Zobrazenia v rovine

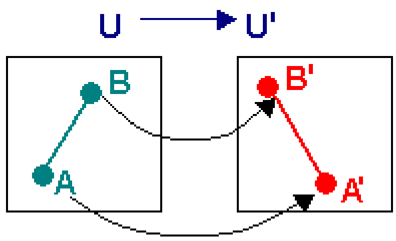
<u>Definícia :</u>

Zobrazením Z z množiny A do množiny B nazývame predpis, ktorý ***každému*** prvku **x** množiny **A** priraďuje ***práve jeden*** prvok **y** množiny **B**.
Zobrazenie v rovine priraďuje ***každému*** bodu **X** danej roviny jeden bod **Y** ležiaci v tejto rovine.
Zobrazenie je funkcia, ktorá priraďuje body bodom**.**
Zápis ***Y=Z(X)*** čítame „*zobrazenie Z priraďuje bodu X bod Y*“. Bod **X** nazývame **vzor** a bod **Y** je **obraz** bodu X v zobrazení Z.

<u>Definícia :</u>

Bod **X**, pre ktorý v danom zobrazení Z platí X=Z(X), sa nazýva ***samodružný bod*** (v zobrazení Z). Samodružný bod sa zobrazí sám na seba.
Ak pre ***všetky body X útvaru U*** platí, že ich obrazmi sú body, ktoré tiež patria do útvaru ***U***, tak útvar ***U*** nazývame ***samodružný útvar*** (v zobrazení Z).

<u>Definícia :</u>



Ak pre všetky prvky A, B útvaru U a ich obrazy A´=Z(A), B´=Z(B) v zobrazení Z platí, že ***vzdialenosť*** bodov **A**, **B** je ***rovnaká*** ako vzdialenosť ich obrazov, tak zobrazenie Z nazývame ***zhodné zobrazenie***.
Zhodné zobrazenie v rovine <u>zachováva</u> ***dĺžky úsečiek***, ***veľkosť uhlov***, ***veľkosť*** *a* ***tvar rovinných útvarov***.

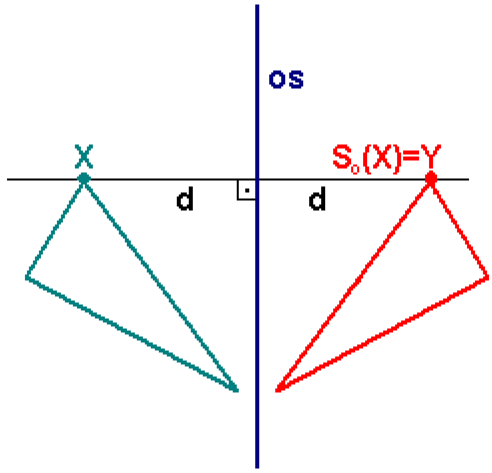
Zhodné zobrazenia v rovine sú ***identita***, ***osová súmernosť***, ***stredová súmernosť***, ***otáčanie***, ***posunutie*** a ***posunutá súmernosť***.

Každé zhodné zobrazenie v rovine je prosté a existuje k nemu inverzné zobrazenie.

<u>Definícia :</u>

Identita (označenie **I**), je zhodné zobrazenie v rovine, ktoré ***každému bodu X*** roviny priradí ***ten istý bod***, t.j. **I(X)=X**.
V tomto zobrazení je každý bod samodružným bodom a každý útvar samodružným útvarom.

Osová súmernosť

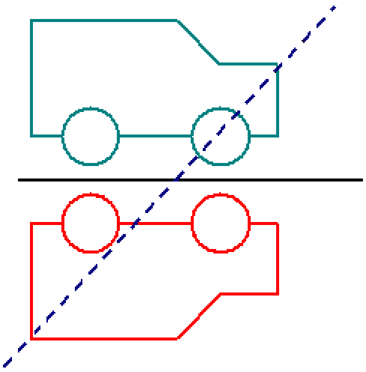


Postup pri rysovaní osovo súmerného bodu znázorňuje obrázok. Z bodu X urobíme kolmicu na os. Vzdialenosť bodu X od osi prenesieme do opačnej polroviny. Bod Y leží na kolmici na os, v rovnakej vzdialenosti od osi ako bod X, v opačnej polrovine.

Osová súmernosť s osou o sa označuje $\mathbf{S_o}$

súmernosť os súmernosti

Samodružné body osovej súmernosti ležia na osi súmernosti. Samodružné útvary musia mať aspoň jednu os súmernosti – nazývajú sa ***osovo súmerné útvary***.

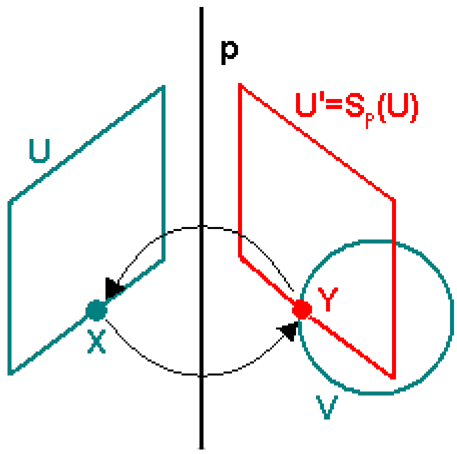


Úlohy :

1. Narysujte podobnú osovo súmernú dvojicu obrázkov ako sú obrázky vľavo. Vzor je ***zelený***, osovo súmerný útvar ***červený***, osou súmernosti je čierna priamka.
   Ako by vyzeral obraz, ak by osou súmernosti bola ***modrá čiarkovaná*** priamka ?

