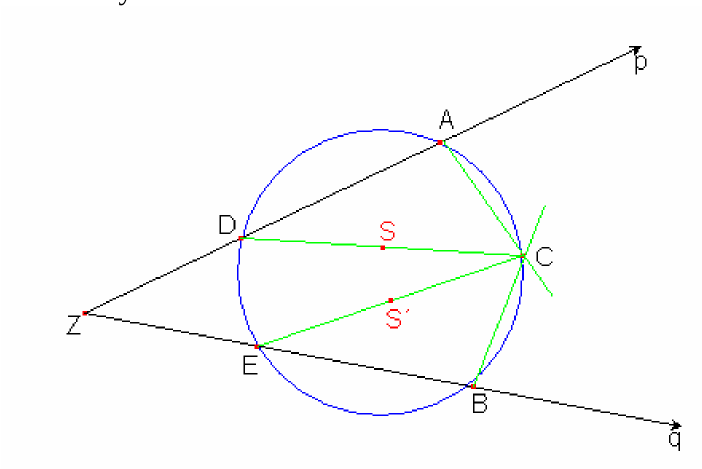


Obr. 1

Z Tálesovej vety vyplýva, že uhly $\angle CHG = \angle CHF, \angle CGH = \angle CGE$ sú pravé. To znamená, že trojuholník *CHG* má dva pravé uhly.

KRUŽNICA S DVOMA STREDMI

Narysujme dve polpriamky *p*, *q* so spoločným začiatkom *Z*. Z ľubovoľného bodu *A*, patriaceho *p*, zostrojíme kolmicu *s* na polpriamku *p*. Z bodu *B* ležiaceho na *q* zostrojíme kolmicu *t* na polpriamku *q*. Priesečník *s* a *t* nazveme *C*. Bodmi *A, B, C* zostrojíme kružnicu *k*. Druhý priesečník polpriamky *p* s kružnicou *k* je bod *D*, druhý priesečník polpriamky *q* s kružnicou *k* je bod *E*. Trojuholník *ACD* má pri vrchole *A* pravý uhol a trojuholník *ECB* má pri vrchole *B* tiež pravý uhol. Preto sú z Tálesovej vety je úsečky *CD*, *CE* priemermi kružnice *k* a stredy týchto úsečiek *S* a *S´* sú stredmi kružnice *k*. Teda naozaj, kružnica *k* má dva stredy.

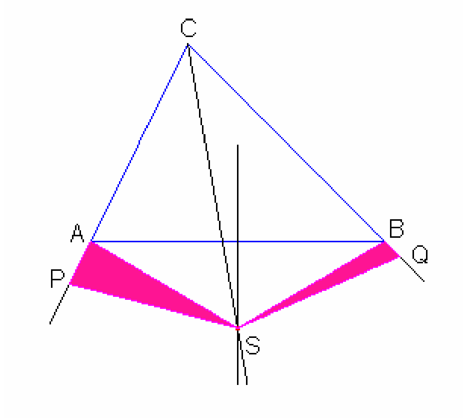


Obr. 2

KAŽDÝ TROJUHOLNÍK JE ROVNORAMENNÝ

Zvoľme si ľubovoľný trojuholník *ABC* s vnútornými uhlami a, b, g pri vrcholoch postupne *A, B, C*. Zostrojme os uhla $\angle ACB$, os úsečky *AB* a ich priesečník označme *S*. Z bodu S zostrojme kolmicu na priamku $\overleftrightarrow{AC}$, ich priesečník označme *P*. Z bodu *S* zostrojme kolmicu na priamku $\overleftrightarrow{BC}$, ich priesečník označme *Q*. Skúmajme vlastnosti trojuholníkov *APS* a *BQS*. Úsečky *AS* a *BS* sú zhodné, lebo bod *S* leží na osi uhla g a body *P, Q* sú päty kolmíc na ramená uhly g. Vnútorné uhly trojuholníkov pri bodoch *P* a *Q* sú pravé. Preto podľa vety sus sú trojuholníky *APS* a *BQS* zhodné. Potom, keďže sú trojuholníky zhodné, sú zhodné aj ich vnútorné uhly pri vrcholoch *A, B*, $\angle PAS = \angle QBS$. Bod *S* leží na osi úsečky *AB*, preto uhly $\angle ABS, \angle BAS$ sú tiež zhodné. Potom z obr. 3 vidieť, že platia nasledujúce vzťahy: $a + \angle BAS + \angle PAS = 180°$, $b + \angle ABS + \angle QBS = 180°$, a teda uhly a, b sú zhodné.

To ale znamená, že trojuholník *ABC* je rovnoramenný. Dokázali sme teda, že ľubovoľný trojuholník je rovnoramenný alebo inak povedané: všetky trojuholníky sú rovnoramenné.



Obr. 3

Záver

V našom článku sme sa venovali geometrickým konštrukciám na 2. stupni základných škôl. Uviedli sme konkrétnu didaktickú hru, ktorá by mohla byť zaradená do vyučovacieho procesu v rámci fázy - motivácie. Cieľom spomínanej hry bolo vhodne a zároveň nenútene ukázať žiakom, aké geometrické „nepodarky“ môžu vzniknúť nepresným rysovaním a presvedčiť ich o užitočnosti presného rysovania.

Literatúra

[1] VYŠÍN, J.: Metodika řešení matematických úloh. Praha, SPN 1962.

[2] MÔŤOVSKÁ, D.: Netradičné metódy vyučovania matematiky. Bratislava, Metodické centrum, 1993. ISBN 80-85185-34-2

[3] ŠEDIVÝ, O. – ČERETKOVÁ, S. – MALPEROVÁ, M. – BÁLINT, Ľ.: Matematika pre 8. ročník základných škôl, 2. časť. Bratislava, SPN, 2001. ISBN 80-08-03032-1

[4] BUŠOVÁ, H. – MOČUBA, S. – TAUCHMANOVÁ, M. – VONDRA, J.: Didaktické hry. http://www.math.muni.cz/~vondra/studium/odid.html

[5] Hra ako významný výchovný prostriedok. http://referaty.atlas.sk/odborne-humanitne/pedagogika/35071

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: gpavlovicova@ukf.sk

PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: lrumanova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

DELITEĽNOSŤ A RSA ALGORITMUS

JANKA MELUŠOVÁ, MICHAL PRÁZNOVSKÝ

ABSTRACT. This article deals with a potentional of RSA cryphting algorithm (which is mathematicaly based in number theory) in revising divisibility at elementary school.

Teória čísel bola dlhodobo považovaná za matematickú disciplínu, ktorá takmer nemá praktické uplatnenie. V minulom storočí sa však súbežne s rozvojom kryptológie rozvíjala aj ona. Podľa aktuálnych učebných osnov predmetu matematika sa v šiestom ročníku základnej školy preberá aj tematický celok ***Deliteľnosť prirodzených čísel.*** V učebných osnovách sa uvádzajú nasledujúce ciele a obsah tohto tematického celku.

Ciele

· vedieť vytvárať násobky daného čísla;
· vedieť určiť deliteľov čísla (pri číslach v obore do 100 všetkých);
· vedieť rozhodnúť o danom čísle, či je deliteľné bez zvyšku 2,3,4,5,6,9,10;
· vedieť odlíšiť prvočíslo od zloženého čísla;
· vedieť vypočítať spoločné násobky dvoch čísel a ich najmenší spoločný násobok;
· vedieť vypočítať spoločných deliteľov dvoch čísel a ich najväčšieho spoločného deliteľa;
· dosiahnuť, aby v obore do 100 žiaci vykazovali pohotovosť a zručnosť v počítaní;
· viesť žiakov k experimentovaniu;
· viesť žiakov k hlbšiemu pohľadu do štruktúry desiatkovej číselnej sústavy.

Obsah

Znaky deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10. Prvočíslo, zložené číslo, rozklad na dvoch činiteľov a na prvočinitele. Deliteľ, spoločný deliteľ, násobok, spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ (D), najmenší spoločný násobok (n). Algoritmizácia výpočtu najväčšieho spoločného deliteľa a najmenšieho spoločného násobku.

Základné pojmy kryptológie

Kryptológia (kryptológia pochádza z Gréčtiny zo slov κρυπτός[kryptós], čo znamená ukryť a γράφω[gráfo], čo znamená písať alebo λεγειν [legein] "hovoriť") je veda o utajení obsahov správ. V dnešnej dobe kryptológia je považovaná za časť matematiky a počítačových vied a je veľmi pridružená k informatike, počítačovej bezpečnosti a počítačovému inžinierstvu. Kryptológia je používaná v technologicky vyspelých aplikáciach; napríklad v zabezpečení peňažných bankomatov, počítačových hesiel a v elektronickom obchode. Kryptológia sa rozdeľuje na kryptografiu (šifrovanie), kryptoanalýzu (lúštenie) a steganografiu (spôsob prenosu správy tak, aby bola čo najmenej nápadná).

V prvom rade si musíme uvedomiť rozdiel medzi pojmami kód a šifra. **Kód** je súbor znakov určených na zaznamenávanie informácií určitým spôsobom a pravidlá na ich používanie, čiže predpis na prevádzanie jednej sústavy znakov do inej. Typickým príkladom je Morseova abeceda alebo ASCII kód. Základný ASCII (American Standard Code for Information Interchange) je kódovací systém znakov anglickej abecedy, číslic, iných znakov a riadiacich kódov, kde každý z týchto znakov má jednoznačne priradené číslo od 1 po 128. Ktokoľvek na základe informácie, že ide o Morseovu abecedu alebo ASCII kód môže zakódovanú správu previesť späť do „otvorenej“ formy. Na druhej strane, úlohou **šifry** je obsah správy utajiť pred nepovolanou osobou.[4]

[4] Z uvedeného vyplýva, že kontroverzný DaVinciho kód nie je kód, ale šifra.

Táto práca bola podporená Agentúrou na podporu výskumu a vývoja na základe Zmluvy č. LPP-0333 –06.

Otvorený text je správa, ktorá sa prenáša a ktorú chceme zašifrovať. **Medzinárodná abeceda** je abeceda, ktorá obsahuje všetky veľké písmená od A po Z bez diakritiky (obsahuje 26 znakov, vrátane Q a W). **Klamač** je znak vložený do textu (zvyčajne na jeho koniec) tak, aby zmiatol kryptoanalytika. Od polovice 19. storočia sa totiž obvykle šifrujú len otvorené texty zapísané v medzinárodnej abecede a zoskupené do skupín po 5. Číslo 5 nie je náhodne vybrané. Je to priemerná dĺžka slova v európskych jazykoch.

Počiatky kryptológie môžeme datovať do dôb antického Grécka a starovekého Ríma. Z týchto čias zostali zachované poznatky o dvoch základných kryptovacích technikách. Grécky scytale využíval transpozíciu, rímska Cézarova šifra bola prvou známou substitučnou šifrou. (Melušová, Práznovský, 2008).

Tieto staroveké techniky však neboli šiframi v pravom zmysle slova. Chýbal im základný atribút dobrej šifry – šifrovací kľúč, ktorý možno meniť. Cézarova šifra **vždy** využívala posun o 3 písmená vpravo, scytale mal vždy rovnaký obvod. Počet písmen, o ktoré „posúvame“ abecedu a obvod valčeka sú kľúčmi v prípade, že sa menia.

Symetrické a asymetrické šifry

Oba vyššie spomínané kľúče sú symetrické. To znamená, že šifrovanie aj dešifrovanie využíva **jeden kľúč.** Napr. ak šifrovaný znak zašifrujeme pomocou substitučnej šifry tak, že ho nahradíme písmenom, ktoré je v abecede o **2 znaky** vpravo, pri dešifrovaní stačí každý znak posunúť o **2 znaky** vľavo.

Bolo by vhodné upozorniť na rozdiel medzi slovami **lúštiť** a **dešifrovať**. Šifrovaný text dešifrujeme, keď poznáme šifru i kľúč, skrátka *známym spôsobom* prevedieme šifrovaný text späť do jeho otvorenej podoby. Ak kľúč alebo nebodaj šifru nepoznáme, hovoríme o lúštení šifry.

Veľmi významným krokom v kryptografii bolo vytvorenie postupov asymetrického šifrovania. Čím sa líši od symetrického? Namiesto jediného kľúča, ktorý slúži zároveň na šifrovanie i dešifrovanie používa **dvojica kľúčov**. Ak jedným z nich správu zašifrujeme, možno ju dešifrovať iba tým druhým. Pochopiteľne, tieto dva kľúče sú navzájom prepojené, ale platí, že znalosť jedného z dvojice kľúčov nepostačuje na získanie toho druhého. Nazvime zatiaľ jeden kľúč „šifrovací“, ten druhý „dešifrovací“. Keďže zašifrovanú správu by mal vedieť dešifrovať dešifrovacím kľúčom iba ten, pre koho je určená, a nikto iný, potom by sme mohli dešifrovací kľúč označiť ako **súkromný**, a keďže zašifrovať správu pre nejakého príjemcu šifrovacím kľúčom by mal mať možnosť každý, šifrovací kľúč označíme ako **verejný**. Ďalej už budeme používať iba tieto dva pojmy, teda verejný kľúč slúži na šifrovanie (je voľne k dispozícii pre verejnosť), súkromný kľúč sa použije na dešifrovanie (jeho vlastník si ho drží v bezpečí).

RSA

Typickým príkladom asymetrickej šifry je RSA (Riverst, Shamir a Adleman – autori šifry). Hoci je táto šifra (s vhodným kľúčom) silná a v súčasnosti často využívaná, na zostavenie kľúča, zašifrovanie a rozšifrovanie textu nám bude stačiť učivo šiesteho ročníka.

Zostavenie kľúčov

Na zostavenie kľúčov budeme potrebovať 2 prvočísla, označme ich p a q (vhodný čas na zopakovanie pojmov prvočíslo, zložené číslo, súťaž o to, kto pozná najväčšie prvočíslo a pod.). Žiakov treba upozorniť, že hoci oni budú používať „malé“ čísla, pri skutočnom použití RSA sú prvočísla čo najväčšie.

Verejný kľúč sa skladá z dvoch čísel P a x.

$P=pq$

x nesúdeliteľné s $(p-1)(q-1)$

A opäť sa dostávame k definíciám základných pojmov – (ne)súdeliteľné čísla, spoločný deliteľ, spoločný násobok, najväčší spoločný deliteľ, najmenší spoločný násobok.

Číslo x nemusí byť jediné. V prípade, že nebude verejné, môže identifikovať odosielateľa správy. Aby sme ho vypočítali, musíme nájsť všetky delitele čísel p-1 a q-1.

p	q	P	$(p-1)(q-1)$	x
3	5	15	8	3,5,7,…
2	3	6	2	3,5,7,…
3	7	21	12	5,7,11,…
5	11	55	40	3,7,9,…
3	11	33	20	3,7,9,…

Tabuľka č. 1 Hľadanie vhodného verejného kľúča

Pomocou vhodného kódovania zmeníme otvorený text na postupnosť čísel – ďalej s ňou budeme pracovať ako s číslom (označíme ho Y). Môžeme použiť jednoduché kódovanie, kde každému číslu priradíme jeho poradie v abecede, ASCII kód alebo ľubovoľné iné kódovanie.

Hoci sa zvyčajne šifrujú celé slová, v školských podmienkach šifrujeme po jednotlivých písmenách, aby sme nemuseli pracovať s veľkými číslami.

Zašifrované číslo $C \equiv x.Y$ (mod P). Na šifrovanie sú vhodné iba posledné 2 dvojice čísel. Počet znakov, ktoré môžeme zašifrovať je P (počet rôznych zvyškov po delení).

Pri trhu s akciami zákazník najčastejšie používa slová predať a kúpiť (resp. ich zápory). Únik informácie môže mať neblahé následky. Zašifrujme napríklad slovo „predať".

Otvorený text v medzinárodnej abecede bude PREDAT a podľa konvencií toto slovo zapíšeme ako PREDA T. Za T by sme mali dosadiť ešte 4 znaky (klamače). Použijeme už zašifrované znaky, čo ušetrí trochu času.

Otvorený text: PREDA TDPAR

Ako verejný kľúč si vyberieme čísla odvodené z prvočísel 3 a 11, teda P=33 a x=3 a ako kódovanie ASCII, aby sme sa trochu priblížili realite. Tabuľku ASCII kódu nájdeme na Internete veľmi rýchlo.

Znak	Y	x.Y	*C*
P	80	512000	5
R	72	373248	18
E	69	328509	27
D	68	314432	8
A	65	274625	32
T	84	592704	24

Tabuľka č. 2 Šifrovanie textu

Šifrovaný text: 0518270832 2408053218

Na dešifrovanie budeme potrebovať privátny kľúč. Privátny kľúč, číslo *d* je riešením kongruenčnej rovnice $x.d \equiv 1$ (mod $(p-1)(q-1)$).

Samozrejme, že šiestakov nebudeme učiť, čo je relácia kongruencie ani riešenie kongruenčných rovníc. Namiesto „číslo x krát d je kongruentné s 1 modulo $(p-1)(q-1)$“ budeme hovoriť: „číslo $x.d$ dáva po delení číslom $(p-1)(q-1)$ zvyšok 1“. Niektoré vzniknuté rovnice majú riešenie takmer triviálne, inokedy treba na vyriešenie rovnice zostaviť tabuľku. Obmedzíme sa na nájdenie jedného riešenia.

$$x.d \equiv 1 \ (\text{mod } (p-1)(q-1))$$
$$3d \equiv 1 \ (\text{mod } 20)$$
$$d \in \{7, 27, 47, \ldots\}$$

Prevod na otvorený text je opäť riešenie kongruenčnej rovnice, tentokrát $Y \equiv Cd$ (mod P). Inak povedané, Y je zvyšok po delení čísla $C.d$ číslom P.

C.d	$Y \equiv Cd$ (*mod P*)	*Y*+33	*Y*+2.33	Znak
78125	14	47	**80**	P
612220032	6	39	**72**	R
10460353203	3	36	**69**	E
2097152	2	35	**68**	D
34359738368	32	**65**	98	A
4586471424	18	51	**84**	T

Tabuľka č. 3 Dešifrovanie textu

Naše čísla *Y* však vôbec nie sú v rozsahu ASCII kódu (od 65 po 90). Musíme k nim pripočítať P alebo jeho násobok (zvyšok po delení bude rovnaký).

Musíme si uvedomiť, že RSA algoritmus nie je bežná aplikačná úloha. Vysvetlenie, zašifrovanie, dešifrovanie (pri malých prvočíslach aj lúštenie) spolu s pár príkladmi zaberú vyučovaciu hodinu (približne 40 minút). Poskytuje však miesto na zopakovanie učiva deliteľnosti netradičnou formou, pri ktorej sa žiaci naučia aj niečo nové. Možno aspoň čiastočne odpovie na čoraz častejšiu žiacku otázku „A na čo mi tá matematika bude?“.

Inou možnosťou je využiť ho v krúžkoch matematiky. Spolu s krátkou históriou šifrovania, otestovaním scytalu a Cézarovej šifry využijeme zvyčajných 90 minút na ukážku jednej z mnohých aplikácií matematiky.

Možnosti využitia sme testovali v záujmovom krúžku študentov základnej školy. Krúžok nebol zameraný iba na matematiku, ale aj na prírodovedné predmety. Hodiny sa zúčastnilo 15 žiakov z rôznych základných škôl mesta Nitra, z toho 3 chlapci a 12 dievčat, 2 žiačky siedmeho, 8 žiakov ôsmeho a 5 žiačok deviateho ročníka.

Nikto zo žiakov nemal problém so zašifrovaním alebo dešifrovaní. Správy šifrovali, vzájomne si ich posielali a lúštili. Lúštenie RSA šifry spočíva vlastne iba v nájdení prvočíselného rozkladu čísla P. Ak je toto číslo menšie ako 100, jedná sa o rutinné cvičenie.

Obr. 1 Žiaci pri lúštení správ šifrovaných pomocou rôznych šifier

Nakoniec malá poznámka. Na rozlúštenie RSA šifry stačí faktorizovať (nájsť kanonický rozklad) číslo P. Najväčšie číslo rozložené algoritmom na faktorizáciu všeobecných čísel malo 663 bitov (t.j. bolo väčšie ako 2^{662} a menšie ako 2^{663}) použitím distribuovaných výpočtov v roku 2005. RSA kľúče sú v súčasnosti 1024–2048 bitové. Niektorí experti veria, že 1024bitové kľúče sa v blízkej dobe budú dať prelomiť (rozlúštiť). Iní si myslia, že prelomiteľné by mali byť dokonca 4096-bitové kľúče. RSA šifra je bezpečná iba v prípade, keď P je dostatočne veľké. Ak má 256 bitov (alebo menej) môže byť na osobnom počítači, využitím voľne dostupného (a dokonca zdarma) softvéru rozlúštené za niekoľko hodín. Momentálne sa odporúča používať nové kľúče ešte dlhšie, viac ako 2048 bitové.

Literatúra

[1] MELUŠOVÁ, J. – PRÁZNOVSKÝ, M. Počiatky šifrovania a teória čísel. In: Učme aplikovať matematiku. Nitra : FPV UKF. s. 57-61, ISBN 978-80-8094-290-8

[2] SINGH, S. 1999. The Code Book. The Science of Secrecy from Ancient Egypt to Quantum Cryptography. New York : Anchor Books, 1999, 409 s., ISBN 0-385-49532-3

[3] VONDRUŠKA, P. 2006. Kryptologie, šifrování a tajná písma. Praha : Albatros, 2006, 344 s., ISBN 80-00-01888-8

PaedDr. Janka Melušová, PhD.
Katedra matematiky FPV
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: jmelusova@ukf.sk

Mgr. Michal Práznovský
Ústav manažmentu a informačných technológií FPV
Univerzita Konštantína Filozofa
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
e-mail: mpraznovsky@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

RIEŠENIE NIEKTORÝCH VYBRANÝCH ÚLOH PRE BYSTRÉ HLAVY

VILIAM ĎURIŠ

ABSTRACT. The aim of the contribution is to point out at certain selected tasks which are not standardly used at the second stage learning at primary schools that it is possible to improve pupils' thinking by means of these "special tasks for bright heads", depending on the pupils' knowledge of mathematics. In the proposed tasks, we offer our solution as a methodological manual and an alternative how to move on at the lesson, though the solution is not the only one available.

1 Úvod

Cieľom príspevku je na niekoľkých vybraných úlohách, ktoré sa nie štandardne používajú vo výučbe matematiky na 2. stupni základných škôl, poukázať, ako je možné riešením týchto „špeciálnych úloh pre bystré hlavy" zdokonaliť myslenie žiakov v závislosti od stupňa znalosti matematiky. V uvedených úlohách ponúkame naše riešenie ako metodický návod, možnosť postupovať pri riešení na vyučovacej hodine, avšak riešenie nie je jediným vhodným. Nenárokujeme si vyčerpať všetky dostupné možnosti riešenia konkrétnych úloh, keďže predpokladáme, že šikovní žiaci sa neuspokoja len s akýmsi „vzorovým riešením". Ponúkame tak jednu z možností riešenia týchto „hlavolamov", čím chceme poukázať na niektoré súvislosti a z didaktického hľadiska odporúčame ďalej riešiť ten istý problém rôznym spôsobom, čo umožní lepšie vniknúť do problematiky úloh a zapamätať si vzniknuté poznatky, ktoré je potom možné ďalej využiť pri riešení rovnakej triedy úloh.

2 Riešenie vybraných úloh pre „bystré hlavy"

Príklad 1.

Ak Peter dá Sáre 5 korún, budú mať obaja rovnaké množstvo peňazí. Ale ak by dala Sára Petrovi 5 korún, mal by Peter dvakrát toľko ako Sára. Koľko korún má kto?

Riešenie.

Nech má Peter x korún. Potom na základe prvej podmienky platí, že Sára má $x-10$ korún. Ak by Sára dala Petrovi 5 korún, zostalo by jej $x-15$ korún. Peter by tak mal $x+5$ korún a na základe druhej podmienky platí, že $x+5=2(x-15)$, z čoho $x=35$ korún. Teda Peter mal na začiatku 35 korún a Sára 25 korún.

Príklad 2.

Každý symbol v diagrame predstavuje istú hodnotu. Z nich jedna je záporné číslo. Urči hodnotu symbolov a nahraď otáznik číslom.

A	B	A	B	10
A	C	C	B	
C	A	C	B	13
B	A	A	A	
15			?	

Riešenie.

Priamo z tabuľky je môžné zostaviť sústavu:

$$\begin{aligned} 2A+2B \phantom{{}+2C} &= 10 \\ A+B+2C &= 13 \\ 2A+B+C &= 15 \end{aligned}$$

Vynásobením druhej rovnice číslom -2 a spočítaním s prvou rovnicou dostávame $C = 4$. Ďalej potom platí $2A + 2B = 10,\ \ -2A - B = 11$. Z toho $B = -1,\ \ A = 6$. Chýbajúce číslo „za otáznikom" je číslo 3.

Príklad 3.

Ktorá cifra je na 1994 mieste v rade čísel $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,\mathbf{K}$ **?**

Riešenie.

