Задание на пятую неделю.

№8

Пусть в каждой урне по S шаров, в первой и второй a и b белых шаров соответственно. Тогда вероятность, что при каждом из n независимых вытаскиваний из первой урны был вытащен белый шар $\frac{a^n}{S^n}$. А вероятность того, что все вытащенные из второй белые: $\frac{b^n}{S}$, все черные: $\frac{(S-b)^n}{S^n}$. Значит, из условия задачи получаем уравнение:

$$\frac{a^n}{S^n} = \frac{b^n}{S^n} + \frac{(S-b)^n}{S^n}.$$

$$\Rightarrow a^n = b^n + (S-b)^n.$$

Т. к. $n \geq 3$, то из Великой теоремы Ферма данное уравнение, не имеет решения в натуральных числах. Но $a, b, S \in \mathbf{Z}$. Значит, есть всего три возможных варианта:

- $a = 0. \Rightarrow b = 0, S = 0$. Но тогда невозможно было вытащить более трех шаров. $\Rightarrow$ Вариант не подходит.
- $b = 0. \Rightarrow S = a$. Тогда в первой урне только белые шары, а во второй только черные. n - любое натуральное число $\leq S$.
- $S - b = 0. \Rightarrow b = a = s$. Тогда в первой и во второй урне только белые шары. n - любое натуральное число $\leq S$.

№9

Предположим, что известно, что одна из последовательностей хотя бы раз встретилась. Значит, среди результатов подбрасывания была Р после которой не шло две подряд О (т. е. ОО). Пока такая первая Р не встретилась, ни одна из последовательностей появиться не могла, т. е. вероятность их появления была равна. Рассмотрим такую первую Р. После нее могут с равной вероятностью идти РР, ОР, РО (все комбинации, кроме ОО). Если идет ОР, то значит последовательность РОР встретилась раньше. Если РО, то РРО раньше.

Если PP, то последовательность PPO точно встретится раньше (как только выпадет следующее O). Таким образом, в 2 из 3 случаев, PPO встречается раньше. Значит, вероятность больше для PPO.

№4

Да, верно. Покажем это:
$\exists L : L \in \mathcal{NPC}, \bar{L} \in \mathcal{NP}$. Пусть, $M \in \mathcal{NP}$. Т. к. $L \in \mathcal{NPC}$, то существует полиномиальная $f(x)$:

$$x \in M \Leftrightarrow f(x) \in L$$

$$\Rightarrow x \in \bar{M} \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}$$

$\Rightarrow$ С помощью функции f $\bar{M} \leq_p \bar{L} \in \mathcal{NP}$. Значит, $\bar{M} \in \mathcal{NP}$. $\Rightarrow$ $M \in co - \mathcal{NP}$. Т. к. M произвольный язык $\mathcal{NP}$, то $\mathcal{NP} \subseteq co - \mathcal{NP}$. Аналогично, если $M \in co - \mathcal{NP}$, то $\bar{M} \in \mathcal{NP}$. $\Rightarrow$ существует полиномиальная $f(x)$:

$$x \in \bar{M} \Leftrightarrow f(x) \in L$$

$$\Rightarrow x \in M \Leftrightarrow f(x) \in \bar{L}$$

$\Rightarrow$ С помощью функции f $M \leq_p \bar{L} \in \mathcal{NP}$. Значит, $\bar{M} \in \mathcal{NP}$. $\Rightarrow$ $M \in co - \mathcal{NP}$. Т. к. M произвольный язык $co - \mathcal{NP}$, то $co - \mathcal{NP} \subseteq \mathcal{NP}$. $\Rightarrow co - \mathcal{NP} = NP$.