2. Narysujte všetky osi súmernosti priamky, úsečky, trojuholníka, štvorca, obdĺžnika, kosoštvorca, pravidelného šesťuholníka, pravidelného n - uholníka (rozlišujte párny a nepárny počet vrcholov), lichobežníka, kruhu a polkruhu.

Riešenie konštrukčných úloh pomocou osovej súmernosti



Príklad :
Dané sú útvary U a V, ktoré ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p.
Zostrojte body X a Y, pre ktoré súčasne platí :
$X \in U \wedge Y \in V \wedge Y=S_p(X)$.

Riešenie :
Nevieme, kde presne na útvare U leží bod X. Ale jeho obraz Y v osovej súmernosti s osou p bude ležať na útvare $U'=S_p(U)$. Podľa zadania úlohy má bod Y ležať zároveň na útvare V, preto platí : $Y \in U' \cap V$, t.j. bod Y je priesečníkom daného útvaru V a útvaru U', ktorý je osovo súmerný s útvarom U. Pretože osová súmernosť je sama sebe inverzným zobrazením, $X=S_p(Y)$.

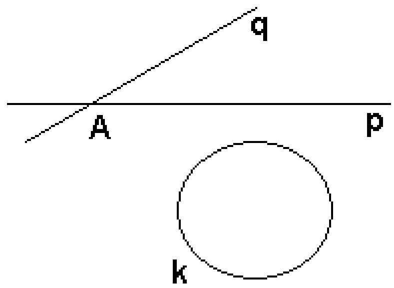
Úlohy :

3. Dané sú kružnice k a l, ktoré ležia v opačných polrovinách s hraničnou priamkou p. Zostrojte úsečku XY, pre ktorú súčasne platí : $X \in k$, $Y \in l$ a priamka p je osou súmernosti úsečky XY. Ako sa zmení riešenie tejto úlohy, ak namiesto kružnice k bude daný napr. rovnostranný trojuholník a namiesto kružnice l štvorec ?

4. Zvoľte polomery a vzájomnú polohu kružníc k, l a priamky p z predchádzajúcej úlohy tak, aby úloha a) mala 2 riešenia
b) mala 1 riešenie
c) nemala riešenie
d) mala nekonečne veľa riešení

5. Rôznobežné priamky a,b,c neprechádzajú spoločným bodom. Zostrojte úsečku BC kolmú na priamku a takú, že $B\in b$, $C\in c$ a stred úsečky BC leží na priamke a.

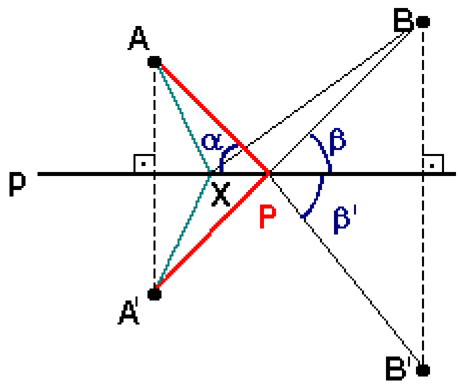
6. Dané sú rôznobežné priamky p a q, ktoré sa pretínajú v bode A a kružnica k (pozri obr.). Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC, pre ktorý súčasne platí : $B\in k$, $C\in q$ a priamka p je osou súmernosti trojuholníka ABC.



7. Dané sú rovnobežné priamky a,b a priamka c, ktorá ich pretína. Zostrojte štvorec ABCD, pre ktorý súčasne platí : $A\in a$, $C\in c$, $B,D\in b$.

8. Zostrojte trojuholník ABC, ak je dané :
a) $c = 4\text{cm}$, $\beta = 60^o$ a $a + b = 6$ cm
b) $a = 5$ cm, $b + c = 9$ cm a $v_c = 3{,}5$ cm.

Riešenie úloh o hľadaní najkratšej cesty



<u>Príklad :</u>
Daná je priamka p, body A,B ktoré ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou p, $A'=S_p(A)$, $B'=S_p(B)$ a bod $P\in p\cap AB'$ (pozri obr.).
Dokážte, že
a) pre všetky body X (rôzne od bodu P), ktoré ležia na priamke p platí : $|AX|+|XB|\geq|AP|+|PB|$
b) $\alpha=\beta$

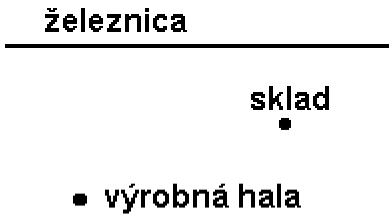
<u>Riešenie :</u>
Pretože $A'=S_p(A)$, platí $|A'X|=|AX|$ a $|A'P|=|AP|$. V trojuholníku A'BX platí trojuholníková nerovnosť : $|A'B|<|A'X|+|XB|$ => $|A'P|+|PB|<|A'X|+|XB|$ => $\mathbf{|AP|+|PB|<|AX|+|XB|}$. Rovnosť platí pre X=B. Zhodné úsečky sú označené rovnakou farbou.
Trojuholník B'BP je rovnoramenný (prečo ?), priamka p je jeho osou súmernosti => $\beta=\beta'$. Pretože uhly β' a α sú vrcholové uhly, platí $\boldsymbol{\alpha=\beta'=\beta}$.

Podľa predchádzajúceho príkladu ***osovú súmernosť*** môžeme využiť pri riešení úloh, v ktorých hľadáme ***najkratšiu cestu z bodu A ku priamke pa odt iaľ do bodu B*** (body A a B ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou p) a pri riešení fyzikálnych úloh o ***uhle dopadu a odrazu***.

Úlohy :

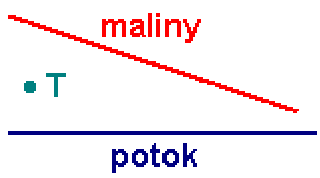
9. Zostrojte trojuholník ABC, ak sú dané body A a B, ktoré ležia v jednej polrovine s hraničnou priamkou c, pričom bod C musí ležať na priamke c a Δ ABC musí mať minimálny obvod.

