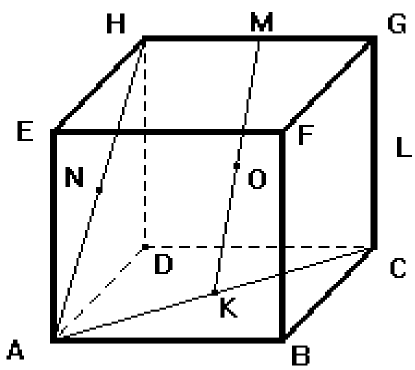
**Alica Kortišová, Jozef Vozár**

# Maturitné úlohy z Matematiky pre Gymnázium

# II.

**(úlohy s dlhou odpoveďou)**



## OBSAH

# 1. Základy matematiky

## 1.1 Logika a množiny

1. Vypočítajte hodnoty výrazov $2^n$ a $n^2$ pre n $n \in \{1;2;3;4;5;6\}$ . Vyslovte existenčné a všeobecné výroky, v ktorých porovnáte hodnoty týchto výrazov, a určte ich pravdivostné hodnoty.
2. Ku každému z nasledujúcich výrokov utvorte jeho negáciu. Určte pravdivostné hodnoty pôvodných i negovaných výrokov.

   Existujú práve dve reálne čísla x, pre ktoré platí :$(3^x)^2 = 3^{x2}$

   Číslo 7/5 možno zapísať aspoň štyrmi rôznymi spôsobmi.

   Pre všetky a, b$\in R_0^+$: $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

   Možno nájsť najviac tri reálne čísla, ktoré nie sú racionálne.
3. Vieme, že platia dva zložené výroky : $(A \vee B) \Rightarrow C'$ a $(A \wedge C') \Leftrightarrow B$ Zistite, aké pravdivostné hodnoty môžu mať za tejto situácie výroky A, B, C.
4. Negujte zložené výroky:

   14 < 7 $\leq$ 28

   Ak sa derivácia funkcie f v bode a rovná nule, potom má funkcia f v bode a extrém.

   Pre všetky n$\in N: 8 | n \Rightarrow (2 | n \wedge 4 | n)$
5. Vyslovte obmenu a obrátenie ku každej z nasledujúcich viet a určte ich pravdivostnú hodnotu:

   Pre každé dva rovinné útvary U1 a U2 platí, že ak sú zhodné, potom majú rovnaký obsah.

   Pre každý štvoruholník U platí: Ak nie sú uhlopriečky štvoruholníka navzájom kolmé, potom U nie je kosoštvorec.

   Pre všetky trojuholníky ABC platí: |∢ACB| = 90o$\Rightarrow$ c2= a2 + b2 .
6. Dané sú množiny A = $\{x \in R; |x+2| \leq 3\}$, $B = \{x \in R; x+1 > 0\}$ . Určte a znázornite: A, B,A,,B,, $A \cap B, A \cup B', A' \cap B', (A \cup B)', A - B, B - A$ .
7. Dokážte rovnosť množín:

   a) $A \cap (B \cup A') = A \cap B$

   b) $A \cap (B \cap C)' = (A \cap B') \cup (A \cap C')$
8. Pri prieskume životnej úrovne sa zistilo, že zo 40 rodín v jednom obytnom dome má 40% auto i chatu. Pritom auto vlastní o 16 rodín viac než chatu a nie je rodina, ktorá by nemala auto alebo chatu.

   Vypočítajte, koľko rodín z domu má auto.

   Koľko percent rodín z domu vlastní iba auto?

   Určte pravdepodobnosť, že náhodne vybratá rodina z domu vlastní iba chatu.

9. Sú nasledujúce výroky jeden druhému negáciou?

Existujú aspoň dvaja speváci populárnej hudby, ktorých majú všetci radi.

Každého speváka populárnej hudby niekto nemá rád.

10. Utvorte negáciu výroku: Každý mnohočlen, ktorý je súčinom dvoch mnohočlenov nepárneho stupňa, má aspoň dva reálne korene.

11. Pomocou množín A, B, C, D opíšte množinu všetkých bodov x množiny D, pre ktoré platí: ak je číslo x v množine A, tak nie je v množine B, alebo je v množine C.

12. Zistite, či je množina všetkých dvojíc prirodzených čísel (x, y), ktoré sú riešením rovnice

$$5x - 3y = 100\,000,$$

$$5x + 3y = 100\,000$$

konečná alebo nekonečná.

13. Koľko štvorciferných čísel je bezo zvyšku deliteľných číslom 24 alebo 19 (číslom 24 alebo 20)?

14. Rozhodnite o pravdivosti:

    a. Číslo 121 je druhou mocninou prirodzeného čísla.
    b. Existuje aspoň jedno párne prvočíslo.
    c. Riešením rovnice $(x - 3)^2 = (x+2)^2 + 1$ je číslo $x_1$, pre ktoré platí, že $x_1 \geq 0{,}4$.
    d. $\sqrt{63} < 8 \vee \sqrt{63} = 8$
    e. 3/36 $\wedge$ 4/36
    f. $\left(\frac{1}{2} < \frac{3}{4}\right) \wedge \left(\frac{3}{4} < \frac{4}{5}\right)$

15. Určte negáciu:

    a. Číslo 9102 je deliteľné dvomi a tromi.
    b. Nik nefajčí.
    c. Každý deň je dôvod k radosti.
    d. Rovnici $\frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 - 6x + 8} < 0$ nevyhovuje žiadne prirodzené číslo.

16. Daným výrokom priraďte pravdivostnú hodnotu:

    a. Pre objem V a plášť Q každého rotačného kužeľa platí:

    $$\left(V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 v\right) \wedge \ Q = \pi\, r\, v$$

    b. Pre každé prirodzené číslo $x$ = 2n(2n+1)(2n+2), kde n$\in$N platí, 4 / $x$ alebo 5 / $x$.

c. Pre trojuholník, v ktorom $a$ = 5 jednotiek dĺžky, b = 4 j. dĺžku, $\gamma$ = 60° platí pre obsah trojuholníka $S = 10\sqrt{3}$ j. dĺžky$^2$.

17. Overte nasledujúce tvrdenia:

a. Rovnica $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ má tri celočíselné riešenia.

b. Výška pravouhlého trojuholníka $v$ = 4 cm delí preponu na 2 úseky $c_1$ = 2 cm, $c_2$ = 7,5 cm.

c. Postupnosť $\left\{\frac{2m+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca.

18. Určte negáciu:

a. Nikto nie je doma

b. $\exists\ n \in N;\ n^2 < 0$

c. Všetky násobky čísla 7 sú aj násobkami čísla 5.

d. Práve traja žiaci sú chorí.

e. $(4^3 = 2^{5)} \vee (4 > 2^2)$

19. Určte pravdivostnú hodnotu a negáciu výrokov:

a. $\binom{10}{3} = 120 \wedge \binom{10}{3} + \binom{10}{4} = \binom{11}{3}$

b. 6 / 231 $\vee$ 9 / 231

c. $x \in$ R; $|5 - x| < 0$

d. Definičným oborom funkcie $y = \log|x - 5|$ sú všetky reálne čísla.

20. Určte pravdivostnú hodnotu:

a. Postupnosť $\left\{\frac{n^2+4n+3}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je rastúca a konvergentná.

b. Rovnica $2x - 3y = 0$ je asymptota hyperboly $4y^2 - 9x^2 = 36$.

c. Funkcia $y = |2x - 3|$ má deriváciu v každom bode definičného oboru.

d. Funkcia $y = x^2 - 2|x| + 1$ je párna.

21. Zistite, či formula je tautológia:

$(A \vee \neg B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$

22. Určte obmeny viet a ich negácie:

a. $n \in N;\ 5 / n \Rightarrow 5 / n^2$

b. $n \in N;\ (3 / n \wedge 2 / n) \Leftrightarrow 6 / n$

c. Ak ľubovoľná postupnosť $a_n{}_{n=1}^{\infty}$ má limitu, tak je ohraničená.

23. Dané sú množiny $A$ = $\{x\in R;\ 1 \le (x - 5)^2 < 4\}$, B = $\{x\in N;\ 2\sqrt{x} \ge 4\}$. Určte $A \cap B$.

24. Určte definičný obor funkcie:

$$f : y = \log_2\left(\frac{\sqrt{x^2 - 9}}{8 - 2x}\right)$$

25. Množiny $A$, B, C, D znázornite graficky na číselnej osi a určte $A \cap C$, B U D.

$A = \{x\in R;\ x < 2 \vee x \ge 8\}$

$B = \{x\in R;\ x^2 \le 1\}$

$C = \{x\in R;\ \sqrt{x^2} = x\}$

$D = \{x\in R;\ |\,x + 1\,| > 1\}$

26. Určte $A \cap B$, $A$ U B ak:

a) $A = (-2; 1>$

b) $B = R^+$

c) $A = (x\in R;\ |\,x\,| \ge 2\}$

d) $B = \{x\in R,\ x^{2\,-}\ 2x - 8 < 0\}$

27. Určte definičný obor funkcie

$$f : y = \sqrt{x^2 - 9} + \frac{\sqrt{5 - x}}{|x| - 4}$$

28. Načrtnite graf karteziánskeho súčinu množín $A$, B ak:

$A = \{\ x\in R,\ \dfrac{x - 1}{x + 3} \le 0\}$

$B = \{\ y\in R,\ |\,y - 3\,| = 1\ \}$

29. Určte graficky $A \cap B$, ak:

$A = \{[x, y]\in R^2;\ x^2 + y^2 - 4x \le 0\}$

$B = \{[x, y]\in R^2;\ y^2 - x - 1 \le 0\}$

30. Zo sto študentov sa učilo 30 nemčinu, 28 španielčinu, 42 francúzštinu, 8 španielčinu a nemčinu, 10 španielčinu a francúzštinu, 5 nemčinu a francúzštinu, 3 všetky jazyky.

Koľko študentov neštudovalo nijaký z uvedených predmetov?

31. Zo 129 študentov prvého ročníka internátnej školy chodí pravidelne do jedálne na obed alebo večeru 116 študentov, 62 študentov nechodí na obed alebo nechodí na večeru. Pritom na obedy ich chodí o 47 viac ako na večeru. Koľko z nich chodí na obedy aj večere, koľko len na obedy, koľko len na večere?

32. Napíšte negáciu výroku :Ak je druhá odmocnina z 5 racionálne číslo, potom je číslo 6 párne.

33. Napíšte obmenenú a obrátenú vetu k výroku z 1.úlohy.

34. Rozhodnite o pravdivosti pôvodného výroku, jeho negácie, obmenenej a obrátenej vety.

35. Dané sú množiny : A = {[x,y]˛ RxR, y > x }, B = {[x,y]˛ RxR, y <= -x }

Nakreslite ich obrazy v súradnicovej sústave.

36. Určte graficky ich a/ prienik

b/ zjednotenie

c/ A - B

d/ B - A

37. Čím sa líši hypotéza od výroku. Uveďte príklad.

## 1.2 Čísla, premenné, výrazy

**Goniometrické výrazy**

1. Dokážte: $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x}=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

2. Dokážte: $\dfrac{\sin x-\sin 3x+\sin 5x}{\cos x-\cos 3x+\cos 5x}=\operatorname{tg} 3x$

3. Daný výraz upravte a udajte podmienky: $\dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{cotg}^2 x}$

4. Určte hodnotu výrazu:

a) $\dfrac{\sin x+2\cos x}{\cos x-3\sin x}$ ; ak $\operatorname{tg} x=\dfrac{3}{4}$

b) $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$ ; ak tg $x$< 0 a $\sin x=\dfrac{7}{25}$

5. Upravte výraz:

a) $\dfrac{\sin x+\sin 2x}{1+\cos x+\cos 2x}:\dfrac{\cos 3x-\cos x}{\sin 3x+\sin x}$

b) $\sin\dfrac{4\pi-3x}{3}\cdot\sin\dfrac{2\pi-3x}{3}+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)\cdot\cos\dfrac{10\pi-3x}{3}$

6. Dokážte, že pre prípustné hodnoty $x, y \in \boldsymbol{R}$ platí:

a) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}^2 y = \dfrac{\sin^2(x+y) + \sin^2(x-y)}{2\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

b) $\dfrac{2\sin x - \sin 2x}{2\sin x + \sin 2x} = \mathrm{tg}^2 \dfrac{x}{2}$

7. Dokážte, že hodnota daného výrazu nezávisí od $x$:

$3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)$

**1.3 Teória čísel**

1. Zapíšte pomocou matematických symbolov: Nenájde sa reálne číslo, ktoré by vyhovovalo nerovnici : 3x-5 je väčšie ako nula.
2. Zapíšte pomocou matematických symbolov : Číslicový zápis čísel deliteľných 100 sa končí dvoma nulami.
3. Zapíšte pomocou matematických symbolov: Dve priamky majú najviac 1 spoločný bod.
4. Dokážte vetu.použite priamy dôkaz.Výraz $n^3+2n$ je deliteľný troma.
5. Dokážte vetu, použite nepriamy dôkaz: Ak $n^2$ je párne číslo, tak $n$ je nepárne číslo.
6. Dokážte , že pre každé prirodzené číslo n platí:

ak n je párne, potom aj $n^2$ je párne;

3 nedelí $(n^4-1)$ potom 3 delí n.

7. Dokážte, že $\sqrt{2}$ je iracionálne číslo.
8. Dokážte, že pre všetky x, y, z $\in$ R je $x^2+y^2+z^2 - 2(x+y+z)+3$ nezáporné reálne číslo
9. Dokážte, že pre všetky n $\in$ N platí:

   $6|(n^3+5n)$;

   $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \dfrac{1}{3.4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$;

   $9|(7^n+3n-1)$.

10. Je číslo 1234567891011121314151617 prvočíslo?
11. Pre ktoré prirodzené číslo *n* je $\boldsymbol{2n^2 - 27n + 88}$ prvočíslo?
12. Pre ktoré čísla a platí $NSN(6, a) = 24$?
14. Pre ktoré čísla *A, B* je číslo s dekadickým zápisom 34*A*57*B* deliteľné 12?
15. Koľko štvorciferných čísel je deliteľných 23? (*každé 23. číslo je deliteľné 23*)
16. Nájdite všetky pravouhlé trojuholníky s celočíselnými stranami, ktorých odvesna *b* meria 12. (Návod: neznáme dajte na jednu stranu a získaný výraz upravte na súčin.)
17. Nájdite všetky celé čísla *x, y*, pre ktoré platí $x^2 + y^4 = 981$ (*absolútna hodnota y nie je väčšia ako 5*)

18. Dokážte, že súčin 3 za sebou idúcich čísel je deliteľný 6.

19. Ukážte, že $\log_2 3$ je iracionálne číslo. (*sporom*)

**1.4 Rovnice nerovnice a ich sústavy**

**Rovnice a nerovnice s abs. hodnotou a s odmocninou**

Riešte v ***R***:

a) $|x|+|x+2|=4$

b) $\sqrt{(5-x)^2}=|x-1|$

c) $|x+1|<2x$

d) $|x|-|x-4|\geq 4(x-3)$

e) $\left|\dfrac{x^2+4x-77}{x-7}\right|\leq 2$

f) $\dfrac{|x|^2-2|x|-3}{2x+|x|+3}=\dfrac{2}{3}$

g) $\dfrac{|x|^2-|x|-6}{x+|x|+4}=\dfrac{7}{2}$

h) $|3x-2|+|2x+5|=7$

i) $|4x-7|+|6x+15|\geq 18$

j) $||x+1|-3|=1$

k) $||x-3|+1|\leq 5$

l) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2+4x+4}=3$

m) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{x+2}=\sqrt{x+1}$

n) $\sqrt{7+\sqrt{x}}=\sqrt{15-3\sqrt{x}}$

o) $\sqrt{x+1-2\sqrt{8-x}}=\sqrt{x}-1$

p) $\dfrac{\sqrt{x+2}+x}{\sqrt{x+2}-1}=\sqrt{x+2}+3$

r) $\sqrt{\log_2 x}-\log_2 x+6=0$

s) $\sqrt{9x^2+\sqrt{12x+5}}=3x+1$

Nasledujúce úlohy riešte v množine reálnych čísel.

1.$(x + 7) - (4x + 3) < (3x - 1) + (x + 4)$

2. $|x + 1| + |x - 1| = 4$

3. $|x + 1| + |2x - 4| > 7$

4. V množine $R^3$ riešte sústavu:

x - 2y + z = 7

2x + y - z = -2

x - 3y + 2z = 11

5.V množine $R^2$ graficky riešte sústavu:

x < 3

x + y > 1

x - y < 2

**Goniometrické rovnice a nerovnice**

Nasledujúce príklady riešte v ***R***:

1. $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$
2. $\sin 5x = \sin 3x$
3. $\frac{\sin^2 x}{\operatorname{tg} x} + \cos^2 x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$
4. Použitím vzorca $\sin(x+y)$ riešte v ***R***:
   $\sin 3x + \sqrt{3}\cos x = 2$
5. $2^{\sin 3x} \cdot 4^{2\sin^3 x} = 8^{\cos x}$
6. Graficky aj výpočtom riešte rovnicu:
   $|2\sin x| = 1$
7. Riešte rovnice:
   a) $\sin^2 x - \cos^2 x + \sin x = 0$
   b) $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$
   c) $\sin 2x = \sin 2x \cdot \cos 3x$
   d) $\frac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x = 1$
8. Riešte nerovnice:
   a) $2\cos^2 x - 7\sin x < 5$
   b) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 < 0$
   c) $\sin \frac{x}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$
   d) $\sin(x-1) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$
   e) $\operatorname{tg}(2x-1) < 1$
   f) $\sin x + \cos 2x > 1, x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

9. Riešte rovnice v ***R***:

a) $(\sin x + \cos x)^2 = 0$

b) $\sin^3 x - 3\sin x \cdot \cos^2 x = 0, x \in (0, 2\pi)$

c) $\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} 2x = \sin 2x$

d) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 0$

e) $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{2}\right) = 1$

f) $2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

**Sústavy rovníc a nerovníc - lineárne**

1. V množine *Z* × *Z* riešte: $\frac{12}{y+2} + \frac{3}{x-y} = 5$, $\frac{5}{x-y} - \frac{6}{y+2} = 4$

2. Nájdite parametrické vyjadrenie bodov priamky *p*, ktorá je priesečnicou rovín □: 3*x* + *y* + *z* = -2; □: 7*x* – *y* – *z* = -2.

3. V množine *R* × *R* riešte sústavu: $x^2 + y = 7$, $x^2 y = 12$

4. Určte druhý člen a kvocient geometrickej postupnosti, pre ktorú platí:

$a_4 - a_2 = 10$

$a_5 - a_3 = 6$

5. V množine R × R riešte sústavu: $3^{2\sqrt{x} - \sqrt{y}} = 81$, $\log_3 \sqrt{xy} = 1 + \log_3 2$

6. Určte hodnotu parametra *c* priamky *p*: 3*x* + 2*y* – 2*c* = 0 tak, aby priamka *p* mala s parabolou *y*2 = *ax* spoločný práve jeden bod.

