Задание на восьмую неделю.

№1

Докажем, что $(M_n(\omega))^{-1} = \dfrac{1}{n}M_n(\omega^{-1})$. Рассмотрим произведение $(M_n(\omega))(M_n(\omega))^{-1} = A$. Тогда,

$$A_{ji} = \sum_{k=0}^{n-1}(M_n(\omega))_{jk}(M_n(\omega))^{-1}_{ki} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk}(\omega^{-1})^{ki} =$$

$$= 1 + \omega^{j-i} + \omega^{2(j-i)} + \dots + \omega^{(n-1)(j-i)} = \frac{1-(\omega^{j-i})^n}{1-\omega^{j-i}} = \frac{1-(\omega^n)^{j-i}}{1-\omega^{j-i}}$$

Последнее равенство получено с помощью формулы для геом. прогрессии (при условии $i \equiv j$).

Т. к. $\omega^n = 1$, то $A_{ji} = \begin{cases} 0 & i \equiv j \\ n & i = j \end{cases}$

$$\Rightarrow (M_n(\omega))(M_n(\omega))^{-1} = A = nE, \Rightarrow (M_n(\omega))^{-1} = \frac{1}{n}M_n(\omega^{-1})$$

Аналогично, найдем $(M_n(\omega))^4 = B^2$, где $B = (M_n(\omega))^2$

$$B_{ji} = \sum_{k=0}^{n-1}(M_n(\omega))_{jk}(M_n(\omega))^{-1}_{ki} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{jk}(\omega^{-1})^{ki} =$$

$$= 1 + \omega^{j+i} + \omega^{2(j+i)} + \dots + \omega^{(n-1)(j+i)} = \frac{1-(\omega^{j+i})^n}{1-\omega^{j+i}} = \frac{1-(\omega^n)^{j+i}}{1-\omega^{j+i}} = 0$$

$\Rightarrow (M_n(\omega))^4 = 0.$

№2

Корни единицы кратности 8: $i = 0 : 1$
$i = 1 : \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$i = 2 : i$

$i = 3 : \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$i = 2 : -1$
$i = 5 : \frac{-\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
$i = 6 : -i$
$i = 7 : \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$
Возьмем за первообразный корень $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$.
Найдем $\mathsf{FFT}((0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 2), \omega)$, дерево рекурсии:

- $\mathsf{FFT}((0, 0, 0, 0, 1, 0, 3, 2), \omega) = (r_0, r_1, \dots, r_7)$, где:
  $r_0 = 4 + 2 = 6$, $r_4 = 4 - 2 = 2$
  $r_1 = -1 + 3i + (\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \cdot 2i = -1 + \sqrt{2} + (3 + \sqrt{2})i$
  $r_5 = -1 - \sqrt{2} + (3 - \sqrt{2})i$
  $r_2 = -2 + i \cdot 2 = -2 + 2i; r_6 = -2 - 2i$
  $r_3 = -1 - 3i + (-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i) \cdot (-2i) = -1 - \sqrt{2} + (-3 + \sqrt{2})i$
  $r_7 = -1 + \sqrt{2} + (-3 - \sqrt{2})i$

  - $\mathsf{FFT}((0, 0, 1, 3,), \omega^2) = \mathsf{FFT}((0, 0, 1, 3,), -i) = (1+3, -1+3i, 1-3, -1 - 3i) = (4, -1 + 3i, -2, -1 - 3i)$
    * $\mathsf{FFT}((0, 1), -1) = (1, -1)$
      · $\mathsf{FFT}((0), 1) = (0)$
      · $\mathsf{FFT}((1), 1) = (1)$
    * $\mathsf{FFT}((0, 3), -1) = (3, -3)$
      · $\mathsf{FFT}((0), 1) = (0)$
      · $\mathsf{FFT}((3), 1) = (3)$
  - $\mathsf{FFT}((0, 0, 0, 2,), \omega^2) = \mathsf{FFT}((0, 0, 1, 3,), -i) = (0 + 2, 2i, 0 - 2, -2i) = (2, 2i, -2, -2i)$
    * $\mathsf{FFT}((0, 0), -1) = (0, 0)$
      · $\mathsf{FFT}((0), 1) = (0)$
      · $\mathsf{FFT}((0), 1) = (0)$
    * $\mathsf{FFT}((0, 2), -1) = (0, 2)$
      · $\mathsf{FFT}((0), 1) = (0)$
      · $\mathsf{FFT}((2), 1) = (2)$

