Cheat Sheet: Mecánica Cuántica y Álgebra Lineal

(Notación Bra-Ket Pura: Operadores actúan externamente)

Concepto Cuántico	**Representación Álgebra Lineal**	**Definiciones y Propiedades Clave**
	Espacios, Estados y Notación Bra-Ket	
Espacio de Hilbert ($\mathcal{H}$)	Espacio vectorial complejo con producto interno $\langle\cdot\|\cdot\rangle$.	Finito-dimensional (e.g., $\mathbb{C}^d$). Base ortonormal $\{\|i\rangle\}_{i=1}^d$. $\langle i\|j\rangle = \delta_{ij}$.
Ket $\|\psi\rangle$	Vector columna $\in \mathcal{H}$.	Representa un estado cuántico. $\|\psi\rangle = \sum_i c_i \|i\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix}$.
Bra $\langle\psi\|$	Vector fila, adjunto del ket: $\langle\psi\| = (\|\psi\rangle)^\dagger$.	Pertenece al espacio dual $\mathcal{H}^*$. $\langle\psi\| \Leftrightarrow (c_1^*, \ldots, c_d^*)$. $\dagger$: conjugación hermítica (transpuesta conjugada).
Producto Interno $\langle\phi\|\psi\rangle$	Producto escalar: $\langle\phi\| \|\psi\rangle$.	$\langle\phi\|\psi\rangle = \sum_i d_i^* c_i$. Propiedades: $\langle\phi\|\psi\rangle = \langle\psi\|\phi\rangle^*$. Lineal en el ket: $\langle\phi\|a\psi_1 + b\psi_2\rangle = a\langle\phi\|\psi_1\rangle + b\langle\phi\|\psi_2\rangle$. Anti-lineal en el bra: $\langle a\phi_1 + b\phi_2\| = a^*\langle\phi_1\| + b^*\langle\phi_2\|$.
Norma y Normalización	Norma al cuadrado: $\|\| \|\psi\rangle \|\|^2 = \langle\psi\|\psi\rangle$.	Estado físico puro $\|\psi\rangle$ normalizado: $\langle\psi\|\psi\rangle = 1$.
Producto Externo $\|\psi\rangle\langle\phi\|$	Matriz / Operador de Rango 1.	$A = \|\psi\rangle\langle\phi\|$. Actúa sobre kets: $A\|\chi\rangle = \|\psi\rangle(\langle\phi\| \|\chi\rangle)$. El término $(\langle\phi\| \|\chi\rangle)$ es un escalar complejo. Si $\langle\psi\|\psi\rangle = 1$, $P_\psi = \|\psi\rangle\langle\psi\|$ es proyector sobre $\|\psi\rangle$.
Qubit (1)	$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$. Base: $\|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.	Estado: $\|\psi\rangle = \alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$, $\|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 = 1$. Bra: $\langle\psi\| = \alpha^*\langle 0\| + \beta^*\langle 1\|$.
N Qubits	$\mathcal{H} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes N} \cong \mathbb{C}^{2^N}$. Base: $\|i_1 \ldots i_N\rangle = \|i_1\rangle \otimes \cdots \otimes \|i_N\rangle$.	Dimensión 2^N. Estado: $\|\psi\rangle = \sum c_{i_1..i_N} \|i_1 \ldots i_N\rangle$.
Estado Mezclado (Matriz Densidad ρ)	Operador Hermitiano ($\rho = \rho^\dagger$), Positivo semi-definido ($\rho \geq 0$), Traza unitaria ($\mathrm{Tr}(\rho) = 1$).	$\rho = \sum_i p_i \|\psi_i\rangle\langle\psi_i\|$ ($p_i \geq 0, \sum p_i = 1$). Estado puro $\|\psi\rangle$ es $\rho = \|\psi\rangle\langle\psi\|$. $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leq 1$ (= ssi puro).
	Operadores, Conjugación Hermítica y Evolución	
Operador Lineal A	Transformación lineal $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. Matriz cuadrada.	Actúa sobre kets por la izquierda: $\|\phi\rangle = A\|\psi\rangle$. Actúa sobre bras por la derecha (como $A^\dagger$ sobre el ket): $\langle\chi\| A$ significa $(\langle\chi\| A)\|\psi\rangle = \langle\chi\|(A\|\psi\rangle)$.
Operador Adjunto (Hermítico Conjugado) $A^\dagger$	Definido por $\langle\phi\|(A\psi)\rangle = \langle(A^\dagger\phi)\|\psi\rangle$ para todo $\|\psi\rangle, \|\phi\rangle$.	Matriz $(A^\dagger)_{ij} = (A_{ji})^*$. $(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$. $(A^\dagger)^\dagger = A$.
Elementos de Matriz de A	$A_{ij} = \langle i\| A \|j\rangle$.	Es el producto interno de $\|i\rangle$ con el resultado de aplicar A a $\|j\rangle$: $A_{ij} = \langle i\|(A\|j\rangle)\rangle$.
Operador Hermitiano (Auto-adjunto)	$A = A^\dagger$.	Matriz hermitiana ($A_{ij} = A_{ji}^*$). Eigenvalores reales. Eigenvectores ortogonales para λ distintas. Base ortonormal de eigenvectores. Representan **Observables**.
Operador Unitario U	$U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbb{I}$. ($U^{-1} = U^\dagger$).	Matriz unitaria. Preserva producto interno: $\langle(U\phi)\|(U\psi)\rangle = \langle\phi\|\psi\rangle$. Preserva normas: $\|\|U\|\psi\rangle\|\| = \|\| \|\psi\rangle \|\|$. Representa evolución cerrada, cambios de base.
Evolución Unitaria (Sistema Cerrado)	$\|\psi(t)\rangle = U(t)\|\psi(0)\rangle$. $\rho(t) = U(t)\rho(0)U(t)^\dagger$.	$U(t) = e^{-iHt/\hbar}$ (si H cte). H Hamiltoniano (Hermitiano). $U(t)$ Unitario. La ecuación de Schrödinger es $i\hbar\frac{d}{dt}\|\psi(t)\rangle = H\|\psi(t)\rangle$.

