Radka Schwartzová

<table>
<tr><td>Téma
O čom to bude</td><td>Ročník
Koho učíme</td></tr>
<tr><td>Parametrické vyjadrenie priamky v rovine</td><td>3. ročník gymnázium</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Ciele
Čo sa žiak naučí</td><td>Vstup
Čo sa vopred od žiaka očakáva</td></tr>
<tr><td rowspan="3">

- Vyjadriť parametrickú rovnicu priamky v rovine : $X = A + tu$, kde t je $\mathbb{R}$,
- Vyjadriť parametrickú rovnicu priamky v rovine v súradniciach,
- Vlastnými slovami odôvodniť prečo priamka p obsahuje nekonečne veľa smerových vektorov,
- Vytvoriť predpis parametrickej rovnice priamky, ak poznáme bod a vektor priamky,
- Vytvoriť predpis parametrickej rovnice priamky, ak poznáme dva body priamky,
- s využitím parametrickej rovnice priamky ukázať, či daný bod patrí alebo nepatrí priamke,

</td><td>

- súradnice bodu,
- súradnice vektora,
- vektor, sčítanie a odčítanie vektorov, násobenie vektora reálnym číslom a veľkosť vektora, lineárna závislosť, resp. nezávislosť vektorov,
- priamka,
- bod,
- vzdialenosť dvoch bodov,
- lineárna rovnica,
- sústava dvoch rovníc.

</td></tr>
<tr><td>Didaktický problém, miskoncepcie
Čo budeme riešiť</td></tr>
<tr><td>

- Priamku je určená iba jedným vektorom, čo si žiaci môžu vyvodiť z didaktickej aktivity – problém sa rieši v Príklade 1;
- Rovnica jednej priamky p môže byť vyjadrená práve jedným spôsobom – problém sa rieši v Úlohe 3.
- V Úlohe 1. môže nastať problém vo určení správnej hodnoty parametra. Žiak si povie že jedenkrát prenesie vektor u a dostane sa do bodu D.
- Dosadzovanie súradníc bodu a vektora do parametrického vyjadrenia priamky – problém sa rieši Úlohou 2., 3., 4.

</td></tr>
<tr><td>Prostriedky
Čo použijeme</td><td>Metódy a formy
Ako to zrealizujeme</td></tr>
<tr><td>

- Tablety,
- Interaktívnu tabuľu,
- Notebook,
- Tabuľu s kriedou,
- Pracovné listy,
- Zošity a písacie pomôcky,
- Meter,
- Applet,
- Program Geogebra.

</td><td>

Metódy:

- Demonštrácia,
- Metóda otázok a odpovedí,
- Sokratovský rozhovor,
- Riadené bádanie.

Formy:

- Frontálna práca,
- Práca v dvojiciach,
- Skupinová práca.

</td></tr>
<tr><td colspan="2">Literatúra
Z akých zdrojov sme čerpali</td></tr>
<tr><td colspan="2">

- https://www.galeje.sk
- http://www.realisticky.cz/
- https://www.geogebra.org/

</td></tr>
</table>

Radka Schwartzová

Štruktúra vyučovacej jednotky:

Motivácia – *metódy*: demonštrácia, metóda otázok a odpovedí; *formy*: frontálna práca

Expozícia – *metódy*: metóda otázok a odpovedí, sokratovský rozhovor, riadené bádanie; *formy*: frontálna práca, skupinová práca

Fixácia – *metódy*: riadené bádanie; *formy: skupinová práca, frontálna práca*

Vyučovacia jednotka (úlohy, definície pojmov, zavedenie označenia, znenia viet, vlastnosti pojmov, metódy riešenia, ..., metodické poznámky pre učiteľa):

Motivácia (15 minút)

V úvode vyučovacej hodiny využijem vedomosti žiakov, ktorými už disponujú a prostredníctvom nasledujúcej aktivity sa ich budem snažiť namotivovať. Touto aktivitou žiakom ukážem, ako je možné premietnuť realitu do virtuálneho sveta Geogebra. Cieľom nie je iba motivovať žiakov, ale aj zopakovať poznatky žiakov, ktorými už disponujú a s ktorými budeme na dnešnej hodine pracovať.