Аналогично для $(0, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 2)$:

- $\mathsf{FFT}((0, 0, 0, 0, 3, 3, 0, 2), \omega) = (8, -3 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, 3 - i, -3 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{5\sqrt{2}}{2}i, -2, -3 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i, 3 + i, -3 - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i)$

- $\mathrm{FFT}((0,0,3,0,),-i)=(3,-3,3,-3)$
  * $\mathrm{FFT}((0,3),-1)=(3,-3)$
  * $\mathrm{FFT}((0,0),-1)=(0,0)$
- $\mathrm{FFT}((0,0,3,2,),-i)=(5,-3+2i,1,-3-2i)$
  * $\mathrm{FFT}((0,3),-1)=(3,-3)$
  * $\mathrm{FFT}((0,2),-1)=(0,2)$

Найдем ДПФ массива C перемножив соответствующие значения:

$$\mathrm{FFT}(C)=(48,-10\sqrt{2}-3-(7\sqrt{2}+5)i,-4+8i,(10\sqrt{2}-3)-(7\sqrt{2}-5)i,$$

$$-4,10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}-5)i,-4-8i,-10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}+5)i)$$

Используя обратное преобразование, найдем массив C:

$$C=\mathrm{FFT}((48,-10\sqrt{2}-3-(7\sqrt{2}+5)i,-4+8i,(10\sqrt{2}-3)-(7\sqrt{2}-5)i,$$

$$-4,10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}-5)i,-4-8i,-10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}+5)i),\omega^{-1})/8$$

$\omega^{-1}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

- $\mathrm{FFT}((48,-4+8i,-4,-4-8i,),i)=(36,36,52,68)$
  * $\mathrm{FFT}((48,-4),-1)=(44,52)$
  * $\mathrm{FFT}((-4+8i,-4-8i),-1)=(-8,16i)$
- $\mathrm{FFT}((-10\sqrt{2}-3-(7\sqrt{2}+5)i,(10\sqrt{2}-3)-(7\sqrt{2}-5)i,10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}-5)i,-10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}+5)i),i)$
  * $\mathrm{FFT}((-10\sqrt{2}-3-(7\sqrt{2}+5)i,10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}-5)i),-1)=(-6,-20\sqrt{2}-2(7\sqrt{2}+5)i)$
  * $\mathrm{FFT}(((10\sqrt{2}-3)-(7\sqrt{2}-5)i,-10\sqrt{2}-3+(7\sqrt{2}+5)i),-1)=(-6,20\sqrt{2}-2(7\sqrt{2}+5)i))$

$$\Rightarrow C=(3,3,9,17,6,6,4,0)$$

Ответ: (3, 3, 9, 17, 6, 6, 4, 0)

№4

Циркулянтная матрица, порожденная данным вектором:

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 8 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

По св-ву циркулянтных матриц находим матрицу собственных значений: $\lambda = diag(15, -3+6i, -5, -3-6i)$, и матрицу собственных векторов V:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix}$$

$$V^{-1} = \frac{1}{4}V^*; \qquad V^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{FFT}(b, -i) = V^* b$

- $\mathrm{FFT}((16, 8, 4, 2), -i) = (30, 12-6i, 10, 12+6i)$
  - $\mathrm{FFT}((16, 4), -1) = (20, 12)$
  - $\mathrm{FFT}((8, 2), -1) = (10, 6)$

$\Rightarrow V^{-1}b = \frac{1}{4}(30, 12-6i, 10, 12+6i)^T$

$$\lambda^{-1} = diag(1/15, -\frac{6i+3}{45}, -1/5, \frac{6i-3}{45}) = \frac{1}{45}diag(3, 6i{-}3, -15, -6i{-}3)$$

$$\Rightarrow \lambda^{-1}(V^{-1}b) = \frac{1}{45}diag(3, 6i-3, -9, -6i-3)\frac{1}{4}(30, 12-6i, 10, 12+6i)^T =$$

$$= \frac{1}{180}(90, -72-54i, -90, -72+54i) = (\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} - 310i, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} + 310i)$$

$$\Rightarrow x = C^{-1}b = V(\lambda^{-1}(V^{-1}b)) = (\mathrm{FFT}((\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} - \frac{3}{10}i, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i), i))^T$$