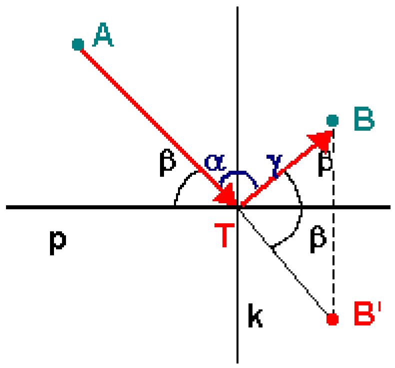
10. Nájdite miesto, kde by mala stáť stanica. Sústava ciest spájajúcich výrobnú halu, sklad a železnicu musí byť pritom čo najkratšia.



11. Nech bod A je vnútorný bod daného ostrého uhla s vrcholom V. Na ramenách tohto uhla nájdite body B,C tak, aby Δ ABC mal minimálny obvod.

12. Štyria kamaráti táboria na lúke v mieste T. Nájdite pre nich najkratšiu cestu z tábora k malinám, odtiaľ k potoku a späť do tábora. Prečo nie je najkratšou cestou spojnica tábora a miesta, v ktorom sú maliny hneď vedľa potoka ?





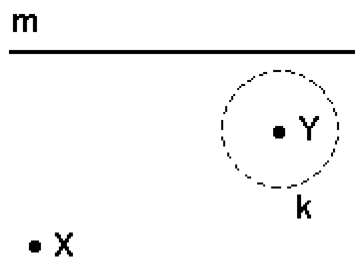
Fyzikálne úlohy o uhle dopadu a odrazu

<u>Príklad :</u>
Zostrojte dráhu svetelného lúča, ktorý vychádza zo zdroja A, odráža sa od rovinnej plochy p a prechádza bodom B.

<u>Riešenie :</u>
Zostrojíme body $B'=S_p(B)$ a $T\in BB'\cap p$. Trojuholník BB'T je rovnoramenný a priamka p je jeho osou súmernosti => všetky uhly, ktoré sú na obr. označené β sú zhodné => zhodný je aj uhol dopadu α s uhlom odrazu γ.

Úlohy :

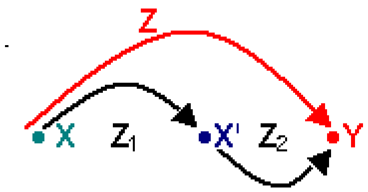
13. Hráč X chce prihrať puk spoluhráčovi Y tak, aby sa puk odrazil od mantinelu m. Hráč Y sa môže pohybovať iba vo vnútri kruhu k. Od ktorej časti mantinelu sa musí puk odraziť, aby sa prihrávka podarila ?



14. Zostrojte dráhu biliardovej gule z bodu A do bodu B tak, aby sa guľa odrazila a) od jednej steny stola
b) od dvoch susedných stien

c) od dvoch protiľahlých stien

Skladanie osových súmerností



Definícia :

Hovoríme, že **zobrazenie Z vznikne zložením zobrazení Z_1 a Z_2**, ak pre všetky body X v rovine platí, že
Y=Z(X) práve vtedy, keď X'=Z_1(X) a Y=Z_2(X').

Príklad :
Aké zobrazenie vznikne zložením dvoch osových súmerností
a) s rovnobežnými osami b) s kolmými osami c) s rôznobežnými osami ?

Riešenie :
Zložením dvoch osových súmerností s rovnobežnými osami vznikne ***posunutie***.
Zložením dvoch osových súmerností s kolmými osami vznikne ***stredová súmernosť***.
Zložením dvoch osových súmerností s rôznobežnými osami vznikne ***otáčanie***.

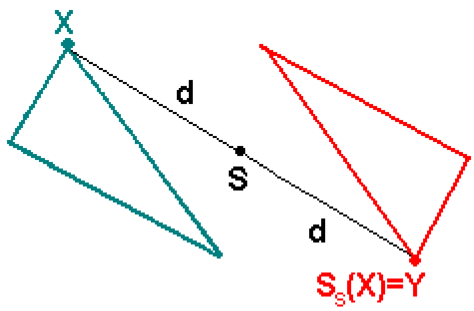
Úlohy :

1. Daný je pravouhlý trojuholník ABC (s pravým uhlom pri vrchole C), priamka x rovnobežná s preponou trojuholníka a priamka y, ktorá je
a) rovnobežná s priamkou x
b) kolmá na priamku x
c) rôznobežná (ale nie kolmá) s priamkou x

Zostrojte $\Delta A_1B_1C_1$, ktorý je obrazom Δ ABC v osovej súmernosti s osou x, potom narysujte $\Delta A_2B_2C_2$, ktorý je obrazom $\Delta A_1B_1C_1$ v osovej súmernosti s osou y.

Stredová súmernosť

Definícia :



Zhodné zobrazenie, ktoré vznikne zložením dvoch osových súmerností s ***kolmými osami*** sa nazýva **stredová súmernosť**. Priesečník osí je **stred súmernosti**.
Postup pri rysovaní stredovo súmerného útvaru je na obr.
Stredová súmernosť so stredom S sa označuje

$$S_S$$

stred súmernosti

súmernosť

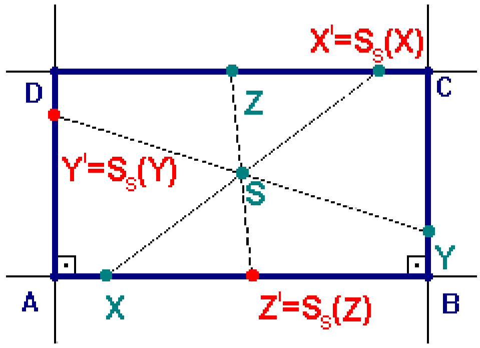
Samodružným bodom je iba stred súmernosti.

