Procesamiento Cuántico de Información

Ariel Bendersky[1]

[1]Departamento de Computación - FCEyN - Universidad de Buenos Aires

Clase 7

Clase 7

- Teleportación.
- Estados mixtos.
- Operadores de Pauli generalizados.

Teleportación - Requisitos

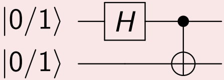
Base de Bell

Es una base del espacio de Hilbert de 2 qubit formada por estados máximamente entrelazados.

$$|\Phi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$|\Phi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$|\Psi+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$
$$|\Psi-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Teleportación - Requisitos

Preparación/medición de estados de la base de Bell



Ese circuito convierte la base computacional en la de Bell. Usándolo al revés, convierte la de Bell en la computacional. Para medir en la base de Bell, hay que convertirla en la computacional y medir.

Teleportación

Alice tiene un qubit en el estado $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ y se lo quiere mandar a Bob.

- Si conoce α y β, ¿cuánta información tiene que mandarle?
- ¿Si no conoce ni α ni β?
- ¿Qué pueden hacer?

Permitimos que Alice y Bob hayan compartido un recurso antes de elegir el estado a teleportar.

Teleportación

Protocolo:

- Alice y Bob comparten un estado máximamente entrelazado (antes de decidir qué estado a teleportar).
- Alice mide en la base de Bell en su parte del estado m.e. y el qubit a teleportar.
- Alice comunica a Bob el resultado de sus mediciones.
- Bob corrige.

Teleportación

$$\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= (\alpha|0_T\rangle + \beta|1_T\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_A0_B\rangle + |1_A1_B\rangle) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha|0_T0_A0_B\rangle + \alpha|0_T1_A1_B\rangle + \beta|1_T0_A0_B\rangle + \beta|1_T1_A1_B\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\alpha(|\Phi+_{TA}\rangle + |\Phi-_{TA}\rangle)|0_B\rangle + \alpha(|\Psi+_{TA}\rangle + |\Psi-_{TA}\rangle)|1_B\rangle + \\
&+ \beta(|\Psi+_{TA}\rangle - |\Psi-_{TA}\rangle)|0_B\rangle + \beta(|\Phi+_{TA}\rangle - |\Phi-_{TA}\rangle)|1_B\rangle)
\end{aligned}$$

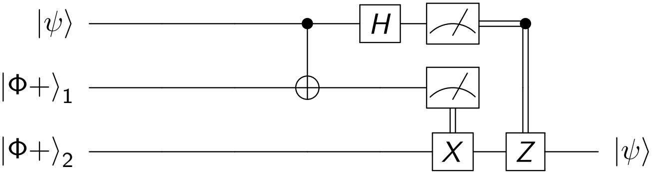
Por ahora no hicimos nada. Alice mide en la base de Bell TA. Si Alice obtiene al medir $|\Phi+\rangle$, entonces a Bob le queda $\alpha|0_B\rangle + \beta|1_B\rangle$. ¡Teleportaron $|\psi\rangle$! ¿Y si no?

Teleportación

Resultado de Alice	Estado de Bob	Corrección de Bob
$\|\Phi+\rangle$	$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	1
$\|\Phi-\rangle$	$\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle$	σ_z
$\|\Psi+\rangle$	$\alpha\|1\rangle + \beta\|0\rangle$	σ_x
$\|\Psi-\rangle$	$\alpha\|1\rangle - \beta\|0\rangle$	σ_y

Si Alice le manda a Bob dos bits clásicos (diciéndole el resultado de su medición), Bob puede reconstruir el estado $|\psi\rangle$ aplicando una compuerta local. Así teleportan el estado.

Teleportación - El circuito



Teleportación - Ejercicios

- ¿Qué pasa si el estado a teleportar estaba entrelazado con algún otro sistema en algún lugar del universo?
- ¿Cómo teleportamos muchos qubits en un estado entrelazado? Piensen teniendo en cuenta el ítem anterior.

Pizarra.

Estados mixtos

Estados mixtos.

Situación

Una caja da al azar estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$. ¿Cómo describe la situación un usuario de esa caja? ¿Y si la caja entrega los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$? Pizarra.

Situación

Tengo una caja negra, que la mitad de las veces me da un estado $|\psi\rangle$ y la otra mitad el $|\phi\rangle$. Tengo ignorancia clásica sobre qué estado tengo cada vez. ¿Cómo describo esa situación?

