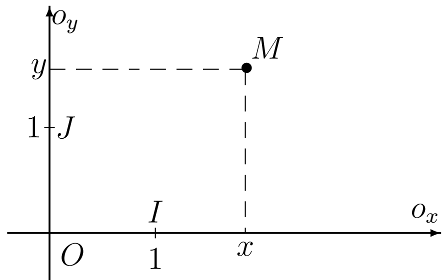
ANALYTICKÁ GEOMETRIA

Pravouhlá sústava súradníc v rovine

Budeme sa zaoberať **pravouhlou sústavou súradníc v rovine** (pozri obrázok), v ktorej sú priamky OI a OJ (tzv. ***x*-ová** a ***y*-ová** os súradníc) navzájom kolmé a úsečky OI a OJ zhodné. Obvyklým spôsobom zavedieme na obidvoch priamkach OI a OJ sústavu súradníc so začiatkom O a jednotkovými bodmi I a J.



Pravouhlá súradnicová sústava v rovine

Každému bodu M roviny priradíme usporiadanú dvojicu reálnych čísel $[x; y]$, kde x je súradnica kolmého priemetu bodu M na x-ovú os a y je súradnica kolmého priemetu bodu M na y-ovú os. Číslo x nazývame **prvou súradnicou bodu $\boldsymbol{M}$**, číslo y **druhou súradnicou bodu $\boldsymbol{M}$**, zapisujeme $\boldsymbol{M[x; y]}$ a čítame „bod M má súradnice x, y“. Je zrejmé, že bod O má prvú aj druhú súradnicu rovnú nule a platí $I[1; 0]$ a $J[0; 1]$ (tu sme čísla 1 a 0 oddelili bodkočiarkou, aby nedošlo k nedorozumeniu s desatinou čiarkou pri zápise reálneho čísla).

Nech body M a N majú súradnice $M[x_1; y_1]$, $N[x_2; y_2]$. Potom

a) **stred $\boldsymbol{S}$ úsečky $\boldsymbol{MN}$** má súradnice

$$S\left[\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right], \tag{1}$$

b) **vzdialenosť $\boldsymbol{|MN|}$ bodov $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$** je určená vzorcom[1]

$$|MN| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{2}$$

Je evidentné, že $|MN| = |NM|$.

Príklad 1 *Dané sú body $A[-4; -2]$, $B[-3; 5]$. Určme bod C tak, aby ležal na osi o_y a aby body A, B a C boli vrcholmi rovnoramenného trojuholník so základňou AB.*

Riešenie. Predpokladajme, že existuje bod C, ktorý je riešením úlohy. Pretože bod $C \in o_y$, tak jeho prvá súradnica je rovná nule, t. j. $C[0; y]$, kde $y \in \mathbb{R}$. Ramená trojuholníka majú mať rovnakú veľkosť, a preto musí platiť $|AC| = |BC|$. Odtiaľ vzhľadom na (2) dostávame túto rovnicu s neznámou y

$$\sqrt{(0 + 4)^2 + (y + 2)^2} = \sqrt{(0 + 3)^2 + (y - 5)^2}.$$

Jej riešením je $y = 1$. Bod C má teda súradnice $C[0; 1]$. Treba ešte overiť, či body A, B, C sú skutočne vrcholmi trojuholníka. K tomu stačí napríklad ukázať, že bod C nie je stredom úsečky AB. Súradnice stredu $S[s_1, s_2]$ úsečky AB sú na základe (1)

$$s_1 = \frac{-4 - 3}{2} = -\frac{7}{2} \qquad \text{a} \qquad s_2 = \frac{-2 + 5}{2} = \frac{3}{2}\,.$$

Pretože $[0; 1] \neq [-7/2; 3/2]$, tak bod C nie je stredom úsečky AB, a preto $C[0; 1]$ je riešením úlohy. □

[1] V tejto kapitole budeme pri vzdialenosti, veľkosti alebo dĺžke uvádzať len číselný údaj – vo všetkých úvahách je za jednotku dĺžky považovaná dĺžka úsečky OI z pravouhlej súradnicovej sústavy v rovine.

Úlohy

1. Vypočítajte dĺžku úsečky AB a určte jej stred, ak $A[-2;7]$, $B[2;4]$. $[\,|AB| = 5,\ S[0;11/2]\,]$

2. Vypočítajte vzdialenosť bodov $A[3;5]$, $B[2;2]$ a zapíšte súradnice stredu úsečky určenej týmito bodmi. $[\,|AB| = \sqrt{10},\ S[5/2;7/2]\,]$

3. Vypočítajte vzdialenosť bodov $A[-2;4]$, $B[1;0]$ a zapíšte súradnice stredu úsečky určenej týmito bodmi. $[\,|AB| = 5,\ S[-1/2;2]\,]$

4. Úsečka AB má krajný bod $A[-3;2]$ a stred $S[7;1]$. Určte jej druhý krajný bod B. $[B[17;0]]$

5. Určte druhý koncový bod úsečky, ak jej prvý koncový bod má súradnice $[5;2]$ a jej stred má súradnice $[4;7]$. Vypočítajte veľkosť danej úsečky. $[\,[3;12],\ \sqrt{104}\,]$

6. Na osi o_y určte bod B tak, aby mal od bodu $A[-6;-5]$ vzdialenosť 10. $[B_1[0;3],\ B_2[0;-13]]$

7. Na osi o_x určte taký bod, ktorý má od bodu $A[-7;4]$ vzdialenosť 5. $[\,B_1[-10;0],\ B_2[-4;0]\,]$

8. Dané sú body $A[-2;0]$, $B[4;-6]$. Určte bod C tak, aby trojuholník ABC bol rovnostranný. $[C_1[1+3\sqrt{3};-3+3\sqrt{3}],\ C_2[1-3\sqrt{3};-3-3\sqrt{3}]]$

9. Rovnoramenný trojuholník ABC má základňu AB s vrcholom $A[-2;0]$ a stredom $S[1;-3]$. Jeho vrchol C leží na osi o_x. Určte súradnice vrcholov B a C. $[B[4;-6];\ C[4;0]]$

Vektory a operácie s vektormi v rovine

Neuvedieme exaktnú definíciu vektora (je to pomerne abstraktná záležitosť), ale osvojíme si operácie s vektormi prostredníctvom orientovaných úsečiek.

O nenulových orientovaných úsečkách $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$ hovoríme, že majú ten istý smer, keď polpriamky $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$ majú ten istý smer, t. j. sú súhlasne rovnobežné. O všetkých orientovaných úsečkách, ktoré majú ten istý smer a tú istú veľkosť, hovoríme, že znázorňujú (predstavujú, vyjadrujú, reprezentujú) ten istý vektor $\boldsymbol{v}$. Nulové orientované úsečky znázorňujú nulový vektor $\mathbf{0}$. Každú orientovanú úsečku $\boldsymbol{AB}$, ktorá znázorňuje vektor $\boldsymbol{v}$, nazývame umiestnením vektora $\boldsymbol{v}$. Zápisom $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$ vyjadríme, že $\boldsymbol{AB}$ je umiestnením vektora $\boldsymbol{v}$. Bod A nazývame začiatočným a bod B koncovým bodom umiestnenia vektora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$.

Veta 1 *$\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ sú dve umiestnenia toho istého vektora práve vtedy, keď pre súradnice bodov A, B, C, D v Oxy platia rovnice vyjadrené jedinou symbolickou rovnicou*

$$D - C = B - A. \tag{3}$$

Význam tejto rovnice ozrejmíme na nasledujúcom príklade.

Príklad 2 *V sústave súradníc Oxy sú dané body $A[-3;2]$, $B[1;-3]$ a $C[0;4]$, pričom orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ je umiestnením vektora $\boldsymbol{u}$. Určme súradnice koncového bodu D umiestnenia $\boldsymbol{CD}$ vektora $\boldsymbol{u}$.*

Riešenie. Pretože $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{CD}$ sú dve umiestnenia toho istého vektora $\boldsymbol{u}$, tak pre súradnice bodov A, B, C, D platí symbolická rovnica (3). Pod ňou rozumieme dve rovnice, z ktorých prvá platí pre prvé súradnice a druhá pre druhé súradnice bodov A, B, C, D. Nech $D[d_1; d_2]$, potom (3) má tvar $d_1 - 0 = 1 + 3$ (prvé súradnice) a $d_2 - 4 = = -3 - 2$ (druhé súradnice). Odtiaľ $d_1 = 4$ a $d_2 = -1$. Koncový bod umiestnenia $\boldsymbol{CD}$ daného vektora $\boldsymbol{u}$ je $D[4; -1]$. □

Operácie s vektormi definujeme pomocou operácií s orientovanými úsečkami takto: ak $\boldsymbol{u} = = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AC}$ a $k \in \mathbb{R}$, tak

- $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ znamená vektor, ktorého jedným umiestnením je $\boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$;
- $k \cdot \boldsymbol{u}$ znamená vektor, ktorého jedným umiestnením je $k \cdot \boldsymbol{AB}$;
- $-\boldsymbol{u}$ znamená vektor, ktorého jedným umiestnením je $-\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$;
- $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ znamená vektor, ktorého jedným umiestnením je $\boldsymbol{AC} + (-\boldsymbol{AB})$.

Nech je v rovine daná pravouhlá sústava súradníc, v ktorej majú body A, B súradnice $[a_1; a_2]$, $[b_1; b_2]$. Súradnicami vektora $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{AB}$ v tejto sústave nazveme usporiadanú dvojicu čísel $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$. Zápis $\boldsymbol{v} = [b_1 - a_1; b_2 - a_2]$ čítame „vektor $\boldsymbol{v}$ má prvú súradnicu $b_1 - a_1$ a druhú súradnicu $b_2 - a_2$“ alebo krátko má súradnice $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$.

Na základe vety 1 sú súradnice každého vektora jednoznačne určené. Symbolický zápis $\boldsymbol{v} = B - A$ označuje vektor, ktorého umiestnením je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$.

Veta 2 *Ak je orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$ umiestnením vektora $\boldsymbol{u}$, tak pre súradnice bodov $A[a_1; a_2]$, $B[b_1; b_2]$ a vektora $\boldsymbol{u} = [u_1; u_2]$ platia rovnice*

$$u_1 = b_1 - a_1 \qquad a \qquad u_2 = b_2 - a_2,$$

ktoré symbolicky zapisujeme jednou rovnicou $\boldsymbol{u} = B - A$.

Je zrejmé, že súradnice u_1, u_2 ľubovoľného vektora $\boldsymbol{u}$ sa rovnajú súradniciam koncového bodu toho umiestnenia vektora $\boldsymbol{u}$, ktorého začiatočný bod je v začiatku sústavy súradníc $O[0; 0]$. Nulový vektor $\mathbf{0}$ má nulové súradnice, t. j. $\mathbf{0} = [0; 0]$.