7. Riešte nasledujúce sústavy a určte ich geometrický model:

a) $x + 2y = 18$, $x^2 + y^2 = 72$

b) $x + 3y - z = 9$, $2x + 5y + 3z = 12$, $x + y + 9z = 0$

c)

$x + 3y - z = 8$, $2x + 5y + 3z = 12$, $x + y + 9z = 0$

8. V množine *R* riešte nasledovné rovnice:

a) $(2x^2 - 3x - 2)\log(x+1) > 0$

b) $\log_2 \frac{3x+1}{1+x} \leq -1$

c) $-1 < \frac{x+2}{3-2x} < 3$

9. V množine $R^3$ vyrieš sústavu rovníc

x+y-z=17

x-y+z=13

-x+y+z=7

10. V množine $R^3$ vyrieš sústavu rovníc

x-y-z=5

-x+y-z =1

-x-y+z=-15

11. Graficky vyrieš sústavu nerovníc

x + y >2

x-y<3

x>1

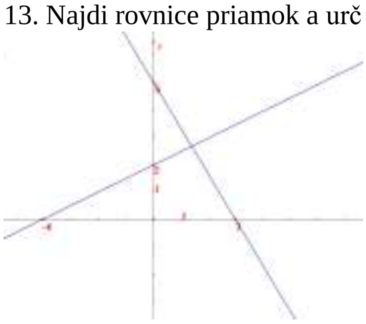
12. Graficky vyrieš sústavu nerovníc

x + y >2

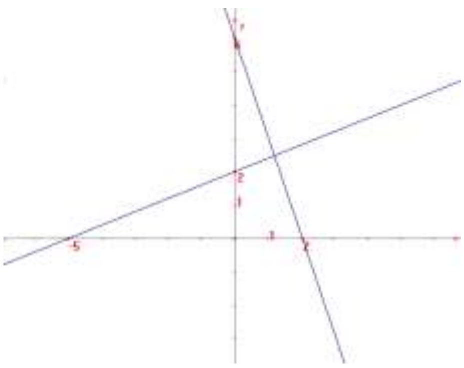
x-y<3

x>1

13. Najdi rovnice priamok a urč súradnice ich spoločného bodu



14. Najdi rovnice priamok a urč súradnice ich spoločného bodu



## Exponenciálne a logaritmické rovnice

1. $\log 2\ (x + 14) + \log2\ (x + 2) = 6$
2. $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$

3. $\left(\frac{4}{9}\right)^{x}\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1} = \frac{\log 4}{\log 8}$

4. $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - 2{,}25 = \left(\log_x \sqrt{5}\right)^2$

5. $\left[2\left(2^{\sqrt{x}+3}\right)^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}\right]^{\frac{2}{\sqrt{x}-1}} = 4$

6. $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

7. $4^{x-2} - 17.2^{x-4} + 1 = 0$

8. $3.\sqrt[x]{81} - 10.\sqrt[x]{9} + 3 = 0$

9. Riešte v R sústavu:

$8^{2x+1} = 32.2^{4y-1}$

$5.5^{x-y} = \sqrt{25^{2y+1}}$

10. $\log\left(3^{\sqrt{4x+1}} - 2^{4-\sqrt{4x+1}}\right) - 2 = \frac{1}{4}\log 16 - \sqrt{x+0{,}25}.\log 4$

11. $\log_x 4 - \log_2 y = 0$

$x^2 - 5y^2 + 4 = 0$

12. $\log_2(4.3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

V množine reálnych čísel riešte nasledujúce rovnice.

13. $2^{2x-1} = 8$

14. $\log(4x + 2) - \log(3 - x) = 1$

15. $4^x + 2^{x+1} = 80$

16. $1 + \log x^3 = 10/\log x$

17. Graficky riešte rovnicu: $\log x = 0{,}8$

Odhadnite interval, v ktorom sa nachádza koreň.

18. $4^x + 2^{x+1} = 80$

19. $7.3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$

20. $\log_2(4.3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

21. $\log_2(x + 14) + \log_2(x + 2) = 6$

22. $\log(4x + 2) - \log(3 - x) = 1$

23. $3.4^{\log x} - 25.2^{\log x} + 8 = 0$

24. $x^{2\log x - 1} = 100x^2$

25. $2.4^x - 5.2^x + 2.4^{x-1} = 0$

26. $4^x + 3^{x+2} = 4^{x+3} - 3^{x+2}$

27. $x^x - x^{-x} = 3(1+x^{-x})$

28. $\log(x+1) + \log(x-1) - \log x = \log(x + 2)$

29. $\log(4x+6) - \log(2x - 1) = 1$

30. $x^{\log x} - 1 = 10\left(1 - \frac{1}{x^{\log x}}\right)$

31. $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$

# 2. Funkcie

## 2.1 Funkcia a jej vlastnosti

1. Určte definičný obor, graf a obor hodnôt funkcie:

   $f: y = \sqrt{4x - x^2}$

2. Daná je funkcia $f: y = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$. Určte jej graf, definičný obor a obor hodnôt.

3. Určte graf funkcie $f: y = \sqrt{12 - 6x}$ a napíšte rovnicu dotyčnice v jeho bode $T\left[\frac{1}{2}; y_0\right]$.

4. Pre ktorú $a \in R$ je rovnica vyjadrením kružnice?

   $x^2 + y^2 - 2ax + 6y + 5a + 5 = 0$

5. Určte definičnú obor a načrtnite v súradnicovej sústave graf funkcie:

   $f: y = \frac{2}{3}\sqrt{10x - x^2 - 16}$

   Je táto funkcia ohraničená?

6. Zistite, či funkcia $f: y = \sqrt{25 - x^2}$ je párna. Určte jej obor hodnôt.

7. Daná je funkcia $f: y = \frac{\log(x^2 - 4)}{\log(3x + 6)}$. Určte jej definičný obor a zistite, či číslo 1 je funkčná hodnota.

8. Určte definičný obor funkcie $f: y = \frac{\sqrt{0{,}2^x - 0{,}04}}{x + 4}$.

9. Určte graf funkcie $g: y = \frac{|x|}{x}$ a popíšte vlastnosti funkcie.

10. Dané sú funkcie $f: y = 2^{4x+1} + 8$, $g: y = 17.2^{2x}$. Určte množinu tých $x \in R$, pre ktoré platí $f(x) = g(x)$.

11. Určte D(f) a zistite, pre ktoré $x\in$R je $f(x) \geq 0$ ak:

$$f: y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 4x}$$

12. Daná je funkcia $f: y = \dfrac{\sqrt{6x - x^2 - 5}}{(0{,}2)^{x-2} - 1}$. Určte jej definičný obor a zistite, pre ktoré reálne čísla nadobúda kladné hodnoty.

13. Určte definičný obor, graf a popíšte vlastnosti funkcie $f: y = \sqrt{49 - x^2}$ .

14. Určte definičný obor funkcie $f: y = \sqrt{1 - \log(x-1) + \sqrt{\dfrac{4-x}{x+2}}}$ .

15. Určte definičný obor, graf a popíšte vlastnosti funkcie:

$$f: y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} - x$$

**Postupnosti, aritmetická postupnosť, geometrická postupnosť**

1. Od ktorého člena počnúc platí pre postupnosť $\left\{\dfrac{1}{2+3n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, že $|a_n| < 10^{-3}$ ? Je postupnosť ohraničená?
2. Postupnosť je daná rekurentne $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}.a_n$, pričom hodnota prvého člena postupnosti udáva prirodzené číslo vyhovujúce nerovnici $\dfrac{3x-2}{4} - \dfrac{1-2x}{5} < 3 - \dfrac{x+1}{5}$. Určte prvých 5 členov postupnosti.
3. Je daná postupnosť $\{7n - n^2\}_{n=1}^{\infty}$. Určte množiny hodnôt $n$, pre ktoré je daná postupnosť rastúca resp. klesajúca. Je to monotónna postupnosť ?
4. Zistite, či postupnosť $\left\{\dfrac{2n+1}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená a rastúca.
5. Zistite, pre ktoré čísla $x$ možno určiť súčet radu a určte tento súčet ak:
   $(3x - 4) + (3x - 4)^2 + (3x - 4)^3 + (3x - 4)^4 + \ldots$
6. V ktorej aritmetickej postupnosti $s_5 = s_6 = 60$?
7. Upravte:

$$\frac{1+2+3+4+\ldots+n}{n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \frac{n}{8} + \frac{n}{16} + \ldots}$$

8. Určte dĺžku špirály, ktorá sa skladá z polkružníc tak, že prvá má polomer *r* a každá nasledujúca má polomer rovný $\frac{2}{3}$ predchádzajúceho polomeru.
9. Medzi čísla $\frac{a-b}{2}$ a $\frac{a+b}{2}$ vložte 3 čísla tak, aby s danými číslami tvorili 5 členov aritmetickej postupnosti. Vypíšte členy tejto postupnosti.
10. Určte limitu postupnosti $\left\{\frac{3n+8}{n+2}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Je postupnosť rastúca a ohraničená?

11. Povrch kvádra je 78 $cm^2$, súčet rozmerov 13 cm. Určte objem, ak rozmery tvoria 3 za sebou idúce členy geometrickej postupnosti.
12. Rozmery kvádra a, b, c tvoria 3 po sebe idúce členy aritmetickej postupnosti. Súčet dĺžok všetkých hrán je 96 cm. Povrch je 334 $cm^2$. Určte objem kvádra.
13. Riešte v R rovnicu:
    $5^2.5^4.5^6. \dots .5^{2x} = 0{,}04^{-28}$
14. Pre aké $x \in$ R platí rovnosť
    $1+a+a^2+a^3+\dots+a^{x-1} = (1+a)(1+a^2)\,(1+a^4)\,(1+a^8)$, kde *a* je reálny parameter.
15. Pôvodná cena stroja bola 40 000 Sk. Akú cenu bude mať stroj po 20 rokoch, ak sa každoročne odpisuje amortizácia 20%.
16. O koľko percent ročne treba počas 10 rokov zvyšovať výrobu, aby sa o 10 rokov pri konštantnom percentuálnom prírastku zvýšila dvojnásobne?
17. Akú postupnosť tvoria logaritmy členov geometrickej postupnosti $a.q^{n-1}\,{}_{n=1}^{\infty}$, kde a > 0, q > 0 ?
18. V divadle je v prvom rade 24 sedadiel a v poslednom rade je 50 sedadiel, pričom každý nasledujúci rad má o 2 sedadlá viac ako rad predchádzajúci. Koľko sedadiel je v divadle?
19. Určte súčet všetkých navzájom rôznych prirodzených čísel vyhovujúcich nerovnici
    $$\frac{18-4x}{3}+x+2 \geq \frac{2x-8}{6}$$
20. Strany trojuholníka a, b, c tvoria (v tomto poradí) 3 za sebou idúce členy geometrickej postupnosti. Aké sú veľké, ak obvod trojuholníka je 42 a b = 8 ?

21. V ktorej aritmetickej postupnosti platí :

$$a_1 + a_7 = 22$$

$$a_3.a_4 = 88\ ?$$

22. Zistite , pre aké reálne číslo x je nasledujúci rad konvergentný a potom určte jeho súčet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x - 1)^n$$

23.Riešte rovnicu s reálnou neznámou x

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log^n x = 2$$

## 2.2 Lineárna a kvadratická funkcia

1. Nájdite všetky kvadratické funkcie s definičným oborom R, pre ktoré platí: $f(2) = 1 \wedge f(-2) = 9 \wedge f(0) = 1$.
2. Určte rovnicu tej kvadratickej funkcie s definičným oborom R, kde $c \in R \wedge y = x^2+6x+c$, ktorej graf prechádza bodom Q o súradniciach [5; 5]. Aké sú priesečníky so súradnicovými osami?
3. Charakterizujte parametrické systémy, kde $a, b \in R$.
   a) $y = ax+1$
   b) $y = -x+b$
4. Určte graf funkcie a popíšte vlastnosti:
   $y = |x-2| + |x+2|$
5. Daná je kvadratická funkcia $y = ax^2+bx+c$, kde $a \neq 0 \wedge a, b, c \in R$. Odvoďte vzťah pre súradnice vrcholu paraboly, ktorá je grafom danej funkcie. Určte obor hodnôt danej funkcie.
6. Štvorce ABCD s rozmermi 20 *x* 20 má stred v počiatku súradnicovej sústavy a strany rovnobežné s osami *x*, *y*. Akú rovnicu má parabola prechádzajúca bodmi C, D s vrcholom v strede strany AB?
7. Určte graf funkcie $f : y = \dfrac{x^3 - 4x}{x+2}$.
8. Určte graf funkcie $f : y = \dfrac{x^2 - 4}{|x-2|}$.
9. Kvadratickú funkciu $y = 3x^2+2px+p$ premennej *x* nadobúda pre $x = 2$ hodnotu $y = -3$. Určte jej obor hodnôt.

10. Načrtnite graf funkcie f: $y = - x^2$.

11. Načrtnite graf funkcie g: $y = | x | . x$ .Má táto funkcia v bode x=0 lokálny extrém?

12. Vysvetlite, ako výsledok prvej úlohy využijete pri konštrukcii grafu funkcie h: $y = -( x - 2 )^2$.

13. Ako najrýchlejšie zistíte vrchol paraboly $y = x^2 - 3x + 5$

14. Načrtnite graf funkcie k: $y = \dfrac{x.( 4 + x^2)}{x}$

Má táto funkcia v bode 0 limitu ?

10.

## 2.3 Mnohočleny a mocninové funkcie, lineárna lomená funkcia

1. Daná je funkcia **f: y =** $\dfrac{x-2}{x-1}$

   načrtni jej graf a na jeho základe :

   urč jej D(f), H(f)

   vypočítaj spoločné body s $o_x$

   urč jej monotónnosť

   urč jej ohraničenosť

   urč jej extrémy

2. Daná je funkcia f: $y = - \dfrac{x-2}{x-1}$

   načrtni jej graf a na jeho základe :

   urč jej D(f), H(f)

   vypočítaj spoločné body s ox

   urč jej monotónnosť

   urč jej ohraničenosť

   urč jej extrémy

3. Daná je funkcia **f: y =** $\left|\dfrac{x-2}{x-1}\right|$

   načrtni jej graf a na jeho základe :

   urč jej D(f), H(f)

   vypočítaj spoločné body s $o_x$

   urč jej monotónnosť

   urč jej uhraničenosť

urč jej extrémy

4. Daná je funkcia f: y = - $\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :

urč jej D(f), H(f)

vypočítaj spoločné body s ox

urč jej monotónnosť

urč jej ohraničenosť

urč jej extrémy

5. Daná je funkcia **f: y = -** $\left|\frac{x+3}{x+1}\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :

urč jej D(f), H(f)

vypočítaj spoločné body s $o_x$

urč jej monotónnosť

urč jej ohraničenosť

urč jej extrémy

6. Daná je funkcia **f: y =** $\left|\frac{x+3}{x+1}\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :

a ) urč jej D(f), H(f)

b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$

c ) urč jej monotónnosť

d ) urč jej ohraničenosť

e ) urč jej extrémy

7. Daná je funkcia **f: y =** $\sqrt{x-1}$ - 2

načrtni jej graf a na jeho základe :

urč jej D(f), H(f)

vypočítaj spoločné body s $o_x$

urč jej monotónnosť

urč jej ohraničenosť

urč jej extrémy

8. Daná je funkcia **f: y =** - ( $\sqrt{x-1}$ - 2)

načrtni jej graf a na jeho základe :

urč jej D(f), H(f)

vypočítaj spoločné body s $o_x$

urč jej monotónnosť

urč jej ohraničenosť

urč jej extrémy

9. Daná je funkcia **f: y =** $\left|\sqrt{x-1}-2\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :

urč jej D(f), H(f)

vypočítaj spoločné body s $o_x$

urč jej monotónnosť

urč jej ohraničenosť

urč jej extrémy

10. Daná je funkcia **f: y =** - ( $\left|\sqrt{x-1}\right|$ - 2)

načrtni jej graf a na jeho základe :

a ) urč jej D(f), H(f)

b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$

c ) urč jej monotónnosť

d ) urč jej ohraničenosť

e) urč jej extrémy

11. Daná je funkcia **f: y =** $\sqrt[3]{x-1}$ - 2

načrtni jej graf a na jeho základe :

a ) urč jej D(f), H(f)

b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$

c ) urč jej monotónnosť

d ) urč jej ohraničenosť

e) urč jej extrémy

12. Daná je funkcia **f: y =** -( $\sqrt[3]{x-1}$ - 2 )

načrtni jej graf a na jeho základe :

a ) urč jej D(f), H(f)

b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$

c ) urč jej monotónnosť

d ) urč jej ohraničenosť

e) urč jej extrémy

13. Daná je funkcia **f: y =** $-(\sqrt[3]{x-1} - 2)$
    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
    c ) urč jej monotónnosť
    d ) urč jej ohraničenosť
    e) urč jej extrémy

14. Daná je funkcia **f: y =** $\left|\sqrt[3]{x-1}-2\right|$
    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
    c ) urč jej monotónnosť
    d ) urč jej ohraničenosť
    e) urč jej extrémy

15. Daná je funkcia **f: y =** $-\left|\sqrt[3]{x-1}-2\right|$
    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
    c ) urč jej monotónnosť
    d ) urč jej ohraničenosť
    e) urč jej extrémy

16. Daná je funkcia **f: y =** $(x - 2)^{-2} - 1$
    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
    c ) urč jej monotónnosť
    d ) urč jej ohraničenosť
    e) urč jej extrémy

---

17. Daná je funkcia **f: y =** $-((x - 2)^{-2} - 1)$

    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
    c ) urč jej monotónnosť
    d ) urč jej ohraničenosť
    e) urč jej extrémy

---

18. Daná je funkcia **f: y =** $\left|(x - 2)^{-2} - 1\right|$
    načrtni jej graf a na jeho základe :
    a ) urč jej D(f), H(f)
    b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$

c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

19. Daná je funkcia **f: y =** - $\left|(x-2)^{-2} - 1\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

Daná je funkcia **f: y =** $(x-2)^{-3} - 1$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

20. Daná je funkcia **f: y =** - $((x-2)^{-3} - 1)$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

21. Daná je funkcia **f: y =** $\left|(x-2)^{-3} - 1\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

22. Daná je funkcia **f: y =** - $\left|(x-2)^{-3} - 1\right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

23. Daná je funkcia **f: y =** $\dfrac{x+3}{x+1}$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

24. Daná je funkcia **f: y =** - $\dfrac{x+3}{x+1}$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)

b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

25. Načrtnite grafy funkcií f, g. Porovnajte ich a určte ich vlastnosti (definičný obor, obor funkčných hodnôt, monotónnosť, extrémy, párnosť).

f: y = 1/x g : y = -1/x

26. Načrtnite graf funkcie y = 1/(x - 1) +2, určte jej vlastnosti a určte f(2).

27. Načrtnite graf funkcie y = (x + 3)/(x - 1) opíšte jej vlastnosti a vypočítajte pre ktoré x platí

f(x) = 7.

28. Ozubené koleso s priemerom d mm vykoná n otáčok za minútu a zasahuje do iného ozubeného kolesa s priemerom 400 mm, ktoré sa otočí za minútu 10 krát. Nájdite funkciu, ktorá udáva závislosť n od d.

