Zhodné zobrazenia:

Zobrazenie *Z* v nazývame **zhodným zobrazením v** práve vtedy, keď pre každé dva body  a ich obrazy ,  platí , tzn. zhodné zobrazenie v rovine zachováva vzdialenosť. Každé zhodné zobrazenie v rovine je prosté.

Útvar  je **zhodný** s útvarom  práve vtedy, keď existuje aspoň jedno zhodné zobrazenie, ktoré zobrazuje útvar  na útvar . Body roviny, ktoré zobrazujeme nazývame **vzor** a body, do ktorých sa body zobrazili nazývame **obraz**. **Samodružný bod** zobrazenia *Z* je bod, ktorý sa zobrazí sám do seba: . **Samodružný útvar** je taký útvar, ktorý sa zobrazí sám na seba: .

Zhodné zobrazenia v rovine sú:

1. Stredová súmernosť
2. Osová súmernosť
3. Otočenie
4. Posunutie
5. Posunutá súmernosť
6. Identita

Zápis zhodného zobrazenia: *Z* je zobrazenie, , kde je obraz bodu *X* v zobrazení *Z*.

**Vlastnosti zhodných zobrazení:**

* Každé zhodné zobrazenie možno zložiť z najviac troch osových súmerností.
* Zhodné zobrazenie je *priama zhodnosť*, ak nemení orientáciu trojuholníka. Vznikne zložením párneho počtu osových súmerností.
* Zhodné zobrazenie je *nepriama zhodnosť*, ak mení orientáciu trojuholníka. Vznikne zložením nepárneho počtu osových súmerností.

**Samodružný bod** zobrazenia Z je bod, ktorý je v danom zobrazení totožný so svojim

obrazom.

**Samodružný útvar** pri zobrazení Z je útvar, ktorý sa v danom zobrazení zobrazí na seba.

1. **Stredová súmernosť:**

**Def:**

Daný je bod S. Stredovou súmernosťou so stredom S nazývame zobrazenie  SS (X), ktoré každému bodu X roviny priradí bod X´, tak že:

1. ak X = S, potom SS (X) = X
2. ak X<>S, potom S je stredom úsečky XX´

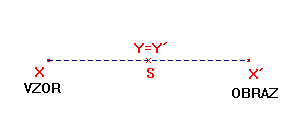
Bod X je vzor a bod X´ je obraz v stredovej súmernosti.