Aktivitu budú realizovať traja žiaci. Žiak 1 – bude robiť krok, žiak 2 – bude meraním zisťovať potrebné informácie, žiak 3 – bude zadávať správne informácie do programu Geogebra na interaktívnej tabuli. Zvyšok triedy bude znázorňovať problematiku v programe Geogebra za pomoci tabletov či odpovedať na otázky učiteľa.

Žiakov najskôr oboznámim s aktivitou:

> Predstavte si, že podlaha v triede je rovina, v ktorej je v programe Geogebra znázornená súradnicová sústava. Vašou úlohou bude vytvoriť si vlastnú myslenú súradnicovú sústavu tu v triede, za pomoci ktorej budeme vedieť v programe Geogebra konkrétne znázorniť krok vášho spolužiaka. Použime steny v triede, ktoré budú predstavovať os x, os y. Na meranie vzdialeností využijeme meter. Naša mierka bude vyzerať takto: 1 m (v triede) je 1 dielik na osi x, resp. osi y (v Geogebre).

Učiteľ bude pracovať frontálne s celou triedou:

U: Ktoré steny by sme si mohli zvoliť na reprezentáciu osi x alebo osi y?

Poznámka: Nechám na žiakoch voľbu stien, ktoré budú predstavovať dané osi. (V našom prípade budem uvažovať o prednej stene, na ktorej je tabuľa = os x a na ňu kolmej stene vľavo = os y).

U: V mieste, kde sa nám pretínajú v Geogebre os x a os y je počiatočný bod 0, kde sa bude vyskytovať bod 0 v našej triede?

Ž: *Na prieniku dvoch stien, ktoré predstavujú os x, os y v triede.*

U: Aké informácie o kroku vášho spolužiaka budeme potrebovať aby sme ho znázornili v Geogebre?

Ž: súradnice miesta, v ktorom sa krok spolužiaka začína, resp. končí;

Doplňujúce otázky:

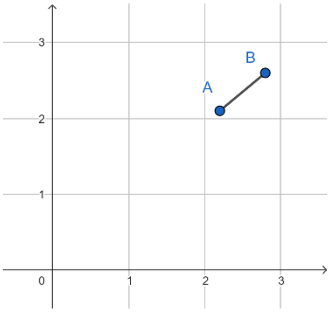
- Aký rovinný útvar bude predstavovať krok vášho spolužiaka v Geogebre?
  (možné odpovede: úsečka, vektor)
- Koľko najmenej bodov potrebujeme na znázornenie úsečky?
  (2 body)
- Čo budú predstavovať dané body v kroku spolužiaka?
  Miesto, z ktorého spolužiak vychádza, resp. končí.

U: Poďme získať potrebné informácie a zobraziť krok vášho spolužiaka do prostredia Geogebra.

Radka Schwartzová

Bod A predstavuje začiatok kroku, ktorého súradnice môžu byť napr. A=[2,2; 2,1].

Bod B predstavuje koniec kroku, ktorého súradnice môžu byť napr. B=[2,8; 2,6].



U: Všimnime si, že sme dostali úsečku. Tým, že váš spolužiak necúval ale šiel vpred, teda jeho krok predstavuje úsečka, ktorá má svoju orientáciu a smer. Ako sa taká úsečka nazýva?

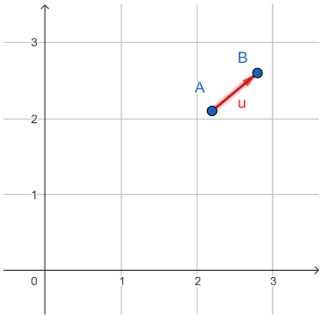
Ž: Učili sme sa to predsa na minulej hodine. Je to vektor.

<u>*Poznámka:*</u> Učiteľ doplní do obrázka v Geogebre vektor (pozri obrázok vedľa)

U: Výborne. Vypočítajte teda súradnice tohto vektora $\overrightarrow{AB}$.

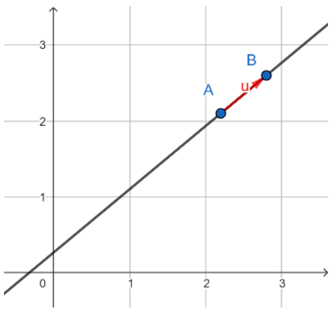
Riešenie:

$$\overrightarrow{AB} = B - A = [2{,}8;\ 2{,}6] - [2{,}2;\ 2{,}1] = (0{,}6;\ 0{,}5)$$



U: Ak by váš spolužiak šiel týmto smerom do nekonečna, tak by prešiel celú Zemeguľu a dostal by sa znova do bodu, z ktorého v triede vykročil. Túto situáciu by sme vedeli v Geogebre znázorniť napríklad prostredníctvom priamky.