Veta 3 *Nech $\boldsymbol{u} = [u_1; u_2]$, $\boldsymbol{v} = [v_1; v_2]$ sú vektory a $k \in \mathbb{R}$. Potom*

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{u} &= [ku_1; ku_2], \\ \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= [u_1 + v_1; u_2 + v_2]. \end{aligned}$$

Veta 4 *Pre veľkosť $|\boldsymbol{u}|$ vektora $\boldsymbol{u} = [u_1; u_2]$ platí*

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}. \tag{4}$$

Ak majú nenulové vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ umiestnenia $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AC}$, nazývame konvexný uhol BAC uhlom vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Veta 5 *Každej dvojici nenulových vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ môžeme priradiť práve jednu veľkosť ich uhla φ, ktorá spĺňa nerovnosť $0° \leqq \varphi \leqq 180°$.*[2]

[2]Exaktnejší zápis je $0 \leqq \varphi \leqq \pi$.

Ak $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú dva nenulové vektory, ktorých uhol má veľkosť φ, nazývame číslo $|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos\varphi$ skalárnym súčinom vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a zapisujeme ho $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ alebo $\boldsymbol{uv}$ alebo $\langle \boldsymbol{u};\, \boldsymbol{v} \rangle$. Ak je aspoň jeden z vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nulový, ich skalárny súčin kladieme rovný nule, t. j. $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Veta 6 *Pre skalárny súčin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ ľubovoľných dvoch vektorov $\boldsymbol{u} = [u_1; u_2]$, $\boldsymbol{v} = [v_1; v_2]$ platí*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2. \tag{5}$$

Odtiaľ ľahko vidno, že skalárny súčin spĺňa komutatívny zákon: pre ľubovoľné dva vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ je $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$.

Pre veľkosť uhla φ nenulových vektorov $\boldsymbol{u} = [u_1; u_2]$, $\boldsymbol{v} = [v_1; v_2]$ platí

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}\,. \tag{6}$$

Veta 7 *$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ práve vtedy, keď aspoň jeden z vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ je nulový, alebo keď vektory $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{v}$ sú navzájom kolmé.*

Príklad 3 *Je daný vektor $\boldsymbol{u} = [6; 8]$. Určme vektor $\boldsymbol{v}$, ktorý je kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$ a má veľkosť $|\boldsymbol{v}| = 10$.*

Riešenie. Nech hľadaný vektor $\boldsymbol{v}$ má súradnice $[v_1, v_2]$. Na základe vety 7 je $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$, a teda podľa (5) je $\boldsymbol{6v_1 + 8v_2 = 0}$. Vzhľadom na to, že $|\boldsymbol{v}| = 10$, tak z (4) vyplýva $\boldsymbol{v_1^2 + v_2^2 = 100}$. Riešením sústavy dvoch posledných rovníc je $\boldsymbol{v} = [8; -6]$ alebo $\boldsymbol{v} = [-8; 6]$. □

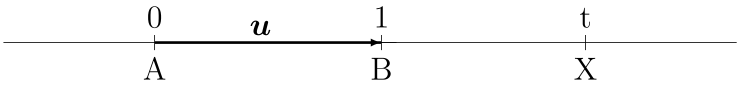
Úlohy

1. Nech $A[-2; 2]$ je začiatočný bod a $B[4; -1]$ je koncový bod vektora $\boldsymbol{v}$. Zakreslite vektor $\boldsymbol{v}$, zapíšte jeho súradnice, určte jeho veľkosť a vektor k nemu opačný.
   $[\boldsymbol{v} = [6; -3],\ |\boldsymbol{v}| = 3 \cdot \sqrt{5},\ -\boldsymbol{v} = [-6; 3]\,]$

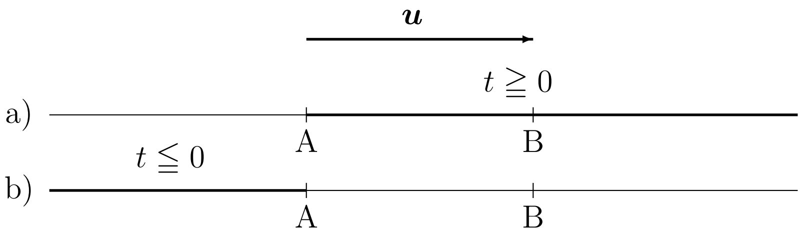
2. Určte súradnice a veľkosť vektora $\boldsymbol{v}$, ak
   a) jeho začiatočný bod má súradnice $[0; 5]$ a koncový $[2; -2]$; $[\boldsymbol{v} = [2; -7],\ |\boldsymbol{v}| = \sqrt{53}\,]$
   b) jeho začiatočný bod má súradnice $[-2; 4]$ a koncový $[3; 7]$. $[\boldsymbol{v} = [5; 3],\ |\boldsymbol{v}| = \sqrt{34}\,]$

3. Dané sú vektory $\boldsymbol{u} = [3; -2]$ a $\boldsymbol{v} = [4; 5]$. Vypočítajte
   a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$; $[\,[7; 3]\,]$
   b) $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$, $[\,[-1; -7]\,]$
   c) $4\boldsymbol{u}$, $[\,[12; -8]\,]$
   d) $3\boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v}$; $[\,[1; -16]\,]$
   e) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$. $[2]$

4. Vypočítajte veľkosť uhla vektorov $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, ak
   a) $\boldsymbol{u} = [-2; -1]$, $\boldsymbol{v} = [-1; -3]$; $[\varphi = 45°]$
   b) $\boldsymbol{u} = [3; 8]$, $\boldsymbol{v} = [-16; 6]$; $[\varphi = 90°]$
   c) $\boldsymbol{u} = [2; -3]$, $\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{u} + 13\boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a} = [0; 1]$. $[\varphi = 90°]$



Obr. 1: Priamka v rovine



Obr. 2: Úsečka AB a polpriamky v rovine

5. Sú dané body $A[1;1]$, $B[2;-1]$, $C[3;2]$. Dokážte, že ABC je trojuholník a vypočítajte veľkosti jeho vnútorných uhlov.
   $[\angle BAC = 90°; \angle ABC = \angle BCA = 45°]$

6. Sú dané vektory $\boldsymbol{u} = [2;-1]$, $\boldsymbol{v} = [1;-3]$. Určte vektor $\boldsymbol{w}$, pre ktorý platí $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w} = 7$, $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = 6$. $[\boldsymbol{w} = [3;-1]]$

7. Určte súradnice bodov C a D, ak $ABCD$ je štvorec, pričom $A[5;-1]$, $B[2;3]$ a $x_D < 5$. $[C[-2;0], D[1;-4]]$

8. Sú dané štyri body $A[0;0]$, $B[3;-4]$, $C[6;0]$, $D[3;4]$. Dokážte, že $ABCD$ je kosoštvorec. Vypočítajte veľkosť jeho strany, veľkosť vnútorného uhla BSC a veľkosti jeho uhlopriečok. [5; 90°; 6; 8]

Priamka v rovine

V tejto časti zhrnieme poznatky o tzv. **analytickom vyjadrení priamky jednou rovnicou alebo sústavami rovníc**.

Veta 8 *Ak je orientovaná úsečka* $\boldsymbol{AB}$ *umiestnením nenulového vektora* $\boldsymbol{u}$*, tak platí (obr. 1)*

a) pre každé $t \in \mathbb{R}$ *je bod* $X = A + t\boldsymbol{u}$ *bodom priamky* AB*;*

b) ku každému bodu X *priamky* AB *existuje práve jedno také* $t \in \mathbb{R}$*, že platí* $X = A + t\boldsymbol{u}$*.*

Symbolická rovnica $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$, vyjadruje jednoznačné zobrazenie množiny $\mathbb{R}$ všetkých reálnych čísel na množinu všetkých bodov priamky AB. Číslu $t = 0$ je priradený bod $X = A$ a číslu $t = 1$ bod $X = B$ (obr. 2). Intervalu $\langle 0; 1\rangle$ je priradená úsečka AB; stredu úsečky AB prislúcha číslo $t = 0{,}5$; intervalu $\langle 0; \infty)$ je priradená polpriamka $\boldsymbol{AB}$ (obr. 2 a) a intervalu $(-\infty; 0\rangle$ polpriamka opačná k polpriamke $\boldsymbol{AB}$ (obr. 2 b).

Rovnicu $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$, nazývame **parametrické vyjadrenie** alebo **parametrická rovnica priamky**; vektor $\boldsymbol{u}$ nazývame **smerový vektor priamky**, t nazývame **parameter**.

Majme v pevne zvolenej sústave súradníc body $X[x;y]$ a $A[a_1;a_2]$ a nenulový vektor $\boldsymbol{u} = [u_1;u_2]$. Rovnica $X = A + t\boldsymbol{u}$, kde $t \in \mathbb{R}$, je ekvivalentná so sústavou rovníc:

$$x = a_1 + tu_1; \quad y = a_2 + tu_2, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Túto sústavu rovníc nazývame **parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach**.

Poznámka 1 *Pripomíname, že ľubovoľný nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ a ľubovoľný bod A určujú práve jednu priamku, ktorej parametrická rovnica je $X = A + t\boldsymbol{u}$, $t \in \mathbb{R}$ (na jej označenie budeme používať aj skrátený zápis $p(A, \boldsymbol{u})$). Ale pevná* **priamka $\boldsymbol{p}$ nemá jednoznačne určenú parametrickú rovnicu***: bod A môžeme voliť ľubovoľne tak, aby $A \in p$ a nenulový vektor $\boldsymbol{u}$ tak, aby existovalo umiestnenie vektora $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{BC}$, kde $B \in p$, $C \in p$.*

Príklad 4 *Overme, či body $C[1; 11]$, $D[3; 2]$ ležia na priamke, ktorá je určená bodom $A[-5; 7]$ a smerovým vektorom $\boldsymbol{u} = [3; 2]$.*

Riešenie. Na základe (7) môžeme parametrickú rovnicu $X = A + t\boldsymbol{u}$ danej priamky vyjadriť v súradniciach takto

$$x = -5 + 3t, \quad y = 7 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Bod C leží na danej priamke práve vtedy, keď existuje také reálne číslo t, že $C = A + t\boldsymbol{u}$, t. j. keď je splnená sústava rovníc (8) (za x dosadíme prvú súradnicu bodu C a za y jeho druhú súradnicu)

$$1 = -5 + 3t, \quad 11 = 7 + 2t.$$

Z prvej rovnice je $t = 2$ a z druhej $t = 2$. To znamená, že bod C leží na danej priamke. Pre bod D dostaneme sústavu rovníc

$$3 = -5 + 3t, \quad 2 = 7 + 2t.$$

Z prvej rovnice je $t = 8/3$ a z druhej $t = -5/2$. Neexistuje teda také $t \in \mathbb{R}$, ktoré spĺňa obidve rovnice, a preto bod D neleží na danej priamke (pozri vetu 8). □

Príklad 5 *Napíšme aspoň dve parametrické vyjadrenia x-ovej osi pravouhlej sústavy súradníc.*

Riešenie. Na základe poznámky 1 existuje nekonečne veľa parametrických vyjadrení ľubovoľnej priamky: stačí zvoliť jeden jej bod A a jeden jej smerový vektor $\boldsymbol{u}$. Podľa (7) pre

- $A[0; 0]$ a $\boldsymbol{u} = [1; 0]$, dostaneme vyjadrenie x-ovej os v tvare je $x = t$, $y = 0$;
- $A[1; 0]$ a $\boldsymbol{u} = [-1; 0]$ získame vyjadrenie $x = 1 - t$, $y = 0$.