**Mocninové funkcie**

1. Zjednodušte: $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3^{-2}}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{3^{-2}}{2^{-3}}\right)^{-3}}{\left[(-2)^{-3}\right]^{-1}\cdot\left[(0{,}5)^{-3}\right]^{-2}}$

2. Vypočítajte: $\left(1+\sqrt{2}\right)^{-4}\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)^{-3}$

3. Porovnajte: $(-0{,}5)^{-2}$ a $(0{,}5)^{-2}$; $(-2{,}3)^{-3}$ a $(2{,}3)^{-3}$; $(4{,}8)^{-4}$ a $(4{,}9)^{-4}$; $(-4{,}8)^{-4}$ a $(-4{,}9)^{-4}$

4. Načrtnite grafy funkcií:

a) $y=(x+1)^{-2}$ b) $y=(x-2)^{-3}$ c) $y=\dfrac{1-x^2}{x^2}$

5. Riešte graficky v ***R*** nerovnice:

a) $|x|>\dfrac{1}{x}$ b) $\dfrac{1}{x^2}\geq\dfrac{1}{x^4}$ c) $|x-1|<\dfrac{1}{x^3}-1$

6. Upravte:

a) $\dfrac{\left(10^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(5^{\frac{1}{4}}\cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{2}}:\dfrac{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{4}}}$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a^3}}{\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a}\cdot a^{-\frac{2}{3}}}}$

c) $\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^2$

d) $\frac{\left(15^{\frac{1}{3}}\cdot 27^{-\frac{1}{2}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}\cdot 9^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}:\frac{\sqrt{\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{27}}}$

e) $\frac{\left(a^2-b^2\right)^{\frac{1}{2}}\cdot(a-b)^{\frac{2}{3}}}{\left[(a-b)^4\cdot(a+b)^5\right]^{\frac{1}{6}}}:\left[\frac{a^2-b^2}{(a-b)^{-1}\cdot(a+b)^2}\right]^{\frac{1}{3}}$

f) $\left(\frac{a\cdot\sqrt{a+3}}{\sqrt{a-3}}-\frac{3\sqrt{a-3}}{\sqrt{a+3}}-\frac{18}{\sqrt{a^2-9}}\right):\sqrt[4]{\left(a^2-9\right)\cdot(a-3)}$

g) $\left(\sqrt[3]{\frac{x\cdot\sqrt{x}}{x^{-2}}}\div\sqrt{\frac{x^{-3}\cdot\sqrt{x}}{x^2}}\right)^{-1}\cdot\frac{x^{-3}\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}$

h) $\left(\frac{2-a\sqrt{a}}{2a-\sqrt{a}}+\sqrt{a}\right)\cdot\left(\frac{2+a\sqrt{a}}{2a+\sqrt{a}}-\sqrt{a}\right):\frac{4+a^2}{4a-1}$

7. Určte všetky kvadratické funkcie, ktorých graf prechádza bodmi [0, 1], [1, 0], [3, 10].

8. Zostrojte graf funkcie *f*: $y=2\sqrt{(5-3x)^2}+3$

9. Určte všetky funkcie, ktoré sú určené rovnicou $y=2x+b, b\in Z$ a pre ktoré platí: $x\in<4,15>\Rightarrow f(x)\in<-4,15>$.

10. Daná je funkcia *f*: $y=x^2-x$

a) Načrtnite graf funkcie *f*.

b) Vypočítajte súradnice ohniska a určte rovnicu riadiacej priamky paraboly, ktorá je grafom funkcie *f*.

c) Načrtnite graf funkcie *g*: $y=\left|x^2-x\right|$

d) Určte všetky $c\in R$, pre ktoré má rovnica $\left|x^2-x\right|=c$ práve 0, 2, 3, 4 riešenia.

11. V jednej súradnicovej sústave načrtnite grafy funkcií:

$f_1: y=-\frac{1}{x}$

$f_2: y=-\frac{1}{x}-1$

$f_3: y=-\frac{1}{x+2}$

$f_4: y=-\frac{1}{x+2}-1$

12. Zostrojte graf funkcie *f*, určte definičný obor D(*f*), obor hodnôt H(*f*) a vlastnosti funkcie *f*:

a) $f: y = \left|\frac{x-1}{x-2}\right|$

b) $f: y = \frac{x+1}{|x-1|}$

13. Pumpou čerpajúcou 3,5 l vody za sekundu sa vyčerpá voda zo stavebnej jamy za 2 hodiny. Za koľko minút sa vyčerpá pumpou čerpajúcou 10 l vody za sekundu?

14. Určte čísla *a*, *b* funkcie $f: y = \frac{ax-3}{bx+1}$ pre $x \in R$ tak, aby platilo $f(-1) = \frac{5}{2}$ a $f(1) = -\frac{1}{4}$, a zistite, pre ktoré *x* je funkčná hodnota záporná.

15. Vyjadrite:
a) Obsah *P* štvorca ako funkciu jeho uhlopriečky.
b) Obvod *O* rovnostranného trojuholníka o stane *a* ako funkciu jeho obsahu *P*.
c) Obsah *P* rovnostranného trojuholníka ako funkciu jeho výšky *v*.

## 2.4 Logaritmické a exponenciálne funkcie

1. Daná je funkcia **f: y** = $2^{x-1} - 2$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

2. Daná je funkcia **f: y** = $-(2^{x-1} - 2)$

   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

3. Daná je funkcia **f: y** = $|2^{x-1} - 2|$

   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

4. Daná je funkcia **f: y** = $-|2^{x-1} - 2|$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

5. Daná je funkcia **f: y =** $(1/2)^{x-1} - 2$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
6. Daná je funkcia **f: y =** $-((1/2)^{x-1} - 2)$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
7. Daná je funkcia **f: y =** $\left|((1/2)^{x-1} - 2)\right|$

   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
8. Daná je funkcia **f: y =** $-\left|((1/2)^{x-1} - 2)\right|$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
9. Daná je funkcia **f: y =** $\log_2 (x - 1) - 2$
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
10. Daná je funkcia **f: y =** $-( \log_2 (x - 1) - 2)$

   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
11. Daná je funkcia **f: y =** $\left| \log_2 (x - 1) - 2 \right|$

   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
12. Daná je funkcia **f: y =** $-\left| \log_2 (x - 1) - 2 \right|$

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

13. Daná je funkcia **f: y =** $\log_{0,5}(x-1) - 2$
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

14. Daná je funkcia **f: y =** $-(\log_{0,5}(x-1) - 2)$
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

15. Daná je funkcia **f: y =** $\left|\log_{0,5}(x-1) - 2\right|$
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

16. Daná je funkcia **f: y =** $-\left|\log_{0,5}(x-1) - 2\right|$
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

17. Načrtnite graf funkcie f: $y = 2^x$. Popíšte jej vlastnosti, D(f), H(f), monotónnosť, ohraničenosť.

18. Ako pomocou funkcie z úlohy 1. načrtnete graf funkcie f: $y = 2^{x+1} - 3$.
Určte jej D(f), H(f).

19. .Zostrojte graf funkcie f: $y = \left| 2^x - 2 \right|$. Má táto funkcia v bode $x_0 = 1$ limitu ? Má v tomto bode deriváciu?

20. Načrtnite graf funkcie f: $y = 2^x/2^x$. Ako sa správa v okolí bodu $x_0 = 0$ ?

21. Načrtnite graf funkcie f: $y = \log_5 x$. Vyznačte na grafe priesečníky s osami a bod $x_0$, taký že,

$\log_5 x_0 = 1$.

22. Načrtnite graf absolútnej hodnoty f. Popíšte jej vlastnosti, obory, monotónnosť, extrémy.

23. Načrtnite graf funkcie f:$y = \log^2 x/\log x$. Čo sa deje v okolí bodu $x_0 = 1$ ?

## 2.5 Goniometrické funkcie

1. Určte definičné obory nasledujúcich funkcií:

$$f_1 : y = \sqrt{\sin x}$$

$$f_2 : y = \sqrt{\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$f_3 : y = \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

$$g_1 : y = \sqrt{\cos x}$$

$$g_2 : y = \sqrt{\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$g_3 : y = \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

2. Zostrojte graf funkcie:

$$f : y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$g : y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$h : y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$i : y = 1 + |\cos x|$$

3. Riešte rovnice v intervale $(0, 2\pi)$:

a) $\operatorname{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -1$

b) $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

4. Nájdite definičný obor funkcie *g* a zistite, či je párna, resp. nepárna. Svoje tvrdenie zdôvodnite:

$$g : y = \frac{\sin x}{\sqrt{2} + 2\cos x}$$

5. Dokážte, že v každom pravouhlom trojuholníku s odvesnami *a*, *b* platí:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2ab}{b^2 - a^2}$$

6. Dokážte, že v každom pravouhlom trojuholníku platí:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\ \alpha + \cos\beta}{\sin\ \beta + \cos\alpha}$$

7. Daná je funkcia $f : y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

a) Určte definičný obor *D*(*f*), obor hodnôt *H*(*f*) a periódu danej funkcie a nájdite tie hodnoty $x \in D(f)$, v ktorých funkcia nadobúda extrémy.

b) Načrtnite graf funkcie *f*.

Vyriešte rovnicu $|f(x)| = 1$

8. Daná je funkcia **f: y =** 2 sin(x – π/4) + 1
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
9. Daná je funkcia **f: y =** -(2 sin(x – π/4) + 1)
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy
10. Daná je funkcia **f: y =** | 2 sin(x – π/4) + 1 |
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej monotónnosť
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

---

11. Daná je funkcia **f: y = -** | 2 sin(x – π/4) + 1 |
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   d ) urč jej ohraničenosť
   e) urč jej extrémy

---

12. Daná je funkcia **f: y =** - | 2 cos(x – π/4) - 1 |
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   c ) urč jej ohraničenosť
   d ) urč jej extrémy
13. Daná je funkcia **f: y =** | 2 cos(x – π/4) - 1 |
   načrtni jej graf a na jeho základe :
   a ) urč jej D(f), H(f)
   b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
   c ) urč jej ohraničenosť
   d ) urč jej extrémy
14. Daná je funkcia **f: y =** -(2 cos(x – π/4) – 1)
   načrtni jej graf a na jeho základe :

a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

15. Daná je funkcia **f: y** = 2 cos(x – π/4) - 1
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

16. Daná je funkcia **f: y** = tg(x – π/4)
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

17. Daná je funkcia **f: y** = - tg(x – π/4)
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

18. Daná je funkcia **f: y** = │ tg(x – π/4)│
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

19. Daná je funkcia **f: y** = - │ tg(x – π/4)│
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

---

20. Daná je funkcia **f: y** = cotg(x – π/4)
načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

21. Daná je funkcia **f: y** = - cotg(x – π/4)

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť

d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

22. Daná je funkcia **f: y =** | cotg(x – π/4) |

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

23. Daná je funkcia **f: y = -** | cotg(x – π/4) |

načrtni jej graf a na jeho základe :
a ) urč jej D(f), H(f)
b ) vypočítaj spoločné body s $o_x$
c ) urč jej monotónnosť
d ) urč jej ohraničenosť
e) urč jej extrémy

## 2.5 Limita, derivácia

3 Určte definičný obor a graf funkcie $f: y = \dfrac{x^2 - x - 6}{|x+2|}$ .

4 Určte $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{6+x} - 3}{x - 3}$.

5 Existuje limita funkcie $f: y = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 - x - 2}$ v bode $x$ = – 1?

6 Určte limitu funkcie $f: y = \dfrac{3x^2 + 2x + 1}{10x^2 - 3}$ v jej nevlastnom bode.

7 Vypočítajte limity

7.4 $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^3 + 1}{x^5 + 1}$

7.5 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x - 3}$

8 Určte body nespojitosti funkcie f a zostrojte jej graf:

9 $f: y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$

10 Určte limity funkcie v nevlastných bodoch a v bodoch nespojitosti:

11 $f: y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}$

12 Určte $\lim\limits_{n \to \infty} \left( \dfrac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n+2} - \dfrac{2}{n} \right)$.

13 Určte $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$.

14 Vypočítajte $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}-\dfrac{\sin x}{3x}\right)$.

15 Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu $f$: $y = 2x - x^2$ v priesečníkoch s osou $x$.

16 Teleso s hmotnosťou m = 10 kg sa pohybuje podľa zákona dráhy $s = 1 + t + t^2$. Akú kinetickú energiu bude mať na konci 5. sekundy?

17 Napíšte rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie $f: y=\sqrt{12-x}$ v $T[8; y_T]$.

18 Určte intervaly rastu a klesania funkcie $f: y=\dfrac{4x}{x^2+1}$.

19 Napíšte rovnicu dotyčnice krivky $9x^2+y^2 - 9x - 4y = 0$ v jej bode $T[1; y_T]$.

20 Určte deriváciu funkcie $f$: $y = \ln (x^2 - 1)$ a intervaly, na ktorých sú $f$ aj $f'$ definované.

21 Určte definičný obor funkcie $g: y=\sqrt{\sin x}$ a jej deriváciu na <0; π>. Akú smernicu má dotyčnica ku grafu $g$ v bode $\dfrac{5}{6}\pi$?

22 Určte lokálne extrémy funkcie $f$: $y = x^3 - 12x$.

23 Určte priebeh funkcie $f$: $y = 2x^2 - x^4$ a jej vlastnosti.

24 Aký je smerový uhol a uhol dotyčníc ku grafu funkcie $f$: $y = \sin x$ v bodoch $x = 0$ a $x = \pi$.

25 Napíšte podmienky pre parameter a, b, c, d lineárnej lomenej funkcie $f: y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ a derivovaním tejto funkcie ukážte, že nemá lokálne extrémy.

26 Určte intervaly monotónnosti a lokálne extrémy funkcie f: $y = x^4 - 4x^3+4x^2$

27 Vyšetrite priebeh funkcie $f: y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ a nakreslite jej graf.

28 Nájdite lokálne extrémy funkcie f: $y = x+\cos 2x$ v intervale $(0; \pi)$

29 Nájdite valec, ktorý má pre daná povrch maximálny objem. Porovnajte výšku a polomer tohto valca.

30 Veľkosť dráhy, ktorú koná teleso, sa mení v závislosti od času podľa rovnice $s = 2t^3 - t^2+1$. V ktorom čase má teleso nulovú rýchlosť a kedy má nulové zrýchlenie?

31 Na priamku p: $y = 3x+6$ určte bod, pre ktorý je súčet druhých mocnín vzdialeností od bodov A[2; 5], B[3; 5] minimálnu.

32 Zo štvorcovej lepenky zo stranou $a$ cm máme v rohoch vystrihnúť rovnako veľké štvorce a zo zvyšnej časti sa zahnutím získa škatuľka tvaru kvádra. Aké veľké budú strany vystrihnutých štvorcov, aby bol objem najväčší?

33 Má funkcia $f: y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ lokálny extrém?

34 Vyšetrite priebeh funkcie $f: y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$ a určte graf.

35. Nájdite rovnicu dotyčnice ku grafu funkcie f: $y = 2x^2 + x$ v jej bode T[1;?].

36. Zistite intervaly monotónnosti a extrémy funkcie

f: $y = x^3 + 2x^2$

37. Určte okamžitú rýchlosť a zrýchlenie telesa, ktoré má dráhu popísanú rovnicou $s = v_o t - \frac{1}{2} g t^2$, kde g je gravitačné zrýchlenie a t je čas, v čase t = 10 s.

38. Daná je funkcia f: $y = x/(x^2 - 1)$.

Určte:

a/ obor definície

b/ intervaly monotónnosti

c/ body nespojitosti

d/ extrémy lokálne aj globálne

e/ priesečníky s osami súradnicovej sústavy

f) vypočítejte limity v nevlastných bodoch

f/ načrtnite na základe získaných údajov jej graf

**Nekonečný geometrický rad**

1. Určte podmienku konvergencie a zistite pre ktoré $x \in$ R platí rovnosť:

   $(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1) + ... + (x - 1)^n = 1$

2. Riešte v R rovnicu

   $$\frac{5}{3} = x + 3x^2 + x^3 + 3x^4 + x^5 + 3x^6 + \dots$$

3. Riešte v R rovnicu

   $$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x - 3}{3x - 4}$$

4. Zistite , či rovnici vyhovuje prirodzené číslo:

a) $\log x + \log \sqrt{x} + \log \sqrt[4]{x} + \log \sqrt[8]{x} + \ldots = 2$

b) $2^x + 4^x + 8^x + 16^x + \ldots = 1$

5. Zapíšte periodické čísla v tvare zlomku

$2{,}41\overline{2}$, $0{,}2\overline{3}$

6. Zistite, pre ktoré čísla $x$ možno určiť súčet radu a určte:

$\sin^2 x + \cos^2 x + \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^6 x + \cos^2 x + \ldots$

7. Menší koreň rovnice $2x^2 - 5x+2 = 0$ sa rovná prvému číslu nekonečného konvergentného geometrického radu, väčší koreň sa rovná jeho súčtu. Určte kvocient radu.

8. Daný je štvorec so stranou $a$. Spojnice stredov jeho strán utvoria opäť štvorec atď. až do nekonečna. Vypočítajte k akej hranici sa blíži súčet obvodov a k akej hranici súčet obsahov týchto štvorcov.

9. Riešte v R rovnicu

$$\frac{1}{2x} + (4-3x) + (4-3x)^2 + (4-3x)^3 + \ldots = 0$$

## 2.7 Integrálny počet

1. Vypočítajte objem gule s polomerom $r$ s využitím určitého integrálu.

2. Vypočítajte $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx$.

3. Určte krivku, ktorá prechádza bodom A[2; 3] a jej dotyčnica v ľubovoľnom bode má smernicu $x + 1$.

4. Vypočítajte obsah obrazca ohraničeného krivkami $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

5. Určte definičný obor funkcie $f: y = \left(2\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ a primitívnu funkciu k tejto funkcii na definičnom obore.

6. Zavedením substitúcie určte $\int \frac{6x^2 x}{x^3+1} dx$.

7. Metódou *per partes* určte $\int 3x^2 \ln x \, dx$.

8. Zavedením substitúcie určte $\int \frac{2x+1}{x-2} dx$.

9. Určte krivku, ktorá má v každom bode svojho definičného oboru smernicu dotyčnice $12 - 3x^2$ a prechádza bodom A[3; 2].

10. Metódou *per partes* určte $\int \sin^2 x \, dx$.

11. Vypočítajte :

$\int (x + 1/x)\,dx$

12. Vypočítajte :

$\int e^x \sin x\,dx$

13. Určte obsah rovinného obrazca ohraničeného osou x, grafom funkcie f : y = sin x a priamkami

x= 0 , x = 2.

14. Aký je geometrický význam výrazu :

$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx$ , ilustrujte obrázkom.

# 3. Planimetria

## 3.1 Základné rovinné útvary

### Trojuholník

1. V □ *ABC* je *c* = 10 cm, $|\angle BAC| = 30°$, $v_c$ = 3 cm.
   a) Popíšte postup konštrukcie.
   b) Vypočítajte ostatné strany a uhly.

