Первое задание.

Матричные вычисления.

№1

$$d||Ax||_2 = d\sqrt{< Ax, Ax >} = \frac{1}{2} < Ax, Ax >^{-1/2} d < Ax, Ax >=$$

$$= \frac{1}{2||Ax||_2} \cdot 2 < Ax, dAx >=< \frac{A^T Ax}{||Ax||_2}, dx >=< \nabla, dx >$$

$$\nabla = \frac{A^T Ax}{||Ax||_2}$$

№2

$$\log \det(X + \Delta X) = \log \det(X(I + X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2})) =$$

$$= \log \det X + \log \det(I + X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) = \log \det X +$$

$$+ \log \prod_{i=1}^{n} \lambda_i (I + X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) = \log \det X + \sum_{i=1}^{n} \log(1 + \lambda_i (X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}))$$

Рассмотрим малые приращения $\Delta^2 X \ll X$, тогда ${}^2_i \ll 1$, и следовательно $\log(1 + \lambda_i(X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2})) \approx \lambda_i(X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) - \frac{1}{2}\lambda_i^2(X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2})$. Подставляем:

$$\log \det(X + \Delta X) = \log \det X + \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i (X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) - \frac{1}{2} \lambda_i^2 (X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2})) =$$

$$= \log \det X + \mathrm{tr}(X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \lambda_i^2 (X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2}) =$$

$$= \log \det X + \mathrm{tr}(X^{-1} \Delta X) - \frac{1}{2} \mathrm{tr}((X^{-1/2} \Delta X X^{-1/2})^2)$$

Здесь мы использовали, что $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA), \lambda_i^2(A) = \lambda_i(A^2)$.

№3

$$\frac{\partial}{\partial X}||X||_F^2 = \frac{\partial \mathrm{Tr}(XX^T)}{\partial X} = \frac{\partial(XX^T)}{\partial X} \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial(XX^T)}{\partial X}$$

Здесь использовалось, что якобиан от следа матрицы есть единичная матрица:

$$(\frac{\partial trA}{\partial A}) = (\frac{\partial \sum_{i=1}^n x_{ii}}{\partial x_{ij}})_{i,j=1}^n = \mathbf{E}$$

Далее

$$(\frac{\partial(XX^T)}{\partial X})_{ij} = (\frac{\partial(\sum_{i=1}^n x_i x_i^T)}{\partial X})_{ij} = (\frac{\partial(\sum_{i=1}^n x_i x_i^T)}{\partial x_{ij}} = 2x_{ij}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial X}||X||_F^2 = 2X$$

№4

$$df = d\ln < Ax, x >= \frac{d < Ax, x >}{< Ax, x >} = \frac{2 < Ax, dx >}{< Ax, x >} =< 2\frac{Ax}{< Ax, x >}, dx >$$

$$\Rightarrow \nabla f(x) = 2\frac{Ax}{< Ax, x >}$$

Выпуклые множества.

№1

Докажите, что если множество выпукло, его внутренность также выпукла. Верно ли обратное?

Пусть S данное множество, а $x_1, x_2 \in int(S)$. Тогда $\exists \varepsilon = min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0 : B_\varepsilon(x_1) \in S, B_\varepsilon(x_2) \in S$. Предположим, что $int(S)$ не выпукло. Тогда, $\exists \theta : x_1\theta + (1-\theta)x_2 = x_3 \notin int(S)$. Но т. к. само множество S выпукло: $x_3 \in S$. $\Rightarrow \forall \varepsilon_0 > 0 \exists x_4 \in B_{\varepsilon_0}(x_3) : x_4 \notin S$. Пусть $\varepsilon_0 = \varepsilon$, введем вектор $\epsilon = x_4 - x_3$. $|\epsilon| \leq \varepsilon$. Заметим, что точки $x_5 = x_1 + \epsilon, x_6 = x_2 + \epsilon$, лежат в соответствующих окесностях x_2 и x_1, а значит $x_5, x_6 \in S$.

$$\Rightarrow x_7 = \theta x_5 + (1-\theta)x_6 \in S$$

$x_7 = \theta(x_1 + \epsilon) + (1-\theta)(x_2 + \epsilon) = \theta x_1 + (1-\theta)x_2 + \epsilon = x_3 + \epsilon = x_4 \in S$

Противоречие. Т. к. $x_4 \notin S$. $\Rightarrow$ Предположение неверно. Если множество выпукло, то его внутренность также выпукла, ч. т. д.
Обратное неверно. Контрпример:
Рассмотрим множество S в $\mathbf{R}^1$: интервал $(1, 2)$ и точки $2, 5$. $\mathrm{Int}(S) = (1, 2)$. Это, очевидно, выпуклое множество. При этом само множество невыпукло, точка принадлежит отрезку между $2, 5$, но не принадлежит S.