Premyslite si ďalšie zápisy. Všimnite si, že vo všetkých vyjadreniach x-ovej osi má druhá rovnica tvar $y = 0$. □

Parametrické vyjadrenie priamky v súradniciach

$$x = a_1 + tu_1, \quad y = a_2 + tu_2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

obsahuje tri premenné: okrem súradníc x, y aj parameter t. Odtiaľ pre súradnice $[x; y]$ ľubovoľného bodu X danej priamky dostaneme (viete ako?)

$$u_2x - u_1y + (u_1a_2 - u_2a_1) = 0.$$

Ak označíme $u_2 = a$, $-u_1 = b$, $u_1a_2 - u_2a_1 = c$, tak dostaneme $ax + by + c = 0$.

Pod **všeobecnou rovnicou priamky v rovine** rozumieme každú rovnicu typu

$$ax + by + c = 0, \tag{9}$$

kde aspoň jedno z čísel a, b je rôzne od nuly. Súradnice $[x; y]$ každého bodu priamky spĺňajú túto rovnicu.

Poznámka 2 *Každá priamka v rovine má nekonečne veľa všeobecných rovníc: ak jedna z nich má tvar* $ax+by+c=0$*, tak ľubovoľná iná jej všeobecná rovnica má tvar* $(ka)x+(kb)y+(kc)=0$*, kde* k *je nejaké nenulové reálne číslo.*

Nech $ax+by+c=0$ je všeobecná rovnica priamky. Potom vektor $\boldsymbol{n}=[a;b]$ je nenulový a nazývame ho **normálový vektor priamky**. Je kolmý na danú priamku (a tiež kolmý na ľubovoľný jej smerový vektor).

Veta 9 *Nech priamka* p *je určená bodom* A *a smerovým vektorom* $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{0}$ *a nech* $\boldsymbol{n}$ *je ľubovoľný vektor, ktorý je kolmý na vektor* $\boldsymbol{u}$*. Potom pre každý bod* X *platí:* $X\in p$ *práve vtedy, keď* $(X-A)\cdot\boldsymbol{n}=0$*.*

Príklad 6 *Overme, či body* $C[4;9]$*,* $D[-1;2]$ *ležia na priamke, ktorá je určená bodmi* $A[0;3]$*,* $B[2;6]$*.*

Riešenie. Nech $ax+by+c=0$ je všeobecná rovnica priamky $p=AB$. Súradnice bodov A, B spĺňajú túto rovnicu, a preto čísla a, b, c vyhovujú sústave rovníc

$$A\in p:\quad a\cdot 0+b\cdot 3+c=0,$$

$$B\in p:\quad a\cdot 2+b\cdot 6+c=0.$$

Riešením tejto sústavy je $a=3k$, $b=-2k$, $c=6k$, kde k je ľubovoľné reálne číslo. Ak zvolíme $k=1$, tak dostaneme jednu z možných všeobecných rovníc danej priamky

$$3x-2y+6=0.$$

Bod C leží na tejto priamke práve vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú poslednú rovnicu. Pretože $3\cdot4-2\cdot9+6=0$, tak bod C leží na uvažovanej priamke. Pre bod D je $3\cdot(-1)-2\cdot2+6=-1\neq 0$, a preto bod D neleží na priamke. □

Príklad 7 *Rovnice* $(6-p)x+(1-2q)y+4=0$ *a* $px+2qy-1=0$ *sú v tej istej sústave súradníc rovnicami tej istej priamky. Určme konštanty* p*,* q*.*

Riešenie. Na základe poznámky 2 sú dané rovnice rovnicami tej istej priamky práve vtedy, keď existuje také nenulové číslo $k\in\mathbb{R}$, že je splnená sústava rovníc $(6-p)=p\,k$; $(1-2q)=2qk$; $4=(-1)k$ (viete prečo?). Ľahko overíme, že jej riešením je $k=-4$, $q=-1/6$, $p=-2$. □

Ak vo všeobecnej rovnici priamky $ax+by+c=0$ je koeficient

- $b\neq 0$, tak

  $$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\,.$$

  Táto rovnica určuje lineárnu funkciu premennej x. Ak označíme $-a/b=k$, $-c/b=q$, tak nadobudne tvar $y=kx+q$.

  Rovnicu $y=kx+q$, kde $k\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$, nazývame **smernicový tvar rovnice priamky**; číslo k nazývame **smernica priamky**.

- $b=0$, tak je $ax+c=0$, kde $a\neq 0$. Odtiaľ

  $$x=-\frac{c}{a}\,,$$

  čo je rovnica priamky, ktorá je rovnobežná s y-ovou osou (pre takúto priamku smernica nie je definovaná!).

Poznámka 3 *Je zrejmé, že ľubovoľná priamka p sa dá v rovine analyticky vyjadriť* **jediným spôsobom** *buď v smernicovom tvare $y = kx + q$ (ak $p \nparallel o_y$) alebo v tvare $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$ (ak $p \parallel o_y$).*

Veta 10 *Ľubovoľné dve rovnobežky majú buď rovnakú smernicu alebo obe nemajú smernicu (t. j. sú rovnobežné s osou y).*

Veta 11 *Smernica každej priamky sa rovná tangensu uhla φ, ktorý zviera táto priamka s kladnou x-ovou polosou, t. j.*

$$\textit{ak} \quad y = kx + q, \quad \textit{tak} \quad k = \operatorname{tg}\varphi. \tag{10}$$

Veta 12 *Priamka, ktorá prechádza bodmi $[x_1;\, y_1]$, $[x_2;\, y_2]$ má pre $x_1 \neq x_2$ smernicu $k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ a smernicový tvar rovnice*

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1.$$

Ak $x_1 = x_2$ a $y_1 \neq y_2$, tak rovnica priamky, ktorá týmito bodmi prechádza, je $x = x_1$ (t. j. nemá smernicu).

Ešte raz zopakujeme, že na rozdiel od parametrickej a všeobecnej rovnice priamky je smernicový tvar rovnice priamky jednoznačne určený (až na priamky rovnobežné s y-ovou osou – tie však nemajú smernicu, ale tiež majú jednoznačné vyjadrenie v tvare $x = c$, kde $c \in \mathbb{R}$). Parametrický, všeobecný alebo smernicový tvar rovnice priamky nazývame **analytické vyjadrenie priamky**. Odporúčame premyslieť si prechody od ľubovoľného typu analytického vyjadrenia priamky na ľubovoľný iný typ – pozri príklad 10 alebo 11 .

Príklad 8 *Určme smernicový tvar rovnice priamky p, ktorá prechádza bodmi $A[1;1]$, $B[-1;5]$.*

Riešenie. Úlohou je určiť také reálne čísla k a q, aby súradnice bodov A a B spĺňali rovnicu $y = kx + q$.

$$A \in p: \quad 1 = k \cdot 1 + q,$$

$$B \in p: \quad 5 = k \cdot (-1) + q.$$

Riešením tejto sústavy je $q = 3$, $k = -2$. Teda $y = -2x + 3$ je požadovaný smernicový tvar rovnice priamky p. Úlohu sme mohli riešiť aj pomocou vety 12. □

Úlohy

1. Napíšte parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu priamky AB, ak
   a) $A[1;-1]$, $B[4;0]$; [napr. $x = 1 + 3t$, $y = -1 + t$, $t \in \mathbb{R}$; $x - 3y - 4 = 0$]
   b) $A[0;2]$, $B[2;0]$. [napr. $x = 2t$, $y = 2 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$; $x + y - 2 = 0$]
   c) $A[2;5]$, $B[5;-3]$; [napr. $x = 2 + 3t$, $y = 5 - 8t$, $t \in \mathbb{R}$; $8x + 3y - 31 = 0$]
   d) $A[1;1]$, $B[2;2]$. [napr. $x = t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$; $x - y = 0$]
   e) $A[2;5]$, $B[1;0]$; [napr. $x = 2 - t$, $y = 5 - 5t$, $t \in \mathbb{R}$; $5x - y - 5 = 0$]

2. Napíšte parametrické rovnice a všeobecnú rovnicu priamky, ktorá
   a) prechádza bodom $A[2;5]$ a je rovnobežná s priamkou BC, kde $B[3;7]$, $C[-4;9]$;
   [napr. $x = 2 + 7t$, $y = 5 - 2t$, $t \in \mathbb{R}$; $2x + 7y - 39 = 0$]

b) prechádza bodom $T[2;5]$ a je rovnobežná s vektorom $\boldsymbol{a} = [1;0]$;
[napr. $x = 2 + t$, $y = 5$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad y - 5 = 0$]

c) prechádza bodom $K[-1;-1]$ a je rovnobežná s s vektorom $\boldsymbol{s} = [2;3]$.
[napr. $x = -1 + 2t$, $y = -1 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$; $\quad 3x - 2y + 1 = 0$]

3. Doplňte neznáme súradnice bodov $A[2;a]$, $B[b;-1]$, $C[c;0]$ tak, aby tieto body ležali na priamke $x = 2 - 3t$, $y = -2 - t$, $t \in \mathbb{R}$. [$a = -2$, $b = 5$, $c = 8$]

4. Sú dané body $A[3;-7]$, $B[-1;2]$. Na priamke AB určte bod C tak, aby úsečka AC bola štyrikrát menšia než úsečka AB. [$C_1[2;-19/4]$, $C_2[4;-37/4]$]

5. V pravouhlej sústave súradníc nakreslite priamku, ktorá má toto analytické vyjadrenie (dúfame, že to zvládnete aj bez uvedených výsledkov): a) $2x - 5y = 0$; b) $y = 3x - 1$; c) $x = 1$; d) $x = 1 + 2t$, $y = 2 - 4t$, $t \in \mathbb{R}$; e) $x + y + 1 = 0$; f) $x = 0$, $y = 1 + t$, $t \in \mathbb{R}$.

6. Určte všeobecné rovnice priamok, na ktorých ležia strany a výšky trojuholníka ABC, ak $A[1;1]$, $B[2;3]$, $C[-4;-3]$.
[Výsledok: strany $2x - y - 1 = 0$, $4x - 5y + 1 = 0$, $x - y + 1 = 0$, výšky $x + y - 2 = 0$, $5x + 4y - 22 = 0$, $x + 2y + 10 = 0$]

7. Určte neznáme koeficienty r, s tak, aby priamka $(3 - r)x + 12y + 2 - s = 0$ bola totožná s priamkou $3y = 2(x + 2)$. [$r = 11$, $s = 18$]

8. Pre ktoré čísla p, q, r vyjadrujú rovnice

$$px + 2qy + 1 - r = 0, \qquad (1 - p)x + (1 - 2q)y + r = 0$$

tú istú priamku? [$p = 2q$, $r = 1 - 2q$, $q \neq 0$, $q \neq 1/2$]

9. Určte druhú súradnicu bodu B tak, aby priamka, ktorá prechádza bodmi $A[-5;-1]$, $B[-2;?]$, bola rovnobežná s priamkou $y = 5x/3 + 2013$. [4]

Vzájomná poloha dvoch priamok v rovine

Ak chceme zistiť, či dve priamky, určené svojim analytickým vyjadrením v tej istej sústave súradníc, sú rovnobežné alebo rôznobežné, môžeme to zistiť napríklad tak, že hľadáme ich spoločné body. To vedie k riešeniu sústavy lineárnych rovníc.

