Lenguajes Formales, Autómatas y Computabilidad

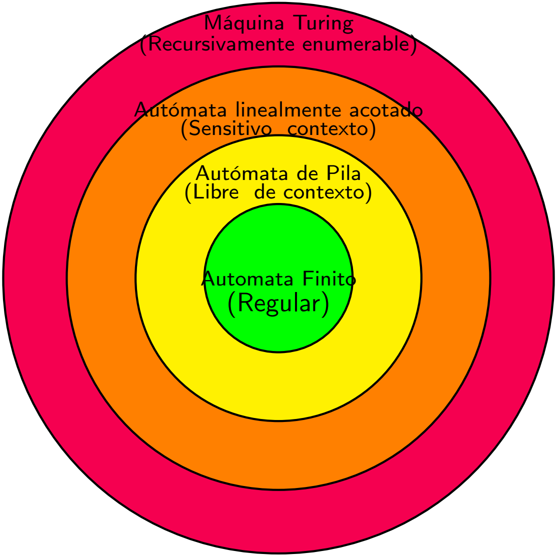
Clase Teórica
Autómatas Finitos

Primer cuatrimestre 2025

Bibliografía

Capítulo 2, *Introduction to Automata Theory, Languages and Computation*,
J. Hopcroft, R. Motwani, J. Ullman, Second Edition, Addison Wesley, 2001.

Jerarquía de Autómatas y los lenguajes que aceptan



Alfabetos y Lenguaje

Un alfabeto es un conjunto finito, no vacío, de símbolos.

Consideramos la concatenación de símbolos.

Una palabra sobre el alfabeto Σ es la concatenación de los elementos de una secuencia finita de símbolos. También la llamamos cadena o string.

La palabra nula λ. No tiene símbolos.

Ejemplos: Estas son algunas palabras sobre $\Sigma = \{a, j, r\}$,
λ, a, j, r, aa, aj, ar, ja, jj, aaj, rja, $raja$, $jarra$, etc.

El conjunto de todas las palabras sobre un alfabeto

Dado alfabeto Σ, escribimos:
$\Sigma^0 = \{\lambda\}$
$\Sigma^1 = \Sigma$
$\Sigma^2 = \Sigma\Sigma = \{ab : a \in \Sigma, b \in \Sigma\}$
$\Sigma^3 = \Sigma\Sigma\Sigma = \{abc : a \in \Sigma, b \in \Sigma, c \in \Sigma\}$
...
La clausura de Kleene del alfabeto Σ

$$\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$$

La clasura positiva del alfabeto Σ,

$$\Sigma^+ = \bigcup_{i \geq 1} \Sigma^i$$

Ejemplos:
Supongamos $\Sigma = \{a, b\}$. Entonces $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$,
$\Sigma^3 = \{aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb\}$, ...
Σ^* es el conjunto de todas las palabras sobre el alfabeto $Sigma$, de todas las longitudes, $0, 1, 2, \ldots$.

El conjunto de todas las plabras sobre un alfabeto

¿Cuál es la cardinalidad del conjunto Σ^i?

El conjunto Σ tiene $|\Sigma|$ elementos.
Para cada $i \geq 0$, Σ^i tiene $|\Sigma|^i$ palabras.
El conjunto Σ^* tiene una cantidad infinita numerable de palabras.

Hay tantas palabras como números naturales

Teorema

$|\Sigma^*|$ *es igual al la cardinalidad de* $\mathbb{N}$*.*

Un orden entre pares de elementos es una relación antisimétrica y transitiva.

Definición (Orden longitud-lexicográfico en Σ^*)

Definimos el orden $\prec \subset \Sigma^* \times \Sigma^*$*:*
Asumimos un orden lexicográfico entre los elementos del alfabeto. Lo extendemos a un lexicografico entre todas las palabras de la misma longitud. Y ahora lo extendemos a un orden total de todas las palabras: Las palabras de menor longitud son menores que las de mayor longitud.

Por ejemplo para $\Sigma = \{a, b, c\}$,
$\lambda \prec a \prec b \prec c \prec aa \prec ab \prec ac \prec ba \prec bb \prec bc \prec ca \prec cb \prec cc \prec aaa \prec aab \prec aac \prec aba \prec ....$

Demostración del Teorema.

Definimos una biyección $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$, $f(i) =$ la i-ésima palabra en el orden $\prec$ longitud lexicografico sobre Σ^*. $\square$

Lenguaje sobre un alfabeto

Un lenguaje L sobre un alfabeto Σ es un conjunto de palabras sobre Σ.
Es decir, $L \subseteq \Sigma^*$.

