Ľudovít Rozner, 4.A, Gymnázium Gelnica

Logika a množiny

Výrok – je oznamovacia veta, o ktorej vieme rozhodnúť či je pravdivá alebo nepravdivá
Axióma – tvrdenie, ktoré sa týka pojmov teórie a ktoré považujeme za pravdivé
Definícia – určenie vzťahu / výrazu na základe axióm alebo predom dokázaných viet
Úsudok – rozhodnutie o pravdivosti predpokladu
Hypotéza – nejaká veta u ktorého nevieme určiť, či pravdivostná hodnota existuje
Tvrdenie – niečo čo sa o objekte tvrdí
Pravdivostná hodnota – pravdivostnú hodnotu výroku rozumieme jeho pravdivosť alebo nepravdivosť

- pravdivosť označujeme číslom 1
- nepravdivosť označujeme symbolom 0

Logické spojky – prostriedky na získanie zložitých výrokov
–logickú spojku definujeme ako funkciu jedného alebo dvoch výrazov do množiny (0; ∞)
– 0 – znamená, že zložený výrok neplatí
– N – znamená, že zložený výrok platí

- logické spojky sú: ∧, ∨, =>, <=>

– *negácia*: operácia, ktorá zmení pravdivostnú hodnotu výroku u na opačnú, označujeme u´
(negácia nie je logická spojka)
– *konjunkcia(logický súčin)*: konjunkcia výrokov u a v je zložený výrok, ktorý označujeme u ∧ v, čítame „ u a v “, konjunkcia u ∧ v je pravdivá len vtedy, ak oba výroky u, v sú pravdivé.
– *alternatíva(disjunkcia, logický súčet)*: alternatíva (disjunkcia) výrokov u a v je zložený výrok, ktorý označujeme u ∨ v, čítame „ u alebo v “, alternatíva (disjunkcia) u ∨ v je pravdivá, ak aspoň jeden výrok u, v je pravdivý.
– *implikácia*: implikácia výrokov u a v je zložený výrok, ktorý označujeme u => v, čítame „ ak u potom v “, implikácia u => v je nepravdivá len vtedy, ak „pravda“ => „nepravda“
– *ekvivalencia*: ekvivalencia výrokov u a v je zložený výrok, ktorý označujeme u <=> v , čítame „u práve vtedy, keď v “, ekvivalencia u <=> v je pravdivá, ak u aj v majú rovnakú pravdivostnú hodnotu.

u	v	u′	v′	u ∧□ v	u ∨□ v	u => v	v => u	v′□=> u′	u <=> v
1	1	0	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	1	1	1

Vyplýva – ak z výroku u vyplýva výrok v, tak ide o implikáciu: u => v
Je ekvivalentné – dva výroky sú ekvivalentné ak sa rovnajú ich pravdivostné hodnoty

- u => v je ekvivalentné s v′ => u′ (obmena vety)

Kvantifikátory – logické symboly, ktoré používame pri logických úvahách

- *všeobecný kvantifikátor* – označujeme ho ∀, čítame „pre každý prvok množiny ...“,

– *existenčný kvantifikátor* – označujeme ho $\exists$, čítame „existuje aspoň jeden prvok množiny ...“.

Negácia výroku $\forall\, x \in M$ platí V(x) je $\exists\, x \in M$, pre ktoré neplatí V(x)

Negácia výroku $\exists\, x \in M$, pre ktoré platí V(x), je $\forall\, x \in M$ neplatí V(x).
$(\forall\, x \in R, x > 0)' = \exists\, x \in R, x \leq 0$

– Negáciu výroku tvoríme – nie je pravda, že... . V negácii výroku s kvantifikátorom sa mení $\forall$ na $\exists$ a opačne. V texte sa to prejaví takto.

Výrok	*Negácia výroku*
Každý ... je...	Existuje aspoň jeden..., ktorý nie je ...
Aspoň jeden ... je ...	Pre každý ... platí, že nie je ...
Aspoň n ... je ...	Najviac pre (n - 1) ... je ...
Najviac pre n ... je ...	Aspoň (n+1)... je ...
Práve n ... je ...	Žiaden ... alebo aspoň (n+1) ... je ...