- Ak X=S, Ss (X)=X ; X je samodružný bod

- má jeden samodružný bod- stred súmernosti

- samodružný útvar- priamky prechádzajúce stredom súmernosti

- zachováva rovnobežnosť, vzdialenosť bodov, veľkosť uhlov, úsečiek, útvar



**Príklady**:

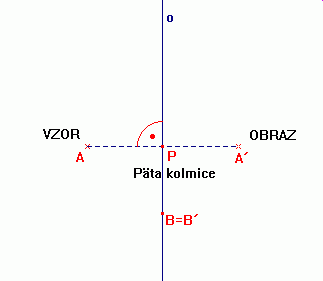
1. Daný je trojuholník *ABC* a bod *S*, ktorý leží mimo neho. Zostrojte útvar *A´B´C´*, ktorý je obrazom trojuholníka *ABC* v stredovej súmernosti so stredom *S*.
2. Zvoľte si uhol **a s** vrcholom *V* a bod *S*. Zostrojte bod *V*´ podľa stredu *S*. Potom len pomocou rovnobežiek zostrojte v stredovej súmernosti podľa stredu *S* obraz uhla **a.**
3. Daný je štvorec ABCD a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky úsečky XY, ktoré majú stred M a ich krajné body X, Y ležia na hranici štvorca.
4. Daný je trojuholník ABC, kde a=4cm, b=5cm, c=6cm. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v stredovej súmernosti so stredom S, ak
5. S=A
6. S = T, kde T je ťažisko trojuholníka
7. S je stred strany BC
8. B je stred úsečky AS
9. Je daný rovnoramenný lichobežník ABCD s základňami AB, CD, kde a= 6cm, c=4cm, v=3cm. Zostrojte obraz lichobežníka ABCD v stredovej súmernosti so stredom S, ak:
   1. B je stred úsečky DS
   2. S je priesečník uhlopriečok
   3. S je stred strany AB
   4. S=B
10. Dané sú body A, B, C´, T´, kde T´ je ťažisko ∆ A´B´C´. Zostrojte ∆ ABC, ∆ A´B´C´, ak viete, že sú stredovo súmerné.
11. Dané sú priamky *b, d* a bod V. Zostrojte štvorec ABCD, ak viete, že V je priesečník uhlopriečok štvorca ABCD, bod B∈*b,* D∈*d*.
12. Zostrojte ∆ ABC, ak sú dané jeho ťažnice *ta =* 4,5 cm*, tb =*6 cm,*tc =* 7,2 cm. (narysuj najprv ťažnicu*ta )*
13. Daný je ∆ ABC a v ňom bod X. Zostrojte na obvode trojuholníka body Y, Z tak, aby X bol stred úsečky ZY.
14. Daná je priamka *p*, kružnica *k* a bod S. Zostrojte štvorec ABCD, ak viete, že na A∈*p*, C∈*k* a S je priesečník jeho uhlopriečok.
15. Daná je úsečka AS, |AS| = 6 cm. Zostrojte všetky ∆ ABC, ktoré majú ťažnicu AS = *ta ,* uholγ = | ACB| = 30°, |AB| = 5 cm.
16. Daná je úsečka AS, |AS| = 5 cm. Zostrojte všetky ∆ ABC, ktoré s ťažnicou *ta* = AS*,* ak a) |AB| = 4 cm, |AC| = 7 cm b) |AC| = 6 cm, *tb =* 6 cm
17. Daný je štvorec ABCD. Na strane AB zvoľte bod M a zostrojte štvorec MNPQ, ktorého vrcholy ležia na stranách štvorca ABCD. (Oba štvorce majú spoločný stred súmernosti)
18. Je daný ostrý uhol a vo vnútri bod O. Zostrojte bodom O priamku *p* tak, aby pretínala ramená uhla v bodoch X, Y, pričom nech bod O je stred úsečky XY.
19. Daný je štvorec ABCD a jeho vnútorný bod M. Zostrojte všetky úsečky XY, ktoré majú stred M a ich krajné body X, Y ležia na hranici štvorca.
20. Dané sú rôznobežky *a, b* a bod U. Zostrojte na priamke *a* bod A a na priamke *b* bod B tak , aby bod U bol stredom úsečky AB
21. Zostrojte obraz ΔABC podľa: SA2(SB1(SC(ΔABC))).
22. Zostrojte všetky trojuholníky ABC, pre ktoré platí : c = 6 cm, *ta = 6* cm*, tb =*6 cm.
23. Akú rovnicu má obraz priamky p : y = 3x, q: y = 3x -12 v súmernosti podľa stredu : a) A[0,0] , b) A[4,0] , c) A[0,-1] , d) A[5, 2] , e) A[0,-12] .
24. Zostrojte trojuholník ABC, ak v ňom poznáme veľkosť *α, β*, *tc .*
25. Dané sú dve kolmé priamky *p, q.* V I. kvadrante leží bod X. v III. kvadrante leží bod Y. Zostrojte rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AC, ak *p* je os uhla ABC, body X ∈AB, Y∈BC.
26. **Osová súmernosť**

**Def:**

V rovine je daná priamka *p*.**Osovou súmernosťou  Sp(X)** podľa priamky p  nazývame zobrazenie, ktoré každému bodu X roviny priradí bod  X´ tej istej roviny tak, že

1. ak  X leží na priamke p, potom jeho obrazom je on sám (je samodružný)
2. ak  X neleží na priamke p, potom priamka p je osou súmernosti úsečky XX´

* samodružnými bodmi sú body osi
* samodružné útvary- priamka kolmá na os súmernosti, ďalšie vhodne umiestnené symetrické útvary