№6

Всего различных последовательностей результатов десяти бросаний: 2^{10}.
(i) Число выпавших орлов равно числу решек $\Leftrightarrow$ орел встречается в последовательности результатов ровно 5 раз. Кол-во последовательностей, где ровно 5 орлов, равно кол-ву способов выбрать из 10 мест в последовательности 5 мест для орлов. Т. е. равно C_{10}^5. Значит вероятность этого события

$$P_= = \frac{C_{10}^5}{2^10} = \frac{10 \ldots 9 \ldots 8 \ldots 7 \ldots 6}{24 \ldots 5 \ldots 2^{10}} = \frac{63}{256}$$

(ii) Всего есть три возможных исхода бросания монеты 10 раз: орел и решка выпали одинаковое кол-во раз; орел выпал больше раз; решка выпала больше раз. Обозначим их вероятности соответственно: $P_=, P_o, P_r$. $\Rightarrow P_= + P_o + P_r = 1$ Но т. к. монета симметричная, то очевидно $P_o = P_r$.

$$\Rightarrow P_o = \frac{1 - P_=}{2} = \frac{256 - 63}{256 \cdot 2} = \frac{193}{512}.$$

(iii) Кол-во последовательностей результатов 10 бросаний, в которых при $i = 1, \ldots, 5$ одинаковы результаты i-го и $11 - i$-го бросаний, равно кол-ву возможных последовательностей для 5-ти бросаний, т. к. оставшиеся 5 результатов определяются по ним. Таких последовательностей 2^5.

$$\Rightarrow P = \frac{2^5}{2^{10}} = \frac{1}{32}$$

(iv) Кол-во последовательностей, где ровно 4 идущих подряд орлов равно числу способов расположить объект OOOO (выбрать для него позицию) между шестью решками, т. е. $C_7^1 = 7$. Аналогично, последовательностей, где ровно 5 орлов подряд: $C_6^1 = 6$ и т. д. . Значит последовательностей, где орел выпал хотя бы 4 раза подряд:

$$S = C_7^1 + C_6^1 + \cdots + C_2^1 + C_1^1 = 7 + \cdots + 1 = 28$$

$$\Rightarrow P = \frac{S}{2^{10}} = \frac{7}{256}$$

№7

(i) Пусть k_1, k_2 результаты первого и второго броска соответственно. Найдем $P(k_1 = 6 | k_1 + k_2 = 7)$. Способов набрать из двух натуральных чисел сумму 7: 6, всего различных комбинаций для пары k_1, k_2: 6^2. $\Rightarrow P(k_1 + k_2 = 7) = 6/6^2 = \frac{1}{6}$. Пар k_1, k_2, таких что $k_1 + k_2 = 1, k_1 = 6$, ровно одна. $\Rightarrow P(k_1 = 6 \wedge k_1 + k_2 = 7) = 1/6^2$. Значит,

$$P(k_1 = 6 | k_1 + k_2 = 7) = \frac{P(k_1 = 6 \wedge k_1 + k_2 = 7)}{P(k_1 + k_2 = 7)} = \frac{1/6^2}{1/6} = 1/6.$$

(iii) Пусть $A =$«при броске кубика выпало четное число» и $B =$«при броске кубика выпало число, кратное трём». $P(A) = 1/2$, т. к. кол-во четных и нечетных значений на гранях совпадают. $P(B) = 1/3$, т. к. два из шести числа четные.

$$P(A|B) = \frac{P(A \wedge B)}{P(B)} = P(A \wedge B) \ldots 3.$$

$A \wedge B =$ «при броске кубика выпало число, кратное шести». $\Rightarrow P(A \wedge B) = 1/6$.

$$P(A|B) = 1/6 \cdot 3 = 1/2 = P(A)$$

Значит, A и B независимы по определению.
Ответ: Независимы.
(ii)

$$\mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\} = \sum_{n=1}^{6} n \cdot (P(n = \max\{X_1, X_2\}) +$$

$$+ P(n = \min\{X_1, X_2\})) = \sum_{n=1}^{6} n \cdot (P(n = \max\{X_1, X_2\} \vee \min\{X_1, X_2\}) +$$
$$+ P(n = \min\{X_1, X_2\} = \max\{X_1, X_2\}))$$