№2

Докажите что, множество S квадратратных симметричных положительно определенных матриц выпукло.
Пусть A, B две произвольные квадратные симметричные положительно определенные матрицы, т. е. $\in S$. Из свойств матриц $\forall \alpha > 0 \longrightarrow \alpha A \in S$. $\forall C, D \in S \longrightarrow C + D \in S$ (*).

$$\Rightarrow \forall \theta \in (0, 1) : \theta A + (1-\theta)B \in S.$$

При $\theta = 0$,$\theta A + (1-\theta)B = (1-\theta)B \in S$. Аналогично, при $\theta = 1$.

$$\Rightarrow \forall \theta \in [0, 1] \longrightarrow \theta A + (1-\theta)B \in S$$

$\Rightarrow S$ выпукло по определению.
* Доказем, что $\forall C, D \in S : C + D \in S$. Очевидно, что сумма сохраняет симметричность и квадратную форму. Проверим положительную определенность. $\forall x {\equiv} 0 (x, Cx) > 0, (x, Dx) > 0$.
$\Rightarrow (x, (C+D)x) = (x, Cx) = (x, Dx) > 0 \Leftrightarrow (C + D)$- положительно определена.

№3

Покажите, что гиперболический набор $x \in \mathbb{R}^n_+ | \prod_{i=1}^n x_i \geq 1$ выпуклый. Подсказка: для $0 \leq \theta \leq 1, a^\theta b^{1-\theta} \leq \theta a + (1-\theta) b$ с не -отрицательн
a, b.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ лежат в гиперболическом наборе. Тогда $z = \theta x + (1-\theta)y = (\dots, \theta x_i + (1-\theta)y_i, \dots)$. $z_i \geq x_i^\theta y_i^{(1-\theta)}$

$$\Rightarrow \prod_{i=1}^n z_i \geq \prod_{i=1}^n x_i^\theta y_i^{(1-\theta)} = (\prod_{i=1}^n x_i)^\theta \cdot (\prod_{i=1}^n y_i)^{1-\theta} \geq$$

$$\geq (\min(\prod_{i=1}^n x_i, \prod_{i=1}^n y_i))^\theta \cdot (\min(\prod_{i=1}^n x_i, \prod_{i=1}^n y_i))^{1-\theta}$$

$$\geq \min(\prod_{i=1}^n x_i, \prod_{i=1}^n y_i) \geq 1$$

Последнее неравенство следует из того, что $x, y \in S \Leftrightarrow \prod_{i=1}^n x_i \geq 1, \prod_{i=1}^n y_i \geq 1$.
$\Rightarrow \forall \theta \in [0,1], x, y \in S z = \theta x + (1-\theta)y \longrightarrow \prod_{i=1}^n z_i \geq 1 \Leftrightarrow S$ выпукло, ч. т. д..

№4

Докажите, что множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ *выпукло тогда и только тогда, когда* $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$ *для всех неотрицательных* α *и* β.
Если $(\alpha+\beta)S = \alpha S + \beta S$, то подставив $\alpha = \theta, \beta = 1 - sigma$, получим: $S = \theta S + (1-\theta)S$.

$$\Rightarrow \forall x, y \in S \longrightarrow \theta x + (1-\theta)y \in S$$

Значит, S выпукло.
Если S выпукло:
Обозначим $S_1 = (\alpha+\beta)S, S_2 = \alpha S + \beta S$. Пусть $a S_2$, т. е. $a = \alpha x + \beta y$, где $x, y \in S$. Т. к. S выпукло, взяв $\theta = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \in [0,1]$ (т. к. $\alpha, \beta \geq 0$), получим $z = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y \in S$.