2. V □ *ABC* je dané: *c* = 8 cm, *a* = 7 cm, $v_a$= 6 cm.
   a) Popíšte postup konštrukcie.
   b) Vypočítajte $t_c$ .

3. V □ *ABC* je dané: *c* = 6 cm, $|\angle ACB| = 60°$, $v_c$ = 5 cm.
   a) Popíšte postup konštrukcie.
   b) Vypočítajte polomer opísanej kružnice.

4. Vypočítajte šírku rieky, keď vo vzdialenosti *d* = 10 m od jej brehu namerali základňu *AC* = 50 m rovnobežne s brehom, a ak bod *B* na druhom brehu rieky vidieť z bodu *A* pod uhlom 30° a z bodu *C* pod uhlom 45°.

5. V □ *ABC* platí: □ : □ : □ = 3 : 4 : 5; a = $\sqrt{2}$ .
   a) Vypočítajte uhly.
   b) Vypočítajte strany.
   c) Vypočítajte obsah daného trojuholníka.

6. V pravouhlom trojuholníku *ABC* s pravým uhlom pri bode *C* určte všetky prvky, ak:
   a) *a* = 4, $c_b$ = 6.
   b) $c_a$ = 4, $c_b$ = 9.
   c) *c* = 5, □ = 1 (□ je polomer kružnice vpísanej trojuholníku).

7. Daná je kocka *ABCDA'B'C'D'* s dĺžkou hrany *a* = 4. Bod *S* je stred steny *ADD'A'*; bod *M* je stred hrany *BB'*.

a) Vypočítajte dĺžky strán $\triangle$ *SMC*.
b) Zistite, či $\triangle$ *SMC* je tupouhlý.
c) Vypočítajte obsah $\triangle$ *SMC*.

**Lineárne útvary, trojuholník**

1. Rovnoramenný trojuholník ABC, ktorého základňa je AB, má pri vrchole C vonkajší uhol 130°.Vypočítaj jeho vnútorné uhly.
2. Medzi vnútornými uhlami $\alpha,\beta,\gamma$ trojuholníka ABC platia vzťahy $\alpha=2\gamma,\beta=3\gamma$.Urč ich.
3. Vnútorné uhly $\alpha,\beta,\gamma$ trojuholníka ABC majú veľkosti v pomere 2:3:5. Aké sú jeho vonkajšie uhly?
4. Vonkajšie uhly trojuholníka ABC majú veľkosti v pomere 5:7:8. V akom pomere sú veľkosti jeho vnútorných uhlov?
5. Dokážte, že osi uhlov $\alpha$ a $\beta$ trojuholníka ABC zvierajú uhol $\omega=90°+\gamma/2$.
6. Vrcholom C trojuholníka ABC prechádza priamka *p* rovnobežná s osou *o* = BK uhla $\beta$.Dokážte, že BD = BC, kde D je priesečník priamky *p* s priamkou AB.
7. Dané sú úsečky s dlžkami 36cm, 15cm, 14cm.Zistite, či tieto úsečky môžu byť stranami trojuholníka.
8. Trojuholník ABC má obvod *O*= 26cm a dlžky strán *a*= 6,5cm, *b* = *11,2*cm.Zoraďte jeho vnútorné uhly podľa veľkosti.
9. Daný je rovnoramenný trojuholník ABC, ktorého základňa je AB.Na polpriamke AC za bodom C zostrojte bod D tak, aby platil vzťah DC=AC.Dokážte, že priamky AB a BD sú na seba kolmé.
10. V rovnoramennom trojuholníku ABC je pomer dlžok základne AB a výšky na základňu 10 : 12. Rameno má dlžku 26 cm.Ak *T* je ťažiskom trojuholníka ABC, koľko je obsah trojuholníka *ABT?*
11. Obvod pravouhlého trojuholníka je 18.Súčet obsahov štvorcov zostrojených nad jeho 3 stranami je 128.Aký je obsah tohto trojuholníka?
12. Dlžky strán istého pravouhlého trojuholníka sa dajú zapísať v tvare $s, s+p, s+2p$, *kde* $s,p\in R^+$.Aká je dlžka jeho prepony , ak dlhšia odvesna meria 12 cm?
13. Obce A, B, C sú umiestnené ako vrcholy pravouhlého trojuholníka so stranami 12 km, 15 km, 9 km.Nová železničná trať má byť postavená tak, aby mala zastávku rovnako ďaleko od obcí A, B, C a aby taáto vzdialenosť bola čo najmenšia možná.Ako ďaleko budú od trate obce?
14. Aký polomer má najmenší kruh, ktorým možno úplne zakryť rovnostranný trojuholník so stranou 12 cm?
15. Aký polomer má najmenší kruh, ktorým možno úplne zakryť pravouhlý trojuholník s odvesnami 5 cm a 12 cm?
16. Pomer dlžok ramena a základne rovnoramenného trojuholníka je 5 : 8. Výška na základňu má dlžku 6 cm.Aký je obsah tohto trojuholníka?
17. Bod A má od stredu kružnice k (S, r = 4cm) vzdialenosť d=10cm. Vypočítajte:
    dĺžku dotyčníc vedených z bodu A ku kružnici k,
    vzdialenosť stredu S od spojnice bodov dotyku.

18. Vypočítajte veľkosť uhlov pravouhlého trojuholníka, ak pre jeho strany platí: $4a^2 - 8ac + 3c^2 = 0$.

19. Tetiva kružnice je od stredu vzdialená 48 cm a je o 22 cm menšia než polomer kružnice. Vypočítajte polomer kružnice.

20. Nosník má jedno rameno kolmé na stenu, na ktorej je upevnený. Ramená nosníka zvierajú uhol $\alpha = 48^o$. Nosník je zaťažený bremenom G=800 N. Určte veľkosť $F_1$ ťahovej sily a veľkosť $F_2$ tlakovej sily.

21. Určte vzdialenosť dvoch miest M, N, medzi ktorými je prekážka, takže miesto N z miesta M nie je viditeľné. Boli namerané uhly $|\sphericalangle MAN| = 130^o$, $|\sphericalangle NBM| = 109^o$ a vzdialenosti
| AM | = 54, | BM | = 60, pričom body A, B, M ležia na jednej priamke.

22. Vypočítajte polomer kružnice opísanej trojuholníku ABC, ak a = 26,5 , $\alpha : \beta : \gamma = 2 : 3 : 4$.

23. V trojuholníku ABC vypočítajte výšku $v_c$ , ťažnicu $t_c$ a uhol $\gamma$ , ak a = 40 cm, b = 57 cm, c = 59 cm.

24. Na vodorovnej rovine stojí 65 m vysoká veža a komín. Z vrcholu veže vidíme pätu komína v hĺbkovom uhle $\alpha = 10° 19'$ a od päty veže vidíme vrchol komína vo výškovom uhle $\beta = 17° 43'$. Aký vysoký je komín ?

25. Určte veľkosti vnútorných uhlov trojuholníka ABC , ak platí : a : b = 2 : 3, $\alpha : \beta = 1 : 2$.

26. Radarové zariadenie umiestnené na 45° severnej zemepisnej šírky zaregistrovalo v určitom okamžiku presne v severnom smere kozmickú loď, ktorej výškový uhol bol $\alpha = 17°$ a jej vzdialenosť od pozorovacieho miesta bola d = 600 km. Aká bola v tomto okamihu výška kozmickej lode nad povrchom Zeme a nad ktorou rovnobežkou sa práve nachádzala ? Zem považujte za guľu s polomerom r = 6370 km.

27. Pravidelný štvorsten *ABCD* má veľkosť hrany a. Body *M, N* sú stredy úsečiek *AB, CD*. Dokážte, že:

    a) priamka *CD* je kolmá na rovinu *ANB,*

    b) priamka *AB* je kolmá na priamku *C*D,

    c) priamka *MN* je kolmá na priamky *AB, CD,*

    d) vypočítajte veľkosť úsečky *MN*.

28. Dokáž, že súčet uhlov trojuholníka je priamy uhol.

29. Vypočítajte najväčší uhol v trojuholníku, ktorý má strany 79, 58, 37.

30. Vypočítajte obvod a obsah rovnobežníka, keď sú dané jeho uhlopriečky e = 7, f = 5 a uhol nimi zovretý $\varepsilon$ = 75 34'.

31. Dve priame cesty sa križujú pod uhlom $\alpha$ = 53 30'. Na jednej z nich stoja dva stĺpy, jeden na križovatke, druhý vo vzdialenosti 500 m od nej. Ako ďaleko od križovatky musíme ísť po druhej ceste, aby sme vzdialenosť oboch stĺpov videli pod uhlom $\beta$ = 15 .

32. Trojuholník ABC, ktorého strany sú a = 6, b = 3, c = 4 je zavesený v bode A. Určte uhol strany b s vertikálou.

**Viacuholníky**

1. Charakterizuj nasledujúce štvoruholníky:a)štvorec, b) obdlžnik, c) kosoštvorec, d) rovnobežník, e) lichobežník
2. Zostroj rovnobežník ABCD s obvodom 14 cm a polomerom opísanej kružnice 5 cm.
3. Šnúra na bielizeň, dlhá 3 m, je zavesená medzi bodmi *A* a *B*, ktorých vzdialenosť je 2 m a ktoré sú 2 m vysoko od zeme. Vo vzdialenostiach po jednom metri sú na šnúre pevne prichytené dve závažia. O koľko cm klesne jedno závažie, ak odstránime druhé závažie?
4. Postačí pravouhlý trojuholník, s odvesnami s dĺžkou 7 cm a 8 cm, na prikrytie mince s priemerom 4 cm ?
5. Dve kolesá sú spojené prevodovou reťazou. Polomery kolies sú 10 cm a 5 cm, vzdialenosť stredov je 60 cm. Vypočítajte dĺžku reťaze. Hrúbku reťaze zanedbajte.
6. Dĺžky strán konvexného štvoruholníka sú $|AB| = 20$ cm, $|BC| = 15$ cm, $|CD| = 15$ cm, $|DA| = 20$ cm a uhlopriečka *BD* má dĺžku 24 cm. Vypočítajte dĺžku druhej uhlopriečky.
7. Dĺžky strán konvexného štvoruholníka sú |AB| = 3 cm, |BC| = 5 cm, |CD| = 4 cm a |DA| = 6 cm, uhlopriečka AC je osou uhla pri vrchole A. Vypočítajte jeho plošný obsah**.**
8. Pre ktoré x, y sú trojuholníky so stranami 3, x, 5 a y, 6, 15 podobné?
9. Peter si kreslí len štvoruholníky, ktoré majú dve protiľahlé strany rovnobežné a súčasne druhé dve protiľahlé strany rovnako dlhé. Adam si kreslí len štvoruholníky, ktorým sa dá opísať kružnica a ktoré majú súčasne rovnaké uhlopriečky. Zistite, či platí, že :

   každý Adamov štvoruholník je aj Petrov,

   každý Petrov štvoruholník je aj Adamov.
10. Ukážte, že obsah pravidelného 8- uholníka so stranou $a$ je $2a^2(1+\sqrt{2})$.
11. Odvoďte vzorce pre obsah a obvod pravidelného n- uholníka $(n \in N)$ vpísaného kružnici s polomerom r > 0.

    Na základe týchto vzorcov odvoďte vzorce pre obsah a obvod rovnostranného trojuholníka, štvorca a pravidelného 6- uholníka.
12. Kružnici je opísaný a vpísaný pravidelný 6- uholník. Rozdiel ich obsahov je $8\sqrt{3}$ cm$^2$. Určte polomer kružnice.
13. Zostroj osi vnútorných uhlov kosodlžnika. Dokáž že určujú obdlžnik
14. Zostroj nasledujúce štvoruholníky

    a) štvorec ABCD, AC = 5 cm

    b) obdlžnik ABCD, AC = 6 cm, AB = 4 cm

    c) kosodlžnik ABCD, AB = 5 cm, BD = 6 cm, AC = 3 cm

    d) kosoštvorec ABCD, AB = 4 cm, AC = 6 cm

    e) lichobežník ABCD, AB = 6 cm, BC = 4 cm, CD = AD = 3 cm
15. Koľko uhlopriečok má n-uholník?

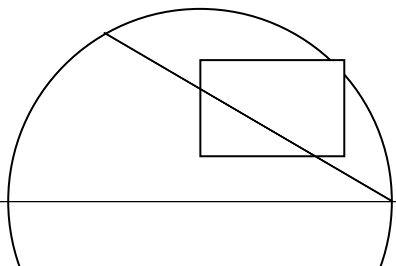
16. Koľko vypuklých uhlov môže mať 10-uholník

**Kružnica a kruh**

1. Vypočítaj polomer kruhovej dráhy, ktorú musí bežec prebehnúť 3krát, aby prebehol 2 km.
2. Vypočítaj polomer kružnice, ktorej dlžka je o 7cm väčšia než obvod pravidelného šesťuholníka.
3. Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obsah a obvod sú vyjadrené tým istým číslom.
4. Vypočítajte polomer kruhu, ktorého obsah sa rovná súčtu obsahov troch kruhov $k_1$, $k_2$

   $k_3$ s polomermi $r_1$, $r_2$, $r_3$.
5. Daný je štvorec ABCD so stranou *a*.Okolo jeho vrcholov A a C sú opísané štvrťkružnice s polomerom $r = a$ dovnútra štvorca.Urč obsah útvaru U medzi obidvoma štvrťkružnicami.
6. Obvod kruhového výseku, ktorého polomer je 12 cm, je $39\frac{5}{7}$ cm. Vypočítaj jeho obsah.
7. Daný je štvorec ABCD so stranou *a*.Vypočítaj obsah medzikružia, ktoré bude ohraničené vpísanou a opísanou kružnicou štvorcu ABCD.
8. Ak má strana rovnostranného trojuholníka ABC dlžku *a*, má jeho výška veľkosť $v=\frac{a}{2}\sqrt{3}$ .Vypočítaj obsah medzikružia, ktoré bude ohraničené vpísanou a opísanou kružnicou trojuholníka ABC.
9. Odvesna AC pravouhlého rovnoramenného trojuholníka ABC má dlžku 4 cm.Vypočítaj obsah útvaru, ktorý bude ohraničený vpísanou a opísanou kružnicou.
10. Dlžka zemského rovníka je približne 40 000 km. Aká je dlžka rovnobežky na 30. stupni severnej zemepisnej šírky ?
11. Do kruhového výseku ABC s polomerom 15 cm je vpísaná kružnica k s polomerom 5 cm.Akú veľkosť má uhol ABC?
12. Aký polomer má kruh vpísaný do štvrťkruhu s polomerom 100 cm?
13. Na okrúhlej panvici s priemerom 30 cm sa pečie 6 rovnako veľkých okrúhlych pampúchov.Všetky sa dotýkajú okraja panvice a každý sa dotýka dvoch susedných pampúchov.Aký priemer má každý pampúch?
14. Dva kotúče s polomermi 4 cm a 14 cm sú spojené prevodovým pásom.Vzdialenosť stredov kotúčov je 20 cm.Aká je dlžka tohto pásu?
15. Na obrázku je obdlžnik ABCD s rozmermi 15 cm a 20 cm.Kružnica k so stredom v bode A, prechádza bodom C.Akú dlžku má EF tetiva tejto kružnice?

F *k*



E

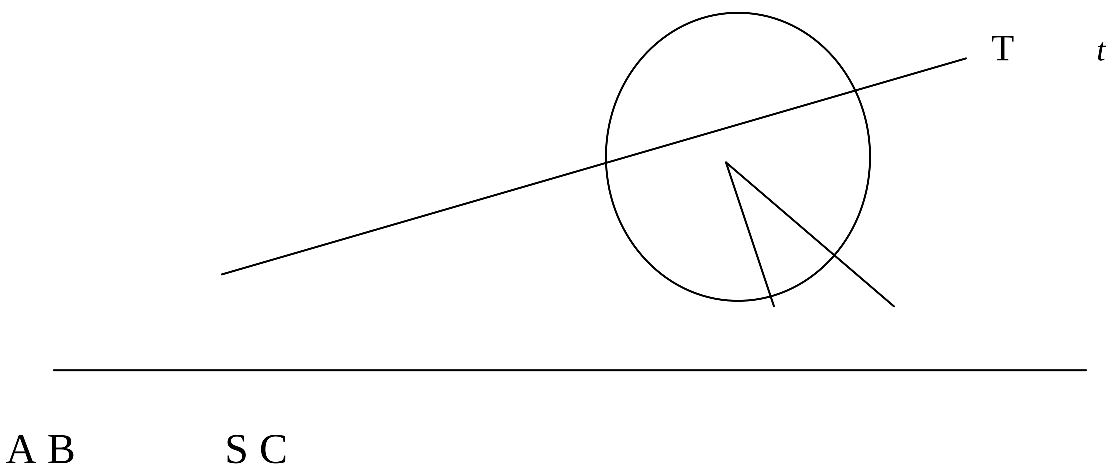
16. Jožko vložil dva guľaté nepokrájané zemiaky s priemermi 4 cm a 6 cm do hrnca v tvare valca.Hrniec bol vysoký 12 cm a priemer podstavy mal 9 cm.Potom prilieval do hrnca vodu.Do akej najmenšej výšky musí siahať voda v hrnci, aby v nej boli oba zemiaky ponorené?
17. Je daná kružnica k so stredom S a polomerom 5 cm a bod A, ktorý je od stredu S vzdialený 13 cm.Z bodu A sú ku kružnici k zostrojené dve dotyčnice p, q s bodmi dotyku P,Q.Okrem toho je ku kružnici k zostrijená ďalšia dotyčnica t, ktorá pretína dotyčnice p, q v bodoch B,C.Aký obvod má trojuholník ABC?
18. Lojzo stojí na brehu kruhového jazierka s polomerom 200 m.V strede jazierka pláva bójka.Lojzo by chcel bójku oboplávať a vrátiť sa na to miesto na brehu, z ktorého vyštartoval.Rodičia mu však prikázali, že sa ani na okamih nesmie vzdialiť od brehu jazera na viac ako 100 m.Najmenej koľko metrov musí Lojzo preplávať, aby splnil svoj cieľ a neporušil pritom príkaz svojich rodičov?

**Uhly v kružniciach**

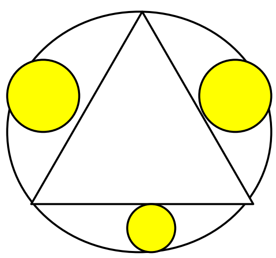
1. Štvoruholník vpísaný do kružnice má vnútorné uhly $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.Urč $\gamma,\delta$ ak $\alpha=68°$, $\beta=104°$.
2. Urč bod na ciferníku hodín, ktorým prechádza kolmica vedená bodom 7 na priamku spájajúcu body 2 a 9.
3. Urč veľkosti uhlov, ktoré na ciferníku zvierajú spojnice bodov 3 a 8 so spojnicou

   *a)* 8 a 11, *b)*10 a 5, *c)* 12 a 7, *d)* 11 a 2
4. Na kružnici, ktorá znázorňuje ciferník hodín, vyznač body 1,2,...12.*a)*Urč počet všetkých trojuholníkov, ktoré majú vrcholy vo vyznačených bodoch.*b)*Na koľko typov možno rozdeliť takto získané trojuholníky podľa veľkosti uhlov?Napíš všetky trojice veľkostí vnútorných uhlov takýchto trojuholníkov.
5. Na kružnici, ktorá znázorňuje ciferník hodín, vyznač body 1,2,...12.Urč počet všetkých konvexných štvoruholníkov, ktoré majú vrcholy vo vyznačených bodoch.
6. V danej kružnici s polomerom $r = 3{,}5\ cm$ a s vyznačeným bodom $A \in k$ zostroj všetky trojuholníky *ABC*, ktoré majú BAC = 45°a ABC= 60°.
7. Aký veľký je obvodový uhol prislúchajúci *a)* $\frac{3}{5}$ *b)* $\frac{5}{8}$ kružnice?