$n = \min\{X_1, X_2\} = \max\{X_1, X_2\} \Leftrightarrow X_1 = X_2 = n. \Rightarrow P(n = \min\{X_1, X_2\} = \max\{X_1, X_2\}) = 1/6^2$.
$n = \max\{X_1, X_2\} \vee \min\{X_1, X_2\} \Leftrightarrow$ среди чисел X_1, X_2 есть n. Кол-во пар X_1, X_2, среди которых нет n, равно 5^2. $\Rightarrow P(n = \max\{X_1, X_2\} \vee \min\{X_1, X_2\}) = \frac{1-5^2}{6^2} = \frac{11}{36}$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}\{\max\{X_1, X_2\}\} + \mathbb{E}\{\min\{X_1, X_2\}\} = \sum_{n=1}^{6} n \cdot (\frac{11}{36} + \frac{1}{36}) = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{6} n = 7$$

Ответ: 7
(iv) Пусть дано n вершин. Между каждой парой вершин либо есть ребро либ нет. Значит, всего на этих вершинах существует $2^{n(n-1)/2}$ различных графа. Найдем сколькими способами можно составить из них простой цикл:
Возьмем одну из вершин,пометим ее как первую вершину цикла. Пусть путь по нашему циклу начинается из нее, будем нумеровать

вершины в порядке обхода. 1-ую вершину можно соединить ребром с одной из $(n-1)$ вершин, т. е. $(n-1)$ способов выбрать вторую вершину цикла, третью вершину уже можно выбрать $(n-2)$ способами,т. к. возвращаться в первую и вторую вершину цикл не может, и т. д. . Итого, $(n-1)!$ способов обойти простой цикл. Но т. к. один и тот же цикл можно обойти двумя способами, то существует $(n-1)!/2$ различных простых циклов на n вершинах (при $n \geq 3$).

$$\Rightarrow P = \frac{(n-1)!}{2^{n(n-1)/2+1}}$$

По формуле Стирлинга:

$$\log_2(n-1)! = n\log_2 n - \log_2 e \cdot n + O(\log_2 n) = O(n\log n)$$

$$\log_2 2^{n(n-1)/2+1} = n(n-1)/2+1 = \Omega n^2 = \omega n \log n$$

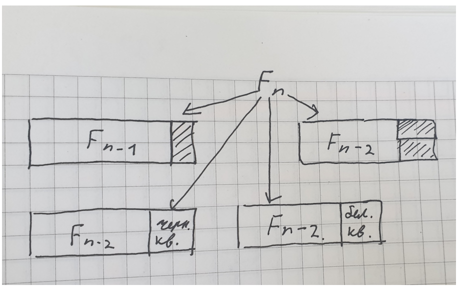
$$\Rightarrow 2^{n(n-1)/2+1} = \omega(n-1)!$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{\omega(n-1)!} = 0$$

Ответ: $P = \frac{(n-1)!}{2^{n(n-1)/2+1}} \longrightarrow 0$

№1

F_n можно выразить следующим образом, рассмотрев чем занят последний столбец в ней (см. рис.):



$$F_n = F_{n-1} + 3F_{n-2}$$

Начальные условия: $F(1) = F(0) = 1$. Найдем явное аналитическое выражение для F_n:

$$\lambda^2 - \lambda - 3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\Rightarrow F_n = C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2})^n$$

С учетом начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1(\frac{1+\sqrt{13}}{2}) + C_2(\frac{1-\sqrt{13}}{2}) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{13}} \\ C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{13}}((\frac{1+\sqrt{13}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{13}}{2})^{n+1})$$

Найдем $F_n \mod 31$:
$13^{\frac{31-1}{2}} = (13^3)^5 = (-1)^5 = -1 \mod 31$. Значит, 13 квадратичный невычет по модулю 31. Пусть $x = \sqrt{13}$.