Estados mixtos

Esa *mezcla* se puede describir usando operadores en lugar de vectores:

$$\rho = \frac{1}{2} |\psi\rangle \langle\psi| + \frac{1}{2} |\phi\rangle |\phi\rangle .$$

Podemos reescribir todo el formalismo en término de matrices densidades en lugar de estados puros.
Una matriz densidad es un operador hermítico ($\rho^\dagger = \rho$), semidefinido positivo y de traza 1.

Estados mixtos

Por ser hermítico, es diagonalizable. Y por ser positivo, sus autovalores son positivos:

$$\rho = \sum_i q_i \left|\psi_i\right\rangle \left\langle\psi_i\right|$$

con $\sum_i q_i = 1$. Ahí se ve una descomposición en mezcla de estados puros.
Si uno realiza mediciones proyectivas Π_k las probabilidades están dadas por:

$$p_i = Tr(\rho \Pi_k) = \sum_i q_i \left\langle\psi_i\right| \Pi_k \left|\psi_i\right\rangle$$

Estados mixtos

El valor medio de un observable A es

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A) = \sum_i q_i \langle \psi_i | A | \psi_i \rangle$$

La evolución de un estado mixto por una unitaria U se escribe como

$$\rho' = U \rho U^\dagger$$

Estados mixtos

Cuando ρ tiene rango 1, se dice que es un estado puro. Caso contrario, es un estado mixto. Y cuando es un estado puro, todo esto se reduce al formalismo de vectores que vimos al principio.

Mezclas indistinguibles

Si mezclo mitad y mitad los estados $|0\rangle$ y $|1\rangle$, obtengo

$$\rho = \frac{I}{2}$$

donde I es la matriz identidad. Si mezclo los estados $|+\rangle$ y $|-\rangle$, también. Mezclas que dan la misma matriz densidad son indistinguibles. No hay ningún experimento que diga si tenía una u otra situación.

Operadores de Pauli one more time

Propiedades

- Los operadores de Pauli tienen traza nula.
- $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I\}$ son operadores ortogonales de a pares.
- $\sigma_k^2 = I$.
- Son hermíticos.

Los operadores de Pauli como base

$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I\}$ es una base del espacio real de operadores hermíticos y una base compleja del espacio de operadores.

Operadores de Pauli one more time

Propiedades

- Los operadores de Pauli tienen traza nula.
- $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I\}$ son operadores ortogonales de a pares.
- $\sigma_k^2 = I$.
- Son hermíticos.

Los operadores de Pauli como base

$\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, I\}$ es una base del espacio real de operadores hermíticos y una base compleja del espacio de operadores.

Caracterizando un estado mixto

El estado mixto de un qubit más general posible

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \sigma_k$$

con $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y $\sigma_0 = I$.

Midiendo un operador de Pauli

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\rho \sigma_j\right) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \sigma_k \sigma_j\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \mathrm{Tr} \sigma_k \sigma_j \\
&= \alpha_j
\end{aligned}$$

Caracterizando un estado mixto

El estado mixto de un qubit más general posible

$$\rho = \frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \sigma_k$$

con $\alpha_k \in \mathbb{R}$ y $\sigma_0 = I$.

Midiendo un operador de Pauli

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\left(\rho \sigma_j\right) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \sigma_k \sigma_j\right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k \in \{x,y,z,0\}} \alpha_k \mathrm{Tr} \sigma_k \sigma_j \\
&= \alpha_j
\end{aligned}$$

Caracterizando un estado mixto

Por lo tanto, medir $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ caracteriza completamente cualquier estado mixto de un solo qubit.

Corolario

Medir $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ caracteriza completamente cualquier estado *puro* de un solo qubit.

Recuerden un ejercicio de una de las primeras clases.

Caracterizando un estado mixto

Por lo tanto, medir $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ caracteriza completamente cualquier estado mixto de un solo qubit.

Corolario

Medir $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ caracteriza completamente cualquier estado *puro* de un solo qubit.

Recuerden un ejercicio de una de las primeras clases.

Operadores de Pauli generalizados

Definición

Se definen los operadores de Pauli generalizados para n qubits como los productos tensoriales de n operadores de Pauli (incluyendo la identidad).

Propiedad

- Forman una base ortogonal del espacio real de operadores hermíticos y del espacio complejo de operadores.
- Por lo tanto, medirlos caracteriza completamente un estado de n qubits.

Vimos hoy

- Teleportación.
- Estados mixtos.
- Operadores de Pauli generalizados.

La que viene

Tomografía de estados.