Задание на одинадцатую неделю.

№1

Прямая задача:

$$\begin{cases} x+y \longrightarrow max \\ 2x+y \leq 3 \\ x+3y \leq 5 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$$

Сложим, два неравенства с коэффициентами 2 и 1 соответсттвенно:

$$x+y \leq \frac{11}{5}$$

Тогда, из 2-го принципа двойственности решение задачи оптимальное значение функции: $\frac{11}{5}$ при $(x,y) = (4/5, 7/5)$
Оптимальность этого решения $(x+y)_{max} = \frac{11}{5}$ можно так же проверить, составив двойственную задачу к этой и убедившись, что ее оптимальное значение сопадает с полученным. Двойственная задача:

$$y_1(2x+y) + y_2(x+3y) - y_3x - y_4y \leq 3y_1 + 5y_2$$

$$x(2y_1+y_2-y_3) + y(y_1+3y_2-y_4) \leq 3y_1 + 5y_2$$

$\Rightarrow$ Двойственная задача:

$$\begin{cases} 3y_1+5y_2 \longrightarrow min \\ 2y_1+y_2 \geq 1 \\ y_1+3y_2 \geq 1 \\ y_1,y_2 \geq 0 \end{cases}$$

№7

Рассмотрим прямую задачу из 1-го номера. Составим двойственную задачу без учета указанных нер-в:

$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 \longrightarrow min \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 + 3y_2 = 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

А двойственная к ней:

$$\begin{cases} x + y \longrightarrow max \\ 2x + y = 3 \\ x + 3y = 5 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

Как видно, задача не совпадает с исходной.

№2

Задача поиска максимального потока равносильна нахождению оптимального значения в следущей задаче ЛП:

$$\begin{cases} \sum_{j \in V} x_{sj} \longrightarrow max \\ 0 \leq x_{ij} \leq c_{ij} i, j \in V \\ \varepsilon_v \cdot \sum_{j \in V} x_{vj} = \sum_{j \in V} x_{jv} \end{cases}$$

Здесь c_{ij}-пропускная способность ребра ij, а x_{ij} поток через это ребро. Данная задача решается за полиномиальное время.

№3

ЛП задача:

$$
\begin{cases}
S \longrightarrow min \\
e_1 \geq a + 3b + c \\
e_2 \geq 2a + 5b + c \\
e_3 \geq 3a + 7b + c \\
e_4 \geq 5a + 11b + c \\
e_5 \geq 7a + 14b + c \\
e_6 \geq 8a + 15b + c \\
e_7 \geq 10a + 19b + c \\
E_1 \geq (a + 3b + c) \\
E_2 \geq (2a + 5b + c) \\
E_3 \geq -(3a + 7b + c) \\
E_4 \geq -(5a + 11b + c) \\
E_5 \geq -(7a + 14b + c) \\
E_6 \geq -(8a + 15b + c) \\
E_7 \geq -(10a + 19b + c) \\
S \geq E_2 \\
S \geq E_1 \\
S \geq E_3 \\
S \geq E_4 \\
S \geq E_5 \\
S \geq E_6 \\
S \geq E_7 \\
S \geq e_2 \\
S \geq e_1 \\
S \geq e_3 \\
S \geq e_4 \\
S \geq e_5 \\
S \geq e_6 \\
S \geq e_7
\end{cases}
$$

№5

Пусть первая система совместна. Тогда $\exists x:$

$$\begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists x : y \rightarrow y^T Ax \le y^T b \leftrightarrow x^T A^T y \le b^T y, x \ge 0 (1)$$

Если вторая система имеет решение y, то $A^T y \ge 0$. Тогда из (1) :

$$b^T y \ge x^T A^T y \ge 0$$

Но тогда y не решение второй системы, т.к. $b^T y \ge 0$. Противоречие.
Значит, 1-ая система совместна $\Rightarrow$ 2-ая не совместна.
Пусть вторая система не совместна. Предположим, что и первая несовместна. Тогда:

$$x \ge 0 \longrightarrow Ax > b$$

$$y \ge 0 \longrightarrow (A^T y \ge 0 \longrightarrow b^T y \ge 0)$$

Но при $(x, y) = (\vec{0}, \vec{1})$ получаем, т. к. $Ax > 0, y \ge 0$,

$$0 = x^T A^T y > b^T y > 0$$

Противоречие. $\Rightarrow$ 1-ая система совместна $\Leftrightarrow$ 2-ая не совместна.

№6

Если 2-ая система не совместна, то значит $y \ge 0 \Rightarrow A^T y \le 0$. Тогда взяв $y \equiv 0$, получим решение первой системы.
Пусть 2-ая система совместна. Предположим, что первая так же совместна. А x, y их решения. Тогда из первой и второй системы:
$xA^T y > 0 \Rightarrow y^T Ax > 0 \Rightarrow$ (т. к. $y^T \ge 0$ из второй системы) $Ax > 0$.
Противоречие с условием первой системы.
$\Rightarrow$ 1-ая система совместна $\Leftrightarrow$ 2-ая несовместна.