8. Do kružnice *k* je vpísaný trojuholník *ABC* tak, že jeho vrcholy delia kružnicu na 3 oblúky, ktorých dlžky sú v pomere 2 : 3 : 7. Vypočítaj vnútorné uhly tohto trojuholníka.
9. Do kružnice *k* je vpísaný trojuholník *ABC* tak, že jeho vrcholy delia kružnicu na 3 oblúky, ktorých dlžky sú v pomere 3 : 4 : 5. Vypočítaj vnútorné uhly tohto trojuholníka.
10. Na kružnici k sú zvolené 3 body A, B, C tak, že ju delia na 3 kružnicové oblúky dlžok 5 cm, 6 cm, a 7 cm.V bodoch A, B, C sú ku kružnici zostrojené dotyčnice, ktoré „ohraničujú" trojuholník. Akú veľkosť má najväčší uhol tohto trojuholníka?
11. Na obrázku je kružnica k so stredom v bode S a priemerom BC.Na priamke BC leží bod A, z ktorého je ku kružnici zostrojená dotyčnica t s bodom dotyku T.Uhol TAB má veľkosť 26°.Akú veľkosť má uhol ABC?




12. Do kružnice s polomerom 60 cm je vpísaný rovnostranný trojuholník.
13. Do častí medzi trojuholníkom a kružnicou sú umiestnené 3 malé kružnice s rovnakým polomerom.Aký je to polomer?



14. Oplotený kvetinový záhon má tvar pravidelného šesťuholníka, ktorého vrcholy tvoria stlpiky plotu.Plot okolo záhona meria 60 metrov.K jednému zo stlpikov je zvonku priviazaná koza, ktorá sa pasie na okolitej lúke(nesmie vojsť do záhona a žrať kvety).Špagát, na ktorom je koza priviazaná, meria 24 m.Koľko m$^2$ lúky má koza pre seba?
15. Odvoďte vzorec pre súčet veľkosti všetkých vnútorných uhlov ľubovoľného konvexného n- uholníka.
16. Body A,B,C,D delia kružnicu k na štyri oblúky, dĺžky týchto oblúkov sú v pomere 3:5:4:6. V štvoruholníku ABCD vypočítajte

    $|\sphericalangle CAB|$, $|\sphericalangle DAC|$, $|\sphericalangle ACD|$, $|\sphericalangle BAC|$

17. Dve kružnice $k_1$, $k_2$ sa pretínajú v bodoch K, L. Menší oblúk KL je osminou kružnice $k_1$, a pätinou kružnice $k_2$. Na $k_1$ je daný taký bod M, že nepatrí menšiemu oblúku KL, ale menší oblúk KM je zhodný s KL. Zostrojte trojuholník MRN, ktorý má $R \in k_2, N \in k_1, K \in RM, L \in RN$ a vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.
18. Dve sústredné kružnice s polomermi R > r > 0 určujú medzikružie. Zostrojte kružnicu , ktorá je sústredná s oboma kružnicami a rozdeľuje medzikružie na dve časti s rovnakým obsahom.
19. Daná je kružnica *k (S,3cm)* a priamka *p*, pričom *v (p,S)=7cm*. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú kružnice *k* a priamky *p* a majú polomer :

    a) 1cm, b) 2cm, c) 3cm, d) 5cm.

20. Ukážte, že obsah pravidelného 8- uholníka so stranou $a$ je $2a^2(1+\sqrt{2})$.

    a) Odvoďte vzorce pre obsah a obvod pravidelného n- uholníka $(n \in N)$ vpísaného kružnici s polomerom r > 0.

    Na základe týchto vzorcov odvoďte vzorce pre obsah a obvod rovnostranného trojuholníka, štvorca a pravidelného 6- uholníka.

21. Kružnici je opísaný a vpísaný pravidelný 6- uholník. Rozdiel ich obsahov je $8\sqrt{3}$ cm$^2$. Určte polomer kružnice.
22. Určte množinu stredov všetkých tetív kružnice *k (S,r)*, ktoré prechádzajú jej vnútorným bodom M.

**Množiny bodov daných vlastností**

1. Dané sú body A, B. Nech bod C je vrcholom ľubovolného pravouhlého trojuholníka s preponou AB. Určte množinu ťažísk týchto trojuholníkov.
2. Dané sú body A, B, D, ktoré neležia na jednej priamke. Nájdite množinu bodov C, pre ktoré je štvoruholník ABCD konvexný a súčasne trojuholníky ABD a ABC majú

rovnaký obsah. (Riešením je polpriamka s krajným bodom D, rovnobežná s priamkou AB.)

3. Daná je úsečka AB. Určte množinu bodov, ktorých vzdialenosť od priamky AB je rovná dĺžke úsečky AB a z ktorých je vidieť úsečku AB pod uhlom $45^0$.

4. Dané sú body A, B. Nech bod C je vrcholom ľubovolného pravouhlého trojuholníka s preponou AB. Určte množinu bodov X, ktoré delia stranu AC v pomere 1 : 2.

5. Dané sú body A, B. Nájdite množinu bodov C, pre ktoré platí $\boldsymbol{2AB^2 = AC^2 + BC^2}$. (Ak zvolíme súradnicovú sústavu tak, aby $A\left[-\frac{d}{2}, 0\right], B\left[\frac{d}{2}, 0\right]$, kde d je dĺžka úsečky AB, bude pre súradnice x, y bodu $C[x, y]$ platiť $x^2 + y^2 = \frac{3d^2}{4}$.)

### 3.2 Analytická geometria v rovine

**Priamka a rovina**

1. Vypočítajte veľkosti strán, výšok, ťažníc a vnútorných uhlov $\triangle$ *ABC*, ak:
   a) *A* = [3, 2, 8], *B* = [-1, -2, -3], *C* = [2, -3, -4]
   b) Strany ležia na priamkach $x + y + 11 = 0,\ x - 3y - 1 = 0,\ 3x + y - 7 = 0$.
2. Zistite, či $\triangle$ *ABC* je pravouhlý: *A* = [23, 40], *B* = [63, 61], *C* = [23, 31].
3. Zistite, či body *A* = [5, 3, 4], *B* = [2, 5, -2], *C* = [-1, 0, 6] môžu byť vrcholmi trojuholníka, a vypočítajte jeho obsah.
4. Určte bod, ktorý má od priamky $5x + 12y = 0$ vzdialenosť *v* = 5 a od priamky $3x - 4y = 0$ vzdialenosť *w* = 39/5.
5. Z priamok $x + y + c = 0$ určte tú, ktorá ma od začiatku súradnicovej sústavy vzdialenosť *h* = 3.
6. Dané sú body: *A* = [1, 2, 0], *B* = [1, 1, 1], *C* = [0, -1, 2], *D* = [2, 2, 0]. Určte:
   a) $\left|A, \overleftrightarrow{BCD}\right|$,
   b) vzájomnú polohu priamok *AB* a *CD*,
   c) $\left|A, \overleftrightarrow{BC}\right|$,
   d) uhol priamky AB a roviny $\overleftrightarrow{BCD}$,
   e) uhol rovín $\overleftrightarrow{ABC}$ a $\overleftrightarrow{BCD}$,
   f) objem štvorstena *ABCD*.
7. Steny kocky ležia v rovinách $\begin{array}{l}\alpha: 12x - 16y + 15z - 100 = 0\\ \beta: 12x - 16y + 15z + 25 = 0\end{array}$. Vypočítajte objem kocky.
8. V kocke *ABCDEFGH* s hranou *a* = 1 vypočítajte (analyticky):
   a) uhol priamok *AE, BC*,
   b) uhol priamky *EF* a roviny *BGE*,
   c) vzdialenosť bodu *F* od roviny *BGE*,
   d) veľkosť uhla, ktorý zvierajú stenové uhlopriečky vychádzajúce z toho istého vrcholu dvoch susedných stien kocky.
9. Nájdite rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom *A*[4, -2], a má od začiatku sústavy súradníc vzdialenosť *d* = 2.

10. Nájdite rovnicu roviny □ rovnobežnej s rovinou □: $2x - 2y + z + 3 = 0$, ak vzdialenosť rovín □ a □ je $d = 2$.

11. Určte bod, ktorý má od priamky $p$: $5x + 12y = 0$ vzdialenosť $v = 5$ a od priamky

$q$: $3x - 4y = 0$ vzdialenosť $w = \frac{39}{5}$.

12. Z priamok $x + y + c = 0$ určte tú, ktorá má od začiatku sústavy súradníc vzdialenosť $h = 3$.

13. Je daný trojuholník ABC, A[-6;-1], B[4;-6], C[3;7]. Napíšte rovnice priamok, v ktorých ležia výška $v_c$ a ťažnica $t_a$ trojuholníka ABC. Určte tiež dĺžku ťažnice $t_a$ a výšky $v_c$.

32. Zakreslite množinu všetkých bodov roviny, pre ktorých súradnice x,y platí:

a) $|x - 2y| = 1$ b) $|x - 2y| \le 1$ c) $|x| + |y| \le 4$ d) $x^2 - y^2 = 0$

15. V trojuholníku sú dané vrcholy A[-2; -4 ], B[4; -2 ] a priesečník výšok V[2; -1 ]. Určte súradnice vrcholu C.

16. Rozhodnite, či body A[-2; 3; 0 ], B[1; 2; 2 ], C[4; 3; -1 ] ležia na priamke. Ak nie, napíšte parametrické vyjadrenie roviny ABC. Určte priesečník roviny ABC s osou x a rozhodnite, či bod M[1; 0; 7 ] leží v rovine ABC.

17. Zistite, či polpriamka $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $t \ge 0$, pretína polpriamku BC, B[-1; 0 ], C[1; 4]. Ak áno, určte súradnice priesečníka.

18. Dokážte, že body A[2;3], B[1;-1], C[5;-2] ležia vnútri tej istej polroviny vyťatej priamkou
$3x - y + 4 = 0$. Leží v tejto polrovine aj počiatok súradníc?

19. Zistite vzájomnú polohu priamok p,q:

$$p: \begin{aligned} x &= 1 - 2t \\ y &= 3t \\ z &= 5 + t \end{aligned}, \; t \in R \qquad q: \begin{aligned} x &= 7 + 2s \\ y &= -1 - s \\ z &= 3 + 3s \end{aligned}, \; s \in R.$$

20. Vyšetrite množinu všetkých bodov X roviny, pre ktoré platí:

$||AX|^2 - |BX|^2| = |AB|^2$, kde A,B sú dva rôzne body danej roviny.

21. Na priamke $4x + 12y - 2 = 0$ určte bod, ktorý má od priamky $5x + 12y + 5 = 0$ vzdialenosť $v = 3$.

22. Zistite vzájomnú polohu rovín $\alpha$, $\beta$ a ak je to možné, určte ich vzdialenosť:

$$\alpha: x - y - z - 3 = 0 \qquad \beta: \begin{aligned} x &= 0{,}5 + 3t + 3s \\ y &= -0{,}5 + 3t \\ z &= 3 + 3s \end{aligned} \quad s,t \in R.$$

23. Určte telesovú výšku v ( z bodu V ) štvorstena ABCV, ak V[1; 5; 5 ], A[4; 4; 4], B[-1; 10; -4 ], C[2; -2; 5 ].

24. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi M[3;5] , N[2; 6] a jej stred leží na priamke p: $2x + 3y - 4 = 0$.

25. Určte rovnicu dotyčnice ku kružnici $x^2+y^2=25$ v jej bode T[-3; 4]

a) analytickou cestou,

b) použitím geometrického významu derivácie.

26. Napíšte rovnicu priamky q prechádzajúcej stredom kružnice danej rovnicou $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$, ktorá je kolmá ma priamku p: $5x + 2y - 24 = 0$.

27. Je daná elipsa $5x^2 + 9y^2 = 45$ a bod M[0; -3].

a) Dokážte, že M je bodom vonkajšej oblasti elipsy.

b) Napíšte rovnice dotyčníc elipsy prechádzajúcich bodom M.

c)Vypočítajte odchýlku týchto dotyčníc.

28. Určte druh kužeľosečky , jej stred, ohniská, vrcholy a načrtnite ju :

$x^2 + 4x + 4y^2 + 8y - 8 = 0$

$25x^2 + 50x + 16y^2 - 64y - 311 = 0$

29. Napíšte rovnicu paraboly, ktorá je súmerná podľa osi y a prechádza bodmi P[0; 0] , M[6; -2].

30. Do paraboly s rovnicou $y^2 = 6x$ je vpísaný rovnostranný trojuholník, ktorého jeden vrchol je vo vrchole paraboly a protiľahlá strana je kolmá na os paraboly. Vypočítajte obsah vpísaného trojuholníka. Napíšte rovnice priamok, na ktorých ležia strany trojuholníka. Načrtnite obrázok.

31. Na hyperbole $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ nájdite bod, ktorého vzdialenosť od ohniska je 4,5 cm.

32. Je daná priamka p a bod A, ktorý na nej neleží. Vyšetrite množinu všetkých bodov X ležiacich v rovine určenej priamkou p a bodom A, pre ktoré platí : |X,A | : |X,p | = 1 : $\sqrt{2}$ .

33. V rovine s danými bodmi *A*, *B* mal žiak určiť priamku *p* daných vlastností. Žiak si zvolil súradnicový systém tak, že *A*[0, 0], *B*[1, 0]. Riešením mu vyšla priamka s rovnicou $x = 0{,}75$. Opíšte výslednú priamku pomocou bodov *A*, *B*.

34. Ukážte, že ak bod $\boldsymbol{x, y}$ leží na grafe paraboly $\boldsymbol{y = 2px}$, tak jeho vzdialenosť od priamky $\boldsymbol{y = -\frac{p}{2}}$ sa rovná jeho vzdialenosti od bodu

**Kvadratické útvary v rovine**

1. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá:
   a) má polomer $r = 7$ a dotýka sa oboch súradnicových osí,
   b) prechádza bodmi *A*[–6, 3] a *B*[0, 5] a má stred na priamke $2x - y + 5 = 0$,
   c) má priemer *AB*, pričom *A*[–3, 0] a *B*[3, 6],
   d) prechádza ohniskom, vrcholom a priesečníkom paraboly $x^2 + 8x + 12 = 4y$ s osou *y*.

2. Pre ktoré $m$ □ $\boldsymbol{R}$ je rovnica $x^2 + y^2 - 6x + 10y + m = 0$ rovnicou kružnice?

3. Určte typ kužeľosečky a jej charakteristické prvky:

$25x^2 + 9y^2 + 400x - 36y + 1441 = 0$ .

4. Elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ je vpísaný rovnostranný trojuholník, ktorého jeden vrchol splýva s hlavným vrcholom elipsy. Určte súradnice ďalších vrcholov trojuholníka.

5. Určte stred, vrcholy, excentricitu a ohniská hyperboly $x^2 - 9y^2 + 4x - 5 = 0$ a načrtnite ju.

6. Napíšte analytické vyjadrenie paraboly, ktorá má ohnisko $F$ a riadiacu priamku $d$:
   a) $F[4, 0]$; $d$: $y = 2$,
   b) $F[2, 5]$; $d$: $x = 0$.

7. Napíšte vrcholové rovnice všetkých parabol, ktoré majú os rovnobežnú s osou $y$, prechádzajú bodom $A[0, 2]$ a $V[3, 5]$.

8. Ktorá množina bodov je vyjadrená rovnicou $x^2 + ky^2 + k = 0$, kde $k \in \boldsymbol{R}$?

9. Napíšte rovnicu hyperboly, ktorej vrcholy ležia v ohniskách a ohniská vo vrcholoch elipsy $x^2 + 2y^2 = 18$.

10. Dokážte, že rovnica $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$ je rovnica hyperboly. Načrtnite ju. Je vzdialenosť ohnísk $2\sqrt{3}$ jednotiek dĺžky?

11. Určte ohnisko, vrchol a riadiacu priamku paraboly $x^2 + 9y + 6x - 9 = 0$.

12. Napíšte rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi $A[-1, 3]$, $B[0, 2]$, $C[1, -1]$. Zistite jej stred a polomer.

13. Určte stred a polomer guľovej plochy danej rovnicou $x^2 + y^2 + e^2 - 4x + 6y - 13 = 0$.

14. Elipsa má osi v osiach súradnicového systému. Trojuholník ADC je rovnostranný ( A je hlavný vrchol, C,D vedľajšie vrcholy). Dĺžka hlavnej poloosi $a = 12$. Bod A leží na osi x.

   a) napíšte rovnicu tejto elipsy

   b) určte súradnice ohnísk a vrcholov

   c) rozhodnite, ktorý z trojuholníkov EFX , kde X je ľubovoľný bod elipsy má najväčší obvod a koľko,

   má najväčší obsah a aký.