$$\Rightarrow d = (\alpha+\beta)z \in S_1.$$

$$d = (\alpha+\beta)\frac{\alpha}{\alpha+\beta}x + \frac{\beta}{\alpha+\beta}y = \alpha x + \beta y = a \in S_1$$

Таким образом, $S_2 \subseteq S_1$.
Пусть, $b \in S_2$, $b = (\alpha + \beta)x$, $x \in S$.

$$b = \alpha x + \beta x \in S_2$$

$$\Rightarrow S_1 \subseteq S_2$$

$$\Rightarrow S_1 = S_2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$$

Значит, множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$ выпукло тогда и только тогда, когда $(\alpha + \beta)S = \alpha S + \beta S$ для всех неотрицательных α и β, ч. т. д..

№5

Очевидно, что все множество вероятностных векторов выпукло (док-во аналогично 2ой части док-ва в задаче №3).
a) Оно выпукло. Докажем это: Если $\alpha > a_n$, то набор пустой и является выпуклым. Если $\alpha \leq a_1$, то набор векторов совпадает с вероятностным пространством векторов и также выпуклый.
Пусть теперь $a_{k-1} < \alpha \leq a_k$. Тогда:
$\mathbb{P}(x > \alpha) \leq \beta \Leftrightarrow \sum_{i=k}^{n} p_i \leq \beta$ (1).
Рассмотрим два вектора c, b, удовлетворяющие этому условию. $\forall \theta \in [0, 1]$ Рассмотри $p = \theta c + (1 - \theta)b$.

$$\sum_{i=k}^{n} p_i = \sum_{i=k}^{n} c_i\theta + \sum_{i=k}^{n} b_i(1-\theta) \leq max(\sum_{i=k}^{n} c_i, \sum_{i=k}^{n} b_i) \leq \beta$$

Последнее неравенство выполняется, т. к. для векторов c, b выполнено условие (1). Но тогда значит для p тоже выполнено это условие, т. е. p так же принадлежит данному набору. Таким образом, данный набор выпуклый.
b) Вектор p принадлежит набор $\Leftrightarrow \mathbb{E}|x^{201}| = \sum_{i=1}^{n} p_i|a_i^{201}| \leq \alpha \sum_{i=1}^{n} p_i|a_i|$
Рассмотрим, $p = \theta c + (1 - \theta)b$, где c, b принадлежат данному набору, $\theta \in [0, 1]$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i|a_i^{201}| = \theta \sum_{i=1}^{n} c_i|a_i^{201}| + (1-\theta) \sum_{i=1}^{n} b_i|a_i^{201}| \leq$$

$$\leq \theta\alpha \sum_{i=1}^{n} c_i|a_i| + (1-\theta)\alpha \sum_{i=1}^{n} b_i|a_i| = \alpha \sum_{i=1}^{n} (\theta c_i + (1-\theta)b_i)|a_i| = \alpha \sum_{i=1}^{n} p_i|a_i|$$

Значит, p принадлежит данному набору. $\Rightarrow$ даннй набор выпуклый.
в) Вектор p принадлежит набор $\Leftrightarrow \mathbb{E}|x^2| = \sum_{i=1}^{n} p_i|a_i^2| \geq \alpha$.
Рассмотрим, $p = \theta c + (1-\theta)b$, где c, b принадлежат данному набору, $\theta \in [0, 1]$.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i|a_i^2| = \theta \sum_{i=1}^{n} p_i|c_i^2| + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} b_i|a_i^2| \geq \theta\alpha + (1-\theta)\alpha \geq \alpha$$

$\Rightarrow$ Вектор p так же принадлежит этому набору. Значит, данный набор выпуклый.
г)

$$\mathbb{V}X = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} xa_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} xa_i)^2$$