Continúa en la siguiente página...

Concepto Cuántico	Representación Álgebra Lineal	Definiciones y Propiedades Clave
Canal Cuántico (CPTP Map) Φ	Mapa lineal $\Phi(\cdot)$ sobre matrices densidad. $\rho' = \Phi(\rho)$.	Preserva Traza: $\mathrm{Tr}(\Phi(\rho)) = \mathrm{Tr}(\rho)$. Completamente Positivo. Kraus: $\Phi(\rho) = \sum_k E_k \rho E_k^\dagger$, con $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{I}$ (TP). Evolución abierta.
Mediciones		
Observable	Operador Hermitiano $A = A^\dagger$.	Descomposición espectral: $A = \sum_i \lambda_i P_i$. λ_i eigenvalores (resultados), P_i proyectores sobre eigenespacios.
Valor Esperado de A	$\langle A \rangle = \langle \psi \| A \|\psi\rangle$ (puro) ó $\langle A \rangle = \mathrm{Tr}(A\rho)$ (mixto).	$\langle \psi \| A \|\psi\rangle = \langle \psi \| (A \|\psi\rangle)$. Es el promedio de los resultados λ_i ponderado por sus probabilidades $p(i)$.
Medición Proyectiva	Conjunto de proyectores ortogonales $\{P_i\}$ ($P_i = P_i^\dagger$, $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$, $\sum_i P_i = \mathbb{I}$).	Asociada a un observable A. ▪ Probabilidad (resultado λ_i): $p(i) = \langle \psi \| P_i \|\psi\rangle = \|\|P_i \|\psi\rangle\|\|^2$ (puro) ó $p(i) = \mathrm{Tr}(P_i \rho)$ (mixto). ▪ Estado post-medición (λ_i): $\|\psi'\rangle = \frac{P_i \|\psi\rangle}{\sqrt{p(i)}}$ (puro) ó $\rho' = \frac{P_i \rho P_i}{\mathrm{Tr}(P_i \rho)}$ (mixto).
POVM	Conjunto de operadores $\{M_k\}$ ($M_k \geq 0$, $\sum_k M_k = \mathbb{I}$).	Medición generalizada. k indexa resultados. ▪ Probabilidad (resultado k): $p(k) = \mathrm{Tr}(M_k \rho)$. Si $\rho = \|\psi\rangle \langle \psi\|$, $p(k) = \langle \psi \| M_k \|\psi\rangle$. ▪ Estado post-medición: No único. Si $M_k = F_k^\dagger F_k$, posible estado $\rho_k = \frac{F_k \rho F_k^\dagger}{p(k)}$.
Ejemplos Importantes para 1 Qubit ($\mathbb{C}^2$)		
Matrices de Pauli ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)	Hermitianas y Unitarias. $\sigma_i^2 = \mathbb{I}$. $\sigma_x = \|0\rangle\langle 1\| + \|1\rangle\langle 0\|$, $\sigma_y = -i\|0\rangle\langle 1\| + i\|1\rangle\langle 0\|$, $\sigma_z = \|0\rangle\langle 0\| - \|1\rangle\langle 1\|$	Base para operadores 2×2 (junto con $\mathbb{I}$).
Esfera de Bloch	Visualización de estados de 1 qubit.	$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$, $\vec{r} = (\langle \sigma_x \rangle, \langle \sigma_y \rangle, \langle \sigma_z \rangle)$. $\langle \sigma_i \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \sigma_i)$. $\|\|\vec{r}\|\| \leq 1$. $\|\|\vec{r}\|\| = 1$ (puros, superficie), $\|\|\vec{r}\|\| < 1$ (mixtos, interior).