Шестое задание.

№1

а) ξ, η одинаково распределены, значит $E(\xi|\xi+\eta) = E(\eta|\xi+\eta) = M$. Тогда по свойству условного матожидания:

$$2M = E(\xi|\xi+\eta) + E(\eta|\xi+\eta) = E(\xi+\eta|\xi+\eta) = \xi+\eta$$

$$\Rightarrow M = \frac{\xi+\eta}{2}$$

б) ξ_i распределен одинаково, значит:

$$\forall i, j \to E[\xi_i|S_n, S_{n+1}, \dots] = E(\xi_j|S_n, S_{n+1}, \dots) = M$$

$$\Rightarrow nE(\xi_1|S_n, S_{n+1}, \dots) = \sum_{i=1}^{n} E(\xi_i|S_n, S_{n+1}, \dots) = E(S_n|S_n, S_{n+1}, \dots)(\omega) =$$

$= E(S_n|S_n, \xi_{n+1}, \dots)$ (1). т. к. разбиения порожденные S_n, S_{n+1}, S_{n+2} и $S_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}$ совпадают. Пусть $S_n(\omega) = s$, $\xi_{n+1} = c_1, \xi_{n+2} = c_2, \dots$. Получим:

$$E(S_n|S_n = s, \xi_{n+1} = c_1, \dots) = \sum d_i \mathbb{P}(S_n = d_i|S_n = s, \xi_{n+1} = c_1, \dots) =$$

$$\underbrace{=}_{\text{если} d \equiv s, P=0} sP(S_n = s|S_n = s, \xi_{n+1} = c_1, \dots) = s$$

С учетом (1) получаем, что искомая величина почти наверное равняется:

$$E[\xi_1|S_n, S_{n+1}, \dots] = \frac{S_n}{n}$$

№2

$S_N = \sum_{i=1}^{N} \xi_i$

По определению: $V[S_N] = E[S_N^2] - E[S_N])^2$

$$E[S_N] = E_N(E[\sum_{i=1}^{N} \xi_i | N]) = E_N[N \cdot E\xi] = E\xi \cdot EN$$

$$E[S_N^2] = E_N(E((\sum_{i=1}^{N} \xi_i)^2 | N)) = E_N(E(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \xi_i \xi_j | N)) = E_N(\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} E(\xi_i \xi_j)) =$$

$$= E_N(N \cdot E\xi^2 + N(N-1)(E\xi)^2) = EN \cdot E\xi^2 + EN^2(E\xi)^2 - EN(E\xi)^2$$

Таким образом:

$$V[S_N] = EN \cdot E\xi^2 + EN^2(E\xi)^2 - EN(E\xi)^2 - (E\xi)^2(EN)^2 = EN \cdot V\xi + (E\xi)^2 \cdot VN$$

№3

Из экспоненциального распределения:

$$V(\xi) = \lambda^{-2}, E\xi = \lambda^{-1}, E(\eta) = \mu^{-1}, V(\eta) = \mu^{-2}$$

Рассмотрим борелевскую функцию $m(x) = E[XY|X = x]$:

$$m(x) = E(xY|X = x) = x * E(Y|X = x) = xE[y] = x/\mu$$

$$\Rightarrow M = E(XY|X) = m(X) = X/\mu$$

$E(E(XY|X)) = E(X)/\mu = \frac{1}{\lambda\mu}$

$$VM = V(X/\mu) = \frac{VX}{\mu^2} = \frac{1}{\lambda^2\mu^2}$$

№4

1) Заметим, что $Y_1 = (1, 1, -1)X$. Тогда по формуле для линейных преобразований:

$$E(Y_1) = ((1, 1, -1)E(X) = (1, 1, -1)(2, 3, 1)^T = 4$$

$$V(Y_1) = (1, 1, -1)X(1, 1, -1)^T = 0$$

2)

$$Y_2 = (1,1,1)X$$

$$\Rightarrow E(Y_2) = (1,1,1)(2,3,1)^T = 6$$

$$V(Y_2) = (1,1,1)X(1,1,1)^T = 56$$

3) Из первого пункта получили, что почти наверное $Y_1 = 4$. $\Rightarrow Y_2 = 2(X_1 + X_2) - 4$. Тогда,

$$E(Y_2|X_1 = 5, X_2 = 3) = E(2(X_1+X_2)|X_1 = 5, X_2 = 3) - 4 = 2(5+3) - 4 = 12$$

4) Из предыдущего пункта :

$$E(Y_2|X_1 = 5, X_2 < 3) = E(2(X_1 + X_2)|X_1 = 5, X_2 < 3) - 4 =$$

$$= 6 + 2E(X_2|X_1 = 5, X_2 < 3) = \Big|\eta = (X_2|X_1 = 5) = 2E(\eta|\eta < 3) + 6$$

По формуле конспекта семинара Горбунова: $\eta \sim N(3, \frac{21}{5})$.

$$\Rightarrow E(Y_2|X_1 = 5, X_2 < 3) = 6 + 2\frac{\int_{-\infty}^{3} xf(x)dx}{\int_{-\infty}^{3} f(x)dx} = \frac{1}{\sqrt{\frac{21}{5}}\sqrt{2\pi}} exp - \frac{(x-3)^2}{42/5} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{42\pi}} exp - \frac{5(x-3)^2}{42}$$