Ejercicio 5 ★

Demostrar en deducción natural que las siguientes fórmulas son teoremas **sin usar principios de razonamiento clásicos** salvo que se indique lo contrario. Recordemos que una fórmula σ es un teorema si y sólo si vale $\vdash \sigma$:

I. *Modus ponens* relativizado: $(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow \rho \Rightarrow \tau$

II. Reducción al absurdo: $(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho$

III. Introducción de la doble negación: $\rho \Rightarrow \neg\neg\rho$

IV. Eliminación de la triple negación: $\neg\neg\neg\rho \Rightarrow \neg\rho$

V. Contraposición: $(\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\neg\sigma \Rightarrow \neg\rho)$

VI. Adjunción: $((\rho \wedge \sigma) \Rightarrow \tau) \Leftrightarrow (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau)$

VII. de Morgan (I): $\neg(\rho \vee \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \wedge \neg\sigma)$

VIII. de Morgan (II): $\neg(\rho \wedge \sigma) \Leftrightarrow (\neg\rho \vee \neg\sigma)$. Para la dirección $\Rightarrow$ es necesario usar principios de razonamiento clásicos.

IX. Conmutatividad ($\wedge$): $(\rho \wedge \sigma) \Rightarrow (\sigma \wedge \rho)$

X. Asociatividad ($\wedge$): $((\rho \wedge \sigma) \wedge \tau) \Leftrightarrow (\rho \wedge (\sigma \wedge \tau))$

XI. Conmutatividad ($\vee$): $(\rho \vee \sigma) \Rightarrow (\sigma \vee \rho)$

XII. Asociatividad ($\vee$): $((\rho \vee \sigma) \vee \tau) \Leftrightarrow (\rho \vee (\sigma \vee \tau))$

¿Encuentra alguna relación entre teoremas de adjunción, asociatividad y conmutatividad con algunas de las propiedades demostradas en la práctica 2?

$$\dfrac{\Gamma \vdash \tau \Rightarrow \sigma \qquad \Gamma \vdash \tau}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e$$

si vale τ y tengo la $(\Rightarrow)$ comp. Puedo sacarla y quedarme con σ

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \Rightarrow (\sigma \Rightarrow \omega)}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{Ax}}{\Gamma \vdash (\sigma \Rightarrow \omega)} \Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \rho \Rightarrow \sigma}\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma \vdash \rho}\text{ax}}{\Gamma \vdash \sigma} \Rightarrow_e}{\Gamma \equiv (\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \omega), (\rho \Rightarrow \sigma), \rho \vdash \omega} \Rightarrow_e}{(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \omega), (\rho \Rightarrow \sigma) \vdash (\rho \Rightarrow \omega)} \Rightarrow_i}{(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \omega) \vdash (\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \omega)} \Rightarrow_i}{\underbrace{(\rho \Rightarrow \sigma \Rightarrow \omega)}_{p} \Rightarrow \underbrace{((\rho \Rightarrow \sigma) \Rightarrow (\rho \Rightarrow \omega))}_{q}} \Rightarrow_i$$

Esto lo podés hacer porque "intuís" que lo vas a poder demostrar con el contexto que tenés.

(2) Reducción al absurdo

No sé cómo seguir acá, pruebo otra cosa

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\rho \Rightarrow \bot), \rho \vdash \bot} \neg_e}{(\rho \Rightarrow \bot) \vdash \neg\rho} \neg_i}{(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho} \Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(\rho \Rightarrow \bot), \rho \vdash \rho \Rightarrow \bot}\text{ax} \quad \dfrac{}{(\rho \Rightarrow \bot), \rho \vdash \rho}\text{ax}}{(\rho \Rightarrow \bot), \rho \vdash \bot} \Rightarrow_e}{(\rho \Rightarrow \bot) \vdash \neg\rho} \neg_i}{(\rho \Rightarrow \bot) \Rightarrow \neg\rho} \Rightarrow_i$$

→ miro fijo lo que tengo

(3) Introducción de la doble negación

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p,\neg p\vdash p}\,ax \qquad \dfrac{}{p,\neg p\vdash p}\,ax}{p,\neg p\vdash\bot}\,\neg_e}{p\vdash\neg\neg p}\,\neg_i}{p\Rightarrow\neg\neg p}\,\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p\vdash p}\,ax}{p\vdash\neg\neg p}\,\neg\neg_i}{p\Rightarrow\neg\neg p}\,\Rightarrow_i$$

regla derivada.

