Шестое задание.

№1

Пусть ξ имеет решетчатое распределние. Тогда:

$$\phi_\xi(t) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{it(a+kh)} P(\xi = a + kh) = e^{ita} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} e^{itkh} P(\xi = a + kh)$$

$$\Rightarrow \phi_\xi(\frac{2\pi}{h}) = e^{ia\frac{2\pi}{h}} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \underbrace{e^{ik2\pi}}_{1} P(\xi = a+kh) = e^{ia\frac{2\pi}{h}} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} P(\xi = a + kh)}_{1} = e^{ia\frac{2\pi}{h}}$$

$$\Rightarrow |\phi_\xi(t)| = |\frac{2\pi}{h}| = 1$$

Пусть теперь, $|\phi_\xi(t)| = 1(1)$. Тогда возьмем $a = \arg(\phi_\xi(\frac{2\pi}{h})(2)$ и распишем:

$$\phi_\xi(t) = e^{ita}(E(\cos(t(\xi - a)) + iE(\sin(t(\xi - a)))$$

При $t = 2\pi/h :$ из $(1), (2) :$

$$1 = \phi_{\xi-a} = E(\cos(t(\xi - a)) + iE(\sin(t(\xi - a))$$

$$\Rightarrow E(\cos(t(\xi - a)) - 1) = 0 \Rightarrow t(\xi - a) = \frac{2\pi}{h}(\xi - a) \underbrace{=}_{\text{п.н.}} 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Таким образом, утверждение доказано в обе стороны.

№3

Т. к. случайные величины независимы, то $\phi_{\xi-\eta}(t) = \phi_\xi(t)\phi_{-\eta}(t)$.

$$\Rightarrow \phi_{\xi-\eta}(t) = \phi_\xi(t)\phi_\eta(-t) = \phi(t)\overline{\phi(t)} = |\phi(t)|^2$$

№2

1) Нет, не может быть, т. к. она имеет разрыв и не является равномерно непрерывной,что противоречит свойству характеристической функции.
2) Пусть у нас получилось сгладить разрывы так, что полученная функция $\Phi(t)$ является характеристической функцией некоторо случайной величины. Тогда ее плотность распределения:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\Phi(t)dt$$

Заметим, что $\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(t)dt = 2\frac{\sin Tx}{x}$, а значит $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\phi(t)dt$ знакопеременная функция. Т.к. $\Phi(x)$ отличается от $\phi(x)$ лишь сглаженными разрывами в конечном числе точек, то обратное преобразоние Фурье от $\Phi(x)$ $(f(x))$ тоже знакопеременная функция. Т.е. плотность распределения $f(x)$ знакопеременная функция, но это невозможно по определению плотности. Противоречие. Значит, если сгладить разрывы точках, ответ все равно не изменится: функция не характеристическая.

№4

1)

$$\phi_\xi(t) = E(e^{it\xi}) = \int_{[0,1]} e^{itw}f(w))dw = \int_0^{\frac{1}{2}} e^{it2w}dw + \int_0^{\frac{1}{2}} e^{it(2w-1)}dw =$$

$$= \frac{1}{2it}e^{2itw}\Big|_0^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2ite^{it}}e^{2itw}\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = \frac{2e^{it}}{2it} - \frac{2}{2it} = i\frac{1-e^{it}}{t}$$

2)

$$\phi_\xi(t) = \int_0^1 e^{it\log w}dw = \int_0^1 w^{it}dw = \frac{1}{it+1}w^{it+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{it+1}$$

3)

$$\phi_\xi(t) = \int_0^{1/3} e^{it}dw + \int_1^{2/3} e^{it}dw + \int_{1/3}^{2/3} dw = \frac{2e^{it}+1}{3}$$