- $\mathsf{FFT}((\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} - \frac{3}{10}i, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i), i) = (-\frac{4}{5}, -1, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$
  - $\mathsf{FFT}((\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), -1) = (0, 1)$
  - $\mathsf{FFT}((-\frac{2}{5} - \frac{3}{10}i, -\frac{2}{5} + \frac{3}{10}i), -1) = (-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}i)$

$$\Rightarrow x = \frac{2}{5}(-2, 4, 2, 1)^T$$

Ответ: $\frac{2}{5}(-2, 4, 2, 1)^T$

№6

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(\omega_n^{ij}\right)_{i,j=0}^{n}$$
$$\sqrt{n+1}(F_n)_{jk} = \omega_n^{jk} = \ e^{\frac{2\pi i}{n} jk}$$

Заметим, что $\sqrt{n+1}F_n$ это матрица собственных векторов матрицы $C = \mathrm{circ}(c)$, т. к. $(x^k = (\omega_n^{0k}, \ldots, \omega_n^{nk})^T)$:

$$y = Cx^k, \Rightarrow y_l = \sum_{j=0}^{n} c_{j-l}\omega_n^{jk} = \omega_n^{lk} \sum_{j=0}^{n} c_{j-l}\omega_n^{(j-l)k} = x_l^k \lambda_k,$$

где λ_k не зависит от l, т. к. и c_j и w_n^j периодичны по j, а значит при изменение l в рассматриваемой сумме просто меняется порядок слагаемых. Таким образом, $Cx^k = \lambda_k x^k$, $\Rightarrow x^k$ и λ_k собственный вектор и соответствующие ему собственное значение. А x^k это k-ый столбцов домноженной матрицы Фурье. Значит вектор собственныйх значений $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, где $\lambda_k = \sum_{j=0}^{n} c_j \omega_n^{jk}$, может быть найден так:

$$\lambda = \sqrt{n+1}F_n c,$$

ч. т. д.
$\Rightarrow \lambda = \mathsf{FFT}(c)$
Найдем $\mathsf{FFT}(1, 2, 4, 6)$:

- $\mathsf{FFT}((1, 2, 4, 6), -i) = (13, -3 + 4i, -3, -3 - 4i)$
  - $\mathsf{FFT}((1, 4), -1) = (5, -3)$
  - $\mathsf{FFT}((2, 6), -1) = (8, -4)$

Ответ: $(13, -3 + 4i, -3, -3 - 4i)$

№3

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)=\prod_{i=1}^{n\,div 2}(x-x_i)\cdot\prod_{i=n\,div 2+2}^{n}(x-x_i)=A_n\cdot B_{n},$$

где A_n, B_n многочлены nой степени. Их перемножение БПФ занимает $O(n\log n)$. Таким образом, задача $T(n)$ свелась к $2T(n/2)$ за $O(n\log n)$:

$$T(n)=2T(n/2)+O(n\log n)=O(n\log^2 n)$$

№7

Введем массив B из m элементов, где

$$B[i]=\begin{cases}1 & \text{если } i\in A\\ 0 & \text{если } i\in \bar{A}\end{cases}$$

Рассмотрим полином mой степени $P(x)$, который задается этим массивом (т. е. коэффициент при x^i равен $B[i]$). Рассмотрим коэффициент k_j при x^j в полиноме $P(x)^2$:

$$k_j=\begin{cases}\geq 1 & \text{если } \exists a,b: a+b=j, B[a]=1, B[b]=1\Leftrightarrow a,b\in A\\ 0 & \text{иначе}\end{cases}$$

Таким образом, множеству $A+A$ принадлежат те и только те числа, при x в степени которых в полиноме $P(x)^2$ ненулевые коэффициенты. Т. е. для нахождения множества $A+A$ достаточно вычислить коэффициенты $P(x)^2$, а это с помощью ПФ можно сделать за $O(m\log m)=o(m^2)$.