(4) Elim triple negación

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg p, p\vdash p}\,ax \qquad \dfrac{}{\neg\neg\neg p, p\vdash \neg p}}{\neg\neg\neg p, p\vdash\bot}\,\neg_e}{\neg\neg\neg p\vdash\neg p}\,\neg_i}{\neg\neg\neg p\Rightarrow\neg p}\,\Rightarrow_i$$

esto es lo que ya tenías.

No conviene agarrarlo por acá

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg\neg\neg p, p\vdash p}\,ax}{\neg\neg\neg p, p\vdash\neg\neg p}\,\neg\neg_i \qquad \dfrac{}{\neg\neg\neg p, p\vdash\neg\neg\neg p}\,ax}{\neg\neg\neg p, p\vdash\bot}\,\neg_e}{\neg\neg\neg p\vdash\neg p}\,\neg_i}{\neg\neg\neg p\Rightarrow\neg p}\,\Rightarrow_i$$

full galerazo.

El sentido que le encuentro es que $\neg e$ es:

$$\dfrac{\Gamma\vdash p' \quad \Gamma\vdash\neg p'}{\Gamma\vdash\bot}\,\neg_e$$

Y acá queremos ver que $\neg\neg\neg p$ es $\neg p'$

$\Rightarrow$ No queda otra que p' sea $\neg\neg p$

(Probalo, si no, entrás en loop)

(V) Contraposición

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash(p\Rightarrow q)}\,ax \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash p}\,ax}{\Gamma\equiv p,(p\Rightarrow q),\neg q\vdash q}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{}{p,p\Rightarrow q,\neg q\vdash\neg q}\,ax}{p,(p\Rightarrow q),\neg q\vdash\bot}\,\neg_e}{p\Rightarrow q,\neg q\vdash\neg p}\,\neg_i}{p\Rightarrow q\vdash\neg q\Rightarrow\neg p}\,\Rightarrow_i}{p\Rightarrow q\Rightarrow(\neg q\Rightarrow\neg p)}\,\Rightarrow_i$$

(VI) Adjunción $(p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau \iff (p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)$

$$((p\wedge\sigma)\Rightarrow t)\Rightarrow(p\Rightarrow\sigma\Rightarrow t) \quad (1)$$
$$(p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)\Rightarrow((p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau) \quad (2)$$

(1) $\Gamma=\{(p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau,\ p,\ \sigma\}$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash(p\wedge\sigma)\Rightarrow t}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash p}\,\text{ax} \quad \dfrac{}{\Gamma\vdash\sigma}\,\text{ax}}{\Gamma\vdash(p\wedge\sigma)}\,\wedge_i}{\dfrac{\Gamma,p,\sigma\vdash\tau}{\dfrac{\Gamma,p\vdash\sigma\Rightarrow\tau}{\dfrac{\Gamma\equiv(p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau\vdash p\Rightarrow(\sigma\Rightarrow\tau)}{(p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau\Rightarrow(p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)}\,\Rightarrow_i}\,\Rightarrow_i}\,\Rightarrow_i}$$

wii salió

(2) $\Gamma=\{(p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau),\ (p\wedge\sigma),\ \sigma\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau}\,\text{ax} \qquad \dfrac{\Gamma\vdash p\wedge\sigma}{\Gamma\vdash p}\,\wedge_{e_1}}{\Gamma\vdash\sigma\Rightarrow\tau}\,\Rightarrow_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash p\wedge\sigma}\,\text{ax}}{\Gamma\vdash\sigma}\,\wedge_{e_2}}{\dfrac{\Gamma\vdash\tau}{\dfrac{\Gamma\vdash(p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau}{(p\Rightarrow\sigma\Rightarrow\tau)\Rightarrow((p\wedge\sigma)\Rightarrow\tau)}\,\Rightarrow_i}\,\Rightarrow_i}\,\Rightarrow_e$$

Fui modificando Γ en el nivel.