Príklad 1:
Dané sú rovnobežné úsečky AB a CD, |AB|=|CD|. Nájdite stred súmernosti S tak, aby CD=S_S(AB). Nájdite aj osi osových súmerností, zložením ktorých vznikla daná stredová súmernosť.

Riešenie :
Prvá časť úlohy má riešenie, ak D=S_S(A) a C=S_S(B). Bod S je priesečníkom priamok AD a BC. Osi osových súmerností sú ľubovoľné dve na seba kolmé priamky, ktoré sa pretí-najú v bode S. Nie je nutné, aby niektorá z týchto priamok bola rovnobežná s úsečkami AB a CD alebo kolmá na dané úsečky.

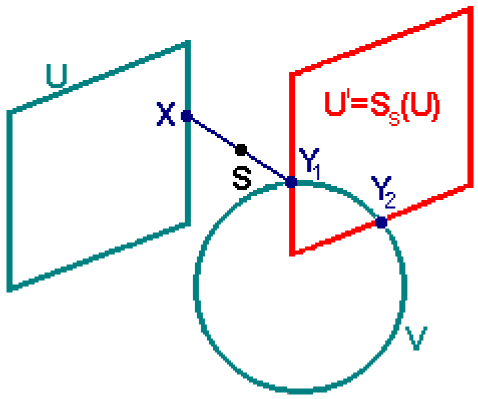
Príklad 2:
Z obdĺžnika ABCD sa zachoval iba priesečník uhlopriečok S, bod X na strane AB, bod Y na strane BC a bod Z na strane CD. Zostrojte obdĺžnik ABCD !

Riešenie :
K bodom X, Y a Z zostrojíme ich obrazy X', Y' a Z' v stredovej súmernosti so stredom S. Ak X∈AB, tak X'∈CD atď. Vrchol B je pätou kolmice z bodu Y na priamku XZ' a vrchol C je pätou kolmice z bodu Y na priamku ZX'. Vrcholy A a D môžeme tiež zostrojiť pomocou stredovej súmernosti (ako ?).



Príklad 3:
Dané sú útvary U,V a bod S, ktorý neleží na žiadnom z nich. Zostrojte body X a Y, pre ktoré súčasne platí : X∈U ΛY∈V Λ bod S je stredom úsečky XY.

Riešenie :



Nevieme, kde presne na útvare U leží bod X. Ale jeho obraz Y v stredovej súmernosti so stredom S bude ležať na útvare U'=S_S(U). Podľa zadania úlohy má bod Y ležať zároveň na útvare V, preto platí : Y∈U'∩V, t.j. bod Y je priesečníkom daného útvaru V a útvaru U', ktorý je stredovo súmerný s útvarom U. Pretože stredová súmernosť je sama sebe inverzným zobrazením, X=S_S(Y).

Úlohy :

1. Zistite, ktoré z nasledujúcich útvarov – priamka, úsečka, trojuholník, štvorec, obdĺžnik, kosoštvorec, pravidelný šesťuholník, pravidelný n-uholník (rozlišujte párny a nepárny počet vrcholov), lichobežník, kruh a polkruh – majú stred súmernosti.

2. Dané sú dve zhodné kružnice. Nájdite ich spoločný stred súmernosti ! Riešte túto úlohu pre dva zhodné obdĺžniky (trojuholníky) s rovnobežnými odpovedajúcimi stranami.

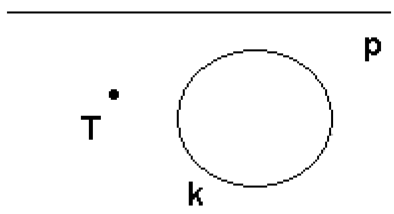
3. Zostrojte ΔABC, ak poznáte polohu vrcholu A, stredu strany a (bod X) a stredu strany b (bod Y).

4. Z kosoštvorca ABCD zostala iba priamka p, na ktorej leží uhlopriečka AC a body X,Y a Z, ktoré ležia na troch rôznych stranách kosoštvorca. Bod Z leží v opačnej polrovine s hraničnou priamkou p ako body Y a Z. Zostrojte kosoštvorec ABCD.

5. Šesťuholník ABCDEF nie je pravidelný, má však stred súmernosti S. Narysujte tento šesťuholník, ak je daný bod S a 6 rôznych bodov, z ktorých každý leží na inej strane šesť-uholníka.

6. Dané sú rôznobežné priamky p,q a bod S, ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte
a) úsečku XY takú, že $X \in p$, $Y \in q$ a bod S je stredom úsečky XY
b) štvorec ABCD tak, aby $A \in p$, $C \in q$, bod S je priesečníkom uhlopriečok štvorca.

7. Daná je priamka p, kružnica k a bod T (pozri obr.). Zostrojte štvoruholník ABCD so stredom súmernosti v bode T, pričom $A \in k$, $C \in p$ a zároveň
a) ABCD je štvorec
b) ABCD je obdĺžnik, pričom aj $B \in k$.

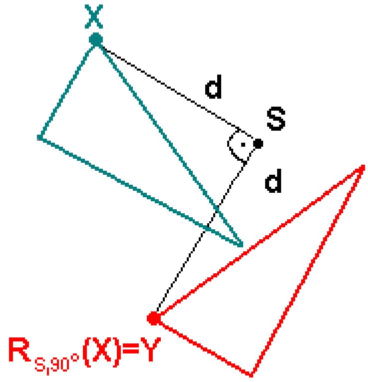


Definícia osovej a stredovej súmernosti

V rovine je daná priamka o.
Osovou súmernosťou podľa priamky o nazývame zobrazenie v rovine, pre ktoré súčasne platí :
1. ak $A \in o$, tak $S_o(A)=A$
2. ak $A \notin o$, tak $S_o(A)=B$, pričom AB je kolmá na o a stred AB leží na priamke o.