N-ciferných prirodzených čísel je $9 \cdot 10^{n-1}$ (ak $n = 1$, jednociferných prirodzených čísel je $9 \cdot 10^{1-1} = 9 \cdot 10^{0} = 9 \cdot 1 = 9$, nech veta platí až po $(n-1)$-ciferné prirodzené čísla, potom platí aj pre *n*-ciferné prirodzené čísla, lebo $9 \cdot 10^{n-1} = 9 \cdot 10^{(n-1)-1+1} = 9 \cdot 10^{(n-1)-1} \cdot 10^{1}$). Jednociferných čísel je teda 9 v uvažovanom rade čísel, dvojciferných je 90, čiže „spotrebujú" 90.2 = 180 cifier. Po miesto 1994 nám ostáva ešte 1805 cifier. Čo je presne prvých 601 trojciferných čísel a ešte prvé dve cifry 602-ho čísla. Prvé trojciferné číslo je číslo 100. Potom 602-hé číslo je číslo $100 + 602 - 1 = 701$. Teda 1994-ou cifrou je cifra 0, čo je druhá cifra čísla 701.

Príklad 4.

Máme 5 škatúľ (označme ich A, B, C, D, E). Začneme do nich „ukladať" čísla nasledovným spôsobom:

A	B	C	D	E
1	2	3	4	5
9	8	7	6	
	10	11	12	13
		K	14	

Do ktorej škatule „vložíme" číslo 2008?

Riešenie.

Škatúľ je nepárny počet a začíname „ukladať" číslo 1, a tak škatule A, C a E budú obsahovať len nepárne čísla. (prvé čísla v škatuliach A, B, C budú nepárne a „pridávať" budeme už len čísla o párny násobok, čím sa parita nezmení) Teda do úvahy prichádza len škatuľa B alebo D. V týchto dvoch škatuliach sa čísla ukladajú nejakým systémom, a to takým, že nasledujúce čísla sa pravidelne zväčšujú o 2 a o 6 striedavo. Uvažujme najskôr škatuľu D. V tej je prvý „prírastok" 2. Môžeme zostaviť dve rovnice, z ktorej ak aspoň jedna má celočíselné riešenie, tak škatuľa D je tá, do ktorej „patrí" číslo 2008 (prvé vložené číslo je číslo 4 a ďalšie už len vznikajú pripočítaním násobkov čísla 2 a násobkov čísla 6, druhá rovnica je potrebná preto, lebo nevieme, či násobkov čísla 6 bude toľko ako násobkov čísla 2, môže ich byť o jedno menej, keďže prvý rozdiel bol 2). Ak označíme x počet násobkov rozdielov 2, tak platí $2008 = 4 + 2x + 6x,\ 2008 = 4 + 2x + 6(x-1)$. Z nich ani jedna nemá celočíselné riešenie. Analogicky zostavíme rovnice pre škatuľu B (prvé vložené číslo je číslo 2 a prvý rozdiel je 6, čiže násobkov čísla 6 môže byť o jeden viac ako čísla 2). Platí $2008 = 2 + 2x + 6x,\ 2008 = 2 + 2x + 6(x+1)$. Druhá rovnica má celočíselné riešenie, a tak číslo 2008 „má svoje miesto" v škatuli B.

Príklad 5.

Andrej mal 5 korún a chcel si kúpiť koláče. Mohol si za to kúpiť dva koláče, na tretí už nemal dosť peňazí. Martin za 7 korún dostal 4 koláče a ešte mu aj zvýšilo. Koľko stál jeden koláč („najmenší" peniaz uvažujte 0.1 koruny)?

Riešenie.

Keďže Martin dostal za 7 korún 4 koláče, 2 koruny je veľa za koláč, a keďže Andrej za 5 korún mohol kúpiť 2 koláče, 1.5 koruny je málo za koláč (tým sme vytvorili „hrubé“ ohraničenia pre cenu za koláč). Ak by koláč stál 1.9 koruny, Martin by za 7 korún 4 koláče nekúpil ($4 \cdot 1.9 = 7.6$). Rovnako aj 1.8 koruny za koláč je veľa ($4 \cdot 1.8 = 7.2$), ale 1.7 koruny ako horné ohraničenie už môže byť. Ak by sme dolné ohraničenie uvažovali 1.6, Andrej by kúpil až 3 koláče ($3 \cdot 1.6 = 4.8$), a tak dolné ohraničenie musí byť aspoň 1.7. Keďže ale 1.7 je zároveň aj horným ohraničením, jeden koláč musel stáť 1.7 koruny.

Príklad 6.

O koľko je súčet prvých 100 prirodzených čísel párnych väčší ako súčet prvých 100 prirodzených nepárnych čísel?

Riešenie.

Úlohu vyriešime využitím vzorca pre výpočet súčtu prvých *n*-členov aritmetickej postupnosti. Keďže uvažujeme prvých 100 párnych čísel ako postupnosť, prvým členom tejto postupnosti je číslo 2 a posledným 200. Podobne prvým číslom v postupnosti prvých 100 nepárnych čísel je 1 a posledným 199. Potom pre súčet prvých 100 párnych prirodzených čísel môžeme písať $s_p = \frac{100}{2}(2+200) = 10100$ a pre súčet prvých 100 nepárnych prirodzených čísel platí $s_n = \frac{100}{2}(1+199) = 10000$. Potom $s_p - s_n = 100$, a tak súčet prvých 100 párnych čísel je väčší o 100. Danú úlohu však vôbec nie je nutné počítať. Stačí si uvedomiť, že každé párne číslo je o 1 väčšie ako nepárne, a preto ich súčet musí byť o 100 väčší.

Príklad 7.

Na stole je 81 mincí, z ktorých je jedna ľahšia (ostatné sú rovnako ťažké) a rovnoramenné váhy. Pomocou štyroch vážení na týchto váhach zistite, ktorá z daných mincí je tá ľahšia.

Riešenie.

Mince rozdelíme na tri skupiny po 27 mincí. Ľubovoľné dve z týchto troch kôpok dáme na misky rovnoramenných váh (každú kôpku na inú stranu). Ak ostanú misky v rovnovážnej polohe, potom je nutne ľahšia minca v kôpke, ktorá ostala na stole. Ak nie, tak ľahšia minca je v tej kôpke, ktorá bola prevážená druhou stranou. Túto 27 člennú skupinu s ľahšou mincou opäť rozdelíme na tri skupiny po 9 mincí a rovnakým spôsobom v druhom vážení zistíme, ktorá deväťčlenná skupina obsahuje ľahšiu mincu. Túto skupinu rozdelíme ďalej na tri skupiny po 3 minciach. Po treťom vážení vieme, ktorá (trojčlenná) kôpka má ľahšiu mincu. V poslednom vážení dáme ľubovoľne po jednej minci z tejto skupiny na každú zo strán váh. Ak misky ostanú v rovnovážnej polohe, ľahšia minca je tá tretia, ktorú sme nevážili. V opačnom prípade je ľahšia minca na tej miske, ktorá bola prevážená.

Príklad 8.

V rodine malej Marienky sa narodili trojčatá. Pred ich narodením mala Marienka dvakrát viac bratov ako sestier. Teraz má dvakrát viac sestier ako bratov. Koľko bratov a koľko sestier má teraz Marienka?

Riešenie.

V rodine malej Marienky sa mohli narodiť tieto trojčatá:

$$\begin{array}{cccc} a) & D & D & D \\ b) & D & D & CH \\ c) & D & CH & CH \\ d) & CH & CH & CH \end{array}$$

Možnosti *c), d)* nemôžu zmeniť počet dievčat vo väčší ako počet chlapcov v rodine, a tak ich nemusíme uvažovať. Z rovnakého dôvodu nemá zmysel ani *b)*, lebo ak pred narodením bolo dvakrát viac chlapcov a uvažovali by sme najmenší možný rozdiel medzi počtom chlapcov a počtom dievčat (tj. počet chlapcov 2 a počet dievčat 1), tak by ich bolo rovnako veľa po narodení súrodencov. Museli sa teda narodiť tri dievčatá. Marienka musela mať predtým jednu sestru a dvoch bratov a po narodení trojčiat má štyri sestry a dvoch bratov.

Príklad 9.

Martin má 24 rokov. Je dvakrát starší, ako bol Peter, keď Martinovi bolo toľko, koľko má Peter teraz. Koľko má Peter rokov?

Riešenie.

Označme Petrov vek neznámou *x*. Keďže Martin je teraz dvakrát starší, ako bol Peter v minulosti, tak vtedy musel mať Peter 12 rokov. Martin mal *x*, keďže bol taký starý, ako je Peter teraz. Bolo to teda $24-x$ rokov dozadu a Peter mal $x-(24-x)$ rokov. Potom platí $x-(24-x)=12$, z čoho $x=18$. Peter má 18 rokov.

Príklad 10.

Pozdĺž atletickej dráhy je rozostavených 12 zástaviek rovnako od seba vzdialených. Štart je pri prvej zástavke. Pri ôsmej zástavke bol bežec za 8 sekúnd. Ak beží rovnakou rýchlosťou, za koľko sekúnd bude pri 12-tej zástavke?

Riešenie.

Keďže atlét štartuje od prvej zástavky, tak sedem úsekov trate (pri ôsmej zástavke) zvládne za 8 sekúnd. To znamená, že jeden úsek za $\frac{8}{7}$ sekundy. Teda 4 úseky (ktoré sú od ôsmej zástavky po dvanástu) mu musia trvať $4\cdot\frac{8}{7}=\frac{32}{7}\doteq 4.6s$.

LITERATÚRA

[1] Telepovský, M.: *Matematické hlavolamy*. Nitra, Enigma 1996, , ISBN 80-85471-37-X

[2] British Mensa Limited: *Mensa 5*. Slovak Edition, Bratislava, Ikar 2000, ISBN 80-7118-813-1

[3] British Mensa Limited: *Mensa 11*. Slovak Edition, Bratislava, Ikar 2003, ISBN 80-551-0601-0

[4] Goga, M. – Pinda, Ľ.: *Úlohy pre bystré hlavy*. Bratislava, SPN 1989, ISBN 80-08-00035-X

RNDr. Viliam Ďuriš
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 74 Nitra
e-mail: vduris@ukf.sk

Recenzent:
Prof. RNDr. Jozef Fulier, CSc.

MATEMATICKÝ FUTBAL – DIDAKTICKÁ HRA

VALÉRIA VASKOVÁ

ABSTRACT. In this paper we are dealing with one of the didactic games called mathematical football. This game has a lot of uses when we are establishing particular thematic blocks from arithmetic or algebra. In this paper we are showing the use of the game for improving knowledge of criteria for divisibility of integral numbers. We present the proceeding of the game, teacher and pupils tasks, time scope and evaluation of the game.

Úvod

Didaktické hry sú charakteristické konkrétnou úlohou, presne vymedzenou štruktúrou a pravidlami, ktorými je usmerňovaná aktivita žiakov. Prostredníctvom didaktickej hry sa deti učia nenútene, pretože „umožňuje realizovať proces učenia nielen verbálnym a pojmovým učením, ale najmä senzomotorickým učením, emocionálnym učením, zážitkom, sociálnym učením i skúsenosťou."

Didaktické hry možno členiť podľa:

a) obsahu – matematické, jazykové, ekologické, pohybové, geografické, hudobno-tanečné, estetické a i.,
b) funkcie vo výchovno-vzdelávacom procese – motivačné, fixačné, hodnotiace, relaxačné, rekreačné, rehabilitačné,
c) významu pre psychosomatický rozvoj dieťaťa – hry na rozvoj vnímania, pozornosti, zmyslov, fantázie, motoriky,
d) spôsobu akým sa uplatňujú v učebnom procese – inscenačné, kooperačné.

Pri tvorbe a aplikácii didaktických hier je potrebné najprv odpovedať na nasledujúce okruhy otázok:

§ Aký dôvod máme na to, aby sme konkrétne zvolenú didaktickú hru integrovali do učebného programu?
§ Aký cieľ sledujeme začlenením tejto hry do vyučovania?
§ Čo chceme pomocou nej dosiahnuť? Majú sa žiaci pri hre dozvedieť niečo nové, objaviť niečo nové, alebo využiť už osvojené poznatky? Chceme ich poznatky upevniť, alebo aplikovať neobvyklým spôsobom?
§ Je cieľom využitia didaktickej hry zväčšenie rozsahu poznatkov, alebo chceme dosiahnuť zmenu postojov, vlastností osobnosti, či zvýšiť motiváciu a aktivitu žiakov?

Ako z uvedeného vyplýva didaktická hra by sa nemala začleňovať do vyučovania náhodne, bez plánu, ale cieľavedome a metodicky premyslene.

Z hľadiska <u>organizácie práce a metodiky realizácie hry</u> je potrebné poznať odpovede na nasledujúci okruh otázok:

§ Pre aký vek žiakov je daná hra vhodná?
§ Je vhodná pre niektorých, alebo pre všetkých žiakov v triede?
§ Je pre hru trieda priestorovo vhodná?
§ Je dostatočne zábavná a vhodná pre moju triedu?
§ Čo žiaka motivuje k spontánnej a aktívnej účasti na hre?
§ Rozvíja pozitívne vlastnosti žiakov?
§ Nevyvoláva u niektorých žiakov agresivitu, bezohľadnosť, negatívne postoje k okoliu?

- § Aká je časová náročnosť tejto hry?
- § Akým spôsobom sa hrá – jednotlivci, dvojice, skupiny?
- § Nezvýrazňuje sa hrou neprimerane individualita nad kolektívnym záujmom?
- § Žiaci sa pri hre rozprávajú, alebo sa hrajú v tichosti?
- § Nie je hra neprimerane hlučná pre školské priestory?
- § Použijeme pri hre písomnú formu?
- § Ako dlho trvá hra a ako dlho jej príprava?
- § Čo potrebujeme na jej prípravu?
- § Je možné hru opakovať?
- § Sú jej pravidlá dostatočne jasné a jednoduché?

Keď si ujasníme odpovede na predchádzajúce otázky môžeme vybranú didaktickú hru presne zaradiť do časovo- tematického plánu a do plánu prípravy na konkrétnu vyučovaciu jednotku.

Didaktickú hru považujeme v súlade s Vladimírom Burjanom za „matematickú hru“ ak pri jej realizácii nastane niektorá z nasledujúcich situácií:

- § MATEMATICKÉ HLAVOLAMY - Prebieha jednoduchá činnostná úloha (typu „ preložte zápalku tak, aby vznikla rovnosť).
- § SOLITÉRY - Realizujú sa zložité činnostné úlohy pre jedného hráča.
- § MATEMATICKÉ SÚŤAŽE - Rôzne druhy súťaží, kde každý jednotlivec pracuje samostatne a nakoniec sa vyhodnotí najlepší dosiahnutý výsledok.
- § MATEMATICKÉ HRY -Hry pre dvoch a viacerých hráčov, ktorí striedavo robia predpísané ťahy a sledujú istý, vopred stanovený cieľ.

HLAVOLAM je problém obsahujúci jednu, alebo viac špecifických záležitostí, ktoré sú zostavené len preto, aby sme u niekoho vyskúšali jeho dôvtip, alebo trpezlivosť. Patria sem napríklad priestorové skladačky, Rubikova kocka, klasické puzzle, bludisko, tajné skriny, zrkadlo so skrytým obrazom,..Klasifikácia hlavolamov je tiež hlavolam. V súčasnosti je známy podľa Flejberka systém 14 tried, ktoré obsahujú viacej ako 100 podtried.

Pod pojmom SOLITÉR rozumieme činnostnú úlohu, ktorá žiada pretransformovať predpísaným spôsobom (t.j. *povolenými ťahmi*) istú počiatočnú pozíciu do zadanej cieľovej pozície.

MATEMATICKOU SÚŤAŽOU rozumieme úlohu, ktorá sa zadáva viacerým ľuďom súčasne, aby ju mohli paralelne riešiť. Na rozdiel od matematickej hry si súťažiaci nemôžu do činnosti navzájom zasahovať, pretože pracujú nezávisle. Po skončení sa výsledky jednotlivých súťažiacich porovnajú a autor najlepšieho riešenia je vyhlásený za víťaza.

MATEMATICKÉ HRY majú nasledujúce charakteristické znaky“

- § Hry sa zúčastňujú aspoň dvaja hráči.
- § Činnosť hráčov neprebieha paralelne, ale striedavo.
- § Činnosť každého z hráčov je bezprostredne ovplyvnená činnosťou ostatných hráčov.
- § Zásahy hráčov do hry sú presne vymedzené pravidlami v podobe povolených ťahov
- § Každý z hráčov sa snaží dosiahnuť cieľ, ktorý mu hra predpisuje, pritom ciele jednotlivých hráčov sú protichodné, navzájom sa vylučujúce
- § Hru považujeme za matematickú ak nastáva niektorý z nasledujúcich prípadov:
  - ♦ *Pravidlá obsahujú isté matematické pojmy,*
  - ♦ *na vykonanie predpísaných ťahov sú potrebné isté matematické znalosti,*
  - ♦ *kauzálne a kombinačné úvahy umožňujú takú analýzu hry, z ktorej vyplýva pre niektorého z hráčov optimálna stratégia, alebo aspoň čiastočný návod na výhru.*

Matematický futbal

V našom článku priblížime matematickú didaktickú hru s názvom „Matematický futbal“. Ide o didaktickú hru, ktorá môže slúžiť na prehĺbenie učiva z rôznych oblasti matematiky, napr. z teórie čísel, algebry atď. Táto hra sa dá využiť aj ako pomôcka na opakovanie matematických vzorcov (vzťahov) alebo pri opakovaní teórie. My sa zameriame na „Matematický futbal“, ktorý slúži na prehĺbenie učiva o kritériách deliteľnosti celých čísel. Umožňuje otestovať vedomosti celej triedy a to nielen z posledného učiva, ale aj z opakovania tematického celku. Hra je nenáročná na pomôcky, potrebné sú iba tabuľa a trieda.

Počet žiakov pre hru je ľubovoľný, avšak najlepšie je konštantný, počas hry nemenný. Minimálny počet hráčov je 3, ale ak hrá celá trieda, učiteľ môže zistiť stav vedomosti všetkých žiakov a podľa výsledkov prípadne zopakovať učivo.

Pri tejto hre je dobré rozdeliť žiakov na tri skupiny- družstvá. V každej skupine by mal byť približne rovnaký počet žiakov a skupiny by mali byť vyrovnané. To znamená, že v jednej skupine by nemali byť iba tí „silnejší“, príp. „slabší“ žiaci.

PRAVIDLÁ HRY:

Na začiatku hry učiteľ určí rozsah čísel, z ktorého sa budú prirodzené čísla vyberať (musí zvážiť, aké čísla sú jeho žiaci schopní z pamäti spracovať do istého času, napr. 30 sekúnd). V prípade, že zvolený rozsah čísel by bol pre žiakov príliš ťažký alebo príliš ľahký, učiteľ môže rozsah zmeniť. Neodporúča sa to urobiť počas jedného kola, aby časť žiakov nemala ľahšie zadanie ako druhá. Ďalej je potrebné určiť číslo, resp. čísla deliteľnosť ktorými sa má skúmať

Samotná hra prebieha pomerne rýchlo. Začína učiteľ. Zvolí číslo X z vopred stanoveného rozsahu (napr. 375 z intervalu 100 do 1000) a číslo Y – možného deliteľa, ktorým deliteľnosť skúmame (napr. z čísel 2,3,4,5,6,9 číslo 5). Vyberie žiaka z prvého družstva. Ten musí (do vopred stanoveného časového limitu) povedať, či je alebo nie je dané číslo X deliteľné deliteľom Y. Žiak odpovedá slovami „áno“ alebo „nie“, aby sa dala jednoznačne dala určiť jeho odpoveď. Napríklad: Otázka: Je číslo 375 deliteľné číslom 5? Odpoveď: Áno. Otázka: Je číslo 375 deliteľné číslom 4? Odpoveď: Nie. V prípade, že žiak neodpovie správne, jeho družstvo dostáva gól. Po vyhodnotení odpovede, žiak zadá číslo X a číslo Y žiakovi z druhého družstva. Ten odpovie a zadá čísla X, Y žiakovi z nasledujúceho družstva. Žiak posledného družstva zadáva čísla žiakovi z prvého družstva.

Aby sa predišlo tomu, že budú hrať iba „najslabší“ žiaci, ktorí môžu dostať najviac gólov, odporúča sa, aby v jednom kole hral jeden žiak iba raz. Hra končí vtedy, keď odohrajú, t.j. odpovedia všetci žiaci. Zapisovač, zapisujúci góly na tabuľu, sčíta skóre a vyhlási víťaza – družstvo s najnižším počtom gólov. Vyhlásením víťaza sa kolo končí.

Aby sa predišlo našepkávaniu, môže učiteľ určiť podmienky trestných gólov – za zlú odpoveď sa považuje každá našepkaná odpoveď, príp. nezodpovedanie otázky v danom časovom limite.

Čas hry je závislý od času, ktorý je potrebný na odpoveď jedného žiaka. Ak si po vyhlásení zadania, t.j. rozsahu a možných deliteľov, jednotliví žiaci vymyslia dopredu svoje „príklady“, výrazne to urýchli priebeh hry. Ak je v triede 30 žiakov, nemusí dĺžka hry prekročiť 20 minút. Ak je problém v triede som zapamätaním si kto už bol a kto ešte nie, je praktické prikázať všetkým na začiatku hry vstať a každý, kto odpovie a zadá otázku, sa posadí.

Pokiaľ má na hodine viac času na túto hru, môže pozmeniť pravidlá – žiak bude opakovane odpovedať až do chvíle, pokiaľ neodpovie správne.

Hodnotenie:

Hodnotenie hry závisí od učiteľa. Odporúča sa však kvôli motivácii, aby sa celkové výsledky „Matematického futbalu“ hodnotili známkou, príp. bodmi, aspoň ako aktivita na hodine. Napríklad: Každý žiak víťazného družstva dostane bod, ak bude mať žiak 3 body, dostane 1.

Môže nastať aj situácia, že viac družstiev bude mať rovnako nízky počet bodov. Vtedy má učiteľ viac možností: buď vyhlási za víťazov 2 družstvá alebo si družstvá v prípade remízy vyberú po jednom zástupcovi a ten bude „reprezentovať“ celú svoju skupinu pred tabuľou. Zástupcovia môžu hrať kolo „na prvú chybu“ a víťaz získava víťazstvo pre celú skupinu.

Záver

Didaktické hry umožňujú udržať si osvojené učivo v pamäti dlhšie a sú dobrým prostriedkom v boji proti zabúdaniu a v boji proti formálnym vedomostiam. V porovnaní s inými učebnými metódami ich prednosťou je skutočnosť, že proces upevňovania a prehlbovania učiva prebieha v hravej zábavnej činnosti. Tento proces je sprevádzaný kladnými emóciami, čo je jednou z dôležitých podmienok pri trvalom osvojení si učiva.

LITERATÚRA

[1] BALÁŽOVÁ, E. – LIGAS, Š. : Hra – prostriedok formovania osobnosti. Banská Bystrica: 1999

[2] GRIŠČÍKOVÁ, A. : Didaktické hry s učebnou pomôckou LEGO. Prešov:, Metodicko-pedagogické centrum:2007

[3] MATÚŠKOVÁ, R. : Hra ako jedna z vyučovacích metód. In: Naša škola. Roč. 9, 2005-2006, č. 1, s. 23

PhDr. PaedDr. Valéria Vasková, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: vvaskova@ukf.sk

VYUŽITIE STAVEBNICE POLYDRON VO VYUČOVANÍ STEREOMETRIE

KITTI VIDERMANOVÁ

ABSTRACT. In this article we deal with the system POLYDRON and its use in mathematics education at the secondary school. We introduce topics in which the use of this system can help faster and better understanding of curriculum.

Úvod

Za jednu z priorít vyučovania matematiky na všetkých stupňoch škôl považujeme rozvoj priestorovej geometrickej predstavivosti. V každodennej vyučovacej praxi je vidieť, že tradičný vyučovací obsah geometrie aplikovaný tradičnými vyučovacími technológiami neprináša požadovaný a očakávaný efekt. V rôznych výskumoch v danej oblasti sa ukázalo, že úroveň priestorovej geometrickej predstavivosti je nízka.

Manipulatívna geometria

Súčasná spoločnosť vyžaduje používanie informačno-komunikačných technológií v každej ľudskej činnosti, nevynímajúc ani vyučovací proces. Existuje mnoho edukačných programov na výučbu geometrie i podporujúcich rozvoj priestorovej predstavivosti.

Nesmieme však zabúdať na skutočnosť, že pri výučbe stereometrie je dôležité nadväzovať na skúsenosti dieťaťa z predškolského veku, ktoré získalo pri hre s kockami a inými predmetmi, resp. stavebnicami - princíp využívania manipulácií. „Manipulácie chápeme ako multisenzorické nástroje napomáhajúce učeniu žiakov prostredníctvom ich vlastných skúseností nielen zrakom, ale najmä hmatom.“ (Žídek, 1997)

Samotné používanie manipulácií ešte negarantuje úspešnosť vo vyučovaní matematiky. Veľkú úlohu zohráva aj učiteľ, ktorý usmerňuje vyučovacie hodiny tak, aby pomohli žiakom objaviť a používať nové matematické poznatky.

Ako vidíme aj v tabuľke 1, podiel zapamätaných informácií je najvyšší pri zapojení vlastnej skúsenosti žiaka. Preto je potrebné, aby sa žiak vlastnou tvorbou podieľal pri získavaní informácií.