**Parabola a kružnica**

V nasledujúcich úlohách nájdi:

a) súradnice vrcholu,

b) súradnice ohniska,

c) rovnicu riadiacej priamky

d) kanonickú (vrcholovú) rovnicu paraboly

e) kanonickú (stredovú) rovnicu kružnice, ktorá má stred vo vrchole a dotýka sa riadiacej priamky paraboly

15. $y^2 - 4y - 4x + 8 = 0$
16. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$
17. $y^2 - 4y - 12x + 40 = 0$
18. $y^2 - 4y - 16x + 68 = 0$
19. $y^2 - 4y - 20x + 104 = 0$
20. $y^2 - 8y - 4x + 12 = 0$
21. $y^2 - 8y - 8x + 24 = 0$
22. $y^2 - 8y - 12x + 44 = 0$
23. $y^2 - 8y - 16x + 72 = 0$
24. $y^2 - 8y - 20x + 108 = 0$
25. $y^2 - 12y - 4x + 16 = 0$
26. $y^2 - 12y - 8x + 28 = 0$
27. $y^2 - 12y - 12x + 48 = 0$
28. $y^2 - 12y - 16x + 76 = 0$
29. $y^2 - 12y - 20x + 112 = 0$
30. $y^2 - 2y - 4x + 10 = 0$
31. $y^2 - 4y - 8x + 20 = 0$
32. $y^2 - 6y - 12x + 30 = 0$
33. $y^2 - 8y - 16x + 40 = 0$
35. $y^2 - 10y - 20x + 50 = 0$
36. $y^2 - 2y - 4x + 18 = 0$
37. $y^2 - 4y - 8x + 36 = 0$
38. $y^2 - 6y - 12x + 54 = 0$
39. $y^2 - 8y - 16x + 72 = 0$
40. $y^2 - 10y - 20x + 90 = 0$
41. $y^2 - 2y - 4x + 26 = 0$
42. $y^2 - 4y - 8x + 52 = 0$
43. $y^2 - 6y - 12x + 78 = 0$
44. $y^2 - 8y - 16x + 104 = 0$
45. $y^2 - 10y - 20x + 130 = 0$
46. $y^2 - 4y + 4x + 8 = 0$
47. $y^2 - 4y + 8x + 20 = 0$
48. $y^2 - 4y + 12x + 40 = 0$
49. $y^2 - 4y + 16x + 68 = 0$
50. $y^2 - 4y + 20x + 104 = 0$
51. $y^2 - 8y + 4x + 12 = 0$
52. $y^2 - 8y + 8x + 24 = 0$
53. $y^2 - 8y + 12x + 44 = 0$
54. $y^2 - 8y + 16x + 72 = 0$
55. $y^2 - 8y + 20x + 108 = 0$
56. $y^2 - 12y + 4x + 16 = 0$
57. $y^2 - 12y + 8x + 28 = 0$

58. $y^2 - 12y + 12x + 48 = 0$
59. $y^2 - 12y + 16x + 76 = 0$
60. $y^2 - 12y + 20x + 112 = 0$
61. $y^2 - 2y + 8x + 18 = 0$
62. $y^2 - 4y + 8x + 20 = 0$
63. $y^2 - 6y + 8x + 22 = 0$
64. $y^2 - 8y + 8x + 24 = 0$
65. $y^2 - 10y + 8x + 26 = 0$
66. $y^2 - 2y + 16x + 66 = 0$
67. $y^2 - 4y + 16x + 68 = 0$
68. $y^2 - 6y + 16x + 70 = 0$
69. $y^2 - 8y + 16x + 72 = 0$
70. $y^2 - 10y + 16x + 74 = 0$
71. $y^2 - 2y + 24x + 146 = 0$
72. $y^2 - 4y + 24x + 148 = 0$
73. $y^2 - 6y + 24x + 150 = 0$
74. $y^2 - 8y + 24x + 152 = 0$
75. $y^2 - 10y + 24x + 154 = 0$

**Elipsa a kružnica**

V nasledujúcich úlohách

a) urč súradnice stredu, ohnísk, hlavných a vedľajších vrcholov elipsy
b) napíš kanonickú - stredovú rovnicu elipsy
c) napíš rovnicu kružnice so stredom v strede elipsy, ktorá prechádza hlavnými vrcholmi elipsy
d) napíš rovnicu kružnice so stredom v strede elipsy, ktorá prechádza vedľajšími vrcholmi elipsy
e) napíš rovnicu kružnice so stredom v strede elipsy, ktorá prechádza ohniskami elipsy

76. $x^2 + 4y^2 - 4x - 8y + 4 = 0$
77. $x^2 + 9y^2 - 6x - 18y + 9 = 0$
78. $x^2 + 16y^2 - 8x - 32y + 16 = 0$
79. $4x^2 + 4y^2 - 16x - 16y + 16 = 0$
80. $4x^2 + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$
81. $4x^2 + 16y^2 - 32x - 64y + 64 = 0$
82. $16x^2 + 25y^2 - 160x - 200y + 400 = 0$
83. $16x^2 + 36y^2 - 192x - 288y + 576 = 0$
84. $16x^2 + 49y^2 - 224x - 392y + 784 = 0$
85. $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$
86. $x^2 + 9y^2 + 6x - 18y + 9 = 0$
87. $x^2 + 16y^2 + 8x - 32y + 16 = 0$

88. $4x^2 + 4y^2 + 16x - 16y + 16 = 0$

89. $4x^2 + 9y^2 + 24x - 36y + 36 = 0$

90. $4x^2 + 16y^2 + 32x - 64y + 64 = 0$

91. $16x^2 + 25y^2 + 160x - 200y + 400 = 0$

92. $16x^2 + 36y^2 + 192x - 288y + 576 = 0$

93. $16x^2 + 49y^2 + 224x - 392y + 784 = 0$

94. $x^2 + 4y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$

95. $x^2 + 9y^2 - 6x + 18y + 9 = 0$

96. $x^2 + 16y^2 - 8x + 32y + 16 = 0$

97. $4x^2 + 4y^2 - 16x + 16y + 16 = 0$

98. $4x^2 + 9y^2 - 24x + 36y + 36 = 0$

99. $4x^2 + 16y^2 - 32x + 64y + 64 = 0$

100. $9x^2 + 25y^2 - 90x + 150y + 225 = 0$

101. $16x^2 + 36y^2 - 192x + 288y + 576 = 0$

102. $16x^2 + 16y^2 - 128x + 128y + 256 = 0$

103. $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$

104. $x^2 + 9y^2 + 6x + 18y + 9 = 0$

105. $x^2 + 16y^2 + 8x + 32y + 16 = 0$

106. $4x^2 + 4y^2 + 16x + 16y + 16 = 0$

107. $4x^2 + 9y^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

108. $4x^2 + 16y^2 + 32x + 64y + 64 = 0$

109. $9x^2 + 16y^2 + 72x + 96y + 144 = 0$

110. $16x^2 + 25y^2 + 160x + 200y + 400 = 0$

111. $16x^2 + 36y^2 + 192x + 288y + 576 = 0$

**Vzájomná poloha priamky a kužeľosečky**

1. Na grafe funkcie $f : y = x^2 - 2x + 3$ nájdite bod, v ktorom dotyčnica ku grafu je rovnobežná s priamkou $3x - y + 5 = 0$.

2. Určte vzájomnú polohu priamky $p$ a elipsy □, ak $p : 2x + 3y - 8 = 0$, $\varepsilon : 4x^2 + 3y^2 = 16$.

3. Pod akým uhlom je vidieť kružnicu $k$ z počiatku súradnicovej sústavy, ak je dané $k : x^2 + y^2 - 8x + 8 = 0$.

4. Napíšte rovnicu dotyčnice a normály hyperboly $9x^2 - 4y^2 = 36$ v jej bode $T[x_0 > 0, 4]$.

5. Elipsa má hlavnú poloos $a = 5$, excentricitu $e = 3$. Vypočítajte obsah štvorca do nej vpísaného.

6. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 = 9x$ rovnobežnú s priamkou $5x - 3y - 2 = 0$.

7. Určte hodnotu parametra *q* tak, aby sa priamka $y = \frac{5}{2}x + q$ dotýkala hyperboly $36x^2 - 9y^2 = 324$ (v jednom bode).

8. V ktorých bodoch má kružnica $x^2 + y^2 = 4$ dotyčnice rovnobežné s priamkou $3x - y = 0$?

9. Daná je hyperbola $4x^2 - y^2 = 36$ a priamka $x - y + m = 0$. Určte počet spoločných bodov hyperboly a priamky v závislosti od parametra *m*.

10. V rovnici elipsy $b^2x^2 + 25y^2 = 25b^2$ určte číslo *b* tak, aby priamka $2x + 3y - 12 = 0$ bola jej dotyčnicou.

11. Je daná parabola $y^2 = 12x$ a priamka p: $x - y + 5 = 0$. Výpočtom zistite ich vzájomnú polohu.

12. Situáciu z predchádzajúceho príkladu ilustrujte čo najpresnejšie náčrtkom.

13. Je daná hyperbola $(x + 2)^2 - 9y^2 = 1$ a jej bod T[2;?]. Napíšte rovnicu dotyčnice hyperboly v bode T.

14. Situáciu z predchádzajúcej úlohy ilustrujte čo najpresnejšie náčrtkom, doplňte asymptoty hyperboly a napíšte ich rovnice.

### 3.3 Analytické vyjadrenie množín bodov

1. Definujte parabolu ako množinu bodov roviny s danými vlastnosťami.

2. Metódou súradníc odvoďte niektorú rovnicu paraboly s parametrom p = 4.

3. V rovine sú dané dva rôzne body A, B. Ich vzdialenosť je 8. Určte analyticky množinu všetkých bodov roviny, pre ktoré platí, že ich vzdialenosť od bodu A je trojnásobkom vzdialenosti od bodu B.

### 3.4 Zhodné a podobné zobrazenia

1. Dokáž, že ku každému zhodnému zobrazeniu existuje inverzné zobrazenie

2. Dokáž, že každé zobrazeni v rovine je prosté.

3. Rozdeľ danú úsečku AB bodom V na 2 časti: AB : BV = 3:5

AV : BV = 3:2

AV . BV = 4:7

4. Rozdeľ danú úsečku na 3 časti v pomere 1:3:7

5. V rovine je daná priamka p, kružnica k a bod Q. Zostrojte všetky úsečky XY so stredom Q také, aby platilo $X \in p, Y \in k$.

6. V polrovine určenej priamkou p a bodom A je daný bod B. Nájdite bod C na priamke p taký, aby súčet $|AC| + |BC|$ bol minimálny.

7. Dané sú dve navzájom kolmé priamky a, b a bod C, ktorý neleží ani na jednej z nich. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC také, aby platilo $A \in a, B \in b$.

8. Daná je priamka p, kružnica k a úsečka AB. Zostrojte úsečku KL, ktorá má tieto vlastnosti: |KL|=|AB |, KL || AB, $K \in k, L \in p$.

9. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte:

a + b, c, α

a, b, $t_c$,

$t_a$, $t_b$ , γ.

11. Trojuholník ABC má obvod 100. Jemu podobný trojuholník A′ B′ C′ má strany o 8, 14,18 väčšie než strany trojuholníka ABC. Vypočítajte dĺžky strán oboch trojuholníkov. Určte tiež pomer obsahov daných trojuholníkov.

12. Daná je kružnica k a jej vnútorný bod M. Zostrojte všetky tetivy kružnice k prechádzajúce bodom *M* také, že ich bod *M* delí na dve úsečky v pomere dĺžok 2:5.

13. Dané sú dve rôznobežky *p, q* a v rovine nimi určenej bod *A*, ktorý na daných priamkach neleží. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamok *p, q* a prechádzajú bodom *A*.

14. Je daná kružnica *k[S, r]* a jej tetiva *AB*. Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov *ABX*, kde $X \in k$.

15. Bod *A* má od kružnice *k* s polomerom *r* = 4 vzdialenosť /*AQ*/ = *v* = 10 cm. Vypočítajte:

    a) dľžku *t* dotyčníc vedených bodom *A* ku kružnici ;

    b) vzdialenosť *x* spojnice dotykových bodov dotyčníc od stredu kružnice.

16. Zostrojte úsečky dĺžok : a$\sqrt{2}$; $\sqrt{a^2 - b^2}$; $\sqrt{a.b}$; $\dfrac{ab}{a+b}$ ,kde *a* > *b* > 0 sú dané úsečky.

17. V rovine je daná priamka p, kružnica k a bod Q. Zostrojte všetky úsečky XY so stredom Q také, aby platilo $X \in p, Y \in k$.

18. V polrovine určenej priamkou p a bodom A je daný bod B. Nájdite bod C na priamke p taký, aby súčet $|AC| + |BC|$ bol minimálny.

19. Dané sú dve navzájom kolmé priamky a, b a bod C, ktorý neleží ani na jednej z nich. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC také, aby platilo $A \in a, B \in b$.

20. Daná je priamka p, kružnica k a úsečka AB. Zostrojte úsečku KL, ktorá má tieto vlastnosti: |KL|=|AB |, KL || AB, $K \in k, L \in p$.

21. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte:

    a + b, c, α

a, b, $t_c$,

$t_a$, $t_b$ , $\gamma$.

22. Trojuholník ABC má obvod 100. Jemu podobný trojuholník A′ B′ C′ má strany o 8, 14,18 väčšie než strany trojuholníka ABC. Vypočítajte dĺžky strán oboch trojuholníkov. Určte tiež pomer obsahov daných trojuholníkov.

23. Daná je kružnica k a jej vnútorný bod M. Zostrojte všetky tetivy kružnice k prechádzajúce bodom *M* také, že ich bod *M* delí na dve úsečky v pomere dĺžok 2:5.

24. Dané sú dve rôznobežky *p, q* a v rovine nimi určenej bod *A*, ktorý na daných priamkach neleží. Zostrojte všetky kružnice, ktoré sa dotýkajú priamok *p, q* a prechádzajú bodom *A*.

25. Je daná kružnica *k[S, r]* a jej tetiva *AB*. Nájdite množinu ťažísk všetkých trojuholníkov *ABX*, kde $X \in k$.

26. Bod *A* má od kružnice *k* s polomerom *r* = 4 vzdialenosť /*AQ*/ = *v* = 10 cm. Vypočítajte:

    a) dľžku *t* dotyčníc vedených bodom *A* ku kružnici ;

    b) vzdialenosť *x* spojnice dotykových bodov dotyčníc od stredu kružnice.

27. Zostrojte úsečky dĺžok : a $\sqrt{2}$; $\sqrt{a^2 - b^2}$; $\sqrt{a.b}$; $\dfrac{ab}{a+b}$ ,kde *a* > *b* > 0 sú dané úsečky.

28. Zostrojte trojuholník ABC, keď je dané c = 6 cm, $\alpha$ = 75°, $t_c$ = 8 cm.

29. Zostrojte trojuholník *ABC*, ak je dané *a* = 6 cm, α = 75°, $\boldsymbol{t_a}$ = 8 cm.

30. Dané sú dve rôznobežné priamky *a, b* a bod *S* ležiaci mimo nich, zostrojte body $A \in a$, $B \in b$, ak viete, že *S* je stred *AB*.

31. Zostrojte trojuholník *ABC*, keď je dané $\alpha$ = 75°, β = 45°, obvod *O* = 13 cm.

32. Zostrojte štvoruholník ABCD, |AB| = 3 cm, |BC| = 5 cm, |CD| = 4 cm a |DA| = 6 cm, ak viete, že uhlopriečka AC je osou uhla pri vrchole A.

33. Rozhodnite, či sú podobné trojuholníky ABC a A'B'C' ak:

    a = 8/3 cm, b = 7/3 cm, c =55 , a'= 4 cm, b' = 7/2 cm, c ' = 55

34. Tieň veže je dlhý 70 m a tieň metrovej tyče má v tom istom čase dĺžku 150 cm. Vypočítajte výšku veže.

35. Obdĺžnik ABCD má rozmery /AB/ = a, /AD/ = a/2. V akom pomere rozdeľuje bod M uhlopriečku BD, ktorý je pätou kolmice k vedenej z bodu A na priamku BD.

36. Určte graficky úsečku veľkosti 2.$\sqrt{2}$ + 1/3. $\sqrt{18}$

37. V karteziánskej sústave súradníc je daná k(S,r), S[2;3], r=3.

Zostrojte:

- k' súmernú podľa osi x

- k' súmernú podľa stredu súradnicovej sústavy

38. Body A,B ležia v tej istej polrovine ohraničenej priamkou p. Nájdite najkratšiu cestu z bodu A do bodu B takú, že jeden bod tejto cesty leží na priamke p.

39. Dané sú nesústredné kružnice $k_1(S_1,r_1)$ a $k_2(S_2,r_2)$ so spoločným bodom A. Zostrojte taký štvorec ABCD, aby vrchol B ležal na kružnici $k_1$ a D ležal na $k_2$.

**3.5 Konštrukčné úlohy**

1. Pomocou uhlomera zostroj pravidelný 5-uholník so stranou 4 cm.
2. Pomocou uhlomera zostroj pravidelný 9-uholník,ak dlžka jednej jeho uhlopriečky je 4 cm.
3. Bez uhlomera zostroj pravidelný 8-uholník s obvodom 24 cm.
4. Bez uhlomera zostroj pravidelný 12-uholník s obvodom 24 cm.
5. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: ta, tb, tc
6. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a=9 vb = 4,5 ta = 2,5
7. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a=4, vb = 3,5 tc = 3
8. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a+b =9, c = 5,7, $\gamma$ = 75°
9. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a-b = 4, c = 5,5 ,$\gamma$ = 45°
10. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: $\alpha$= 45°,$\beta$=100°, polomer vpísanej kružnice je 2 cm
11. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: $\alpha$ = 78°c = 8 cm, $\rho$= 2 cm
12. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: $\alpha$ = 54°vc = 6 cm, $\rho$= 2 cm
13. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a:b:c = 4:3:3,5 a $\rho$= 2 cm
14. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: c = 4, a = 5 vc = 3cm
15. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: b = 4, a = 5 ,vc = 3 cm
16. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: c = 5, vc = 4 cm, $\alpha$= 120°
17. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: b = 5, vc = 4 ,$\alpha$ = 45°
18. Zostroj trojuholník ABC ak je dané: a = 5, vc = 4 ,$\alpha$= 45°
19. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané:

    c =4cm, $v_c$ =3cm, $\gamma = 60^0$

    c =3cm, $t_b$ = 4cm, $\gamma = 30^0$

    a + b + c =10cm, $\alpha = 60^0$ , $\beta = 45^0$

20. Zostrojte trojuholník ABC, ak poznáte:

    a) a + b, c, $\alpha$

    b) a, b, $t_c$,

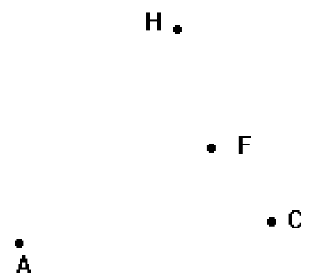
    c) $t_a$, $t_b$ , $\gamma$.

# 4. Stereometria

### 4.1 Základné spôsoby zobrazovania priestoru do roviny

1. Daná je kocka *ABCDEFGH* s hranou *a*. Bod *S* je stred *AE*. Vypočítajte vzdialenosť bodu *C* od roviny $\overleftrightarrow{HSG}$.
2. Daná je kocka *ABCDEFGH* s hranou *a*. Nájdite priesečník priamky *DF* s rovinou $\overleftrightarrow{ACH}$. Aký uhol zviera daná priamka s danou rovinou?
3. Aký uhol zvierajú bočné steny pravidelného štvorbokého ihlana, ktorého hrany podstavy majú dĺžku $a = 2$ cm a bočné hrany $b = 3$ cm.
4. Daný je pravidelný šesťboký ihlan *ABCDEFV*, ktorého telesová výška sa rovná dĺžke hrany podstavy ($v = a = 4$ dm). Vypočítajte vzdialenosť bodu *A* od priamky *CV*.
5. Daná je kocka *ABCDEFGH* s hranou *a*. Bod *S* je stred *CG*. Vypočítajte objemy telies, ktoré vzniknú rozrezaním kocky rovinou $\overleftrightarrow{EHS}$.
6. Zobrazte rez kocky *ABCDEFGH* rovinou $\overleftrightarrow{KLM}$, ak *K, L, M* sú postupne stredy hrán *GH, EH* a úsečky *FC*.
7. Vypočítajte vzdialenosť bodu *A* pravidelného štvorbokého ihlana *ABCDV* od priamky *CV*, ak $|AB| = a$, $|AV| = b$.
8. Daná je kocka *ABCDEFGH* s hranou *a*. Vypočítajte vzdialenosť bodu *A* od roviny $\overleftrightarrow{EFC}$.

