Procesamiento Cuántico de Información

Ariel Bendersky[1]

[1]Departamento de Computación - FCEyN - Universidad de Buenos Aires

Clase 2

Clase 2

- Formalismo.
- Estados.
- Mediciones.
- Conjuntos completos de observables que conmutan.
- Principio de incertidumbre de Heisenberg.

Clase 2

- Formalismo.
- Estados.
- Mediciones.
- Conjuntos completos de observables que conmutan.
- Principio de incertidumbre de Heisenberg.

Clase 2

- Formalismo.
- Estados.
- Mediciones.
- Conjuntos completos de observables que conmutan.
- Principio de incertidumbre de Heisenberg.

Clase 2

- Formalismo.
- Estados.
- Mediciones.
- Conjuntos completos de observables que conmutan.
- Principio de incertidumbre de Heisenberg.

Clase 2

- Formalismo.
- Estados.
- Mediciones.
- Conjuntos completos de observables que conmutan.
- Principio de incertidumbre de Heisenberg.

¿Cómo es una computadora cuántica?

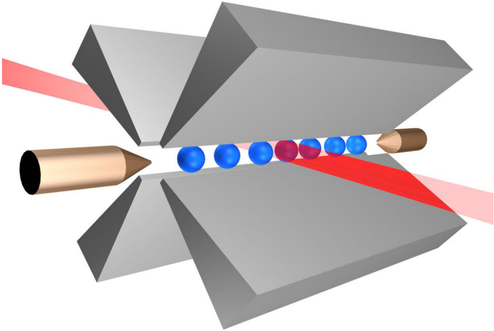


Figura tomada de http://www.uibk.ac.at/th-physik/qo/research/trappedions.html

¿Cómo es una computadora cuántica?

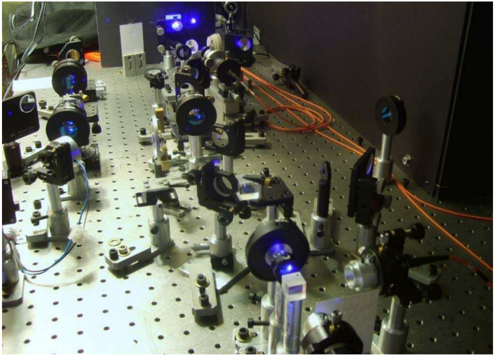


Figura tomada de la tesis doctoral de Christian Schmiegelow.

¿Cómo se estudia?

Igual que en computación clásica, en computación cuántica nos abstraemos del hardware, y pensamos en cualquier sistema de dos niveles (qubit) como el análogo cuántico del bit clásico. Con eso en mente podemos desarrollar un formalismo único, que no depende del sistema físico en cuestión, para estudiar computación cuántica.

Formalismo

Nuestro nuevo hogar. El espacio de Hilbert.

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con algunas propiedades:

- Tiene un producto interno.
- Es un espacio métrico completo.
- Puede ser real o complejo. En esta materia sólo usaremos espacios complejos.

Nuestro nuevo hogar. El espacio de Hilbert.

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con algunas propiedades:

- Tiene un producto interno.
- Es un espacio métrico completo.
- Puede ser real o complejo. En esta materia sólo usaremos espacios complejos.

Nuestro nuevo hogar. El espacio de Hilbert.

Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con algunas propiedades:

- Tiene un producto interno.
- Es un espacio métrico completo.
- Puede ser real o complejo. En esta materia sólo usaremos espacios complejos.

Los estados cuánticos

Definición

El estado de un sistema cuántico está representado por un vector $|\psi\rangle$ perteneciente a un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con $\langle\psi|\psi\rangle = 1$.

$|\psi\rangle$ es un vector columna complejo de módulo 1

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\langle\psi|$ es el transpuesto conjugado de $|\psi\rangle$, también notado como $|\psi\rangle^\dagger$.

Los qubits

El qubit - Definición

Se llama *qubit* a cualquier sistema de dimensión 2. Es el equivalente cuántico del bit.

La base computacional

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que es una base ortonormal: $\langle 0|1\rangle = 0$ y $\langle k|k\rangle = 1$. La computación clásica sólo admite estados de esta base canónica.

Los qubits

El qubit - Definición

Se llama *qubit* a cualquier sistema de dimensión 2. Es el equivalente cuántico del bit.