Luego vale la $\iff$.

Moraleja: El chiste de las reglas es introducir ecuaciones que sé que puedo demostrar.

(VII) De Morgan (I):

(1) $\neg(p \vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

(2) $\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)$

(1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg(p\vee q), p \vdash p}\,ax}{\neg(p\vee q), p \vdash (p \vee q)}\,\vee_{i_1} \quad \dfrac{}{\neg(p\vee q), p \vdash \neg(p\vee q)}\,ax}{\neg(p\vee q), p \vdash \bot}\,\neg e$$

$$\dfrac{\neg(p\vee q), p \vdash \bot}{\neg(p\vee q) \vdash \neg p}\,\neg_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p\vee q), q \vdash q}{\neg(p\vee q), q \vdash (p\vee q)}\,\vee_{i_2} \quad \dfrac{}{\neg(p\vee q), q \vdash \neg(p\vee q)}\,ax}{\neg(p\vee q), q \vdash \bot}$$

$$\dfrac{\neg(p\vee q), q \vdash \bot}{\neg(p\vee q) \vdash \neg q}\,\neg_i$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg(p\vee q) \vdash \neg p \quad \neg(p\vee q) \vdash \neg q}{\neg(p\vee q) \vdash \neg p \wedge \neg q}\,\wedge_i}{\neg(p\vee q) \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)}\,\Rightarrow_i$$

(2)

$$\dfrac{\Gamma, p \vdash \neg p \wedge \neg q}{\Gamma, p \vdash \neg p}\,\wedge e_1 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, p \vdash p}\,ax \quad \Gamma, p \vdash \neg p}{\Gamma, p \vdash \bot}\,\neg e$$

$$\dfrac{\Gamma, q \vdash \neg p \wedge \neg q}{\Gamma, q \vdash \neg q}\,\wedge e_2 \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma, q \vdash q}\,ax \quad \Gamma, q \vdash \neg q}{\Gamma, q \vdash \bot}\,\neg e$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash p \vee q}\,ax \quad \Gamma, p \vdash \bot \quad \Gamma, q \vdash \bot}{(\neg p \wedge \neg q), (p \vee q) \vdash \bot}\,\vee e}{\neg p \wedge \neg q \vdash \neg(p \vee q)}\,\neg_i}{\neg p \wedge \neg q \Rightarrow \neg(p \vee q)}\,\Rightarrow_i$$

$\Gamma \equiv \neg p \wedge \neg q,$
$p \vee q$

(VIII) De Morgan II

Para $(\Rightarrow)$ hay que usar raz. clásicos

(1) $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q$

(2) $\neg p \vee \neg q \Rightarrow \neg(p \wedge q)$

(1)

No, por acá no es.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(p\wedge q), p \vdash p \quad \dfrac{}{\neg(p\wedge q), p \vdash \neg p}}{\neg(p\wedge q), p \vdash \bot}\,\neg e}{\neg(p\wedge q) \vdash \neg p}\,\neg i}{\neg(p\wedge q) \vdash \neg p \vee \neg q}\,\vee_i}{\neg(p\wedge q) \Rightarrow \neg p \vee \neg q}\,\Rightarrow_i$$

$$\dfrac{\neg(p\wedge q)\vdash \neg p\vee\neg q \qquad \Gamma,\neg p\vdash \neg p\vee \neg q \qquad \Gamma,\neg q\vdash \neg p\vee\neg q}{\dfrac{\neg(p\wedge q)\vdash \neg p\vee\neg q}{\neg(p\wedge q)\Rightarrow \neg p\vee\neg q}\ \Rightarrow_i}\ \vee_e$$

volví a lo mismo (mismo Γ e hipótesis)

por acá tampoco

Recuerdo:

El chiste de las reglas es: Dado un Γ, ponete creativa y tirá las reglas que ves a ojo que podés demostrar con lo que tenés.