Príklad 9 *Rozhodnime, či priamka $x + 2y - 1 = 0$ je rovnobežná alebo rôznobežná s priamkou $x = 1 - 2t$, $y = 3 + t$, $t \in \mathbb{R}$.*

Riešenie. Ak majú dané dve priamky spoločný bod $A[x_0;y_0]$, tak jeho súradnice x_0, y_0 vyhovujú rovnici $x_0 + 2y_0 - 1 = 0$ a obidvom rovniciam $x_0 = 1 - 2t_0$, $y_0 = 3 + t_0$. Ak do rovnice $x_0 + 2y_0 - 1 = 0$ dosadíme $x_0 = 1 - 2t_0$, $y_0 = 3 + t_0$, tak dostaneme

$$(1 - 2t_0) + 2(3 + t_0) - 1 = 0$$

Poslednej rovnici nevyhovuje žiadne t_0, a preto dané priamky nemajú spoločný bod. To znamená, že sú rovnobežné. □

Veta 13 *Nech $p(A, \boldsymbol{u})$ je označenie priamky p určenej bodom A a smerovým vektorom $\boldsymbol{u}$. Pre veľkosť uhla (odchýlky) α priamok $p(A, \boldsymbol{u})$, $q(B, \boldsymbol{v})$ platí*[3]

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}$$

(pripomíname, že $\alpha \in \langle 0°; 90° \rangle$ alebo presnejšie $\alpha \in \langle 0; \pi/2 \rangle$).

Veta 14 *Pre veľkosť uhla α priamok $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ platí*

$$\cos\alpha = \frac{|\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1| \cdot |\boldsymbol{n}_2|} = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\,.$$

kde $\boldsymbol{n}_1 = [a_1; b_1]$, $\boldsymbol{n}_2 = [a_2; b_2]$ sú normálové vektory daných priamok.

Veta 15 *Pre veľkosť uhla $\alpha \neq 90°$ priamok $y = k_1x + q_1$, $y = k_2x + q_2$ platí*

$$\operatorname{tg}\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|\,.$$

$\alpha = 90°$ práve vtedy, keď $1 + k_1k_2 = 0$; ak niektorá z priamok nemá smernicu, tak α určíme na základe vety 11 z geometrického významu smernice druhej priamky (ak ani táto nemá smernicu, tak $\alpha = 0°$) alebo pomocou vety 14.

Poznámka 4 *Z viet 13 až 15 ľahko nahliadneme, že dve priamky p_1 a p_2 sú na seba kolmé (t. j. ich odchýlka je $90°$) práve vtedy, keď*

- *ich smerové vektory $\boldsymbol{u_1}$ a $\boldsymbol{u_2}$ sú navzájom kolmé – t. j. skalárny súčin $\boldsymbol{u_1} \cdot \boldsymbol{u_2}$ je rovný nule;*
- *ich normálové vektory $\boldsymbol{n_1}$ a $\boldsymbol{n_2}$ sú navzájom kolmé – t. j. skalárny súčin $\boldsymbol{n_1} \cdot \boldsymbol{n_2}$ je rovný nule;*
- *ich smernice (ak existujú) k_1 a k_2 spĺňajú rovnosť $1 + k_1k_2 = 0$;*
- *smerový vektor jednej z priamok je nenulový násobok normálového vektora druhej priamky.*

Príklad 10 *Určme veľkosť uhla priamok $p_1 : 4 - 3y + 2x = 0$ a $p_2 : x = 2t,\ y = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}$.*

Riešenie. Priamka p_2 je daná v parametrickom tvare. Ak zo sústavy rovníc $x = 2t$ a $y = 1 + 2t$ „vylúčime“ parameter t, tak dostaneme jej všeobecnú rovnicu je $x - y + 1 = 0$ s normálovým vektorom $\boldsymbol{n}_2 = [1; -1]$. Normálový vektor priamky p_1 je $\boldsymbol{n}_1 = [2; -3]$. Podľa vety 14 je

$$\cos\alpha = \frac{|2 \cdot 1 + (-3) \cdot (-1)|}{\sqrt{4 + 9} \cdot \sqrt{1 + 1}} = \frac{5}{\sqrt{26}}\,.$$

Odtiaľ (pomocou kalkulačky) $\alpha \doteq 11°19'$. □

[3] Tu dochádza ku „kolízii“ s dohodnutými označeniami: v čitateli zlomku je $|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|$, čo je absolútna hodnota skalárneho súčinu vektorov $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. V menovateli napr. zápis $|\boldsymbol{u}|$ znamená označenie veľkosti vektora $\boldsymbol{u}$. Teda dve zvislé čiary $|\star|$ majú odlišný význam.

Príklad 11 *Napíšme všeobecnú rovnicu priamky, prechádzajúcu bodom $A[3; 4]$, ktorá má od priamky $x - y + 7 = 0$ odchýlku $\alpha = 45°$.*

Riešenie. Nech $y = k_1x + q_1$ je smernicový tvar hľadanej priamky p. Pretože $A \in p$, tak pre koeficienty k_1, q_1 platí

$$4 = 3k_1 + q_1.$$

Daná priamka $x - y + 7 = 0$ má smernicový tvar $y = x + 7$ a smernicu $k_2 = 1$. Podľa vety 15 je

$$\text{tg } 45° = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|.$$

Keďže tg $45° = 1$, tak odtiaľ je $|k_2 - k_1| = |1 + k_1k_2|$. Pretože $k_2 = 1$, tak musíme vyriešiť rovnicu $|1 - k_1| = |1 + k_1|$. Tá je splnená práve vtedy, keď[4]

$$1 - k_1 = 1 + k_1, \qquad \text{t. j.} \quad k_1 = 0$$

alebo keď

$$1 - k_1 = -1 - k_1, \qquad \text{t. j.} \quad k_1 \text{ neexistuje.}$$

Hodnote $k_1 = 0$ zodpovedá $q_1 = 4$. Ak k_1 neexistuje, tak hľadaná priamka je rovnobežná s y-ovou osou, a pretože má prechádzať bodom $A[3; 4]$, tak má rovnicu $x = 3$.

Úloha má dve riešenia: priamky $y = 4$ a $x = 3$. Ich zápis vo všeobecnom tvare môže byť takýto: $y - 4 = 0$ a $x - 3 = 0$. □

Úlohy

1. Rozhodnite, či dané priamky p, q sú rovnobežné alebo rôznobežné (ak sú rôznobežné, určte ich spoločný bod)
   a) $p: \ x = 5 - 7t, \ y = 3 - 14t, \ t \in \mathbb{R}; \quad q: \ x = 19 + 3t, \ y = 17 - t, \ t \in \mathbb{R};$ [rôznobežné, $[13; 19]$]
   b) p: $6x - 5y + 25 = 0; \quad q: \ x = -5 + 5t, \ y = -1 + 6t, \ t \in \mathbb{R};$ [totožné]
   c) p: $x = 15 - 7t, \ y = 23 + 3t; \quad q: \ 3x + 7y + 29 = 0;$ [rovnobežné]
   d) p: $2x - 5y + 6 = 0; \quad q: 8x + 15y + 10 = 0;$ [rôznobežné; $[-2; 0{,}4]$]
   e) p: $x + y - 5 = 0; \quad q: 2x + 2y + 3 = 0;$ [rovnobežné]
   f) p: $x + 3y - 7 = 0; \quad q: \ x = 2 + t, \ y = 1 - t, \ t \in \mathbb{R}.$ [rôznobežné; $[1; 2]$]

2. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[15; -3]$ a priesečníkom priamok $3x - 5y + 12 = 0, \quad 5x + 2y - 42 = 0.$ [$x + y - 12 = 0$]

3. V rovnici priamky $ax - 8y + 7 = 0$ určte koeficient a tak, aby táto priamka prechádzala priesečníkom priamok $3x - 5y + 4 = 0$ a $2x + 2y - 1 = 0$.
   [$a = 8$]

4. Určte rovnice strán trojuholníka ABC, ak je daný jeho vrchol $A[0; 2]$ a rovnice výšok v_b : $x + y - 4 = 0, \quad v_c : 2x - y = 0.$
   [$x - y + 2 = 0$, $x + 2y - 4 = 0$, $2x + y - 8 = 0$]

[4]Pripomíname, že $|a| = |b|$ práve vtedy, keď $a = b$ alebo $a = -b$.

5. Vypočítajte odchýlku daných dvoch priamok
   a) $p: 3x - 7 = 0$; $q: x + y + 13 = 0$; [$45°$]
   b) $p: 5x + 3y - 7 = 0$; $q: x = s,\ y = 5 + 4s$; [$45°$]
   c) p: $4x - 5 = 0$; $q:\ x = t,\ y = 7$. [$90°$]

6. Určte veľkosť uhla, ktorý zviera x-ová os súradnicovej sústavy s osou úsečky AB, kde $A[1;\ 3]$ a $B[-1;\ 5]$. [$45°$]

7. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza priesečníkom priamok $x - 7y + 13 = 0$, $7x + y - 9 = 0$ a je kolmá na priamku $3x + 4y + 2 = 0$.
   [$4x - 3y + 2 = 0$]

8. Určte všeobecnú rovnicu priamky p, ktorá prechádza stredom úsečky AB a je kolmá na priamku q, ak:
   a) $A[1; 1]$, $B[3; -1]$, $q: 3x + 2y + 1 = 0$; [$2x - 3y - 4 = 0$]
   b) $A[0; 0]$, $B[2; -2]$, $q: 2x - 3y - 11 = 0$. [$3x + 2y - 1 = 0$]

9. Napíšte rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom A tak, že má od danej priamky p odchýlku α:
   a) $A[3; -2]$, $p: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$, $\alpha = 30°$;
   [$x - 3 = 0, \quad x - \sqrt{3}y - 2\sqrt{3} - 3 = 0$]
   b) $A[0; -9]$, $p: x = \frac{7}{3},\ y = t$, $\alpha = 60°$.
   [$\sqrt{3}x - 3y - 27 = 0,\ \sqrt{3}x + 3y + 27 = 0$]

Vzdialenosť bodu od priamky

Nech priamka p a bod M ležia v rovine, v ktorej je daná pravouhlá sústava súradníc. Ak je $M[m_1; m_2]$ a priamka p má všeobecnú rovnicu $ax + by + c = 0$, tak pre vzdialenosť $|Mp|$ bodu M od priamky p platí

$$|Mp| = \frac{|am_1 + bm_2 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Ak je priamka p daná v smernicovom alebo parametrickom tvare, tak príslušné rovnice prepíšeme na všeobecný tvar a vzdialenosť $|Mp|$ určíme podľa predchádzajúceho vzorca. Úlohu môžeme riešiť aj pomocou kolmého priemetu bodu M na priamku p.