9. Na obrázku je torzo priemetu kocky ABCDEFGH vo voľnom rovnobežnom premietaní. Doplňte priemety bodov B, D, E a G.




10. Určte rez kocky ABCDEFGH so stranou a = 5cm rovinou $\rho = \overleftrightarrow{MNP}$, ak M je stred hrany EF, N$\in \overleftarrow{DC}$ tak, že |DC| : |CN| = 5:1, P$\in \overrightarrow{FB}$ za bodom B, |FB| = 7 cm.
11. Rovina rezu KLM prechádza stredmi hrán BF, EF, FG kocky ABCDEFGH. Určte pomery objemov geometrických útvarov rozrezanej kocky.
12. Dokážte, že uhlopriečny rez AA'CC' kocky ABCDA'B'C'D' je obdĺžnik. Určte uhol uhlopriečok.
13. Kocke je opísaná guľa s polomerom *r*. Vypočítajte povrch a objem kocky.
14. Za aký čas sa naplní nádrž tvaru kvádra, ak sú jej rozmery a = 8 m, b = 5 m, c = $\frac{3}{4}$ m, ak priteká do nej každú minútu 50 l vody.

15. V kocke ABCDA'B'C'D' je vedená hranou CC', ktorej dĺžka je $a$ rovina $\rho$ tak, že rozdelí kocku na dva kolmé hranoly (štvorboký a trojboký), ktorých objemy sú v pomere 3:2. V akom pomere je rovinou $\rho$ rozdelená hrana AB?
16. Stan tvaru ihlana má podstatu drevený štvorec, ktorého hrana má dĺžku 2 m, výška stranu je 1,8 m. Koľko $m^2$ plátna treba na jeho zhotovenie, ak 5% povrchu sa počíta na zošitie.
17. Obsah podstavy rotačného kužeľa sa má k plášťu ako 3:5. Jeho telesová výška je 4 cm. Vypočítajte povrch a objem kužeľa.
18. Vedro má tvar zrezaného rotačného kužeľa s priemermi podstáv $d_1$ = 18 cm, $d_2$ = 36 cm a výška vedra je 34 cm. Koľko litrov vody sa približne do vedra zmestí?

19. Je daná kocka ABCDEFGH, určte aspoň 2 dvojice:

-rôznobežných priamok

-rovnobežných priamok

-mimobežných priamok

-rovnobežných rovín

-rôznobežných rovín

20. V kocke ABCDEFGH sú body K,L,M stredy hrán AE, EH, CG. Zostrojte rez kocky rovinou BKL.

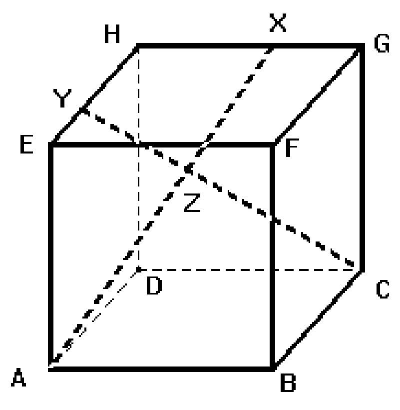
21. V kvádri ABCDEFGH, kde /AB/=3, /BC/=4, /AE/=7 určte odchýlku priamok AB, BH.

22. Vypočítajte vzdialenosť bodu V od roviny ABCD v pravidelnom štvorbokom ihlane ABCDV, ak je daná podstavná hrana a = 4,5 a odchýlka bočnej hrany od roviny podstavy je 45 .

**4.2 Súradnicová sústava v priestore, vektory, analytická metóda**

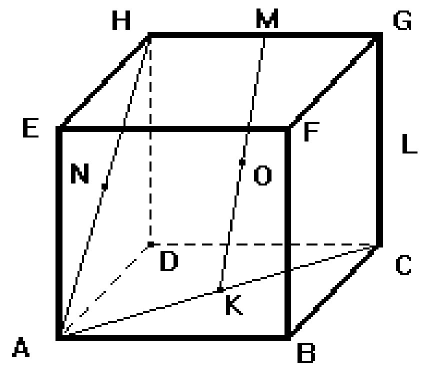
1. Dané sú body $A[1; 1]$, $B[2; -1]$ a $C[3; 2]$.
   a) Dokážte, že body $A$, $B$, $C$ neležia na jednej priamke.
   b) Dokážte, že trojuholník $ABC$ je pravouhlý a rovnoramenný.
   c) Vypočítajte dĺžky ťažníc trojuholníka $ABC$.
2. Dané sú body $A[-2; 4; 1]$, $B[-1; 2; 1]$, $C[-2; 2; 1]$ a $D[-2; 2; 4]$.
   a) Dokážte, že body $A$, $B$, $C$, $D$ neležia v jednej rovine.
   b) Vypočítajte obsah trojuholníka $ABC$.
   c) Určte vzdialenosť bodu $D$ od roviny $ABC$.

3. Dané sú body $A[3; 6; 0]$, $B[1; 4; 5]$ a $C[5; 2; 7]$.
   a) Určte súradnice ťažiska trojuholníka $ABC$.
   b) Vypočítajte obsah trojuholníka $ABC$.
   c) Vypočítajte výšku $v_a$.
   d) Napíšte rovnicu priamky $p$ rovnobežnej s priamkou $AB$, tak aby $C \in p$.
4. Dané sú body $A[4; 7; 0]$, $B[7; 3; 0]$, $D[0; 4; 0]$.
   a) Určte súradnice bodu $C$ tak, aby $ABCD$ bol rovnobežník.
   b) Dokážte, že $ABCD$ je štvorec.
   c) Určte súradnice bodov $E$, $F$, $G$, $H$ tak, aby $ABCDEFGH$ bola kocka.
   d) Napíšte rovnicu roviny $\alpha = DBG$.
5. Daný je štvorsten $A[0; -2; 1]$, $B[3; 2; -1]$, $C[-1; 4; 2]$, $D[1; 1; 4]$. Označte $E$ stred hrany $BC$ a $F$ stred hrany $BD$.
   a) Vyjadrite vektory $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AE}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AF}$, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{CF}$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{AC}$, $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{AD}$.
   b) Určte súradnice vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$.
6. Je daný pravidelný štvorboký ihlan ABCDV, veľkosť jeho podstavnej hrany je a = 6, výška v = $3\sqrt{2}$. Zvoľte vhodne súradnicovú sústavu a riešte nasledujúce úlohy:
   a) Dokážte, že $\overrightarrow{AV} \perp \overrightarrow{CV}$.
   b) Určte veľkosť uhla vektorov $\boldsymbol{u} = V - A$ a $\boldsymbol{v} = C - B$.
7. a) Určte súradnice bodu $C$ ležiaceho na osi $x$, ak $C$ je vrchol trojuholníka $ABC$, ktorého obsah $P = 2$ a vrcholy $A[2; 1]$, $B[3; 2]$.
   b) Vypočítajte súradnice ťažiska trojuholníka $ABC$ z predchádzajúcej podúlohy.
8. Bod X patrí hrane GH kocky ABCDEFGH a pre jeho polohu platí $|\boldsymbol{HX}| : |\boldsymbol{XG}| = \boldsymbol{3 : 2}$. Aká musí byť poloha bodu Y na úsečke EH, aby úsečky AX a CY boli rôznobežné (pozri obrázok)?



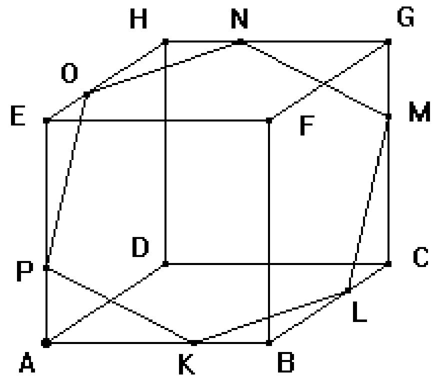
### 4.3 Lineárne útvary v priestore – polohové úlohy

1. *Daná je kocka* ABCDEFGH. *Body* K, L, M, N *a* O *sú po rade stredmi úsečiek* AC, CG, GH, AH a KM *(pozri obr. 1). Ležia body*
   *a)* H,O,C,
   *b)* G,O,A,
   *c)* B,O,H,
   *d)* N,O,L,
   *e)* D,O,F
   *na jednej priamke?*



*obr.1*

2. Daná je kocka ABCDEFGH s dĺžkou hrany 3 cm, na jej hranách AB, BC, CG, GH, HE a EA postupne body K, L, M, N, O, P také, že $|\boldsymbol{KB}| = |\boldsymbol{LC}| = |\boldsymbol{MG}| = |\boldsymbol{NH}| = |\boldsymbol{OE}| = |\boldsymbol{PA}|$ = 1 cm (pozri obr. 2). Rozhodnite, či body K, L, M a N sú komplanárne (t. j. či ležia v jednej rovine).



*obr. 2*

### 4.4 Lineárne útvary v priestore – metrické úlohy

1. Dané sú body A[3; – 4], B[2; 1]. Napíšte

a) parametrické vyjadrenie priamky

b) všeobecnú rovnicu priamky AB

c) smernicový tvar rovnice priamky AB

d) úsekový tvar rovnice priamky AB

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom M[$\sqrt{3}; -\sqrt{3}$] a je rovnobežná s priamkou p: $x$+$y$+9 = 0. Aké je vzdialenosť priamok p, q.

3. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom P[3; $-\sqrt{3}$] a zviera s osou $x$ uhol 120°.

4. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky prechádzajúcej bodmi A[3; 1], B[ – 1; 4] a vypočítajte dĺžku úsečky AB.

5. Dané sú body A[3; 5; – 1], B[2; 1; 3] napíšte rovnicu priamky AB, polpriamky AB, úsečky AB.

6. Určte vzájomnú polohu priamok $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ ak A[3; 2; 1], B[4; 1; 0], C[ – 4; 5; 4], D[ – 1; – 2; – 1]. Aká je vzdialenosť stredov úsečiek AB, CD?

7. Určte vzájomnú polohu priamok p, q ak:

p: $6x - 5y + 25 = 0$; q: $x = -5 + 5t$, $y = -1+6t$; $t \in R$.

Aké úseky vytína priamku q na súradnicových osiach $x$, $y$?

8. Rozhodnite o vzájomnej polohe priamok p, q ktorých parametrické vyjadrenie je:

p: $x = 3 - t$; $y = -2+2t$; $z = 3t$; $t \in R$

q: $x = 2+s$; $y = 1 - s$; $z = 9+3s$; $s \in R$

9. Vypočítajte obvod trojuholníka, ak rovnice jeho strán sú $7x - 4y - 1 = 0$; $x - 2y+7 = 0$; $2x+y+4 = 0$.

10. Napíšte všeobecnú rovnicu priamky, ktorej smernice $k = \frac{1}{3}$ a prechádza priesečníkom priamok p: $x - 2y+8 = 0$; q: $3x+5y+2 = 0$. Aké je uhol priamok p, q?

**4.5 Telesá**

1. Tri olovené gule s polomermi $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm zliali do jednej gule. Vypočítajte jej polomer $r$, objem a povrch.
2. Vypočítajte objem a povrch pravidelného štvorbokého ihlana s podstavnou hranou dĺžky $a$, ak uhol bočnej steny s rovinou podstavy má veľkosť $\alpha$.
3. Určte objem telesa, ktoré vznikne rotáciou obrazca ohraničeného osou $x$ a krivkou $y = 6x - x^2 - 5$ okolo osi $x$.
4. Kôš na odpadky má tvar pravidelného zrezaného štvorbokého ihlana s hranami podstáv 30 cm, 40 cm a výškou 50 cm. Určte jeho objem a povrch.
5. Odvoďte vzorec pre výpočet objemu rotačného kužeľa s polomerom $r>0$, výškou $v>0$. (Využite rotáciu okolo osi $x$.)
6. Profil násypu vysokého 3m má tvar rovnoramenného lichobežníka, ktorého kratšia základňa je 2,6 m a bočné steny majú od vodorovnej roviny odchýlku 41°. Koľko $m^3$ zeme obsahuje 1 meter násypu?

7. Rozmery kvádra sú v pomere $1:\frac{4}{3}:\frac{7}{4}$ a jeho telesová uhlopriečka má dĺžku 29 cm.

   Vypočítajte objem a povrch kvádra.

8. Určte povrch a objem pravidelného trojbokého ihlana, keď dĺžka podstavnej hrany je 3 cm a bočnej hrany 5 cm.

# 5. Kombinatorika

### 5.1 Kombinatorika

1. Koľko 5-ciferných prirodzených čísel možno zostaviť z číslic 0,1,2,3,4,5, ak

   a) žiadna cifra sa neopakuje,

   b) neplatí podmienka v a),

   c) ak majú byť z intervalu <25000, 40000>.

2. Na kultúrnom večierku má vystúpiť päť účinkujúcich A,B,C,D,E.

   Koľko je možností na zostavenie programu, ak:

   C má vystupovať ako prvý a E má vystupovať posledný,

   A,B,D majú vystúpiť v ľubovoľnom poradí, ale za sebou,

   C má vystúpiť pred E.

3. Na poličke treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť, ak hrnčeky rovnakej farby sú nerozlíšiteľné?

4. Dokážte, že pre všetky prípustné $n \in N$ platí:

$$\frac{(n+1)!}{(n-2)!} - 4.\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + 9.\frac{n!}{(n-1)!} = n(n-2)^2$$

5. V priestore je daných 15 rôznych bodov, z ktorých žiadne 3 neležia na jednej priamke a žiadne 4 v jednej rovine.

   Koľko rovín možno nimi určiť?

   Koľko rovín možno nimi určiť, ak 7 bodov leží v jednej rovine?

6. V obchode majú 9 druhov pohľadníc . Koľkými spôsobmi možno kúpiť 14 pohľadníc?

7. Je daných 8 spoluhlások, 6 samohlások a 4 dvojhlásky. Koľko rôznych „slov“ môžeme vytvoriť z týchto písmen, ak na prvom mieste má byť samohláska a na ďalších miestach majú byť 3 rôzne spoluhlásky a 2 rôzne dvojhlásky?

8. Riešte v N rovnice a na rovnice:

$$C(2,n) + C(2,n-1) = 4$$

$$\binom{4}{3}.\binom{n+1}{n-1} - \binom{5}{3}.\binom{n+1}{n} + \binom{3}{2}.\binom{4}{2} = 0$$

$$\binom{n}{2}-2.\binom{n-1}{n-2}+\binom{n}{0}\leq 0$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{n+1}+\binom{n+6}{2}<93$$

9. Vypočítajte $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^4$.

10. Pre ktoré reálne číslo x sa piaty člen binomického rozvoja výrazu $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\right)^{10}$ rovná číslu 105 ?

11. Určte všetky reálne čísla x také, aby 4. člen binomického rozvoja výrazu $\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ sa rovnal 200.

32. Ak viete, že $\binom{n}{3}=a$, $\binom{n}{4}=b$, určte $\binom{n}{n-3}$, $\binom{n}{n-4}-\binom{n}{n-3}$, $\binom{n+1}{4}$.

33. Dokážte, že pre $n\in N$ platí:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}=\binom{n+4}{n+1}$$

34. Riešte rovnicu pre $x\in N_0$:

$$\binom{5}{x}+\binom{5}{x+1}=\binom{6}{4}$$

35. Riešte v $N_0$:

$$\binom{x-1}{x-2}+\binom{x-2}{x-4}=4$$

36. Riešte v N nerovnicu:

$$\binom{n}{2}+\binom{n+3}{n+1}+\binom{n+6}{2}<93$$

37. Určte číslo $x\in R$ tak, aby štvrtý člen binomického rozvoja výrazu $\left(4x-\frac{1}{3x}\right)^8$, kde $x\neq 0$, sa rovnal číslu 14.

38. Ktorý člen binomického rozvoja výrazy $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^8 \wedge x\neq 0$, obsahuje $x^7$ ?

39. Určte člen binomického rozvoja $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{15}$, ktorý neobsahuje $x$.

40. Určte $\left(1-\sqrt{3}\right)^4$.

41. Určte siedmy člen rozvoja $\left(2x^2-\frac{1}{x}\right)^9$. Existuje absolútny člen rozvoja ?

42. Riešte v N nerovnicu $\binom{x}{2}+\binom{x+3}{2}+\binom{x+6}{2}<72$.

43. Ak sa zväčší počet prvkov o 2, zväčší sa počet permutácií 12 – krát. Počet prvkov určuje číslo $n \in N_0$, ktoré je prvočíslom. Overte tvrdenie.

44. Koľko existuje prirodzených čísel menších ako 2000, ktorých číslice sú navzájom rôzne ?

45. Ak sa počet prvkov zväčší o 2, zväčší sa počet variácií tretej triedy bez opakovania o 384. Určte počet prvkov.

46. Zo sady 32 kariet náhodne vyberieme 3 karty. Koľkými spôsobmi možno z nich vytiahnuť aspoň 2 esá?

47. Z koľkých prvkov možno vytvoriť 5040 variácií štvrtej triedy bez opakovania prvkov?

48. Na poličku treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?

49. Koľký člen rozvoja výrazu $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^6$ neobsahuje $x$?

50. Koľko prirodzených čísel menších ako 10 000 možno vytvoriť z cifier 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ?

51. Koľko rôznych trojciferných prirodzených čísel s rôznymi ciframi môžeme utvoriť z číslic 0, 1, 2, 3, 4. Koľko je z nich nepárnych?

52. Určte počet všetkých šesťciferných prirodzených čísel, ktorých ciferný súčet je 4.

53. Koľko prirodzených čísel menších ako 10 000 možno vytvoriť z cifier 0, 6, 7, 8, 9 , ak každú číslicu možno použiť v čísle najviac raz?

54. Na poličku treba rozostaviť vedľa seba 3 zelené, 2 červené a 2 žlté hrnčeky, tak aby hrnčeky rovnakej farby boli veľa seba. Hrnčeky rovnakej farby sú rozlíšiteľné. Koľko rôznych spôsobov rozostavenia môže vzniknúť?

55. Z vašej triedy treba vybrať 6 člennú delegáciu, tak aby mala 4 chlapcov a 2 dievčatá. Koľko takýchto delegácií možno vybrať?

56. V rovine je 10 bodov, z ktorých žiadne tri neležia na tej istej priamke. Koľko trojuholníkov je možné z týchto bodov zostrojiť?

**Pravdepodobnosť**

1. **Parádivá Eva**

Eva si vždy oblieka blúzku so sukňou alebo pulóver s nohavicami. Má štyri blázky a sedem sukní, pričom každá sukňa sa jej hodí ku všetkým blúzkam Má tri pulóvre a dvoje nohavice, pričom každé nohavice sa jej hodia ku všetkým pulóvrom. Koľkými rôznymi spôsobmi sa Eva môže obliecť?

a) 16 b) 28 c) 34 d) 55
e) 168

1. **Miss Matura**

Do finále súťaže Miss Matura postúpilo 6 maturantiek, medzi nimi aj Lucia. Porota určí poradie na všetkých šiestich miestach, pričom žiadne dve kandidátky neobsadia rovnaké miesto. Koľko existuje takých výsledných poradí finalistiek, v ktorých sa Lucia umiestni na niektorom z prvých troch miest?

2. **Dve družstvá**

Desať dievčat a dvaja chlapci sa chcú rozdeliť na dve šesťčlenné volejbalové družstvá tak, aby v každom družstve bol jeden chlapec. Koľkými rôznymi spôsobmi to môžu spraviť?