**Príklady**:

1. V rovine je daná priamka o a bod A, ktorý na nej neleží. Zostrojte bod A´, ktorý je s bodom A súmerne združený podľa osi o.
2. Zostrojte obraz kružnice k(S, r) v osovej súmernosti s osou p, ktorá
3. prechádza bodom S
4. je sečnicou kružnice k
5. je dotyčnicou kružnice k
6. je nesečnicou kružnice k
7. Zvoľ si body M a N. Zostroj priamku o tak, aby bod M bol obrazom bodu N v osovej súmernosti s osou o.
8. V rovnostrannom trojuholníku ABC je bod Q stred strany BC. Zostrojte obraz trojuholníka ABC v osovej súmernosti s osou p, ak:
9. p=↔AQ
10. p║AB, Q € p
11. p║AQ, B € p
12. p║AB, p∩∆ ABC= Ø
13. Dané sú body A, B, C´, T´, kde T´ je ťažisko Δ A´B´C´. zostrojte ΔABC, ΔA´B´C´, ktoré sú osovo súmerné.
14. Daný je uhol <AVB, ktorého vrchol V je neprístupný (leží mimo nákresne). Zostrojte os tohto uhla.
15. Zostrojte kosoštvorec ABCD, ak je dané e = ⏐AC⏐=9 cm, v = 4,5 cm.
16. Dané sú priamky *p, r* a kružnica *k*. Nájdite úsečku AB, A∈ *r*, B∈*k*, ktorá je kolmá na priamku *p* a ktorej stred leží na priamke *p*.
17. V rovine je daná priamka *b*, kružnice *p, q*. Zostrojte všetky úsečky XY, aby bod X ∈ *p*, Y∈*q*, stred úsečky XY nech je bodom priamky *b* a priamka XY je kolmá na priamku *b*.
18. V rovine sú dané dve kružnice *k1 , k2* a priamka *p*. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky ABC, ktorých ťažnica *tc* je časťou priamky p a A∈ *k1*, B∈*k2.*
19. Daná je úsečka AB a priamka *p*, ktorá pretína úsečku AB v jej vnútornom bode C. Zostrojte na priamke *p* bod V tak, aby polpriamka VC bola osou <AVB.
20. Je daná priamka *p*, priamka *a*//*p* a priamka *c* rôznobežná s priamkou *p*. Zostrojte štvorec ABCD, ktorého A ∈ *a*, C∈*c* a uhlopriečka BD leží na *p*.
21. Je daná priamka p a body A,B v tej istej polrovine určenej priamkou p. Zostrojte na priamke p taký bod X, aby súčet ⏐AX⏐+⏐BX⏐bol čo najmenší.
22. Je daný ostrý uhol s ramenami *b, c*. Vo vnútri uhla je bod A. Zostrojte ΔABC tak, aby mal čo najmenší obvod, pričom B ∈*b*, C∈*c*.
23. V pravouhlej sústave súradníc sú dané body A[-3;5], B[8; 2]. Určite súradnice ich obrazov v osovej súmernosti podľa priamky y = x .
24. Daná je priamka p a body X, Y , Z. Zostrojte kosoštvorec ABCD tak, aby platilo : A∈p, C∈p, X ∈AD, Y∈BC, Z∈CD. (M2 – 18/4)

**.** Z

**X. .Y**

1. **Otočeni= Rotácia**

**Def:**

Daný je uhol ASB. Rotáciou so stredom S o orientovaný uhol ASB , nazývame zobrazenie RS,ASB(X), ktoré každému bodu X roviny priradí bod X´ roviny tak, že

1. ak X = S, potom RS,ASB(X) = X
2. ak X<>S, potom uhol XSX´≈ uhlom ASB a |X,S| = |XŚ|

 je dané stredom otáčania *R*  a uhlom otáčania Uhol môže byť kladný alebo záporný.   
Kladný uhol – proti pohybu hodinových ručičiek,   
záporný uhol – v smere hodinových ručičiek.   
Bodu *A* je priradený bod *A'* tak, že uhol *AOA'* =  a platí *| AO| = | A'O' |*

Vlastnosti: samodružné body: stred otáčania O, všetky body pri otáčaní o uhol  = 2k

Samodružné útvary: priamky prechádzajúce stredom pri otáčaní o uhol  = k, útvary pri otáčaní o uhol  = 2k

*o*

B

B'

A'

A

**Príklady:**

1. Daná je priamka p, bod A a kružnica k- bod A, priamka p ležia mimo kružnice). Zostrojte všetky štvorce ABCD, ktoré majú vrchol B na priamke p a vrchol D na kružnici k.
2. V otočení R(T, α) zostrojte obraz rovnostranného trojuholníka ABC so stranou dlhou 4cm a ťažiskom v bode T, ak