Príklad 12 *Napíšme rovnicu priamky p, ktorá je rovnobežná s priamkou $q:\ 4x+3y+2013 = 0$ a od bodu $A[2; 3]$ má vzdialenosť 4 (jednotky).*

Riešenie. Priamka p má byť rovnobežná s priamkou q, a preto môžeme za normálový vektor priamky p zobrať normálový vektor priamky q. Priamka p má teda všeobecnú rovnicu $4x + 3y + c = 0$, kde $c \in \mathbb{R}$. Z požiadavky $|Ap| = 4$ je

$$4 = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + c|}{\sqrt{4^2 + 3^2}},$$

t. j. $20 = |17 + c|$. Posledná rovnica má dve riešenia: $c_1 = 3$, $c_2 = -37$. Riešením úlohy sú priamky $4x + 3y + 3 = 0$, $4x + 3y - 37 = 0$. □

Úlohy

1. Vypočítajte vzdialenosť bodu A od priamky p pre
   a) $A=[3;5]$; $p:\ x=12+t,\ y=3-t,\ t\in\mathbb{R}$; $[7/\sqrt{2}=7\sqrt{2}/2]$
   b) $A=[1;0]$; $p:\ x=3+2t,\ y=1+t,\ t\in\mathbb{R}$; $[0]$
   c) $A=[-1;2]$; $p:\ 2x+y+13=0$; $[13/\sqrt{5}=13\sqrt{5}/5]$
   d) $A=[1;3]$; $p:\ 2x+y-5=0$. $[0]$

2. Medzi všetkými priamkami $x+y+c=0$, $c\in\mathbb{R}$, určte tú priamku, ktorá má od začiatku súradnicovej sústavy vzdialenosť 3. $[c=\pm3\sqrt{2}]$

3. Strany trojuholníka ležia na priamkach $x+y-4=0$, $3x-y=0$, $x-3y=8$. Určte jeho obsah. $[16]$

4. Určte všeobecné rovnice všetkých priamok, ktoré prechádzajú bodom $A[6;0]$ a od bodu $M[14;6]$ majú vzdialenosť
   a) 6; $[y=0,\quad 24x-7y-144=0]$
   b) 8; $[x-6=0,\quad 7x+24y-42=0]$
   c) 10; $[4x+3y-24=0]$
   d) 12. [neexistuje]

5. Určte všetky body, ktoré majú od priamky $5x+12y=0$ vzdialenosť 5 a od priamky $3x-4y=0$ vzdialenosť $39/5$.
   $[A_1[13;0], A_2[-13;0], A_3[-26/7;195/28], A_4[26/7;-195/28]]$

6. Určte smernicu k priamky $p: y=kx+5$ tak, aby táto priamka mala od bodu $O[0;0]$ vzdialenosť $\sqrt{5}$. $[k=\pm2]$

7. Určte vzdialenosť priamky $x=3+4t$, $y=3t$, $t\in\mathbb{R}$, od priamky $4y-3x-1=0$. $[2]$

8. Určte bod B, ktorý je súmerný k bodu $A[2;-1]$ vzhľadom na priamku
   a) $3x-2y+5=0$; $[B[-4;3]]$
   b) $y=3x+13$; $[B[-10;3]]$
   c) $x=t,\quad y=-5+2t,\quad t\in\mathbb{R}$. $[B=A]$

9. Určte veľkosť strany štvorca $ABCD$ s vrcholom $A[0;0]$ ak uhlopriečka BD leží na priamke $p: 6x+8y-10=0$. $[\sqrt{2}]$

10. Určte veľkosť strany rovnostranného trojuholníka ABC s vrcholom $A[-2;-1]$, ktorého strana BC leží na priamke $p: 3x+4y-12=0$.
    $[44\sqrt{3}/15]$

11. Ktoré body na osi y majú od bodu $A[-6;-5]$ vzdialenosť desať jednotiek?
    $[B_1[0;3],\ B_2[0;-13]]$

12. Ktoré body priamky $3x-4y-3=0$ majú rovnakú vzdialenosť od bodov $A[5;3]$ a $B[6;2]$?
    $[C[9;6]]$

13. Určte všeobecnú rovnicu priamky, ktorá prechádza bodom $A[6;5]$ a vytína na súradnicových osiach úseky, ktorých súčet je 22.
    $[x+y-11=0,\ 5x+6y-60=0]$

Analytické vyjadrenie kružnice v rovine

Nech je v rovine daná pravouhlá sústava súradníc Oxy. Potom každú kružnicu so stredom $S[m;\, n]$ a polomerom $r > 0$ môžeme analyticky vyjadriť práve jednou rovnicou v tvare

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2. \tag{11}$$

Túto rovnicu nazývame **stredový tvar rovnice kružnice**. Každá rovnica typu (11), kde $r > 0$, analyticky vyjadruje práve jednu kružnicu so stredom $S[m;\, n]$ a polomerom r.

Ak rozpíšeme mocniny dvojčlenov v rovnici (11), tak dostaneme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0, \tag{12}$$

kde $a = -2m$, $b = -2n$, $c = m^2 + n^2 - r^2$. Platí: rovnica (12) je analytickým vyjadrením kružnice práve vtedy, keď $a^2 + b^2 > 4c$. Potom ju nazývame **všeobecným tvarom rovnice kružnice**. Presvedčíme sa o tom tak, že v rovnici (12) „doplníme premenné x, y na štvorec".

Nech bod S má súradnice $S[m;\, n]$ a $r > 0$. Kruh so stredom S a polomerom r má analytické vyjadrenie

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 \leqq r^2$$

(t. j. súradnice x, y každého bodu kruhu spĺňajú túto nerovnicu). Nerovnica

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 > r^2$$

je analytickým vyjadrením vonkajšku kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ so stredom $S[m;\, n]$ a polomerom r.

Veta 16 *Rovnica $(x_0 - m)(x - m) + (y_0 - n)(y - n) = r^2$ je analytickým vyjadrením dotyčnice kružnice $(x-m)^2 + (y-n)^2 = r^2$ v jej bode $T[x_0;\, y_0]$.*

Príklad 13 *Napíšme rovnicu kružnice, ktorej priemerom[5] je úsečka AB, ak $A[2;\, 3]$ a $B[-4;\, 9]$.*

Riešenie. Ak úsečka AB je priemerom kružnice, tak stred úsečky je stredom $S[m; n]$ kružnice. Pre jeho súradnice podľa (1) platí

$$m = \frac{2-4}{2} = -1 \qquad \text{a} \qquad n = \frac{3+9}{2} = 6.$$

Takto $S[-1;\, 6]$. Na základe (2) pre polomer r kružnice je

$$r^2 = |AS|^2 = (-1-2)^2 + (6-3)^2 = 18.$$

Takto podľa (11) dostaneme rovnicu kružnice $(x+1)^2 + (y-6)^2 = 18$ v stredovom tvare. Jej polomer je $r = 3\sqrt{2}$. □

Príklad 14 *Určme analytické vyjadrenie kružnice v stredovom tvare, ak kružnica k prechádza bodmi $A[3;\, -2]$, $B[2;\, -9]$, $C[9;\, -2]$.*

[5] Tu pod priemerom rozumieme takú tetivu kružnice, na ktorej leží jej stred.

Riešenie. Nech $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ je všeobecný tvar rovnice hľadanej kružnice k (pozri (12)). Súradnice bodov A, B, C spĺňajú túto rovnicu, a preto

$$\begin{array}{lcccl} A \in k: & 9 & + & 4 & +3a - 2b + c = 0, \\ B \in k: & 4 & + & 81 & +2a - 9b + c = 0, \\ C \in k: & 81 & + & 4 & +9a - 2b + c = 0. \end{array}$$

Riešením tejto sústavy lineárnych rovníc je $a = -12$, $b = 12$, $c = 47$, t. j.

$$k:\ x^2 + y^2 - 12x + 12y + 47 = 0.$$

Ak tu doplníme premenné x a y na štvorec, tak dostaneme

$$k:\ (x-6)^2 + (y+6)^2 = 5^2.$$

Porovnaním získanej rovnice s rovnicou (11) zistíme, že kružnica k má stred $S[6; -6]$ a polomer $r = 5$.
Skúste vyriešiť tento príklad napr. pomocou osí úsečiek AB a BC. □

Príklad 15 *Určme analytické vyjadrenie dotyčnice t ku kružnici*

$$\mathcal{K}:\ x^2 + y^2 = 13,$$

ak dotyčnica t prechádza bodom a) $A[3; -1]$; b) $B[3; 2]$; c) $C[-4; 7]$.

Riešenie.

a) Pre súradnice bodu A platí (pozri analytické vyjadrenie kružnice $\mathcal{K}$)

$$3^2 + (-1)^2 = 10 < 13,$$

a preto bod A leží vo vnútri kružnice $\mathcal{K}$. Dotyčnica t neexistuje.

b) Keďže $3^2 + 2^2 = 13$, tak $B \in \mathcal{K}$. Podľa vety 16 je ($m = 0$, $n = 0$, $x_0 = 3$, $y_0 = 2$)

$$t:\ 3x + 2y - 13 = 0.$$

c) Pretože $(-4)^2 + 7^2 = 65 > 13$, tak bod C leží vo vonkajšku kružnice $\mathcal{K}$. Nech $y = kx + q$ je smernicový tvar rovnice dotyčnice t. Z podmienky $C \in t$ je

$$7 = -4k + q, \tag{13}$$

a teda smernicový tvar dotyčnice t je

$$t:\ y = kx + 4k + 7, \tag{14}$$

čo je analytické vyjadrenie všetkých priamok, na ktorých leží bod C (až na jednu – viete ktorú?) Koeficient k určíme tak, aby priamka t pretínala kružnicu $\mathcal{K}$ len v jednom bode. To nastane vtedy, keď sústava rovníc

$$y = kx + 4k + 7, \qquad 13 = x^2 + y^2$$

bude mať jediné riešenie (riešenie tejto sústavy určuje priesečník priamky t s kružnicou $\mathcal{K}$). Po dosadení za y do druhej rovnice po úpravách dostaneme

$$(1+k^2)x^2 + (8k^2+14k)x + 16k^2 + 56k + 36 = 0.$$

Táto kvadratická rovnica (x je neznáma a k je parameter) má jediné riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant je rovný nule, t. j. keď

$$(8k^2+14k)^2 - 4(1+k^2)(16k^2+56k+36) = 0.$$

Posledná rovnica má dve riešenia: $k_1 = -2/3$ a $k_2 = -18$. Na základe (13) je $q_1 = 7 + 4k_1 = 13/3$ a $q_2 = 7 + 4k_2 = -65$. Podľa (14) riešením úlohy sú dve dotyčnice

$$\begin{aligned} t_1: \quad y &= -\frac{2}{3}x + \frac{13}{3}, \\ t_2: \quad y &= -18x - 65. \end{aligned}$$