Рассмотрим, $x, y \in S, \theta \in [0, 1]$. Тогда, $\sum_{i=1}^{n} xa_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} xa_i)^2 + \alpha$,

$$\sum_{i=1}^{n} ya_i^2 \geq (\sum_{i=1}^{n} ya_i)^2 + \alpha$$

Пусть $z = \theta x + (1-\theta)y$:

$$\mathbb{V}(Z) = \theta\sum_{i=1}^{n} a_i^2 x + (1-\theta)\sum_{i=1}^{n} a_i^2 y - \theta^2(\sum_{i=1}^{n} a_i x)^2 - (1-\theta)^2(\sum_{i=1}^{n} a_i y)^2 -$$

$$-2\theta(1-\theta)\sum_{i=1}^{n} a_i x \sum_{i=1}^{n} a_i y \geq \theta\alpha + \theta(1-\theta)((\sum_{i=1}^{n} a_i y)^2 + (\sum_{i=1}^{n} a_i x)^2 -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} a_i x \sum_{i=1}^{n} a_i y \geq \alpha + (\sum_{i=1}^{n} a_i x + \sum_{i=1}^{n} a_i y)^2 \geq \alpha$$

$$\Rightarrow z \in S$$

Значит, S выпуклое множество.

Проекции.

Норма Фробениуса

Пусть SVD матрицы: $X = UDV$, где в D сингулярные значения стоят на диагонали в порядке убывания:$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots$. Покажем, что $X_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$, , где u_i, v_i i-ые столбцы V, U,, есть искомая проекция.

$$||X - X_k||_F^2 = ||\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T||_F^2 = \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2$$

Покажем, что для любой матицы Y ранга k выполняется, $||X-Y||_F^2 \geq ||X-X_k||_F^2$:
Учтем, нер-во для сингуляных значений: $\sigma_{i+j-1}(A+B) \leq \sigma_i(A)+\sigma_j(B)$, $\forall 1 \leq i, j \leq n, i+j-1 \leq n.(1)$
Т. к. у Y ранг k, то $\sigma_{k+1}(Y) = 0$. подставив $j = k+1, B = Y, A = X-Y$ в неравенство, получим: $\sigma_{i+k}(X) \leq \sigma_i(X-Y) \forall i : 1 \leq n-k$

$$\Rightarrow ||X-Y||_F^2 \geq \sum_{i=1}^{n-k} \sigma_i^2(X-Y) \geq \sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i^2(X) = ||X-X_k||_F^2$$

Значит, X_k искомая проекция.

Спектральная норма Покажем, что для любой матицы Y ранга k выполняется, $||X-Y||_2^2 \geq ||X-X_k||_2^2 = ||\sum_{i=k+1}^{n} \sigma_i u_i v_i^T||_2^2 = \sigma_{k+1}^2$:
Из нер-ва (1): $\sigma_{k+1}(X) \leq \sigma_1(X-Y)$.

$$\Rightarrow ||X-Y||_2^2 \geq \sigma_1^2(X-Y) \geq \sigma_{k+1}(X) = ||X-X_k||_2^2$$

А значит, $X_k = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i u_i v_i^T$ искомая проекция по спектральной норме.

Выпуклые функции.

№4

Среднее арифметическое выпуклая функция, т. к. $f(x)$ линейная, а значит выпуклая функция, а при сложение с положительными коэффициентами выпуклость сохраняется.
Среднее геометрическое вогнутая функция, т.к $h(x) = -g(x) = -(x_1...x_n)^1$
выпукла. Покажем это:
Найдем гессиан функции.

$$-H_{ij} = \frac{\partial^2 h(g)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial \frac{(x_1...x_n)^{(1/n)-1}(x_1...x_n)}{nx_i}}{\partial x_j} = \begin{cases} (1-n)x_i^{-2} & \text{если } i = j \\ x_i^{-1}x_j^{-1} & \text{если } i \equiv j \end{cases}$$

$$\forall v \in \mathbf{R}^n \longrightarrow v^T H v = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_i^2 A_{ij} = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} v_i^2 x_i^{-1} x_j{}^{-1} + n\sum_{i=1}^{n} v_i^2 x_i^{-2} =$$

$$= -(\sum_{i=1}^{n} v_i x_i^{-1})^2 + n\sum_{i=1}^{n} (v_i x_i^{-1})^2 \geq 0$$

Последнее неравенство получено подставлением в нер-во Коши-Буняковс единичного вектора и вектора $(\nu_i x_i^{-1})$. $\Rightarrow$ h выпукла, а значит g вогнута.