Formalizovaná podoba informácií vstupný informačný kanál	Podiel zapamätaných informácií
čítané informácie	10 %
počúvané informácie	20 %
videné informácie	30 %
zrak + sluch + aktivita	70 %
zrak + sluch + aktivita + vlastné skúsenosti	85 %

Tab. 1 Podiel zapamätaných informácií v závislosti od formy a spôsobu ich prijímania (Stoffová, 2004)

Stavebnica POLYDRON

Geometrické modelovanie niektorých telies značne uľahčuje geometrický konštrukčný systém s názvom POLYDRON. V tejto podkapitole uvádzame opis a didaktické možnosti využitia tohto systému.

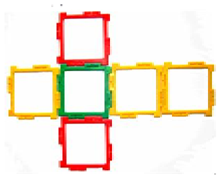
Polydron je systém pevných farebných modelov nasledovných útvarov: rovnostranný trojuholník (v dvoch veľkostiach), rovnoramenný trojuholník, pravouhlý rovnoramenný trojuholník, štvorec, obdĺžnik, pravidelný päťuholník a pravidelný šesťuholník. Základná vlastnosť modelov uvedených n-uholníkov spočíva v možnosti jednoduchého spájania pomocou jedinečnej závesnej svorky. Na spojenej hrane je možné vykonať „ohýbanie“. Táto vlastnosť umožňuje využitie týchto modelov pri zhotovovaní rôznych konvexných i nekonvexných telies. Jednotlivé útvary sú vyrábané z umelej hmoty v štyroch farbách: červená, modrá, zelená a žltá. Svoje korene vzniku má viac ako 30 ročné.

V roku 1970 pracoval strojárenský konštruktér Edward Harvey na jednom projekte riešenia ohybného pántu a výsledok tohto patentu bol základom pre veľmi úspešný a medzinárodne uznávaný systém.

Povrch kocky, kvádra a hranola

Stavebnicu Polydron môžeme vhodne začleniť už pri oboznamovaní sa s telesami, s ich povrchom a s ich sieťami. Sieť telesa vznikne rozložením stien do roviny tak, aby po ich opätovnom zložení vzniklo teleso. Steny telesa majú v sieti spoločné niektoré celé strany. (Šedivý a kol., 2007) Pomocou stavebnice vieme docieliť, že v krátkom čase si žiaci vymodelujú teleso i jeho sieť.

Sieť kocky tvorí šesť zhodných štvorcov.
Povrch hranola počítame: $S = 6.a.a$.

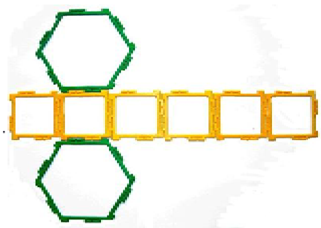


Obr. 1

Sieť kvádra sa skladá zo šiestich obdĺžnikov, ktorých rozmery sú určené rozmermi kvádra. Ak na protiľahlé steny s rovnakých obsahom použijeme prvky stavebnice rovnakej farby, uľahčuje to pre žiakov lepšie pochopenie vzorca pre povrch kvádra: ($S = 2.a.b + 2.a.c + 2.b.c$).

Sieť hranola sa skladá z dvoch podstáv a plášťa. Plášť hranola tvoria obdĺžniky.

Povrch hranola počítame: $S = 2.S_p + Q$.

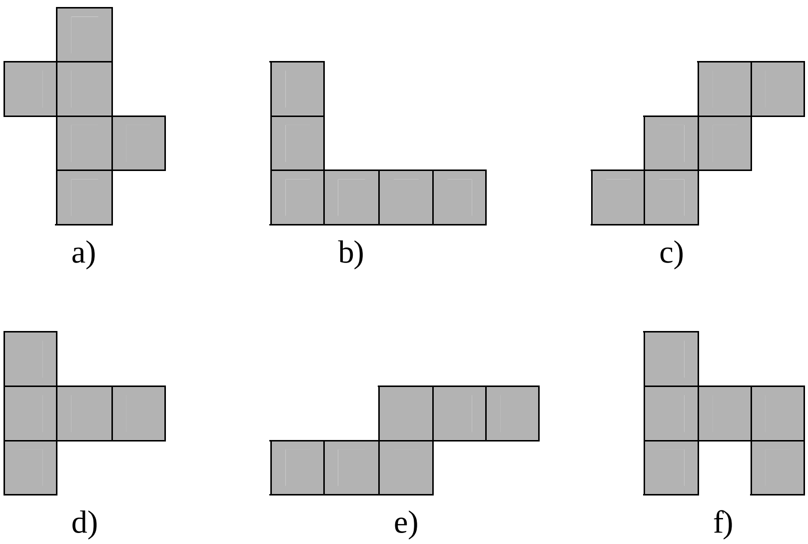


Obr. 2

Ukážky úloh

Úloha 1

Ktoré z obrázkov sú sieťami kocky a ktoré nie sú?

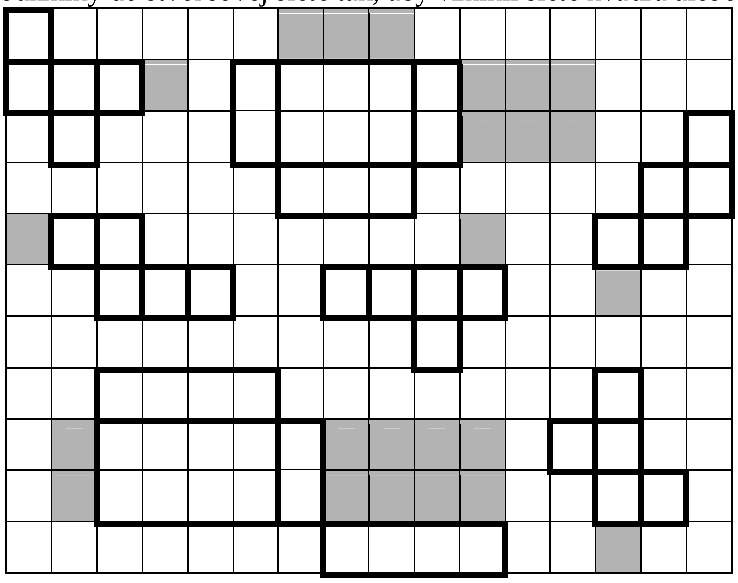


Obr. 3

Riešenie
a), c), e) – áno, b), d). f) - nie

Úloha 2

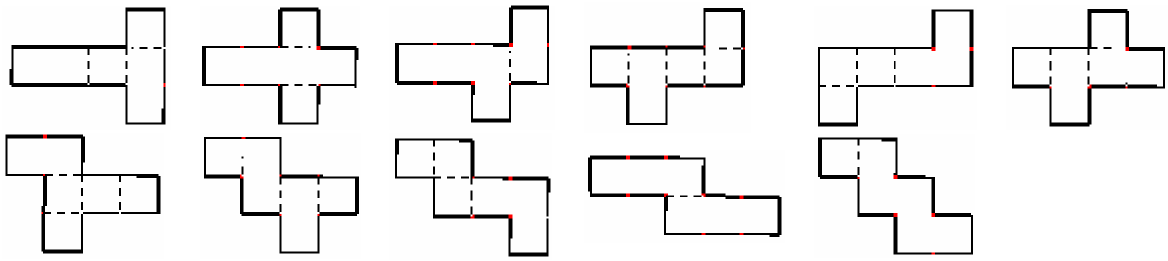
Dokresli štvorce a obdĺžniky do štvorcovej siete tak, aby vznikli siete kvádra alebo kocky.



Riešenie
Jedným z riešení sú doplnené sivé štvorce k zadaným (hrubo orámované) štvorcom.

Úloha 3

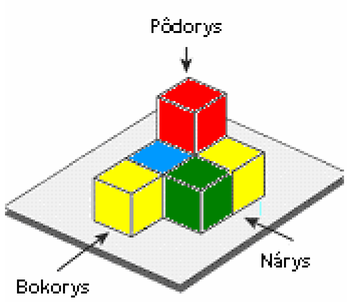
Nájdite všetky rôzne siete kocky.
Riešenie



Obr. 4

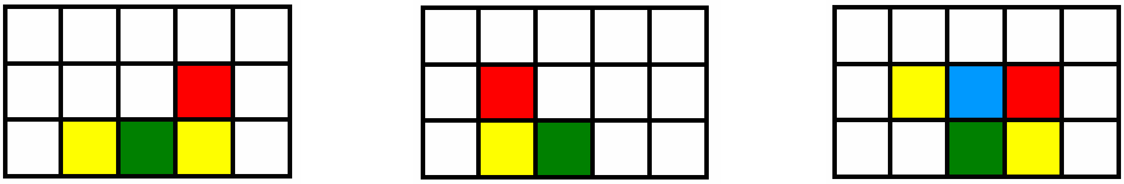
Úloha 4

Zostavte 6 kociek pomocou stavebnice Polydron, uložte ich podľa obr. XX. Zakreslite na štvorčekový papier ich nárys (pohľad spredu), pôdorys (pohľad zhora) a bokorys (pohľad zľava).



Obr. 5

Riešenie



a) nárys b) bokorys c) pôdorys

Obr. 6

Záver

V tomto príspevku uvádzame niektoré tematické celky zo stereometrie a vybrali sme niekoľko úloh, pri ktorých sa stavebnica POLYDRON ukazuje ako vhodná didaktická pomôcka. Nevyčerpali sme všetky možnosti jej využitia vo vyučovacom procese. Záleží od učiteľa, jeho možností a dobrej vôle ako túto užitočnú didaktickú pomôcku zaradí do vyučovania matematiky.

Literatúra

[1] Molnár, J. - Mikulenková, H.: *Matematika 5. ročník*, 1. díl. Prodos Olomouc, 2006, ISBN 80-85806-55-X.

[2] Molnár, J. a kol.: *Matematika 6 – pracovní sešit s komentářem pro učitele*. Prodos Olomouc, 1998. ISBN 80-7230-001-6.

[3] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 6. ročník základných škôl*, 1. časť, 1. vydanie, Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1998, ISBN 80-08-02677-4

[4] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl*, 1. časť, 1. vydanie, Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 1999, ISBN 80-08-02679-0

[5] Šedivý, O. a kol.: *Matematika pre 7. ročník základných škôl*, 2. časť, 2. vydanie, Slovenské pedagogické nakladateľstvo Bratislava, 2001, ISBN 80-08-03303-7.

[6] Šedivý, O. – Pavlovičová, G. – Rumanová, L. – Vallo, D.: *Stereometria – umenie vidieť a predstavovať si priestor*. Fakulta prírodných vied UKF v Nitre, edícia Prírodovedec č. 271. Nitra, 2007. ISBN 978-80-8094-180-2.

[7] Židek, O.: *Polydron verzus Geomag*. In: zborník z medzinárodnej vedeckej konferencie Príprava učiteľov elementaristov v novom storočí, s. 423 – 427, UPJŠ, Prešov, 2002, ISBN 80-8068-146-5.

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: kvidermanova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

TEMATICKÝ CELOK „OBJEM A POVRCH TELIES“ V 9.ROČNÍKU ZŠ A APLIKAČNÉ ÚLOHY

JÚLIA ZÁHORSKÁ

ABSTRACT. We come across different types of tasks, exercises and problems in teaching mathematics. In the article we provide the review of most frequently used word problems within teaching of thematic unit The Volume and Area of Solids in the 9th Grade of Primary Schools. Furthermore, two application problems suitable for this thematic unit are presented.

Úvod

V 9. ročníku ZŠ je zaradený do vyučovania matematiky tematický celok „Objem a povrch telies“, podľa učebných osnov matematiky pre 5. až 9. ročník ZŠ v rozsahu 22 vyučovacích hodín. Toto rozpätie si však učiteľ môže prispôsobiť podľa podmienok v triede a vlastných nárokov. Učiteľ v tomto tematickom celku sleduje vo výchovno–vzdelávacom procese dosiahnutie nasledovných cieľov:

- vedieť premieňať jednotky povrchu a objemu,
- vedieť popísať kocku, kváder, hranol, valec, ihlan, kužeľ, guľu, pomenovať základné prvky,
- vedieť vypočítať povrch a objem kocky, kvádra, hranola, valca, ihlana, kužeľa, gule,
- vedieť použiť získané zručnosti aj pri riešení náročnejších úloh na výpočet povrchu a objemu telies (aj s využitím goniometrie ostrého uhla),
- rozvíjať priestorovú predstavivosť,
- vedieť riešiť úlohy z praxe (pochopiť užitočnosť geometrie).

Učiteľ sa snaží dosiahnuť tieto ciele tak, že vysvetlí a podľa možností upevní teoretický základ potrebný pre zvládnutie uvedenej problematiky a potom pristúpi k riešeniu aplikačných úloh. Ako uvádza R.Fischer a G.Malle (1992, s.110), mnohé z aplikačných úloh, ktoré sú vo vyučovacom procese v matematike riešené, sú len „zaobalené úlohy čistej matematiky“. Nimi sa síce žiakom sprostredkuje istý matematický obsah alebo spôsob riešenia, ale neprinášajú požadovaný efekt na dosiahnutie cieľov aplikačne orientovaného vyučovania matematiky. Riešením aplikačných úloh by sa žiaci mali naučiť formulovať problémy, vedieť získavať informácie, potrebné k ich riešeniu, vedieť ich riešiť v súvislostiach a napokon vedieť sformulovať názory a závery týchto riešení. Dôležitá je aj schopnosť spolupráce pri ich riešení. Problematika aplikačných úloh sa dostáva v súčasnosti do popredia vo vyučovaní matematiky aj v súvislosti s realizáciou medzinárodných meraní úrovne vedomostí našich žiakov a zisťovaním úrovne matematickej gramotnosti. ŠPÚ v tomto školskom roku prvýkrát zahrnul úlohy na zisťovanie úrovne matematickej gramotnosti aj do Testovania 9 - 2008.

1 Ukážky slovných úloh

V našom článku venujeme pozornosť tematickému celku „Objem a povrch telies“ a v tejto súvislosti uvádzame rôzne typy úloh, s ktorými sa v súčasnosti najčastejšie stretávame v rôznych typoch zbierok, v učebniciach a v štandardoch, pričom neuvádzame konkrétne hodnoty, nepovažujeme ich v tomto kontexte za dôležité. Rovnako ani neuvádzame konkrétne zdroje priamo pri jednotlivých úlohách, mnohé sú v malej obmene vo viacerých zdrojoch (sú uvedené v zozname použitej literatúry) a niektoré sú použité priamo z vlastnej učiteľskej praxe.
Prehľad najčastejšie používaných slovných úloh na výpočet objemu a povrchu telies:

1) Z ... malých kociek s hranou ... postavíme väčšiu kocku. Aký je jej povrch?
2) Vypočítajte množstvo vody v bazéne tvaru kvádra s rozmermi ... , ak je naplnený do 2/3 výšky.
3) Zmestí sa do akvária tvaru kvádra s rozmermi ... 130 l vody? Ak áno, do akej výšky siaha jej hladina?
4) Aká je hmotnosť sklenej výplne dverí s rozmermi ... ak hustota skla je ... ?

5) Pilier tvaru pravidelného štvorbokého kolmého hranola s rozmermi ... je postavený z tehál, pričom na 1 m^3 muriva treba 280 tehál. Koľko tehál budeme potrebovať na jeho postavenie, ak na straty musíme pripočítať 5% vypočítaného množstva?
6) Koľko áut s nosnosťou ... ton bude potrebných na odvoz zeminy po kopaní studne s rozmermi ... , ak hustota zeminy je ... ?
7) Okolo kruhového záhonu s priemerom ... chceme vysypať pieskom 2 m široký chodník. Koľko m^3 piesku budeme potrebovať, ak hrúbka vrstvy piesku bude ... ?
8) Hrniec na polievku tvaru valca má rozmery ... . Pre koľkých hostí vystačí polievka, ak je naplnený do 2/3 výšky a na jednu porciu rátame ... litra?
9) Miestnosť s rozmermi ... s jedným oknom s rozmermi ... a jednými dverami s rozmermi ... chceme vymaľovať. Koľko korún to bude stáť, ak jeden m^2 maľovky stojí ... Sk?
10) Nádrž tvaru kvádra má rozmery ... . Prítokom natečie za 1 minútu 10 l vody. Do akej výšky bude siahať hladina pol hodiny po otvorení prítoku?
11) Železničný násyp ... dlhý má priečny rez tvaru rovnoramenného lichobežníka s rozmermi ... . Vypočítajte, koľko m^3 zeminy je v násype?
12) Váza tvaru valca má rozmery ... . Hrúbka dna je ... . V akej výške je hladina, ak je v nej 1 liter vody?
13) Plechový súdok tvaru valca má rozmery ... . Koľko kg farby budeme potrebovať na jeho natretie, ak na 1,5 m^2 potrebujeme 1 kg farby?
14) Aká je výška 5-litrového hrnca tvaru valca s priemerom dna ... ?
15) Koľko metrov medeného drôtu hrúbky ... má hmotnosť ... kg?
16) Matica skrutky má tvar pravidelného šesťbokého hranola s rozmermi ... a otvorom tvaru valca s priemerom ... . Aká je jej hmotnosť, ak hustota použitého materiálu je ...?
17) Za koľko minút sa naplní cisterna tvaru valca s rozmermi ... , ak za 1 minútu natečie ... litrov vody?
18) Plynojem tvaru valca má rozmery ... . Koľko plechu budeme potrebovať na jeho zhotovenie, ak na odpad musíme pripočítať 5% vypočítaného materiálu? Koľko kg farby spotrebujeme na jeho natretie, ak 1 kg vystačí na 8 m^2 plochy?
19) 1 m^3 vzduchu má hmotnosť 1,293 kg. Aká je hmotnosť vzduchu vo vašej učebni?
20) Mosadzná kocka má hmotnosť ... kg. Aká je dĺžka jej hrany, ak hustota je ... ?
21) Koľko litrov vody sa odobralo z nádoby tvaru valca s priemerom ... , ak hladina v nádobe klesla o ... cm?
22) Aká je hmotnosť betónového príklopu na studňu (tvar valca) s rozmermi ... , ak hustota betónu je ... ?
23) Koľko látky sa spotrebuje na zhotovenie stanu tvaru pravidelného štvorbokého ihlana (kužeľa) s rozmermi ... . Na odpad a zašitia pripočítajte 7% materiálu.
24) Z valčeka s rozmermi ... vyrobia na sústruhu kužeľ s rozmermi ... . Koľko percent materiálu bude tvoriť odpad?
25) Koľko kusov ložiskových guľôčok priemeru ... má hmotnosť ... , ak hustota materiálu je ... ?
26) V akváriu tvaru kvádra s rozmermi dna … je ... vody. Do akej výšky dosahuje hladina, ak je naplnené na 90% svojho objemu?
27) Nádoba na vodu má tvar ... s rozmermi ... . Po ponorení telesa stúpla hladina vody o ... cm. Zistite, koľko l vody musíme z nádoby odobrať, aby sa hladina dostala na pôvodnú úroveň?
28) V nádobe tvaru valca (kvádra, ...) s rozmermi ... je ... litrov vody.
    a) Do akej výšky siaha hladina?
    b) Akú plochu (v dm^2) tejto nádoby obmýva voda?
29) Na záhradu s výmerou ... napršalo ... mm vody. Koľkými krhlami s objemom ... litrov by sme ju rovnako výdatne poliali?
30) Chufevova pyramída (najväčšia Egyptská pyramída) v tvare pravidelného štvorbokého ihlana má podstavnú hranu 230 m a bočná stena zviera s rovinou podstavy uhol 50°. Aká je jej výška?
31) Cestný valec má rozmery ... :
    a) Koľko m^2 cesty urovná, ak sa otočí x-krát?
    b) Koľkokrát sa otočí, ak povalcuje ... km dlhý úsek?

32) Kornútik na zmrzlinu má tvar rotačného kužeľa s rozmermi ... . Do koľkých kornútikov sa zmestí ... litrov zmrzliny, ak do jedného dáme dvojnásobok jeho objemu?
33) Nádoba tvaru kocky má povrch ... . Koľko litrov vody sa do nej zmestí?
34) Cheopsova pyramída tvaru pravidelného štvorbokého ihlana má hranu podstavy 232 m a výšku 148,5 m. Koľko ton kameňa je v nej, ak hustota použitého kameňa je 2,7 g/cm^3? Vypočítajte pomer obsahov plôch podstavy a kruhu, ktorého polomer je rovnaký ako je výška pyramídy (tento pomer obsahov je pri každej Egyptskej pyramíde rovnaký).
35) Z obdĺžnika s rozmermi ... sme zvinuli plášť rotačného valca. Vypočítajte objem takto utvoreného valca.
36) ... brokov s priemerom zlejeme do jednej gule. Aký bude jej priemer?
37) Akú hmotnosť má 1 km medeného (hliníkového) drôtu s priemerom ...a hustotou materiálu... ?
38) Stĺp na lepenie plagátov má rozmery ... . Koľko plagátov s rozmermi ... sa naň zmestí?
39) Koľko m^2 plochy treba na obitie strechy hradnej veže tvaru pravidelného štvorbokého (šesťbokého) ihlana (kužeľa) s rozmermi ... , ak na zahnutie a straty treba pripočítať 8% materiálu?
40) Pretekárska guľa má hmotnosť ... kg, hustota materiálu je ... . Aký je jej priemer?
41) Koľko korún zaplatíme za natretie strechy tvaru pravidelného štvorbokého ihlana (kužeľa), ak výška strechy je 12 m a bočná stena zviera s podstavou uhol ... , ak natretie 1 m^2 stojí ... Sk?
42) Váza má tvar pravidelného šesťbokého kolmého hranola s rozmermi ... . Koľko litrov vody sa do nej zmestí?
43) Rybník má rozlohu 2,36 ha. Jeho dno sa rovnomerne zvažuje k stredu, kde je hĺbka 3,2 m. Objem vody v rybníku môžeme určiť približne ako objem kužeľa s výškou 3,2 m a obsahom podstavy 2,36 ha.
    a) Vypočítaj objem rybníka.
    b) Za koľko hodín sa rybník vypustí, keď po otvorení priepustu vytečie za 1 sekundu priemerne 9 hl vody. Priepust je v najnižšom bode dna. (Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami, s.95)
44) Nádoba tvaru kužeľa má rozmery ... . Po okraj je naplnená vodou. Túto vodu prelejeme do nádoby tvaru ... s rozmermi dna ... . Do akej výšky siaha hladina?

Niektoré z uvedených úloh sa častejšie objavujú nielen v literatúre, ale aj pri precvičovaní a upevňovaní učiva na vyučovacích hodinách. Ich riešením môžu žiaci nadobudnúť zručnosti potrebné k zvládnutiu učiva uvedeného tematického celku. Je vhodné, ak sú texty úloh odrazom reálneho sveta. Nájdu sa však medzi nimi aj úlohy nevhodné, od reality dosť vzdialené.

2 Aplikačné príklady

Uvádzame aplikačné príklady, ktoré možno využiť v tematickom celku Objem a povrch telies.

Príklad č. 1:

Pán Bielik sa rozhodol, že zrekonštruuje oplotenie pred svojim domom. Zistil, že bude musieť postaviť dva murované piliere (aby do nich osadil bránku) a vyhovovali by mu tvaru pravidelného štvorbokého hranola s hranou podstavy približne 50-60 cm, vysoké asi 1,2 m. Rozhodol sa, že použije „plnú tehlu“, o ktorej si zistil, že má rozmery 290 x 140 x 65 mm a jej hmotnosť je približne 4 kg. V tejto súvislosti musel riešiť viac problémov:

a) Aké budú presné rozmery pilierov, aby čo najviac vyhovovali jeho predstave o veľkosti pilierov a aby mohol použiť celé tehly (nerozbíjať)? Koľko tehál bude potrebovať?
b) Jedna nová tehla stojí 12 Sk, použitá a očistená 4-5 Sk. Koľko korún by ušetril, ak by použil starú tehlu? Ušetril by?
c) Vlastní osobné auto s prívesným vozíkom s ložnou plochou 1240 x 965 mm, hĺbkou 850 mm a užitočným zaťažením 270/370 kg. Koľkokrát bude musieť ísť do predajne, aby dodržal stanovenú hranicu pre bezpečné a optimálne ovládanie prívesného vozíka počas jazdy? Nebolo by lepšie, keby si ju nechal doviezť a zaplatil by za dovoz podľa ponuky predajcu 500

Sk, ak je predajňa vzdialená od jeho domu 16 km a priemerná spotreba jeho auta pri zapojení prívesného vozíka je 9 litrov benzínu na 100 km ?

Riešenie:

a) Tehlu je vhodné ukladať tak, aby podstava tehly mala rozmery 290x140 (mm). Nákres uloženia:

	290mm	290mm
140mm		
140mm		
140mm		
140mm		

To znamená, že by piliere neboli tvaru pravidelného štvorbokého hranola, ale tvaru kvádra, ktorého podstava bude mať rozmery: 2 . 290 = 580 (mm)
4 . 140 = 560 (mm)

Približné rozmery podstavy piliera budú: 58 x 56 cm, pretože nevieme presne hrúbku spojovacieho materiálu.

Zistíme výšku piliera: hrúbka 1 tehly je 65 mm = 6,5 cm , na výšku 1,2 m = 120 cm by potreboval nasledovný počet vrstiev : 120 : 6,5 = 18,46 $\approx$ 18 ... Túto hodnotu sme zaokrúhlili nadol, lebo výška bude ovplyvnená aj hrúbkou spojovacieho materiálu. Samotné tehly budú dosahovať do výšky: 18 . 6,5 = 117 (cm) a spolu so spojovacím materiálom bude jeho výška asi 125 cm, čo by mu mohlo vyhovovať, keďže nebol jednoznačne rozhodnutý o rozmeroch pilierov.

