Первое задание

Каплоухая Нина

15 февраля 2018

№1

1) Заметим, что:

$$(x^2 + x^4 + x^6 + \dots)(x^3 + x^6 + \dots) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot x^k,$$

где $a_k = A_k$. Это следует из того, что коэффециент a_k при соответствующем слагаемом x^k соответствует кол-ву способов составить число k из чисел из первой и второй скобки, причем в первой скобки числа, делящиеся на 2 (т. е вида $2x$), а во второй вида $3y$. А это и есть кол-во решений данного уравнения при $n = k$.
$\Rightarrow$ Искомая производящая функция:

$$G(x) = (x^2+x^4+x^6+\dots)(x^3+x^6+\dots) = x^5\cdot(1+x^2+\dots)\cdot(1+x^3\dots) = \frac{x^5}{(1-x^3)(1-x^2)}$$

3) Рассмотрим несколько случаев:

- $n = 6k$: тогда $3y = 6k - 2x$ делится на 6 и не равно нулю. Т. о. $3y$ это любое число в интервале от 0 до $6k$ кратное 6, всего таких возможных вариантов $k-1$. Каждое такое значение $3y$ соответствует решению. $\Rightarrow$ Всего решений $k - 1$.

- $n = 6k+1$: Тогда $3y = 6k+1-2x$ нечетное, делится на 3 и не равно нулю. Т. о. $3y$ это любое нечетное число в интервале от 0(включительно) до $6k+1$ кратное 3, всего таких возможных вариантов k. Каждое такое значение $3y$ соответствует решению (т. к. x определятся однозначно для таких y). $\Rightarrow$ Всего решений k.

- Для $n = 6k+2, n = 6k+3, n = 6k+4$ абсолютно аналогично получаем k решений.

- $n = 6k+5$: тогда $3y = 6k+5-2x$ нечетное, делится на 3 и не равно нулю. Т. о. $3y$ это любое нечетное число в интервале от 0(включительно) до $6k+5$ кратное 3, всего таких возможных вариантов $k+1$. Каждое такое значение $3y$ соответствует решению (т. к. x определятся однозначно для таких y). $\Rightarrow$ Всего решений $k + 1$.

Таким образом, получаем аналитическое выражение:

$$A(n) = \begin{cases} \text{n}/6 & n \mod 6 \equiv 0 \\ \lfloor n/6 \rfloor & n \mod 6 \equiv a \in \{1,2,3,4\} \\ \lceil n/6 \rceil & n \mod 6 \equiv 5 \end{cases}$$

2) Из аналитического вражения видно, что $A(n+6) = A(n)+1$. Тогда:

$$T(n) = T(n-6)+1$$

. $\Rightarrow$ Асимптотическая сложность: $A_n = \Theta(n)$.

№5

$$T(n) = 3 \cdot T(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5) + \frac{10n^3}{\log n}$$

Т. к. на каждом рекурсивном уровне совершается действие сложностью $\frac{10n^3}{\log n}$, то

$$T(n) = \omega(\frac{10n^3}{\log n})$$

Оценим сверху:
$\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5 \leq \lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil$. Из монотонности $T(n)$ асимптотическая сложность $T(n) = O(F(n))$, где

$$F(n) = F(\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil) + \frac{10n^3}{\log n}.$$

Покажем, что $F(n)$ удовлетворяет условиям третьего случая Мастер Теоремы:
Если $f(n) = \omega(n^{log_b a - \varepsilon})$ для некоторой константы $\varepsilon > 0$, и если $af(n/b) \leq cf(n)$ для некоторой константы $c < 1$ и всех достаточно больших n, то $F(n) = aF(n/b) + f(n) = \Theta(f(n))$.
В нашем случае $a = 3$, $b = \sqrt{3}$.

$$\log n = O(\sqrt{n}) \Rightarrow \frac{10n^3}{\log n} = \omega(n^{3-1/2}) = \omega(n^{log_b a - \varepsilon}),$$

при $\varepsilon = 1/2$. Т. е. условие на $f(n)$ выполняется.

$$af(n/b) = \frac{3 \cdot 10n^3}{\sqrt{3}^3 \cdot \log n/\sqrt{3}} = \frac{10n^3}{\log n - log\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