Poznámka: Učiteľ zakreslí spomínanú priamku do prostredia Geogebra (pozri obrázok vedľa).



Zhrnutie: Získali sme vektor, ktorý predstavuje krok a patrí nie len úsečke ale zároveň aj priamke. Takýto vektor budeme nazývať smerový vektor. Dnešnú hodinu budeme venovať zatiaľ tomu, ako je možné pomocou bodu priamky a smerového vektora popísať v matematike priamku.

<u>Expozícia (15 min.)</u>

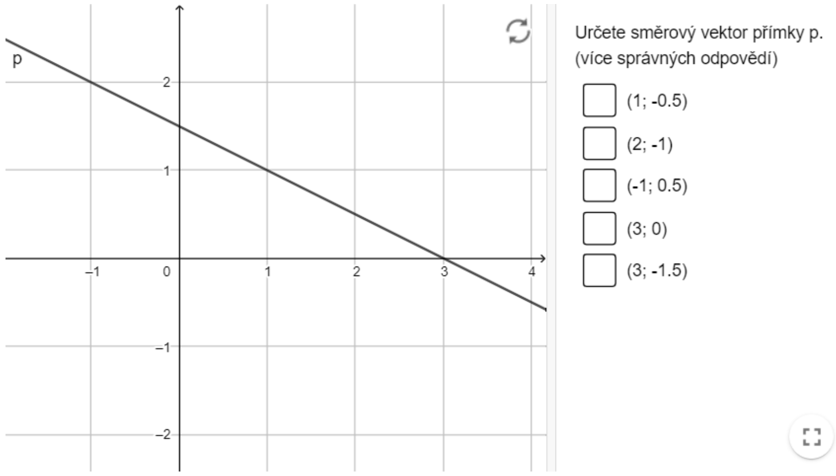
<u>*Poznámka:*</u> Učiteľ zapíše na tabuľu nasledovnú definíciu a žiaci ju zapíšu súbežne s ním do svojich zošitov.

> Majme ľubovoľné dva body A, B priamky p. Nenulový vektor $\vec{u} = B - A$ nazývame **smerový vektor priamky p.**

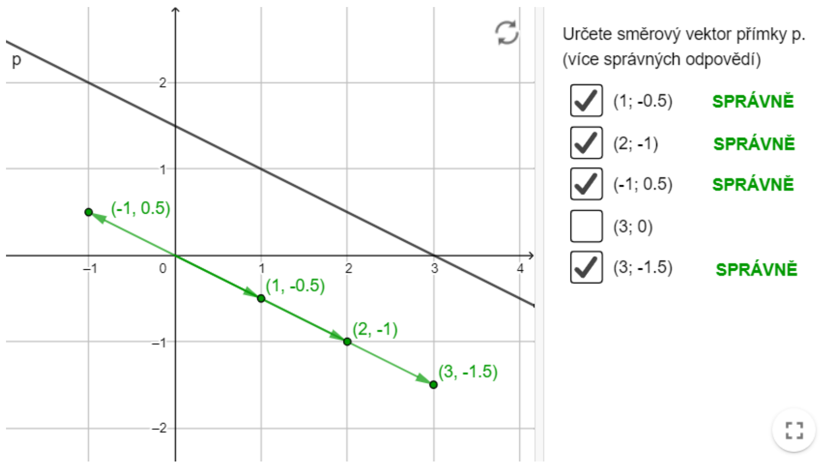
<u>*Poznámka:*</u> Žiaci dostanú do dvojíc tablet, v ktorom si otvoria nasledujúci príklad. (applet: https://www.geogebra.org/m/z2kfhky3#material/wbv52zvj) Rovnako aj učiteľ zobrazí dané cvičenie na interaktívnej tabuli.

Radka Schwartzová

Príklad 1. Určte smerový vektor priamky p. (viac možností je správnych)



Riešenie: Každý z ponúkaných vektorov znázorní učiteľ v súradnicovej sústave. Priamke p patria také vektory, ktoré sú s ňou rovnobežné.