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash p}\,ax \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash q}\,ax}{\Gamma\vdash (p\wedge q)}\ \wedge_i \qquad \dfrac{}{\Gamma\vdash\neg(p\wedge q)}\,ax$$

$$\dfrac{\Gamma\vdash (p\wedge q) \qquad \Gamma\vdash\neg(p\wedge q)}{\neg(p\wedge q), p, q\vdash\bot}\ \neg_e$$

$$\dfrac{\neg(p\wedge q), p, q\vdash\bot}{\neg(p\wedge q), p\vdash\neg q}\ \neg_i$$

$$\dfrac{\neg(p\wedge q), p\vdash\neg q}{\neg(p\wedge q), p\vdash\neg p\vee\neg q}\ \vee_{i_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg(p\wedge q),\neg p\vdash\neg p}\,ax}{\neg(p\wedge q),\neg p\vdash\neg p\vee\neg q}\ \vee_{i_1}$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\neg(p\wedge q)\vdash p\wedge\neg p}\,\text{Lem} \qquad \neg(p\wedge q), p\vdash\neg p\vee\neg q \qquad \neg(p\wedge q),\neg p\vdash\neg p\vee\neg q}{\dfrac{\neg(p\wedge q)\vdash\neg p\vee\neg q}{\neg(p\wedge q)\Rightarrow\neg p\vee\neg q}\ \Rightarrow_i}\ \vee_e$$

se puede usar cualq. regla que de abs $\bot$

(2) qvq $\neg p\vee\neg q \Rightarrow \neg(p\wedge q)$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma'\vdash\neg p}\,ax \qquad \dfrac{\Gamma'\vdash p\wedge q}{\Gamma'\vdash p}\,\wedge_{e_1}}{\Gamma'\equiv\Gamma,\neg p\vdash\bot}\ \neg_e \qquad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma''\vdash\neg q}\,ax \qquad \dfrac{\Gamma''\vdash p\wedge q}{\Gamma''\vdash q}\,\wedge_{e_2}}{\Gamma''\equiv\Gamma,\neg q\vdash\bot}\ \neg_e$$

$$\dfrac{\dfrac{}{\Gamma\vdash\neg p\vee\neg q}\,ax \qquad \Gamma,\neg p\vdash\bot \qquad \Gamma,\neg q\vdash\bot}{\Gamma\equiv\neg p\vee\neg q, p\wedge q\vdash\bot}\ \vee_e$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg p\vee\neg q, p\wedge q\vdash\bot}{\neg p\vee\neg q\vdash\neg(p\wedge q)}\ \neg_i}{\neg p\vee\neg q\Rightarrow\neg(p\wedge q)}\ \Rightarrow_i$$

(1x) Conmutatividad ($\wedge$)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p\wedge q\vdash p\wedge q}\,ax}{p\wedge q\vdash q}\,\wedge_{e_2} \qquad \dfrac{\dfrac{}{p\wedge q\vdash p\wedge q}\,ax}{p\wedge q\vdash p}\,\wedge_{e_1}}{\dfrac{p\wedge q\vdash q\wedge p}{p\wedge q\Rightarrow q\wedge p}\ \Rightarrow_i}\ \wedge_i$$

(X) Asociatividad ($\wedge$)

(1) $((p \wedge q) \wedge r) \Rightarrow (p \wedge (q \wedge r))$

(2) $p \wedge (q \wedge r) \Rightarrow (p \wedge q) \wedge r$

(1)

