Четвертое задание.

№1

Распределение Пуассона
$P\xi = k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \times k = 0 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda$$

$$V\xi = E(\xi)^2 - (E\xi)^2 = E(\xi)^2 - \lambda^2$$

$$E(\xi)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} \times k^2 = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \times ((k-1)+1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}e^{-\lambda} \times (k-1) = \lambda + 0 + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} =$$

$$= \lambda + \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda + \lambda^2$$

$$V\xi = \lambda$$

Экспоненциальное распределение
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$

$$E\xi = \int_0^{\infty} x f(x) dx = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} x dx = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

$$V\xi = E(\xi)^2 - (E\xi)^2 = E(\xi)^2 - \lambda^{-2}$$

$$E(\xi)^2 = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} x^2 dx = -x^2 e^{-\lambda x}|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} e^{-\lambda x} x dx = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$V\xi = \frac{1}{2}$$

№3

а)Пусть в момент n получилась следующая последовательность $(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Из соображений симметрии все последовательности полученные перестановками этой последовательности равновероятны. В $1/n$ из всех таких последовательностей максимальный элемент стоит на последнем n-ом месте (кол-во перестановок с фиксированным последнем элементов меньше в n раз ко-ва всех перестановок). Значит, вероятность того что в исходной последовательности X_n максимальный элемент: $P = \frac{1}{n}$.

б) Введем событие A_i = {На i-ом шаге зарегистрирован рекорд } и индикатор $I(A_i) = \begin{cases} 1 & w \in A_i \\ 0 & w \text{ не принадлежит } A_i \end{cases}$

Тогда ξ = кол-во рекордов зарегистрированных до $n = \sum_{i=1}^{n} I(A_i)$.

$$\Rightarrow E\xi = \sum_{i=1}^{n} EI(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

№2

Матожидание

Пусть событие A_i = лифт остановился на iом этаже =

$$= \text{кто-то из вошедших живет на iом этаже}$$

$$E(\text{кол-во этажей}) = \sum_{i=1}^{16} EI(A_i),$$

где $I(A_i) = \begin{cases} 1 & w \in A_i \\ 0 & w \text{ не принадлежит } A_i \end{cases}$

$EI(A_i) = P(I(A_i) = 1) = P(\text{кто-то из вошедших живет на i ом этаже}) =$

$$= 1 - P(\text{никто из вошедших не живет на i ом этаже}) = 1 - (\frac{15}{16})^n$$

$$\Rightarrow E(\text{кол-во этажей}) = \sum_{i=1}^{16} (1 - (\frac{15}{16})^n) = 16 - \frac{15^n}{16^{n-1}}$$

Дисперсия

$$\xi = \text{кол-во этажей}$$

$$V(\xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$$

$$E\xi^2 = E(\sum_{i=1}^{16} I(A_i))^2 = \sum_{i,j=(1,1)}^{(16,16)} E(I(A_i)I(A_j))$$

$$E(I(A_i)I(A_j)) = P(I(A_i) = 1 = I(A_j)) =$$

$= P(\text{кто-то живет на } i, j\text{-ых этажах}) = 1 - P(\text{никто не живет на } i\text{ом э}) -$
$- P(\text{никто не живет на } j\text{ом э}) + P(\text{никто не живет на } i \text{ и } j\text{ом этаже}) =$

$$= 1 - 2(\frac{15}{16})^n + (\frac{14}{16})^n$$

$$\Rightarrow E\xi^2 = 16^2(1 - 2(\frac{15}{16})^n + (\frac{14}{16})^n)$$

$$V_\xi = 16^2(1-2(\frac{15}{16})^n+(\frac{14}{16})^n)-16(1-(\frac{15}{16})^n) = 240-16\cdot 31(\frac{15}{16})^n+\frac{14^n}{16^{n-2}} =$$

$$= 240 - 31(\frac{15^n}{16^{n-1}}) + \frac{14^n}{16^{n-2}}$$

№4

Будем отсчитывать углы ϕ от противоположного направления по оси OY и по направлению OX и рассматривать только интервал $[0, \pi]$, т. к. в других четвертях все симметрично. Т. к. угол выбирается равновероятно: $F_\phi(x) = \frac{1}{\pi}x$. $X = d\,\mathrm{tg}\,\phi$. Тогда

$$F_X(x) = P(d\,\mathrm{tg}\,\phi < x) = P(\phi\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{d}) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{d}.$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi d}\frac{1}{1+\frac{x^2}{d^2}}$$

Т. е. распределение Коши $c = d$.

$$E|x| = \int_{-\infty}^{+\infty} x\frac{1}{\pi d}\frac{1}{1+\frac{x^2}{d^2}}dx = \int_0^{+\infty}\frac{1}{\pi d}\frac{1}{1+\frac{t}{d^2}}dt =$$

$$= \frac{d}{\pi}\ln|1+\frac{t}{d^2}||_0^\infty = \infty$$

$\Rightarrow$ интеграл Ex не обладает абсолютной сходимостью. А значит у данного расперделения не существует матожидание и дисперсия.