№5

С семинара (конспект 778), $circ(x)=V_n^{-1}\lambda V_n$, где $\lambda=diag(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ - матрица из собственных векторв $circ(x)$, которые равны $\lambda_k=\sum_{j=0}^{n}x_j\omega_n^{jk}$. Заметим, что

$$(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)^T=V_n x=\mathsf{FFT}(x).$$

Тогда,

$$FFT(circ(x)y) = V_n circ(x)y == V_n V_n^{-1} \lambda V_n y = \lambda \cdot (V_n y) = \lambda \cdot FFT(y) =$$

$$= diag(FFT(x)) \cdot FFT(y)$$

Легво видеть, что умножение по Адамару веторов a на b равносильно вычислению $diag(a) \cdot b$. Тогда из последнего равенства, получаем, что $FFT(x * y) = xadmy$, где adm -умножение по Адамару.

№8

а) Покажем как вычислить $B_i = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j^2 - 2t_{i+j}p_j + t_{i+j}^2)$ для $i = 1, \dots, n$ за $O(n \log n)$:
Рассмотри два полинома $T(x) = t_{n-1}x^{n-1} + \dots + t_0$ и $P(x) = p_0 x^{m-1} + \dots + p_{m-1}$ и найдем их произведение (это БПФ делает за $O(n \log n)$: $C(x) = T(x)P(x)$, в этом многочлене коэффициент при x^{m-1+i}:

$$c_{m-1+i} = p_0 t_i + p_1 t_{i+1} + \dots = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{j+i}.$$

Заметим, что $B_{i+1} = B_i + t_{m+i}^2 - t_i^2 + 2c_{m+i} - 2c_{m+i-1}$.
Таким образом, посчитав B_i, можно за $O(1)$ получить из него B_{i+1}. Тогда посчитаем B_0, найдя сумму квадратов $\sum_{j=0}^{m-1} p_j^2$ и $\sum_{j=0}^{m-1} t_j^2$ за $O(m)$, и посчитав коээфициенты многочлена $C(x)$ за $O(n \log n)$. А затем найдем последовательно $B_i, i = 1, \dots, n$ за $n \cdot O(1) = O(n)$. Таким образом, все значения B_i, показывающие вхождение подстроки в текст, найдены за $O(n \log n)$.
б) Задача вхождения образца в текст с джокерами эквивалентна вычислению $B_i = \sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}(p_j - t_{i+j})^2 = \sum_{j=0}^{m-1}(p_j^3 t_{i+j} - 2t_{i+j}^2 p_j^2 + t_{i+j}^3 p_j)$. С помощью ДПФ за $O(n \log n)$ найдем слеующие произведения полиномов (сами полиномы составляются за $O(n)$):

$$A(x) = (t_{n-1}^3 x^{n-1} + \dots + t_0^3) \cdot (p_0 x^{m-1} + \dots + p_{m-1})$$

$$B(x) = (t_{n-1} x^{n-1} + \dots + t_0) \cdot (p_0^3 x^{m-1} + \dots + p_{m-1}^3)$$

$$C(x) = (t_{n-1}^2 x^{n-1} + \cdots + t_0^2) \cdot (p_0^2 x^{m-1} + \cdots + p_{m-1}^2)$$

Заметим, что $\sum_{j=0}^{m-1} p_j^3 t_{i+j} = b_{m-1+i}$, $\sum_{j=0}^{m-1} p_j t_{i+j}^3 = a_{m-1+i}$, $\sum_{j=0}^{m-1} p_j^2 t_{i+j}^2 = c_{m-1+i}$.
Таким образом, B_i можно найти сложив за $O(1)$ уже найденные коэффициент соответствующих полиномов: $B_i = a_{m-1+i} + b_{m-1+i} - 2c_{m-1+i}$.
Тогда, вся задача нахожения образца в тексте с джокерами решается за $O(n \log n)$.
в) Разделим текст на $\lfloor n/m \rfloor$ кусков длины $2m$ (последний кусок может быть длины $2m + (n \mathrm{mod} 2m)$) следующими перекрывающимися отрезками: $(1, 2m), (m, 3m), \ldots, (n - 3m, n - m), (n - 2m, n)$. Тогда каждый символ, кроме первых m и последних, входит в два куска. Значит, запустив алгоритм поиска подстроки для каждого из кусков по-отдельности, мы сможем найти все вхождения подстроки. Сложность этого: $n/m \cdot O(m) = O(n \log m)$.

№9

Найдем значение коэффициентов y_k за $O(n \log n)$ с помощью БПФ. Тогда искомую сумму можно посчитать за линейное время. Итого сложность алгоритма $O(nn) = o(n^2)$.