1. $(p \wedge q) \wedge r \vdash (p \wedge q) \wedge r$ — ax
2. $(p \wedge q) \wedge r \vdash (p \wedge q)$ — $\wedge e_1$
3. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p$ — $\wedge e_1$
4. $(p \wedge q) \wedge r \vdash (p \wedge q) \wedge r$ — ax
5. $(p \wedge q) \wedge r \vdash (p \wedge q)$ — $\wedge e_1$
6. $(p \wedge q) \wedge r \vdash q$ — $\wedge e_2$
7. $(p \wedge q) \wedge r \vdash (p \wedge q) \wedge r$ — ax
8. $(p \wedge q) \wedge r \vdash r$ — $\wedge e_2$
9. $(p \wedge q) \wedge r \vdash q \wedge r$ — $\wedge_i$
10. $(p \wedge q) \wedge r \vdash p \wedge (q \wedge r)$ — $\wedge_i$
11. $(p \wedge q) \wedge r \Rightarrow p \wedge (q \wedge r)$ — $\Rightarrow_i$

(XI) Conmutatividad ($\vee$)

1. $p \vee q \vdash p \vee q$ — ax
2. $p \vee q, p \vdash p$ — ax
3. $\Gamma \vdash p \vee q$ — ax
4. $\Gamma, q, p \vdash p$ — ax
5. $\Gamma, q, p \vdash p$ — ax
6. $\Gamma \equiv p \vee q, q \vdash p$ — $\vee_e$
7. $p \vee q \vdash p$ — $\vee_e$
8. $p \vee q \vdash q \vee p$ — $\vee_{i_2}$
9. $p \vee q \Rightarrow q \vee p$ — $\Rightarrow_i$

trust
the
process ✧

(XII) Asociatividad ($\vee$)

(1) $(p \vee q) \vee r \Rightarrow p \vee (q \vee r)$

(2) $p \vee (q \vee r) \Rightarrow (p \vee q) \vee r$

(1)

1. $(p \vee q) \vee r \vdash (p \vee q) \vee r$ — ax
2. $\Gamma, (p \vee q) \vdash p \vee q$ — ax
3. $\Gamma, r \vdash r$ — ax
4. $\Gamma \equiv (p \vee q) \vee r \vdash r$ — $\vee e$
5. $(p \vee q) \vee r \vdash q \vee r$ — $\vee_{i_2}$
6. $(p \vee q) \vee r \vdash p \vee (q \vee r)$ — $\vee_{i_2}$
7. $(p \vee q) \vee r \Rightarrow p \vee (q \vee r)$ — $\Rightarrow_i$

(2)

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$p\vee(q\vee r)\vdash p\vee(q\vee r)$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$p\vee(q\vee r), p\vdash p$}
\RightLabel{$\vee_{i_1}$}
\UnaryInfC{$p\vee(q\vee r), p\vdash p\vee q$}
\RightLabel{$\vee_{i_1}$}
\UnaryInfC{$\Gamma, p\vdash (p\vee q)\vee r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'\vdash q\vee r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma''\vdash q$}
\RightLabel{$\vee_{i_2}$}
\UnaryInfC{$\Gamma''\vdash (p\vee q)$}
\RightLabel{$\vee_{i_1}$}
\UnaryInfC{$\Gamma', q\vdash (p\vee q)\vee r$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\Gamma'''\vdash r$}
\RightLabel{$\vee_{i_2}$}
\UnaryInfC{$\Gamma', r\vdash (p\vee q)\vee r$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma, (q\vee r)\vdash (p\vee q)\vee r$}
\RightLabel{$\vee_e$}
\TrinaryInfC{$\Gamma = p\vee(q\vee r)\vdash (p\vee q)\vee r$}
\RightLabel{$\Rightarrow_i$}
\UnaryInfC{$p\vee(q\vee r)\Rightarrow (p\vee q)\vee r$}
\end{prooftree}
$$

$\Gamma' = p\vee(q\vee r),$
$(q\vee r)$

$\Gamma'' = p\vee(q\vee r)$
$(q\vee r)$
q

$\Gamma''' = p\vee(q\vee r)$
$(q\vee r)\ ,\ r$