V rovine je daný bod S.
Stredovou súmernosťou so stredom S nazývame zobrazenie v rovine, ktoré každému bodu A roviny priradí bod B tak, že stredom AB je bod S.

Otočenie – rotácia



<u>Definícia :</u>

Zhodné zobrazenie, ktoré vznikne zložením dvoch osových súmerností s rôznobežnými osami sa nazýva ***otočenie*** alebo ***rotácia***. Priesečník osí S je **stred otočenia**, **uhol otočenia** je <u>dvojnásobkom uhla osí α</u>. Otočenie so stredom S o uhol α označujeme

$$\mathbf{R}_{S,\alpha}$$

uhol otočenia

rotácia   stred otočenia

Postup pri otáčaní bodu X okolo stredu S o uhol α znázorňuje obrázok.

Útvary otáčame v kladnom zmysle, t.j. proti smeru hodinových ručičiek !

Samodružným bodom otočenia je iba stred otočenia.

Samodružné útvary sú v otočení napr. kružnica a kruh – ak ich stred je zároveň stredom otočenia, uhol otočenia α môže byť ľubovoľný.

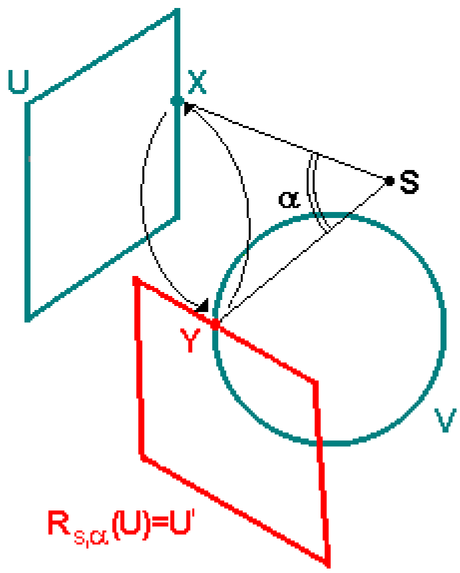
Stredová súmernosť' je ***otočením o uhol*** $\boldsymbol{\alpha = 180^o}$, pričom stred súmernosti je aj stredom otočenia.

Riešenie konštrukčných úloh pomocou <u>otočenia</u>

<u>Príklad :</u>

Dané sú útvary U,V, bod S, ktorý neleží na žiadnom z nich a uhol α. Zostrojte body X a Y tak, aby súčasne platilo :

$X \in U \wedge Y \in V \wedge |SX|=|SY| \wedge |\angle XSY| = \alpha.$



<u>Riešenie :</u>

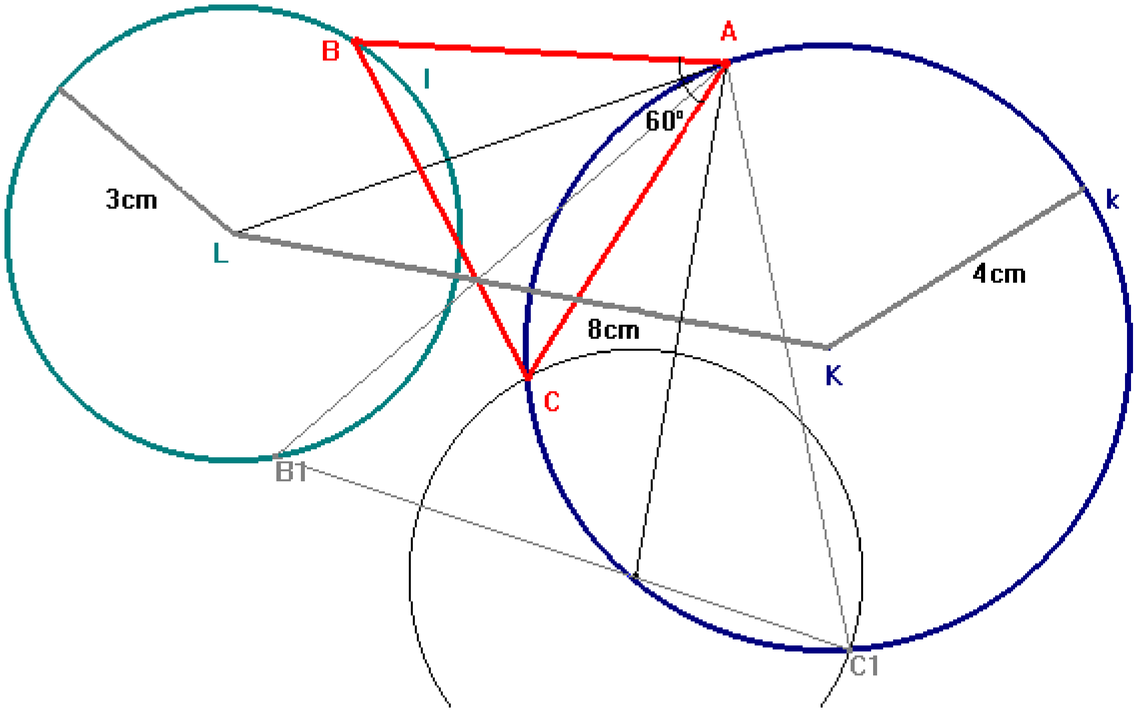
Nevieme, kde presne na útvare U leží bod X. Ale jeho obraz Y v otočení so stredom S o uhol α bude ležať na útvare $U'=R_{S,\alpha}(U)$. Podľa zadania úlohy má bod Y ležať zároveň na útvare V, preto platí že $Y \in U' \cap V$, t.j. bod Y je priesečníkom daného útvaru V a útvaru U', ktorý vznikol otoče-ním útvaru U okolo bodu S o uhol α. Bod X nájde-me tak, že otočíme bod Y okolo stredu S o uhol α v zápornom zmysle, t.j. $X=R_{S,360-\alpha}(Y)$.