При больших n: $\log \sqrt{3} \leq \frac{\log n}{3}$. Подставим в предыдущее выражение:

$$af(n/b) \leq \frac{3/2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{10n^3}{\log n} = c \cdot \frac{10n^3}{\log n},$$

при $c = \frac{3/2}{\sqrt{3}}$.
Таким образом, все условия теоремы выполнены.

$$\Rightarrow F(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(\frac{n^3}{\log n})$$

$$\Rightarrow T(n) = O(F(n)) = O(\frac{n^3}{\log n})$$

Значит, нижняя и верхняя оценка для $T(n)$ совпадают и дают: $T(n) = \Theta(\frac{n^3}{\log n})$.
Ответ: $\Theta(\frac{n^3}{\log n})$.

№7

Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100 & , n \leq 100 \\ S(n-1) + S(n-3) & , n > 100 \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$.
Попробуем оценить $T(n)$ сверху и снизу:
Из монотонности $S(n) \leq 2S(n-1)$.$\Rightarrow$. Кол-во реккурсивных вызовов меньше чем:

$$\sum_{i=1}^{n-100} 2^i = \frac{2(1-2^{n-100})}{1-2} = 2^{n-99} - 2$$

Т. е. $T(n) = \omega(2^{n-99} - 2)$.
Аналогично, оценим снизу:
$S(n) \geq 2S(n-3)$. $\Rightarrow$.

$$T(n) = O(\sum_{i=1}^{\lceil \frac{n-100}{3} \rceil} 2^i) = O(\frac{2(1-2^{\lceil \frac{n-100}{3} \rceil})}{1-2}) = 2^{\lceil \frac{n-100}{3} \rceil} - 2$$

Т. е. $T(n) = O(2^{\lceil \frac{n-100}{3} \rceil} - 2)$.

Метом из курса дискретного аналази посчитаем значение количества рекурсивных $T(n)$, составив характеристическое уравнение:

$$T_k - T_{k-1} - T_{k-3} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 - \lambda^2 - 1 = 0$$

По формуле Кардано ($a = 1, b = -1, c = 0, d = -1, \Rightarrow p = -\frac{1}{3}, q = \frac{-2-27}{27} = -\frac{29}{27}$):

$$Q = -\frac{1}{27^2} + \frac{29^2}{27^2 \cdot 4} = \frac{31 \cdot 27}{27^2 \dot{4}} = \frac{31}{108} > 0$$

Значит есть один вещественный корень $\lambda = (-\frac{29}{54} + \sqrt{\frac{31}{108}})^{1/3} + (-\frac{29}{54} - \sqrt{\frac{31}{108}})^{1/3} \approx 1.46557$ и два комплексных корня с $Re < 0$. Т.к. при $n \leq 100$: число рекурсивных взовов $T(n) = 1$, то $T(n) \approx 2 \cdot^{n-100} -1$. При $n = 10^12$:

$$T(10^12) \approx 2 \cdot 1.46557^{10^12-100} - 1$$

№3

При достаточно больших n, u становятся настолько близки, что их отличием можно пренебречь. Т. е. считать, что $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = k/4$. Подставим:

$$G(k) = 4G(\frac{k}{4}) + 4 \cdot \frac{k^3}{4^3} = 4G(k/4^m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{k^3}{4^{2m}} = 4G(k/4^{log_4 k}) + \sum_{i=1}^{\log_4 k} \frac{k^3}{4^{2m}} =$$

$$= 4G(k/4^{log_4 k}) + \frac{k^3 \cdot (1 - 4^{2\log_4 k})}{4^2 \cdot (1-16)} = \Theta(k^3)$$

Ответ: $\Theta(k^3)$

№4

1)Из дискретного анализа число правильных скобочных последовательностей из n скобок равно числу Каталана $c_{n/2}$, а так же равно кол-ву путей Дика из $(0,0)$ в $(n,0)$. Скобочным последовательностям, удовл. условию задачи, соответствуют пути Дика, пересекающие ось абсцисс только в точках $(0,0)$ и $(n,0)$. Во всех этих путях первый ход обязательно сделан в $(1,1)$, а последний из $(n-1,1)$, при этом пути не опускаются ниже единицы. Т.о. кол-во таких путей равно кол-во путей Дика из $(1,1)$ в $(n-1,1)$. Т.е. равно $c_{(n-2)/2} = \frac{2}{n} \cdot C_{n-2}^{(n-2)/2}$.
Ответ: $c_{(n-2)/2} = \frac{2}{n} \cdot C_{n-2}^{(n-2)/2}$
2) Из дискретного анализа производящая функция для чисел Каталана:

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot x^k = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$$

.

$$G(-x) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot (-x)^k = \frac{1 - \sqrt{1+4x}}{-2x}$$

$$BR_{4n+2} = c_{2n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k+1} \cdot x^{2k+1} = \frac{G(x) - G(-x)}{2} = \frac{1 - \sqrt{1-4x} + 1 + \sqrt{1+4x}}{4x} = \frac{2 - \sqrt{1-4x} + \sqrt{1+4x}}{4x}$$

$\Rightarrow$ **Ответ**: $\frac{2-\sqrt{1-4x}+1+\sqrt{1+4x}}{4x}$

№6

Будем действовать аналогично алгоритму, описанному для разделения по 5 штук. Выделим по нему опорный элемент: P. Элементов, больших P, не меньше: $3(0.5 \cdot \frac{n}{4} - 2) = \frac{3n}{8} - 6$. $\Rightarrow$ Элементов, меньших P, не больше $\frac{5n}{8} + 6$. Элементов, меньших P, не меньше $2(0.5 \cdot \frac{n}{4} - 2) = \frac{2n}{8} - 4$. $\Rightarrow$ Элементов, больших P, не больше $\frac{6n}{8} + 4 = \frac{3n}{4} + 4$. Тогда:

$$T(n) = T(\lceil \frac{n}{4} \rceil) + T(\frac{3n}{4}) + O(n).$$

В соответствующем дереве $\log n$ уровней, а на каждом уровне суммарная выполняемая сложность $O(n)$. Т. о. общая сложность $O(n \log n)$.
Ответ: $O(n \log n)$.

№9 (Доп)

Пусть $n = 2^k$ (такое предположение можно сделать, т.к. сложность монотонна от аргумента, а $2^{s-1} \leq n \leq 2^s$ для некоторого целого s, и проведя рассуждения для $k = s$ и $k = s - 1$ получим верхнюю и нижнюю оценку соответственно).

$$T(2^k) = 2^k T(\frac{2^k}{2}) + C_1 \cdot 2^k = 2^{mk - \sum_{i=0}^{m} i} \cdot T(2^{k-m}) + C \cdot 2^{mk - \sum_{i=0}^{m} i} = 2^{m(k - \frac{m+1}{2})} \cdot T(2^{k-m}) + C \cdot 2^{m(k - \frac{m+1}{2})}.$$

При $m = k$:

$$T(2^k) = C \cdot 2^{\frac{k(k-1)}{2}} = \Theta(n^{\frac{log_2 n - 1}{2}})$$

.
Ответ: $\Theta(n^{\frac{log_2 n - 1}{2}})$.

№2

1)

$$(x_{i-1}, y_{i-1}) \Longrightarrow (x_{i-1} \mod y_{i-1}, y_{i-1})$$

Пусть $x_{i-1} = m + y_{i-1} \cdot k$, где $m < y_{i-1}$, $k \in \mathbf{Z}$. Т. к. $x > y, \Rightarrow k \geq 1$. Тогда:

$$2 \cdot s_{i-1} = 2 \cdot y_{i-1} \cdot k + 2m + 2 \cdot y_{i-1},$$

$$3 \cdot s_i = 3m + 3y_{i-1}$$

Вычтем равенства друг из друга:

$$2 \cdot s_{i-1} - 3 \cdot s_i = -m + 2 \cdot y_{i-1} \cdot k - y_{i-1} \geq -y_{i-1} + 2 \cdot y_{i-1} \cdot k - y_{i-1} = 2 \cdot y_{i-1} \cdot (k-1) \geq 0,$$

т. к $k \geq 1$.
$\Rightarrow 2/3 \cdot s_{i-1} \geq s_i$, ч. т. д.

2)

$$gcd(F_{m+2}, F_{m+1}) = gcd(F_{m+2} - F_{m+1}, F_{m+1}) = gcd(F_m, F_{m+1}) = gcd(F_m, F_{m-1}) = \dots = gcd(F_1, F_0) =$$
$$= gcd(1, 1) = 1.$$

Ответ: 1