Žiakom nechám pár minút čas na to, aby zistili, ktoré odpovede sú správne a učiteľ ich zaznačí na interaktívnej tabuli. Následne sa nám zobrazí zelená úsečka, na ktorej budú ležať všetky správne zvolené vektory (pozri obrázok vyššie).

Žiakom položím otázku:

U: Akou vlastnosťou disponujú vektory, ktoré patria priamke p?

V prípade, že žiaci nespomenú lineárnu závislosť položím im doplňujúce otázky:

- Aký je vzťah medzi vektorom $(-1;\ 0{,}5)$ a vektorom $(1; -0{,}5)$? (sú navzájom opačné ale aj lin. závislé)
- Akým reálnym číslom musíme teda vynásobiť vektor $(-1;\ 0{,}5)$ aby sme dostali vektor $(1;\ -0{,}5)$? (násobiť musím číslom -1)
- Aký je vzťah medzi vektorom $(1;\ -0{,}5)$ a $(2;\ -1)$? (sú lineárne závislé, ak by náhodou žiaci nevedeli odpovedať padla by ďalšia otázka podobná predchádzajúcej)

U: Koľko smerových vektorov, ktoré sú lineárne závislé, môžeme umiestniť na priamku?

Ž: Na priamku p môžeme umiestniť nekonečne veľa smerových vektorov.

Radka Schwartzová

U: Správne. Na priamku možno zobraziť nekonečne veľa smerových vektorov, ktoré sú navzájom lineárne závislé. Vo všeobecnosti ak by vektory $\vec{s}$ a $\vec{u}$ patrili priamke p, tak to vieme napísať takto:

$$\vec{s} = t\vec{u}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}$$

Vektor $\vec{s}$ vieme rozpísať aj ako rozdiel ľubovoľných dvoch bodov napríklad A, X, ktoré patria priamke p: $\vec{s} = X - A$, dostávame:

$$X - A = t\vec{u}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}.$$

Túto rovnicu upravíme pripočítaním bodu A k obom stranám rovnice a získame tvar:

$$X = A + t\vec{u}, \text{ kde } t \in \mathbb{R}$$

prostredníctvom ktorého vieme určiť ľubovoľný bod priamky.

Poznámka: Učiteľ zapíše na tabuľu nasledovnú definíciu a žiaci ju zapíšu súbežne s ním do svojich zošitov.

Rovnicu $\boldsymbol{X = A + t\vec{u}}$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\vec{u} \neq \vec{0}$, nazývame **parametrické vyjadrenie priamky (**parametrická rovnica priamky**)**. Reálne číslo t nazývame **parameter**.

U: Každý vektor či bod je určený v súradnicovej sústave súradnicami, práve preto parametrické vyjadrenie priamky je možné zapísať aj pomocou súradníc.

Poznámka: Učiteľ zapíše na tabuľu nasledovnú definíciu a žiaci ju zapíšu súbežne s ním do svojich zošitov.

Súradnice smerového vektora $\vec{u} = (u_1; u_2)$ sú , bodu $A = [a_1;\ a_2]$ a bodu $X = [x; y]$. Parametrická rovnica priamky $\boldsymbol{X = A + t\vec{u}}$, kde $t \in \mathbb{R}$ je ekvivalentná s rovnicami:

$$x = a_1 + tu_1,$$
$$y = a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Takúto sústavu rovníc nazývame **parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach**.

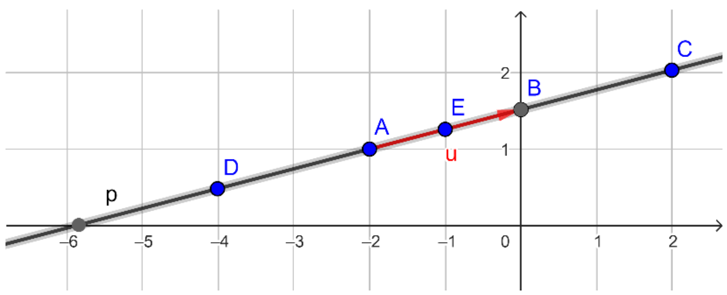
Fixácia (15 min.)