<u>Príklad :</u>

Dané sú kružnice k(K,4 cm) a l(L,3 cm), |KL| = 8 cm. Bod A leží na kružnici k. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC také, že bod C leží na kružnici k a bod B leží na kružnici l.

Riešenie :

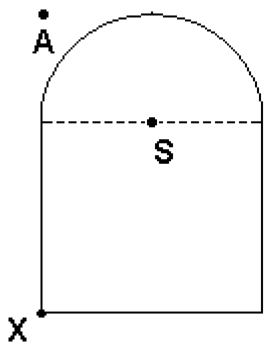
Pretože ΔABC je rovnostranný, $|AB|=|AC|$ a $\alpha = 60^o$.Bod C je preto obrazom bodu B v rotácii so stredom A, uhol otáčania je 60^o. Nepoznáme presnú polohu bodu B, vieme len že leží na kružnici l. Otočíme preto celú kružnicu l. Bod C je priesečníkom otočenej kružnice $l'=R_{S,\alpha}(l)$ na ktorej leží obraz bodu B a kružnice k. Bod B dostaneme otočením bodu C okolo stredu A o 60^o opačným smerom. Úloha má viac riešení, obrázok je na ďalšej strane.



Úlohy :

1. Daný je pravouhlý Δ ABC, a = 3 cm, b = 4 cm, c = 5 cm. Zostrojte obraz ΔABC v otočení
a) so stredom S o uhol $\varphi = 90^o$, bod S leží mimo ΔABC cca 2 cm od vrcholu A
b) so stredom A o uhol $\varphi = 120^o$
c) so stredom T o uhol $\varphi = 60^o$, bod T je ťažiskom ΔABC.

2. Narysujte útvar U zložený so štvorca a polkruhu (pozri obr.) a zostrojte jeho obraz v otočení R
a) so stredom A o uhol $\alpha = 75^o$
b) so stredom S o uhol $\beta = 90^o$
c) so stredom X o uhol $\gamma = 150^o$



3. Nájdite stred a uhol otočenia, v ktorom sú nasledujúce útvary – rovnostranný trojuholník, štvorec, pravidelný šesťuholník, obdĺžnik – samodružnými útvarmi. Narysujte dané útvary len pomocou otočenia, ak poznáme polohu stredu otočenia a jedného vrcholu útvaru.

4. Dané sú kružnice k a l rovnako ako v predchádzajúcom príklade, bod $A \in k$. Zostrojte
a) rovnoramenný ΔABC so základňou BC tak, aby $B \in l$, $C \in k$ a $\alpha = 120^o$
b) štvorec ABCD tak, aby $B \in l$ a $D \in k$.

5. Ako sa zmení riešenie časti a) úlohy 5.5, ak bod A nebude ležať na kružnici k ? Zmení sa výrazne postup konštrukcie, ak kružnice budú mať iné polomery a vzdialenosť stredov ?

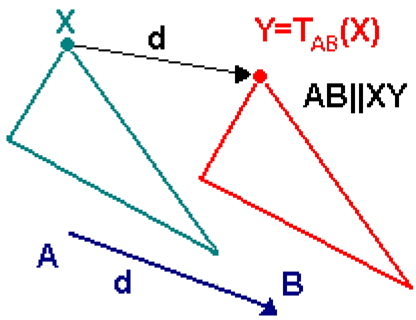
6. Dané sú dve sústredné kružnice k(S,r1) a l(S,r2>r1), bod $L \in l$. Zostrojte kosoštvorec KLMN tak, aby uhol pri vrchole L mal veľkosť 75^o, vrchol K ležal na kružnici k a vrchol M ležal na kružnici L.

7. Dané sú dve rôznobežné priamky p,q a bod S, ktorý neleží na žiadnej z nich. Zostrojte štvorec ABCD, pre ktorý súčasne platí :
a) $B \in p$, C=S a $D \in q$ b) $A \in p$, $B \in q$ a bod S je priesečníkom uhlopriečok štvorca.

Posunutie – translácia

<u>Definícia :</u>

Zhodné zobrazenie, ktoré vznikne zložením dvoch osových súmerností s rovno-bežnými rôznymi osami sa nazýva **posunutie** alebo **translácia**.
Smer posunutia je kolmý na osi, **veľkosť posunutia** je dvojnásobkom vzdialenosti osí. Posunutie je jednoznačne určené orientovanou úsečkou $\rightarrow$ (resp. vektorom), ktorá určuje veľkosť a smer posunutia – preto sa často hovorí, že **posunutie je vektor**.



Posunutie určené orientovanou úsečkou AB

označujeme T_{AB}

translácia vektor posunutia

Postup pri posúvaní bodu znázorňuje obrázok.
Posunutie nemá samodružné body.

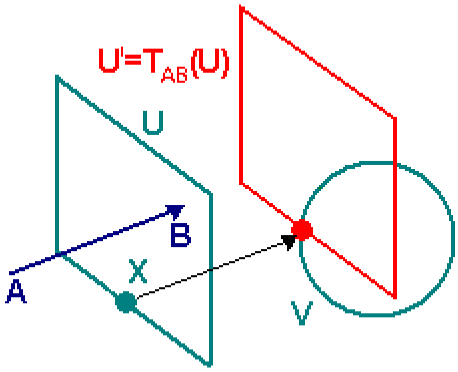
Konštrukčné úlohy riešené pomocou posunutia

Príklad :

Dané sú útvary U,V a orientovaná úsečka AB. Zostrojte body X a Y tak, aby $X\in U \wedge Y\in V \wedge$ $|XY|=|AB| \wedge XY \parallel AB$.

