



## Monounárna algebra pre Bernoulliho posun

Bc. Radka Schwartzová

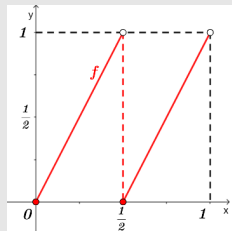
Vedúca práce: RNDr. Emília Halušková, CSc.

## Definícia

Uvažujme polouzavretý interval reálnych čísel  $I = \langle 0, 1 \rangle$ . Zobrazenie  $f: I \rightarrow I$ , s predpisom

$$f(x) = 2x \pmod{1} \text{ pre } x \in I,$$

sa nazýva **Bernoulliho posun**.



BUŠA, Ján; HNATIČ, Michal. *Chaos. Úvod do problematiky*. Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2004. ISBN 80 – 89061 – 94 – X.

## Definícia

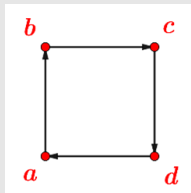
Nech  $\mathbb{N}$  je množina kladných celých čísel. Nech množina  $\mathbb{A} \neq \emptyset$  a funkcia  $f$  je funkciou z množiny  $\mathbb{A}$  do množiny  $\mathbb{A}$ . Označme  $f^1(x) = f(x)$ . Pre  $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$  definujme funkciu  $f^n$  predpisom

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) \text{ pre každé } x \in \mathbb{A}.$$

Nech  $a$  je prvok oboru hodnôt zobrazenia  $f$ . Označme

$$f^{-1}(a) = \{b \in \mathbb{A}, \text{ také, že } f(b) = a\}$$

Hovoríme, že funkcia  $f: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$  je **unárna operácia**. Dvojicu  $(\mathbb{A}, f)$  nazývame **monounárna algebra**.



Délka cyklu čísel tvaru  $\frac{1}{q}$ , kde  $q$  je prvočíslo

	$\frac{1}{q}$	Délka cyklu $n$
1.	$\frac{1}{3}$	2
2.	$\frac{1}{5}$	4
3.	$\frac{1}{7}$	3
4.	$\frac{1}{11}$	10
5.	$\frac{1}{13}$	12
6.	$\frac{1}{17}$	8
7.	$\frac{1}{19}$	18
8.	$\frac{1}{23}$	11
9.	$\frac{1}{29}$	28
10.	$\frac{1}{31}$	5
11.	$\frac{1}{37}$	36
12.	$\frac{1}{41}$	20

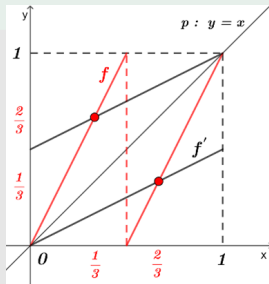
	$\frac{1}{q}$	Délka cyklu $n$
13.	$\frac{1}{43}$	14
14.	$\frac{1}{47}$	23
15.	$\frac{1}{53}$	52
16.	$\frac{1}{59}$	58
17.	$\frac{1}{61}$	60
18.	$\frac{1}{67}$	66
19.	$\frac{1}{71}$	35
20.	$\frac{1}{73}$	9
21.	$\frac{1}{83}$	82
22.	$\frac{1}{89}$	11
23.	$\frac{1}{97}$	48
24.	$\frac{1}{101}$	100

	$\frac{1}{q}$	Délka cyklu $n$
25.	$\frac{1}{103}$	51
26.	$\frac{1}{107}$	106
27.	$\frac{1}{109}$	36
28.	$\frac{1}{113}$	28
29.	$\frac{1}{127}$	7
30.	$\frac{1}{131}$	130
31.	$\frac{1}{137}$	68
32.	$\frac{1}{139}$	138
33.	$\frac{1}{149}$	148
34.	$\frac{1}{151}$	15
35.	$\frac{1}{157}$	52
36.	$\frac{1}{163}$	162

## Věta

*Množina  $\{0\}$  je jediný jednoprvkový cyklus algebry  $(I, f)$ .*

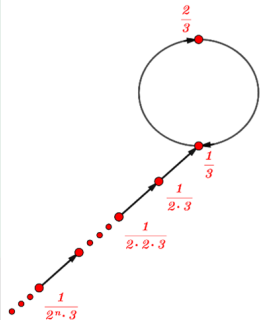
*Množina  $\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$  je jediný 2-prvkový cyklus algebry  $(I, f)$ .*