№2

$$D(p,q) = \sum_{i=1}^{n} (p_i \log(p_i/q_i) - p_i + q_i)$$

Рассмотрим, $f(p) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i$. Заметим, что

$$H_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j}(1 + \log p_i) = \begin{cases} p_i^{-1} & \text{если } i = j \\ 0 & \text{если } i \equiv j \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla^2 f(x) \geq max(p_1^{-1},, \ldots p_n^{-1})I$. Значит по второму критерию строгой выпуклости, f, определенная на впуклом множестве, строго выпуклая функция. Тогда, по первому критерию:

$$H(p,q) = f(p) - f(q) - \nabla f^T(q)(p-q) \geq \frac{\mu}{2}||p-q||^2$$

$(\nabla(q)^T)_i = 1 + \log q_i$, $\Rightarrow \nabla(q)^T(p-q) = \sum_{i=1}^{n}(1+\log q_i)(p_i - q_i)$. Тогда:

$$H(p,q) = \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i - \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i) + \sum_{i=1}^{n} q_i \log q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i - \sum_{i=1}^{n}(p_i - q_i) - \sum_{i=1}^{n} p_i \log q_i = \sum_{i=1}^{n}(p_i \log(p_i/q_i) - p_i + q_i) =$$

$$= D(p,q) \geq \frac{\mu}{2}||p-q||^2 \geq 0,$$

где равенство достигаетя только при $p = q$, ч. т. д.

№3

Как было показано в 5ой задаче из выпуклых множеств, p выпуклое множество.

1) Математическое ожидание линейная функция, $\Rightarrow$ это одновременно и выпуклая и вогнутая функция.
2) Если $\alpha > a_n$, то $P(p) = 0 \forall p$, выпуклая функция. Аналогично, при $\alpha < a_1$. Пусть $a_i < \alpha \leq a_i + 1$, тогда: $P(p) = \sum_{j=i+1}^{n} p_j$ - линейная функция, а значит является и выпуклой и вогнутой. **3)** Аналогично предыдущему, $a_i < \alpha \leq a_i + 1$, $a_j \leq \beta < a_j + 1$.

$$P(p) = \sum_{k=i+1}^{j} p_k$$

- линейная функция, а значит является и выпуклой и вогнутой.
4) Из первой части задачи 2 по второму критерию следует что это строго выпуклая функция.
5) $V(x) = \mathbb{E}(x^2) - \mathbb{E}(x)^2$

$$V(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2(\lambda p_{1_i} + (1-\lambda)p_{2_i}) - (\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda p_{1_i} + (1-\lambda)p_{2_i}))^2$$

$$\lambda V(p_1) + (1-\lambda)V(p_2) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i^2 p_{1_i} - \lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i p_{1_i})^2 + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} a_i^2 p_{2_i} -$$

$$-(1-\lambda)(\sum_{i=1}^{n} a_i p_{2_i})^2$$

$$\lambda V(p_1) + (1-\lambda)V(p_2) - V(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) = (\sum_{i=1}^{n} a_i(\lambda p_{1_i} + (1-\lambda)p_{2_i}))^2 +$$

$$-\lambda(\sum_{i=1}^{n} a_i p_{1_i})^2 - (1-\lambda)(\sum_{i=1}^{n} a_i p_{2_i})^2 =$$

$$= \lambda(\lambda-1)((\sum_{i=1}^{n} a_i p_{1_i})^2 + (\sum_{i=1}^{n} a_i p_{2_i})^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i p_{1_i} \sum_{i=1}^{n} a_i p_{2_i}) =$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} a_i p_{1_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i p_{2_i})^2 \leq 0,$$

при $0 < \lambda < 1$.
$\Rightarrow$ Это вогнутая функция.
6) Мн-во значений данной функции лежит в множестве $\{a_1, \dots a_n\}$. Значит, оно дискретно. Тогда эпиграф данной функции epi $f = \{[x, \mu] \in S$ очевидно не выпуклое множество. Эпиграф функции $-f$ также не выпуклый, т. к. мн-во ее значений по-прежнему дискретно. $\Rightarrow$ мн-во не является выпуклым и не является вогнутым.