Riešenie :

Je zrejmé, že $Y=T_{AB}(X)$, presnú polohu bodu X na útvare U však nepoznáme. Jeho obraz – bod Y – leží na útvare $U'=T_{AB}(U)$. Podľa zadania úlohy má bod Y ležať zároveň na útvare V, preto platí že $Y\in U'\cap V$, t.j. bod Y je priesečníkom daného útvaru V a útvaru U', ktorý vznikol posunutím útvaru U. Bod X získame posunutím bodu Y o vzdialenosť |AB| opačným smerom ako je smer úsečky AB.



Úlohy :

1. Daná je kružnica k, priamka p, úsečka XY.
a) Zostrojte úsečku AB tak, aby $A\in p$, $B\in k$, $AB\parallel XY$ a $|AB|=|XY|$.
b) Zostrojte rovnobežník ABCD, ktorého dva vrcholy ležia na priamke p a ďalšie dva vrcholy ležia na kružnici k.

2. Dané sú kružnice $k(K,r_1)$ a $l(L,r_2<r_1)$.
Zostrojte úsečku XY, pre ktorú súčasne platí : $X\in k$, $Y\in l$, $XY\parallel KL$ a $|XY|=\frac{1}{2}|KL|$.
Nájdite takú polohu kružníc, aby úloha mala
a) jedno riešenie b) dve riešenia c) nemala riešenie

3. Dané sú navzájom rôznobežné priamky p,q a úsečka AB. Zostrojte
a) štvorec PQRS b) rovnostranný trojuholník PQR
tak, aby $P\in p$, $Q\in q$, $|PQ|=|AB|$ a $PQ\parallel AB$.

4. Dve miesta A a B ležia na stranách kanála, ktorého brehy sú rovnobežné priamky. Miesta treba spojiť čo najkratšou cestou, pričom most musí byť kolmý na brehy kanála. Narysuje požadovanú cestu !

Podobnosť

Definícia :

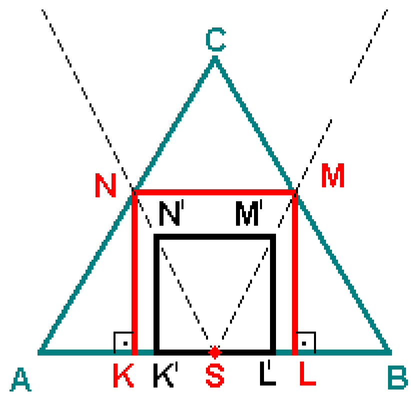
Zobrazenie P v rovine nazývame ***podobné zobrazenie = podobnosť*** práve vtedy, keď existuje kladné reálne číslo k také, že pre každé dva body X,Y roviny a ich obrazy v zobrazení P $X'=P(X)$ a $Y'=P(Y)$ platí : $|X'Y'|=k.|XY|$. Číslo ***k*** je ***koeficient podobnosti***.

Pre každé podobné zobrazenie platí :

- V každom podobnom zobrazení v rovine je obrazom úsečky úsečka, obrazom priamky je priamka, obrazom kružnice je kružnica, obrazom pravidelného n-uholníka je pravidelný n-uholník atď.
- V každom podobnom zobrazení v rovine obrazom ***uhla*** je ***uhol s ním zhodný***.
- Zložením ľubovoľných dvoch podobností P_1 a P_2 s koeficientmi k_1 a k_2 je opäť podobnosť s koeficientom $k = k_1.k_2$.

Každé zhodné zobrazenie v rovine ***je zároveň podobné*** zobrazenie s koeficientom podobnosti $\boldsymbol{k = 1}$.

Riešenie konštrukčných úloh pomocou <u>podobnosti</u>



<u>**Príklad :**</u>
Do rovnoramenného ΔABC so základňou AB vpíšte štvorec KLMN tak, že $KL \subset AB$, $M \in BC$ a $N \in AC$.

<u>Riešenie :</u>
Je zrejmé, že bod S – stred strany AB – je aj stredom strany KL. Do ΔABC vpíšeme štvorec K'L'M'N' tak, aby $K'L' \subset AB$ a bod S bol stredom úsečky K'L'. Pretože štvorce KLMN a K'L'M'N' sú nielen podobné, ale majú aj spoločný stred strany KL (resp. K'L'), tak platí : bod M je priesečníkom polpriamky SM' a strany BC a bod N je priesečníkom polpriamky SN' a strany AC. Konštrukcia bodov K a L je zrejmá z obrázku.

Úlohy :

1. Do rovnoramenného ΔABC so základňou AB vpíšte obdĺžnik KLMN tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$ a $N \in AC$. Pomer dĺžok strán obdĺžnika je $|KL|:|LM| = 1:2$.

2. Do polkruhu s priemerom AB vpíšte
a) štvorec KLMN b) obdĺžnik KLMN s pomerom strán $|KL|:|LM| = 5:3$
tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$ a $N \in AC$.

3. Ako presne rozdelíme danú úsečku XY na dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere a**:**b ? Riešte túto úlohu pre prípad, že a,b sú
a) malé prirodzené čísla b) dané úsečky.

Rovnoľahlosť – homotetia

Pri riešení úloh v predchádzajúcej kapitole sa používali podobné útvary so spoločným stredom (resp. so spoločným stredom pre riešenie dôležitých úsečiek). Pri riešení úloh ste čiastočne použili – bez toho aby ste o tom vedeli – podobné zobrazenie tzv. rovnoľahlosť.