$\square$

Úlohy

1. Určte súradnice stredu a polomer kružnice či kruhu, ktorého analytické vyjadrenie je
   a) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 13 = 0$; $[S[3;4], \quad r = 2\sqrt{3}]$
   b) $x^2 + y^2 + 8y \leqq 0$; $[\mathrm{S}[0;-4], \quad r = 4]$
   c) $x^2 + y^2 + 2y + 3 = 0$; [rovnicu nesplĺňa žiadny bod]
   d) $x^2 + y^2 + 2y - 8 = 0$; $[\mathrm{S}[0;-1], \quad r = 3]$
   e) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$; $[\mathrm{S}[-2;1], \quad r = 4]$
   f) $x^2 + y^2 - x + y + \dfrac{1}{4} = 0$; $[\mathrm{S}[1/2;-1/2], \quad r = 1/2]$
   g) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 17 = 0$. $[\mathrm{S}[3;4], \quad r = 2\sqrt{2}]$

2. Určte stredovú rovnicu kružnice, ktorej priemer tvoria body
   a) $A = [-4;-1]$ a $B = [2;-1]$; $[x^2 + (y+1)^2 = 9]$
   b) $C = [-2;5]$ a $D = [-2;-3]$. $[(x+2)^2 + (y-1)^2 = 16]$

3. Aká je stredová rovnica kružnice, ktorej polomer je $r = 1$ a ktorá prechádza stredmi kružníc: $x^2 + y^2 - 2x = 0, \quad x^2 + y^2 - 2y = 0$?
   $[x^2 + y^2 = 1,\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1]$

4. Určte stredovú rovnicu kružnice, na ktorej ležia body A, B, C
   a) $A[0;2]$, $B[-2;0]$, $C[1;\sqrt{3}]$; $[x^2 + y^2 = 4]$
   b) $A[-1;1]$, $B[-2;0]$, $C[0;0]$; $[(x+1)^2 + y^2 = 1]$
   c) $A[3;1]$, $B[4;-2]$, $C[1;1]$; $[(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5]$
   d) $A[4;4]$, $B[3;5]$, $C[2;4]$; $[(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8]$
   e) $A[0;4]$, $B[1;3]$, $C[-5;-2]$. $[(x+2)^2 + (y-1)^2 = 13]$

5. Určte stredovú rovnicu kružnice, ktorá prechádza bodmi A, B a jej stred leží na danej priamke
   a) $A[0;2]$, $B[1;\sqrt{3}]$, $y = 5x$; $[x^2 + y^2 = 4]$
   b) $A[-1;1]$, $B[-2;0]$, $y = x + 1$; $[(x+1)^2 + y^2 = 1]$
   c) $A[3;1]$, $B[4;-2]$, $y = 2x - 5$; $[(x-2)^2 + (y+1)^2 = 5]$
   d) $A[3;5]$, $B[2;6]$, $2x + 3y - 4 = 0$. $[(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25]$

6. Strany trojuholníka ležia na priamkach $x + 7y - 56 = 0$, $x - 3y + 14 = 0$, $2x - y + 8 = 0$. Napíšte analytické vyjadrenie kružnice, ktorá je opísaná tomuto trojuholníku.
   $[(x-3)^2 + (y-4)^2 = 5^2]$

7. Zistite, či úsečka AB, kde $A[-3;\ 2]$, $B[2;\ 5]$, pretína kružnicu $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 15 = 0$.
   [áno]

8. Vypočítajte dĺžku tetivy, vyťatej kružnicou $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ na priamke $3x + 4y + 5 = 0$. [8]

9. Určte číslo a tak, aby priamka $x = -7 + at$, $y = 17 + t$, $t \in \mathbb{R}$, bola dotyčnicou kružnice $x^2 + y^2 = 169$. $[a \in \{12/5;\ -5/12\}]$

10. Je daný stred kružnice $S[1;2]$ a jedna jej dotyčnica $5x + 12y + 10 = 0$. Určte jej polomer.
    [3]

11. Napíšte rovnicu dotyčnice ku kružnici $x^2 + y^2 = 65$, ktorá je rovnobežná s priamkou $2x + 3y - 2013 = 0$.
    $[2x + 3y + 13\sqrt{5} = 0$ alebo $2x + 3y - 13\sqrt{5} = 0]$

12. Určte analytické vyjadrenia všetkých možných dotyčníc ku kružnici

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10,$$

    ktoré
    a) sú rovnobežné s priamkou $y = 3x + 2013$; $[y = 3x + 1,\ y = 3x - 19]$
    b) sú kolmé na priamku $y = 3x + 2013$; $[x + 3y - 3 = 0,\ x + 3y + 17 = 0]$
    c) obsahujú bod $P[4;1]$. $[3x + y - 13 = 0,\ x - 3y - 1 = 0]$

13. Úsečka je určená stredmi kružníc

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0 \quad \text{a} \quad x^2 + y^2 + 8x + 12y + 47 = 0.$$

    Určte všeobecnú rovnicu osi tejto úsečky. $[4x + 2y + 13 = 0]$

14. Určte stredovú rovnicu kružnice, ktorej priemer je daný prienikom kružníc $x^2 + y^2 = 25$ a $x^2 + y^2 - 8x - 1 = 0$. $[(x-3)^2 + y^2 = 4^2]$

15. Nájdite analytické vyjadrenie vpísanej a opísanej kružnice štvorcu $ABCD$, ak $A[5;-1]$, $B[2;3]$ a $D[1;-4]$.
    $[4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y - 15 = 0;\ x^2 + y^2 - 3x + y - 10 = 0]$

16. Určte analytické vyjadrenie opísanej a vpísanej kružnice štvorca, ktorého strany ležia na priamkach p_1: $y = x$; p_2: $y - x - 2 = 0$; p_3: $y + x = 4$; p_4: $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$.
    $[(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1;\ (x-1)^2 + (y-2)^2 = 0{,}5]$

Elipsa, hyperbola, parabola v rovine a ich dotyčnice

Neuvedieme geometrické definície elipsy, hyperboly a paraboly a ani nebudeme skúmať ich grafické znázornenie (predpokladáme, že sú čitateľovi známe). Tieto tzv. **kužeľosečky** budeme študovať prostredníctvom ich analytického vyjadrenia.

Každá elipsa, ktorá má osi rovnobežné s osami súradníc o_x, o_y a stred $S[m;\, n]$ má práve jedno analytické vyjadrenie v tzv. **stredovom tvare**

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1,$$

kde $a > 0$, $b > 0$. Každá rovnica tohto typu analyticky vyjadruje práve jednu elipsu so stredom $S[m;\, n]$. Ak je $a > b$, tak hlavná os elipsy (aj s ohniskami) veľkosti $2a$ leží na priamke $y = n$ a vedľajšia na priamke $x = m$ (jej veľkosť je $2b$). Ak je $a < b$, tak hlavná os veľkosti $2b$ leží na priamke $x = m$ a vedľajšia na priamke $y = n$ (jej veľkosť je $2a$). Ak $a = b$, je elipsa kružnicou so stredom $S[m;\, n]$ a polomerom $r = a = b$. Pre výstrednosť (excentricitu) elipsy platí

$$e = \sqrt{|a^2 - b^2|}.$$

Každá hyperbola, ktorá má stred $S[m;\, n]$, veľkosť hlavnej polosi a, excentricitu e a veľkosť vedľajšej polosi $b = \sqrt{e^2 - a^2}$ a ktorej hlavná os je rovnobežná:

- s osou o_x má práve jedno analytické vyjadrenie

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1;$$

- s osou o_y má práve jedno analytické vyjadrenie

$$\frac{(y-n)^2}{b^2} - \frac{(x-m)^2}{a^2} = 1.$$

Každá z dvoch posledných rovníc vyjadruje práve jednu hyperbolu s vyššie uvedenými charakteristikami.

Ak je hlavná os hyperboly rovnobežná s priamkou $y = x$, resp. $y = -x$ a $b = a$ (tzv. rovnoosá hyperbola), tak má práve jedno analytické vyjadrenie

$$2(x-m)(y-n) = a^2, \qquad \text{resp.} \qquad 2(x-m)(y-n) = -a^2.$$

Kružnice, elipsy a hyperboly nazývame **stredové krivky druhého stupňa** alebo **stredové kužeľosečky**. Ich analytické vyjadrenia, v ktorých vystupujú súradnice stredu nazývame **rovnice v stredovom tvare**. Všetky rovnice stredových kužeľosečiek, ktorých osi sú rovnobežné s osami súradníc, môžeme zapísať v tvare

$$\pm p^2(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^2 = \pm s^2$$

(premyslite si význam čísel p, q, s pri jednotlivých typoch stredových kužeľosečiek). Ak má stredová kužeľosečka analytické vyjadrenie

$$\pm p^2(x-m)^2 \pm q^2(y-n)^2 = \pm s^2,$$

tak jej dotyčnica t v jej bode $T[x_0;\, y_0]$ má rovnicu

$$\pm\, p^2(x_0-m)(x-m) \pm q^2(y_0-n)(y-n) = \pm s^2. \tag{15}$$

Každá parabola, ktorá má vrchol $V[m;\, n]$, parameter $p \neq 0$ a os rovnobežnú

- s osou o_y má analytické vyjadrenie $2p(y-n) = (x-m)^2$,
- s osou o_x má analytické vyjadrenie $2p(x-m) = (y-n)^2$.

Každá z posledných dvoch rovníc je analytickým vyjadrením práve jednej paraboly s vyššie uvedenými charakteristikami. Odporúčame čitateľovi, aby si premyslel znázornenie parabol v súradnicovej sústave, a to zvlášť pre prípad $p > 0$ a pre $p < 0$. Analytické vyjadrenie dotyčnice paraboly uvedieme pre prípad, keď vrchol paraboly V má súradnice $[0; 0]$: ak má parabola rovnicu $2py = x^2$, resp. $2px = y^2$, a ak $T[x_0; y_0]$ je jej bodom, tak dotyčnica paraboly v bode T má rovnicu

$$p(y + y_0) = x_0 x, \qquad \text{resp.} \qquad p(x + x_0) = y_0 y.$$

Pritom každá rovnica $p(y + y_0) = x_0 x$, resp. $p(x + x_0) = y_0 y$, kde $p \neq 0$, je analytickým vyjadrením dotyčnice paraboly $2py = x^2$, resp. $2px = y^2$ v bode $T[x_0; y_0]$ paraboly.

Príklad 16 *Je daná priamka* $4x + 5y - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$, *a elipsa* $9x^2 + 25y^2 =$ $= 900$. *Urobme diskusiu vzájomnej polohy danej priamky a danej elipsy v závislosti od parametra* a.