4. **Tri udalosti**

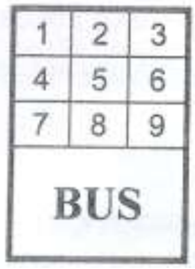
Nech **m** je pravdepodobnosť, že keď hodíme 5 korunových mincí, všetky dopadnú znakom nahor. Nech **k** je pravdepodobnosť, že keď hodíme dve bežné hracie kocky, padne na oboch šestka. Nech **c** je pravdepodobnosť, že keď náhodne zvolíme dvojciferné číslo, bude mať rôzne číslice. Potom platí:

5. **Parlament**

S pripomienkami k prerokúvanému zákonu chcú v parlamente okrem poslancov Klima a Lacha vystúpiť ešte ďalší štyria poslanci. Predsedajúci schôdze určil náhodne poradie diskutujúcich. Aká je pravdepodobnosť, že poslanec Klimo vystúpi ihneď po poslancovi Lachovi?

6. **Cestovné lístky**

Koľko rôznych kombinácií môžeme nastaviť na dierkovači cestovných lístkov, ak dierkovač vydierkuje štyri alebo päť z číslic 1 až 9?




7. **Chlapec alebo dievča?**

Predpokladajme, že pravdepodobnosť narodenia chlapca aj dievčaťa v rodine je rovnaká. Aká je pravdepodobnosť, že v rodine s piatimi deťmi je najmladšie aj najstaršie dieťa chlapec?

8. **Baktérie**

V skúmavke bolo večer $6^{15}$ baktérií. Pridaním antibiotík sa do rána ich počet o tretinu zmenšil. Koľko baktérií zostalo v skúmavke?

9. **Falošná kocka**

Pre istú falošnú kocku platí, že číslo 6 na nej padá dvakrát častejšie ako číslo 1 a číslo 1 na nej padá dvakrát častejšie ako každé zo zvyšných štyroch čísel. Aká je pravdepodobnosť, že po hode touto kockou padne na nej číslo 6?

10. **Zahraničný zájazd**

Na zahraničný zájazd cestuje v autobuse 46 cestujúcich, z toho 26 mužov a 20 žien. Colníci chcú podrobiť dôkladnej osobnej prehliadke 5 náhodne vybraných mužov a 5 náhodne vybraných žien z autobusu. Koľkými spôsobmi môžu vybrať týchto 10 cestujúcich?

**11. Trojciferné čísla**
Koľko existuje trojciferných prirodzených čísel, vytvorených len z párnych číslic, v ktorých je prostredná číslica väčšia ako obidve krajné?

**12. Maturita**
V triede s 30 žiakmi bude prebiehať maturita 5 dní. Každý deň budú maturovať traja žiaci doobeda a traja poobede. Poradie žiakov sa určí náhodne. Petrovi astrológ vypočítal, že najlepší výsledok dosiahne, ak bude maturovať v stredu poobede. Aká je pravdepodobnosť, že Peter bude maturovať práve vtedy?

**13.** V krabici je 26 žiaroviek s príkonom 40W, 24 žiaroviek s príkonom 60W a 30 žiaroviek s príkonom 75W. aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná žiarovka má príkon
60W,
Pravdepodobnosť vyjadri v percentách.

**14.** V krabici je 26 žiaroviek s príkonom 40W, 24 žiaroviek s príkonom 60W a 30 žiaroviek s príkonom 75W. aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná žiarovka má príkon
60W alebo 75W?

**15.** V zásielke obsahujúcej 80 žiaroviek sú 4 žiarovky pokazené. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná žiarovka je pokazená? Pravdepodobnosť vyjadri v percentách.

**16.** V klobúku je 20 červených, 16 modrých a 12 žltých guličiek. Vyjadri v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraná gulička je
žltá,

**17.** 17. V klobúku je 20 červených, 16 modrých a 12 žltých guličiek. Vyjadri v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraná gulička je
žltá alebo modrá?

**17.** Na tácke je 24 kusov koláčov. Z toho 6 má slivkovú náplň, 10 tvarohovú a zbytok orechovú náplň. Vyjadri v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný kus koláča má
slivkovú náplň,

**18.** 19. Na tácke je 24 kusov koláčov. Z toho 6 má slivkovú náplň, 10 tvarohovú a zbytok orechovú náplň. Vyjadri v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný kus koláča má orechovú náplň,

**19.** Na tácke je 24 kusov koláčov. Z toho 6 má slivkovú náplň, 10 tvarohovú a zbytok orechovú náplň. Vyjadri v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný kus koláča má
tvarohovú alebo orechovú náplň.

**20.** Na šachovom turnaji školy sa zúčastnia: 7.ročník s počtom hráčov 5, 8.ročník s počtom hráčov 6 a 9 hráčov z 9.ročníka. Urči v percentách pravdepodobnosť, že vylosovaný súper bude z 8.ročníka,

**21.** Na šachovom turnaji školy sa zúčastnia: 7.ročník s počtom hráčov 5, 8.ročník s počtom hráčov 6 a 9 hráčov z 9.ročníka. Urči v percentách pravdepodobnosť, že vylosovaný súper nebude zo 7.ročníka.

**22.** Z 32 žiakov jednej triedy malo v matematike výborný prospech 6 žiakov, chválitebný 10 žiakov, dobrý 12 žiakov, dostatočný 4 žiaci a nikto nemal nedostatočnú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak tejto triedy bol hodnotený klasifikačným stupňom výborný,

24. Z 32 žiakov jednej triedy malo v matematike výborný prospech 6 žiakov, chválitebný 10 žiakov, dobrý 12 žiakov, dostatočný 4 žiaci a nikto nemal nedostatočnú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak tejto triedy bol hodnotený klasifikačným stupňom chválitebný alebo dobrý

25. Z 32 žiakov jednej triedy malo v matematike výborný prospech 6 žiakov, chválitebný 10 žiakov, dobrý 12 žiakov, dostatočný 4 žiaci a nikto nemal nedostatočnú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak tejto triedy bol hodnotený klasifikačným stupňom lepším než dobrý.

26. V triede je 36 žiakov. Triedna učiteľka zistila, že anglický časopis odoberá 12 žiakov, nemecký 15 žiakov a 12 žiakov neodoberá ani jeden časopis. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak odoberá anglický časopis,

27. V triede je 36 žiakov. Triedna učiteľka zistila, že anglický časopis odoberá 12 žiakov, nemecký 15 žiakov a 12 žiakov neodoberá ani jeden časopis. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak odoberá nemecký časopis

**9.** V triede je 36 žiakov. Triedna učiteľka zistila, že anglický časopis odoberá 12 žiakov, nemecký 15 žiakov a 12 žiakov neodoberá ani jeden časopis. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak odoberá oba časopisy súčasne?

**10.** Zberový referent oznámil, že v rámci zberu liečivých bylín 15 žiakov triedy zbieralo podbeľ lekársky. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral len kvet podbeľu

Zberový referent oznámil, že v rámci zberu liečivých bylín 15 žiakov triedy zbieralo podbeľ lekársky. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral len kvet

31. Zberový referent oznámil, že v rámci zberu liečivých bylín 15 žiakov triedy zbieralo podbeľ lekársky. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral kvet aj listy podbeľu?

32. Zo 40 žiakov jednej triedy zbieralo podbeľ lekársky 15 žiakov. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral len kvet podbeľu

33. Zo 40 žiakov jednej triedy zbieralo podbeľ lekársky 15 žiakov. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral len listy podbeľu

34. Zo 40 žiakov jednej triedy zbieralo podbeľ lekársky 15 žiakov. Pritom kvet podbeľu zbieralo 8 žiakov a listy podbeľu zbieralo 10 žiakov. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak z tých, ktorí zbierali podbeľ zbieral zbieral kvet aj listy podbeľu?

35. Z 20 chlapcov hrajúcich futbal alebo hádzanú hraje futbal 16 chlapcov a 9 chlapcov hádzanú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný chlapec hrá len futbal,

36. Z 20 chlapcov hrajúcich futbal alebo hádzanú hraje futbal 16 chlapcov a 9 chlapcov hádzanú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodne vybraný chlapec hraje len hádzanú,

37. Z 20 chlapcov hrajúcich futbal alebo hádzanú hraje futbal 16 chlapcov a 9 chlapcov hádzanú. Urči v percentách pravdepodobnosť, že náhodným výberom chlapec hraje futbal aj hádzanú.

38. Každý z 25 pracovníkov jedného pracoviska ovláda aspoň jeden z jazykov: francúzština, angličtina. Pritom francúzsky hovorí 19 pracovníkov a anglicky 13 pracovníkov. Vypočítaj pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný pracovník ovláda len francúzštinu,

39. Každý z 25 pracovníkov jedného pracoviska ovláda aspoň jeden z jazykov: francúština, angličtina. Pritom francúzsky hovorí 19 pracovníkov a anglicky 13 pracovníkov. Vypočítaj pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný pracovník ovláda len angličtinu

40. Každý z 25 pracovníkov jedného pracoviska ovláda aspoň jeden z jazykov: francúština, angličtina. Pritom francúzsky hovorí 19 pracovníkov a anglicky 13 pracovníkov. Vypočítaj pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný pracovník ovláda obidva jazyky.

41. Turistický krúžok usporiadal v máji dva výlety. Z 24 žiakov tohoto krúžku sa zúčastnilo prvého výletu 21 žiakov, druhého 20 žiakov. Jeden žiak sa nezúčastnil ani na jednom výlete. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak sa zúčastnil len prvého výletu,

42. Turistický krúžok usporiadal v máji dva výlety. Z 24 žiakov tohoto krúžku sa zúčastnilo prvého výletu 21 žiakov, druhého 20 žiakov. Jeden žiak sa nezúčastnil ani na jednom výlete. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak sa zúčastnillen druhého výletu,

43. Turistický krúžok usporiadal v máji dva výlety. Z 24 žiakov tohoto krúžku sa zúčastnilo prvého výletu 21 žiakov, druhého 20 žiakov. Jeden žiak sa nezúčastnil ani na jednom výlete. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybraný žiak sa zúčastnil oboch výletov.

44. V osudí sú guličky s číslami od 1 až po 25. S akou pravdepodobnosťou vytiahneme jednociferné číslo,

45. V osudí sú guličky s číslami od 1 až po 25. S akou pravdepodobnosťou vytiahneme prvočíslo,

46. V osudí sú guličky s číslami od 1 až po 25. S akou pravdepodobnosťou vytiahneme číslo deliteľné dvomi alebo tromi,

47. V osudí sú guličky s číslami od 1 až po 25. S akou pravdepodobnosťou vytiahneme číslo deliteľné dvomi a zároveň tromi?

48. Pri losovaní Matesa sú v osudí čísla od 1 až po 35. Zisti pravdepodobnosť, že pri ťahaní prvého čísla bude vylosované číslo 7

49. Pri losovaní Matesa sú v osudí čísla od 1 až po 35. Zisti pravdepodobnosť, že pri ťahaní prvého čísla bude vylosované číslo deliteľné 7

50. Pri losovaní Matesa sú v osudí čísla od 1 až po 35. Zisti pravdepodobnosť, že pri ťahaní prvého čísla bude vylosované jednociferné číslo

51. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybrané číslo zo všetkých dvojciferných prirodzených čísel je väčšie ako 90

52. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybrané číslo zo všetkých dvojciferných prirodzených čísel je deliteľné 5

53. Urči pravdepodobnosť, že náhodne vybrané číslo zo všetkých dvojciferných prirodzených čísel je číslo deliteľné 5 a zároveň 3

54. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne číslo 6,

55. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne číslo párne,

56. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne číslo nepárne,

57. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne číslo deliteľné 2 alebo 3.

58. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne číslo väčšie ako 4
59. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne prvočíslo

60. Urči pravdepodobnosť, že pri hode hracou kockou padne zložené číslo

61. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybrané číslo z čísel 1 až 125 je deliteľné 5,

62. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybrané číslo z čísel 1 až 125 má ciferný súčet deliteľný 9,

63. Urči pravdepodobnosť v percentách, že náhodne vybrané číslo z čísel 1 až 125 je deliteľný 3 a zároveň 7.

64. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 2 kockami padne súčet 3
65. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 2 kockami padne súčet menší než 3
66. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 2 kockami padne súčet menší než 5?
67. Koľkokrát je treba hodiť kockou, aby pravdepodobnosť, že aspoň raz padne šestka bola väčšia ako 0,7?

68. Aká je pravdepodobnosť, že pri hode 6 hracích kociek padnú práve 4 rovnaké čísla?
69. V debne s 30 výrobkami sú 3 chybné, urči pravdepodobnosť toho, že medzi 5 náhodne vybranými je najviac jeden chybný.

70. V prvom klobúku je 5 bielych a 2 čierne guľky. V druhom klobúku sú 3 biele a 7 čiernych. Náhodne zvolíme jeden z klobúkov a vytiahneme z neho guľku. Aká je pravdepodobnosť, že bude biela?

71. Desať ľudí sa posadí okolo okrúhleho stola. Aká je pravdepodobnosť, že určitá dvojica ľudí bude sedieť vedľa seba?

72. Študent dostane test z 10 otázok, ku každej sú možné 4 odpovede. Aká je pravdepodobnosť, že odpovie správne na polovicu otázok, ak volí odpovede náhodne?

73. Za dlhým stolom sedí vedľa seba 6 žiakov. Aká je pravdepodobnosť, že pri vyvolaní dvoch to budú susedia?

74. Nech $a_n$ je počet všetkých možností, ako je možné zjesť *n* jabĺčok tak, že každý deň zjem jedno alebo dve jabĺčka. Vyjadrite $a_n$ pomocou $a_{n-1}$ a $a_{n-2}$ (Ukážte, že $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$).

75. Aká je pravdepodobnosť, že bod náhodne zvolený vnútri rovnostranného trojuholníka leží vnútri kružnice, ktorá je tomuto trojuholníku vpísaná?

76. Na úsečke si náhodne zvolím bod. Aká je pravdepodobnosť, že tento bod rozdelí úsečku na dve úsečky, z ktorých jedna je aspoň 7-krát väčšia ako druhá?

77. V rovine je daných n bodov $A_1, A_2, \ldots A_n$.Žiadne štyri z nich neležia na tej istej kružnici.Koľko kružníc je nimi určených? Koľko bude kružníc, ak práve 4 body ležia na jednej z nich?

78. V N riešte rovnicu $C_2(n) + C_2(n - 1) = 9$

79. Aká je pravdepodobnosť, že pri hre hracími kockami padne:

- pri jednom hode párne číslo

- pri dvoch hodoch iba párne čísla

80. V krabici je 10 súčiastok, z toho 4 chybné. Z krabice náhodne vytiahneme 3 z nich. Aká je pravdepodobnosť, že:

a) budú všetky chybné b) bude práve jedna chybná

81. V triede je 12 chlapcov a 14 dievčat. Z nich sa losujú 3 zástupcovia. Aká je pravdepodobnosť, že to budú:

- len dievčatá

- dve dievčatá a jeden chlapec

## 5.2 Štatistika

1. Pri meraní 63 žiakov boli zistené tieto údaje o výške v centimetroch a príslušnom počte žiakov.

| Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | 1 | 165 | 2 | 170 | 5 | 175 | 2 |
| 161 | 1 | 166 | 3 | 171 | 6 | 177 | 1 |
| 162 | 2 | 167 | 2 | 172 | 7 | 178 | 4 |
| 163 | 1 | 168 | 4 | 173 | 9 | 179 | 2 |
| 164 | 2 | 169 | 3 | 174 | 5 | 181 | 1 |

Urči aritmetický priemer znaku, ktorým je výška uvedených žiakov.

2. Pri meraní 63 žiakov boli zistené tieto údaje o výške v centimetroch a príslušnom počte žiakov.

| Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | 1 | 165 | 2 | 170 | 5 | 175 | 2 |
| 161 | 1 | 166 | 3 | 171 | 6 | 177 | 1 |
| 162 | 2 | 167 | 2 | 172 | 7 | 178 | 4 |
| 163 | 1 | 168 | 4 | 173 | 9 | 179 | 2 |
| 164 | 2 | 169 | 3 | 174 | 5 | 181 | 1 |

Urči modus znaku, ktorým je výška uvedených žiakov.

3. Pri meraní 63 žiakov boli zistené tieto údaje o výške v centimetroch a príslušnom počte žiakov.

| Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | 1 | 165 | 2 | 170 | 5 | 175 | 2 |
| 161 | 1 | 166 | 3 | 171 | 6 | 177 | 1 |
| 162 | 2 | 167 | 2 | 172 | 7 | 178 | 4 |
| 163 | 1 | 168 | 4 | 173 | 9 | 179 | 2 |
| 164 | 2 | 169 | 3 | 174 | 5 | 181 | 1 |

Urči medián, ktorým je výška uvedených žiakov.

4. Pri meraní 63 žiakov boli zistené tieto údaje o výške v centimetroch a príslušnom počte žiakov.

| Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | 1 | 165 | 2 | 170 | 5 | 175 | 2 |
| 161 | 1 | 166 | 3 | 171 | 6 | 177 | 1 |
| 162 | 2 | 167 | 2 | 172 | 7 | 178 | 4 |
| 163 | 1 | 168 | 4 | 173 | 9 | 179 | 2 |
| 164 | 2 | 169 | 3 | 174 | 5 | 181 | 1 |

Urči rozptyl znaku, ktorým je výška uvedených žiakov.

5. Pri meraní 63 žiakov boli zistené tieto údaje o výške v centimetroch a príslušnom počte žiakov.

| Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet | Výška | počet |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 159 | 1 | 165 | 2 | 170 | 5 | 175 | 2 |
| 161 | 1 | 166 | 3 | 171 | 6 | 177 | 1 |
| 162 | 2 | 167 | 2 | 172 | 7 | 178 | 4 |
| 163 | 1 | 168 | 4 | 173 | 9 | 179 | 2 |
| 164 | 2 | 169 | 3 | 174 | 5 | 181 | 1 |

Urči smerodajnú odchýlku znaku, ktorým je výška uvedených žiakov.

6. Vypočítaj aritmetický priemer súboru, $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$, ak sa v ňom číslo 2 vyskytuje 5-krát, číslo 7 sa vyskytuje 8-krát a číslo 10 a12 raz.

7. Vypočítaj modus súboru, $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$, ak sa v ňom číslo 2 vyskytuje 5-krát, číslo 7 sa vyskytuje 8-krát a číslo 10 a12 raz.

8. Vypočítaj medián súboru, $x_1, x_2, \ldots, x_{15}$, ak sa v ňom číslo 2 vyskytuje 5-krát, číslo 7 sa vyskytuje 8-krát a číslo 10 a12 raz.

9. Vypočítaj koeficient korelácie znakov x a y zadaných tabuľkou:

| x/y | 2 | 4 | 6 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | 3 |
| 3 | 1 | 2 | |
| 5 | | | 3 |

10. Navrhnite súbor s 8 hodnotami tak, aby v ňom aritmetický priemer bol väčší ako modus.