La base computacional

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que es una base ortonormal: $\langle 0|1\rangle = 0$ y $\langle k|k\rangle = 1$. La computación clásica sólo admite estados de esta base canónica.

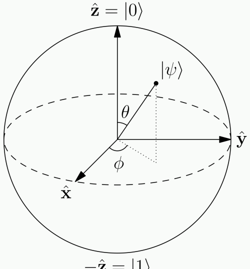
Los qubits

Estado más general

$$|\psi\rangle = cos\,(\theta/2)\,|0\rangle + sen\,(\theta/2)\,e^{i\phi}\,|1\rangle$$

El estado de un qubit puede ser cualquier vector de módulo 1.
Están definidos a menos de una fase global (luego veremos por qué).

La esfera de Bloch



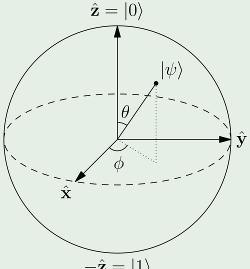
Los qubits

Estado más general

$$|\psi\rangle = cos\,(\theta/2)\,|0\rangle + sen\,(\theta/2)\,e^{i\phi}\,|1\rangle$$

El estado de un qubit puede ser cualquier vector de módulo 1. Están definidos a menos de una fase global (luego veremos por qué).

La esfera de Bloch



Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Tenemos estados, ¿qué hacemos con ellos?

Una vez que sabemos cómo representar el estado del sistema, hay dos cosas que nos pueden interesar:

- Medición.
  - ¿Qué le puedo medir a un estado?
  - ¿Qué resultados puedo obtener y con qué probabilidades?
  - ¿En qué estado queda el sistema después de medirle una propiedad?
- Evolución temporal.
  - ¿Cómo puedo transformar un estado en otro?

Las mediciones proyectivas

Descripción matemática de las mediciones

Una medición está definida por un conjunto de proyectores $\{\Pi_i\}$* con $\sum_i \Pi_i = Id$. La mecánica cuántica dice:

- La probabilidad de obtener el resultado i al realizar dicha medición al estado $|\psi\rangle$ es $p_i = \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle$.
- El estado del sistema luego de obtener el resultado i es:

$$|\psi_i\rangle = \frac{\Pi_i |\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle}}$$

* Un proyector es un operador tal que $\Pi^2 = \Pi$. Llamaremos operador a una matriz.

Los observables

- Se llama observable a cualquier operador hermítico $A = A^\dagger$. Notación: $\dagger$ es la matriz transpuesta y conjugada.
- El valor medio de dicho observable en el estado $|\psi\rangle$ es $\langle\psi| A |\psi\rangle$.
- La medición de un observable se hace a partir de medir los proyectores que resultan de su diagonalización. $A = \sum_i \alpha_i \Pi_i$, luego:

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \langle\psi| \sum_i \alpha_i \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i p_i$$

- Los autovalores α_i son los posibles resultados de la medición de A.

Los observables

- Se llama observable a cualquier operador hermítico $A = A^\dagger$. Notación: $\dagger$ es la matriz transpuesta y conjugada.
- El valor medio de dicho observable en el estado $|\psi\rangle$ es $\langle\psi| A |\psi\rangle$.
- La medición de un observable se hace a partir de medir los proyectores que resultan de su diagonalización. $A = \sum_i \alpha_i \Pi_i$, luego:

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \langle\psi| \sum_i \alpha_i \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i p_i$$

- Los autovalores α_i son los posibles resultados de la medición de A.

Los observables

- Se llama observable a cualquier operador hermítico $A = A^\dagger$. Notación: $\dagger$ es la matriz transpuesta y conjugada.
- El valor medio de dicho observable en el estado $|\psi\rangle$ es $\langle\psi| A |\psi\rangle$.
- La medición de un observable se hace a partir de medir los proyectores que resultan de su diagonalización. $A = \sum_i \alpha_i \Pi_i$, luego:

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \langle\psi| \sum_i \alpha_i \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i p_i$$

- Los autovalores α_i son los posibles resultados de la medición de A.