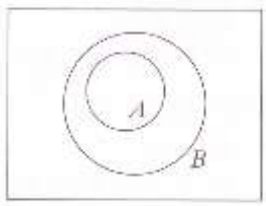
Demorganové pravidlá

negácia konjunkcie	$(A \wedge B)' = A' \vee B'$
negácia alternatívy	$(A \vee B)' = A' \wedge B'$
negácia implikácie	$(A \Rightarrow B)' = A \wedge B'$
Negácia ekvivalencie	$(A \Leftrightarrow B)' = (A \wedge B') \vee (A' \wedge B)$
	$(A')' = A$

Množina – základný pojem, je to súbor / skupina nejakých objektov, ktoré nazývame prvky množiny
– množiny označujeme veľkými písmenami abecedy A, B, C, ...
– prvky množiny označujeme malými písmenami a, b, c, ...
– skutočnosť objekt patrí do množiny zapisujeme: $a \in A$
– skutočnosť že objekt nepatrí do množiny: $a \notin A$

– množina môže byť určená - 1. vymenovaním □ prvkov
2. charakteristickou vlastnosťou Pr: $5 < x < 11$
– množina môže byť - 1. konečná – má konečný počet prvkov
2. nekonečná – má nekonečný počet prvkov

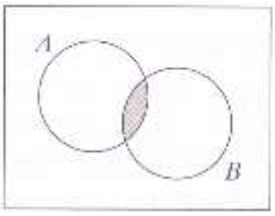
Podmnožina – hovoríme, že množina A je podmnožinou množiny B, každý prvok množiny A patrí aj B
– zapisujeme – $A \subset B$ – inklúzia množiny A na množine B



Nadmnožina – hovoríme, že množina B je nadmnožinou množiny A
– zapisujeme – B $\supset$A

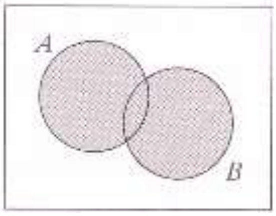
Prienik množín – Je množina všetkých prvkov, ktoré patria zároveň aj množine A aj množine B

$$\left(A \cap B = \{\forall a; a \in A \wedge a \in B\}\right).$$
$$A \cap B = \{x; x \in A \wedge x \in B\}$$



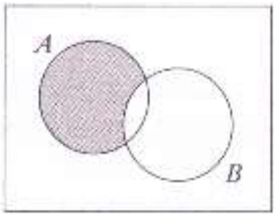
Zjednotenie množín – množina všetkých prvkov, ktoré patria množine A alebo množine B

$$\left(A \cup B = \{\forall a; a \in A \vee a \in B\}\right)$$
$$A \cup B = \{x; x \in A \vee x \in B\}$$



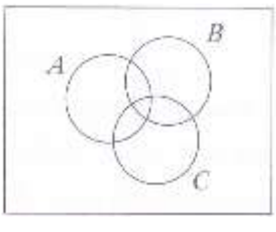
Rozdiel množín – množina všetkých prvkov, ktoré patria množine A, ale nepatria množine B

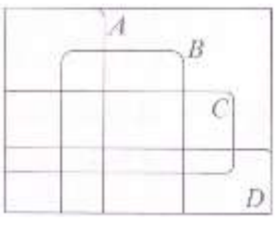
$$\left(A - B = \{\forall a; a \in A \wedge a \notin B\}\right)$$
$$A - B = \{x; x \in A \wedge x \notin B\}$$



Vennove diagramy – znázornenie množiny pomocou geometrických útvarov. Každej množine odpovedá časť roviny ohraničená uzavretou krivkou.

Príklad Vennovho diagramu pre tri a štyri množiny:





Disjunktné množiny – množiny, ktoré nemajú spoločný prienik

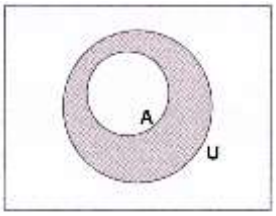
– množiny, ktorých prienik je prázdna množina

Prázdna množina – množina, ktorá neobsahuje ani jeden prvok

A = {} =□∅

Doplnok – doplnok množiny A k základnej množine Z nazývame množinu A□, ktorá obsahuje práve tie prvky zo základnej množiny Z, ktoré nepatria do množiny A

$$A' = \{x \in Z; x \notin A\}$$
$$A'_U = \{x \in U; x \notin A\}$$



Priamy dôkaz(priamy reťazec implikácií):

Ak chceme dokázať vetu P=>Z, tak priamymi implikáciami z predpokladu vyvodíme záver, P=>P_1=>P_2=>...=>Z.

Nepriamy dôkaz (náhrada pôvodnej implikácie obmenou):

Namiesto vtedy P=>Z dokážeme vetu obmenenú Z′=>P′, ktorá má vždy rovnakú pravdivostnú hodnotu ako pôvodná veta.

Dôkaz sporom – dokazujeme negáciu pôvodného tvrdenia. Pri dôkaze dôjdeme k sporu s predpokladom alebo so známou axiómou, tým je veta dokázaná.