Definícia :

Daný je pevný bod S v rovine a nenulové reálne číslo k. Množina všetkých usporiadaných dvojíc [X,Y] bodov roviny, pre ktoré súčasne platí

1. |SY|=|k|.|SX|

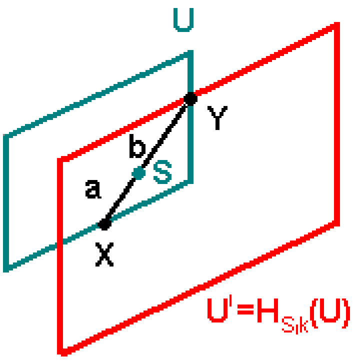
2. ak k>0, tak bod Y leží na polpriamke SX, ak k<0, tak bod Y leží na polpriamke opačnej k polpriamke SX nazývame ***rovnoľahlosť*** alebo ***homotetia***, pričom bod ***S je stredom rovnoľahlosti*** a číslo ***k je koeficientom rovnoľahlosti.***

Rovnoľahlosť so stredom S a koeficientom k označujeme $H_{S,k}$

koeficient

homotetia stred rovnoľahlosti

Riešenie konštrukčných úloh pomocou rovnoľahlosti

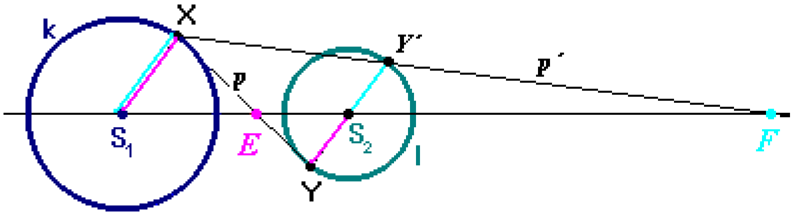


Príklad 1:
Vo vnútri útvaru U leží bod S. Zostrojte úsečku XY, ktorej krajné body X a Y ležia na obvode útvaru, pričom S∈XY a platí |XS|**:**|SY| = a**:**b.

Riešenie :
Ak pre daný pomer dĺžok úsečiek XS a SY platí a = b, tak $Y=S_S(X)$ a úsečku XY zostrojíme pomocou stredovej súmernosti so stredom S. Pre každý iný pomer je bod Y obrazom bodu X v rovnoľahlosti so stredom S a koeficientom k, k = –b/a. Pretože nepoznáme presnú polohu bodu X – leží niekde na obvode útvaru U – zostrojíme útvar U'= $H_{S,k}$(U).
Bod Y leží súčasne na útvare U' aj na U => Y∈U∩U', bod X je priesečníkom polpriamky YS a útvaru U.

Príklad 2:
Nájdite spoločný stred rovnoľahlosti dvoch kružníc.

Riešenie :
Ľubovoľné dve kružnice majú aspoň jeden spoločný stred rovnoľahlosti.
Počet stredov rovnoľahlosti závisí od vzájomnej polohy a polomerov kružníc. Na kružniciach znázorníme ***rovnobežné úsečky*** = polomery kružníc. Cez ich koncové body (nie stredy) preložíme priamku ***p (p´)***. Stredy rovnoľahlosti (na obr. body ***E***, ***F***) sú priesečníkom priamky ***p*** a priamky, na ktorej ležia stredy kružníc.
Nájdite stredy rovnoľahlosti aj v prípade, že kružnice sa dotýkajú, pretínajú, jedna kružnica leží vo vnútri druhej atď.



Úlohy :

1. K danému trojuholníku (obdĺžniku, kružnici) zostrojte jeho obraz v rovnoľahlosti $H_{S,k}$. Stred rovnoľahlosti zvoľte mimo daného útvaru (na obvode alebo vo vnútri daného útvaru), koeficient rovoľahlosti je ľubovoľné číslo k z množiny { 2; 0,5; –1,5 }.

2. Dané sú dve rovnobežné úsečky AB a CD. Nájdite všetky stredy rovnoľahlostí, ktoré zobrazia úsečku AB na úsečku CD (resp. úsečku CD na úsečku AB).

3. Ako sa nazýva zhodné zobrazenie, ktoré je zároveň rovnoľahlosťou s koeficientom
a) k = –1 b) k= 1 ?

4. Vo vnútri kružnice k leží bod T. Zostrojte úsečku XY, pre ktorú súčasne platí : $X,Y \in k$, $T \in XY$ a $|XT|:|TY|=3:2$.

5. Vo vnútri obdĺžnika ABCD leží bod K. Zostrojte úsečku MN, ktorej koncové body ležia na obvode obdĺžnika a bod K je delí na dve úsečky, ktorých dĺžky sú v pomere 1:3.

6. Dané sú dve kružnice k a l, ktoré sa pretínajú. Jeden z priesečníkov je bod A. Zostrojte obdĺžnik ABCD taký, že $B \in k$, $D \in l$ a $|AB|=2.|AD|$.

Spoločné dotyčnice dvoch kružníc prechádzajú cez ich spoločné stredy rovnoľahlosti.

7. Daná je kružnica k a bod A, ktorý neleží na kružnici k. Zostrojte dotyčnicu kružnice k z bodu A. Na vyriešenie tejto úlohy nie sú potrebné žiadne vedomosti o podobných alebo zhodných zobrazeniach v rovine.

8. Zostrojte spoločné dotyčnice dvoch kružníc. Úlohu riešte pre rôzne vzájomné polohy a polomery kružníc.

9. Odvoďte vzorec na výpočet koeficientu rovnoľahlosti dvoch kružníc, ak poznáte ich polomery a vzdialenosť stredov.