Los observables

- Se llama observable a cualquier operador hermítico $A = A^\dagger$. Notación: $\dagger$ es la matriz transpuesta y conjugada.
- El valor medio de dicho observable en el estado $|\psi\rangle$ es $\langle\psi| A |\psi\rangle$.
- La medición de un observable se hace a partir de medir los proyectores que resultan de su diagonalización. $A = \sum_i \alpha_i \Pi_i$, luego:

$$\langle\psi| A |\psi\rangle = \langle\psi| \sum_i \alpha_i \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i \langle\psi| \Pi_i |\psi\rangle = \sum_i \alpha_i p_i$$

- Los autovalores α_i son los posibles resultados de la medición de A.

Propiedades de los observables

- Como toda matriz hermítica, son diagonalizables.
- Sus autovalores son reales. (La demostración viene por considerar la matriz diagonalizada, sólo puede ser igual a su transpuesta conjugada si son reales los valores de la diagonal).
- $\langle\psi| A |\psi\rangle$ es real para todo vector $|\psi\rangle$ y para todo operador hermítico A. Demostración: $(\langle\psi| A |\psi\rangle)^\dagger = \langle\psi| A^\dagger |\psi\rangle = \langle\psi| A |\psi\rangle$ (Recordar que $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$).

¿Cuánta información tiene un qubit?

A diferencia de un bit clásico, que la información necesaria para prepararlo y la que se le puede extraer es la misma, en un qubit es distinto:

- ¿Cuánta información necesito para describir el estado de un qubit?
- ¿Cuánta información puedo envíar en un qubit?
- Entonces, ¿es tan bueno?

¿Cuánta información tiene un qubit?

A diferencia de un bit clásico, que la información necesaria para prepararlo y la que se le puede extraer es la misma, en un qubit es distinto:

- ¿Cuánta información necesito para describir el estado de un qubit?
- ¿Cuánta información puedo envíar en un qubit?
- Entonces, ¿es tan bueno?

¿Cuánta información tiene un qubit?

A diferencia de un bit clásico, que la información necesaria para prepararlo y la que se le puede extraer es la misma, en un qubit es distinto:

- ¿Cuánta información necesito para describir el estado de un qubit?
- ¿Cuánta información puedo envíar en un qubit?
- Entonces, ¿es tan bueno?

¿Cuánta información tiene un qubit?

A diferencia de un bit clásico, que la información necesaria para prepararlo y la que se le puede extraer es la misma, en un qubit es distinto:

- ¿Cuánta información necesito para describir el estado de un qubit?
- ¿Cuánta información puedo envíar en un qubit?
- Entonces, ¿es tan bueno?


ARMO UNA SUPERPOSICIÓN
CUÁNTICA Y HAGO
TODAS LAS CUENTAS EN PARALELO
AL MEDIR EL RESULTADO
TE DA AL AZAR UNO SOLO
DE LOS RESULTADOS POSIBLES
imgflip.com

Stern-Gerlach revisited. Esta vez hacemos las cuentas.

Pizarra

Conmutadores

Definición: Conmutador

Sean A y B dos operadores. Se define el conmutador entre A y B como:

$$[A, B] = AB - BA$$

Definición: Operadores conmutativos

Decimos que dos operadores A y B conmutan si $[A, B] = 0$. Equivalentemente, si $AB = BA$.

Conmutadores

Definición: Conmutador

Sean A y B dos operadores. Se define el conmutador entre A y B como:

$$[A, B] = AB - BA$$

Definición: Operadores conmutativos

Decimos que dos operadores A y B conmutan si $[A, B] = 0$. Equivalentemente, si $AB = BA$.

Idea

Si dos observables tienen una base común de autovectores, entonces pueden medirse simultáneamente a partir de hacer una medición proyectiva en esa base. Esos observables se llaman *compatibles*.