Ejemplos:
$\emptyset$
$\{\lambda\}$ (notar que es distinto de $\emptyset$)
$\{0, 01, 011, 0111, 01111, \ldots\ldots\}$, es un lenguaje sobre $\Sigma = \{0, 1\}$.

¿Cuántos lenguajes hay?

Definición

Si A es un conjunto, $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de A, $\mathcal{P}(A) = \{B \subseteq A\}$.

Si A es un conjunto finito $\mathcal{P}(A) = 2^{|A|}$.

Ejemplo: $A = \{a, b, c\}$ y
$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$ y $|\mathcal{P}(A)| = 2^3$.

La cantidad de lenguajes es no numerable

El conjunto de todos los lenguajes sobre alfabeto Σ es .

$$\mathcal{P}(\Sigma^*) = \{L \subseteq \Sigma^*\}$$

Teorema

$|\Sigma^*| < |\mathcal{P}(\Sigma^*)|$.

Demostración.

Supongamos que $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ es numerable y supongamos el orden longitud y lexicográfico en cada L_i,

$L_1 : \boxed{w_{1,1}}, w_{1,2}, w_{1,3}, w_{1,4}, w_{1,5} \ldots$

$L_2 : w_{2,1}, \boxed{w_{2,2}}, w_{2,3}, \ldots$

$L_3 : w_{3,1}, w_{3,2}, \boxed{w_{3,3}}, \ldots$

$\vdots$

Sea $L = \{u_1, u_2, \ldots\}$ donde $|u_1| < |u_2| < \ldots$ y para todo i, $w_{i,i} < u_i$.
Entonces L no puede ser ninguno de los L_i, porque para todo i, $w_{i,i} < u_i$.
Por lo tanto, $|\Sigma^*| < |\mathcal{P}(\Sigma^*)|$.

$\square$

Definición (autómata finito determinístico (AFD))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *el alfabeto de entrada*
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ *es la función de transición*
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*
- $F \subseteq Q$ *es el conjunto de estados finales*

Definición (función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

Definimos $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to Q$,

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = q$
- $\widehat{\delta}(q, xa) = \delta\left(\widehat{\delta}(q, x), a\right)$, *con* $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

Notar que $\widehat{\delta}(q, a) = \delta\left(\widehat{\delta}(q, \lambda), a\right) = \delta(q, a)$.

Definición (lenguaje aceptado por un AFD)

El lenguaje aceptado por un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$, *al que denotamos* $\mathcal{L}(M)$, *es el conjunto de palabras de* Σ^* *aceptadas por* M,

$$\mathcal{L}(M) = \left\{x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}(q_0, x) \in F\right\}.$$

Veremos a los autómatas finitos como funciones tales que para cada palabra dan un valor booleano: aceptación o no aceptación,

$$M : \Sigma^* \to \{0, 1\}$$

Autómata finito no determinístico

Definición (autómata finito no determinístico (AFND))

Es una 5-upla $\langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ *donde*

- Q *es un conjunto finito de estados*
- Σ *el alfabeto de entrada*
- $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$
- $q_0 \in Q$ *es el estado inicial*
- $F \subseteq Q$ *es el conjunto de estados finales*

Definición (función de transición generalizada $\widehat{\delta}$)

Definimos $\widehat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$*,*

- $\widehat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$
- $\widehat{\delta}(q, xa) = \left\{ p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}(q, x) \text{ y } p \in \delta(r, a) \right\}$,
  con $x \in \Sigma^*$ *y* $a \in \Sigma$.

Notar que

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}\,(q,\lambda a) &= \left\{p \in Q : \exists r \in \widehat{\delta}\,(q,\lambda) \ \text{ y } p \in \delta\,(r,a)\right\} \\
&= \{p \in Q : \exists r \in \{q\} \ \text{ y } p \in \delta\,(r,a)\} \\
&= \{p \in Q : p \in \delta\,(q,a)\} \\
&= \delta\,(q,a)\,.
\end{aligned}$$

Definición (lenguaje aceptado por un AFND)

El lenguaje aceptado por AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle$*, al que denotamos* $\mathcal{L}\,(M)$*, es el conjunto de palabras de* Σ^* *aceptadas por* M*,*

$$\mathcal{L}\,(M) = \left\{x \in \Sigma^* : \widehat{\delta}\,(q_0,x) \cap F \neq \phi\right\}.$$

Podemos extender la función de transición aún más, haciendo que mapee conjuntos de estados y palabras en conjuntos de estados.