Na 1 pilier pri 18 vrstvách bude potrebovať:
4 . 2 . 18 = 144 tehál
Na 2 piliere by potom potreboval:
2 . 144 = 288 tehál

b) Cena : 1 kus po 12 Sk ....12 . 288 = 3456 (Sk)
1 kus po 5 Sk ......5 . 288 = 1440 (Sk)

V cene je výrazný rozdiel v tom, či kúpi novú alebo starú tehlu. Kúpou starej tehly by mohol ušetriť: 3456 – 1440 = 2016 (Sk), možno i viac, ak sa mu podarí kúpiť starú tehlu za nižšiu cenu. Rozhodnúť sa musí sám podľa toho, koľko peňazí chce do toho investovať a aké sú jeho nároky na vzhľad pilierov.

c) Potrebuje 288 tehál. Ak je hmotnosť jednej tehly 4 kg, potom hmotnosť celého nákladu je 288 . 4 = 1152 (kg)

Užitočné zaťaženie 270/370 kg znamená, že optimálne by bolo rozpätie od 270 kg do 370 kg.

Ak by chcel naložiť minimálne množstvo, náklad sa zmestí na: 1152 : 270 = 4,27 vozíka.
Ak by chcel naložiť maximálne množstvo, náklad sa zmestí na: 1152 : 370 = 3,11 vozíka.

Z toho vyplýva, že pri kúpe tehál by musel ísť odviezť tehly na 4-krát a zakaždým by odviezol: 1152 : 4 = 288 kg tehál, t. j. 72 kusov.

Dôležité je však preskúmať, koľko tehál sa do prívesného vozíka zmestí:

1240 : 290 $\approx$ 4	1240 : 140 $\approx$ 8
965 : 140 $\approx$ 6	965 : 290 $\approx$ 3
4 . 6 = 24 (tehál)	3 . 8 = 24 (tehál)

- počet vrstiev: 850 : 65 $\approx$ 13

Na prívesný vozík sa zmestí: 24 . 13 = 312 tehál. Musí však dodržať užitočnú hmotnosť. Z toho vyplýva, že 72 tehál môže odviezť na jedenkrát (v prívesnom vozíku zostane ešte dosť voľného miesta, ale musí dodržať užitočnú hmotnosť).

Cena dopravy: najazdil by 16 . 2 . 4 = 128 (km) a zaplatil by približne:
9 l benzínu stojí približne 360 Sk.............100 km

x Sk..............128 km

$$x = \frac{360.128}{100}$$

x = 460,80 Sk

Z uvedeného výpočtu vyplýva, že pán Bielik by pri takomto odvoze ušetril tak málo peňazí, že vhodnejšie je dať si doviezť túto tehlu od predajcu.

Príklad č. 2:

Na obrázku je bazén, ktorý by sme si chceli doma vybudovať. Po zvážení nákladov na jeho vybudovanie by sme chceli ešte vedieť, koľko korún nás bude stáť výmena a chlórovanie vody.

Rozmery bazéna: priemer dna je 457 cm, hĺbka bazéna je 107 cm, (hladina vody siaha 15 cm pod horný okraj bazéna)

Cena vody: 1 m^3 stojí 58,20 Sk (vodné + stočné)

Chlórovanie: prípravok, ktorý chceme použiť na udržiavanie vody sa predáva v cene 309 Sk za 0,5 kg balenie alebo 597 Sk za 1 kg balenie a dávkuje sa nasledovne: prvá dávka 230 g prípravku na 20 m^3 vody a potom 200 g na 30 m^3 vody každých 5 až 7 dní.

Riešenie:

Vypočítame množstvo vody v bazéne tak, aby hladina vody bola 15 cm pod horným okrajom, počítame objem valca s priemerom dna 457 cm a výškou 107 – 15 = 92 (cm).

d = 457 cm...r = 457 : 2 = 228,5 (cm)
v = 92 cm
$V = \pi.r^2.v$
$V = 3{,}14 \, . \, 228{,}5^2 \, . \, 92$
$V = 15\,083\,075 \text{ cm}^3$
$V \approx 15 m^3$

Do bazéna takto napustíme približne 15 m^3 vody.

Vypočítame sumu, ktorú zaplatíme za vodu pri jednom napĺňaní bazéna:
1 m^3 .... 58,20 Sk
15 m^3 .... 15 . 58,20 = 873 (Sk)
Za vodu pri jednom napĺňaní zaplatíme približne 873 Sk.

Ďalej budeme počítať náklady na chlórovanie:

Začneme úvahou, ako dlho chceme udržiavať vodu v bazéne tak, aby sme sa mohli v nej okúpať. Mohli by sme prevádzkovať bazén od 1. mája do 15. septembra vrátane, to by vystihovalo naše klimatické podmienky aj s rezervou. Spolu je to 31 + 30 + 31 + 31 + 15 = 139 (dní).

Spotreba prípravku na chlórovanie: prvé chlórovanie.... 230 g prípravku .... 20 m^3 vody
x g prípravku .... 15 m^3 vody
x = (230 . 15) : 20

$$x = 172{,}5$$
$$x \approx 173g$$

Následne budeme chlórovať vodu 139 : 6 ≈ 23 ....približne 23 – krát.

Vypočítame spotrebu prípravku na chlórovanie: 200 g vystačí na 30 m^3 vody, čiže 100 g na 15 m^3 a na 23 – krát to bude 23 . 100 = 2300 g. Spolu s prvým chlórovaním to je: 2300 + 173 = 2473 g ≈ 2,5 kg.

Koľko korún nás bude stáť voda a jej udržiavanie?

Minieme približne 2,5 kg prípravku na chlórovanie, to je spolu 1 . 309 + 2 . 597 ≈ 1500 (Sk), jedna výmena vody bude stáť približne 870 Sk, ak ju budeme meniť (a to by sme mali asi 3-krát), tak nám mierne stúpnu náklady na prípravok, budeme musieť kúpiť 3 kg (na prvé chlórovanie spotrebujeme zakaždým o 73g prípravku navyše, pri troch výmenách vody to je 219 g, celkom potom budeme potrebovať 2473 + 219 = 2692 gramov, kúpiť musíme 3 kg) za 3 . 597 ≈ 1790 (Sk) a voda by nás stála 4 . 870 = 3480 (Sk).

Na záver môžeme vyhodnotiť celkové náklady na vodu a jej údržbu na celé plánované obdobie: 3480 + 1790 = 5270 ≈ 5300 (Sk).

Podobne by sme mohli zostaviť úlohy, ktorými by sme napríklad zisťovali cenu za vymaľovanie konkrétneho bytu (t.j. s uvedenými rozmermi bytu, izieb, okien, dverí...) a porovnanie výhodnosti od rôznych dodávateľov a pod. Zostavovanie takýchto úloh si však vyžaduje veľa času a uvedené údaje je potrebné vždy aktualizovať.

Záver

Zmeny, ktoré sa v súčasnosti uskutočňujú v slovenskom školstve si vyžadujú nové prístupy aj vo vyučovaní matematiky a v pohľade na aplikačné úlohy a ich využívanie. K zostaveniu aplikačných úloh je potrebný v prvom rade nápad, ktorý je potom dotiahnutý do vyhovujúceho záveru tak, aby boli praktické a aktuálne. Nemusia byť veľmi numericky náročné, ale túto požiadavku je ťažké splniť, keďže sú odrazom reálnych situácií. Bolo by vhodné zostaviť zbierku aplikačných úloh nielen k tematickému celku Objem a povrch telies, ale ku každému tematickému celku a ročníku učiva matematiky ZŠ.

LITERATÚRA

[1] Čeretková, S., Šedivý, O. 2005. Aktuálne problémy teórie vyučovania matematiky. Nitra: UKF FPV, 144 s. ISBN 80-8050-923-9

[2] Fischer, R., Malle, G. 1992. Človek a matematika. Bratislava: SPN, 336 s. ISBN 80-08-01309-5

[3] Fulier, J., Šedivý,O. 2001. Motivácia a tvorivosť vo vyučovaní matematiky. Nitra: FPV UKF, 270 s. ISBN 80-8050-445-8

[4] Hrdina, Ľ., Maxian, M. 2002. Príklady na prijímacie skúšky na stredné školy. Bratislava: SPN. ISBN 80-08-03319-3

[5] Ištoková, A., Marhefková, V. 2002. Riešené testy z matematiky na prijímacie skúšky na stredné školy. Bratislava: SPN. ISBN 80-08-03336-3

[6] Kolbaská, V., Čapová, M. 2001. Chystáte sa na strednú školu? Nitra: Enigma. ISBN 80-85471-77-9

[7] Šedivý, O. a kol. 2002. Matematika pre 9. ročník základných škôl. Bratislava: SPN. ISBN 80-08-02947-1

[8] Vzdelávací štandard s exemplifikačnými úlohami z matematiky pre 2. stupeň základnej školy. 2002. MŠ SR. ISBN 80-7098-294-2

[9] Učebné osnovy z matematiky pre 5. až 9. ročník základnej školy.1997. Dostupné: http://www.statpedu.sk/buxus/generate_page.php?page_id=886

Mgr. Júlia Záhorská
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: jzahorska@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

NIEKOĽKO HLAVOLAMOV A HIER PODPORUJÚCICH ROZVOJ LOGICKÉHO MYSLENIA ŽIAKOV

LUCIA ZÁHUMENSKÁ

ABSTRACT. Pupils generally consider mathematics to be a difficult subject. In the paper, we try to provide some examples of mathematical games and puzzles that, if properly used, can motivate, attract the attention of pupils and persuade them that mathematics is useful and interesting subject. With the help of these teasers, their logical thinking and creativity can improve, and even the weaker students may take a chance to demonstrate and better their abilities.

Úvod

Matematika je často predovšetkým žiakmi označovaná za „ťažký“ predmet. Existujú však rôzne spôsoby, ako zlepšovať postoj žiakov k matematike, vzbudzovať v nich záujem o matematiku, motivovať ich k jej štúdiu, i učeniu sa vo všeobecnosti. Najjednoduchšou metódou ako to dosiahnuť, je uplatňovať vo vyučovaní matematiky už od základnej školy prirodzené formy učenia sa. Najprirodzenejšou činnosťou dieťaťa je pritom od ranného detstva hra, cez ktorú spoznáva svet a učí sa novým veciam. Preto je pochopiteľné, že práve hra a jej prvky môžu matematiku žiakom priblížiť. Hra, ako aj zaujímavý spôsob výučby s využívaním úloh rekreačnej matematiky alebo tzv. úloh na „zdravý rozum“, vedie jej účastníkov k tvorivému spôsobu myslenia, k súťaživosti, k vôli nájsť taký systém hry, aby hráč vyhral, a tým k vytvoreniu resp. zvýšeniu vnútornej motivácie vyriešiť daný hlavolam alebo nájsť víťaznú stratégiu hry, ako aj k nárastu dôvery vo svoje vlastné schopnosti. Hry a hlavolamy navyše zapájajú do vyučovacieho procesu aj slabších žiakov, ktorí by sa za normálnych okolností radšej neprejavovali. Využívaním takéhoto typu úloh a hier sa tak odstraňujú zábrany žiakov a zvyšuje sa efektívnosť vyučovacieho procesu. Hry a hlavolamy môžu byť pritom zaraďované do ktorejkoľvek organizačnej časti vyučovacej hodiny matematiky; ako každá aktivita vykonávaná v rámci vyučovacieho procesu však musí byť i táto činnosť realizovaná v súlade s didaktickými zásadami, s jasným didaktickým cieľom a až po dôkladnej príprave učiteľa. V nasledujúcej časti uvádzame niekoľko ukážok takýchto hlavolamov a hier, ktoré navyše napomáhajú rozvoju logického, kombinačného i strategického myslenia, a sú vhodné aj pre žiakov druhého stupňa základných škôl.

Ukážky matematických hlavolamov a hier

Pod pojmom hra mnoho ľudí rozumie „súboj“ aspoň dvoch hráčov, ktorý sa v medziach stanovených pravidiel snažia zvoliť si takú stratégiu hry, aby zo súťaže vyšli víťazne. Didaktickou hrou zase označujeme takú hru, ktorou sledujeme dosiahnutie určitého výchovno-vzdelávacieho cieľa, a pojmom matematická hra podľa Hejného (2004) môžeme označiť širokú škálu matematických problémov; vrátane matematických hlavolamov, solitérov, antagonistických hier a hier súťažného charakteru. Z tohto pohľadu teda môžeme matematické hlavolamy klasifikovať ako špecifický druh matematickej hry. Matematické hlavolamy majú pritom obvykle charakter logických hádaniek s pútavým obsahom, vzbudzujúcim zvedavosť žiakov. Ich riešenie je zvyčajne založené na použití triku, avšak veľakrát spočíva rozlúsknutie ich podstaty iba v jednoduchej logickej úvahe. Dôkazom toho sú i prvé dva príklady matematických hlavolamov, ktoré uvádzame. Druhý z príkladov je hlavne z hľadiska logiky náročnejší než prvý, myslíme si však, že oba príklady sú aplikovateľné aj na vyučovacích hodinách matematiky pre druhý stupeň ZŠ.

Príklad 1: Klamári a pravdovravní

Na odľahlom ostrove v Tichom oceáne žijú dve komunity. Všetci členovia prvej komunity majú zelené vlasy, v druhej komunite sú všetci modrovlasí. Jedna z komunít sa nazýva pravdovravnou, pretože všetci jej členovia hovoria vždy pravdu; kým druhá je naopak komunitou klamárov, pretože jej príslušníci stále klamú. Počas návštevy tohto ostrova stretol Európan jeho dvoch obyvateľov, každého z inej komunity. Keďže mali ale obaja vlasy ukryté pod šatkou, obom položil rovnakú otázku: „Máš zelené vlasy?“ Obaja odpovedali rovnako – „nie“.

a) Je možné na základe tejto odpovede zistiť, ktorá komunita klame, a ktorá je pravdovravná?
b) Bolo by to možné, ak by obaja odpovedali na otázku návštevníka „áno“?
c) Ako by sa zmenila situácia, ak by jeden z obyvateľov odpovedal kladne a druhý záporne?

Riešenie. Úlohu sa pokúsime vyriešiť vymenovaním všetkých možných kombinácií. Môžu nastať práve nasledovné situácie:

1. Ak komunita obyvateľov s modrými vlasmi sú pravdovravní, potom obyvatelia so zelenými vlasmi tvoria komunitu klamárov. V tomto prípade by obaja obyvatelia odpovedali na otázku či majú zelené vlasy „nie“.
2. Ak by nastala opačná situácia, t.j. ak naopak komunita obyvateľov so zelenými vlasmi je pravdovravná a modrovlasí obyvatelia sú klamári, obaja domorodí obyvatelia by na otázku Európana odpovedali „áno“.

Iná možnosť nastať nemôže, t.j. zakaždým, keď obaja obyvatelia odpovedia na otázku návštevníka zhodne, je možné jednoznačne povedať, ktorá komunita je pravdovravná, a ktorú predstavujú klamári. V prípade a) je teda komunita modrovlasých pravdovravná, a obyvatelia so zelenými vlasmi sú klamári; kým v situácii b) je to práve naopak. Prípad c), kedy by obyvatelia odpovedali na rovnakú otázku rôzne, nastať za daných okolností vôbec nemôže. □

Príklad 2: Kráľovskí radcovia

Jedného dňa sa kráľ rozhodol otestovať si múdrosť svojich troch radcov. Postavil ich preto do radu za sebou, každému z nich dal na hlavu klobúk a povedal: Mal som tri biele, a dva čierne klobúky. Tri z nich som vám dal na hlavu. Vašou úlohou je zistiť, akej farby je klobúk, ktorý máte na hlave. Nesmiete sa však pritom ani otáčať, ani dohovárať.

Kráľ dal všetkým radcom na hlavu biele klobúky. Môže niektorý z radcov určiť farbu svojho klobúka? Ak áno, ktorý?

Riešenie. Je zrejmé, že tretí z radcov vidí klobúky dvoch radcov stojacich pred sebou, prostredný radca vidí iba farbu klobúka radcu pred sebou, a prvý radca v zástupe nevidí žiaden. Skúsme uvažovať ako jednotliví radcovia v zástupe:

Posledný radca síce vidí, že dvaja radcovia pred ním majú biele klobúky, ale stále môže mať na hlave ako biely, tak aj čierny klobúk, a pretože je rozvážny, mlčí.

Prostredný radca vidí biely klobúk radcu stojaceho pred ním, ale rovnako ako tretí radca nemôže si byť istý farbou svojho klobúka.

Prvý radca uvažuje: Ak by som mal na hlave čierny klobúk, a rovnako tak aj druhý radca za mnou, posledný radca by vedel, že má určite biely klobúk. Ale on je ticho, neozýva sa, takže táto alternatíva nenastala. To však znamená, že aspoň jeden z nás, prvých dvoch radcov v zástupe, má biely klobúk.

Avšak ak by som to bol ja, kto má čierny klobúk, druhý radca by tiež vedel z mlčania posledného radcu určiť, že má biely klobúk. Aj ten je však ticho, a preto ja, prvý radca, nemôžem mať čierny klobúk. Mám biely klobúk.

Jedine prvý radca tak môže určiť, akú farbu má jeho klobúk. □

Pri hľadaní odpovedí vedúcich k vyriešeniu predchádzajúcich hlavolamov, a hlavne druhého z nich, je riešiteľom nesporne veľmi nápomocná vycibrená logika. Aby však boli žiaci schopní riešiť i podobne náročné hlavolamy akým je ten predchádzajúci, je vhodné ich logické myslenie najskôr čo najviac rozvíjať pomocou problémov rôznorodého charakteru. Nasledujúca hra je pomerne známa, dosiaľ bolo vytvorených mnoho jej variantov, a je aplikovateľná aj v rámci kooperatívnej, resp. skupinovej formy vyučovania. Môže napomáhať nielen k zdokonaľovaniu logiky, ale aj k zlepšovaniu socializácie žiakov.

Príklad 3: Kto chová zebru?

Na ulici stojí v rade 5 domov, každý je inej farby. Žije v nich 5 ľudí rôznej národnosti, každý z nich chová iné zviera, pije iný nápoj a fajčí iný druh tabaku. Vieme, že:

1. Angličan žije v červenom dome.
2. Španiel má psa.

3. Kávu pijú v zelenom dome, ktorý stojí vedľa bieleho domu, napravo od neho.
4. Francúz má rád čaj.
5. Ten, kto fajčí veľké cigary, má rád papagájov.
6. Malé cigary fajčia v žltom dome.
7. Mlieko pijú v strednom dome.
8. Švéd býva v krajnom dome zľava.
9. Ten, kto fajčí cigarety, býva v dome, ktorý susedí s domom, kde chovajú opicu.
10. Ten, kto fajčí malé cigary, býva vedľa majiteľa mačky.
11. Ten, kto fajčí fajku, pije broskyňový džús.
12. Talian vôbec nefajčí.
13. Švéd býva vedľa modrého domu.

Kto chová zebru?

Riešenie. Najvhodnejšou metódou riešenia je vytvoriť si schematickú reprezentáciu domov, do ktorej budeme na základe poskytnutých indícií postupne vpisovať údaje o jeho majiteľoch. Obsah podmienok 7, 8 a 13 vieme zapísať jednoznačne. Ak sa však pokúsime určiť na základe poskytnutých informácií farbu jednotlivých domov, zistíme, že jednoznačne determinovaná je iba farba prvého domu zľava, ktorý je žltý. Podľa tretej podmienky je ďalej dom bielej farby buď v strede, alebo druhý sprava. Dostávame tak dva varianty tabuliek s odlišným umiestnením domov bielej, zelenej a červenej farby, pričom do oboch z nich vieme ďalej jediným spôsobom zapísať podmienky 1, 3, 6 a 10 (Tab. 1 a Tab. 2).

	1. zľava	**2.zľava**	**stredný**	**2. sprava**	**1. sprava**
Farba	žltý	modrý	biely	zelený	červený
Národnosť	Švéd	*Francúz*	*Španiel/Talian*	*Talian/Španiel*	Angličan
Nápoj		*čaj*	mlieko	Káva	*broskyňový džús*
Tabak	malé cigary		/nefajčí	nefajčí/	*fajka*
zviera		mačka	pes/	/pes	

Tab. 1

	1. zľava	**2.zľava**	**Stredný**	**2. sprava**	**1. sprava**
Farba	žltý	modrý	Červený	biely	zelený
Národnosť	Švéd		Angličan		
Nápoj			Mlieko		káva
Tabak	malé cigary				
zviera		mačka			

Tab. 2

Zaoberajme sa najskôr prvou tabuľkou (všetky ďalej zapísané údaje budeme značiť kurzívou). Podmienku 4 vieme do nej zapísať jediným spôsobom, následne zaznamenáme aj podmienku 11. Španiela a Taliana vieme ale do prvej schémy doplniť dvomi spôsobmi. Po následnom zapracovaní nápovedí 2 a 12 do Tab. 1 však nastane situácia, že by neplatila piata podmienka, a preto umiestnenie v Tab. 1 k vyriešeniu úlohy nevedie.

Skúmajme teraz druhú tabuľku. Je vidieť, že pre Tab. 2 sú dve možnosti zapísania indície 4. Dostaneme tak nové dve tabuľky (Tab. 2a) a 2b)), do ktorej budeme postupne zapracovávať podmienky, až kým v niektorom z prípadov neprídeme k sporu. Už doplnením indície 2 do Tab. 2a) ale zistíme, že sa do nej následne nedajú zaznamenať podmienky 11 a 12 bez toho, aby nastal spor, a preto táto tabuľka nemôže viesť k správnemu riešeniu. Zostáva nám teda tabuľka 2b), ktorú postupne doplníme podľa podmienok 11, 12, 2, 5 a 9.

	1. zľava	**2.zľava**	**Stredný**	**2. sprava**	**1. sprava**
Farba	žltý	modrý	Červený	biely	zelený
Národnosť	Švéd		Angličan	*Francúz*	*Španiel*
Nápoj			Mlieko	*čaj*	káva
Tabak	malé cigary				
zviera		mačka			*pes*

Tab. 2a)

	1. zľava	**2.zľava**	**Stredný**	**2. sprava**	**1. sprava**
Farba	žltý	modrý	červený	biely	zelený
Národnosť	Švéd	*Francúz*	Angličan	*Španiel*	*Talian*
Nápoj		*čaj*	mlieko	*broskyňový džús*	káva
Tabak	malé cigary	*cigarety*	*veľké cigary*	*fajka*	*nefajčí*
Zviera	*opica*	mačka	*papagáj*	*pes*	*ZEBRA*

Tab. 2b)

Táto tabuľka podmienky úlohy spĺňa. Pomocou nej sme tak dospeli k záveru, že zebru chová Talian v prvom dome sprava. Je pritom vidieť, že úloha sa dá vyriešiť aj bez informácie o piatom nápoji. □

Dosiaľ uvedené úlohy sme síce z didaktického hľadiska klasifikovali ako matematické hry bystriace vtip i myslenie riešiteľov, napriek tomu ale zrejme nespĺňajú predstavu väčšiny laikov o typickej hre. Chýba v nich totiž súťaživý prvok, forma „súboja“, v ktorom dve strany hrajú proti sebe podľa stanovených pravidiel v snahe zvíťaziť nad protivníkom. Posledná ukážka matematickej hry je takouto „hrou v pravom slova zmysle“. Ide totiž o klasickú aktivitu súťažného typu, tzv. hru NIM, pri ktorej hráči odoberajú z kopy určitého počtu kameňov v jednom ťahu iba povolený počet kameňov. Hráči sa pritom pokúšajú nad súperom zvíťaziť aplikovaním tzv. víťaznej stratégie (ak ju poznajú), t.j. takého spôsobu hry, ktorým sabotujú snahu protihráča zvíťaziť a zámerne ho uvádzajú do kritických pozícií. Kritickou pozíciou tu rozumieme takú situáciu, v ktorej hráč, ktorý je na ťahu, určite prehrá, ak jeho protivník vie, ako správne zahrať.

Príklad 4: Môže niektorý z hráčov stále iba vyhrávať?

Na kope je 17 kameňov. Dvaja hráči striedavo berú z kopy 1, 2 alebo 3 kamene, pričom vyhráva ten hráč, ktorý zoberie posledný kameň (kamene). Zistite, či existuje pre začínajúceho hráča vyhrávajúca stratégia (t.j. či existuje taký systém hry, že začínajúci hráč vyhrá vždy, bez ohľadu na to, ako zahrá protihráč).