Teorema de la compatibilidad

Dados dos observables A y B, son equivalentes:

1. A y B tienen una base común de autovectores.
2. A y B conmutan.

Demostración $(1 \to 2)$. Sea U la matriz que diagonaliza a A y B. Luego, $A = UD_1U^{-1}$ y $B = UD_2U^{-1}$. Luego:

$$\begin{aligned} [A, B] = & \quad AB - BA = UD_1U^{-1}UD_2U^{-1} - UD_2U^{-1}UD_1U^{-1} \\ = & \quad UD_1D_2U^{-1} - UD_2D_1U^{-1} = U(D_1D_2 - D_2D_1)U^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Teorema de la compatibilidad

Dados dos observables A y B, son equivalentes:

1. A y B tienen una base común de autovectores.
2. A y B conmutan.

Demostración ($1 \to 2$). Sea U la matriz que diagonaliza a A y B. Luego, $A = UD_1U^{-1}$ y $B = UD_2U^{-1}$. Luego:

$$\begin{aligned}[A, B] = &\quad AB - BA = UD_1U^{-1}UD_2U^{-1} - UD_2U^{-1}UD_1U^{-1} \\ = &\quad UD_1D_2U^{-1} - UD_2D_1U^{-1} = U(D_1D_2 - D_2D_1)U^{-1} = 0.\end{aligned}$$

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 1: A no tiene autovalores degenerados.
Sea $\{|\psi_n\rangle\}$ la base de autovectores de A tal que $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
Queremos ver que $|\psi_n\rangle$ son autovectores de B.

- $A(B|\psi_n\rangle) = BA|\psi_n\rangle = a_n B|\psi_n\rangle$.
- Es decir, $B|\psi_n\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Como A es no degenerado $B|\psi_n\rangle$ es colineal con $|\psi_n\rangle$, por lo tanto, $|\psi_n\rangle$ es autovector de B.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 1: A no tiene autovalores degenerados.
Sea $\{|\psi_n\rangle\}$ la base de autovectores de A tal que $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
Queremos ver que $|\psi_n\rangle$ son autovectores de B.

- $A(B|\psi_n\rangle) = BA|\psi_n\rangle = a_nB|\psi_n\rangle$.
- Es decir, $B|\psi_n\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Como A es no degenerado $B|\psi_n\rangle$ es colineal con $|\psi_n\rangle$, por lo tanto, $|\psi_n\rangle$ es autovector de B.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 1: A no tiene autovalores degenerados.
Sea $\{|\psi_n\rangle\}$ la base de autovectores de A tal que $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
Queremos ver que $|\psi_n\rangle$ son autovectores de B.

- $A(B|\psi_n\rangle) = BA|\psi_n\rangle = a_nB|\psi_n\rangle$.
- Es decir, $B|\psi_n\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Como A es no degenerado $B|\psi_n\rangle$ es colineal con $|\psi_n\rangle$, por lo tanto, $|\psi_n\rangle$ es autovector de B.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 1: A no tiene autovalores degenerados.
Sea $\{|\psi_n\rangle\}$ la base de autovectores de A tal que $A|\psi_n\rangle = a_n|\psi_n\rangle$.
Queremos ver que $|\psi_n\rangle$ son autovectores de B.

- $A(B|\psi_n\rangle) = BA|\psi_n\rangle = a_n B|\psi_n\rangle$.
- Es decir, $B|\psi_n\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Como A es no degenerado $B|\psi_n\rangle$ es colineal con $|\psi_n\rangle$, por lo tanto, $|\psi_n\rangle$ es autovector de B.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 2: A tiene autovalores degenerados.

- Supongamos a_n tiene grado de degeneración g. Sea $\{|\psi_{nr}\rangle\}$ una base ortonormal del autoespacio de A de autovalor a_n.
- Igual que antes, podemos ver que $B|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Expandimos $B|\psi_{nr}\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{rs}|\psi_{ns}\rangle$ (podemos hacerlo porque $B|\psi_{nr}\rangle$ vive en el autoespacio de autovalor a_n de A).
- Armo una combinación linear sobre todos los r: $B\sum_{r=1^g} d_r|\psi_{nr}\rangle = \sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g} d_r c_{rs}|\psi_{ns}\rangle$.
- Si $\sum_{r=1}^{g} d_r c_{rs} = b_n d_s, s = 1, 2, ..., g$, entonces $\sum_{r=1}^{g} d_r|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de B con autovalor b_n. Lo único que falta es resolver ese sistema de ecuaciones y listo.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 2: A tiene autovalores degenerados.