Definición (función de transición de conjuntos de estados)

Función de transición δ-extendida : $\mathcal{P}(Q) \times \Sigma \rightarrow \mathcal{P}(Q)$,

$$\delta\textit{-extendida}\,(P, a) = \bigcup_{q \in P} \delta\,(q, a)\,.$$

Y definimos $\widehat{\delta}$-extendida : $\mathcal{P}(Q) \times \Sigma^* \rightarrow \mathcal{P}(Q)$,

$$\widehat{\delta}\textit{-extendida}\,(P, x) = \bigcup_{q \in P} \widehat{\delta}\,(q, x)\,.$$

Es trivial ver que, para todo AFD existe un AFND equivalente.
Lo que no es tan obvio es que lo recíproco también es cierto:
para cada AFND existe un AFD equivalente.

Teorema (Equivalencia entre AFND y AFD (Rabin & Scott, 1959))

Dado un AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$*, existe un AFD* $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$ *tal que* $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M')$.

Demostración del teorema

Dado AFND $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ donde
$\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$, y su extensión es δ-extendida : $\mathcal{P}(Q) \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$,
construimos un AFD $M' = \langle Q', \Sigma, \delta', q_0', F' \rangle$, con $\delta : Q' \times \Sigma \to Q'$,

$Q' = \mathcal{P}\left(Q\right)$

$\delta' = \delta$-extendida

$q_0' = \{q_0\}$

$F' = \{P \in Q' : P \cap F \neq \emptyset\}$

Debemos probar que $\mathcal{L}\left(M'\right) = \mathcal{L}\left(M\right)$.

Por definición AFD M', $x \in \mathcal{L}(M')$ si y solo si $\widehat{\delta}'(q_0', x) \in F'$, donde $F' = \{P \in Q' : P \cap F \neq \emptyset\}$

Y por definición de AFND M, $x \in \mathcal{L}(M)$ si y solo si $\widehat{\delta}(q_0, x) \cap F \neq \emptyset$.

Demostremos que para toda palabra $x \in \Sigma^*$, $\widehat{\delta}'(q_0', x) = \widehat{\delta}(q_0, x)$, por inducción en la estructura de la palabra x.
Escribimos $|x|$ para la longitud de la palabra x.

Caso Base: $x = \lambda$, es decir $|x| = 0$.
Por definición de $\widehat{\delta}'$ y $\widehat{\delta}$, $\widehat{\delta}'(q_0', \lambda) = \{q_0\}$ y $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$,
por lo que $\widehat{\delta}'(q_0', \lambda) = \{q_0\}$ si y solo si $\widehat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$.

Caso inductivo
HI: suponemos que vale para x tal que $|x| = n$, es decir suponemos $\widehat{\delta}'(q_0', x) = R$ si y solo si $\widehat{\delta}(q_0, x) = R$.

Veamos que vale para xa, con $a \in \Sigma$.

$$\widehat{\delta}'(q_0', xa) = \delta'\left(\widehat{\delta}'(q_0', x), a\right) = R$$

si y solo si

(por definición de $\widehat{\delta}'$ en AFD M')

$$\exists P, \widehat{\delta}'(q_0', x) = P \text{ y } \delta'(P, a) = R$$

si y solo si

(por HI y por definición de $\widehat{\delta}$ y δ-extendida en AFND M)

$$\exists P, \widehat{\delta}(q_0, x) = P \text{ y } \delta\text{-extendida}(P, a) = R$$

si y solo si

por def $\widehat{\delta}$ y δ-extendida en AFND M,

$$\widehat{\delta}(q_0, xa) = \delta\text{-extendida}(\delta(q_0, x), a) = R.$$

Concluimos, $\delta'(q_0', xa) = R$ si y solo si $\delta(q_0, xa) = R$.

□

Ejercicios

1. Dado un AFD $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$, y sea a in símbolo de Σ. Construir otro AFD M' que acepte el lenguaje $L = \{ax \in \Sigma^* : x \in \mathcal{L}(M)\}$.
2. Indicar Verdadero o Falso y justificar
   Si $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es un AFD entonces reconoce al menos $|Q|$ palabras distintas, es decir $\#\mathcal{L}(M) \geq |Q|$.

   Si $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ es AFND entonces todas las palabras de $\mathcal{L}(M)$ tienen longitud menor or igual que $|Q|^2$.
3. ¿Cuántos AFD hay con $|Q| = 2$ y $|\Sigma| = 3$?
4. ¿qué pasa si revierto todas las flechas de un AFD ?
5. ¿qué pasa si invierto estados finales con no finales de un AFND?