Následne žiakov rozdelím do skupín po štyroch podľa lavíc (môže sa stať, že žiaci budú pracovať aj v trojici) a rozdám im pracovné listy.

Pracovný list

Úloha 1. Parametrická rovnica priamky p je $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$. Určte parameter bodu:

a) $C \in p$,
b) $B \in p$,
c) $E \in p$,
d) $D \in p$.



Riešenie: a) 2; b)1; c) $\frac{1}{2}$*; d)-1.*

<u>Poznámka</u>: Žiak môže zvoliť nesprávne hodnotu parametra hneď na začiatku v a). To chcem ustriehnuť hneď na začiatku. Žiakov by som nechala dopočítať Úlohu 1. a v prípade, že by to niektorá skupina vyriešila správne, tak by svoj postup riešenia prezentovala na tabuli ostatým. AK by sa stalo, že nikto nevyriešil úlohu správne, tak by som žiakov naviedla na správnu odpoveď frontálne. Snažila by som sa im lepšie vysvetliť význam matematického zápisu $X = A + t\vec{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$.

Úloha 2. Napíš parametrické vyjadrenie priamky $\boldsymbol{p}$, ktorá je daná bodom $\boldsymbol{A} = [\mathbf{1}; \mathbf{2}]$ a smerovým vektorom $\vec{\boldsymbol{u}} = (\mathbf{2}; -\mathbf{1})$.

Možné riešenie:

Parametrické vyjadrenie priamky je $p: X = A + t\vec{u}\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

Dosadíme čo poznáme: $[x; y] = [1; 2] + (2; -1)t\ ,\ t \in \mathbb{R}$ a vyjadrime v súradnicovom tvare priamku p:

$$x = 1 + 2t,$$
$$y = 2 - 1t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

<u>Poznámka</u>: Parametrická rovnica priamky p určená jednoznačne nie je, preto existuje mnoho ďalších vyjadrení priamky p, ktoré sú správne.

Úloha 3. Napíš parametrické vyjadrenie priamky $\boldsymbol{q}$, ktorá je daná bodmi $\boldsymbol{C} = [-\mathbf{1}; \mathbf{0}]$, $\boldsymbol{D} = [\mathbf{2}; -\mathbf{2}]$. Nájdi aspoň dve ďalšie parametrické vyjadrenia priamky q.

Možné riešenie:

Parametrické vyjadrenie priamky je $q: X = C + t\overrightarrow{CD}\ ,\ t \in \mathbb{R}$.

Je potrebné dopočítať súradnice smerového vektora $\overrightarrow{CD} = D - C = (3;\ -2)$.

Dosadíme: $[x; y] = [-1; 0] + (3; -2)t\ ,\ t \in \mathbb{R}$ a vyjadrime v súradnicovom tvare:

$$x = -1 + 3t,$$
$$y = \quad -2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

V ďalšom parametrickom vyjadrení priamky môže priamka q vyzerať takto: : $X = D + t\overrightarrow{DC}\ ,\ t \in \mathbb{R}$

$$x = 2 - 3t,$$
$$y = -2 + 2t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alebo zvolíme dvojnásobok vektora $\overrightarrow{CD}$, teda $2\overrightarrow{CD} = (6;\ -4)$ a param. vyjadrenie priamky q je:

$$x = -1 + 6t,$$
$$y = \quad -4t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Úloha 4. Zisti, či body $\boldsymbol{E} = [\mathbf{5}; \mathbf{0}]$ a F= $[-\mathbf{1}; \mathbf{1}]$ patria priamke $\boldsymbol{p}$ z Úlohy 2.

Riešenie: Do parametrického vyjadrenia priamky namiesto súradníc bodu X dosadím súradnice bodu E:

$$5 = 1 + 2t,$$
$$0 = 2 - 1t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Potom vyjadrím z prvej rovnice parameter: $t = 2$. Podobne z druhej rovnice $t = 2$. Platí $t = t$, teda bod E patrí priamke p.

Do parametrického vyjadrenia priamky namiesto súradníc bodu X dosadím súradnice bodu F:

$$-1 = 1 + 2t,$$
$$1 = 2 - 1t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Potom vyjadrím z prvej rovnice parameter: $t = 0$. Podobne z druhej rovnice $t = 1$. Neplatí $t = t$, teda bod F nepatrí priamke p.