Riešenie. Hra typu NIM je jednou z úloh, ktorú si môžu zahrať žiaci aj priamo v triede, a sami si tak vyskúšať, či vyhrávajúca stratégia skutočne „funguje“. Aj žiaci, ktorí túto hru predtým nepoznali, po niekoľkých hrách spozorujú, že ak sú na ťahu práve vtedy, keď sú na kope 4 kamene, tak nevyhrajú. Podobne „nebezpečný“ počet kameňov je 8. Aj v tomto prípade totiž hráč vie z kopy vziať len toľko kameňov, že v nasledujúcom kroku ho protihráč ľahko uvedie do pozície zostávajúceho počtu 4 kameňov ak vie, ako správne hrať. Podobne nebezpečné sú z rovnakého dôvodu pozície s počtom 12 a 16 kameňov, t.j. počty kameňov, ktoré sú násobkami štvorky. Hráč, ktorý začína, teda vždy vyhráva, ak vie ako správne zahrať na protihráča. Naznačuje to nasledovná schéma:

$$17 \to 16 \to * \to 12 \to * \to 8 \to * \to 4 \to * \to 0\,,$$

pričom hviezdička v uvedenej schéme reprezentuje situáciu po odobratí 1, 2 alebo 3 kameňov. Víťazná stratégia pre začínajúceho hráča teda za daných podmienok spočíva v tom, že hráč začne odobratím jedného kameňa z kopy, čím uvedie protihráča do kritickej pozície 16, a následne postupne odoberá taký počet kameňov, aby protihráča opäť uviedol do ďalšej kritickej pozície, až nakoniec vezme posledný kameň a vyhrá. □

Záver

V príspevku sme uviedli niekoľko ukážok matematických hlavolamov a hier, ktoré pri správnom zaradení do vyučovania matematiky môžu pomáhať rozvíjať logické i strategické myslenie žiakov. Niektoré z nich môžu byť navyše aj ďalej rozpracované alebo modifikované (napríklad príklady 1 a 4), pričom táto úloha môže byť tvorivou výzvou aj pre samotných študentov. Problémy tohto typu sú najčastejšie riešené v rámci záujmových krúžkov či korešpondenčných seminárov pre matematicky nadaných žiakov, rovnako dobre však môžu byť aj vhodným spestrením hodín matematiky na druhom stupni ZŠ, prípadne rekreačnými úlohami určenými pre stredoškolákov.

Literatúra

[1] GATIAL, J. – HECHT, T. – HEJNÝ, M.: *Hry takmer matematické,* Praha, Mladá fronta, 1982.

[2] HECHT, T. – SKLENÁRIKOVÁ, Z.: *Metódy riešenia matematických úloh,* Bratislava, SPN, 1992. ISBN 80-08-00340-5

[3] HEJNÝ, M. a kol.: *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky,* 2.diel, Praha, PF UK, 2004. ISBN 80-7290-189-3.

[4] VADERLIND, P. – GUY, R. – LARSON, L.: *The Inquisitive Problem Solver,* Washington, The Mathematical Association of America, 2002. ISBN 0-88385-806-1

[5] VRÁBEL, P.: *Heuristika a metodológia matematiky*, Nitra, UKF, 2005. ISBN 80-8050-840-2

Mgr. Lucia Záhumenská
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: lzahumenska@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

AJ ZLOMKY MÔŽU BYŤ ZÁBAVNÉ

SOŇA FÁNDLYOVÁ

ABSTRACT. Computations with fractions are engaging for students and support their logical thinking and compatitiveness. Teachers have the possibility to create new engagging problems.

1 Úvod

Pri riešení zlomkov na základnej škole sa žiaci naučia základné úkony, krátenie, delenie, násobenie zlomkov. Opätovným vytvorením 9.triedy na základných školách sa vytvoril priestor na zaradenie motivujúcich úloh, ktoré vedú k rozmýšľaniu žiakov a aplikovaniu naučených matematických zákonov a pravidiel. Cieľom nás učiteľov je, aby žiaci matematiku chápali nielen „vedeli". Ťažká no nie nezvládnuteľná úloha. Žiaci by mali zapojiť fantáziu, intuitívne prichádzať k výsledkom ešte predtým ako sú odvodené. Netreba za každú cenu chcieť od žiaka presné matematické zápisy pomocou neznámych matematických veličín, správna logická úvaha má pre žiaka väčšiu hodnotu. Príklady sú rozdelené do piatich skupín podľa podobných kritérií (textu, podobnosti riešenia,...atď.). Sú k nim pripojené aj riešenia. Počet úloh nie je dodržaný v každej skupine rovnako, nechávame priestor pre kreatívne nápady jednotlivých učiteľov, ktorí si môžu vymyslieť vlastné príklady podľa našej šablóny, čím môžu využiť aj medzipredmetové vzťahy svojho ďalšieho aprobačného predmetu.

I. Zábavný text

Príklad 1

Lev zožerie ovcu za 2 hodiny, vlk ju zožerie za tri hodiny a pes za 6 hodín. Za aký čas by ju zožrali spoločne?

Príklad 2

Istý chovateľ kanárikov nám rozprával, akých znamenitých spevákov chová. Pochválil sa, že mal tentoraz šťastie. Vyliahli sa mu kanáriky, ktoré sa páčili každému. Hneď prvý návštevník si kúpil polovicu zbierky a pol kanárika, druhý si vzal polovicu zvyšku a pol kanárika. Potom dal polovicu zvyšku a pol kanárika švagrovi a sám si nechal dvoch najlepších na chov.

Predkladáme túto úlohu hoci sa nám zdá čudné ako mohol chovateľ predávať kanárikov po poloviciach, ale chovateľ trval na svojom, že jeho záznamy sú správne. Nech to bolo akokoľvek, chceme predovšetkým vedieť, koľko kanárikov mal náš chovateľ pôvodne, koľko ich predal a svojim príbuzným rozdal po poloviciach.

Úlohy so zábavným textom sú prínosom v procese vyučovania. Žiaci začnú polemizovať o tom či sa lev bude s niekým deliť, či môžeme predávať pol kanárika,...atď. Zaujímavé je, že spoločnými, často krát vtipnými pripomienkami sa žiaci prepracujú k výsledku. Napríklad pri kanárikoch žiak vykríkne, že ich musí byť nepárny počet. Nastane ticho, každý sa zamyslí a po chvíli vedia, že žiak vykríkol správne a nemuseli pri tom obetovať ani jedného kanárika. Žiaci chcú ďalšie podobné úlohy, vytvára sa medzi nimi prirodzená súťaživosť.

Riešenie 1

Lev zožerie za hodinu pol ovce, vlk $\frac{1}{3}$ ovce a pes $\frac{1}{6}$. Za hodinu teda zožerú spolu celú ovcu, lebo

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{3+2+1}{6}=\frac{6}{6}=1.$$

Riešenie 2

Treba ísť na riešenie jednoducho opačným postupom. K počtu 2 kanárikov, ktoré nakoniec ostali chovateľovi, pričítame $\frac{1}{2}$ a násobíme 2, dostaneme 5, pričítame znova $\frac{1}{2}$ a násobíme 2, výsledok je 11, pridáme $\frac{1}{2}$ a po vynásobení 2 dostaneme 23. Chovateľ mal pôvodne 23 kanárikov. Prvému záujemcovi predal 12, druhému 6, švagrovi dal 3 a ostal mu párik.

II. Hry s číslami

Príklad 1

Číslo 100 možno vyjadriť rozličnými spôsobmi. Viete ho vyjadriť 6 deviatkami?

Príklad 2

Viete napísať číslo 100 piatimi trojkami?

Príklad 3

Viete napísať číslo 31 pomocou piatich trojok?

Príklad 4

Už niekoľkokrát sme vyjadrili hodnotu niektorého čísla určitým počtom rovnakých číslic. Všimnite si teraz číslo 37. Dá sa napísať piatimi trojkami?

Zaujímavá aplikácia používania zlomkov pre žiakov. Prvý príklad je pre nich zložitý, ale postupným riešením ďalších a ďalších podobných úloh nadobúdajú zručnosti na ich správne riešenie. Už pri treťom príklade má väčšina správne výsledky. Uvedomia si napríklad fakt, že jednotku v takýchto typoch úloh napíšeme ako pomer čísel, ktoré máme k dispozícii (napr. $\frac{3}{3}$).

Príklady tohto typu sa s obľubou prezentujú na rôznych matematických súťažiach.

Riešenie 1

$$\frac{999-99}{9}$$

Riešenie 2

$$33.3+\frac{3}{3}$$

Riešenie 3

$$31=33-3+\frac{3}{3}$$

Riešenie 4

$$37=\frac{333}{3.3}$$

$$37=33+3+\frac{3}{3}$$

III. Zavádzajúci text

Príklad 1

V záhrade rastú jablone a višne. Polovica všetkých višní a štvrtina všetkých jabloní je práve toľko, koľko je všetkých višní. V záhrade je celkom 360 stromov. Koľko hrušiek je v záhrade?

Príklad 2

Mama kúpila 20 jabĺk. Keď deti zjedli 7 jabĺk, jedno povedalo: „Ostala $\frac{1}{2}$ toho, čo bolo a ešte 3 jablká.“ Druhé povedalo: „Ostali $\frac{3}{5}$ toho, čo bolo a ešte jedno jablko.“

Žiaci okamžite začnú počítať. V prvom príklade si vôbec neuvedomia, že údaje o hruškách vôbec neboli spomenuté a v druhom im nebola položená otázka. Chceme týmito príkladmi len poukázať nato, že žiaci niekedy systematicky pristupujú k riešeniu príkladov a zabúdajú logicky myslieť a to je to, čomu mi učitelia chceme zabrániť. Možno práve tieto a im podobné úlohy pomôžu žiakom uvedomiť si svoje chyby.

IV. Vizuálne hlavolamy

Príklad 1

Zo zápaliek je zložené číslo $\frac{1}{7}$. Zmeňte tento zlomok na $\frac{1}{3}$ tak, že počet zápaliek nezmeníte, iba jednu zápalku premiestnite.

Príklad 2

Koľko je polovica z 12? Pravdaže 6. V jednom prípade je to však predsa 7. Viete vysvetliť kedy?

Príklad 3

Obyčajné zlomky možno niekedy zjednodušiť (skrátiť). Pozrite si pozorne napríklad tieto dva zlomky:

$\frac{MM5}{N5} = 5 \qquad \frac{MMMM5}{NNN5} = 5$

Je tu zrejme akási príbuznosť. Vašou úlohou je nahradiť písmená číslicami, aby platilo zjednodušenie.

Riešenie 1

$\frac{I}{VII} \qquad \frac{II}{VI}$

Riešenie 3

$\frac{225}{45} = 5 \qquad \frac{22225}{4445} = 5$

Riešenie 2

V. Úlohy o pohybe

Príklad 1

Keď bol cestujúci vo vlaku v polovici cesty zaspal. Po prebudení zistil, že má prejsť ešte pätinu cesty, ktorú prešiel v spánku. Akú časť cesty spal?

Príklad 2

Janko chodí do školy pešo a má to dosť ďaleko. V štvrtine cesty z domu do školy je budova autobusovej stanice, ktorá má na priečelí elektrické hodiny a v jednej tretine cesty je železničná stanica. Keď šiel okolo autobusovej stanice, bolo na hodinách pol ôsmej, a keď prišiel k železničnej stanici, ukazovali hodiny o 10 minút tri štvrte na osem. Kedy vyšiel Janko z domu a o koľkej prišiel do školy?

Príklad 3

Karol mal o ôsmej tréning s Igorom. Oneskoril sa však, ale sa utešoval, že Igor aj tak príde neskôr o štvrť hodinu, a tak sa stretnú obaja zároveň. Keď Karol prešiel štvrtinu cesty k miestu tréningu, pozrel sa na hodiny. Bolo práve pol ôsmej. V jednej tretine cesty si opäť skontroloval čas. Hodinky ukazovali o desať minút tri štvrte na osem. Príde na tréning včas? Viete zistiť, o ktorej hodine vyšiel z domu a kedy príde na miesto tréningu? Čakal Igor, alebo musel ešte čakať Karol?

Riešenie 1

Cestujúci prešiel v spánku $\frac{5}{12}$ celej cesty.

Riešenie 2

Z domu vyšiel 7:15 a do školy prišiel 8:15

Riešenie 3

Karol prišiel na miesto v rovnakom čase ako Igor.

VI. Historická úloha

Príklad

Archimeda zabil v roku 212 p.n.l. rímsky vojak pri dobývaní Syrakúz. Macellus dal z úcty k nemu postaviť pomník, na ktorom podľa Archimedovho želania bol obrazec znázorňujúci pomer objemu gule a valca s rovnakým priemerom a výškou. V roku 75 p.n.l. poznal Cicero podľa obrazca Archimedov pomník a dal ho opraviť. Archimedes si na tomto pomere veľmi zakladal. Viete ho nájsť? Opakujeme: ide o pomer objemu gule a valca, ktorého priemer a výška sa rovnajú priemeru gule.

Riešenie

Objem gule k objemu valca je 2:3.

2 Záver

V našom článku sme chceli poukázať na dôležitosť matematického vyjadrovania skrytého v zadaniach príkladov. Snažiť sa u žiakov formovať logické myslenie, chápať matematiku a urobiť ju niekedy aj zábavnou. Dúfame, že inšpirujeme niektorých učiteľov matematiky a tým zlepšíme jednak vedomosti žiakov, ale v neposlednom rade prehĺbime záujem o túto krásnu vednú disciplínu.

PaedDr. Soňa Fándlyová
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: sfandlyova@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

OSVOJOVANIE SI STRATÉGIE HĽADANIA PRAVIDIEL A VZORCOV POMOCOU MATEMATICKÝCH HIER

JÁN ŠUNDERLÍK

ABSTRACT. This article focuses focuses on some problem solving strategies, especially strategy looking for pattern. It is possible to teach this strategy using mathematical games. These kinds of activities are not just engaging and motivative, but are very important for logical thinking development and for each student to solve problems individually.

Úvod

Vo vzdelávaní a zvlášť vo vyučovaní matematiky je potrebné, aby sme žiakov viedli samostatnému riešeniu problémov. Takáto cesta je potrebná aj keď to je cesta dlhá a ťažká.

Ako Turek (1982) uvádza, pod aktívnosťou rozumieme situáciu, v ktorej žiaci nie sú pasívnymi poslucháčmi alebo divákmi na predstavení, v ktorom účinkuje len jeden herec, a tým je učiteľ. Aktivitu žiakov v učebnom procese predstavuje uvedomelý a činorodý postoj, aktívna fyzická a psychická činnosť, ktorá je zacielená na osvojenie si istých poznatkov a ich aplikáciu v praxi.

Aktivite žiakov na hodinách matematiky má predchádzať aj dobrá motivácia. Motivácia je otázka „prečo?“ ľudskému správaniu. Je to vzbudenie, udržanie a usmerňovanie ľudskej energie a aktivity. Preto je potrebné vytvárať motivujúce situácie, ktoré povzbudzujú dieťa v dobrom správaní a zároveň dávajú vykonanej činnosti zmysel, rozvíjajú túžbu po nových vedomostiach, túžbu po vyniknutí v kolektíve.

Hľadanie členov postupnosti

Jednou z vhodných foriem motivácie žiakov na hodinách matematiky je zapájanie žiakov do riešenia problémov hravou formou pomocou matematických hier. V týchto hrách žiaci rozvíjajú stratégie riešenia problémov. Jednou z nich je aj stratégia hľadania vzťahov a vzorcov. Predtým než by sme mali demonštrovať konkrétnu hru je vhodné priblížiť si samotnú stratégiu.

Štúdium matematiky sa často nazýva aj štúdiom hľadania pravidiel a zákonitostí. Takéto vzory môžeme pozorovať v živej i neživej prírode. Ako príklad môžeme uviesť policajné vyšetrenie, kde snažíme určiť podobnosti v správaní páchateľa. Tiež výskumníci musia byť schopní nájsť vzor, na základe ktorého potom môžu určiť premennú a dostať spoľahlivé výsledky.

Stratégie riešenia problémov, ako rozpoznanie pravidla, nám umožňujú premeniť komplexný problém na nájdenie určitého vzoru a ten následne použiť na vyriešenie skúmaného problému. Častým kľúčom k nájdeniu riešenia je usporiadanie si zadaných informácií.

Napríklad postupnosť:

2, 5, 8, 11, _, _, _, _,

Pravidlom, ktoré spája tieto čísla je, že nasledujúce číslo vytvoríme pripočítaním čísla 3 k predošlému číslu. Teda dostaneme:

2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, ...

O opakovaní členov teraz nebudeme uvažovať, pretože sa chceme zamerať na lineárne zákonitosti medzi jednotlivými členmi postupnosti.

Žiaci by potom mali vedieť riešiť úlohy typu: „nájdi pravidlo a urči nasledujúce štyri členy.“ Je dobré ak od žiakov vyžadujeme aj zdôvodnenie svojho riešenia.

1) 1, 2, 4, _, _, _, _
1) 1, 3, 5, 7, _, _, _, _
2) 1, 6, 11, 16, _, _, _, _

Ak by sme chceli bližšie popísať stratégiu na nájdenia vzťahu, tak by sme ju mohli rozdeliť do piatich krokov.

1) Najskôr si skúmanú postupnosť zapíšeme:

   3, 4, 6, 9, 13, 18, 24,

2) Prehľadne si zaznačíme poradie každého člena postupnosti do tabuľky.

Poradie	1	2	3	4	5	6	7
Člen	3	4	6	9	13	18	24

3) Určíme rozdiely medzi jednotlivými členmi postupnosti.

Poradie	1	2	3	4	5	6	7
Člen	3	4	6	9	13	18	24

+1 +2 +3 +4 +5 +6

4) Hľadáme súvislosť medzi jednotlivými členmi a ich poradím. A taktiež hľadáme súvislosti medzi rozdielmi jednotlivých členov a ich pozíciou.

Poradie	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	7
Člen	3	4	6	9	13	18	24

+1 +2 +3 +4 +5 +6

V tejto postupnosti môžeme sčítať poradie člena k samotnému členu aby sme dostali nasledujúci člen. Napríklad k štvrtému členu, čo je číslo 9 pripočítame 4 a dostaneme nasledujúci člen a to je 13 (nasledujúci člen).

5) Ak hľadanie rozdielov medzi členmi nefunguje použijeme iné operácie ako odčítanie, násobenie, delenie a tak ďalej.

Nasledovaním týchto pravidiel môžeme u žiakov vybudovať zručnosť rozpoznávať vzory v postupnostiach.

Treba si uvedomiť, že jednotlivé pravidlá môžu byť dané v jednotlivých stupňoch komplexnosti.

Pravidlá hry:

Žiaci sa rozdelia do skupín po štyroch. Každá skupina dostane svoju vlastnú postupnosť čísiel, ktorú potrebuje zistiť. Účastník má jednu indíciu, ktorá určuje vzťahy medzi jednotlivými členmi postupnosti. Dve pomocné kartičky s indíciami zostanú na stole a ak skupina dokáže vyriešiť problém bez ich pomoci, tak ich nepoužije. Hráči vlastnia svoju indíciu a nemôžu ju ukázať ostatným členom, môžu ju však zreferovať. Skupina sa rozhoduje a uvažuje tímovo, kde všetci členovia sú navzájom rovnocenní.

Hľadanie vzťahu medzi číslami	Hľadanie vzťahu medzi číslami	Hľadanie vzťahu medzi číslami
Šieste číslo je tretie číslo krát štyri, a taktiež prvé číslo krát osem.	Tretie číslo je druhé číslo plus jedna, a štvrté číslo je tretie číslo plus jedna. .	Piate číslo je tretie číslo plus štvrté číslo.
Hľadanie vzťahu medzi číslami	✧ Hľadanie vzťahu medzi číslami	✧ Hľadanie vzťahu medzi číslami
Šieste číslo je tretie číslo krát štyri, a taktiež prvé číslo krát osem. Aké je siedme číslo postupnosti?	Tretie číslo na tretiu sa rovná šiestemu číslu v postupnosti. Aké je siedme číslo postupnosti?	Prvé a druhé číslo v postupnosti sa rovnajú. Aké je siedme číslo postupnosti?

Obr 1.: Kartičky s indíciami pre hráčov

Hľadanie tajomného pravidla

Druhá hra je zameraná na hľadanie pravidla, na základe ktorého sa vstup zmení na výstup. Neuvažujeme už len o postupnostiach, ale snažíme sa nájsť vzťah medzi vstupmi a výstupmi. Nájdite vzťah pre nasledovné funkcie. Potom určite hodnoty pre čísla 5 a 895.

Vstup	výstup
m	?
0	5
1	6
2	7
3	8
4	9
5	?
895	?

vstup	výstup
N	?
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	?
895	?

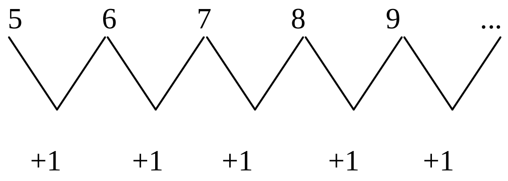
vstup	výstup
p	?
0	-3
1	-1
2	1
3	3
4	5
5	?
895	?

vstup	výstup
q	?
0	0
1	-1
2	-2
3	-3
4	-4
5	?
895	?

Tab č. 1: Funkcie zadané pomocou tabuliek

Pomôcka: Ak nevieme určiť vzťah medzi stĺpcami, tak jednoducho postupujeme, ako by to boli postupnosti napísané v riadku.

1) Pre prvú tabuľku vzťah medzi vstupom a výstupom určíme tak, že si výstupy napíšeme do riadku a určíme nasledujúce členy postupnosti.



Teda na určenie ďalších štyroch členov postupnosti potrebujeme pripočítať jednotku k predchádzajúcemu členu. Teda nasledujúce členy postupnosti sú 10, 11, 12 a 13. Na základe tohto pravidla vieme určiť aj ostatné členy. Nech m reprezentuje ľubovoľný člen. Tabuľka nám ukazuje, že ak m = 2 tak potom výstup je 7, ak m je 4 potom výstup je 9, teda o päť väčší. Ak by sme ďalej pokračovali tak zistíme, že pravidlo funguje a môžeme napísať výstup = m + 5. Toto pravidlo vieme použiť na určenie výstupu pre ľubovolný vstup. Vyskúšajme nájsť hodnotu pre 895. Teda platí 895 + 5 = 900.

Podobne by sme uplatnili túto stratégiu aj na iné príklady.

Pravidlá pre 2) 2n 2 *895 = 1790
3) 2p – 3 2 *895 -3 = 1787
4) –q - 895 = -895

Uvedené stratégie hľadania vzorcov a vzťahov môžu pomôcť žiakom objaviť tajomné pravidlo v nasledujúcej hre:

Pravidlá hry:

Hra sa môže hrať v dvojiciach, menších skupinách, ale aj s celou triedou. Jeden študent je „strážca pravidla“, ktorý na základe čísiel (vstupov), zadávaných spolužiakmi, určuje výstupy (výstupy - vstupy zmenené podľa zvoleného pravidla). Ostatní účastníci si jednotlivé dvojice zapisujú a na základe získaných výsledkov sa snažia určiť pravidlo podľa ktorého „strážca tajomstva“ odpovedá.

Nadväznosti na hru.

a) Po odohraní niekoľkých kôl môžeme nechať žiakov, aby zakreslili jednotlivé usporiadané dvojice do súradnicového systému a zistili, či ležia na jednej priamke.

b) Nájdite zápis pravidla pomocou neznámych. x- reprezentuje vstupné číslo a y –výstupné.

c) Rozhodnite, či nasledovné usporiadané dvojice reprezentujú lineárnu závislosť.
(4; 16), (1; 1), (0,5; 0,25), (3;9)
(10;0), (2;8), (4,5; 5,5), (5; 5)

Peter je šampión triedy v hľadaní pravidla. Jeho tajomstvo je v tom, že si všetky body najskôr zaznačí do súradnicového systému, a ak ležia na jednej priamke, tak vie z grafu vyčítať pravidlo, ktoré popisuje jednotlivé usporiadané dvojice.

Vysvetlite ako môže Peter určiť pravidlo z grafu lineárnej funkcie? Ak je to potrebné, použite náčrt. Výhodou hry je jej variabilita. Motivuje žiakov nielen hľadať jednotlivé pravidlá, ale ich aj vytvárať.

Záver

Demonštrované hry boli zamerane na určovania vzťahov medzi číslami. Žiaci na riešenie problémov nepotrebovali veľké vedomosti z algebry, ale logické myslenie a zvolenie správnej stratégie riešenia problému. Preto použitím algebraického modelu môžu nadviazať na získané vedomosti a teda aj lepšie pochopiť nové učivo.

LITERATÚRA

[1] Ruopp, F. N.; Goldenberg, E. P. 2004: Impact Mathematics Algebra and more, Course 2, učebnica pre 7. roč., Glencoe, New York, ISBN 0-07-860920-8

[2] Cawford, K. ; Adler, J. 1996: Teachers as Reaserchers in Mathematics Education In International Handbook of Mathematics Education, Part two 1187 – 1205, Kluwer Academic Publishers, Netherland ISBN 0-7923-3533-3

[3] Johnson, K.; Herr, T. 2001: Problem Solving Strategies, Key Curiculum Press, California, USA, ISBN 1-55953370-6

[4] Turek, I. 1995: Škola a tvorivosť. MC, Bratislava

PaedDr. Ján Šunderlík
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail:jsunderlik@ukf.sk

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

GRAFY Z REÁLNEHO ŽIVOTA

SOŇA ČERETKOVÁ, JÁN ŠUNDERLÍK

ABSTRACT. The aim of the article is to explore new ideas and to obtain new knowledge about graphs in mathematics for upper primary school. It is shown how graphs could be used to perform the changes that happen during everyday events. Text is composed as one part of new maths textbook.