- Supongamos a_n tiene grado de degeneración g. Sea $\{|\psi_{nr}\rangle\}$ una base ortonormal del autoespacio de A de autovalor a_n.
- Igual que antes, podemos ver que $B|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Expandimos $B|\psi_{nr}\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{rs}|\psi_{ns}\rangle$ (podemos hacerlo porque $B|\psi_{nr}\rangle$ vive en el autoespacio de autovalor a_n de A).
- Armo una combinación linear sobre todos los r: $B\sum_{r=1^g} d_r|\psi_{nr}\rangle = \sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g} d_r c_{rs}|\psi_{ns}\rangle$.
- Si $\sum_{r=1}^{g} d_r c_{rs} = b_n d_s, s = 1, 2, ..., g$, entonces $\sum_{r=1}^{g} d_r|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de B con autovalor b_n. Lo único que falta es resolver ese sistema de ecuaciones y listo.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 2: A tiene autovalores degenerados.

- Supongamos a_n tiene grado de degeneración g. Sea $\{|\psi_{nr}\rangle\}$ una base ortonormal del autoespacio de A de autovalor a_n.
- Igual que antes, podemos ver que $B\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Expandimos $B\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$ (podemos hacerlo porque $B\,|\psi_{nr}\rangle$ vive en el autoespacio de autovalor a_n de A).
- Armo una combinación linear sobre todos los r: $B\sum_{r=1^g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{r=1}^{g}\sum_{s=1}^{g} d_r c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$.
- Si $\sum_{r=1}^{g} d_r c_{rs} = b_n d_s, s = 1, 2, ..., g$, entonces $\sum_{r=1}^{g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de B con autovalor b_n. Lo único que falta es resolver ese sistema de ecuaciones y listo.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 2: A tiene autovalores degenerados.

- Supongamos a_n tiene grado de degeneración g. Sea $\{|\psi_{nr}\rangle\}$ una base ortonormal del autoespacio de A de autovalor a_n.
- Igual que antes, podemos ver que $B\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Expandimos $B\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$ (podemos hacerlo porque $B\,|\psi_{nr}\rangle$ vive en el autoespacio de autovalor a_n de A).
- Armo una combinación linear sobre todos los r: $B \sum_{r=1^g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{r=1}^{g} \sum_{s=1}^{g} d_r c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$.
- Si $\sum_{r=1}^{g} d_r c_{rs} = b_n d_s, s = 1, 2, ..., g$, entonces $\sum_{r=1}^{g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de B con autovalor b_n. Lo único que falta es resolver ese sistema de ecuaciones y listo.

Teorema de la compatibilidad

Conmutan $\rightarrow$ base común de autovectores.
Caso 2: A tiene autovalores degenerados.

- Supongamos a_n tiene grado de degeneración g. Sea $\{|\psi_{nr}\rangle\}$ una base ortonormal del autoespacio de A de autovalor a_n.
- Igual que antes, podemos ver que $B\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de A con autovalor a_n.
- Expandimos $B\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{k=1}^{g} c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$ (podemos hacerlo porque $B\,|\psi_{nr}\rangle$ vive en el autoespacio de autovalor a_n de A).
- Armo una combinación linear sobre todos los r:
  $B \sum_{r=1^g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle = \sum_{r=1}^{g} \sum_{s=1}^{g} d_r c_{rs}\,|\psi_{ns}\rangle$.
- Si $\sum_{r=1}^{g} d_r c_{rs} = b_n d_s, s = 1, 2, ..., g$, entonces $\sum_{r=1}^{g} d_r\,|\psi_{nr}\rangle$ es autovector de B con autovalor b_n. Lo único que falta es resolver ese sistema de ecuaciones y listo.

Teorema de la compatibilidad

Dados dos observables A y B, son equivalentes:

1. A y B tienen una base común de autovectores.
2. A y B conmutan.

Esto caracteriza los observables que pueden medirse simultáneamente.

Conjuntos Completos de Observables que Conmutan

Definición: CCOC

Un conjunto de observables $\{A, B, C, ...\}$ es un CCOC si conmutan de a pares y el autoespacio común a todos los observables con autovalores $a, b, c, ...$ tiene dimensión 1, para todo $a, b, c, ...$ autovalores de $A, B, C, ...$ respectivamente.

Explicación

- Se pueden medir todos simultáneamente.
- Conocer los resultados de cada medición me indentifica unívocamente al estado, ya que el espacio asociado a todos esos autovalores tiene dimensión 1, y el estado está definido a menos de una fase global.