a) α= 60° b) α= 120° c) α= 180° d) α= 240°

1. V otočení R(T, α) zostrojte obraz štvorca ABCD so stranou dlhou 5cm, ak
   1. S je stred štvorca, α= 45°
   2. S = A, α= 135°
   3. B je strd úsečky AS, α= 60°
2. Daná je priamka p, bod A a kružnica k, bod A neleží ani na priamke ani na kružnici. Kružnica a bod ležia v jednej polrovine ohraničenej priamkou p. Zostrojte všetky štvorce ABCD , ktoré majú vrchol B na priamke p, vrchol D na kružnici k.
3. Dané sú body A,B, A´, pričom A´je obraz bodu a pri neznámom otočení RS,α. Narysujte bod B´= RS,α(B).
4. Otočte rovnoramenný pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C okolo bodu A o 45°.
5. Daný je uhol XVY, rovnoramenný trojuholník EFG (EG=FG) a vnútri uhla XVY je bod C. Zostrojte trojuholník ABC podobný trojuholníku EFG, ak viete že A leží na XV, B na YV.
6. Dané sú priamky *p*, *r* a T – ťažisko rovnostranného ∆ ABC. Zostrojte ∆ ABC, ak viete, že A ∈ *p,* B∈ *r*
7. Dané sú body C, B´, A´, B. Zostrojte trojuholníky ABC, A´B´C´, ak viete, že ∆ A´B´C´ vznikol z ∆ ABC otočením o uhol 45°.
8. Daný je rovnobežník ABCD, ktorý nie je štvorec. Zostrojte štvorec KLMN tak, aby jeho vrcholy K, L, M, N boli podľa poradia bodmi úsečiek AB, BC, CD, DA (otáčanie okolo stredu rovnobežníka o 90°).
9. V rovine sú dané tri rovnobežky a, b, c, bod A ležiaci na Priame A. Zostrojte všetky rovnostranné trojuholníky tak, aby B∈ *b,* C∈ *c*.
10. Daný je štvorec ABCD a bod X∈ AB. Zostrojte rovnostranný ∆ XYZ tak, aby vrcholy Y, Z ležali tiež na stranách daného štvorca.
11. Dané sú dve sústredné kružnice *k, l*. Vo vnútri medzikružia je daný bod X. Zostrojte všetky rovnostranné ∆ XYZ tak, že Y ∈ *k,* Z∈ *l*.
12. **Posunutie= Translácia**

**Def:**

Daná je usporiadaná dvojica bodov v rovine [A;B] (**orientovaná úsečka AB).**

Transláciou určenou dvojicou [A;B] (orientovanou úsečkou **AB)** nazývame zobrazenie T**AB(X)**, ktoré každému bodu X roviny priradí bod X´ tak, že úsečky AX´ a BX majú spoločný stred.

* je daná orientovanou úsečkou AB
* samodružné body a útvary pri posunutí o nenulový vektor nie sú

A

A'

B

B'



**Príklady**:

1. V posunutí T ( A→ T) zobrazte trojuholník ABC, ak T je jeho ťažisko.
2. Dané sú dve kružnice *k1(*S1*, r1), k2 (*S2*, r2)* a úsečka MN. Zostrojte úsečku AB zhodnú a rovnobežnú s MN tak, aby platilo: A ∈ *k1,* B∈ *k2*.
3. Dané sú priamky *a* || *b* a bod M vo vnútri pása. Zostrojte kružnicu, ktorá sa dotýka priamok *a*, *b* a prechádza bodom M.
4. Na rôznych brehoch priamočiarej rieky so šírkou „*d*“ ležia dve mestá A, B. V ktorom mieste rieky treba postaviť most (kolmo na breh rieky) tak, aby cesta z A do B bola najkratšia?
5. Zostrojte lichobežník ABCD, ak sú dané veľkosti všetkých strán : *a* = 6 cm, *b*  = 5 cm, *c* = 3 cm, *d* = 4 cm, *a* || *c*.
6. V rovine sú dané dve kružnice *k(*S*, r)* a *m(*O*, v).* Zostrojte všetky úsečky rovnobežné s úsečkou SO, pre ktoré platí: X ∈ *k,* Y∈ *m,* veľkosť úsečky XY je rovná polovici úsečky SO.
7. V rovine je daná priamka *p*, kružnica *k*a úsečka AB. Zostrojte úsečku JK tak, aby bola rovnobežná a zhodná s úsečkou AB, aby J∈*p* a K∈*k*.
8. Daná je priamka *a*, kružnica *k*a body C, D. Zostrojte rovnobežník ABCD, ak viete, že A∈*a* a B∈*k*.
9. Daná je úsečka AB a kružnica *k*. Zostrojte rovnobežník ABCD, AB || CD,

|AB| = 3.|CD|, ak viete, že body C, D ležia na kružnici *k*.

1. Trojuholník A´B´C´ vznikol z ∆ ABC posunutím. Zostrojte tieto trojuholníky, ak sú dané body a) A,B, C´, B´ b) A, B´, C´, S – stred AC
2. Dané sú body A [4;7], B[-2;7], C[-2;-5] a bod X[6;-2]. Zostrojte obraz bodu X v posunutí určenom orientovanou úsečkou : a) AB b) BA c) CB d) AC e) CA
3. Daná je priamka a, kružnica k a body C,D. Kružnica a body C, D ležia v tej istej polrovine určenej priamkou a. Zostrojte všetky rovnobežníky ABCD, ak viete že A patrí a, B patrí k.