Úvod

V charakteristike učebného predmetu matematika pre druhý stupeň základnej školy podľa navrhovaných učebných osnov je uvedené: *„...žiaci majú v realite objavovať kvantitatívne a priestorové vzťahy a určité typy ich systematických zmien. Zoznamujú sa s veličinami a ich prvotnou reprezentáciou vo forme tabuliek, grafov a diagramov. V jednoduchých prípadoch tieto aj znázorňujú. Skúmanie týchto súvislostí vedie k propedeutike pojmu funkcie a k zavedeniu pojmu lineárne funkcie. Prostredníctvom lineárnej funkcie riešia rôzne typy úloh s reálnym námetom.“*

V článku uvádzame časť učebného textu, inšpirovaného učebnicou (Goodman a kol., 2004), venovaného grafickému zobrazovaniu vzťahov medzi rôznymi veličinami či objektmi z reálneho života. Učebný text môže nadväzovať na učivo: Funkcie, Lineárna funkcia v deviatom ročníku základnej školy (Šedivý a kol., 2004).

Pri riešení úloh a problémov uvádzaných v predkladanom texte je cieľom naučiť žiakov:

- kresliť rôzne typy grafov a interpretovať ich vlastnosti,
- rozhodnúť, ktorá z veličín je závisle premenná a ktorá je nezávisle premenná,
- interpretovať a popísať daný graf; rozprávať o situácií, ktorú graf znázorňuje,
- zostrojovať, načrtnúť grafy predstavujúce grafické modely známych situácií,
- popísať vzťah medzi dvoma bodmi daného grafu.

Riešenia predložených cvičení a problémov navodzujú matematické aktivity žiakov vedúce k formulovaniu otázok, k aplikovaniu stratégii riešenia problémov, ku komunikácií, k zdôvodňovaniu a k matematickému uvažovaniu i k úvahám spájajúcim matematické poznatky so situáciami v reálnom živote. Základné matematické pojmy vyskytujúce sa explicitne alebo implicitne v texte (v abecednom poradí): bod, bodový graf, čiara, diskrétny, graf, graf - schody, mierka, množstvo, náčrt, názov, označenie, priamka, spojitý, súradnicové osi, súradnicový systém, stĺpec, škála, údaje, úsečka, vodorovná os, zvislá os.

Text je komponovaný ako navrhovaná kapitola učebnice matematiky pre druhý stupeň základnej školy v kontexte používaných učebníc Šedivý a kol.

1. Súradnicový systém

Pri zostrojovaní grafu do súradnicového systému je vždy dôležité uvedomiť si, koľko miesta na nakreslenie grafu máme, t.j. musíme si predstaviť veľkosť obrázka.

Napríklad: ak pomocou grafu chceme zobraziť údaje od 0 EUR po 1 500 EUR a zvolíme si jednotkovú úsečku 1 cm pre každú hodnotu 100 EUR, potrebná os bude úsečka dĺžky minimálne 15 cm. Ak si zvolíme jednotkovú úsečku 1 cm pre hodnotu 200 EUR, potrebná os bude úsečka dĺžky aspoň 7,5 cm.

Pri kreslení grafov sa vždy snažíme o najjednoduchšie, ľahko čitateľné údaje a preto zvoliť si jednotkovú úsečku 1 cm pre hodnotu napr. 150 EUR je možné, ale nie vhodné.

Úlohy

1. a) Platí: $y = 2x + 1$. Doplňte tabuľku.

x	0	1	2	3
y				

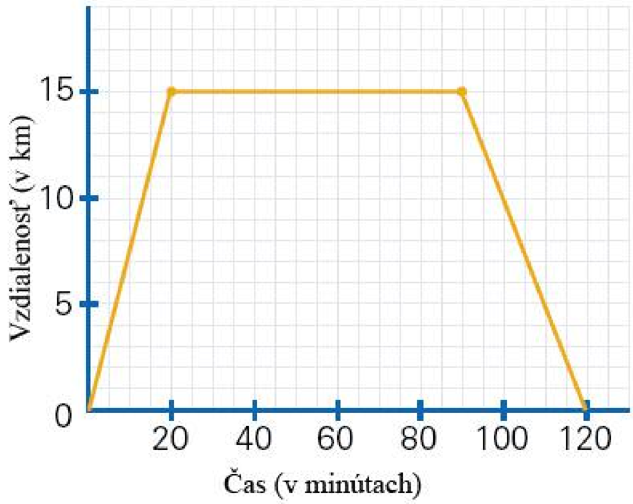
Tab. 1

b) Narysujte si súradnicové osi, hodnoty na osi x sú od -4 po 5, hodnoty na osi y sú od -8 po 10. Zakreslite do tohto súradnicového systému body z tabuľky 1.

c) V súradnicovej sústave nájdite a vyznačte bod, pre ktorý platí:

i) hodnota súradnice y ak x je rovné 2,
ii) hodnota súradnice x ak y je rovné 9,
iii) hodnota súradnice x ak y je rovné 6.

2. Viera šla navštíviť priateľov. Graf znázorňuje jej cestu.



Obr. 1 Viera na návšteve u priateľov

a) Ako dlho trvalo Viere prísť k priateľom?
b) Koľko kilometrov je vzdialený dom Vieriných priateľov od jej domu?
c) Ako dlho Viera u priateľov pobudla?
d) Ako dlho trval Viere návrat domov?
e) Kedy Viera cestovala rýchlejšie – po ceste tam alebo späť?

3. V školskom skleníku meria a zapisuje služba teplotu každý deň niekoľkokrát. Zápisy počas jedného dňa uvádza tabuľka.
4.

Čas	8:00	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00
Teplota ˚C	17	21	24	27	29	30

Tab. 2 Teplota v skleníku

a) Aký typ grafu je najvhodnejší na znázornenie priebehu teploty graficky?
b) Nakreslite graf, ktorý zobrazí priebeh teploty v skleníku.
c) Odhadnite, na základe grafu, aká teplote bola o 11:20 hod.
d) O koľkej hodine bola teplota 25˚C ?
e) Odhadnite, aká bude teplota o druhej hodine popoludní.

5. V roku 2004 sa Európska únia (EU) rozšírila o desať štátov. Údaje o počte obyvateľov týchto štátov uvádza tabuľka. Vyberte si vhodný typ grafu, na súradnicových osiach zvoľte vhodnú mierku a znázornite údaje popísané v tabuľke. Koľko obyvateľov spolu majú krajiny, ktoré v roku 2004 vstúpili do EU?

Štát	Počet obyvateľov
Cyprus	835 000
Česká republika	10 300 000
Estónsko	1 330 000

Litva	3 431 000
Lotyšsko	2 307 000
Maďarsko	10 028 000
Malta	402 000
Poľsko	38 130 000
Slovensko	5 401 000
Slovinsko	2 030 000

Tab. 3 Členské štáty EU od roku 2004

6. Narysujte graf, ktorý zobrazí teplotu nameranú v zimný deň v lyžiarskom stredisku Zverovka-Spálená.

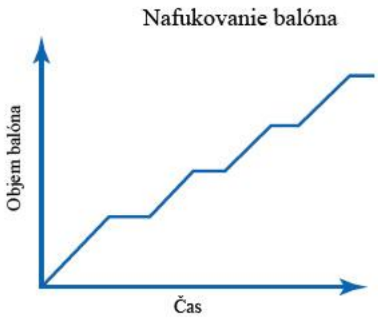
čas	9:00	10:00	11:00	12:00	13:00	14:00	15:00	16:00	17:00	18:00
Teplota ˚ C	-8	-4	-2	0	1	1	-1	-2	-4	-5

a) Odhadnite, aká teplota bola o 11:30.
b) O koľkej bola teplota -3˚C?

2. Grafy z reálneho života

Existujú grafy, ktoré popisujú rôzne situácie každodenného života. Napríklad graf, ktorým reprezentujeme nafukovanie balóna, presnejšie: množstvo vzduchu v balóne počas jeho nafukovania v závislosti od času môžeme znázorniť graficky.

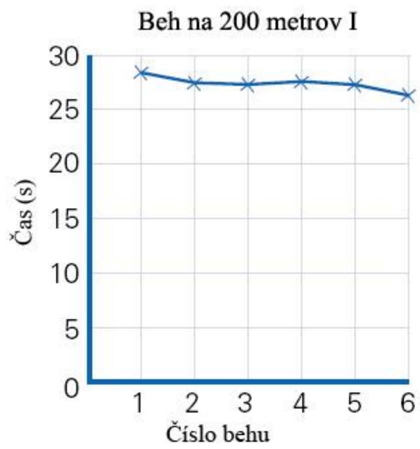
Horizontálne časti grafu zodpovedajú nádychom osoby, ktorá balón nafukuje. Iste ste si všimli, že na osiach grafu nie sú jednotky, ale z tvaru grafu môžeme priebeh nafukovania balóna popísať.



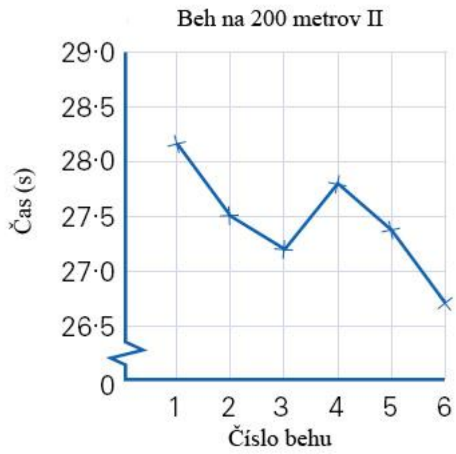
Obr. 2 Nafukovanie balóna

2.1 Súradnicové osi

Vo väčšine prípadov k popisu situácie postačuje iba časť grafu a často nie je potrebné na jednej z osí vychádzať z počiatku, pretože údaje o priebehu zobrazovaného deja sa pohybujú vo vyšších hodnotách. Voľba jednotiek na súradnicových osiach je tiež veľmi dôležitým prvkom názornosti.



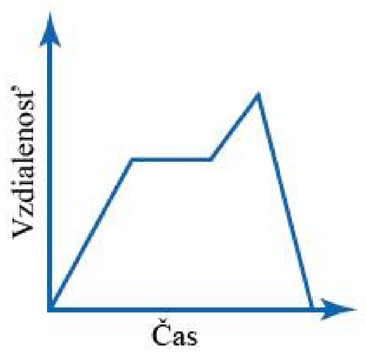
Obr. 3 Beh na 200 metrov I



Obr. 4 Beh na 200 metrov II

Nakresleným grafom znázorňujeme vzťah medzi dvoma premennými, pričom, ak je známe, hodnoty jednej premennej sú závislé od hodnôt druhej premennej. Vodorovná súradnicová os, ktorú zvyčajne označujeme *x*, je os nezávisle premennej. Zvislá súradnicová os, ktorú zvyčajne označujeme *y*, je os hodnôt závisle premennej.

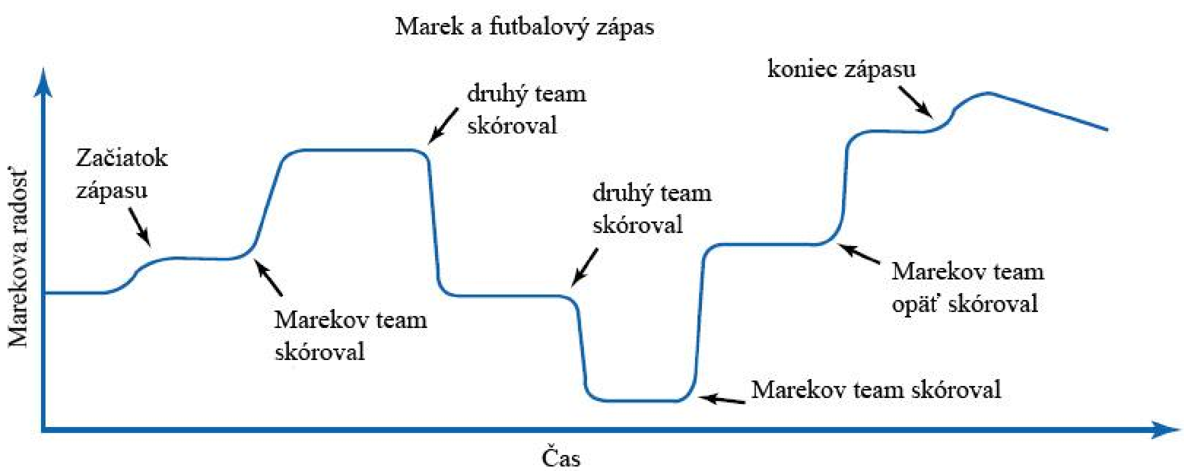
Napríklad, pri znázorňovaní závislosti vzdialenosti, ktorú nejaký objekt prešiel, od času, vzdialenosť je závisle premenná a jej hodnoty sa vždy vyznačujú na osi *y*, zatiaľ čo čas je nezávisle premenná a hodnoty času sa vždy vyznačujú na osi *x*.



Obr. 5 Vzdialenosť je závislá od času

Príklad

Graficky znázorníme závislosť pocitu radosti od času počas futbalového zápasu futbalového fanúšika Mareka. Na grafe popíšeme aj rozhodujúce okamihy zápasu.



Obr. 6 Marek a futbalový zápas

Cvičenia

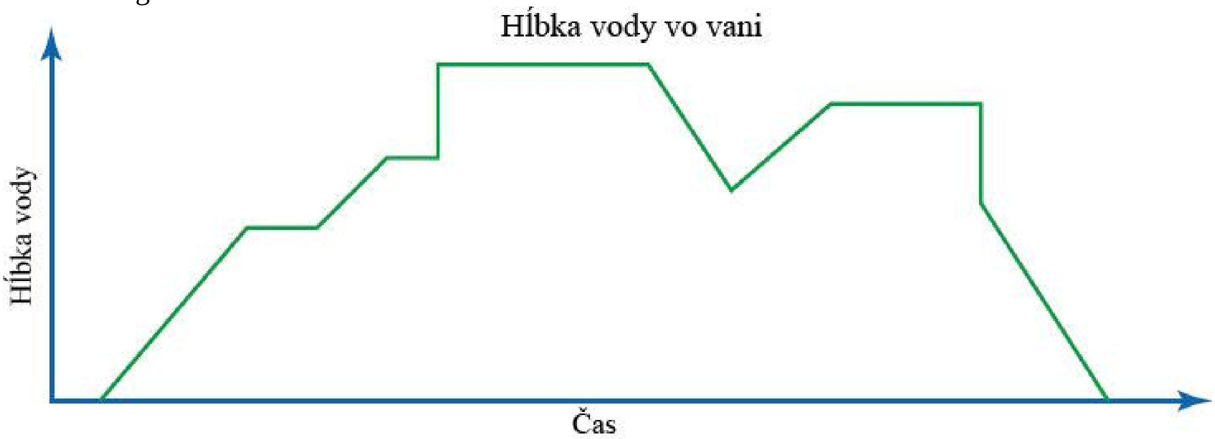
Vyberte si niektorú z navrhovaných situácií a znázornite graficky pocit radosti v závislosti od času. Popíšte rozhodujúce okamihy.

- Športová súťaž, na ktorej si aktívnym športovcom resp. aktívnou športovkyňou.
- Sledovanie športového prenosu v ktorom hrá tvoj obľúbený tím alebo súťaží obľúbený športovec.
- Hranie dobrodružnej počítačovej hry alebo stolovej hry alebo kartovej hry.
- Bežný školský deň.

2. Sandra si graficky zaznamenávala množstvo peňazí v peňaženke v priebehu jedného týždňa. Popíšte, čo sa dialo, vymyslite situácie, ktoré sa pravdepodobne stali a viedli ku zmenám zaznamenaným v grafe.

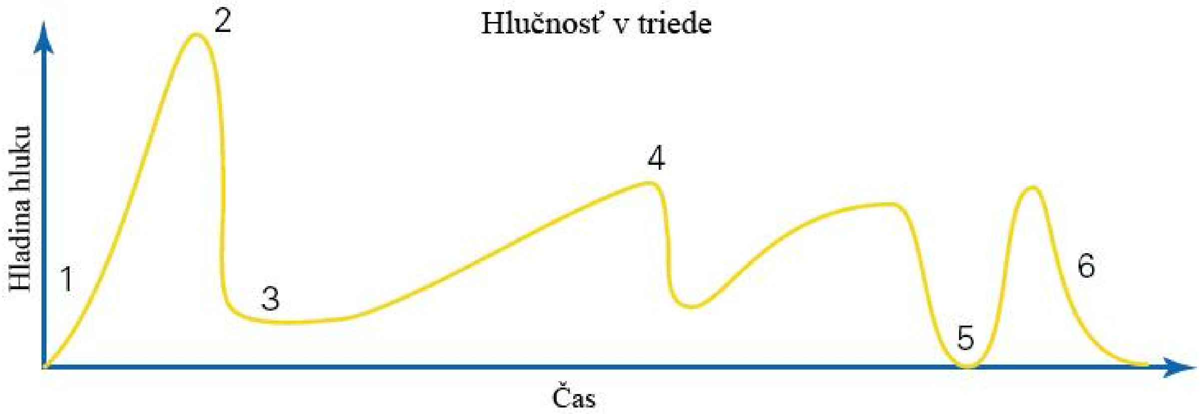
Obr. 7 Peniaze v Sandrinej peňaženke

3. Karol sa kúpal vo vani. Graf znázorňuje hĺbku vody vo vani. Popíšte priebeh Karolovho kúpania sa na základe grafu.



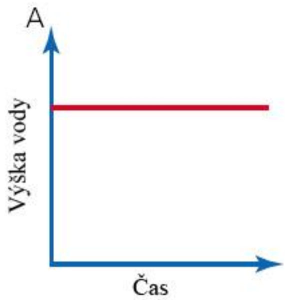
Obr. 8 Hĺbka vody vo vani

4. Graf znázorňuje hladinu hluku v triede počas hodiny matematiky. Popíšte, čo sa asi dialo počas jednotlivých častí hodiny v miestach, ktoré sú na grafe vyznačené a pokúste sa svoje tvrdenia zdôvodniť.

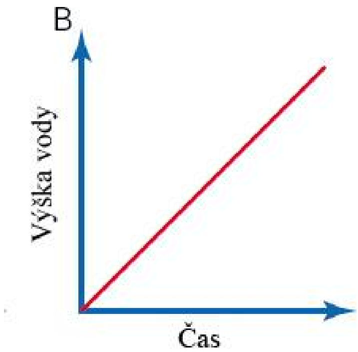


Obr. 9 Hlučnosť v triede

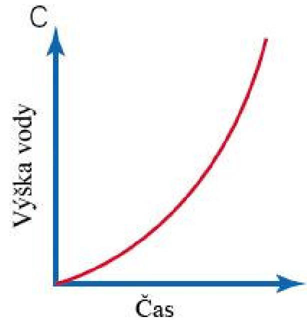
5. V jednotlivých situáciách vyberte grafy, ktoré najvýstižnejšie znázorňujú popísanú situáciu.
a) Napúšťame vodu z vodovodného kohútika do suda tvaru valca. Graf znázorňuje výšku vody v sude v závislosti od času.



Obr. 10 A

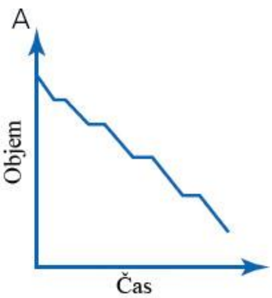


Obr. 10 B

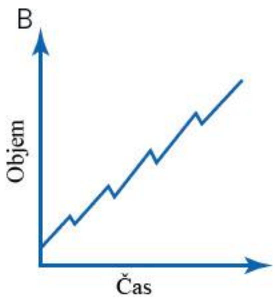


Obr. 10 C

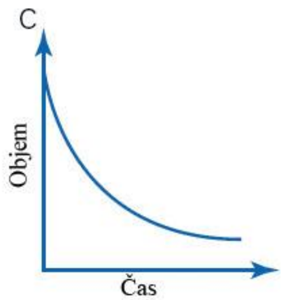
b) Športovec Peter pije slamkou nápoj z fľaše.



Obr. 11 A

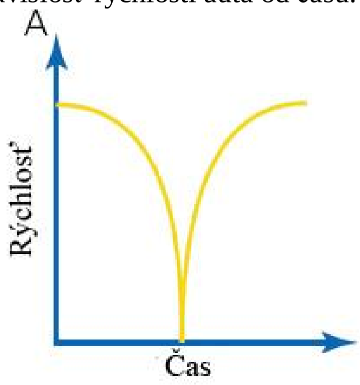


Obr. 11 B

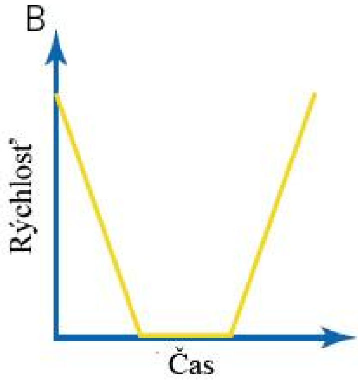


Obr. 11 C

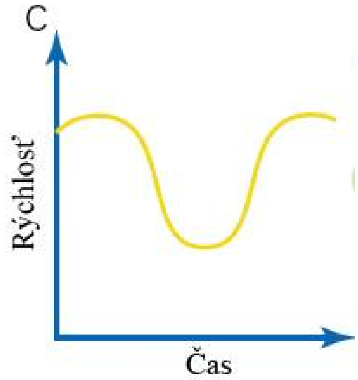
c) Auto práve prechádza ostrou zákrutou nad hlbokou priepasťou na horskom prechode. Graf popisuje závislosť rýchlosti auta od času.



Obr. 12 A

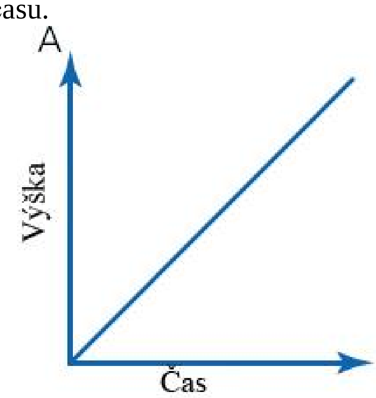


Obr. 12 B

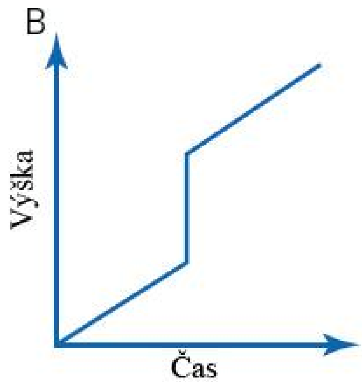


Obr. 12 C

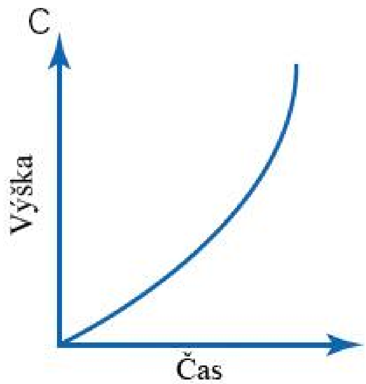
d) Napĺňame fľašu vodou z vodovodného kohútika. Graf popisuje výšku vody vo fľaši v závislosti od času.



Obr. 13 A

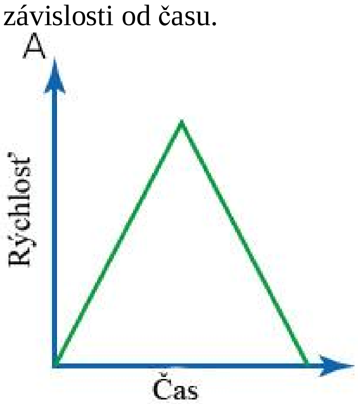


Obr. 13 B

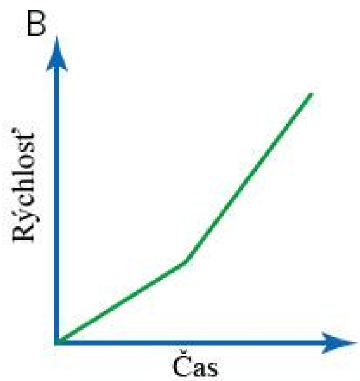


Obr. 13 C

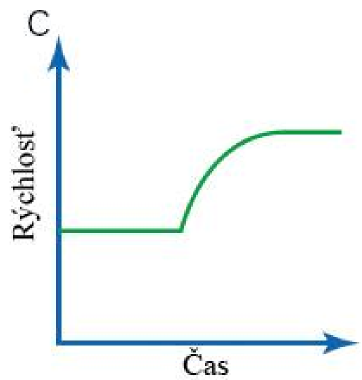
e) Turistka Anička vystúpila na kopec a potom z neho zbehla dolu. Graf popisuje jej rýchlosť v závislosti od času.



