UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH
Prírodovedecká fakulta

ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

Skoro disjunktné množiny prirodzených čísel a topologické priestory

Bc. Radka Schwartzová

Vedúci práce: RNDr. Jaroslav Šupina, PhD.

Systémy množín a disjunktnosť

Nech *I* je množina. Ak každému prvku $i \in I$ priradíme nejakú množinu A_i, tak dostávame *systém množín* $\mathcal{S}$, píšeme $\mathcal{S} = (A_i; i \in I)$.
Ak $I = \emptyset$, tak $\mathcal{S}$ je prázdny systém.

Definícia

Množiny A a B sa nazývajú disjunktné, ak

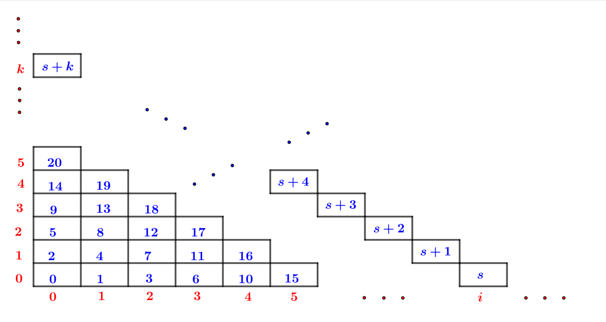
$$A \cap B = \emptyset,$$

t.j. ak majú prázdny prienik.

Párujúca funkcia

Definícia

Bijektívne zobrazenie π *množiny* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *na množine* $\mathbb{N}$ *nazývame párujúca funkcia.*



Skoro disjunktné systémy

Definícia

Nech M je ľubovoľná nekonečná spočítateľná množina, teda $|M| = \aleph_0$*. Množiny* $A, B \subseteq M$ *nazývame* ***skoro disjunktné****, ak ich prienik* $A \cap B$ *je konečný.*

Ak $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ *je systém nekonečných podmnožín* M *taký, že ľubovoľné dve množiny z* $\mathcal{A}$ *sú skoro disjunktné, tak hovoríme, že* $\mathcal{A}$ *je* ***systém skoro disjunktných množín*** *na množine M, označujeme AD-systém.*

Tvrdenie

Pre každú nekonečnú spočítateľnú množinu M existuje AD-systém $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(M)$ taký, že

$$|\mathcal{A}| = \mathfrak{c}.$$

Zoberme množinu všetkých konečných postupností $M = \{0,1\}^{<\omega}$.
Majme zobrazenie $f : \omega \to \{0,1\}$ pomocou, ktorého zadefinujme množinu konečných postupností

$$A_f = \{f \restriction n : n < \omega\}.$$

Položme funkcie f, $g \in \{0,1\}^\omega$ a najmenšie číslo k také, že $f(k) \neq g(k)$. Potom

$$A_f \cap A_g \subseteq \{f \restriction n : n \leq k\},$$

z čoho dostávame, že $\{A_f : f \in \{0,1\}^\omega\}$ je *AD-systém* s mohutnosťou $\mathfrak{c}$.

Výsledky práce

1. Terminológia a potrebné poznatky
    a. Potrebné poznatky z teórie množín
    b. Mohutnosť množín
    c. Topológia
2. Systémy množín
    a. Konečné systémy disjunktných množín
    b. Párujúca funkcia a nekonečné systémy
    c. Skoro disjunktné systémy
3. Konštrukcia topologických priestorov

Definícia

Nech $\mathcal{A}$ je nekonečný AD-systém na množine ω. Priestor $\psi(\mathcal{A})$ definujeme ako topologický priestor na množine $\omega \cup \mathcal{A}$ taký, že body množiny ω sú izolované a báza okolí v bode $A \in \mathcal{A}$ je tvorená množinami tvaru $\{A\} \cup \{A \setminus F\}$, kde $F \subseteq \omega$ je konečná podmnožina. Zároveň $\psi(\mathcal{A})$ budeme nazývať ***Mrowkov-Isbellov priestor****.*

Vlastnosti Mrowka-Isbell priestoru

Nech $\psi(\mathcal{A})$ je **Mrówkov - Isbellov priestor**, tak platia nasledovné tvrdenia:

1. Množina $\omega \subseteq \psi(\mathcal{A})$ je otvorená.
2. Nekonečný AD-systém $\mathcal{A} \subseteq \psi(\mathcal{A})$ je uzavretá množina.
3. Priestor $\psi(\mathcal{A})$ je separabilný.
4. Uzáver nekonečného AD-systému $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ je nekonečný AD-systém $\mathcal{A}_0$, t. j.
$$\overline{\mathcal{A}_0} = \mathcal{A}_0.$$
5. Mohutnosť priestoru $\psi(\mathcal{A})$ je rovná mohutnosti AD-systému $\mathcal{A}$.

Smerovanie ďalšej práce...

1. Zhrnúť konštrukcie topologických priestorov pomocou skoro disjunktných systémov.

2. Aké má vplyvy existencia nejakých skoro disjunkných systémov na vlastnosti topologických priestorov?

Zoznam použitej literatúry

- BUKOVSKÝ, L.: *Množiny a všeličo okolo nich.*, Košice: UPJŠ, 2005. ISBN 0-7097-578-4.
- ENGELKING. R.: *General topology.*,Berlin: Heldermann, 1989. ISBN 3-88538-006-4.
- BUKOVSKÝ, L.: *The structure of the real line*, Birkhäuser, 2011. ISBN 978-3-0348-005-1.
- SLEZIAK, M.: *2-UMA-115 Teória množín.*,Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2014. Dostupné tiež z: https://msleziak.com/vyuka/2014/temno/temno.pdf.
- SLEZIAK, M.: *Aplikácie teórie množín.*, Bratislava: Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2017. Dostupné tiež z: https://msleziak.com/vyuka/2017/apliktm/apliktm.pdf. 29
- HRUŠÁK, M.: *Almost disjoint families and topology*,Springer Verlag 2013. Dostupné tiež z: https://www.matmor.unam.mx/~michael/preprints_files/rpgt-hrusak.pdf.

Ďakujem za pozornosť