№6

а)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)dS = 1$$

$$1 = \int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \frac{c}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_1dx_2 = \left| x_1 = r\cos\phi, x_2 = r\sin, J = r\phi \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{crdr}{r}\int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2\pi}$$

б)

$$f_{X_1}(x_1, x_2) = \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_2 = \int_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} \frac{1}{2\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\ln(\sqrt{x_1^2+x_2^2}+x_2)\Big|_{-\sqrt{1-x_1^2}}^{\sqrt{1-x_1^2}} = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-x_1^2}}{1-\sqrt{1-x_1^2}}$$

Из симметрии относительно X_1, X_2: $f_{X_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-x_2^2}}{1-\sqrt{1-x_2^2}}$ При $y \in (-1, 1)$:

$$f_{X_1|X_2}(x_1, x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_1, x_2)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-x_2^2}}{1+\sqrt{1-x_2^2}} & |x_1| \leq \sqrt{1-x_2^2} \\ 0 & |x_1| > \sqrt{1-x_2^2} \end{cases}$$

Аналогично,

$$f_{X_2|X_1}(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\ln\frac{1-\sqrt{1-x_1^2}}{1+\sqrt{1-x_1^2}} & |x_2| \leq \sqrt{1-x_1^2} \\ 0 & |x_2| > \sqrt{1-x_1^2} \end{cases}$$

в) Маргиналные распределения не совпадают с условными, $\Rightarrow$ стохастически зависимы.

$$cov(x_1, x_2) = E(x_1 \times x_2) - E(x_1)E(x_2) =$$

$$\int_{x_1^2+x_2^2\leq 1} \frac{x_1x_2}{2\pi\sqrt{x_1^2+x_2^2}}dx_1dx_2 - \int_{-1}^{1} x_1\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-x_1^2}}{1-\sqrt{1-x_1^2}}dx_1 \times \int_{-1}^{1} x_2\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\sqrt{1-}}{1-\sqrt{1-}}$$

$$= \int_0^1 \frac{r^2 dr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi - \left(\right) \times \left(\right)$$

$$= \frac{1}{6\pi}\frac{1}{2} - \frac{1}{6\pi}\frac{1}{2} = 0$$

Значит, коэффициент корреляции так же равен нулю и компоненты не коррелируют.

№5

$u = \xi^2 + \eta^2$, $\nu = \eta$ В силу симметрии будем рассматривать только положительные ξ:

$$\xi = \sqrt{u - \nu^2}, \nu = \eta$$

$$J_{\phi^{-1}} = \frac{1}{2\sqrt{u - \nu^2}}$$

$$\vec{x} = (\xi, \eta) \longrightarrow (u, \nu) = \vec{y}$$

$$f_{\vec{x}}(a, b) = f_\xi(a) f_\eta(b) = \frac{1}{2\pi} e^{-a^2/2} e^{-b^2/2}$$

$$f_{\vec{y}}(a, b) = J f_{\vec{x}}(\sqrt{a - b^2}, b) = \frac{1}{4\pi} e^{-a/2} \frac{1}{\sqrt{u - \nu^2}}$$

А если учесть и отрицательные ξ:

$$f_{\vec{y}}(a, b) = \frac{1}{2\pi} e^{-a/2} \frac{1}{\sqrt{u - \nu^2}}$$

Маргинальное распределение при $u > 0$:

$$f_u(a, b) = \frac{1}{2\pi} e^{-a/2} \int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{u - \nu^2}} d\nu = \frac{e^(- a/2)}{\pi} \arcsin t \Big|_0^1 = \frac{e^{-a/2}}{2}$$

При $u \leq 0$, $f_u(a, b) = 0$. Тогдра искомое распределение:

$$F_{\xi^2 + \eta^2}(x) = \int_0^x \frac{e^{-a/2}}{2} da = -e^{-a/2} \Big|_0^x = -e^{-x/2} + 1$$