$$2^{-1} = 16 \mod 31$$

$$13^{-1} = 12 \mod 31$$

$\Rightarrow$ Нужно найти остаток от $F_n = 12x((16x+16)^{n+1} - (16-16x)^{n+1})$. Порядок равен $31^2 - 1 = 960$. $\Rightarrow F_{30000} = F_{240} \mod 31$. По модулю 31: $F_{240} = 2^{4\cdot 240+4} 12x((x+1)^{n+1} - (1-x)^{n+1}) = (2^5)^{45\cdot 4} \cdot 2^4 \cdot 12x((x+1)^{n+1} - (1-x)^{n+1}) = 6x((x+1)^{241} + (x-1)^{241})$

$$(x \pm 1)^{16} = (2(7 \pm x))^8 = (4(49 + 13 \pm 14x))^4 = (\pm 6x)^4 = 13^2 \cdot 5^2 = 9$$

$$(x \pm 1)^256 = (x \pm 1)^{16})^{16} = 9^16 = (19)^8 = 11^4 = (-3)^2 = 9$$

$\Rightarrow (x \pm 1)_{240} \cdot 9 = 9 \mod 31$. $\Rightarrow x \pm 1 = 1 \mod 240$. Значит, $F_{30000} = F_{240} = 6x \cdot (x + 1 + x - 1) = 12x^2 = 12 \cdot 13 = 1 \mod 31$.
Ответ: $F_n = \frac{1}{\sqrt{13}}((\frac{1+\sqrt{13}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{13}}{2})^{n+1})$, $F_{30000} = 1 \mod 31$

№2.1

(ii)Пусть $g_k(n)$ число путей длины k из вершины n. $g_1(1) = 4 = g_4(1), g_2(1) = g_3(1) = 2$. Тогда, рассмотрим путь длиной n и его предпоследнюю вершину $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Очевидно, что

$$g_n = g_1(1) \cdot g_{n-1}(1) \ldots g_1(4) \cdot g_{n-1}(4) =$$

$$= 4g_{n-1}(1)+4g_{n-1}(4)+2g_{n-1}(2)+2g_{n-1}(3) = 2g_{n-1}+2g_{n-1}(1)+2g_{n-1}(4) =$$
$$= 2g_{n-1} + 4g_{n-2}$$

Начальные условия: $g_0 = 1, g_1 = 4$.
(i) $g(2) = 2+8 = 12$. Это число равно сумме элементов первой строки матрицы A^2, т. к. элемент a_{1j} этой матрице равен кол-ву путей из вершины 1 в j длиной 2, $\Rightarrow g(2) = a_{11} + \ldots a_{14} = 12$.

№2.2

Найдем, аналитическое выражение для g_n:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow g_n = C_1(1 + \sqrt{5})^n + C_2(1 - \sqrt{5})^n$$

С учетом начальных условий:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1(1 + \sqrt{5}) + C_2(1 - \sqrt{5}) = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ C_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_n = \frac{3 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}(1 + \sqrt{5})^n + \frac{\sqrt{5} - 3}{2\sqrt{5}}(1 - \sqrt{5})^n$$

(i) Если 5 квадратичный вычет, то в поле вычетов разрешимо $x^2 = 5$: $x = 11$ Тогда в конечном поле по 29 можно заменить $\sqrt{5}$ на 11, а $22^{-1} = 4$:

$$g_n = \frac{14}{22}(12)^n + \frac{8}{22}(-10)^n = 14 \cdot 4 \cdot 12^n + 8 \cdot 4 \cdot (-10)^n = 3 \cdot (-10)^n - 2 \cdot 12^n$$

$$\Rightarrow g_{20000} = 3 \cdot 10^{20000} - 2 \cdot 12^{20000} = 3 \cdot 10^8 - 2 \cdot 12^8 = 3 \cdot 10^8 - 2^{17} \cdot 3^8 =$$

$= 3\cdot3\cdot2^3\cdot(-4)^4-3^{11}\cdot4 = 9\cdot2^{11}-3^2\cdot(-2)^3\cdot4 = 9^2\cdot2+9\cdot3 = 17-2 = 15 \mod 29.$