## Veta

Nech  $p$  je nepárne prirodzené číslo,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{k}{p} \in I$ . Potom:

- 1  $\frac{k}{p}$  je cyklický prvok monounárnej algebry  $(I, f)$ ,
- 2 existuje nekonečná množina  $\mathbb{A} \subset I$  taká, že
  - a)  $(\forall a \in \mathbb{A}) (\exists n \in \mathbb{N}) f^n(a) = \frac{k}{p}$ ,
  - b)  $f(\mathbb{A}) = \mathbb{A} \cup \left\{ \frac{k}{p} \right\}$ ,
  - c) funkcia  $f$  je na množine  $\mathbb{A}$  injektívna.



## Lema

Nech  $k, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p$  je nepárne,  $k < 2^n p$ ,  $k$  je nesúdeliteľné s  $2^n p$ . Potom  $\frac{k}{2^n p}$  nie je cyklický prvok algebry  $(I, f)$ .

Nech  $a \in \langle 0, 1 \rangle$  a postupnosť  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je binárny rozvoj čísla  $a$ .

## Lema

$$f(0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots |_2) = 0, a_2 a_3 a_4 a_5 \dots |_2 .$$

## Veta

Nech  $a \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $a = \frac{k}{p}$ , kde  $k, p \in \mathbb{N}$ ,  $p$  je nepárne. Ďalej nech  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je binárny rozvoj čísla  $a$ . Potom

$$a = 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_m} |_2, \text{ pre nejaké } m \in \mathbb{N}.$$

## Veta

Nech  $a \in \langle 0, 1 \rangle$ ,  $a = \frac{k}{2^n \cdot p}$ , kde  $k, n, p \in \mathbb{N}$ ,  $p \neq 1$ ,  $p$  je nepárne a  $k$  je nesúdeliteľné s číslom  $2^n p$ . Ďalej nech  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  je binárny rozvoj čísla  $a$ . Potom v algebre  $(I, f)$  číslo  $f^n(a)$  leží na cykle dĺžky  $m$  pre nejaké  $m \in \mathbb{N}$ . Ďalej platí

$$a = 0, a_1 a_2 \dots a_n \overline{a_{n+1} \dots a_{n+m}} |_2.$$



## Veta

*Nech  $a \in \langle 0, 1 \rangle$  a  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  je binárny rozvoj čísla  $a$ . Potom nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné*

- a  $a$  je racionálne číslo,*
- b existuje nezáporné celé číslo  $t$  a  $m \in \mathbb{N}$  také, že*

$$a = 0, a_1 \dots a_t \overline{a_{t+1} \dots a_m} \big|_2.$$

## Veta

*Nech  $K = \{a \in I : a \text{ je iracionálne číslo}\}$ . Potom  $(K, f_{/K})$  je monounárna algebra, ktorá neobsahuje cyklus.*



CRILLY, T.: *Matematika 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať.*, Bratislava: Slovart, 2004. ISBN 978-80-556-0294-3.



JAKUBÍKOVÁ-STUDENOVSKÁ, D.; PÓCS, J.: *Monounary algebras.*, Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2009. isbn 978-80-7097-763-7.



HALUŠKOVÁ, E.; MLYNARČÍK, P.: *On Discrete Properties of Real Functions: In Computer Algebra Systems in Teaching and Research.*, Siedlce: University of Natural Sciences a Humanities, 2021. isbn 978-83-66541-85-6.



BUŠA, J.; HNATÍČ, M.: *Chaos. Úvod do problematiky.*, Košice: Technická univerzita v Košiciach, 2004. isbn 80-89061-94-X. Dostupné tiež z: <http://people.tuke.sk/jan.busa/chaos/ChaosBusaHnatic04.pdf>.



BUKOVSKÝ, L.: *Množiny a všeličo okolo nich.*, Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2005. isbn 80-7097-578-4.

# UNIVERZITA PAVLA JOZEFA ŠAFÁRIKA V KOŠICIACH

## Prírodovedecká fakulta



ÚSTAV MATEMATICKÝCH VIED

Ďakujem za pozornosť