Obr. 14 A

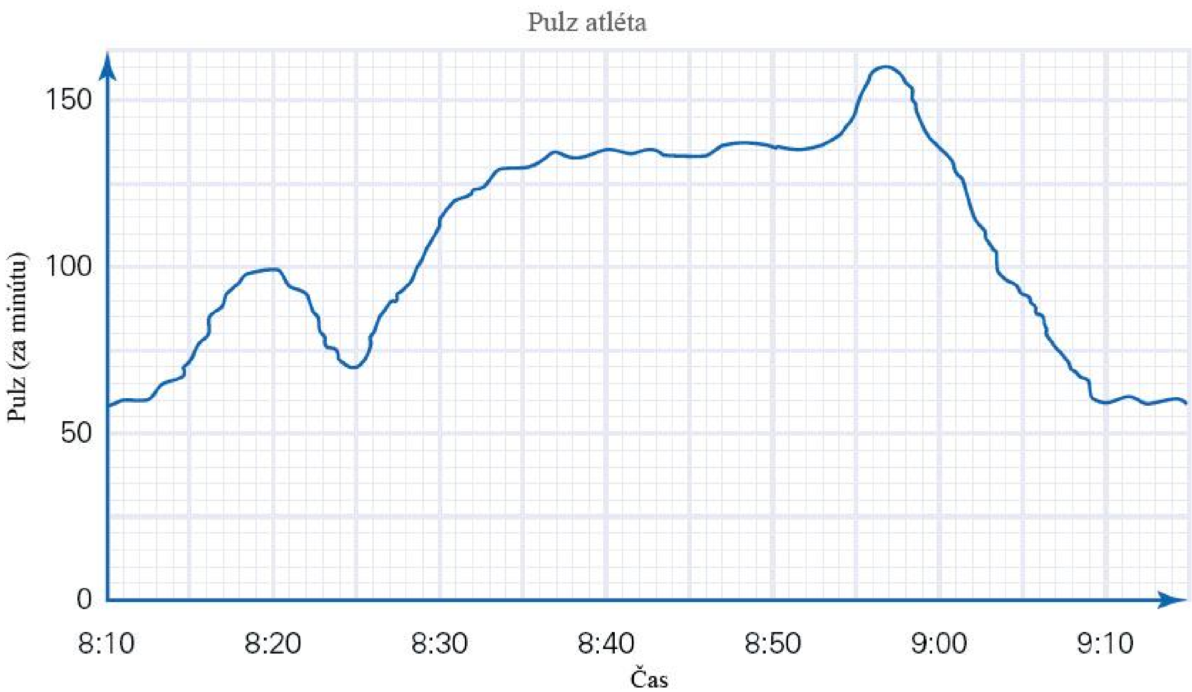


Obr. 14 B



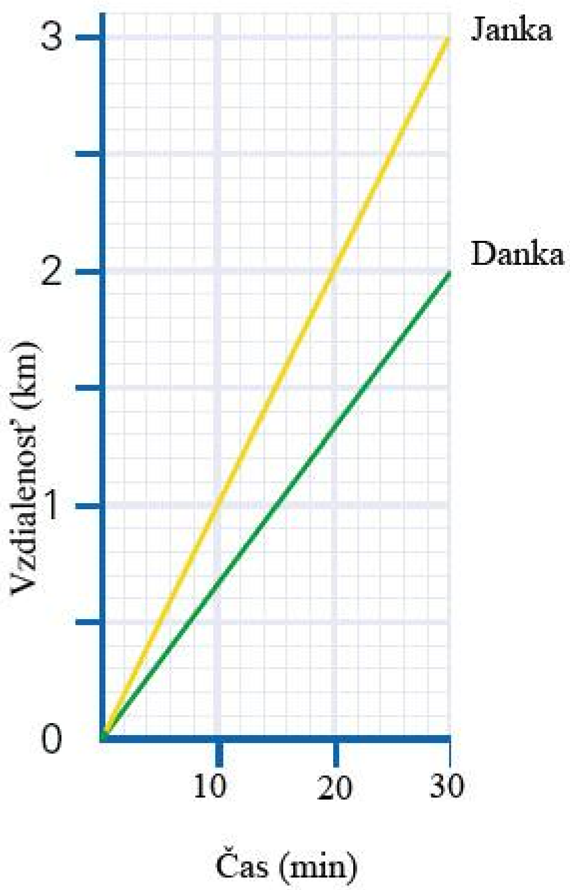
Obr. 14 C

6. Graf popisuje pulz atléta, ktorý sa zúčastňuje bežeckých pretekov. Pulz znamená počet úderov srdca za minútu a v grafe je zaznamenaný pred, počas a po súťažnom behu. Atlét si najskôr urobil rozcvičku a tesne pred súťažným behom chvíľu odpočíval. Pomocou grafu odpovedzte na otázky:
a) Aký bol pulz atléta pred rozcvičkou?
b) Kedy sa súťažný beh začal?
c) Aký bol najvyšší pulz atléta počas súťažného behu?
d) Ako dlho trvalo, kým sa pulz atléta dostal na hodnotu pred súťažným behom?
e) Atlét bežal priemernou rýchlosťou 15 km/hod. Na akú vzdialenosť sa súťažný beh bežal?



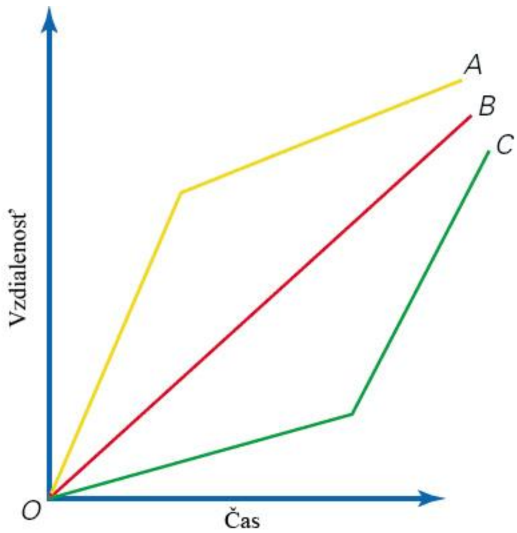
Obr. 15 Pulz atléta

7. Dve turistky Danka a Janka pestujú nordickú chôdzu. Na grafe je znázornený ich tréning v jednu jarnú sobotu.
a) Ktorá turistka šla rýchlejšie?
b) Akú vzdialenosť prešla Janka za 10 minút?
c) Akú vzdialenosť prešla za 20 minút?
d) Vyjadrite rýchlosť Janky v metroch za minútu.
e) Akú vzdialenosť prešla Danka za 30 minút?
f) Ako ďaleko je Danka od Janky po tridsiatich minútach?



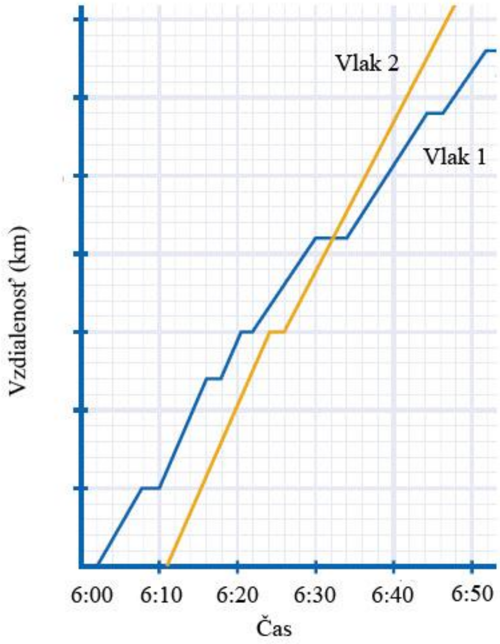
Obr. 16 Janka a Danka

8. Graf znázorňuje vzdialenosť, ktorú prešli traja cyklisti za rovnaký čas. Popíšte spôsob jazdy každého z nich.



Obr. 17. Traja cyklisti

9. Na grafe je znázornený pohyb dvoch vlakov A a B na trase z Nitry do Nových Zámkov.
a) Na koľkých zastávkach zastal vlak A?
b) O koľko minút neskôr po odchode vlaku A odchádzal z Nitry vlak B?
c) O koľkej sa vlaky stretli?
d) Aká bola priemerná rýchlosť každého vlaku?



Obr. 18 Vlaky z NR do NZ

10. V tabuľke je zaznamenaná ubehnutá dráha a čas atléta v bežeckej disciplíne: beh na 400 metrov.

Dráha (m)	0	50	100	150	200	250	300	350	400
Čas (s)	0	8,5	17,5	26,5	37	46,5	56,5	65,5	74

Tab. 1 Beh na 400m

a) Nakreslite graf dráhy v závislosti od času, ktorý znázorňuje pohyb atléta.
b) Popíšte slovne, ak sa menila rýchlosť behu atléta v jednotlivých fázach. Pokúste sa zdôvodniť pozorované zmeny.

11.
a) Nakreslite graf závislosti dráhy od času podľa nasledujúceho popisu pasažiera auta. (Vodič auta udržiaval príslušnú priemernú konštantnú rýchlosť v každom úseku cesty.): *„Prvých 20 minút jazdy sme šli po predmestí, prešli sme 15 kilometrov. Potom sme sa dostali na diaľnicu a 60 km sme prešli za 40 minút. Na 15 minút sme sa zastavili na odpočívadle a zvyšok cesty do cieľa sme prešli za 25 minút. Cieľ bol od východzieho miesta vzdialený 120 kilometrov.“*
b) V ktorom úseku cesty bola rýchlosť auta najvyššia?
c) Akou priemernou rýchlosťou sa vtedy auto pohybovalo?
d) Aká bola priemerná rýchlosť celej cesty?

12. Monika a Paulína sú dvojičky. Každý rok v deň narodenín si zapisujú svoju hmotnosť v kilogramoch.

Vek (roky)	9	10	11	12	13	14	15	16
Monika (kg)	25	30	36	43	50	54	55	56
Paulína (kg)	26	29	32	36	44	52	63	68

Tab. 2 Dvojičky Monika a Paulína

a) Nakreslite graf, ktorý znázorňuje zmenu Monikinej hmotnosti vzhľadom na vek.
b) Do toho istého obrázku zakreslite ako sa menila hmotnosť Paulíny. Použite farbičky rôznych farieb.
c) Vhodne označte všetky časti grafu.
d) V ktorom období narastala hmotnosť oboch dievčat najrýchlejšie?
e) Kedy mali rovnakú hmotnosť?

13. V tabuľke sú údaje o teplote vody zahrievanej v kadičke Bunsenovým kahanom v chemickom laboratóriu.

Čas (s)	30	60	90	120	150	180
Teplota	23	40	56	69	81	92

Tab. 3 Teplota vody

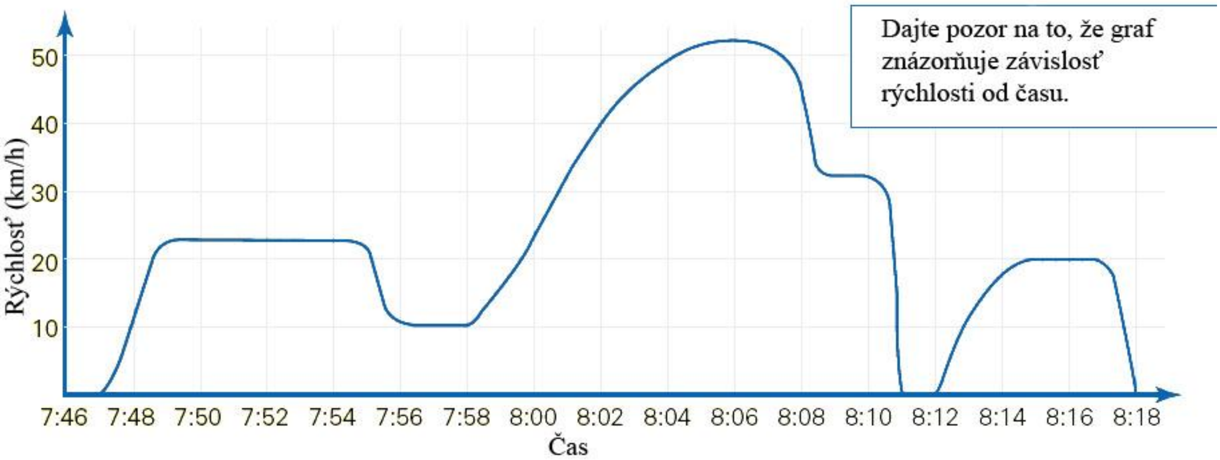
a) Nakreslite graf závislosti teploty vody od času.
b) Na základe grafu odhadnite, akú teplotu mala voda v čase 45 sekúnd a 130 sekúnd.
c) Za aký čas bude voda zohriata na 100˚C?

Problémy

1.

a) Pozorne si prečítajte nasledujúci príbeh Simony. Vytvorte tabuľku údajov.
b) Keď sa Simona ráno prebudila, necítila sa dobre. Mama jej o siedmej hodine ráno odmerala teplotu a teplomer sa zastavil na hodnote 39,1˚C. Simona nešla do školy a o 11:00 si znovu odmerala teplotu. Teplota sa jej zvýšila na 39,3˚C a o štyri hodiny neskôr sa ešte zvýšila o 0,5˚C. Privolaný lekár odporučil previezť Simonu do nemocnice. V nemocnici Simonu prijali o siedmej hodine večer a pri vstupnej prehliadke jej ošetrujúci lekár nameral teplotu 39,9˚C. Po aplikácií liekov jej o jedenástej hodine v noci teplota klesla o jeden stupeň Celzia. O tretej hodine ráno, keď zdravotná sestra skontrolovala Simonin stav, teplomer ukazoval 38,1˚C a o siedmej hodine ráno to bolo 37,6˚C. Ďalšie tri kontrolné merania telesnej teploty Simony sa uskutočňovali vo štvorhodinových intervaloch a zakaždým bola Simonina teplota rovná normálu: 36,7˚C. Zostrojte graf popisujúci vývoj telesnej teploty Simony.
c) Koľko stupňov nad normálom bola Simonina telesná teplota, keď ju prijali do nemocnice?
d) Odhadnite, akú teplotu mala Simona v prvý deň o druhej ráno.
e) Ako dlho trvalo, kým sa Simonina teplota dostala z maxima na normálu hodnotu?

2. Filip jazdí do školy každé ráno na bicykli. Graf znázorňuje **rýchlosť**, ktorou sa Filip na bicykli blížil ku škole.

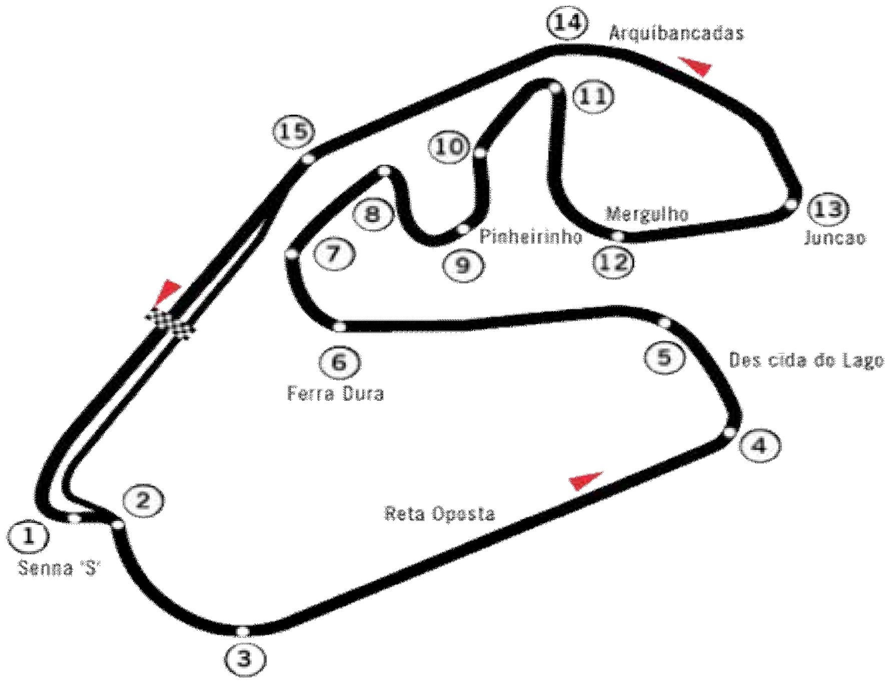


Obr. 19 Rýchlosť Filipa na bicykli

a) Kedy Filip odišiel z domu do školy?
b) Po odchode z domu šiel Filip istý čas konštantnou rýchlosťou. Aká rýchlosť to bola?
c) O koľkej hodine musel Filip zastať na svetelnej križovatke?
d) Ako dlho čakal na križovatke?
e) Po ceste do školy musí Filip vyšliapať na bicykli strmý briežok. Akou rýchlosťou to urobil?
f) Akú najvyššiu rýchlosť dosiahol Filip na bicykli počas jazdy do školy?
g) Ako dlho trvala Filipovi cesta do školy?

3. Zuzana a Martina hrajú tenisový zápas vo štvorhre. Prvý set má nasledujúci priebeh: Zuzana a Martina vyhrali prvé dve hry, ich súperky vyhrali nasledujúce štyri hry po sebe. Zuzana a Martina zabojovali a vyhrali nasledujúce tri hry, potom jednu hru prehrali a nakoniec vyhrali posledné dve hry a celý set v pomere 7:5. Načrtnite krivku – graf, ktorý popisuje ich pravdepodobné pocity radosti resp. sklamania počas tohto setu. Nezabudnite vyznačiť zlomové momenty.

4. Obrázok ukazuje plánik okruhu pretekov Veľká Cena Formuly 1 v Brazílii. Načrtnite graf popisujúci rýchlosť monopostu Formuly 1 počas jednej jazdy celým okruhom.



Obr. 20 Okruh Veľkej ceny Formuly 1 v Brazílii

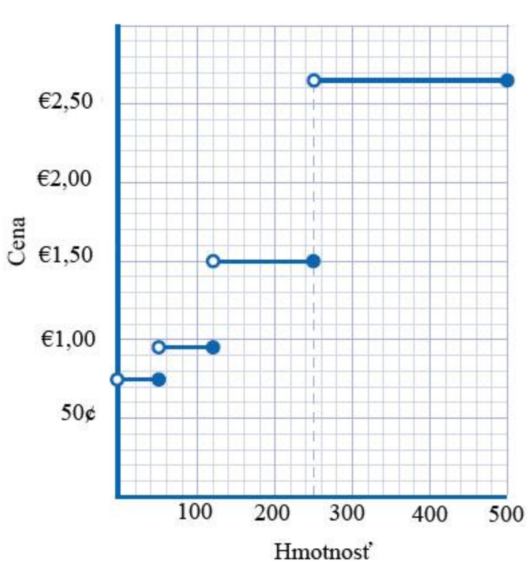
2.2 Graf – schody

Niektoré situácie a vzťahy medzi veličinami sa nedajú znázorniť graficky súvislou priamkou alebo krivkou. Na ich grafické znázornenie potrebujeme iné typy grafov. Jedným typom je graf – schody, pretože svojim tvarom, zloženým z krátkych rovnobežných úsečiek, pripomína schody.
V tabuľke sú uvedené poštové poplatky za listy 1. triedy platné v Slovenskej republike od 1.1. 2007.

Hmotnosť (g)	do 50	50 - 125	125 – 250	nad 250
Poplatok (EUR)	0,70	0,95	1,50	2,65

Tab. 4 Poštové poplatky za zásielku 1. triedy

Poplatky pomôže znázorniť graf - schody.



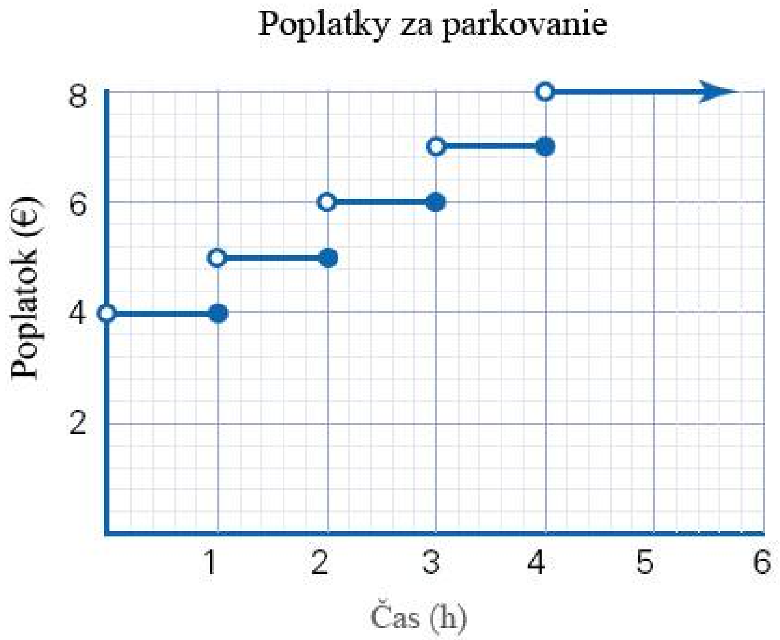
Obr. 21 Poštové poplatky

Graf - schody tvoria úsečky rovnobežné s osou *x*.

○ Prázdny krúžok v krajnom bode úsečky znamená, že daná hodnota do grafu nepatrí (poplatok sa k danej hmotnosti nevzťahuje).
● Plný krúžok v krajnom bode úsečky znamená, že daná hodnota do grafu patrí (poplatok sa k danej hmotnosti vzťahuje).

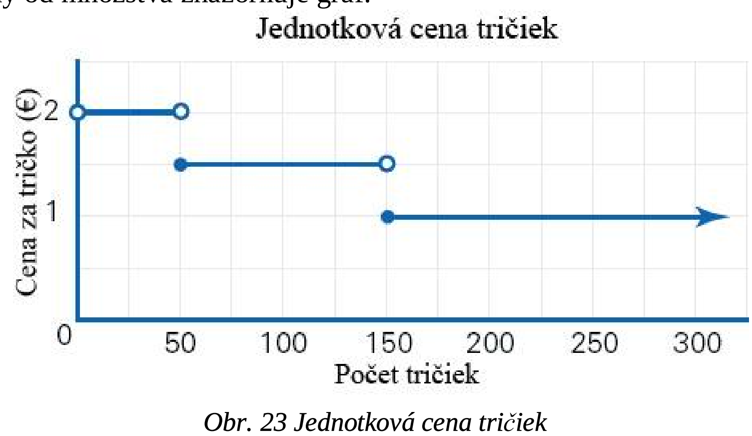
Cvičenia

1. Graf znázorňuje poplatky za parkovanie na letisku.
   a) Aký je minimálny poplatok za parkovanie?
   b) Aký je maximálny poplatok za parkovanie?
   c) Koľko zaplatíme, ak auto stálo na parkovisku 3 hodiny a 47 minút?
   d) Ako dlho môžeme parkovať za poplatok 10 eur?
   e) Mária odchádza z parkoviska o 17:12 hod. Na parkovacom lístku má vyznačený čas príchodu na parkovisko: 15:35. Koľko zaplatí za parkovanie?
   f) Koľko zaplatíme za parkovanie, ktoré trvalo 2 hodiny a 1 minútu? Čo sa môže reálne stať? Vymeňte si názory na takúto situáciu.



Obr. 22. Poplatky za parkovanie na letisku

2. Pán Kováč nakúpil vo veľkosklade bavlnené tričká a bude ich predávať vo svojom obchode s textilom. Cena za jedno tričko vo veľkosklade je nižšia, ak zákazník kúpi viac kusov. Závislosť ceny od množstva znázorňuje graf.



Obr. 23 Jednotková cena tričiek

a) Pán Kováč kúpi 15 tričiek. Aká je ich jednotková cena?

b) Koľko tričiek minimálne musí kúpiť pán Kováč, ak má byť ich jednotková cena 1 Euro?
c) Koľko pán Kováč zaplatí spolu ak kúpi 70 tričiek?

3. V tabuľke sú údaje o poplatkoch za poslanie balíka 1. triedy podľa údajov Slovenskej pošty platné od 1.1. 2008.
4.

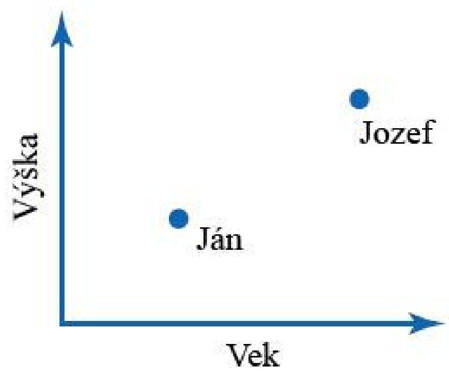
Hmotnosť balíka (kg)	Do 2	2 - 3	3 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30
Poplatok (EUR)	2	2,5	3	3,75	4,5	6	8	10

Tab. 5 Poplatky za balík 1. triedy

a) Zostrojte graf závislosti poplatku od hmotnosti balíka.
b) Koľko zaplatíme minimálne za poslanie balíka 1. triedy?
c) Aký je poplatok za poslanie balíka s hmotnosťou 8kg?
d) Aký najťažší balík môže byť poslaný za 135 korún?
e) Aký je rozdiel v poplatkoch za balíky s hmotnosťou 4kg a 11kg?
f) Aký je rozdiel v poplatkoch za balíky s hmotnosťou 15kg a 15,1 kg?
g) Pán Nový balí balík, ktorý posiela synovi. Balík má zatiaľ hmotnosť 13kg. Koľko kg ešte môže pán Nový pridať do balíka bez toho, aby musel zaplatiť vyšší poplatok (ako za 13kg balík)?