(ii)

$$2^{-1} = 12, 10^{-1} = 7$$

Пусть $x^2 = 5$. $23^2 - 1 = 528$. Тогда надо найти:

$$g_{10000} = g_{496} = (12 + 3x \cdot 7)(1 + x)^{496} + (12 + 2x)(1 - x)^{496}$$

$$(1 \pm x)^2 = (6 \pm 2x)^4$$

$$(1 \pm x)^4 = (10 \pm x)^2$$

$$(1 \pm x)^8 = (\mp 3x + 13)$$

$$(1 \pm x)^{16} = (7 \mp 9x)$$

$$(1 \pm x)^{32} = (-6 \mp 11x)$$

$$(1 \pm x)^{64} = (-3 \mp 6x)$$

$$(1 \pm x)^{128} = (5 \pm 13x)$$

$$(1 \pm x)^{256} = (-4 \mp 8x)$$

$$\Rightarrow (1 \pm x)^{496} = (1 \pm x)^{256} \cdot (1 \pm x)^{128} \cdot (1 \pm x)^{64} \cdot (1 \pm x)^{32} \cdot (1 \pm x)^{16} =$$

$$= (-4 \mp 8x) \cdot (5 \pm 13x) \cdot (-3 \mp 6x) \cdot (-6 \mp 11x) \cdot (7 \mp 9x) =$$

$$= (3 - 14) \cdot (-5 + 8) \cdot (7 \mp 9x) = -10(7 \mp 9x)$$

$$\Rightarrow g_{10000} = g_{496} = (12 - 2x) \cdot -10(7 + 9x) + (12 + 2x) \cdot -10(7 - 9x) =$$

$$= -10 \cdot (-16 + 4) = 5$$

№3

Если $L \in NP$, то $\exists$ полиномиальная $V : x \in L \Leftrightarrow \exists s : V(x, s) = 1$. Тогда существует машина Тьюринга M, проверяющая выполнимость $V(s) = V(x, s)$ для входа x. Пусть $f(x)$ ставит в соответсвие x пару (M, x). Тогда если $x \in L$, то $\exists s : V(x, s) = 1$, т. е. $V(s)$ выполнима при данном x, а значит $(M, x) \in STOP$. И наоборот, если $(M, x) \in STOP$, то значит $V(s)$ выполнима, т. е. $\exists s : V(x, s) = 1$, $\Rightarrow x \in L$.

$$\Rightarrow x \in L \Leftrightarrow f(x) \in STOP$$

$$\Rightarrow L \leq_p STOP, \Rightarrow STOP \in NP - complete$$

№10

а) Пусть алгоритм сначала запускает генератор два раза, если выпадает 10 или 11 то алгоритм выдает 1, если 00, то 0, если 01, то повторяет операцию до тех пор, пока алгоритм не выдаст другую комбинацию (не 01). Тогда очевидно, вероятность выпадения $1 : 2/3$, $0 : 1/3$. В худшем случае время работы бесконечность (генератор постоянно выдает $0, 1$), в лучшем 2 запуска генератора. Матожидание кол-ва запусков генераторов: $E = \frac{3}{4}\cdot 2+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\cdot 2+\cdots+\frac{1}{4}^{k-1}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\cdot k+\cdots = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4}^{k-1}\cdot\frac{3}{4}\cdot 2\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k}{4^k}$
Т. к. $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$:

$$E = 6\cdot\frac{1/4}{(3/4)^2} = \frac{8}{3}$$

б) Пусть алгоритм запускает два раза подряд генератор. Если выпадает 11 (с вероятностью $\frac{4}{9}$), то алгоритм выдает 1. Если 10 или 01 (с вероятностью $\frac{2}{9}$ и $\frac{2}{9}$ соответственно), то алгоритм выдает 0. Если 00, то алгоритм ничего не выдает и заново повторяет этот шаг и так пока не выпадет комбинация, отличная от 00. Аналогично a), найдем матожидание кол-во необходимых вызовов генератора: $E = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{9}^{k-1}\cdot\frac{8}{9}\cdot 2\cdot k = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{16k}{9^k} = 16\cdot\frac{1/9}{(8/9)^2} = \frac{9}{4}$