Riešenie. Súradnice prípadných spoločných bodov danej priamky a elipsy spĺňajú sústavu rovníc

$$\begin{aligned} 4x + 5y - a &= 0, \\ 9x^2 + 25y^2 &= 900. \end{aligned}$$

Urobíme diskusiu o jej riešení v závislosti na parametri a. Z prvej rovnice je $y = (a - 4x)/5$. Po dosadení za y do druhej rovnice a po úprave dostaneme

$$25x^2 - 8ax + a^2 - 900 = 0.$$

Pre diskriminant tejto kvadratickej rovnice je $D = 36(2500 - a^2)$. Môžu nastať tri prípady

a) $D > 0$, t. j. $a \in (-50; 50)$. Vtedy kvadratická rovnica má v $\mathbb{R}$ dva rôzne korene a daná priamka pretína danú elipsu v dvoch bodoch – je jej sečnicou;

b) $D = 0$, t. j. $a = \pm 50$. Kvadratická rovnica má v $\mathbb{R}$ jeden koreň a daná priamka je dotyčnicou danej elipsy;

c) $D < 0$, t. j. $a \in (-\infty; -50) \cup (50; +\infty)$. Kvadratická rovnica nemá v $\mathbb{R}$ koreň a daná priamka nepretína danú elipsu. □

Príklad 17 *Určme súradnice priesečníkov hyperboly, pre ktorú* $a = b$, *a kružnice, ktorej polomer je rovný excentricite danej hyperboly, ak stredy obidvoch kužeľosečiek majú súradnice* $[0; 0]$. *Aká je odchýlka dotyčníc k daným kužeľosečkám v ich priesečníku?*

Riešenie. Daná hyperbola má analytické vyjadrenie $x^2 - y^2 = a^2$, $a > 0$. Pre polomer kružnice platí: $r^2 = e^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$. To znamená, že kružnica je daná rovnicou $x^2 + y^2 = 2a^2$. Súradnice priesečníkov daných kužeľosečiek dostaneme riešením sústavy rovníc

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= a^2, \\ x^2 + y^2 &= 2a^2. \end{aligned}$$

Tejto sústave rovníc vyhovujú štyri dvojice (overte!):

$$\left[a\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right], \quad \left[a\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{-a}{\sqrt{2}}\right], \quad \left[-a\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{a}{\sqrt{2}}\right], \quad \left[-a\sqrt{\frac{3}{2}}; \frac{-a}{\sqrt{2}}\right]$$

Odchýlky dotyčníc ku kužeľosečkám v týchto bodoch sú rovnaké. Určíme ich odchýlku v bode $P\left[a\sqrt{3/2}; a/\sqrt{2}\right]$. Dotyčnica ku kružnici $\mathcal{K}$ v bode P má podľa (15) všeobecnú rovnicu $a\sqrt{3/2}\,x + (a/\sqrt{2})\,y = 2a^2$, t. j.

$$t_{\mathcal{K}}: \quad \sqrt{6}x + \sqrt{2}y - 4a = 0.$$

Dotyčnica k hyperbole $\mathcal{H}$ v bode P má opäť na základe (15) vyjadrenie vo všeobecnom tvare $a\sqrt{3/2}\,x - (a/\sqrt{2})\,y = a^2$, t. j.

$$t_{\mathcal{H}}: \quad \sqrt{6}x - \sqrt{2}y - 2a = 0.$$

Odchýlku α dotyčníc $t_{\mathcal{K}}$ a $t_{\mathcal{H}}$ určíme podľa vety 14

$$\cos\alpha = \frac{\left|\sqrt{6}\sqrt{6} + \sqrt{2}(-\sqrt{2})\right|}{\sqrt{(\sqrt{6})^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{(\sqrt{6})^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{1}{2}.$$

Odtiaľ $\alpha = 60°$. □

Príklad 18 *Určme analytické vyjadrenie priamky, ktorá prechádza dvomi bodmi $A[2; y > 0]$, $B[18; y < 0]$ ležiacimi na parabole $y^2 = 8x$.*

Riešenie. Pre druhú súradnicu bodu A platí: $y^2 = 8 \cdot 2 = 16$, t. j. $y = 4$. Pre bod B je $y^2 = 8 \cdot 18 = 144$, odkiaľ $y = -12$. Teda $A[2; 4]$ a $B[18; -12]$. Odporúčame čitateľovi, aby sa presvedčil, že priamka AB má rovnicu $x + y - 6 = 0$. □

Úlohy

1. Napíšte rovnicu elipsy, ktorej osi ležia na osiach súradníc o_x, o_y, a ktorá prechádza bodmi $A[8; 3]$, $B[6; 4]$. $[x^2 + 4y^2 = 100]$

2. Zistite, či existuje elipsa so stredom $S[3; 1]$, s osami rovnobežnými s osami súradníc, prechádzajúca bodmi $A[-2; 0]$ a $B[0; 2]$. [nie]

3. Zistite vzájomnú polohu danej priamky p a danej hyperboly $\mathcal{H}$:

   a) p: $x = 3 - t,\ y = -1 + t,\ t \in \mathbb{R}$;
   $\mathcal{H}$: $9x^2 - 4y^2 = 36$; [priesečníky $P[-5{,}2; 7{,}2]$, $Q[2; 0]$]

   b) p: $x - y - 2 = 0$, $\mathcal{H}$: $x^2 - 4y^2 = 7$; [nepretínajú sa]

   c) p: $2x - y - 8 = 0$, $\mathcal{H}$: $8x^2 - 18y^2 = 144$.
   [p je dotyčnicou $\mathcal{H}$ v bode $T[4{,}5; 1]$]

4. Určte veľkosť tetivy, ktorú vytína daná kužeľosečka na danej priamke

a) $y^2 = 8x$, $y - x + 2 = 0$; [16]

b) $x^2 + y^2 = 25$, $\quad x = 5 + 3t$, $y = 4t$, $t \in \mathbb{R}$; [6]

c) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$, $3x + 4y + 5 = 0$. [8]

5. Napíšte rovnicu tej dotyčnice elipsy $9x^2 + 16y^2 = 144$, ktorá má smernicu $k = 1$. $[y = x - 5, \quad y = x + 5]$

6. Napíšte rovnicu dotyčnice k hyperbole $16x^2 - 9y^2 = 144$, ktorá je rovnobežná s priamkou $20x - 9y - 18 = 0$. $[20x - 9y - 48 = 0,\ 20x - 9y + 48 = 0]$

7. Ktorá dotyčnica hyperboly $xy = 12$ prechádza bodom $P[-8; 12]$? $[3x + 4y - 24 = 0,\ 3x + y + 12 = 0]$

8. Napíšte rovnicu dotyčnice paraboly $y^2 + 3x + 4y - 8 = 0$ v jej bode $P[-8; ?]$. $[x + 4y - 8 = 0, \quad x - 4y - 24 = 0]$

9. Aké je analytické vyjadrenie paraboly, ktorej os je rovnobežná s o_x, jej vrchol je priesečníkom priamok $3x + 2y - 6 = 0$ a $y = x - 2$ a leží na nej bod $A[-2; 4]$? $[y^2 = -4(x - 2)]$

10. Napíšte stredovú rovnicu kružnice, ktorej priemerom je úsečka určená spoločnými bodmi parabol $y^2 = 2x$ a $x^2 = -2y$. $[(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = (\sqrt{2})^2]$

Určenie charakteristík kužeľosečiek

Pri štúdiu kružnice sme ukázali súvislosti medzi stredovým a všeobecným tvarom rovnice kružnice. Obdobným spôsobom môžeme prepísať analytické vyjadrenie všetkých kužeľosečiek na tzv. **všeobecný tvar rovnice** typu

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0, \tag{16}$$

kde a, b, c, d, e, f sú reálne čísla. Je zrejmé, že ak $c = 0$, tak pri kružnici je $a = b$, pri parabole je buď $a = 0$ alebo $b = 0$ (ale $[a; b] \neq [0; 0]$). Nebudeme hlbšie skúmať podmienky, ktoré musia koeficienty a, b, c, d, e, f splňať, aby rovnica (16) bola analytickým vyjadrením nejakej kužeľosečky. Popis množiny tých bodov, ktorých súradnice $[x;\ y]$ spĺňajú rovnicu (16) realizujeme v prípade $c = 0$ tak, že premenné x a y doplníme úplný štvorec. Získanú rovnicu sa potom snažíme upraviť na nejaký známy tvar rovnice kužeľosečky, z ktorého sa dajú určiť ďalšie charakteristiky kužeľosečky. Tento naznačený postup ukážeme na príkladoch.

Príklad 19 *Rozhodnime, či daná rovnica je analytickým vyjadrením kužeľosečky a ak áno, tak určme jej charakteristiky:* *a)* $x^2 - 10x - 9y + 61 = 0$; *b)* $9y^2 - 4x^2 + 8x + 54y + 41 = 0$; *c)* $5x^2 + 9y^2 - 20x + 18y + 40 = 0$.

Riešenie.

a) Členy s premennou x doplníme na štvorec

$$(x - 5)^2 - 25 - 9y + 61 = 0$$

a po jednoduchej úprave dostaneme

$$(x - 5)^2 = 9(y - 4),$$

čo je analytické vyjadrenie paraboly s vrcholom $V[5; 4]$ a parametrom $p = 4{,}5$. Os paraboly je rovnobežná s osou o_y.

b) Tentoraz musíme dopĺňať obe premenné x a y na úplný štvorec (pozri (**??**)): rovnicu najprv upravíme na tvar

$$9(y^2+6y)-4(x^2-2x)+41=0$$

Ďalšími úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} 9[(y+3)^2-9]-4[(x-1)^2-1]+41 &= 0, \\ 9(y+3)^2-4(x-1)^2 &= 36, \\ \frac{(y+3)^2}{4^2}-\frac{(x-1)^2}{3^2} &= 1, \end{aligned}$$

čo je stredová rovnica hyperboly so stredom $S[1;-3]$ a s parametrami $a=3$, $b=4$, $e= =\sqrt{a^2+b^2}=5$. Jej hlavná os je rovnobežná s osou o_x.

c) Postupujeme obdobne ako v časti b)

$$\begin{aligned} 5(x^2-4x)+9(y^2+2y)+40 &= 0, \\ 5[(x-2)^2-4]+9[(y+1)^2-1]+40 &= 0, \\ 5(x-2)^2+9(y+1)^2 &= -11. \end{aligned}$$

Ľavá strana poslednej rovnice nadobúda pre každú dvojicu $[x;y]$ nezáporné hodnoty, a preto neexistuje bod $[x;y]$, ktorý spĺňa danú rovnicu. Rovnica nie je analytickým vyjadrením žiadnej reálnej kužeľosečky. □