№5

Лемма Если $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ вогнута $h : R \to \mathbb{R}$ выпукла и не возрастает ни по одному аргументу, то $f(x) = h(g(x))$ выпукла.
Док-во (для $x \in R$*)* По второму дифференциальному критерию g, h вогнута и выпукла соответственно $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 g < 0$, $\nabla^2 h > 0$. Т.к. h не возрастает, $(\nabla h)_i \leq 0$.

$$f'' = \underbrace{g'(x)^T \nabla^2 h(g(x)) g'(x)}_{\geq 0} + \overbrace{\nabla h(g(x)) g''(x)}^{\geq 0} \geq 0$$

$\Rightarrow$ f выпукла.

$$f(x) = \frac{1}{h_1(x)}$$

$$h_i(x) = x_i - \frac{1}{h_{i+1}(x)}$$

Заметим, что $v(x) = 1/x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ выпуклая функция, т. к. $v"(x) = \frac{2}{x^3} > 0$.
$h_n(x) = x_n$ - вогнутая функция. $t_i(x) = x_i$ - вогнутая функция.
Предположим, что $h_i(x)$ так же вогнутая функция ($1 \leq i \leq n$). Покажем, что тогда $h_{i-1}(x)$ так же вогнутая функция:

$p(x) = \frac{1}{h_i(x)} = v(h_i(x))$ выпуклая функция по лемме, т. к. $v(x) = 1/x$ выпкулая не возрастающая функция, а $h_i(x)$ вогнутая по предположению. $\Rightarrow$ $(-\frac{1}{h_i(x)})$ вогнутая функция. Тогда $h_{i-1}(x) = x_{i-1} - \frac{1}{h_i(x)}$ вогнута как сумма вогнутых функций с положительными коэффициентами.
Значит, $\forall i : 1 \leq i \leq n \longrightarrow h_i$ вогнута. h_1 вогнута, а значит по нашей лемме $f(x) = \frac{1}{h_1(x)}$ выпукла, ч. т. д..

№6

$x \in (0, 1)$, $(0, 1)$-выпуклое множество.
$f(x) = -(p(x) + p(1 - x))$, где $p(x) = x \ln(x)$. $\nabla p(x) = (1+), \Rightarrow \nabla^2 p(x) = 1/x \geq \mu > 0$. p строго выпуклая функция. $\Rightarrow h(x) = p(x) + p(1 - x) =$

$-f(x)$ так же стого выпуклая функция.
Значит, $f(x)$ - строго вогнутая функция, т. е. невыпуклая.

№1а)

Заметим, что мн-во на котором определена функккция выпукло. Введем $g(t) = f(x + tv)$, $x \in S^n_{++}, v \in S^n$.

$$g(t) = tr((x+tv)^{-1}) = tr(x^{-1}(E+tx^{-1/2}vx^{-1/2})^{-1}) = tr(x^{-1}(E+tV\lambda V^T)^{-1}) =$$

$$= tr(x^{-1}V(E+t\lambda)^{-1}V^T) = tr(V^Tx^{-1}V(E+t\lambda)^{-1}) = \sum_{i=1}^{n}(V^Tx^{-1}V)_{ii}(1+t\lambda_i)^{-1} =$$

$= \sum_{i=1}^n C_i g_i(t)$, где $C_i > 0$, $g_i(t) = (1 + t\lambda_i)^{-1}$- выпуклая функция как было показано в 5ой задаче. $\Rightarrow$ $g(t)$ выпуклая функция. Значит, $f(x)$ так же выпуклая функция.

№1б)

Заметим, что мн-во на котором определена функккция выпукло. Введем $f(t) = g(x + tv)$, $x \in S^n_{++}, v \in S^n$.

$$f(t) = (det(x + tv))^{1/n} = (detx^{1/2}det(E + tx^{-1/2}vx^{-1/2})detx^{1/2})^{1/n} =$$

$= (detx)^{1/n}(\prod_{i=1}^n(1 + t_i))^{1/n}$, где λ_i собственные значения $x^{-1/2}vx^{-1/2}$. $(detx)^{1/n} > 0$. Второй множитель есть композиция функия геометрического произведения от вогнутой функции (суммы). Из 4ой и 5ой задачи это так же вогнутая функция. $\Rightarrow$ $f(t)$ вогнутая функция. Значит, $g(x)$ вогнутая функция.