Conjuntos Completos de Observables que Conmutan

Definición: CCOC

Un conjunto de observables $\{A, B, C, ...\}$ es un CCOC si conmutan de a pares y el autoespacio común a todos los observables con autovalores $a, b, c, ...$ tiene dimensión 1, para todo $a, b, c, ...$ autovalores de $A, B, C, ...$ respectivamente.

Explicación

- Se pueden medir todos simultáneamente.
- Conocer los resultados de cada medición me indentifica unívocamente al estado, ya que el espacio asociado a todos esos autovalores tiene dimensión 1, y el estado está definido a menos de una fase global.

Conjuntos Completos de Observables que Conmutan

Definición: CCOC

Un conjunto de observables $\{A, B, C, \ldots\}$ es un CCOC si conmutan de a pares y el autoespacio común a todos los observables con autovalores $a, b, c, \ldots$ tiene dimensión 1, para todo $a, b, c, \ldots$ autovalores de $A, B, C, \ldots$ respectivamente.

Explicación

- Se pueden medir todos simultáneamente.
- Conocer los resultados de cada medición me indentifica unívocamente al estado, ya que el espacio asociado a todos esos autovalores tiene dimensión 1, y el estado está definido a menos de una fase global.

Ejercicio (Tarea)

Considere la base ortonormal $\{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ en dimensión 3 y los siguientes operadores:

$$
\begin{aligned}
A &= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| \\
B &= (|1\rangle + |2\rangle)(\langle 1| + \langle 2|) \\
C &= |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - i\,|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| \\
D &= |1\rangle\langle 1| + 2\,|2\rangle\langle 2|
\end{aligned}
$$

Decida cuáles de los siguientes conjuntos son CCOC:

a. $\{D\}$.
b. $\{A, B\}$.
c. $\{A, C\}$.
d. $\{A, D\}$.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Desviación estándar de una medición

Sea A un observable y $|\psi\rangle$ un estado. La desviación estándar de las mediciones de A al estado $|\psi\rangle$ está dada por:

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle$$

donde los valores medios se toman en el estado $|\psi\rangle$.

Explicación

Es una medida de qué tan desparramadas están las mediciones.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Desviación estándar de una medición

Sea A un observable y $|\psi\rangle$ un estado. La desviación estándar de las mediciones de A al estado $|\psi\rangle$ está dada por:

$$(\Delta A)^2 = \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle$$

donde los valores medios se toman en el estado $|\psi\rangle$.

Explicación

Es una medida de qué tan desparramadas están las mediciones.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Enunciado

Sean A y B dos observables y $|\psi\rangle$ un estado, entonces se cumple que

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|}{2}$$

Demostración

Tarea: Leer la demostración del libro de Nielsen y Chuang.

Consecuencia

Si A y B no conmutan y $|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle| > 0$, el estado no puede estar simultáneamente localizado en A y en B.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Enunciado

Sean A y B dos observables y $|\psi\rangle$ un estado, entonces se cumple que

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|}{2}$$

Demostración

Tarea: Leer la demostración del libro de Nielsen y Chuang.

Consecuencia

Si A y B no conmutan y $|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle| > 0$, el estado no puede estar simultáneamente localizado en A y en B.

Principio de incertidumbre de Heisenberg

Enunciado

Sean A y B dos observables y $|\psi\rangle$ un estado, entonces se cumple que

$$\Delta(A)\Delta(B) \geq \frac{|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle|}{2}$$

Demostración

Tarea: Leer la demostración del libro de Nielsen y Chuang.

Consecuencia

Si A y B no conmutan y $|\langle\psi| [A, B] |\psi\rangle| > 0$, el estado no puede estar simultáneamente localizado en A y en B.

Ejercicio

Ejercicio: Un "casi-contraejemplo"

Encuentre dos observables A y B que no conmuten y un estado $|\psi\rangle$ que sea simultáneamente autoestado de A y de B.

Vimos hoy

- Estados puros de sistemas cuánticos.
- Mediciones proyectivas.
- Observables.
- Compatibilidad y CCOC.
- Principio de Heisenberg.

Lo que viene

- Sistemas de muchos qubits.
- Producto tensorial.
- Entrelazamiento.

Y después, arrancan las aplicaciones.