Goniometria V

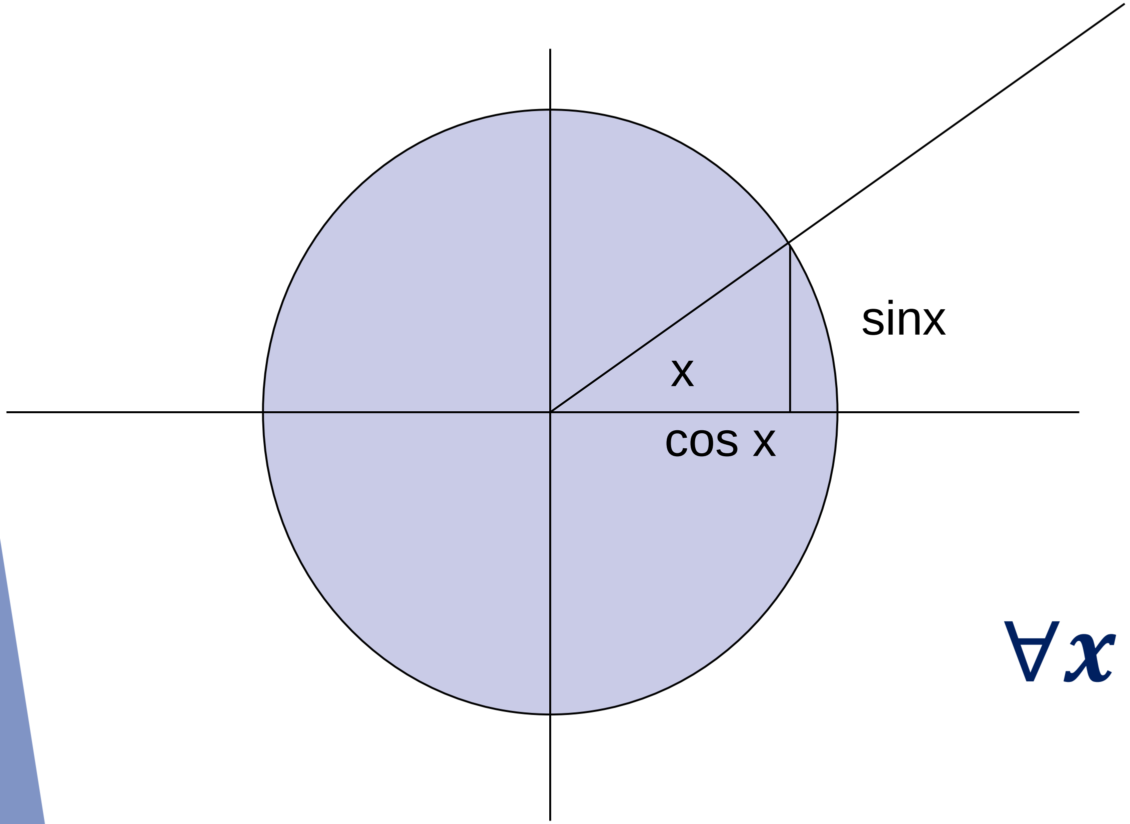
Základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami

Využitie základných vzťahov medzi goniometrickými funkciami

Na úpravu a zjednodušenie goniometrických výrazov môžeme použiť okrem iných vzťahov aj vzťahy medzi funkciami, ktoré majú rovnaký argument. Tieto vzťahy ďalej môžeme použiť i pri riešení goniometrických rovníc, či nerovníc alebo pri výpočte hodnôt goniometrických funkcií, či napr., v dôkazoch.

Pri úpravách a zjednodušovaní goniometrických výrazov určujeme a riešime podmienky pre premenné, pri ktorých má daný výraz zmysel.

Vzťah medzi funkciou sínus a kosínus



Pytagorova veta: $a^2 + b^2 = c^2$

V jednotkovej kružnici odvesny a, b predstavujú funkcie sínus a kosínus uhla x, prepona má hodnotu 1. Potom platí:

$$\forall x \in R:$$

$$sin^2 x + cos^2 x = 1$$

Vzťah medzi funkciou tangens a kotangens

$$tgx = \frac{sinx}{cosx}$$

$$P: x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in Z$$

$$cotgx = \frac{cosx}{sinx}$$

$$P: x \neq k\pi; k \in Z$$

$$\boldsymbol{tgx = \frac{1}{cotgx}}$$

$$P: x \neq k.\frac{\pi}{2}; k \in Z$$

$$\boldsymbol{tgx\,.\,cotgx = 1}$$

Príklad 1

Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $cosx = \frac{3}{5} \wedge$ uhol x nie je ostrý.

- zistíme si kvadrant $\Rightarrow$ $\boldsymbol{cosx > 0}$ v I. a IV. Kvadrante a súčasne x nie je z I. kvadrantu, pretože $x > 90° \Rightarrow \boldsymbol{x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)}$
- vypočítame sinx podľa vzťahu medzi funkciou sínus a kosínus

$$\boldsymbol{sin^2x + cosx^2 = 1}$$

$$sin^2x + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$sin^2x + \frac{9}{25} = 1/-\frac{9}{25}$$

$$sin^2x = \frac{25}{25} - \frac{9}{25}$$

$$sin^2x = \frac{16}{25}$$

$$sinx = \pm\frac{4}{5}$$

- podľa kvadrantu vyberieme správne znamienko $sinx = -\frac{4}{5}$

- dopočítame hodnotu funkcie tangens

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

- dopočítame hodnotu kotangens

$$cotgx = -\frac{3}{4}$$

Príklad 2

Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $\mathrm{tg}x = \frac{7}{24} \wedge x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

- dopočítame hodnotu kotangens

$$cotgx = \frac{24}{7}$$

- vypočítame sinx (cosx) podľa vzťahu medzi funkciou sínus a kosínus (vydelíme celú rovnicu sin^2x alebo cos^2x)

$$\boldsymbol{sin^2x + cosx^2 = 1/: sin^2x}$$

$$\frac{sin^2x}{sin^2x} + \frac{cos^2x}{sin^2x} = \frac{1}{sin^2x}$$

- vykrátime a namiesto výrazu $\frac{cos^2x}{sin^2x}$ dosadíme $cotg^2x$ a dostávame

$$1 + cotg^2x = \frac{1}{sin^2x}$$

$$1 + \left(\frac{24}{7}\right)^2 = \frac{1}{sin^2x}$$

$$\frac{49}{49} + \frac{576}{49} = \frac{1}{sin^2x}$$

$$\frac{625}{49} = \frac{1}{sin^2x}$$

$$\frac{49}{625} = \frac{sin^2x}{1}$$

$$sinx = \pm\frac{7}{25}$$

- podľa kvadrantu vyberieme správne znamienko $sinx = -\frac{7}{25}$

- zo vzťahu pre cotgx(tgx) dostávame

$$cosx = cotgx.sinx$$

$$cosx = \frac{24}{7}.\left(-\frac{7}{25}\right)$$

$$cosx = -\frac{24}{25}$$

Príklady

1. Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $\sin x = \frac{12}{13} \land x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

2. Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $\cos x = -0{,}8 \land x \in \left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$.

3. Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $\mathrm{tg} x = -\frac{4}{3} \land x \in \left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$.

4. Bez určenia uhla vypočítajte hodnoty zvyšných goniometrických funkcií, ak je dané: $\mathrm{cotg} x = \frac{8}{15} \land x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.