Третье задание.

№1

$$z = max(X, y)$$

$$F_z(t) = P(z < t) = Pmax(X, Y) < t = P(X < t, Y < t) = P(X < t)P(Y < t) =$$
$$= F_X(t)F_Y(t)$$

Заметим, что $min(X, Y) + max(X, Y) = X + Y$. Тогда:

$$h = min(X, Y)$$

$$\Rightarrow F_h(t) = F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t)F_Y(t)$$

№3

$$F_{X^2}(x) = P(X^2 < x) = P(\sqrt{x} < X < \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x})$$

Продиффиренцируем:

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(\sqrt{x}) + \frac{1}{2\sqrt{x}} f_X(-\sqrt{x})$$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\Rightarrow f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\sqrt{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(-\sqrt{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}})$$

№2

$\eta = F_\xi(x) \in [0, 1]$. Т. к. плотность всюду определена, положиельна, то $F_\xi(x)$ возрастает и всюду дифференцируемо. Тогда по теореме 3 с семинара:

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(x)}{(F_\xi(x))'} = \frac{f_\xi(x)}{(f_\xi(x))} = 1$$

Где $f_\eta(y)$ плотность распределения на отрезке $[0, 1]$. Тогда распределение на этом отрезке:

$$F_\eta(y) = \int_0^y f_\eta(x)dx = \int_0^y f_\eta(x)dx = y$$

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0 & y < 0 \\ y & y \in [0, 1] \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

№4

Второй единичный вектор составляет с первым (и осью абсцисс) угол $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Т. к. распеделение напрпарвления равномерно: $F_\alpha(x) = \frac{1}{2\pi}(x + \pi) = \frac{1}{2} + \frac{x}{2\pi}$. Длина третьей стороны $b = 2\sin\alpha/2$.

$$P(b < x) = P(2\sin\alpha/2 < x) = \begin{cases} 0 & \text{если } x \leq -2 \\ 1 & \text{если } x \geq 2 \\ P(\sin\alpha/2 < x/2) & \text{если } |x| \leq 2 \end{cases}$$

$$P(\sin\alpha/2 < x/2) = P(-2\arcsin x/2 < \alpha < 2\arcsin x/2) =$$

$$= F_\alpha(2\arcsin x/2) - F_\alpha(-2\arcsin x/2) = \frac{1}{\pi}\arcsin x/2 + \frac{1}{\pi}\arcsin x/2 =$$

$$= \frac{2}{\pi}\arcsin x/2$$

Ответ: $F_\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin x/2$