2.3 Bodový graf

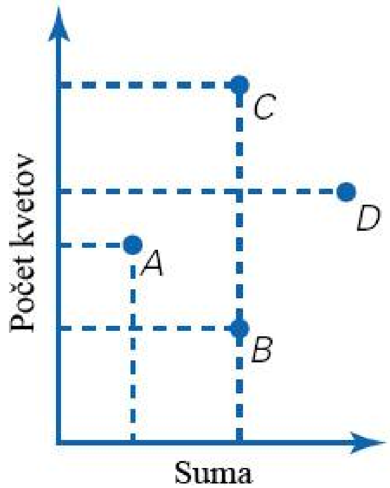
Každý bod v bodovom grafe predstavuje izolovaný prvok, napríklad: osobu, miesto alebo predmet. Bodový graf ukazuje, aký je vzťah daného izolovaného prvku vzhľadom na jeho dve vlastnosti alebo charakteristiky. V bodových grafoch nemusí byť vždy definovaná mierka na súradnicových osiach. Bodový graf ukazuje porovnanie zobrazovaných prvkov. Napríklad: Jozef a Ján sú bratia. Jozef má 14 rokov, Ján má 11 rokov. Vlastnosti bratov, ktoré zobrazuje bodový graf sú: vek a výška. Z rozloženia bodov na grafe je tiež zrejmé, že Ján je mladší a nižší ako Jozef.



Obr. 24 Jozef a Ján

Príklad
a) Ktorá kytica kvetov je najlacnejšia?
b) Ktoré dve kytice majú rovnakú cenu?

A: karafiáty (5 kusov)
B: ruže (najmenej kusov)
C: frézie (najviac kusov)
D: gladioly (6 kusov)



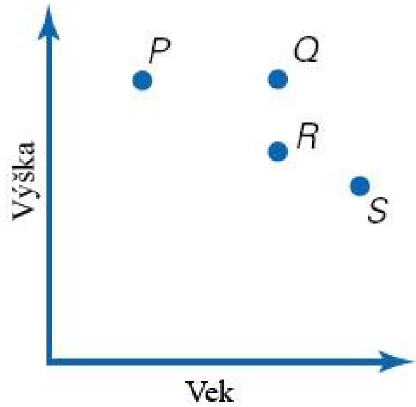
Obr.25. Kytica kvetov

Riešenie

a) Najlacnejšia je kytica karafiátov, pretože bod A je na osi *x* (cena) najbližšie k počiatku.
b) Ruže a frézie stoja rovnako, pretože body B a C ležia „nad sebou“ nad osou *x*.

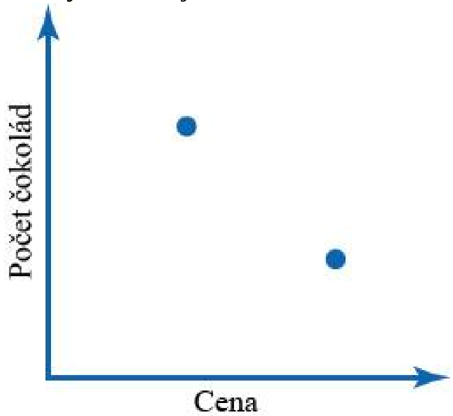
Cvičenia

1. Nina: 14 rokov, výška 177cm; Lenka: 18 rokov, výška 154 cm; Maroš: 16 rokov, výška 180 cm a Ľuboš: 16 rokov, výška 169 cm; sú kamaráti. Dokážete im priradiť jednotlivé body na grafe.



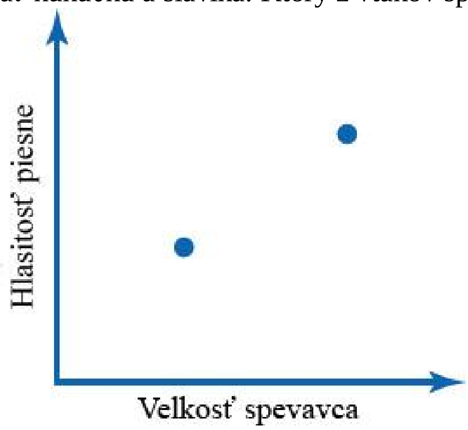
Obr. 26 Štyria kamaráti

2. Máme na výber z dvoch čokoládových bonboniér. Bonboniéra „Modré z neba“ stojí 5,99 EUR, bonboniéra „Čokoládový sen“ stojí 6,99 EUR. Ktorá z nich obsahuje viac bonbónov?



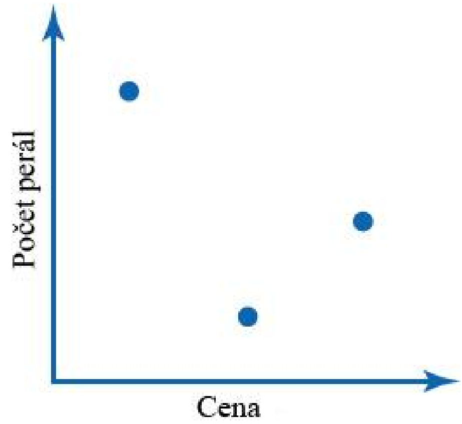
Obr. 27 Čokoládové bonboniéry

3. V lese sme počuli spievať kukučku a slávika. Ktorý z vtákov spieva hlasnejšie?



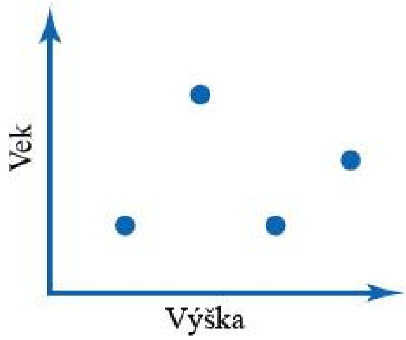
Obr. 28 Vtáčí spev

4. Jana si prezerá v klenotníctve tri perlové náramky. Počet perál v náramkoch je: 1, 5, 7. Ktorý z troch náramkov je najdrahší?



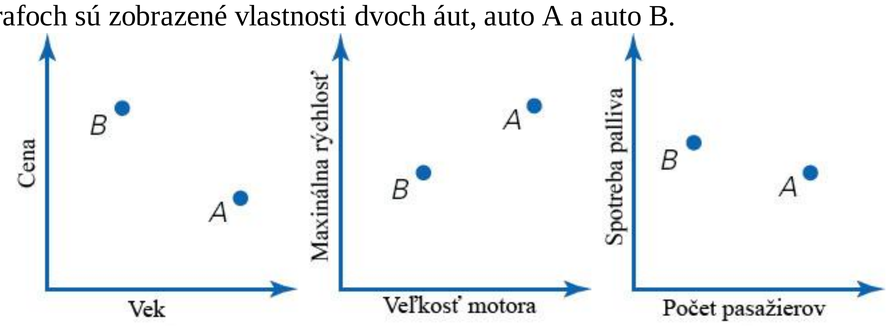
Obr. 29 Náramky

5. Bodový graf znázorňuje výšku a vek kamarátov: Andrej (A, 175 cm), Barbora (B, 164 cm), Cyril (C, 180 cm) a Daniela (D, 170 cm).
a) Kto z nich ja najstarší?
b) Ktorí dvaja sú rovnako starí?



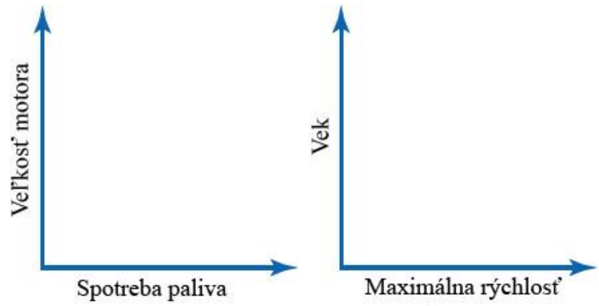
Obr. 30 Kamaráti A,B,C,D

6. Na grafoch sú zobrazené vlastnosti dvoch áut, auto A a auto B.



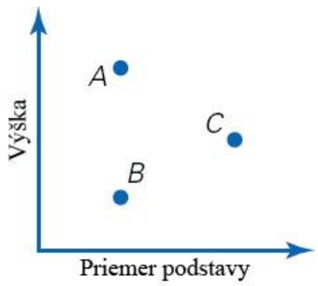
Obr. 31 Dve autá I

a) Prvý graf zobrazuje, že auto A je staršie ako auto B. Čo ešte môžeme z grafu vyčítať? Rozhodnite, či sú pravdivé alebo nepravdivé nasledujúce tvrdenia:
   I. Staršie auto je lacnejšie.
   II. Rýchlejšie auto má menší motor.
   III. Najekonomickejšie auto má najviac sedadiel.
   IV. Auto s najväčším motorom je najstaršie.
   V. Najlacnejšie auto má najmenej sedadiel.
   VI. Najdrahšie auto je najekonomickejšie.
b) Popíšte vlastnosti auta A v porovnaní s vlastnosťami auta B.
c) Prekreslite si do zošita nasledujúce dva grafy a v každom z nich vyznačte vlastnosti auta A a auta B.



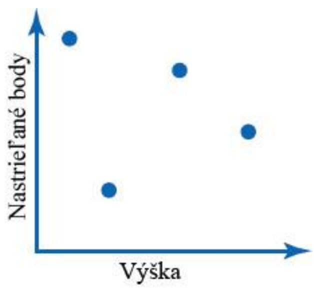
Obr. 32 Dve autá II

7. Načrtnite tri geometrické telesá - valce, ktoré reprezentujú body A, B a C na danom grafe.



Obr. 33 Tri valce

8. Poradie štyroch basketbalových hráčok podľa výšky od najvyššej hráčky je: Ida, Lea, Zina a Nora. Počas školského basketbalového zápasu vsietila Nora najviac košov. Ktorá z ďalších jej spoluhráčok vsietila, ako druhá, najviac košov?

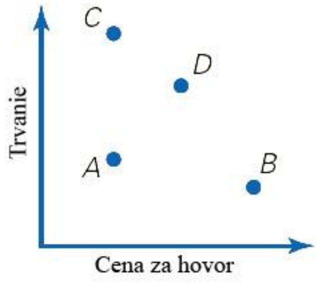


Obr. 34 Basketbal

Problémy

1. Róbert uskutočnil štyri telefonické hovory. Hovory popisuje graf. Rozhodnite, ktorý hovor patrí do ktorej kategórie a svoje rozhodnutie vysvetlite. (Róbert telefonoval z Bratislavy.)

a) medzinárodný hovor - Európa
b) miestny hovor
c) medzinárodný hovor Brazília



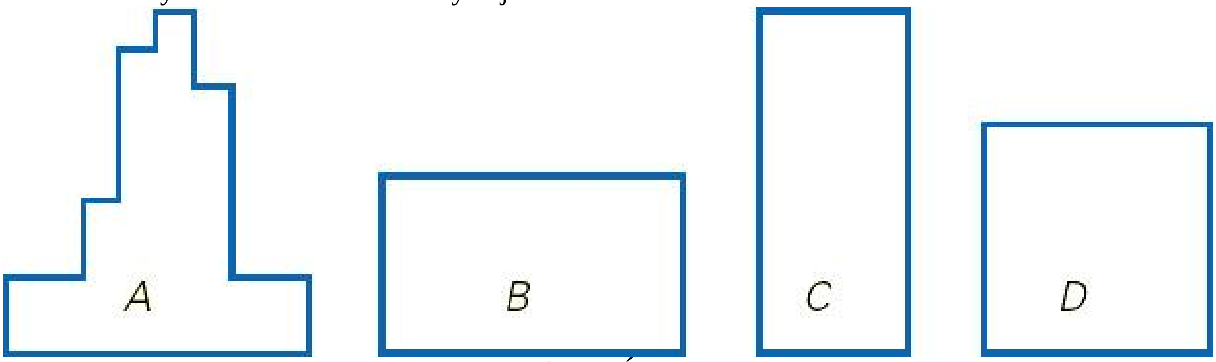
Obr. 35 Telefonické rozhovory

2. Štyri geometrické útvary na obrázku majú rovnaký obsah – 36 štvorcových jednotiek.

a) Priraďte bodom na grafe zodpovedajúce označenie útvarov A, B, C a D.

b) Viete nakresliť ďalší, piaty útvar E, ktorý bude mať rovnaký obsah a zakresliť ho do grafu? Svoje riešenie zdôvodnite.

c) Aký tvar bude mať obrazec z bodov v bodovom grafe, ak by sme doňho zakreslili všetky útvary s obsahom 36 štvorcových jednotiek?



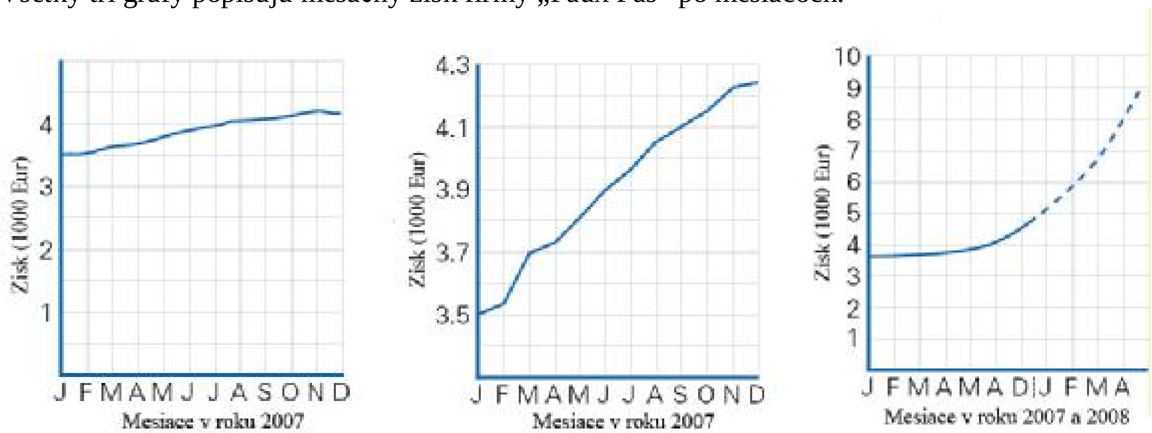
Obr. 36 Útvary

1.4 Nesprávne grafy

Spomínali sme už, že zobrazenie vzťahov alebo vlastností objektov pomocou grafov pomáha názornejšie pochopiť ich vzájomné vzťahy. Niekedy však grafické zobrazenie nie je správne, je zavádzajúce. Ukážeme si niekoľko príkladov.

Príklad 1

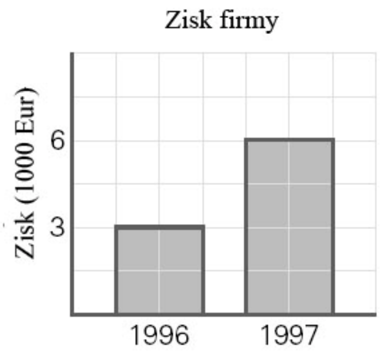
Všetky tri grafy popisujú mesačný zisk firmy „Faux Pas“ po mesiacoch.



Obr. 37 Firma „Faux Pas“

- Prvý graf reprezentuje zisk správne a korektne.
- Druhý graf nemá správne určenú mierku na zvislej osi. Delenie osi nezačína bodom 0, nie je správne určená jednotková úsečka. Preto je čiara popisujúca rast zisku zavádzajúca – zisk nerástol tak prudko, ako je to z grafu čitateľné.
- Tretí graf má nesprávne rozdelenie vodorovnej osi. Toto nesprávne rozdelenie skresľuje dosiahnutý zisk a tiež skresľuje predpoveď, ako sa budú zisky firmy vyvíjať v nasledujúcom roku.

Príklad 2



Obr. 38 Dvojnásobok zisku

- Prvý graf správne znázorňuje skutočnosť, že firma dosiahla v roku 2007 dvojnásobný zisk ako v roku 2006.

Obr. 39 Dvojnásobok zisku – nesprávne

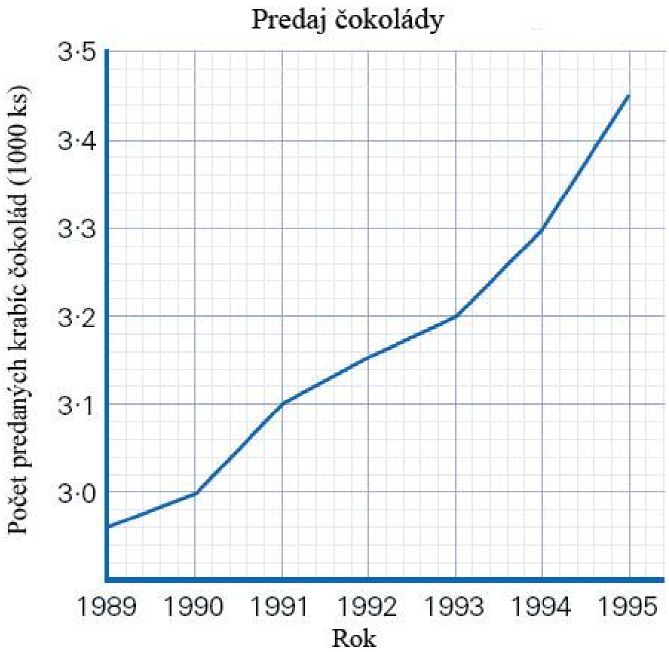
- Druhý graf ukazuje zisk pomocou dvojnásobného zväčšenia každého rozmeru bankovky - obdĺžnika. Porovnávaná veličina je obsah útvarov. Chyba nastala v tom, že ak rozmery bankovky zdvojnásobíme, jej obsah sa zväčší štyrikrát oproti pôvodnej bankovke. (Presvedčte sa výpočtom.)

Obr. 40 Dvojnásobok zisku – nesprávne II

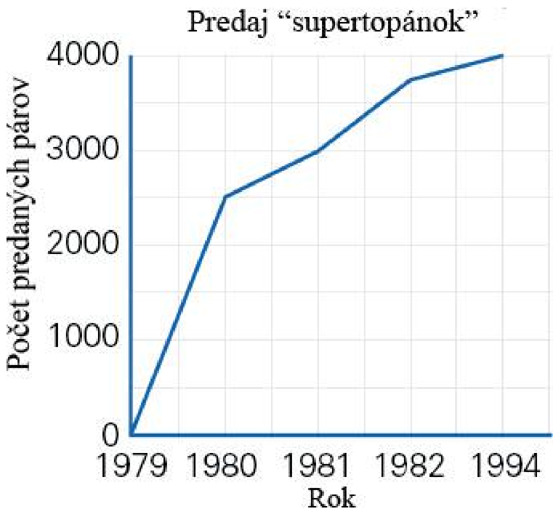
- Tretí graf zobrazuje trojrozmerný útvar – truhlicu, v jazyku geometrie je to kváder. Porovnávaná veličina je objem. Ak každý rozmer kvádra zdvojnásobíme, objem vzniknutého kvádra bude osemkrát väčší, ako objem pôvodného kvádra. (Presvedčte sa výpočtom.)

Cvičenia

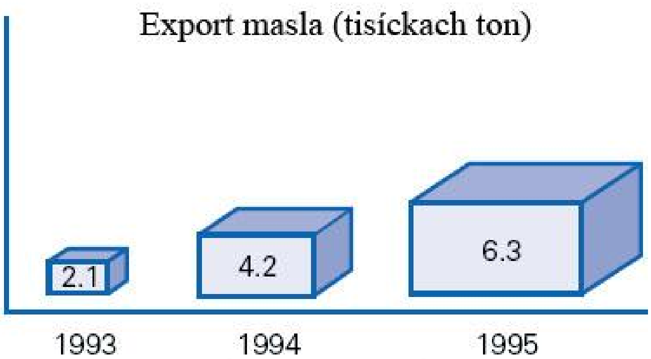
1. Skontrolujte nasledujúce grafy. Pokúste sa odhaliť, prečo sú nekorektné. Ak sa dá, nakreslite správny graf.



Obr. 41 Predaj čokolády



Obr. 42 Predaj „supertopánok“



Obr. 43 Export masla

2. Matematické skúmanie

Zozbierajte grafy z novín a časopisov. Pokúste sa nájsť najmä nesprávne, nekorektné grafy. Vystrihnite a nalepte si grafy do zošita, popíšte, prečo sú nesprávne a zostrojte k nim správne, korektné grafy.

3. Nakreslite nekorektný graf daných situácií. Môžete použiť akúkoľvek nesprávnu techniku.

a) V tabuľke je uvedený priebeh ziskov (eur) firmy vyrábajúcej športové tašky „Pre víťaza“.

rok	2002	2003	2004	2005	2006	2007
zisk	60 200	64 000	61 500	67 000	60 500	68 700

I. Finančný riaditeľ popisuje, pomocou nesprávneho grafu, členom správnej rady firmy, ako prudko narastali zisky firmy.
II. Generálny riaditeľ vysvetľuje, pomocou nesprávneho grafu, pracovníkom vo výrobe, prečo firma nemôže zvyšovať platy.

b) Predstavme si malý štát, ktorý získava veľké príjmy z vývozu pomarančov, ktoré sa všade pestujú. Zisk z vývozu pomarančov v roku 1985 bol 20 miliónov EUR, v roku 2005 bol zisk 30 miliónov EUR.

I. Minister financií zdôvodňuje obyvateľom, že príjmy z vývozu pomarančov nerastú tak rýchlo, ako by mali, a preto je potrebné zvýšiť dane.
II. Minister hospodárstva podáva správu vláde o tom, ako sa podarilo úspešne získať zámorské trhy a zvýšiť zisky z predaja pomarančov.

Záver

V literatúre, zaoberajúcej sa teóriou vyučovania matematiky, je často citovaná definícia matematickej gramotnosti podľa štúdie PISA z roku 2003. Podstatnú časť definície tvorí opis schopností jednotlivca, ktoré by mal ovládať, aby bol schopný rozpoznať, pochopiť, riešiť, interpretovať a využívať riešenia matematických problémov z reálneho života. Príklady, problémy a cvičenia uvedené v texte môžu slúžiť na nácvik takýchto schopností. Niektoré z úloh sú zároveň aj ukážkou, ako je možné spájať a kombinovať rôzne, najmä grafické, spôsoby riešenia.

LITERATÚRA

[1] Šedivý a kol. 2004. Matematika pre 9. ročník základných škôl. 2. časť. SPN Bratislava 2004. ISBN 80-10-00397-2

[2] Goodman, J., Osborne, C., Priddle, A. 2004. Cambridge Spectrum Mathematics 5.2 Year 9. Cambridge. 2004. ISBN 0 521 52908 5

[3] Učebné osnovy predmetu matematika – návrh publikovaný v apríli 2008 na: www.statpedu.sk

doc. PaedDr. Soňa Čeretková
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: sceretkova@ukf.sk

PaedDr. Ján Šunderlík
Katedra matematiky
Fakulta prírodných vied
Univerzita Konštantína Filozofa
Trieda A. Hlinku 1
SK – 949 01 Nitra
e-mail: jsunderlik@ukf.sk

Seminár

Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. stupeň ZŠ

Termín: **30. apríl 2008**
Miesto konania: **Katedra matematiky FPV UKF v Nitre,**
Miestnosť: **M5, II. poschodie, blok C**
Čas: **11.00 hod**.
Otvorenie, úvodné slovo a organizačné pokyny: Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Vystúpia

Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc.
Hľadajme vo vyučovaní matematiky krásu, zábavu a radosť

doc. PaedDr. Soňa Čeretková: PhD. - PaedDr. Ján Šunderlík:
Grafy z reálneho života

PaedDr. Ján Šunderlík
Osvojovanie si stratégie hľadania pravidiel a vzorcov pomocou matematických hier

PHDr. PaedDr. Valéria Vasková, PhD.
Matematický futbal – didaktická hra na prehĺbenie učiva o kritériách deliteľnosti

PaedDr. Soňa Fándlyová:
Aj zlomky môžu byť zábavné

PaedDr. Gabriela Pavlovičová, PhD. – PaedDr. Lucia Rumanová, PhD.:
Trh s geometrickými "nepodarkami".

PaedDr. Janka Melušová, PhD.:
Využitie deliteľnosti v kryptológii (RSA algoritmus)

Mgr. Júlia Záhorská**:**
Tematický celok „Objem a povrch telies“ v 9.ročníku ZŠ a aplikačné úlohy

Mgr. Lucia Záhumenská:
Niekoľko hlavolamov a hier podporujúcich rozvoj logického myslenia žiakov

RNDr. Kitti Vidermanová, PhD.:
Využitie stavebnice Polydron vo vyučovaní stereometrie

RNDr. Viliam Ďuriš:
Riešenie niektorých vybraných úloh pre bystré hlavy

RNDr. Dušan Vallo, PhD.:
Jedna elementárna úloha z geometrie

FACULTY OF NATURAL SCIENCES
CONSTANTINE THE PHILOSOPHER UNIVERSITY
NITRA

Názov diela:	Didaktické hry a aplikačné úlohy vo výučbe matematiky pre 2. stupeň ZŠ
Vydavateľ:	Fakulta prírodných vied UKF v Nitre
Edícia:	Prírodovedec č. 311
Schválené:	Vedením FPV UKF v Nitre dňa 16. 6. 2008
Vedeckí redaktori:	Prof. RNDr. Ondrej Šedivý, CSc. RNDr. Dušan Vallo, PhD.
Technická spolupráca:	Vladimír Ondrejka
Rok vydania:	2008
Poradie vydania:	prvé vydanie
Počet strán titulu:	89 strán
Počet výtlačkov:	100 kusov
Sadzba:	Použitím textového editora Microsoft© Office Word
Tlač:	Vydavateľstvo Michala Vašku, Námestie Kráľovnej pokoja 3, 080 01 Prešov

ISBN 978-80-8094-346-2

9 788080 943462