Úloha

1. Rozhodnite, či daná rovnica je rovnicou reálnej kužeľosečky a ak áno, tak určte jej charakteristiky

   a) $16x^2+9y^2-40x+6y+25=0$; [elipsa, $S[5/4;-1/3]$, $a=1/4$, $b=1/3$, $e=\sqrt{7}/12$]

   b) $2x^2+2y^2-12x+8y-24=0$; [kružnica, $S[3;-2]$, $r=5$]

   c) $3x^2+3y^2+4y-5x+11=0$; [nie]

   d) $x^2-9y^2+4x+3=0$; [hyperbola, $S[-2;0]$, $a=1$, $b=1/3$, $e=\sqrt{10}/3$]

   e) $y^2+8y+3x-6=0$; [parabola, $V[22/3;-4]$]

   f) $x^2-y^2=0$; [priamky $y=x$ a $y=-x$]

   g) $x^2+y^2-2x+4y+1=0$; [kružnica, $S[1;-2]$, $r=2$]

   h) $9x^2+4y^2-18x-16y=11$; [elipsa, $S[1;2]$, $a=2$, $b=3$, $e=\sqrt{5}$]

   i) $x^2-y^2+2y-1=0$; [priamky $x-y+1=0$, $x+y-1=0$]

   j) $x^2-4y^2-8y-8=0$; [hyperbola, $S[0;-1]$, $a=2$, $b=1$, $e=\sqrt{5}$]

   k) $x^2-4x-y=0$. [parabola, $V=[2;-4]$]

2. Načrtnite množinu bodov, ktorá má analytické vyjadrenie:

   a) $16x^2+9y^2-40x+6y+25\geqq 0$; b) $x^2-9y^2\leqq 9$;

c) $45(y+2)^2 - 4(x-3)^2 = 180$; d) $y^2 - x^2 < 0$;

e) $3y^2 + x - 12y + 14 \leqq 0$; f) $x^2 + y^2 = 0$;

g) $x^2 - 6x - 6y + 3 = 0$; h) $xy - x \leqq 0$;

i) $y^2 - 2y + 8x - 15 \geqq 0$; j) $xy - x^2 < 0$;

k) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 13 \geqq 0$; ℓ) $|x| + |y| = 1$;

m) $2x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 < 0$; n) $(y-1)(y^2 + x) \leqq 0$;

o) $(3x - 4y + 5)(2x - y) = 0$; p) $(3x - 4y + 5)(x^2 - y) \geqq 0$.

(Pozri obr. 3 a obr. 4 na stranách 24 a 25.)

3. Určte všeobecnú rovnicu kružnice, ktorá prechádza priesečníkmi daných dvoch kružníc

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0, \qquad x^2 + y^2 - 13x - 9y + 30 = 0$$

a bodom $A[-1; 2]$.

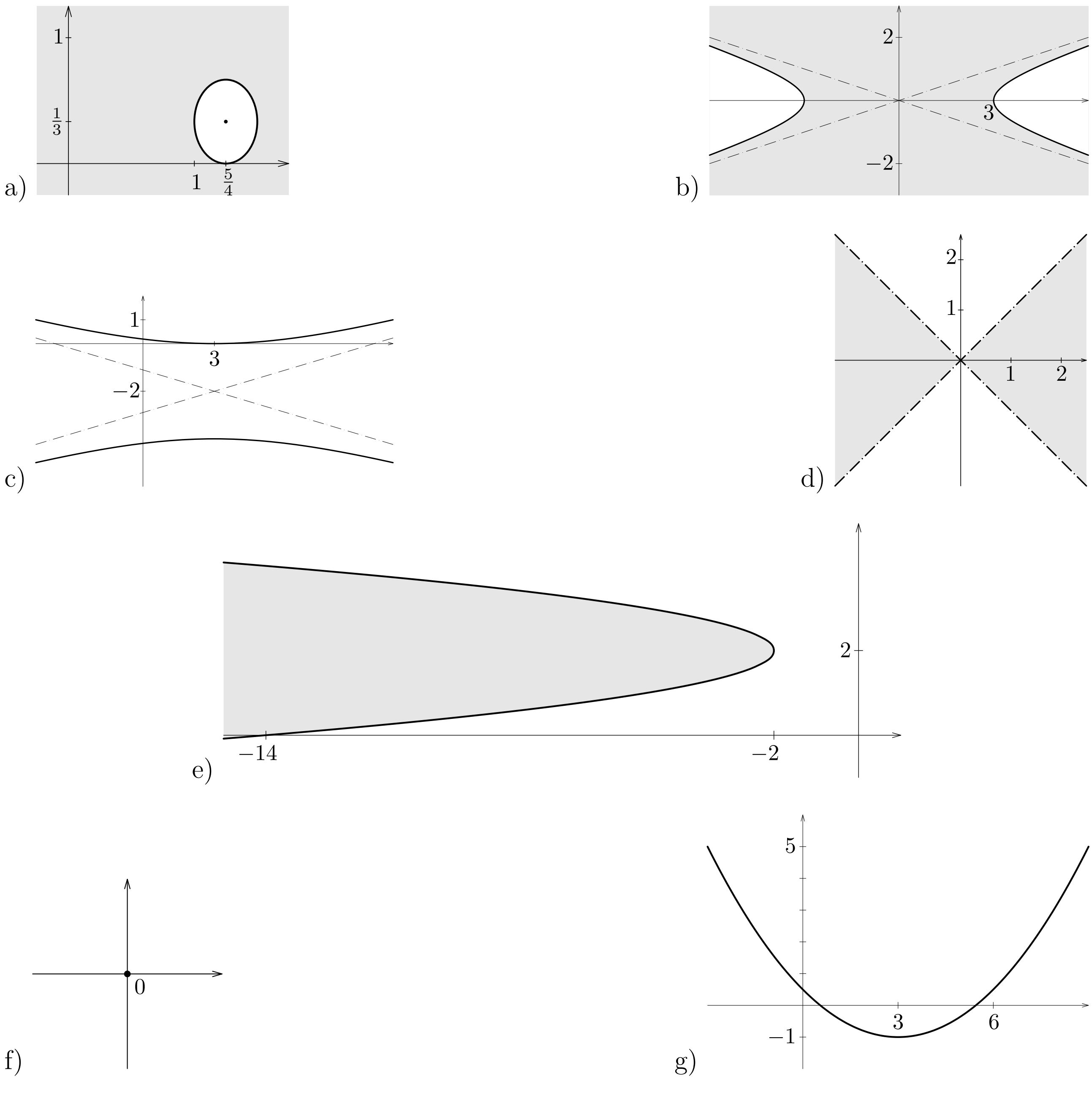
[$x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$]

4. Jeden vrchol štvorca je stredom hyperboly $3x^2 - 2y^2 + 12x + 4y + 4 = 0$ a druhý vrcholom paraboly $x^2 - 6x - 3y - 3 = 0$. Určte všetky možnosti pre obsah tohto štvorca.

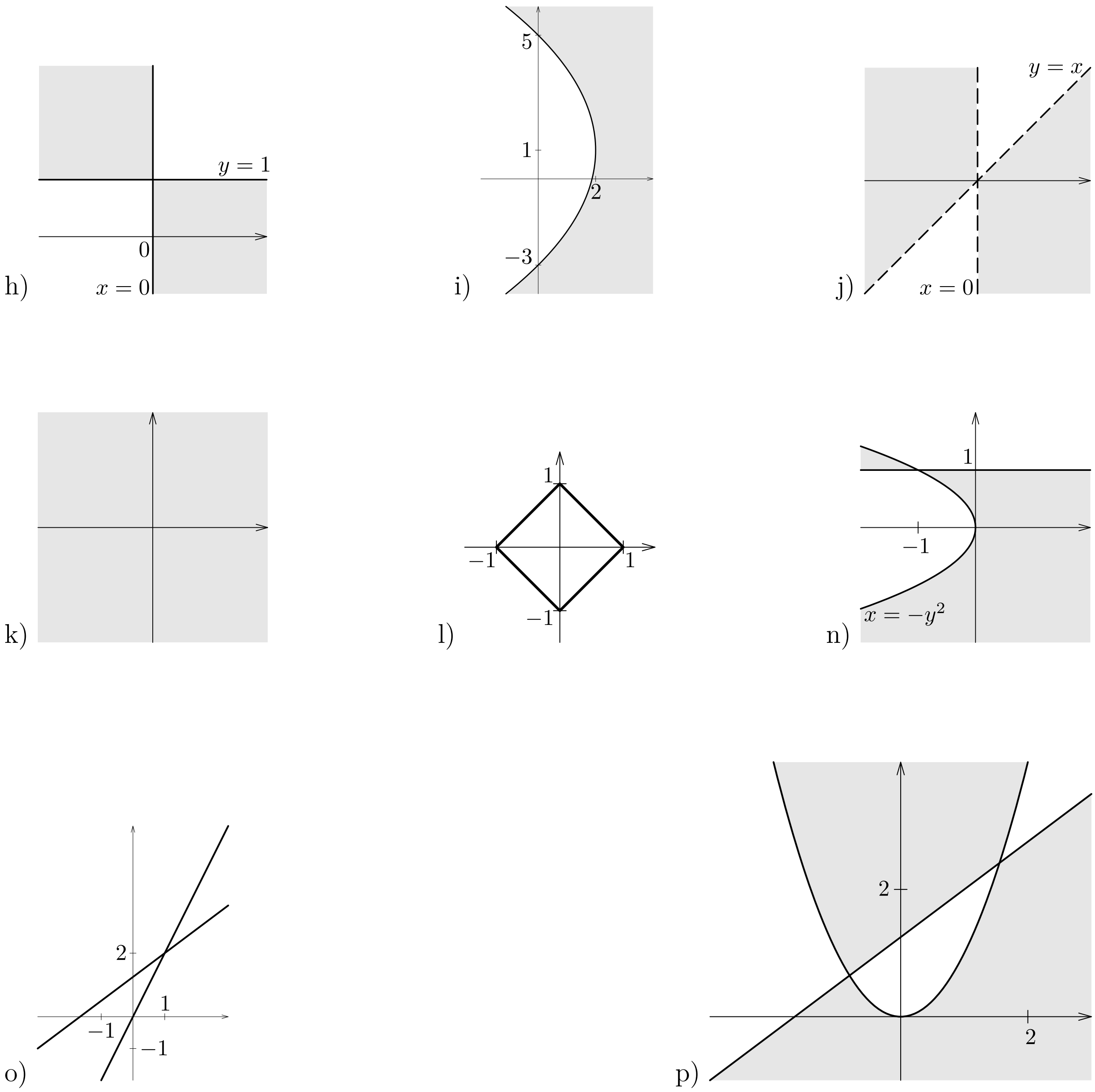
[$50\,\mathrm{j}^2$ alebo $25\,\mathrm{j}^2$]

5. Stred obdĺžnika je vrcholom paraboly $4x + y^2 - 4y + 8 = 0$ a jedna jeho strana je určená priesečníkom tejto paraboly s priamkou $x + 2 = 0$. Aký je obsah tohto obdĺžnika? [$8\,\mathrm{j}^2$]

6. Vyšetrite vzájomnú polohu danej priamky a kužeľosečky
   a) $x = t + 1, \quad y = 2t - 1; \quad 9x^2 + 16y^2 = 144$; [sečnica]
   b) $3x + 2y - 16 = 0; \quad x^2 + 4y^2 + 4x - 8y - 32 = 0$. [dotyčnica]



Obr. 3: Množiny bodov úlohy 2a)– 2g)



Obr. 4: Množiny bodov úlohy 2h) − 2p) — množina 2m) je prázdna